

國立交通大學

機械工程學系

博士論文

管道熱傳增益之動態分析研究

Investigation of dynamic analysis of the heat transfer
enhancement in the channel flow

研究生：黃玠超

指導教授：傅武雄 博士

中華民國一百零一年七月

管道熱傳增益之動態分析研究

研究生：黃玠超

指導教授：傅武雄 博士

國立交通大學機械工程學系

摘要

隨著工程上發展的需要，高溫壁面熱傳效應對機械的影響越益受到重視，而元件其性能及可靠度的提升將取決於其散熱技術，為了要達到最佳的熱傳增益，瞭解並分析高溫壁面其對流熱傳的問題，勢必為必要的研究課題。因此本計畫首先研究關於一具有高溫壁面的三維管道可壓縮流，在其高溫壁面上加裝一移動薄板，探討薄板往復運動於強制對流及混合對流下的現象，造成高溫壁面上溫度與速度邊界層不斷的被移除與重新生成，因此可大幅的提升熱傳效率。此外，並研究關於三維垂直管道自然對流的問題，探討在高雷利數時從層流轉變成不穩定之現象，以及對於高溫壁面熱傳效率的影響，之後藉此基礎分析研究三維管道純自然對流誘導衍生成紊流之問題，以期能提升熱傳效率，提高對實際工業應用之範圍。

Investigation of dynamic analysis of the heat transfer enhancement in the channel flow

Student : Jieh-Chau Huang

Advisor : Wu-Shung Fu

Department of Mechanical Engineering

National Chiao Tung University

Abstract

With the improvement of the technology, the effect of heat transfer of a heat surface is getting more seriously concern in industry. The promotion of reliability and performance is dependent on the technology of heat transfer enhancement. So the problem of heat transfer of a heat surface in a convection flow is a very important issue. First, this study investigates the problem of three-dimensional compressible convection flow with insertion of a moving block numerically. The phenomena of interaction between the moving block and channel flow are observed. The enhancement of heat transfer is remarkable due to destroying the boundary layers by the moving block. Besides, the varied processes of natural convection in three-dimensional vertical channels of single heated wall with different aspect ratios and Rayleigh numbers from stable to unstable situation are investigated numerically. The phenomena from laminar to unstable transition and the relationship between Rayleigh number and heat transfer rate are observed. The results are expected to be useful for the future study about turbulence flow induced by pure natural convection. Therefore, this study is a foundation potentially for the heat transfer enhancement of practical industry.

誌謝

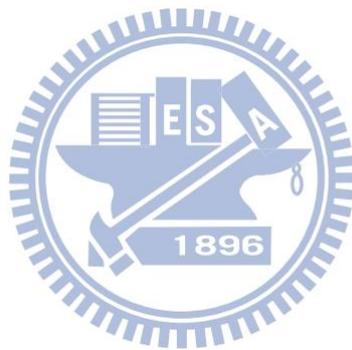
從大學、碩士班一直到博士班，在交大的十一年間，度過了非常充實且多采多姿的生活。由衷地感謝指導老師傅武雄教授在這些年來給予課業和論文上的指導，以及在生活各方面上的關心與照顧，在此謹致最高的謝忱與敬意。同時也感謝機械系諸位師長在課業方面的指導。另外要特別感謝博士班學長連信宏與李崇綱，在研究計算上的協助以及指導，還有實驗室學弟妹們在各方面的協助和精神上的鼓勵讓我可以順利完成論文。更要感謝父母親在人生道路上一路的支持與幫助，無論在心靈或是物質上的投資，從不間斷地給予耐心與支持，讓我毫無後顧之憂專心在學業上。最後感謝朋友、同學以及親友們的鼓勵與關心，今日才能順利完成學業。



目錄

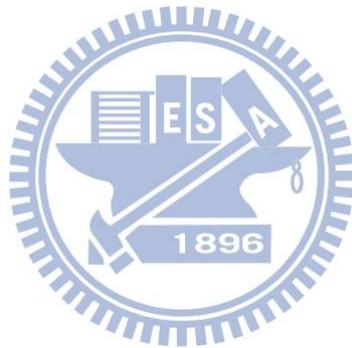
摘要.....	i
英文摘要.....	ii
誌謝.....	iii
目錄.....	iv
表目錄.....	vi
圖目錄.....	vii
符號表.....	x
一、緒論.....	1
二、物理模式.....	7
2-1 三維水平管道加裝移動平板強制對流物理模式.....	7
2-2 三維垂直管道加裝移動平板混合對流物理模式.....	11
2-3 三維垂直管道自然對流物理模式.....	15
三、數值方法.....	18
3-1 統御方程式.....	19
3-2 Roe scheme.....	22
3-3 MUSCL 法.....	29
3-4 Preconditioning 法.....	31
3-5 LUSGS 法.....	39
3-6 非反射性邊界.....	41
3-7 座標轉換.....	45
3-8 沉浸邊界法.....	48
四、結果與討論.....	50
4-1 三維管道加裝移動平板強制對流.....	50
4-2 三維垂直管道加裝移動平板混合對流.....	82

4-3 三維垂直管道自然對流	102
五、結論.....	119
參考文獻.....	121



表目錄

表 3-1 精度係數值	30
表 4-1 本研究模擬之兩個不同雷諾數下各兩種薄板速度的案例	56
表 4-2 不同雷諾數與薄板移動之熱傳增益比較	81
表 4-3 本研究在 $\Delta T = 12\text{K}$ 的模擬案例	86
表 4-4 本研究在 $\Delta T = 100\text{K}$ 的模擬案例	86
表 4-5 不同浮慣比與薄板移動之熱傳增益比較 $En (\Delta T = 100\text{K})$	101
表 4-6 不同浮慣比與薄板移動之熱傳增益比較 $En (\Delta T = 12\text{K})$	101
表 4-7 三維垂直管道自然對流案例	106



圖目錄

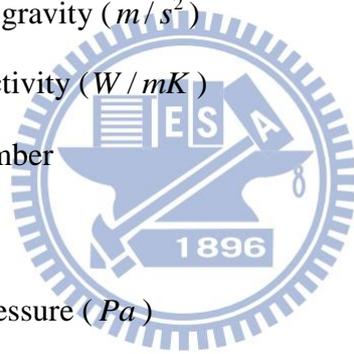
圖 2-1 三維水平管道加裝移動平板物理模式	9
圖 2-2 鄰近邊界網格示意	10
圖 2-3 三維垂直管道加裝移動平板物理模式	14
圖 2-4 三維垂直管道自然對流物理模式	17
圖 3-1 黎曼問題特徵值結構圖	28
圖 3-2 差分示意圖	36
圖 3-3 L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 與 L_5 於管道兩端的方向性示意圖	44
圖 4-1 網格測試圖	57
圖 4-2 解析解與數值解之比較	58
圖 4-3 雷諾數 200 平均紐塞數隨時間周期變化示意圖	59
圖 4-4 雷諾數 600 平均紐塞數隨時間周期變化示意圖	60
圖 4-5 x_2x_3 平面流場示意圖.(雷諾數=200, $V_b=1/4$).....	61
圖 4-6 x_2x_3 平面溫度場示意圖.(雷諾數=200, $V_b=1/4$).....	62
圖 4-7 局部紐塞數示意圖.(雷諾數=200, $V_b=1/4$).....	63
圖 4-8 x_2x_3 平面流場示意圖.(雷諾數=200, $V_b=1/4$).....	64
圖 4-9 x_2x_3 平面溫度場示意圖.(雷諾數=200, $V_b=1/4$).....	65
圖 4-10 局部紐塞數示意圖.(雷諾數=200, $V_b=1/4$).....	66
圖 4-11 x_2x_3 平面流場示意圖.(雷諾數=200, $V_b=1/4$).....	67
圖 4-12 x_2x_3 平面溫度場示意圖.(雷諾數=200, $V_b=1/4$).....	68
圖 4-13 局部紐塞數示意圖.(雷諾數=200, $V_b=1/4$).....	69
圖 4-14 x_2x_3 平面流場示意圖.(雷諾數=600, $V_b=1/2$).....	70

圖 4-15 x_2x_3 平面溫度場示意圖.(雷諾數=600, $V_b=1/2$).....	71
圖 4-16 局部紐塞數示意圖.(雷諾數=600, $V_b=1/2$)	72
圖 4-17 x_2x_3 平面流場示意圖.(雷諾數=600, $V_b=1/2$)	73
圖 4-18 x_2x_3 平面溫度場示意圖.(雷諾數=600, $V_b=1/2$).....	74
圖 4-19 局部紐塞數示意圖.(雷諾數=600, $V_b=1/2$)	75
圖 4-20 x_2x_3 平面流場示意圖.(雷諾數=600, $V_b=1/2$)	76
圖 4-21 x_2x_3 平面溫度場示意圖.(雷諾數=600, $V_b=1/2$)	77
圖 4-22 局部紐塞數示意圖.(雷諾數=600, $V_b=1/2$)	78
圖 4-23 雷諾數 200 下流動方向加熱壁面中央處之平均局部紐塞數比較圖	79
圖 4-24 雷諾數 600 下流動方向加熱壁面中央處之平均局部紐塞數比較圖	80
圖 4-25 不同浮慣比下的管道中央 x_1x_2 平面溫度場比較圖	87
圖 4-26 x_2x_3 平面流場示意圖($Gr/Re^2 = 0.11$, $\Delta T = 12K$).....	88
圖 4-27 x_2x_3 平面溫度場示意圖($Gr/Re^2 = 0.11$, $\Delta T = 12K$).....	89
圖 4-28 局部紐塞數示意圖($Gr/Re^2 = 0.11$, $\Delta T = 12K$).....	90
圖 4-29 x_2x_3 平面流場示意圖($Gr/Re^2 = 0.11$, $\Delta T = 12K$).....	91
圖 4-30 x_2x_3 平面溫度場示意圖($Gr/Re^2 = 0.11$, $\Delta T = 12K$).....	92
圖 4-31 局部紐塞數示意圖($Gr/Re^2 = 0.11$, $\Delta T = 12K$).....	93
圖 4-32 x_2x_3 平面流場示意圖($Gr/Re^2 = 11.5$, $\Delta T = 12K$).....	94
圖 4-33 x_2x_3 平面溫度場示意圖($Gr/Re^2 = 11.5$, $\Delta T = 12K$).....	95
圖 4-34 局部紐塞數示意圖($Gr/Re^2 = 11.5$, $\Delta T = 12K$).....	96
圖 4-35 x_2x_3 平面流場示意圖($Gr/Re^2 = 11.5$, $\Delta T = 12K$).....	97
圖 4-36 x_2x_3 平面溫度場示意圖($Gr/Re^2 = 11.5$, $\Delta T = 12K$).....	98
圖 4-37 局部紐塞數示意圖($Gr/Re^2 = 11.5$, $\Delta T = 12K$).....	99

圖 4-38 x_l 流動方向加熱壁面中央處之平均局部紐塞數比較圖	100
圖 4-39 $R=3.75$ 、 $Ra_x = 1.35 \times 10^8$ 、 $t=6.21$ 秒時流線圖與等溫線分布圖	107
圖 4-40 $R=3.75$ 、 $Ra_x = 1.35 \times 10^8$ 、 $t=6.27$ 秒時流線圖與等溫線分布圖	108
圖 4-41 $R=3.75$ 、 $Ra_x = 1.35 \times 10^8$ 、 $t=6.35$ 秒時流線圖與等溫線分布圖	109
圖 4-42 $R=3.75$ 、 $Ra_x = 1.35 \times 10^8$ 、 $t=6.4$ 秒時流線圖與等溫線分布圖	110
圖 4-43 $R=3.75$ 、 $Ra_x = 1.35 \times 10^8$ 、 $t=6.45$ 秒時流線圖與等溫線分布圖	111
圖 4-44 $R=3.75$ 、 $Ra_x = 1.35 \times 10^8$ 加熱壁面上 ABC 三點隨時間變化之局部紐塞數	112
圖 4-45 $R=2.75$ 、 $Ra_x = 5.35 \times 10^7$ 、 $t=6.15$ 秒時流線圖與等溫線分布圖	113
圖 4-46 $R=2.75$ 、 $Ra_x = 5.35 \times 10^7$ 、 $t=6.2$ 秒時流線圖與等溫線分布圖	114
圖 4-47 $R=2.75$ 、 $Ra_x = 5.35 \times 10^7$ 、 $t=6.25$ 秒時流線圖與等溫線分布圖	115
圖 4-48 $R=2.75$ 、 $Ra_x = 5.35 \times 10^7$ 、 $t=6.3$ 秒時流線圖與等溫線分布圖	116
圖 4-49 $R=2.75$ 、 $Ra_x = 5.35 \times 10^7$ 加熱壁面上 ABC 三點隨時間變化之局部紐塞數	117
圖 4-50 $R=2.75$ 、 $Ra_x = 1.34 \times 10^7$ 流線圖與等溫線分布圖	118
圖 4-51 $R=2.75$ 、 $Ra_x = 1.34 \times 10^7$ 加熱壁面上 ABC 三點隨時間變化之局部紐塞數	119
圖 4-52 三個模擬案例隨時間變化平均紐塞數比較圖	120
圖 4-53 等效雷利數 Ra^* 與平均紐塞數之關係圖	121

Nomenclature

w_1	dimensional width of the channel (m)
w_2	dimensional height of the channel (m)
w_3	dimensional width of the slender block (m)
l_1	dimensional length of the channel (m)
l_2	dimensional length of the slender block (m)
l_3	the distance between the inlet and the heat surface (m)
l_4	the distance between the outlet and the heat surface (m)
h	dimensional height of the slender block (m)
g	acceleration of gravity (m/s^2)
k	thermal conductivity (W/mK)
M	local Mach number
P	pressure (Pa)
P_0	surrounding pressure (Pa)
Re	Reynold number
R	Aspect Ration
Gr	Grashof number
R	gas constant ($J/kg/K$)
Ra	Rayleigh number
Ra_x	Rayleigh number defined in Eq. (4-16)
Ra^*	Rayleigh number defined in Eq. (4-17)
t	time (s)
t^*	Dimensionless time
T	temperature (K)

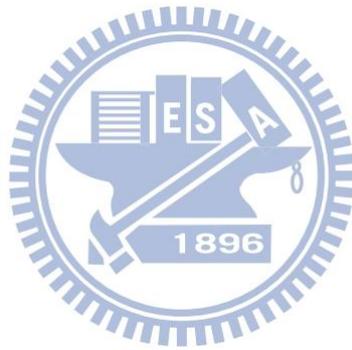


T_0	temperature of surroundings (K)
T_h	temperature of heat surface (K)
x, y, z	Cartesian coordinates (m)
X, Y, Z	dimensionless Cartesian coordinates
u, v, w	velocities in x_1, x_2 and x_3 directions (m/s)
v_b	moving velocity of the slender block (m/s)
U, V, W	dimensionless velocities in X, Y and Z directions
V_b	dimensionless velocity of the slender block
H	dimensionless height of the slender block
Nu_x	local Nusselt number defined in Eq. (4-17)
Nu_{x_1}	local Nusselt number defined in Eq. (4-1)
\overline{Nu}	average Nusselt number defined in Eq. (4-3)
\overline{Nu}_{x_1}	average Nusselt number defined in Eq. (4-4)
(Nu)	average Nusselt number defined in Eq. (4-5)
$(\overline{Nu})_t$	average Nusselt number defined in Eq. (4-12)

Greek symbols

ρ	density (kg/m^3)
ρ_0	surrounding density (kg/m^3)
μ	viscosity ($N \cdot s/m^2$)
μ_0	Surrounding viscosity ($N \cdot s/m^2$)

γ	specific heat ratio
θ	dimensionless temperature
ξ, η, ζ	curvilinear coordinates



第一章 緒論

近年來為因應許多工程上的需要，機械元件所需承受的熱負載不斷增加，造成元件損害與故障，故高溫壁面的熱傳效應問題及對機構的影響也一再被研究。此外隨著消費性電子產品蓬勃發展，高功率電子元件的發展與半導體製程技術的進步，目前許多電子產品皆走向高效能、微小化的趨勢，致使電子元件舉凡電腦 CPU，顯示卡，筆記型電腦或智慧型手機等其封裝元件之發熱密度愈來愈高，其單位熱通量亦相對地不斷增加，對性能及可靠度等方面均造成不容忽視之影響。因此在未來電子產品的發展趨勢走向更輕薄短小之際，其性能及可靠度的提升將取決於其散熱技術。而為了要達到最佳的熱傳增益，瞭解並分析高溫壁面其對流熱傳的問題，勢必為必要的研究課題。一般正常電腦 CPU 在執行程式下溫度大約為攝氏 50~60 度之間，超過攝氏八十度則電腦會基於保護狀態，自動關閉系統，長期下來內部零組件壽命將會減短。因此為了維持元件於額定溫度下運作，必須將此密集的熱量能有效散逸於系統外之環境。傳統的散熱片大多數是由鋁合金所製造，其熱傳導性只屬於中等程度，對於目前元件發熱功率越來越高的情況，逐漸有捉襟見肘的情形發生，目前電子元件的發熱量達到每平方公分數十瓦的等級，且接點可承受的溫度約在攝氏 150 度以下。因此如何改良空氣對流的方式以及增加對流所能散逸之熱量成為研究的主要課題之一。

混合對流的研究種類以浮力方向及強制對流流場之速度方向亦分為三種形式。一種為浮力方向與流場之速度方向垂直的交錯流(Cross flow)，Najam 等人[1]以數值方法研究二維水平管道混合對流，在管道中佈上加熱塊體，藉以探討不同雷利數、雷諾數及加熱體高度對流場之影響。Kitamura 等人[2]以實驗探討加熱圓柱誘導對流之現象，以及紐塞數和分離點位置與加熱體熱通量的關係。而另一種浮力方向與流場之速度方向相同稱為助流(Aiding flow)，Gau 等人[3]以實驗研究垂直管道中的浮力助流與熱傳現象，觀察到迴流現象及浮力影響參數等關係。Desrayaud 等人[4]研究層流混合對流在浮慣比大於 1 的現象，發現隨著雷諾數的

上升其迴流現象會越不明顯。第三種為浮力方向與流場之速度方向相反的逆流 (Opposing flow)，Martinez-Suastegui[5] 等人以數值方法研究暫態二維垂直管道層流混合對流之現象，其結果分析了浮慣比與雷諾數對流場之影響及紐塞數分布。Joye 等人[6]在一垂直圓管實驗中，觀察浮力參數與熱傳增益之相互關係，以及雷諾數與紐塞數的關係。

過去有多篇文獻提出各種不同的方法來增加高溫壁面的熱傳效能。Bergles[7,8]將常見的增加熱傳效率方式，詳細地討論與整理並將其略分為兩大類：一為不需另外作功的被動方式，另一類為需外加能量的主動式方法。Hwang 與 Liou[9]以實驗的方法探討在壁面加裝有縫隙的肋狀紊流產生器，對方形管道流的熱傳與熱阻的影響。結果顯示縫隙狀肋狀紊流產生器可避免壁面產生熱點，同時對熱傳效能有所增益。Park 等[10]研究不同形狀之熱交換管內插入結構對提高熱傳效率的影響。結果顯示圓錐形盤管與肋狀的插入結構約可提高 30%的熱傳效率。Iida 等[11]在液體中加入鋁金屬微粒，當液體發生沸騰現象時，鋁金屬微粒也被液化，可將熱傳效率提高十倍。Fusegi[12]數值分析有肋狀突起管道中之振動對向流，當提高振動對黏性的相對強度時，可顯著的提高熱傳效率。Sitter 等[13]實驗探討高強度音場對重力場與微重力場下池沸騰的影響，發現音場有助於提高熱傳效率。Liu[14] 在通道內設凸起物作往復運動時混合對流之熱傳研究，可得知於往復設凸起物的垂直通道中往復運動可使流場的熱傳效率提昇至靜止通道的 2~3 倍。Wang[15] 在其研究中探討了往復運動的薄塊對噴流中壁面熱傳影響之研究，可發現往復運動的薄塊對於壁面邊界層不斷的破壞與生成，達成提升熱傳效率的目的。Wu[16]以數值分析研究二維含加熱方塊之管道中，置入薄板最多可提昇 39.5%的紐塞數。Dogan [17]利用實驗探討混合對流中，在水平矩形管道內設置散熱片，研究在不同散熱片高度及散熱片間隔對於熱傳效果之影響，可得知在散熱片高度越高，可增加熱傳面積，且不易使散熱片內較高溫流體從尖端流進另一片散熱片，達到增加熱傳之效果。楊[18]探討在二維、不可壓縮流中，混合對流對傾斜平板管道內設置橫向散熱薄板熱傳之研究，由研究可得知，在最

理想的長寬比下，熱傳量伴隨著雷諾數之增加。Hamouche[19]探討二維、不可壓縮混合對流中，在水平管道內設置突出的熱源方塊，探討空氣冷卻之效果，由研究可得知，增加分離區之距離可增加熱傳量。Dogan[20]探討在混合對流中，水平管道內設置分離的多個熱源在管道上方及下方之熱傳研究，可得知將電子元件設置在底部最前及最後列可得到最大的熱傳效率。Youssef[21]討論在層流混合對流中，浮力向上或向下對熱傳及質傳的影響，由研究中可得知，在重力與流動方向相反的流動中，存在壁面與進口流體的高溫差，會產生流體不穩定性及紊流產生。

比較上述各種增加熱傳量的方法，不論是被動式或是主動式方法增加熱傳效率似乎都會受到限制。主要的原因是流場在熱傳面上生成的速度邊界層與溫度邊界層阻礙了熱量傳出。當流體流經高溫壁面時，壁面上的邊界層有速度邊界層與溫度邊界層，所謂速度邊界層，是指當連續體之黏性流體以一接近速度流經固體物體時，在雷諾數較高的情況下，流體在固體表面附近受到黏性的影響，形成速度變化非常激烈且厚度極薄的區域，在此區域內，流體速度從壁面的零漸次變化到此區域的邊緣速度。而所謂溫度邊界層則是流體受壁面高溫影響，在壁面產生熱傳，其靠近壁面的溫度逐漸變化至與壁面溫度相同的區域。在溫度邊界層中，流體的溫度變化和緩，溫度梯度較小。根據熱傳導之傅利葉定律，在溫度梯度較小的情況下，熱傳量也較小。因此，溫度邊界層的存在將限制壁面高溫所能傳出之熱傳量。而為了大幅提高高溫壁面的熱傳效率，就必須移除壁面上的溫度邊界層，使得高溫壁面與低溫流體直接接觸，進而增加高溫壁面與低溫流體的溫度梯度，達成增加壁面熱傳量的目的。

本研究的工作流體將考慮可壓縮流，因此密度隨著壓力與溫度的變化而改變，對於實際工業界中的應用較為廣泛與實際。而在薄版移動的同時，流體受到薄版的牽引，使溫度與速度場隨薄版移動而產生變化，流體與移動物體相互影響的問題，屬於動態的移動邊界問題，又因為在處理實際散熱問題時，工作流體多為可壓縮流，因此在本研究中的工作流體不論高速或低速皆視為可壓縮流，以增加應

用範圍。Fu[22]發展出黏性流場之全域速度場數值解法，此種方法最大的困難處在於計算低速流場時，由於可壓縮流必須遵守 Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)條件，因此在低速流體時，受限於流體變化傳遞速度(約等於聲速)，時階將會極小。在此種情況造成計算過程將耗費極大的時間與整體過低的計算效率。為了改善此缺點，本研究在計算可壓縮流時加入 Preconditioning 法，藉此讓流體即使在低速時，也可有較高的效率與良好的收斂性。在計算此種低馬赫數流體的方面，目前有密度基底法(Density-based method)與壓力基底法(Pressure-based method)。本研究以密度基底法為主。而在密度基底法中又以 Turkel[23]提出 Preconditioning 法最為廣泛應用，不僅可同時應用在可壓縮流與不可壓縮流中，更可以讓程式的收斂性增加。而本研究在做數值計算時，主要是利用到網格之間的物理量，因此用到 MUSCL 法來處理網格間的物理量，在計算流場時空間部分以 ROE 法[24]來計算出非黏滯性項的通量，黏滯性項部分則採用二階中央插分，重力項則不使用 Boussinesq approximation，由 Gray[25]可得知，在冷熱表面溫差小於 30K 時才可適用，但在現實工業應用中，例如：在半導體製程，蒸鍍、乾燥過程中，往往溫差高達上百度，故較不適用；在時階部份為了能夠使程式能夠加速收斂，因此採用 LUSGS implicit[26]方法；而當在程式中加入 Preconditioning 法時，同時破壞了統御方程式，為了彌補此一缺點，必須加入 Artificial time term 來修正方程式；最後利用 Dual time stepping[27]來計算暫態的物理量。在靠近壁面的地方，為了增加程式的收斂效果以及更清楚的觀察壁面效應，對於壁面網格做加密的處理；而在處理移動邊界的問題時，本研究採用 Immersed boundary[28]中的移動邊界方法，此方法在處理複雜外型及移動邊界的問題十分的有效率。

此外，在處理複雜的流體力學問題時需要大量的計算過程，如何利用多核心處理器來提升運算速度已為目前的發展主流。多核心處理器對於單一執行緒在平行運算方面，並無法提升計算速度；若利用多執行緒的程式架構，可透過不同核心來同時計算，達到提升計算效率、節省計算時間之目的；但是多執行緒的程式在撰寫、編輯上，也都比單一執行緒的程式架構要複雜。本文採用 OpenMP 方

法來提升運算速度。常見的平行運算方法有 MPI 和 OpenMP 兩種方法；MPI (Message Passing Interface) 是一種分散式記憶體(distributing memory)的觀念，而 OpenMP (Open Multi-Processing) 為共享式記憶體(sharing memory)的觀念，而兩種方法各有優缺點。MPI 在撰寫程式上面相較於 OpenMP 較容易，但計算速度較慢且會受限於網路效率，在設備擴充方面較便宜；反之 OpenMP 在程式撰寫上較困難，但計算速度快且不會受限於網路效率，在設備擴充方面需較大的經費。因此本程式利用 OpenMP 來進行平行化運算，效率為原程式的四倍，減少計算時間及成本。

故本研究首先研究關於一具有高溫壁面的三維管道流，在其高溫壁面上加裝一薄平板，此薄平板直接與高溫壁面接觸，並且在高溫壁面上做與主流方向垂直之往復運動。受到薄平板移動的影響，薄平板前進方向前的流體受到推擠而往薄板移動方向移動，使的薄板前方的溫度與速度邊界層被破壞。而在薄板後方的流體，則受到薄板的牽引而向薄板流動，在填補因薄版移動所產生的空間的同時，低溫的流體將與高溫的壁面直接接觸，因而產生最大的溫度梯度，並且同時在壁面上生成新的溫度與速度邊界層，熱傳量因此增加。由於薄版在高溫壁面上不斷的做往復運動，高溫壁面上的溫度與速度邊界層不斷的被移除與重新生成，因此可大幅的提升熱傳效率，相對於過往文獻中的增加熱傳方法大都是增加噴流上的熱傳量，此種利用往復薄板增加熱傳的方法更能增加下游區的熱傳。

此外，本研究將考慮有限長度管道自然對流衍生不穩定之熱傳問題，此類研究在現今文獻中少有論述，過去大都為討論強制對流下的紊流模擬，由於為強制對流，故能一開始得知流量而給予特定擾動進行循環計算，其結果只能類似於穩態紊流流場，然而對於自然對流慢慢轉變不穩定進而成紊流之過程，無法預先得知由於氣體受熱其密度與壓力變化所導致的流量，亦即無法確定誘導成紊流的驅動力，即無法使用前述方法計算。過去常以擾動流場利用紊流現象增加熱傳效益，而大多的數值模擬研究皆是以周期性邊界加以些許紊流強度反覆計算得到一個紊流流場，並非真實物理尺寸下的紊流模擬，若考慮自然對流狀態下的物理模型，

無法預先得知因流場變化而產生的進口流量，此種方法即無法模擬出自然對流從層流轉變成紊流之過程，故研究此類自然對流誘導紊流之研究亦為重要方向之一。為了提高實際應用範圍，為了瞭解上述自然對流誘導不穩定之熱傳問題，將研究模擬垂直管道自然對流誘導紊流的問題，並對其從層流轉變成不穩定過程中的機制加以分析，以期日後能了解紊流流場對熱傳的影響並加以改善。



第二章 物理模式

2-1、三維水平管道加裝移動平板強制對流物理模式：

圖2-1為一水平管道在底面部份加熱管道中加裝一往復移動薄板之物理模式圖。一長度為 l_1 ，寬度為 w_1 ，高度為 w_2 的方形管道，溫度 T_0 的冷卻空氣以等速度 u_0 由管道入口噴入，在管道的底部ABDC部份區域為高溫壁面，對管道內的空氣加熱，進行熱交換；在高溫壁面上有一長度為 l_2 ，寬度為 w_3 ，高度為 h 的絕熱薄板。當時間為零時，薄板靜止在加熱底面的3/4位置(p_r)，也就是薄板做往復運動的起點，待流場穩定後，薄板開始以小於進口速度的移動速度 v_b 往加熱底面1/4的位置(p_l)，也就是薄板移動的終點移動。當薄板移動又回到最初的起始位置時即完成一週期的運動。本研究即當薄板在管道內做往復運動時，對管道內的熱場及流場進行分析。 x_1 方向為streamwise的方向、 x_2 為垂直壁面方向， x_3 為spanwise的方向。 u_1 、 u_2 、 u_3 分別為其所對應的速度。而為了有效的增進熱傳效率以及讓管道內的流場更容易成為完全發展流，在管道的長度以及寬度上需要一定的比例，進口速度與薄板移動速度也有一定的關係，本研究選定管道長度為寬度的15倍長，以確保其出口流體為完全發展流形式；而薄板的移動速度則為進口速度的1/4、1/2，而薄板的移動速度不可大於入口流體速度，這是為了要使入口進來之流體能順利往出口流動，並且達到完全發展流的條件。

本研究選擇層流流場作為模擬流場，流場作以下假設：

1. 可壓縮流，空氣密度會隨溫度與壓力而改變。
2. 工作流體為空氣，假設為理想氣體。流體性質為牛頓流體(Newtonian fluid)，黏滯係數為等方向性。
3. 忽略重力效應影響。
4. 考慮溫度變化對流體所造成的影響。

此外除了加熱壁面外，其餘壁面皆考慮無滑移條件(No-slip condition)，其表示如下：

$$\begin{aligned}
P(i, 0, k) &= P(i, 1, k) \\
u_1(i, 0, k) &= -u_1(i, 1, k) \\
u_2(i, 0, k) &= -u_2(i, 1, k) \\
u_3(i, 0, k) &= -u_3(i, 1, k) \\
T(i, 0, k) &= T(i, 1, k)
\end{aligned} \tag{2-1}$$

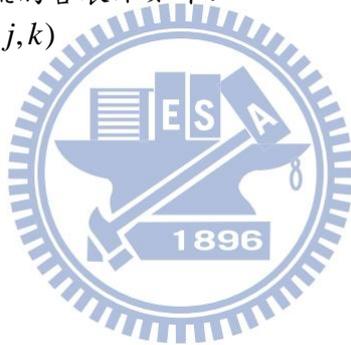
而加熱壁面的邊界條件如下列所示：

$$\begin{aligned}
P(i, 0, k) &= P(i, 1, k) \\
u_1(i, 0, k) &= -u_1(i, 1, k) \\
u_2(i, 0, k) &= -u_2(i, 1, k) \\
u_3(i, 0, k) &= -u_3(i, 1, k) \\
T(i, 0, k) &= 2T_h - T(i, 1, k)
\end{aligned} \tag{2-2}$$

其中 T_h 為加熱壁面的溫度。如圖 2-2 所示，0 指的是 ghost cell，1 為最接近壁面的網格。

進口等速及出口完全發展流的各表示如下：

$$\begin{aligned}
P(0, j, k) &= 2P(1, j, k) - P(2, j, k) \\
u_1(0, j, k) &= u_0 \\
u_2(0, j, k) &= 0 \\
u_3(0, j, k) &= 0 \\
T(0, j, k) &= T_0
\end{aligned} \tag{2-3}$$



$$\begin{aligned}
P(nx+1, j, k) &= P_{am} \\
u_1(nx+1, j, k) &= u_1(nx, j, k) \\
u_2(nx+1, j, k) &= u_2(nx, j, k) \\
u_3(nx+1, j, k) &= u_3(nx, j, k) \\
T(nx+1, j, k) &= T(nx, j, k)
\end{aligned} \tag{2-4}$$

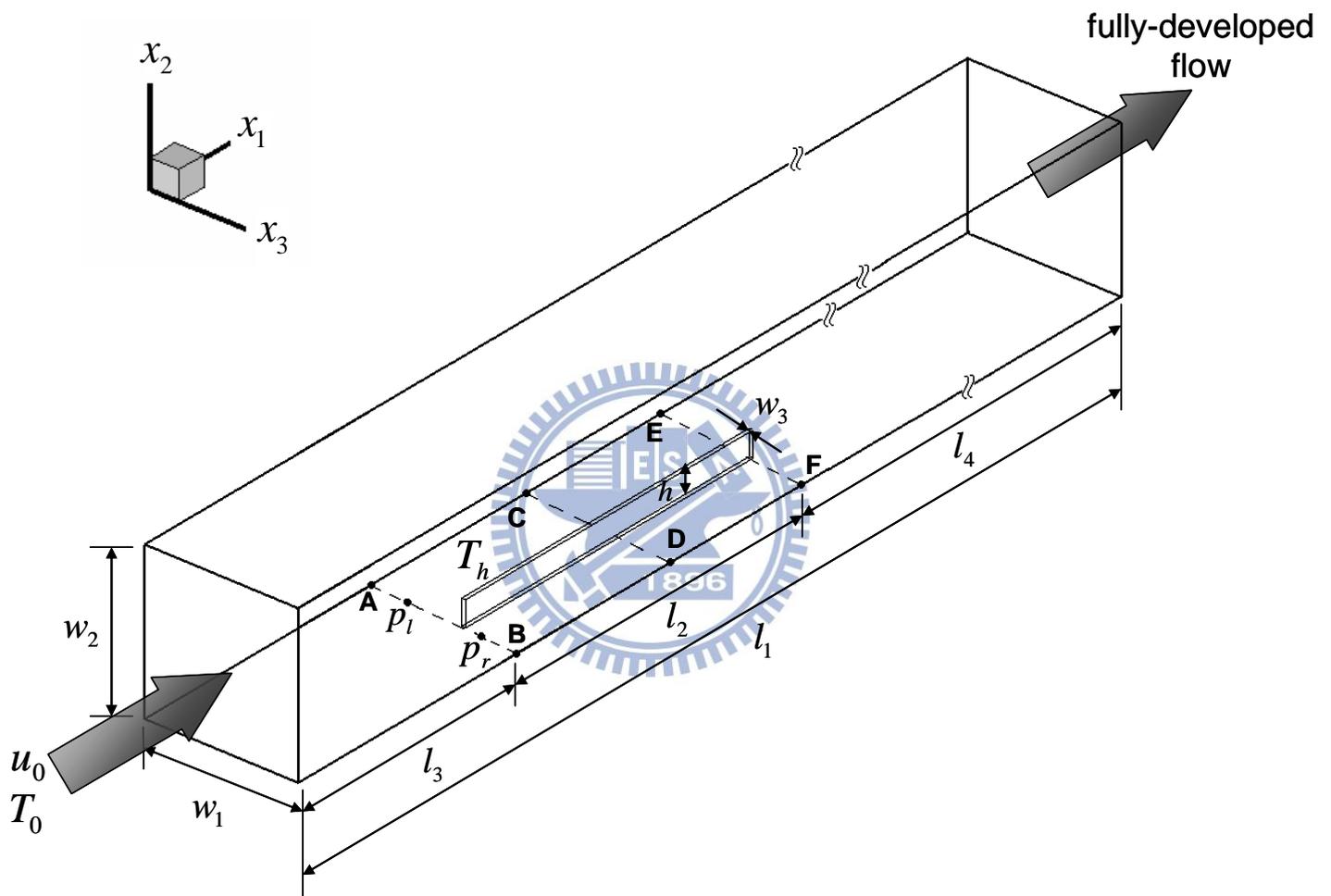


圖 2-1 三維水平管道加裝移動平板物理模式

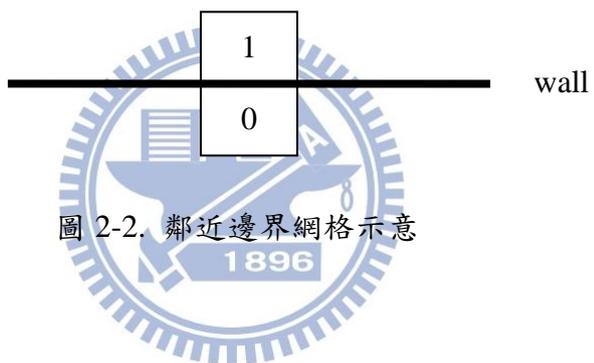


圖 2-2. 鄰近邊界網格示意

2-2、三維垂直管道加裝移動平板混合對流物理模式：

圖 2-3 為一垂直管道在底面部份加熱管道中加裝一往復移動薄板之物理模式圖。在管道的底部 ABDC 部份區域為高溫壁面，對管道內的空氣加熱，進行熱交換；在高溫壁面上有一長度為 l_2 ，寬度為 w_3 ，高度為 h 的絕熱薄板。當時間為零時，薄板靜止在加熱底面的 3/4 位置 (p_r)，也就是薄板做往復運動的起點，待流場穩定後，薄板開始以小於進口速度的移動速度 v_b 往加熱底面 1/4 的位置 (p_l)，也就是薄板移動的終點移動。當薄板移動又回到最初的起始位置時即完成一週期的運動。本研究即當薄板在管道內做往復運動時，對管道內的熱場及流場進行分析。 x_1 方向為 streamwise 的方向、 x_2 為垂直壁面方向， x_3 為 spanwise 的方向。 u_1 、 u_2 、 u_3 分別為其所對應的速度。而為了有效的增進熱傳效率以及讓管道內的流場更容易成為完全發展流，在管道的長度以及寬度上需要一定的比例，進口速度與薄板移動速度也有一定的關係，本研究選定管道長度為寬度的 15 倍長，以確保其出口流體為完全發展流形式；而薄板的移動速度則為進口速度的 1/4、1/2，而薄板的移動速度不可大於入口流體速度，這是為了要使入口進來之流體能順利往出口流動，並且達到完全發展流的條件。

圖 2-3 為一垂直管道在底面部份加熱管道中加裝一往復移動薄板之物理模式圖。如圖 2-3 以及圖 2-4 所示，一長度為 l_1 ，寬度為 w_1 ，高度為 w_2 的方形管道，溫度 T_0 的冷卻空氣以等速度 u_0 由管道入口噴入，在管道的底部則部份區域為高溫壁面 T_h ，對管道內的空氣加熱，進行熱交換；在高溫壁面上有一長度為 l_2 ，寬度為 w_3 ，高度為 h 的絕熱薄板。當時間為零時，薄板靜止在加熱底面的 3/4 位置 (P_s)，也就是薄板做往復運動的起點，待流場穩定後，薄板開始以小於進口速度的移動速度 v_b 往加熱底面 1/4 的位置 (P_e)，也就是薄板移動的終點移動。當薄板移動又回到最初的起始位置時即完成一週期的運動。本研究即當薄板在管道內做往復運動時，對管道內的熱場及流場進行分析。 x 方向為 streamwise 的方向、 y 為垂直壁面方向最後 z 為 spanwise 的方向。 u 、 v 、 w 分別為其所對應的速度。而為了有效的增進熱傳效率以及要熱管道內的熱流場更容易成為完全發展流，在

管道的長度以及寬度上需要一定的比例，進口速度與薄板移動速度也有一定的關係，本研究選定管道長度為寬度的 15 倍長，以確保其出口流體為完全發展流形式；而薄板的移動速度則為進口速度的 1/4、1/2，要注意薄板的移動速度不可大於入口流體速度，這是為了要使入口進來之流體能順利往出口流動，並且達到完全發展流的條件。物理尺寸比例如下：

$$\begin{aligned}
 w_2 / w_1 &= 1 \\
 w_3 / w_1 &= 0.05 \\
 h / w_1 &= 0.5 \\
 l_1 / w_1 &= 15 \\
 l_2 / w_1 = l_3 / w_1 &= 2.25 \\
 l_4 &= 10.5
 \end{aligned} \tag{2-5}$$

本研究選擇層流流場作為模擬流場，流場作以下假設：

1. 可壓縮流，空氣密度會隨溫度與壓力而改變。
2. 工作流體為空氣，假設為理想氣體。流體性質為牛頓流體(Newtonian fluid)，黏滯係數為等方向性。
3. 考慮溫度變化對流體所造成的影響。

此外除了加熱壁面外，其餘壁面皆考慮無滑移條件(No-slip condition)，其表示如下：

$$\begin{aligned}
 P(i, 0, k) &= P(i, 1, k) \\
 u_1(i, 0, k) &= -u_1(i, 1, k) \\
 u_2(i, 0, k) &= -u_2(i, 1, k) \\
 u_3(i, 0, k) &= -u_3(i, 1, k) \\
 T(i, 0, k) &= T(i, 1, k)
 \end{aligned} \tag{2-6}$$

而加熱壁面的邊界條件如下列所示：

$$\begin{aligned}
 P(i, 0, k) &= P(i, 1, k) \\
 u_1(i, 0, k) &= -u_1(i, 1, k) \\
 u_2(i, 0, k) &= -u_2(i, 1, k) \\
 u_3(i, 0, k) &= -u_3(i, 1, k) \\
 T(i, 0, k) &= 2T_h - T(i, 1, k)
 \end{aligned} \tag{2-7}$$

其中 T_h 為加熱壁面的溫度。如

進口等速及出口完全發展流的各表示如下：

$$P(0, j, k) = 2P(1, j, k) - P(2, j, k)$$

$$u_1(0, j, k) = u_0$$

$$u_2(0, j, k) = 0$$

$$u_3(0, j, k) = 0$$

$$T(0, j, k) = T_0$$

(2-8)

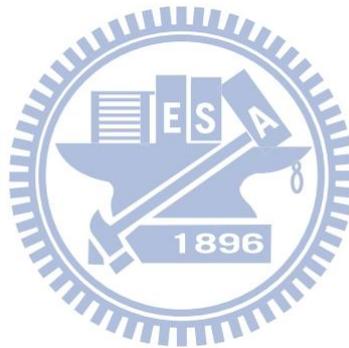
$$P(nx+1, j, k) = P_{am}$$

$$u_1(nx+1, j, k) = u_1(nx, j, k)$$

$$u_2(nx+1, j, k) = u_2(nx, j, k)$$

$$u_3(nx+1, j, k) = u_3(nx, j, k)$$

$$T(nx+1, j, k) = T(nx, j, k)$$



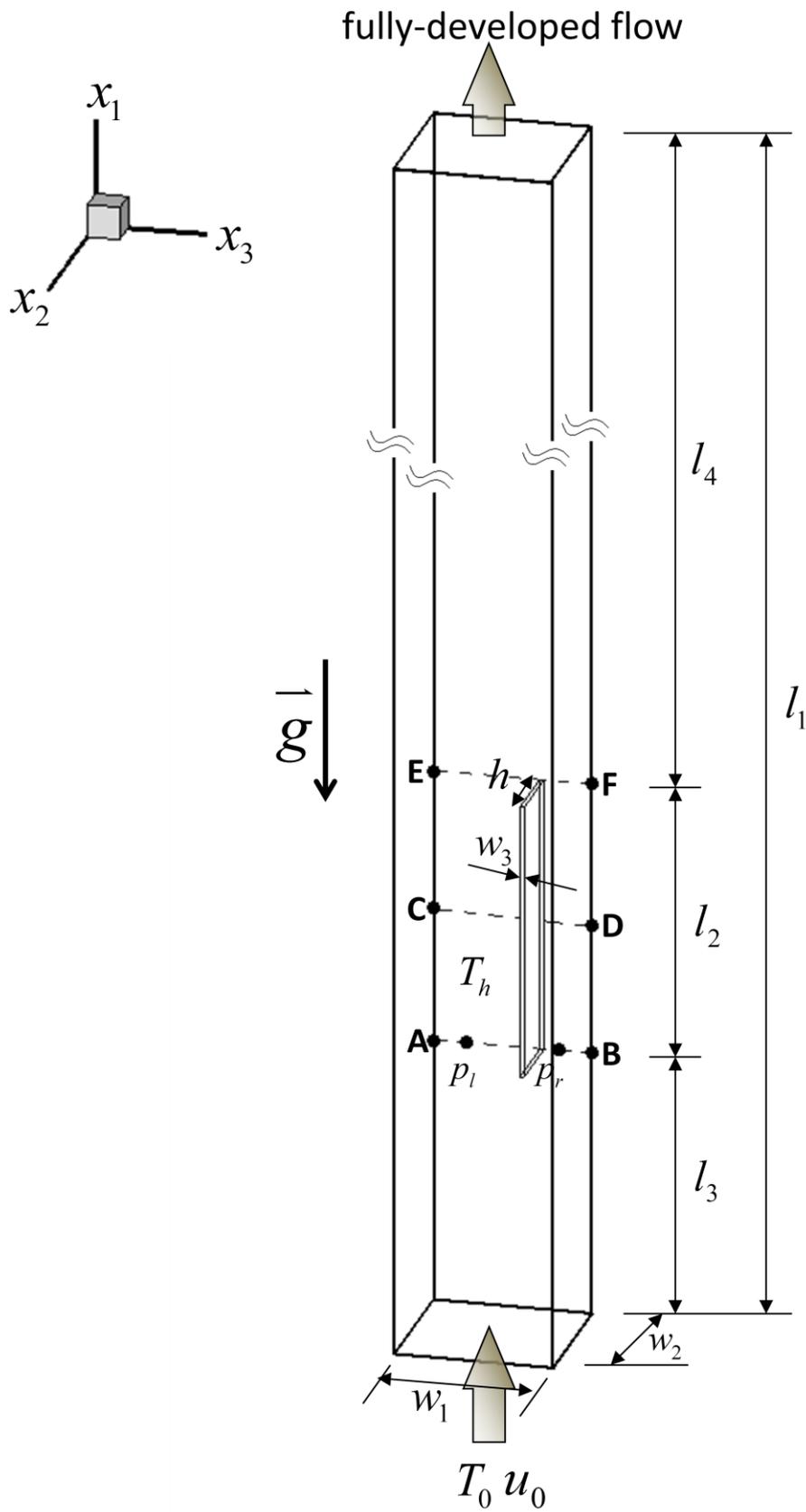


圖 2-3 三維垂直管道加裝移動平板物理模式

2-3、三維垂直管道自然對流物理模式：

本研究為有限長度三維管道自然對流衍生不穩定之熱傳問題，共有兩種不同長寬比之物理模型觀察其機制變化。三維垂直管道所採用的物理模式示意圖如圖 2-4 所示，主要為一個高 h 與寬 w 的三維垂直管道， z 方向採用循環性邊界。本研究一共有兩種長寬比 $R(R=h/w)$ ，分別為 $R=2.75$ 和 $R=3.75$ ，其中高溫壁面位於左側整個壁面，該一高溫壁面的溫度為 $T_h=400K$ 及 $700K$ 兩種，在垂直管道中除了高溫壁面外，另一側的壁面為絕熱狀態。而外面的環境溫度與壓力分別為 $T_c=300K$ 與 $P_0=101300Pa$ 。

在計算時所採取的基本假設如下：

1. 流場為三維流場。
2. 工作流體為空氣，假設其為理想氣體。
3. 進出口條件皆為完全非反射條件。

求解的方程式為考慮黏滯性、流體可壓縮性與重力影響的三維 N-S 方程式與理想氣體方程式：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = S \quad (2-9)$$

與

$$P = \rho RT \quad (2-10)$$

其中， U 、 F 、 G 與 S 的值如下所示：

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho Eu + Pu - k \frac{\partial T}{\partial x} - u\tau_{xx} - v\tau_{xy} \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v u \\ \rho v^2 + P - \tau_{yy} \\ \rho E v + P v - k \frac{\partial T}{\partial y} - u \tau_{yx} - v \tau_{yy} \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ -(\rho - \rho_0)g \\ 0 \\ -(\rho - \rho_0)gu \end{pmatrix}$$

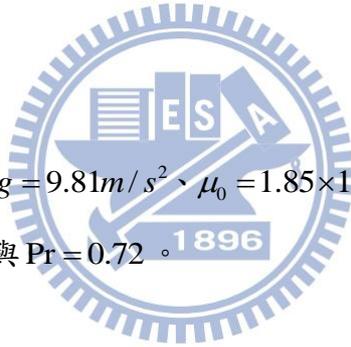
此處 $E = \frac{p}{\rho(\gamma-1)} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$ 。

空氣的黏滯係數與熱傳導係數則根據 Sutherland's law 求得：

$$\mu(T) = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{T_0 + 110}{T + 110} \quad (2-11)$$

$$k(T) = \frac{\mu(T)\gamma R}{(\gamma-1)\text{Pr}} \quad (2-12)$$

此處的 $\rho_0 = 1.1842 \text{ kg/m}^3$ 、 $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ 、 $\mu_0 = 1.85 \times 10^{-5} \text{ N}\cdot\text{s/m}^2$ 、 $T_0 = 298.0592 \text{ K}$ ， $\gamma = 1.4$ ， $R = 287 \text{ J/kg/K}$ 與 $\text{Pr} = 0.72$ 。



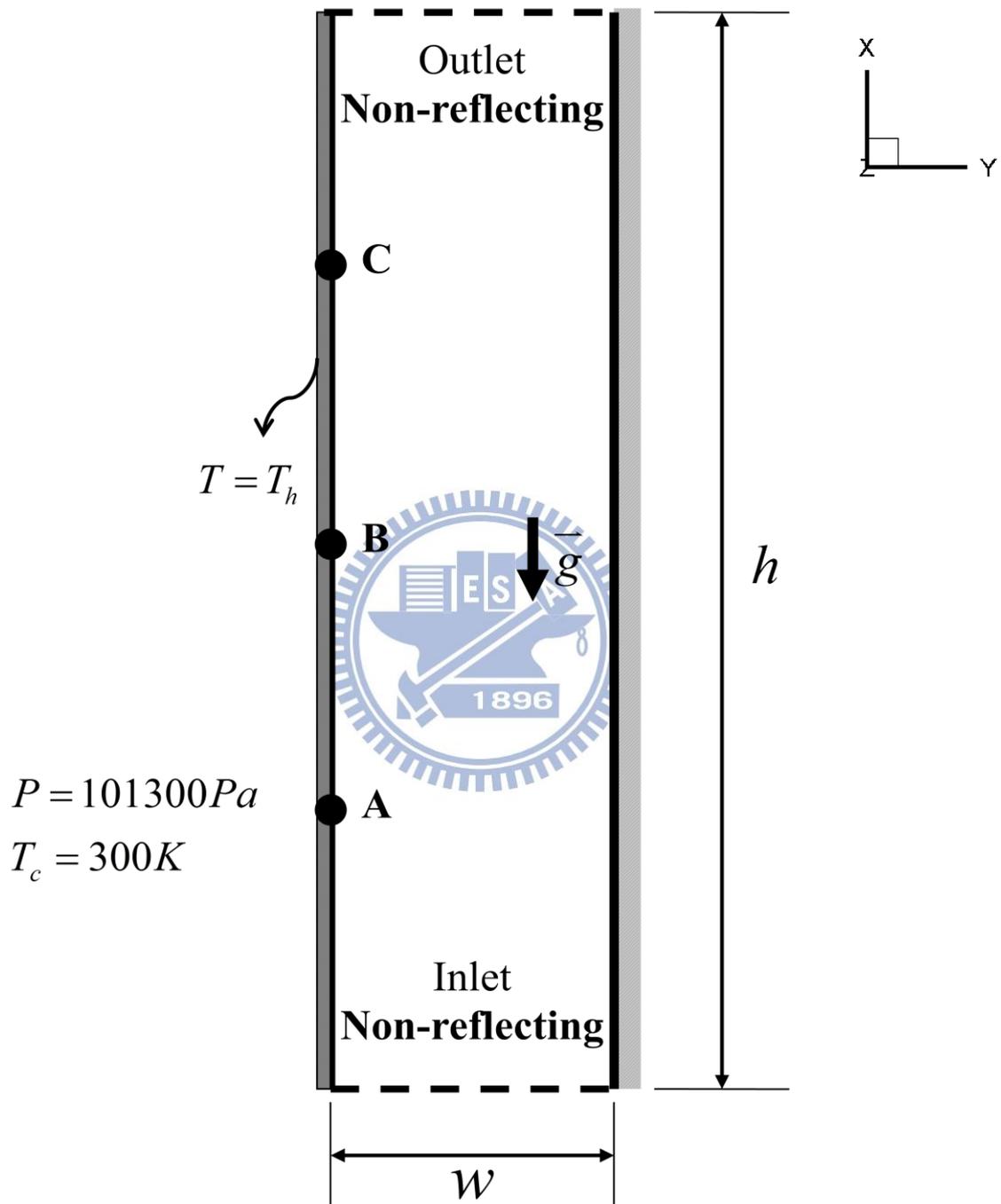


圖 2-4 三維垂直管道自然對流物理模式

第三章 數值方法

本章主旨在說明本論文的數值計算所使用的所有模式。第一節整理所求解的 Navier-Stokes 方程式。將 Navier-Stokes 方程式拆解為非黏滯項與黏滯項。第二節介紹的為黎曼解中的 ROE 法，利用 ROE 法來求出非黏滯項的通量。接著第三節介紹 MUSCL 法，此法是為了要解出 ROE 法中使用的網格之間的物理量，然後為了防止在高階插分時產生震盪現象，在 MUSCL 法插分的結果方程式中加入 Minmod limiter 以確保程式不會發散。第四節為介紹 Preconditioning 法，因為當計算低速可壓縮流時，因速度和音速的數量級上差距過大，在數值分析時造成計算的困難，所以為彌補此一缺點須使用 Preconditioning 法。最後第五節為 LUSGS Scheme，為了加快收斂速度並且避免能量耗散問題，因此利用 LUSGS Scheme，而程式因為在使用 Preconditioning 時，加入 Artificial time term 時，已破壞了整個統御方程式，因此需使用 Dual time stepping 疊代使其在 Artificial domain 收斂時才能進入下一個真實時階，將在此小節做詳細的解說。第六節為座標的轉換，本研究為了要觀察邊界的地方流場及熱傳的變化及邊際效應的影響，在靠近壁面的網格部份做了加密的動作，當程式作計算時使用曲線座標系做計算，但是當插分時是在直角座標系做插分的動作，因此對於方程式座標的轉換在此節做說明。第七節則說明處理移動邊界的沉浸邊界法，此方法除了適當的處理流場外型複雜度，同時於網格節點保留計算結果之準確性，因此在卡式座標中可處理移動或變形之複雜外型流場問題，卻不需要隨時間產生網格。綜合上述，本論文在數值上的計算過程為，首先將 Navier-Stokes 方程式拆解為非黏滯項與黏滯項。利用 MUSCL 法算出 ROE 法所需要的網格間物理量並搭配 Minmod limiter 以確保程式不會發散，求解出非黏滯性項的通量，並且在計算通量時加入 Preconditioning 法，以拉近與音速的數量級。接下來利用二階中央插分法對黏滯項做插分進而求出黏滯性項；然後再與 ROE 法求出的非黏滯性項通量做結合得到真正的物理通量。最後使用 LUSGS Scheme 疊代以求出下一時階的物理量。

3-1、統御方程式：

本研究在計算流場的方面其統御方程式分可為兩大部分，第一部份為非黏滯性項的尤拉方程式，第二部份為黏滯性項。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = S \quad (3-1)$$

$$P = \rho RT \quad (3-2)$$

其中在水平管道中

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{bmatrix} \quad (3-3)$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho uw - \tau_{xz} \\ \rho Eu + Pu - k \frac{\partial T}{\partial x} - u\tau_{xx} - v\tau_{xy} - w\tau_{xz} \end{bmatrix} \quad (3-4)$$

$$G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u - \tau_{yx} \\ \rho v^2 + P - \tau_{yy} \\ \rho vw - \tau_{yz} \\ \rho Ev + Pv - k \frac{\partial T}{\partial y} - u\tau_{yx} - v\tau_{yy} - w\tau_{yz} \end{bmatrix} \quad (3-5)$$

$$H = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho u - \tau_{zx} \\ \rho v - \tau_{zy} \\ \rho w^2 + P - \tau_{zz} \\ \rho Ew + Pw - k \frac{\partial T}{\partial z} - u\tau_{zx} - v\tau_{zy} - w\tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (3-6)$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\rho - \rho_0)g \\ 0 \\ -(\rho - \rho_0)gv \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

在垂直管道中

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{bmatrix} \quad (3-8)$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho uw - \tau_{xz} \\ \rho Eu + Pu - k \frac{\partial T}{\partial x} - u\tau_{xx} - v\tau_{xy} - w\tau_{xz} \end{bmatrix} \quad (3-9)$$

$$G = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho u - \tau_{yx} \\ \rho v^2 + P - \tau_{yy} \\ \rho vw - \tau_{yz} \\ \rho Ev + Pv - k \frac{\partial T}{\partial y} - u\tau_{yx} - v\tau_{yy} - w\tau_{yz} \end{bmatrix} \quad (3-10)$$

$$H = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho u - \tau_{zx} \\ \rho v - \tau_{zy} \\ \rho w^2 + P - \tau_{zz} \\ \rho Ew + Pw - k \frac{\partial T}{\partial z} - u\tau_{zx} - v\tau_{zy} - w\tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (3-11)$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 \\ -(\rho - \rho_0)g \\ 0 \\ 0 \\ -(\rho - \rho_0)gu \end{bmatrix} \quad (3-12)$$

ρ 為密度， P 為壓力。 u 、 v 、 w 分別為 x 、 y 、 z 方向的速度。

$$E = \frac{P}{\rho(\gamma-1)} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2), \quad (3-13)$$

ρ 為密度， P 為壓力。 u 、 v 、 w 分別為 x 、 y 、 z 方向的速度。黏滯係數與熱傳導係數 k 利用 Sutherlands's law

$$\mu(T) = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{T_0 + 110}{T + 110} \quad (3-14)$$

$$k(T) = \frac{\mu(T)\gamma R}{(\gamma - 1)\text{Pr}} \quad (3-15)$$

其中

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 1.1842 \text{ kg/m}^3, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2, \\ \mu_0 &= 1.85 \times 10^{-5} \text{ Ns/m}^2, \quad T_0 = 298.0592 \text{ K}, \\ \gamma &= 1.4, \quad R = 287 \text{ J/kg/K}, \quad \text{Pr} = 0.72. \end{aligned}$$

上式可拆解為黏滯性項與非黏滯性項：

$$F_m = F_{inviscid} + F_{viscid} = \begin{pmatrix} \rho u_m \\ \rho u_m u_1 + P \delta_{m1} \\ \rho u_m u_2 + P \delta_{m2} \\ \rho u_m u_3 + P \delta_{m3} \\ (\rho e + P) u_m - \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{m1} \\ \tau_{m2} \\ \tau_{m3} \\ \tau_{mj} u_j \end{pmatrix} \quad \forall m = 1, 2, \quad (3-16)$$

左式由非黏滯項 $F_{inviscid}$ 組成的方程式即稱為尤拉方程式。



3-2、Roe scheme：

在雙曲線的守恆形式方程式中，若其初始條件包含有不連續的片段連續 (piecewise) 常數，此類型的問題通稱為黎曼(Riemann)問題。因為其包含有不連續解，因此在流體計算上有著相當廣泛的應用。一維線性黎曼方程式如下：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad , \quad \text{其中 } A \text{ 為一常數 Jacobian 矩陣。} \quad (3-17)$$

初始條件為 $U^{(0)} = (u_1^{(0)}, \dots, u_m^{(0)})^T$ 。左上方括號代表時間 t 為 0。

求出 A 之特徵值矩陣以及特徵向量。

$$A = K \Lambda K^{-1} \quad , \quad \text{其中 } \Lambda \text{ 為特徵值矩陣：} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_m \end{pmatrix} \text{。}$$

$K = [K^{(1)}, \dots, K^{(m)}]^T$ 為特徵向量，故 $AK^{(i)} = \lambda_i K^{(i)}$ 。

接著定義特徵變數 W (characteristic variables)，其定義如下：

$$W = W(t, x) \quad , \quad W = K^{-1}U \quad \text{或} \quad U = KW \quad \text{。因此} \quad \frac{\partial U}{\partial t} = K \frac{\partial W}{\partial t} \quad \text{且} \quad \frac{\partial U}{\partial x} = K \frac{\partial W}{\partial x} \quad \text{，將此結}$$

果代入(3-4)式中可得：

$$KW_t + AKW_x = 0 \quad , \quad \text{可再繼續簡化成：}$$

$$W_t + \Lambda W_x = 0 \quad (3-18)$$

方程式(3-5)稱為 canonical form 或 characteristic form。

將以上的結果簡單整理如下：

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial W_i}{\partial x} = 0 \quad , \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_3 \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_3 \end{bmatrix}_x = 0 \quad (3-19)$$

(3-11)可由特徵曲線法求得其解為：

$$\begin{cases} w_i(x, t) = w_i^{(0)}(x - \lambda_i t) = \alpha_i & x - \lambda_i t < 0 \\ w_i(x, t) = w_i^{(0)}(x - \lambda_i t) = \beta_i & x - \lambda_i t > 0 \end{cases} \quad (3-20)$$

其中， α_i 與 β_i 為初始值的特徵變數。由於 $U = KW$ ，可以得到

$$U(x,t) = \sum_i^m w_i^{(0)}(x - \lambda_i t) K^{(i)}$$

參照圖(3-1)，可以進一步推導出

$$U(x,t) = \sum_{i=1}^p \alpha_i K^{(i)} + \sum_{i=p+1}^m \beta_i K^{(i)} \quad (3-21)$$

除此之外，還可決定出 $U(x,t)$ 中的 jump ΔU ：

$$\Delta U = U_R - U_L = \sum_{i=1}^m \tilde{\alpha}_i K^{(i)} \quad (3-22)$$

其中 $\tilde{\alpha}_i = \beta_i - \alpha_i$ 。

在一維線性黎曼問題中，雖然有 exact solution，但在非線性問題裡需利用疊代等方法，這些動作將耗費大量的時間，因此在實際應用上並不廣泛。為了解決此問題，一般皆求解近似黎曼問題〈approximation Riemann problem〉解而不直接求其 exact solution。在求解近似黎曼問題中最被廣泛應用的方法為 Roe 所提出，亦即為 Roe scheme，其內容如下：

假設一維尤拉方程式：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (3-23)$$

根據 chain rule，可將方程式(3-23)改寫如下：

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad \text{再令 } A(U) = \frac{\partial F}{\partial U}, \text{ 於是方程式(3-23)可以表示成：} \\ \frac{\partial U}{\partial t} + A(U) \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (3-24)$$

其中， $A(U)$ 就稱為 Jacobian 矩陣。

而 Roe scheme 將原本的 Jacobian 矩陣 $A(U)$ 用一常數 Jacobian 矩陣 $\tilde{A}(U_L, U_R)$ 代

替，因此本來的黎曼問題可以改寫成近似黎曼問題：

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \tilde{A}(U) \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \\ U(x,0) = U_L \quad x < 0 \\ U(x,0) = U_R \quad x > 0 \end{aligned} \quad (3-25)$$

於是前述方法可以得到(3-23)的近似解。由以上的原理可得知，在近似黎曼問題上，Roe 利用常數 Jacobian 矩陣取代原本的 Jacobian 矩陣使方程式由非線性轉變成線性，但是初始條件並沒有改變，因此可以得到方程式(3-18)的近似解。

為了要求得合理的常數 Jacobian 矩陣，須合乎 Roe 所提出的四項條件：

1. U 與 F 之間，存在著線性轉換的關係。
2. 當 $U_R - U_L \rightarrow U$ ，則 $\tilde{A}(U_L, U_R) \rightarrow A(U)$ ，此處 $A = \frac{\partial F}{\partial U}$ 。
3. $\tilde{A}(U_L - U_R) = F_L - F_R$ 。
4. 矩陣 \tilde{A} 的特徵向量必須線性獨立。

這四項條件都是雙曲線方程式所需具備的，這同時也說明了 Roe 所提出的常數 Jacobian 矩陣必須有實數特徵值，其所對應的特徵向量必須線性獨立。除此之外，條件 3. 則是為了符合守恆定律 (conservation law) 與 Rankine-Hugoniot 條件。

線性黎曼問題的解析解，可以直接從(3-20)與(3-21)式得到， $U_{i+\frac{1}{2}}(x/t)$ 的解

可以利用下面的方程式計算：

$$U_{i+\frac{1}{2}}(x/t) = U_L + \sum_{\lambda_i < 0} \tilde{\alpha}_i K^{(i)} \quad (3-26)$$

$$\text{或 } U_{i+\frac{1}{2}}(x/t) = U_R - \sum_{\lambda_i > 0} \tilde{\alpha}_i K^{(i)} \quad (3-27)$$

其中 $i + \frac{1}{2}$ 表示網格與網格之間的交界面(face)。

而黎曼問題的近似解，則須從解近似黎曼問題著手：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{F}(U)}{\partial x} = 0, \text{ 根據(3-17)式可得知 } \tilde{F} = \tilde{A}U$$

為了符合守恆的條件，因此下式必須成立：

$$\tilde{F}(U_R) - \tilde{F}(U_L) = F(U_R) - F(U_L) \quad (3-28)$$

接著在固定體積的條件下，積分近似解 $U_{i+\frac{1}{2}}(0)$ ，可得到通量(flux)的數值公式：

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \tilde{F}(U_{i+\frac{1}{2}}(0)) - F(U_R) - \tilde{F}(U_R) \quad (3-29)$$

再從 $\tilde{F} = \tilde{A}U$ 的關係中可進一步求得：

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \tilde{A}U_{i+\frac{1}{2}}(0) - F(U_R) - \tilde{A}U_R \quad (3-30)$$

再根據(3-18)式與(3-19)式可以推導出：

$$F_{i+\frac{1}{2}} = F(U_R) - \tilde{A} \sum_{\lambda_i > 0} \tilde{\alpha}_i K^{(i)} = F(U_R) - \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i^+ \tilde{\alpha}_i \tilde{K}^{(i)} \quad (3-31)$$

$$\text{或 } F_{i+\frac{1}{2}} = F(U_R) + \tilde{A} \sum_{\lambda_i > 0} \tilde{\alpha}_i K^{(i)} = F(U_L) + \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i^- \tilde{\alpha}_i \tilde{K}^{(i)} \quad (3-32)$$

(3-31)與(3-32)所指的 $\tilde{\lambda}_i^-$ 與 $\tilde{\lambda}_i^+$ 分別是代表負的特徵值與正的特徵值，接著再利用平均的方法將 $F_{i+\frac{1}{2}}$ 更進一步表示成：

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[F(U_R) + F(U_L) - \sum_{i=1}^m |\tilde{\lambda}_i| \tilde{\alpha}_i \tilde{K}^{(i)} \right] \quad (3-33)$$

再由(3-8)式可再次改變 $F_{i+\frac{1}{2}}$ 的形式如下：

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[F(U_R) + F(U_L) - |\tilde{A}| \Delta U \right] \quad (3-34)$$

其中 $\Delta U = U_R - U_L$ 、 $|\tilde{A}| = \tilde{A}^+ - \tilde{A}^- = \tilde{K} |\tilde{\Lambda}| \tilde{K}^{-1}$ ， $\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} |\lambda_1| & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & |\lambda_m| \end{pmatrix}$ 。

接下來需找出 $|\tilde{A}|$ 中所需的物理量，必須利用下列方法：

現考慮一維等溫尤拉方程式：

$$U_t + F(U)_x = 0 \quad (3-35)$$

其中 $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \end{bmatrix}$ ； $F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + a^2 p \end{bmatrix}$ ， a 為聲速

方程式(3-30)的 Jacobian 矩陣與其對應的特徵值與特徵向量如下所示：

$$A(U) = \frac{\partial F}{\partial U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a^2 - u^2 & 2u \end{bmatrix} \quad (3-36)$$

特徵值： $\lambda_1 = u - a$ ， $\lambda_2 = u + a$

$$\text{特徵向量：} K^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u - a \end{bmatrix}, K^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u + a \end{bmatrix}$$

接著選定 parameter vector Q

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \frac{U}{\sqrt{\rho}} \begin{bmatrix} \sqrt{\rho} \\ \sqrt{\rho u} \end{bmatrix} \quad (3-37)$$

再將 F 與 U 利用 Q 表示：

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = q_1 Q = \begin{bmatrix} q_1^2 \\ q_1 q_2 \end{bmatrix} \quad (3-38)$$

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 q_2 \\ q_2^2 + a^2 q_1^2 \end{bmatrix} \quad (3-39)$$

為了表示出 ΔU 與 ΔF 需在定義 averaged vector \tilde{Q} ：

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(Q_L + Q_R) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R} \\ \sqrt{\rho_L} u_L + \sqrt{\rho_R} u_R \end{bmatrix} \quad (3-40)$$

再找出 $\tilde{B} = \tilde{B}(\tilde{Q})$ 與 $\tilde{C} = \tilde{C}(\tilde{Q})$ 使得

$$\Delta U = \tilde{B} \Delta Q ; \Delta F = \tilde{C} \Delta Q \quad (3-41)$$

將(3-36)結合可得

$$\Delta F = (\tilde{C} \tilde{B}^{-1}) \Delta U \quad (3-42)$$

再根據上述條件 3 求出近似 Jacobian 矩陣

$$\tilde{A} = \tilde{C} \tilde{B}^{-1} \quad (3-43)$$

為了滿足(3-36)，可以求得

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 2\tilde{q}_1 & 0 \\ \tilde{q}_2 & \tilde{q}_1 \end{bmatrix}; \tilde{C} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_2 & \tilde{q}_1 \\ 2a^2\tilde{q}_1 & \tilde{q}_2^2 \end{bmatrix} \quad (3-44)$$

再帶入(3-30)可得

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a^2 - \tilde{u}^2 & 2\tilde{u} \end{bmatrix} \quad (3-45)$$

\tilde{u} 為 Roe averaged velocity

$$\tilde{u} = \frac{\sqrt{\rho_L}u_L + \sqrt{\rho_R}u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (3-46)$$

因此可以用同樣方法得到以下物理量：

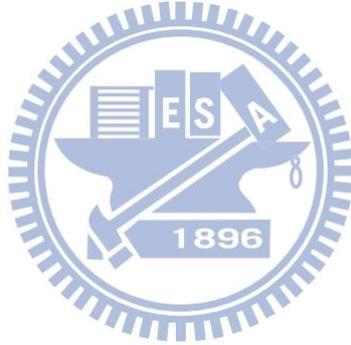
$$\tilde{v} = \frac{\sqrt{\rho_L}v_L + \sqrt{\rho_R}v_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (3-47)$$

$$\tilde{w} = \frac{\sqrt{\rho_L}w_L + \sqrt{\rho_R}w_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (3-48)$$

$$\tilde{H} = \frac{\sqrt{\rho_L}H_L + \sqrt{\rho_R}H_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (3-49)$$

$$\tilde{a} = [(\gamma - 1)(\tilde{H} - 1/2\tilde{V})]^{1/2} \quad (3-50)$$

其中 \tilde{u} 、 \tilde{v} 、 \tilde{w} 分別代表 x 方向、 y 方向、 z 方向的速度。 \tilde{H} 、 \tilde{a} 則分別為焓和音速。(3-46)~(3-50)式中的 U_L 以及 U_R 則是利用 MUSCL 法求出。



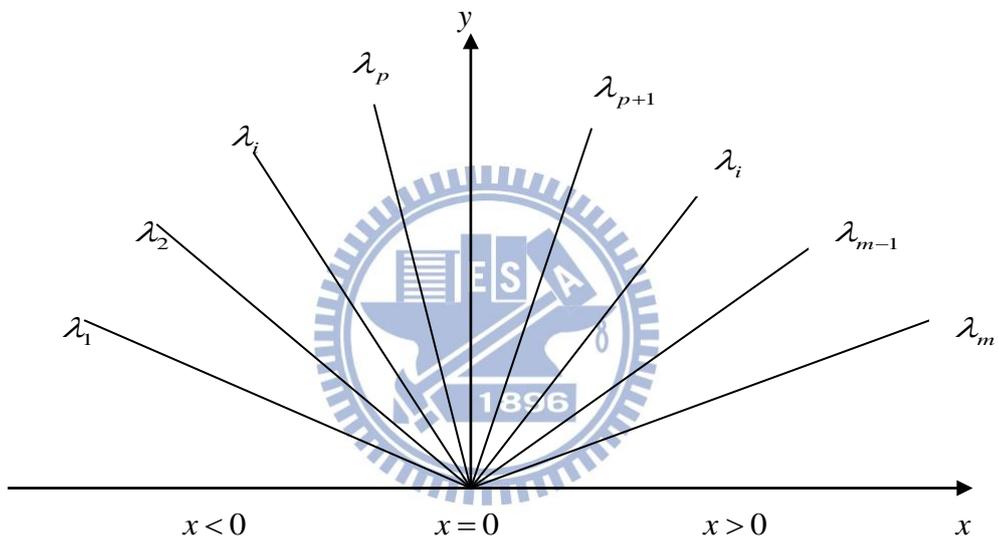


圖 3-1 黎曼問題特徵值結構圖

3-3、Monotonic Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws(MUSCL)：

本論文使用的是採用I. Abalakin中所使用的插分法。其方程式如下：

$$u_{i+1/2}^L = u_i + 1/2 \Delta u_{i+1/2}^L \quad (3-51)$$

$$u_{i+1/2}^R = u_i - 1/2 \Delta u_{i+1/2}^R \quad (3-52)$$

$$\begin{aligned} \Delta u_{i+1/2}^L &= (1-\beta)(u_{i+1} - u_i) + \beta(u_i - u_{i-1}) + \theta^c(-u_{i-1} + 3u_i - 3u_{i+1} + u_{i+2}) \\ &+ \theta^d(-u_{i-2} + 3u_{i-1} - 3u_i + u_{i+1}) \end{aligned} \quad (3-53)$$

$$\begin{aligned} \Delta u_{i+1/2}^R &= (1-\beta)(u_{i+1} - u_i) + \beta(u_{i+2} - u_{i+1}) + \theta^c(-u_{i-1} + 3u_i - 3u_{i+1} + u_{i+2}) \\ &+ \theta^d(-u_i + 3u_{i+1} - 3u_{i+2} + u_{i+3}) \end{aligned} \quad (3-54)$$

其中(3-45)、(3-46)式中的 β 、 θ^c 、 θ^d 值可由表(3-1)中查得。代入不同的值可以得到不同的精度。本論文則是使用三階精度，以減少數值計算的消散性。

在程式中，高次項的插分法在不連續的情況下，容易使震盪變大，為了降低震盪，本研究在 MUSCL 法插分出來的方程式中加入 minmod limiter，用來確保程式不會發散。

因此(3-51)與(3-52)式需改寫如下：

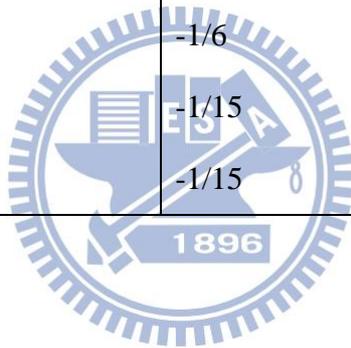
$$u_{i+1/2}^L = u_i + 1/2 \min \text{mod}(\Delta u_{i+1/2}^L) \quad (3-55)$$

$$u_{i+1/2}^R = u_i - 1/2 \min \text{mod}(\Delta u_{i+1/2}^R) \quad (3-56)$$

$$\min \text{mod}(x, y) = \text{Sgn}(x) \text{Max}\{0, \text{Min}[|x|, y \text{Sgn}(x)]\} \quad (3-57)$$

表 3-1：精度係數值

β	θ^c	θ^d	Order
1/3	0	0	2
1/3	-1/6	0	3
1/3	0	-1/6	4
1/3	-1/10	-1/15	5
1/3	-1/10	-1/15	6



3-4、Preconditioning 法：

為了增加 N-S 方程式於低馬赫速可壓縮流的準確度與效率，因此於方程式中增加 preconditioning 法。本程式採用 Weiss and Smith 的 preconditioning method [29]，撰寫於三維曲線座標，其方程式如下：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = S \quad (3-58)$$

上式為原始方程式，接著將保守形式 (conserved variables) 轉變成主要變數形式 (primitive variables)，其形式如下：

$$M \frac{\partial U_p}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = S \quad (3-59)$$

其中 $U_p = [p \quad u \quad v \quad w \quad T]^T$ ， M 為轉換矩陣：

$$M = \frac{\partial U}{\partial U_p} = \begin{bmatrix} \rho_p & 0 & 0 & 0 & \rho_T \\ \rho_p u & \rho & 0 & 0 & \rho_T u \\ \rho_p v & 0 & \rho & 0 & \rho_T v \\ \rho_p w & 0 & 0 & \rho & \rho_T w \\ \rho_p H - 1 & \rho u & \rho v & \rho w & \rho_T H + \rho C_p \end{bmatrix} \quad (3-60)$$

其中 $\rho_p = \frac{\partial \rho}{\partial p}$ ； $\rho_T = \frac{\partial \rho}{\partial T}$

接著將(3-59)式的方程式乘上矩陣 K

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -w & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -(H - |V|^2) & -u & -v & -w & 1 \end{bmatrix} \quad (3-60)$$

再將 K 與 M 相乘

$$KM = \begin{bmatrix} \rho_p & 0 & 0 & 0 & \rho_T \\ 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \rho C_p \end{bmatrix} \quad (3-61)$$

將(3-61)式帶入(3-59)式，連續方程式：

$$\rho_p \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = S \quad (3-62)$$

在理想氣體中可將(3-49)再表示成

$$\frac{\gamma}{C^2} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = S \quad (3-63)$$

其中 C 為聲速

由(3-63)式可以看出，在等密度條件下，由於 ρ_p 為零，(3-62)式將變成

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = S \quad (3-64)$$

上式即為不可壓流的連續方程式。

綜上所述，可以得知只要改變(3-61)式中的 ρ_p 項，利用當地流場速度 (local velocity) 的倒數取代，即可轉換系統中的特徵值，藉此改變低速情況下流場的聲速，使聲速與流場速度幕次級數(order)相同，系統不再受到 CFL 條件的限制，提高程式的計算效率。

利用 θ 取代 ρ_p 項：

$$\theta = \left(\frac{1}{U_r^2} - \frac{1}{TC_p} \right) \quad (3-65)$$

$$U_r = \begin{cases} \varepsilon \times U_{\max} & \text{if } |u| < \varepsilon \times C \\ |u| & \text{if } \varepsilon \times C < |u| < C \\ C & \text{if } |u| > C \end{cases} \quad (3-66)$$

其中 ε 為一極小的值，約等於 10^{-5} ，其主要是用來防止停滯點(stagnation point)在計算時所造成的奇異點(singular point)現象。對於黏制性流體而言， U_r 必須大於流體的當地擴散速度(local diffusion velocity)，因此 U_r 還需加入下列限制：

$$U_r = \max\left(U_r, \frac{v}{\Delta x}\right)$$

將 θ 帶入(3-61)式後，可得到一新矩陣 Γ_{nc}

$$\Gamma_{nc} = \begin{bmatrix} \theta & 0 & 0 & 0 & \rho_T \\ 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \rho C_p \end{bmatrix} \quad (3-67)$$

經過上述推導之後，方程式從(3-62)式轉變如下：

$$\Gamma_{nc} \frac{\partial U_p}{\partial t} + K \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) = S \quad (3-68)$$

為了讓(3-62)式中的通量項再度轉換成保守形式，在乘上 K^{-1}

$$(K^{-1}\Gamma_{nc}) \frac{\partial U_p}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = SK^{-1} \quad (3-69)$$

根據(3-62)式，定義

$$\Gamma = K^{-1}\Gamma_{nc} = \begin{bmatrix} \theta & 0 & 0 & 0 & \frac{-\rho}{T} \\ \theta u & \rho & 0 & 0 & \frac{-\rho u}{T} \\ \theta v & 0 & \rho & 0 & \frac{-\rho v}{T} \\ \theta w & 0 & 0 & \rho & \frac{-\rho w}{T} \\ \theta H - 1 & \rho u & \rho v & \rho w & \frac{-\rho}{T} H + \rho C_p \end{bmatrix} \quad (3-70)$$

最後方程式簡化成如下形式：

$$\Gamma \frac{\partial U_p}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = S \quad (3-71)$$

U_p 為 primitive form $[P, u, v, w, T]^T / J$ ，由於方程式在時間項經過改變，因此必須重新推導 Roe 所提出的近似黎曼解。在(3-34)式中，可以觀察到 $F_{i+\frac{1}{2}}$ 項，是由

$\frac{1}{2}(F(U_R) + F(U_L))$ 的中央差分法加上為了解決不連續面問題的 artificial viscosity term $\frac{1}{2}|\tilde{A}|\Delta U$ 所組成。加入 preconditioning 的方程式只需在 artificial viscosity term

做改變即可，其推導如下：

$$\Gamma \frac{\partial U_p}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = S$$

$$\frac{\partial U_p}{\partial t} + \Gamma^{-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) = \Gamma^{-1} S$$

$$\frac{\partial U_p}{\partial t} + \Gamma^{-1} \left(A \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial y} + C \frac{\partial U}{\partial z} \right) = \Gamma^{-1} S$$

$$\frac{\partial U_p}{\partial t} + \Gamma^{-1} \left(AM \frac{\partial U_p}{\partial x} + BM \frac{\partial U_p}{\partial y} + CM \frac{\partial U_p}{\partial z} \right) = \Gamma^{-1} S$$

$$\text{其中 } M = \frac{\partial U}{\partial U_p}$$

所以 artificial viscosity terms 改寫如下：

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(F_R + F_L) - \frac{1}{2} |\Gamma^{-1} AM| \Delta U_p \quad (3-72)$$

$$\text{其中 } |\Gamma^{-1} AM| = KA \times |DA| \times KA^{-1}$$

解完非黏滯性項之後，接著要解的是黏滯性項；在黏滯性項方面，採二階中央差分法。由於在尤拉方程式中計算的範圍皆為網格與網格之間的通量項，因此在黏滯性項方面，所需要得到的速度梯度項也必須是網格之間的通量項。下列以三維的 X 方向為例，圖 3-2 為其示意圖。

圖 3-2 中各編號所代表的位置分別為：

$$1 \rightarrow (i, j+1, k) ; 2 \rightarrow (i + \frac{1}{2}, j, k) ; 3 \rightarrow (i+1, j+1, k) ;$$

$$4 \rightarrow (i, j, k-1) ; 5 \rightarrow (i + \frac{1}{2}, j, k-1) ; 6 \rightarrow (i+1, j, k-1) ;$$

$$7 \rightarrow (i, j, k) ; 8 \rightarrow (i + \frac{1}{2}, j, k) ; 9 \rightarrow (i+1, j, k) ;$$

$$10 \rightarrow (i, j, k+1) ; 11 \rightarrow (i + \frac{1}{2}, j, k+1) ; 12 \rightarrow (i+1, j, k+1) ;$$

$$13 \rightarrow (i, j-1, k) ; 14 \rightarrow (i + \frac{1}{2}, j-1, k) ; 15 \rightarrow (i+1, j-1, k) ;$$

其各速度梯度差分分別如下表示：

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\Delta U}{\Delta X} = \frac{U(9) - U(7)}{\Delta X} \quad (3-73)$$

$$\frac{\partial V}{\partial X} = \frac{\Delta V}{\Delta X} = \frac{V(9) - V(7)}{\Delta X} \quad (3-74)$$

$$\frac{\partial W}{\partial X} = \frac{\Delta W}{\Delta X} = \frac{W(9) - W(7)}{\Delta X} \quad (3-75)$$

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\Delta U}{2\Delta Y} = \frac{U(2) - U(14)}{2\Delta Y} \quad (3-76)$$

$$\text{其中 } U(2) = \frac{U(3) + U(1)}{2} ; U(14) = \frac{U(13) + U(15)}{2}$$

所以

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\left(\frac{U(3) + U(1)}{2}\right) - \left(\frac{U(13) + U(15)}{2}\right)}{2\Delta Y} = \frac{U(3) + U(1) - U(13) + U(15)}{4\Delta Y} \quad (3-77)$$

同理

$$\frac{\partial V}{\partial Y} = \frac{\left(\frac{V(3) + V(1)}{2}\right) - \left(\frac{V(13) + V(15)}{2}\right)}{2\Delta Y} = \frac{V(3) + V(1) - V(13) + V(15)}{4\Delta Y} \quad (3-78)$$

$$\frac{\partial W}{\partial Y} = \frac{\left(\frac{W(3) + W(1)}{2}\right) - \left(\frac{W(13) + W(15)}{2}\right)}{2\Delta Y} = \frac{W(3) + W(1) - W(13) + W(15)}{4\Delta Y} \quad (3-79)$$

$$\frac{\partial U}{\partial Z} = \frac{\Delta U}{2\Delta Z} = \frac{U(11) - U(5)}{2\Delta Z} \quad (3-80)$$

$$\text{其中 } U(11) = \frac{U(10) + U(12)}{2} ; U(5) = \frac{U(4) + U(6)}{2}$$

所以

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\left(\frac{U(10) + U(12)}{2}\right) - \left(\frac{U(4) + U(6)}{2}\right)}{2\Delta Z} = \frac{U(10) + U(12) - U(4) + U(6)}{4\Delta Z} \quad (3-81)$$

同理

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\left(\frac{V(10) + V(12)}{2}\right) - \left(\frac{V(4) + V(6)}{2}\right)}{2\Delta Z} = \frac{V(10) + V(12) - V(4) + V(6)}{4\Delta Z} \quad (3-82)$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\left(\frac{W(10) + W(12)}{2}\right) - \left(\frac{W(4) + W(6)}{2}\right)}{2\Delta Z} = \frac{W(10) + W(12) - W(4) + W(6)}{4\Delta Z} \quad (3-83)$$

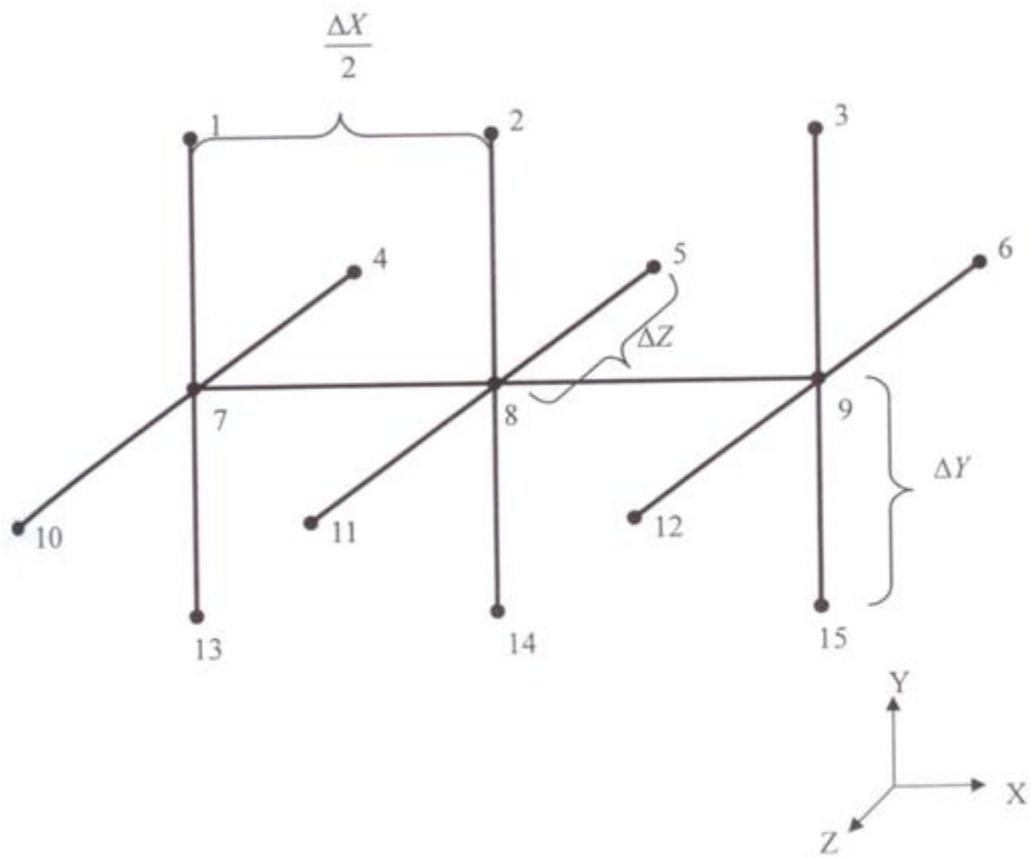


圖 3-2：差分示意圖

方程式(3-71)中的 Navier-Stokes 方程式在時間項方面遭到修改，利用修改後的方程式來計算暫態結果並不恰當，因此本程式再加入 dual time stepping，不僅讓程式在計算暫態結果方面較準確，更提高程式的效率，縮短計算時間。首先，先在原始 Navier-Stokes 方程式加入一虛擬時間項 $\partial U / \partial \tau$ ，稱為 artificial time term。

方程式改變如下：

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = S \quad (3-84)$$

其中 τ 即為 artificial time， t 為 physical time， U 為 conservative form $[\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho e]^T / J$

接著在 artificial time term 加入 preconditioning method：

$$\Gamma \frac{\partial U_p}{\partial \tau} + \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = S \quad (3-85)$$

最後對 artificial time term $\partial U_p / \partial \tau$ 採一階的有限差分離散，對 physical time term

$\partial U / \partial t$ 採二階的後項差分離散， $\frac{\partial F}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial G}{\partial y}$ 、 $\frac{\partial H}{\partial z}$ 利用中央插分法可得

$$\Gamma \frac{U_p^{k+1} - U_p^k}{\Delta \tau} + \frac{3U^{n+1} - 4U^n + U^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} (F_{i-\frac{1}{2},j,k}^{k+1} - F_{i-\frac{1}{2},j,k}^k) + \frac{1}{\Delta y} (G_{i,j+\frac{1}{2},k}^{k+1} - G_{i,j+\frac{1}{2},k}^k) + \frac{1}{\Delta z} (H_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{k+1} - H_{i,j,k+\frac{1}{2}}^k) = S$$

接著整理上式，先將其線性化

$$\Gamma \frac{\Delta U_p}{\Delta \tau} + \frac{3(U^k + M \Delta U_p) - 4U^n + U^{n-1}}{2\Delta t} + \delta_x (F^k + A_p^k \Delta U_p) + \delta_y (G^k + B_p^k \Delta U_p) + \delta_z (H^k + C_p^k \Delta U_p) = S$$

其中 $\Delta U_p = U_p^{k+1} - U_p^k$ ， $M = \frac{\partial U}{\partial U_p}$ ， $A_p = \frac{\partial F}{\partial U_p}$

$$F^{k+1} = F^k + A_p \Delta U_p \circ$$

$$U^{k+1} = U^k + M \Delta U_p$$

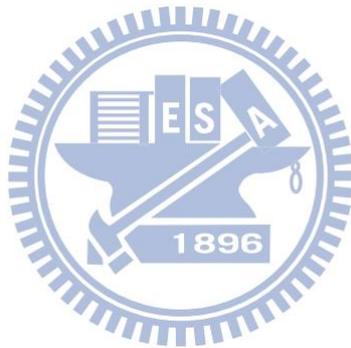
再將 ΔU_p 項放置在等號左邊，其餘則在右邊：

$$\left[\frac{I}{\Delta \tau} + \Gamma^{-1} M \frac{3}{2\Delta t} + \Gamma^{-1} (\delta_x A_p^k + \delta_y B_p^k + \delta_z C_p^k) \right] \Delta U_p = \Gamma^{-1} R^k$$

此處 $R^k = S - \left(\frac{3U^k - 4U^n + U^{n-1}}{2\Delta t} \right) - (\delta_x F^k + \delta_y G^k + \delta_z H^k)$ ， I 為單位矩陣。其中

$$M = \frac{\partial U}{\partial U_p}, A_p = \frac{\partial F}{\partial U_p}, B_p = \frac{\partial G}{\partial U_p} \text{ 與 } C_p = \frac{\partial H}{\partial U_p} \text{ 為 flux Jacobian。}$$

k 為 artificial time 中的疊帶次數， n 為 physical time 的計算階數。上述方程式，當 artificial time term 收斂時， $\Gamma \frac{U_p^{k+1} - U_p^k}{\Delta \tau} = 0$ ，方程式即會回復到原始的 Navier-Stokes 方程式，並且包含著時間項，故程式可以計算暫態結果。本研究採用 LUSGS implicit 法計算時間方程式(3-84)，此法的優點除了收斂快速外，還有不需額外的 Artificial Dissipation 來幫助程式收斂。



3-5、LUSGS implicit method :

由 Yoon[26] 等人提出 LUSGS implicit method

$$\tilde{A}_p = \Gamma^{-1} A_p^k, \tilde{B}_p = \Gamma^{-1} B_p^k, \tilde{C}_p = \Gamma^{-1} C_p^k$$

並將其分為兩部分:

$$\tilde{A}_p = \tilde{A}_p^+ + \tilde{A}_p^-, \tilde{B}_p = \tilde{B}_p^+ + \tilde{B}_p^-, \tilde{C}_p = \tilde{C}_p^+ + \tilde{C}_p^- \quad (3-86)$$

$$\text{其中 } \tilde{A}_p^\pm = \frac{1}{2}(\tilde{A}_p^\pm + |\lambda_{\tilde{A}}| I), \tilde{B}_p^\pm = \frac{1}{2}(\tilde{B}_p^\pm + |\lambda_{\tilde{B}}| I), \tilde{C}_p^\pm = \frac{1}{2}(\tilde{C}_p^\pm + |\lambda_{\tilde{C}}| I)$$

$\lambda_{\tilde{A}}$ 、 $\lambda_{\tilde{B}}$ 、 $\lambda_{\tilde{C}}$ 分別為 \tilde{A}_p 、 \tilde{B}_p 、 \tilde{C}_p 中最大的特徵值。

$$\text{將上三式帶入 } \left[\frac{I}{\Delta\tau} + \Gamma^{-1} M \frac{3}{2\Delta t} + \Gamma^{-1} (\delta_x A_p^k + \delta_y B_p^k + \delta_z C_p^k) \right] \Delta U_p = \Gamma^{-1} R^k$$

其中

$$\delta_x (\tilde{A}_p^+ + \tilde{A}_p^-) = \delta_x^- \tilde{A}_p^+ + \delta_x^+ \tilde{A}_p^- = \frac{\tilde{A}_{p,i}^+ - \tilde{A}_{p,i-1}^+}{\Delta x} + \frac{\tilde{A}_{p,i+1}^- - \tilde{A}_{p,i-1}^-}{\Delta x}$$

將上式帶入

$$\left[\frac{I}{\Delta\tau} + \Gamma^{-1} M \frac{3}{2\Delta t} + \frac{\tilde{A}_{p,i}^+ - \tilde{A}_{p,i-1}^+}{\Delta x} + \frac{\tilde{A}_{p,i+1}^- - \tilde{A}_{p,i-1}^-}{\Delta x} + \frac{\tilde{B}_{p,i}^+ - \tilde{B}_{p,i-1}^+}{\Delta y} + \frac{\tilde{B}_{p,i+1}^- - \tilde{B}_{p,i-1}^-}{\Delta y} + \frac{\tilde{A}_{p,i}^+ - \tilde{A}_{p,i-1}^+}{\Delta z} + \frac{\tilde{C}_{p,i+1}^- - \tilde{C}_{p,i-1}^-}{\Delta z} \right] \Delta U_p = \Gamma^{-1} R^k$$

可將上式整理成

$$(L + D + U) \Delta U_p = \Gamma^{-1} R^k$$

其中

$$L = - \left[\frac{1}{\Delta x} (\tilde{A}_p^+)_{i-1,j,k} + \frac{1}{\Delta y} (\tilde{B}_p^+)_{i,j-1,k} + \frac{1}{\Delta z} (\tilde{C}_p^+)_{i,j,k-1} \right]$$

$$D = \frac{I}{\Delta\tau} + \Gamma^{-1} M \frac{3}{2\Delta t} + \left\{ \frac{1}{\Delta x} [(\tilde{A}_p^+)_{i,j,k} - (\tilde{A}_p^-)_{i,j,k}] + \frac{1}{\Delta y} [(\tilde{B}_p^+)_{i,j,k} - (\tilde{B}_p^-)_{i,j,k}] + \frac{1}{\Delta z} [(\tilde{C}_p^+)_{i,j,k} - (\tilde{C}_p^-)_{i,j,k}] \right\}$$

$$U = \left[\frac{1}{\Delta x} (\tilde{A}_p^-)_{i+1,j,k} + \frac{1}{\Delta y} (\tilde{B}_p^-)_{i,j+1,k} + \frac{1}{\Delta z} (\tilde{C}_p^-)_{i,j,k+1} \right]$$

最後整理為 $(L+D)D^{-1}(D+U)\Delta U_p^k = \Gamma^{-1}R^k$

上式可以用以下的步驟解出：

1. $(L+D)\Delta U_p^* = \Gamma^{-1}R^k$

其中 $\Delta U_p^* = D^{-1}(D+U)\Delta U_p^k$

2. $(D+U)\Delta U_p^k = D\Delta U_p^*$

$$\Delta U_p^k = \Delta U_p^* - D^{-1}U\Delta U_p^k$$

3. $U_p^{k+1} = U_p^k + \Delta U_p$

4. 重複步驟一至三，直到 $\Gamma \frac{U_p^{k+1} - U_p^k}{\Delta \tau} = 0$ 則下一個物理時間項可求得。



3-6、非反射性邊界(Non-Reflecting condition)：

在高速可壓縮流的情形下，Poinsot 與 Lele [30]發展的 LODI(local one-dimensional inviscid relations)法使非反射邊界適用於管道的進出口兩端。但因未使用 preconditioning 法，因此此法並無法適用於低速可壓縮流中。為了讓非反射性邊界適用於低速可壓縮流的情形下，需重新推導 LODI 方程式於邊界上，考慮一維 Navier-Stokes 方程式：

$$\Gamma \frac{\partial U_p}{\partial \tau} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (3-87)$$

接著將兩邊同乘 Γ^{-1}

$$\frac{\partial U_p}{\partial \tau} + \Gamma^{-1} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (3-88)$$

其中 $\Gamma^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}$ 可在轉換如下：

$$\Gamma^{-1} \frac{\partial F}{\partial x} = \Gamma^{-1} \frac{\partial F}{\partial U_p} \frac{\partial U_p}{\partial x} = \Gamma^{-1} A_p \frac{\partial U_p}{\partial x} \quad (3-89)$$

將方程式(3-89)帶入方程式(3-88)，便可得到 primitive form

$$\frac{\partial U_p}{\partial \tau} + \Gamma^{-1} A_p \frac{\partial U_p}{\partial x} = 0 \quad (3-90)$$

再將 $\Gamma^{-1} A_p$ 作相似轉換以得到特徵速度

$$\Gamma^{-1} A_p = K \lambda K^{-1} \quad (3-91)$$

此處 K 為特徵向量矩陣， λ 為 $\Gamma^{-1} A_p$ 的特徵值矩陣且表示流場中的特徵速度。根據 Dennis 等人[31]，特徵值下所示：

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u \\ u \\ u' + c' \\ u' - c' \end{pmatrix} \quad (3-92)$$

此處 $u' = \frac{(\Theta+1)u}{2}$ 、 $c' = \frac{\sqrt{u^2(\Theta-1)^2 + 4\Theta c^2}}{2}$ ，其中 $\Theta \approx 100M^2$ 。

接著讓

$$L = \lambda K^{-1} \frac{\partial U_p}{\partial x} \quad (3-93)$$

L 如下所示：

$$L = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{\rho\gamma} \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \gamma \frac{\partial P}{\partial x} \right) \\ u \frac{\partial w}{\partial x} \\ u \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ (u' + c') \left[\frac{\partial P}{\partial x} - \rho(u' - c' - u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \\ (u' - c') \left[\frac{\partial P}{\partial x} - \rho(u' + c' - u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \end{pmatrix} \quad (3-94)$$

L 矩陣的物理意義為邊界條件上波的強度隨時間變化的方程式。

根據方程式(3-92)， L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 與 L_5 分別為 u 、 u 、 u 、 $u' + c'$ 與 $u' - c'$ 。

將方程式(3-93)帶入方程式(3-90)，可在表示如下：

$$\frac{\partial U_p}{\partial \tau} + KL = 0 \quad (3-95)$$

將方程式(3-95)展開可得壓力、速度與溫度在邊界條件上的方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{1}{2c'} [L_4(u' + c' - u) - L_5(u' - c' - u)] &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{1}{2\rho c'} (L_4 - L_5) &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial \tau} - L_3 &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial \tau} + L_2 &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial \tau} + L_1 + \frac{1}{\rho} \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{1}{2c'} [L_4(u' + c' - y) - L_5(u' - c' - y)] &= 0 \end{aligned} \quad (3-96)$$

方程式(3-96)可再離散如下：

$$\begin{aligned}
p^{k+1} &= p^k - \frac{\Delta t}{2\rho c'} [L_4(u' + c' - u) - L_5(u' - c' - u)] \\
u^{k+1} &= u^k - \frac{\Delta t}{2\rho c'} (L_4 - L_5) \\
v^{k+1} &= v^k + L_3 \Delta t \\
w^{k+1} &= w^k - L_2 \Delta t \\
T^{k+1} &= T^k - L_1 \Delta t + \frac{1}{\rho} \frac{\gamma + 1}{\gamma} (p^{k+1} - p^k)
\end{aligned} \tag{3-97}$$

根據圖 3-3(a)，如果流體從管內往大氣流出時， L_1 、 L_2 、 L_3 與 L_4 方向與流體流動方向相同，因此可利用方程式(3-94)定義 L_1 、 L_2 、 L_3 與 L_4 。由於 $u' - c'$ 小於零的關係， L_5 的方向則與流體流動方向相反。由於壓力於極遠處的變化為零，所以

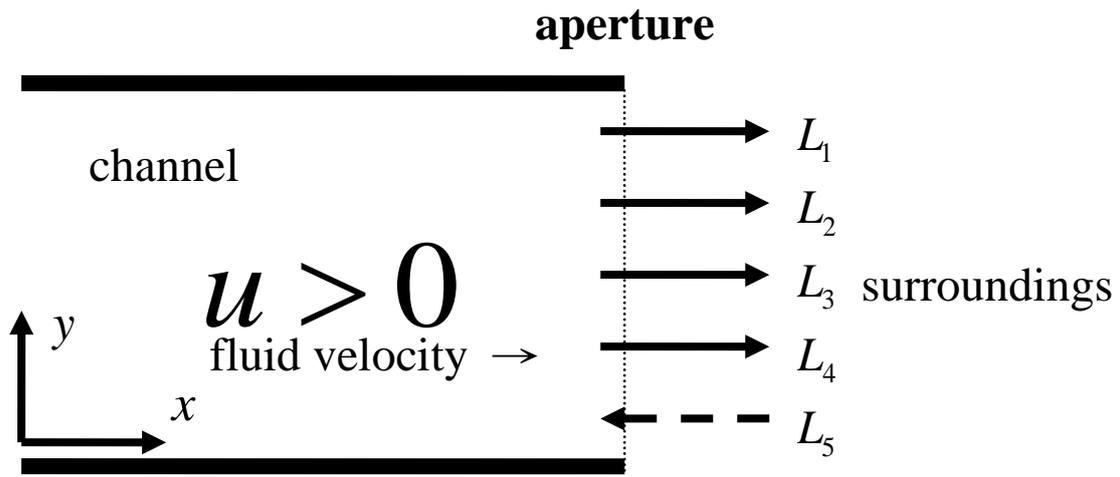
以 $\frac{\partial p}{\partial \tau} = 0$ ，方程式(3-96)將如下：

$$\frac{1}{2c'} [L_4(u' + c' - u) - L_5(u' - c' - u)] = 0 \tag{3-98}$$

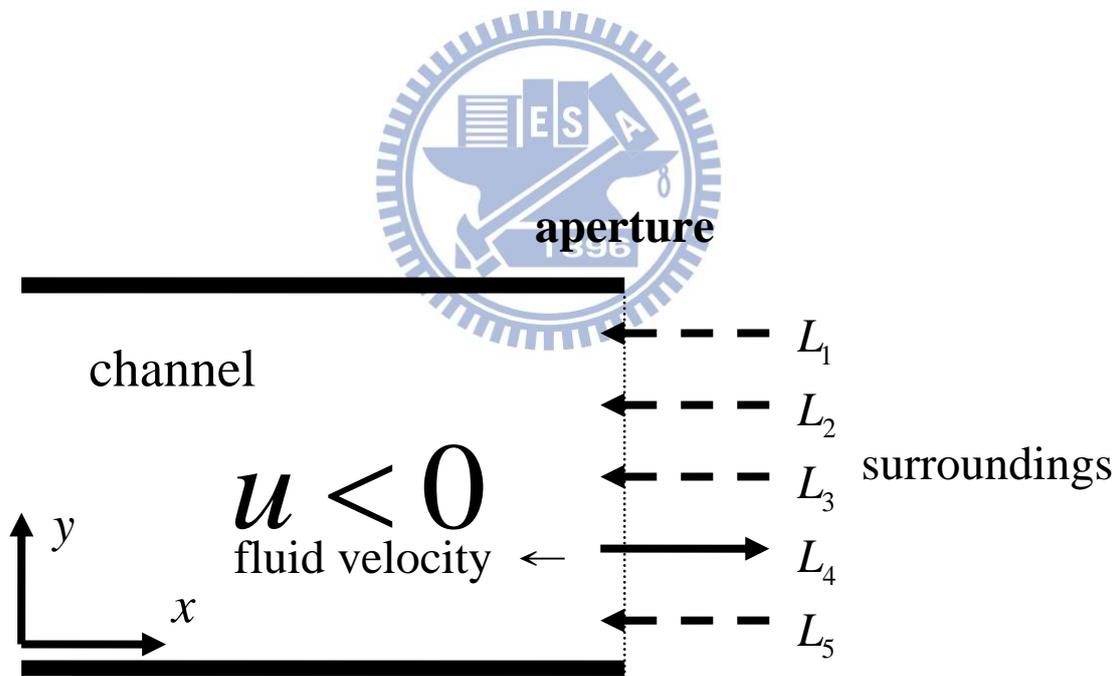
因此 L_5 可定義如下：

$$L_5 = \frac{(u' + c' - u)}{(u' - c' - u)} L_4 \tag{3-99}$$

相反地，圖 3-3(b)則為流體從大氣環境往管內流動。 L_4 可由方程式(3-96)直接求得，由於非反射性邊界的關係， L_1 、 L_2 與 L_3 則設定為0。 L_5 則可由方程式(3-99)得到。



(a)



(b)

圖 3-3 L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 與 L_5 於管道兩端的方向性示意圖

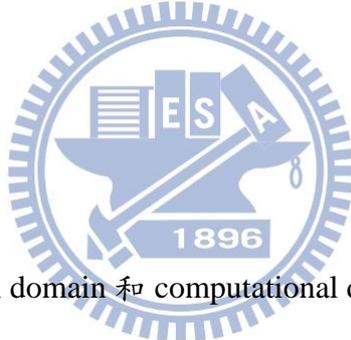
3-7、座標轉換：

本研究為了要使程式的應用範圍更廣，在程式中加入了座標轉換，本節即是推導座標轉換後的方程式變化。首先，原座標系統，也就是卡式座標系統，我們稱作 Physical space (x, y, z) ，轉換過後的曲線座標系統則稱為 Computational space (ξ, η, ζ) 。其關係式如下：

$$\begin{aligned}\tau &= t \\ \xi &= \xi(t, x, y, z) \\ \eta &= \eta(t, x, y, z) \\ \zeta &= \zeta(t, x, y, z)\end{aligned}\tag{3-100}$$

經由 Chain rule 對偏微分作計算，可以知道兩座標間的轉換公式如下：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \tau} + \xi_t \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_t \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_t \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_x \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_y \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \xi_z \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_z \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_z \frac{\partial}{\partial \zeta}\end{aligned}\tag{3-101}$$



由上式可以知道在 physical domain 和 computational domain 之間存在一個轉換矩陣，稱為 Jacobian 轉換矩陣，三維的轉換矩陣如下：

$$J = \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial(x, y, z)} = \frac{1}{x_\xi(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta) - x_\eta(y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi) + x_\zeta(y_\eta z_\xi - y_\xi z_\eta)}\tag{3-102}$$

本研究為在靠近壁面的地方做網格加密的動作，而此加密函數的轉換矩陣，轉換公式如下：

$$Y = H \frac{(2\alpha + \beta) \left(\frac{\beta+1}{\beta-1}\right)^{\frac{\eta-\alpha}{1-\alpha}} + 2\alpha - \beta}{(2\alpha + 1) \left(1 + \left(\frac{\beta+1}{\beta-1}\right)^{\frac{\eta-\alpha}{1-\alpha}}\right)}\tag{3-103}$$

$$\eta = \alpha + (1 - \alpha) \frac{\beta + \frac{(2\alpha + 1)y - 2\alpha}{H}}{\beta - \frac{(2\alpha + 1)y + 2\alpha}{H} + 2\alpha}{\text{Log}\left[\frac{\beta + \frac{(2\alpha + 1)y - 2\alpha}{H}}{\beta - \frac{(2\alpha + 1)y + 2\alpha}{H} + 2\alpha}\right]}\tag{3-104}$$

當程式在做計算時，需要的是偏微分 η_y 及 y_η 的值，其偏微分的結果如下：

$$Y_\eta = -\frac{(2H\beta)\left(\frac{\beta+1}{\beta-1}\right)^{\frac{\eta+\alpha}{1-\alpha}} \text{Log}\left[\frac{\beta+1}{\beta-1}\right]}{(-1+\alpha)(2\alpha+1)\left(\left(\frac{\beta+1}{\beta-1}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} + \left(\frac{\beta+1}{\beta-1}\right)^{\frac{\eta}{1-\alpha}}\right)^2} \quad (3-105)$$

$$\eta_y = -\frac{(-1+\alpha)(2\alpha+1)\left(\frac{\beta+1}{\beta-1}\right)^{\frac{-1+\alpha-\eta}{1-\alpha}} \left(\left(\frac{\beta+1}{\beta-1}\right)^{\frac{\alpha}{-1+\alpha}} + \left(\frac{\beta+1}{\beta-1}\right)^{\frac{\eta}{-1+\alpha}}\right)^2}{2H\text{Log}\beta} \quad (3-106)$$

接著考慮統御方程式：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad (3-107)$$

本研究將黏滯項與非黏滯項拆開，方程式變為：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\partial F_v}{\partial x} + \frac{\partial G_v}{\partial y} + \frac{\partial H_v}{\partial z} \quad (3-108)$$

$$\begin{aligned} \text{LHS} = & \frac{\partial U}{\partial \tau} + \xi_t \frac{\partial U}{\partial \xi} + \eta_t \frac{\partial U}{\partial \eta} + \varsigma_t \frac{\partial U}{\partial \varsigma} \\ & + \xi_x \frac{\partial F}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial F}{\partial \eta} + \varsigma_x \frac{\partial F}{\partial \varsigma} \\ & + \xi_y \frac{\partial G}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial G}{\partial \eta} + \varsigma_y \frac{\partial G}{\partial \varsigma} \\ & + \xi_z \frac{\partial H}{\partial \xi} + \eta_z \frac{\partial H}{\partial \eta} + \varsigma_z \frac{\partial H}{\partial \varsigma} \end{aligned} \quad (3-109)$$

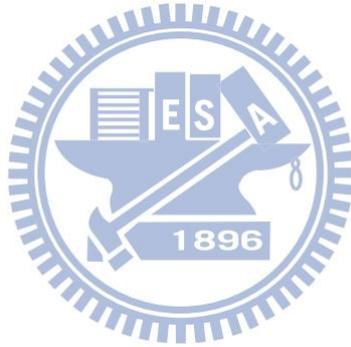
同理對 RHS 也做一樣的計算，最後對 LHS 以及 RHS 同除以轉換矩陣 J，統御方

程式最後結果如下：

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{U}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{J} (\xi_t U + \xi_x F + \xi_y G + \xi_z H) \right] \\ \text{LHS} = & + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1}{J} (\eta_t U + \eta_x F + \eta_y G + \eta_z H) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial \varsigma} \left[\frac{1}{J} (\varsigma_t U + \varsigma_x F + \varsigma_y G + \varsigma_z H) \right] \end{aligned} \quad (3-110)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{J} (\xi_x F_v + \xi_y G_v + \xi_z H_v) \right] \\
\text{RHS} = & + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1}{J} (\eta_x F_v + \eta_y G_v + \eta_z H_v) \right] \\
& + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{1}{J} (\zeta_x F_v + \zeta_y G_v + \zeta_z H_v) \right]
\end{aligned} \tag{3-111}$$

上式即為本研究在做計算時所使用的統御方程式，在計算時一樣使用 Roe scheme 來解非黏滯性項的答案，並且加入 Preconditioning 法以及最後使用 LUSGS implicit 法來做 Dual-time stepping 的暫態計算。



3-8、沉浸邊界法：

處理複雜形狀的能力是數值模擬的重大問題之一。許多實際之移動或變形邊界之非線性流體系統問題模擬，不可避免的需要於每個時間項網格重建，因而造成計算困難度。過去於複雜計算領域中，貼體法(Body-fitting)即沉浸邊界法(Immersed boundary method)成功的模擬外形複雜流場。Peskin[28]發展沉浸邊界法以作為廣義座標變換的替換，於控制方程式中增加外力項以代表流場內任何形狀的物體，以避免轉換過程。增加流體內特定節點之外力項可模擬物體於流場之影響，故可在卡式座標中模擬任意形狀物體。沉浸邊界法的開發，除了適當的處理流場外型複雜度，同時於網格節點保留計算結果之準確性。因此在卡式座標中可處理移動或變形之複雜外型流場問題，卻不需要隨時間產生網格。沉浸邊界法的特色在於運動方程式中加入源項。為了產生邊界效應所提出的外力方程式通常有兩種方式。分別為連續外力逼近與離散外力逼近。第一種方法主要是在離散微分方程之前加入外力方程式。連續外力法的應用將流經沉浸彈性邊界的物理機制耦合於方程式中。離散外力法則是在方程式被離散後才引入外力項，因此相較於連續外力逼近，離散外力逼近較不直接，而加入外力方式與離散方式有直接關係，可使沉浸邊界有較準確表現。根據沉浸邊界上不同描述邊界條件的方法，離散外力法可分類為間接跟直接使用邊界條件。而本研究採用的是離散外力法，藉由引入人工外力項於動量方程式中以模擬複雜外型，外加的人工外力 F_B 於沉浸邊界鄰近點之動量方程式可表示為：

$$\frac{\partial U}{\partial t} = - \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) + \rho F_B \quad (3-112)$$

上式中外力項 F_B 可由下式之離散動量方程式獲得

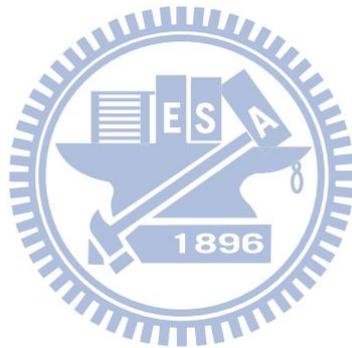
$$U^{n+1} = U^n + \Delta t (Rhs + \rho F_B) = V_s \quad (3-113)$$

此處外加力 F_B 僅作用於物體邊界或物體內，經由每一次時間步伐計算獲得以滿足沿任意沉浸邊界上之速度使其等於其給定之速度函數 V_s 。施加之外力項可表示

為

$$F_B = \frac{1}{\rho} \left(\frac{V_s - U^n}{\Delta t} - Rhs \right) \quad (3-114)$$

上式中 Δt 為時間增量， V_s 為沿邊界上給定之速度，RHS 為動量方程式中之壓力梯度、對流及擴散項組成。如果對於靜止物體，給定之無滑動邊界條件 $V_s = 0$ ，在此研究中 V_s 等於移動薄板的速度。



第四章 結果與討論

4-1、三維管道加裝移動平板強制對流：

本研究探討往復運動的薄板對高溫壁面附近溫度與速度場的影響，並說明高溫壁面上的平均紐瑟數隨著薄板運動而產生的變化，進而比較不同的薄板運動速度對流場與溫度場的影響與對熱傳效率的提升。本研究總共計算兩個不同雷諾數下各兩種薄板速度的案例，如表格 4-1 所示。接著要說明的是，本研究在程式計算時為有因次的計算，但是輸出的數據在做圖時轉為無因次的表示法，主要是為了方便討論與使用無因次之參數。以下為無因次化結果：

$$X_1 = \frac{x_1}{w_1}, \quad X_2 = \frac{x_2}{w_1}, \quad X_3 = \frac{x_3}{w_1},$$
$$U_1 = \frac{u_1}{u_0}, \quad U_2 = \frac{u_2}{u_0}, \quad U_3 = \frac{u_3}{u_0}, \quad V_b = \frac{v_b}{u_0}$$
$$T^* = \frac{T - T_c}{T_h - T_c}, \quad T_c = 298K, \quad T_h = 310K$$

而為了檢驗網格的適當性，共做了三種網格數目測試，分別為 150x30x30、200x40x40、210x45x45 三種，採用管道正中央靠近壁面處沿流動方向的局部紐塞數分布來觀察，其中紐塞數的定義如下式：

$$Nu_{x_1} = \frac{w_1}{k_0(T_h - T_0)} \left[k(T) \frac{\partial T}{\partial x_2} \right] \quad (4-1)$$

如圖 4-1 所示，可觀察到 150x30x30 的結果與其餘結果差異較大，而 200x40x40 與 210x45x45 的結果相當接近，為了節省計算時間上的耗費，故採用兩者中網格數較小的 200x40x40 為模擬條件。

此外為了驗證程式正確性及出口完全發展流的邊界條件，根據 White[32]的管流出口速度解析解做比較，其出口速度解析解表示如下：

$$u_1(x_2, x_3) = \frac{4w_1^2}{\mu\pi^3} \left(-\frac{dp}{dx_1}\right) \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{i-1}{2}} \left[1 - \frac{\cosh\left(\frac{i\pi x_3}{w_1}\right) \cos\left(\frac{i\pi x_2}{w_1}\right)}{\cosh\left(\frac{i\pi}{2w_1}\right) i^3} \right] \quad (4-2)$$

從圖 4-2 結果可觀察到，本研究的數值解與文獻上的解析解差異非常小，故驗證

此程式的正確性。

以下分析其中兩種案例，一個為雷諾數 200、無因次薄板移動速度為 $V_b = 1/4$ 的結果，另一個為雷諾數 600、無因次薄板移動速度為 $V_b = 1/2$ 的結果。而為了結果的正確性，皆觀察其呈現 quasi-steady 後的結果來做分析，圖 4-3 及 4-4 為整個加熱壁面隨時間的平均紐塞數，其紐塞數表示如下：

$$\overline{Nu} = \frac{1}{A} \int_{x_1} \int_{x_3} Nu_{x_3} dx_3 dx_1 \quad (4-3)$$

從圖 4-3 及 4-4 可看出這兩個模擬在三個周期後呈現 quasi-steady 的情形。

圖 4-5(a)~圖 4-5(c)為雷諾數為 200、無因次薄板移動速度為 $V_b = 1/4$ ，薄板往復運動前半週期從位置 p_r 向 p_l 位置運動，於加熱區上方前中後三個不同位置 x_2x_3 截面的流場示意圖，此處特別說明本研究的流場速度向量皆為三維顯示在二維平面的表現。如圖 4-5(a)所示，此為薄板由 p_r 起始位置向左移動了一個網格的距離，位於加熱區 AB 上方的 x_2x_3 截面流場圖，可以看出由於此截面接近管道流體接觸薄板的邊緣處有較激烈的速度場，而薄板右邊附近的流場由於前個時階板子為向右移動，此時為折返後往左移動，加上薄板向左移動會造成流體會向薄板右方遞補類似迴流效應而有向下的速度向量。圖 4-5(b)及圖 4-5(c)則為同個時階下位於加熱區 CD 與 EF 上方的 x_2x_3 截面流場圖，可以看到薄板左邊有類似回流的區域，此為因為上個時階薄板仍為向右移動故三維流場中還大多是向右的趨勢，並造成與緊鄰薄板左邊的地方有向上的速度向量。圖 4-6(a)~圖 4-6(c)為對應前面圖 4-5(a)~圖 4-5(c)相同位置的 x_2x_3 截面等溫線示意圖。圖 4-6(a)為對應圖 4-5(a)流場的等溫線示意圖，接近移動薄板的等溫線由於流場速度較大熱傳量較多所以較緊密，反之靠近壁面的地方相對較疏。圖 4-6(b)及圖 4-6(c)則為對應前面圖 4-5(b)及圖 4-5(c)的等溫線分佈圖，可以看到薄板左側受到類似回流效應衝擊薄板左方的區域有較緊密的等溫線，而薄板右側因為區域流場速度較小進而造成熱傳較差等溫線也較疏。圖 4-7(a)~圖 4-7(c)則為對照前面相同時階與位置下加熱壁面紐塞數表現，圖中的虛線部份為相同條件的模型下，未加入移動薄板時的紐塞數分佈。

可以更清楚看出薄板左側受到回流衝擊有較高的熱傳量，故其紐塞數有較高的表現，而整體的紐塞數並無特別突出的提昇。

而圖 4-8(a)為薄板由向左移動到管道中央位置，位於加熱區 AB 上方的 x_2x_3 截面流場圖，一樣可以看出緊鄰薄板處有較激烈的速度場。圖 4-8(b)及圖 4-8(c)則為同個時階下位於加熱區 CD 與 EF 上方的 x_2x_3 截面流場圖，可以看到薄板右邊的流體為了填補薄板向左移動的空間而有迴流效應。圖 4-9(a)~圖 4-9(c)為對應前面圖 4-8(a)至圖 4-8(c)相同位置的 x_2x_3 截面等溫線示意圖。圖 4-9(a)為對應圖 4-8(a)流場的等溫線示意圖，接近移動薄板的等溫線由於流場速度較大熱傳量較多所以較緊密，反之靠近壁面的地方相對較疏。圖 4-9(b)及圖 4-9(c)則為對應圖 4-8(b)及圖 4-8(c)的等溫線分佈圖，薄板右側不遠處因為流場回流衝擊關係有稍微緊密一點的等溫線分佈。圖 4-10(a)至圖 4-10(c)則為對照前面相同時階與位置下加熱壁面紐塞數表現，可以看出與等溫線較緊密地方相對應處有較好的熱傳效率和較高的紐塞數，其餘地方相對於虛線部份未加入薄板的比較，並無較好的紐塞數表現，這是因為在雷諾數 200 的低速管流狀態下，無因次薄板移動速度 $V_b = 1/4$ 為相對很慢的速度，因而對於主流方向而有類似干擾的影響，造成流經加熱區的速度場下降，所以薄板破壞加熱壁面的溫度邊界層的效果被此效應給降低，故其整體紐塞數並無較好的趨勢。

而圖 4-11(a)為薄板向左移動到 p_1 位置，位於加熱區 AB 上方的 x_2x_3 截面流場圖，一樣可以看出由於此截面接近管道流體接觸薄板的邊緣處有較激烈的速度場。圖 4-11(b)及圖 4-11(c)則為同個時階下位於加熱區 CD 與 EF 上方的 x_2x_3 截面流場圖，可以看到薄板右邊的流體與前面薄板移動到中央時相同的迴流效應。圖 4-12(a)~圖 4-12(c)為對應前面圖 4-11(a)~圖 4-11(c)相同位置的 x_2x_3 截面等溫線示意圖。圖 4-12(a)為對應圖 4-11(a)流場的等溫線示意圖，一樣可以觀察到接近移動薄板的等溫線由於流場速度較大熱傳量較多所以較緊密，反之靠近壁面的地方相對較疏。圖 4-12(b)及圖 4-12(c)則為對應圖 4-11(b)及圖 4-11(c)的等溫線分佈圖，整體趨勢與前面薄板移動到中央時類似，而薄板左側因為空間較小造成區域速度

場強度較低以及熱堆積的問題，造成其等溫線分佈較為稀疏。圖 4-13(a)至圖 4-13(c)則為對照前面相同時階與位置下加熱壁面紐塞數表現，可以看到對應前面等溫線圖相符合的熱傳表現，而此時的整體熱傳效果與未加入薄板相比，有些微的提昇但不明顯，這也是因為如前個時階所述的薄板移動干擾主流的影響。

接下來圖 4-14(a)至圖 4-14(c)為雷諾數為 600、無因次薄板移動速度為 $V_b = 1/2$ ，薄板往復運動前半週期從位置 p_r 向 p_l 位置運動，於加熱區上方前中後三個不同位置 x_2x_3 截面的流場示意圖。如圖 4-14(a)所示，此為薄板由 p_r 起始位置向左移動了一個網格的距離，位於加熱區 AB 上方的 x_2x_3 截面流場圖，跟前面較低雷諾數案例有類似的趨勢，薄板右邊附近的流場由於前個時階板子為向右移動，此時為折返後往左移動，加上薄板向左移動會造成流體會向薄板右方遞補類似迴流效應而有向下的速度向量，此現象較前面低雷諾數時更為顯著。圖 4-14(b)及圖 4-14(c)則為同個時階下位於加熱區 CD 與 EF 上方的 x_2x_3 截面流場圖，同樣的也跟前面較低雷諾數的流場趨勢類似，薄板左邊一樣有類似回流的區域。圖 4-15(a)~圖 4-15(c)為對應前面圖 4-14(a)~圖 4-14(c)相同位置的 x_2x_3 截面等溫線示意圖。圖 4-15(a)為對應圖 4-14(a)流場的等溫線示意圖，可以看到由於雷諾數的提昇，等溫線更為緊密。圖 4-15(b)及圖 4-15(c)則為對應前面圖 4-14(b)及圖 4-14(c)的等溫線分佈圖，可以看到薄板左側受到類似迴流效應衝擊薄板左方的區域的現象較低雷諾數時更為明顯。圖 4-16(a)~圖 4-16(c)則為對照前面相同時階與位置下加熱壁面紐塞數表現，圖中的虛線部份為雷諾數 600，未加入移動薄板時模型的紐塞數分佈，可以看出整體的紐塞數都有非常顯著的上升。由圖 4-16(a)中可看到，此位置為 AB 上方的紐塞數分佈，此位置接近管道入口處且為薄板邊緣，流場速度較大加上薄板右側由於上個時階與這個時階的接連薄板掃過，造成鄰近薄板右側的溫度邊界層一直被破壞，故有明顯較高的紐塞數，而圖 4-16(b)為 CD 上的紐塞數分佈，也可看到對應前面圖 4-15(b)等溫線，薄板左側受到迴流衝擊有較高的熱傳量，故其紐塞數有較高的表現。

而圖 4-17(a)為薄板向左移動到管道中央位置，位於加熱區 AB 上方的 x_2x_3

截面流場圖，一樣在緊鄰薄板附近有較大的速度場。圖 4-17(b)及圖 4-17(c)則為同個時階下位於加熱區 CD 與 EF 上方的 x_2x_3 截面流場圖，一樣可以看到與前面低雷諾數類似的趨勢，薄板右邊的流體為了填補薄板想左移動的空間而有迴流效應。圖 4-18(a)~圖 4-18(c)為對應前面圖 4-17(a)~圖 4-17(c)相同位置的 x_2x_3 截面等溫線示意圖。圖 4-18(a)為對應圖 4-17(a)流場的等溫線示意圖，接近移動薄板的等溫線由於流場速度較大熱傳量較多所以較緊密，反之靠近壁面的地方相對較疏。圖 4-18(b)及圖 4-18(c)則為對應圖 4-17(b)及圖 4-17(c)的等溫線分佈圖，薄板右側不遠處因為流場回流衝擊關係有較緊密的等溫線分佈，此與前面低雷諾數趨勢類似。圖 4-19(a)~圖 4-19(c)則為對照前面相同時階與位置下加熱壁面紐塞數表現，可以看到相對於未加入薄板的虛線，紐塞數大幅提昇，從紐塞數分佈圖上，可以發現緊鄰薄板右側的紐塞數並沒有因為薄板剛掃過而馬上提高許多，而是在右方稍遠一點區域有較高的紐塞數，此是因為鄰近薄板的地方在此瞬時還未有大量流體補近，故鄰近薄板的加熱面熱傳幾乎以熱傳導為主，而右邊一點的地方受到右方回流衝擊而有較好的熱傳，故其紐塞數反而較高。

而圖 4-20(a)為薄板由向左移動到 p_1 位置，位於加熱區 AB 上方的 x_2x_3 截面流場圖，一樣可以看出由於薄板附近處有較激烈的速度場。圖 4-20(b)及圖 4-20(c)則為同個時階下位於加熱區 CD 與 EF 上方的 x_2x_3 截面流場圖，可以看到薄板右邊的流體與前面薄板移動到中央時相同的迴流效應。圖 4-21(a)~圖 4-21(c)為對應前面圖 4-20(a)~圖 4-20(c)相同位置的 x_2x_3 截面等溫線示意圖。圖 4-21(a)為對應圖 4-20(a)流場的等溫線示意圖，右方的等溫線由於被薄板掃過加上流場速度較大熱傳量較多所以較緊密，而靠近壁面的地方相對較疏。圖 4-21(b)及圖 4-21(c)則為對應圖 4-20(b)及圖 4-20(c)的等溫線分佈圖，整體趨勢與前面薄板移動到中央時類似，而薄板左側因為空間較小造成區域速度場強度較低以及熱堆積的問題，造成其等溫線分佈明顯稀疏。圖 4-22(a)~圖 4-22(c)則為對照前面相同時階與位置下加熱壁面紐塞數表現，可以看到與未加入薄板時相比有非常明顯的提昇，此是因為雷諾數提高整體流場速度變大，加上移動薄板破壞溫度邊界層，故大大提高加

熱壁面的熱傳量。

圖 4-23 及 4-24 為比較在雷諾數 200 以及 600 下有無薄板的熱傳效果，圖中紐塞數為沿流動方向加熱壁面上正中央在一個週期內的平均紐塞數，其表示如下：

$$\overline{Nu}_{x_1} = \frac{1}{t_p} \int_t Nu_{x_1} dt, \quad t_p = \text{time of a cycle} \quad (4-4)$$

在圖 4-23 雷諾數 200 的模擬結果中，由於進口速度較慢加上薄板的移動，會造成類似阻擾流體方向的流動，所以無論是薄板移動速度 $V_b = 1/4$ 或是 $V_b = 1/2$ 其熱傳增益的效果比較不明顯。圖 4-24 中為雷諾數 600 的結果比較，由於進口速度較大加上薄板移動的交互作用，有效破壞加熱壁面上的熱邊界層，無論是 $V_b = 1/4$ 或是 $V_b = 1/2$ 的結果，對於管道下游的熱傳增益都非常明顯。

表格 4-2 為兩個不同雷諾數下各兩種薄板速度，薄板移動一週期加熱區上平均紐塞數的整理，為了方便觀察熱傳效果，定義一熱傳增益 En ，其表示如下：

$$En = \frac{(Nu)_{with \ block} - (Nu)_{without \ block}}{(Nu)_{without \ block}} \quad (4-5)$$

$$\text{where } (Nu) = \frac{1}{t_p} \int_t \overline{Nu} dt, \quad t_p = \text{time of a cycle}$$

與未加入薄板的空管道相比，可以看出在雷諾數 200、無因次薄板移動速度為 $V_b = 1/4$ 時，由於進口速度較低，其薄板移動反而阻礙主流方向的速度強度，造成平均紐塞數反而比未加入薄板時稍低。而在雷諾數 600 時，無論無因次薄板移動速度 $V_b = 1/4$ 或 $V_b = 1/2$ ，其平均紐塞術與未加入薄板時相比，有 40~50% 的提昇。

表格 4-1 本研究模擬之兩個不同雷諾數下各兩種薄板速度的案例

	Re	Velocity of slender block
Case1	200	$U_b = 1/4$
Case2	200	$U_b = 1/2$
Case3	600	$U_b = 1/4$
Case4	600	$U_b = 1/2$

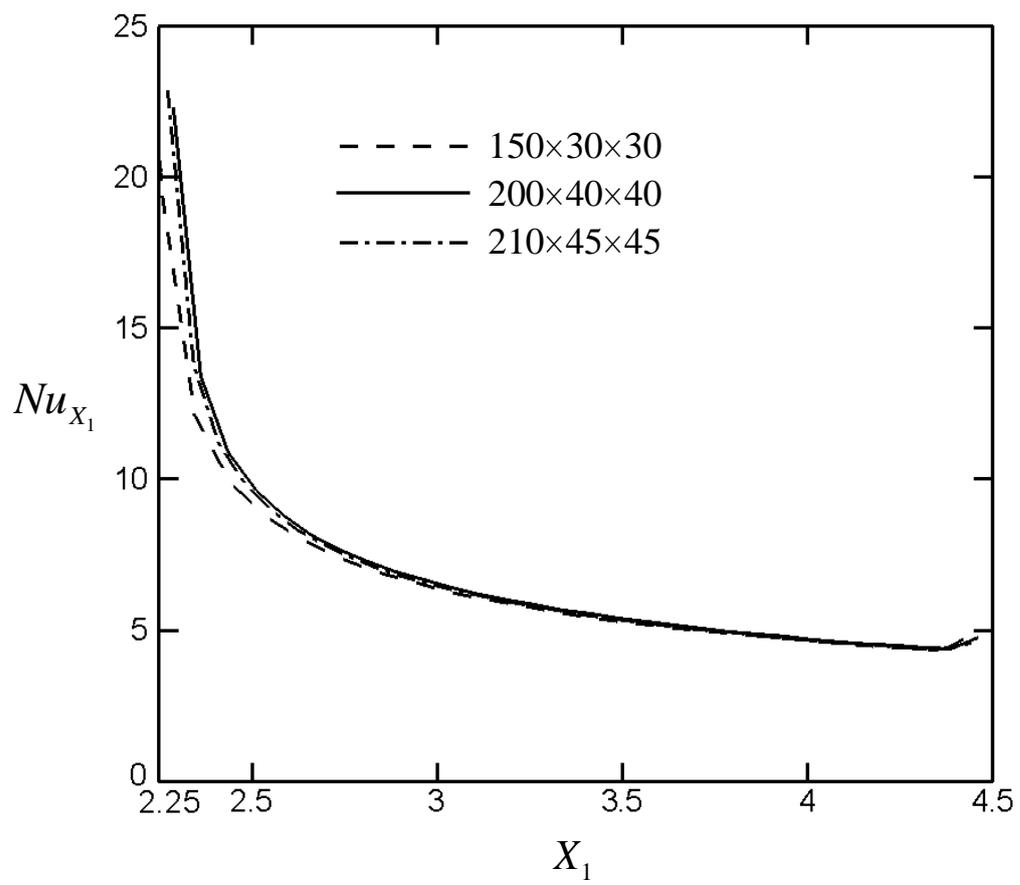


圖 4-1 網格測試圖

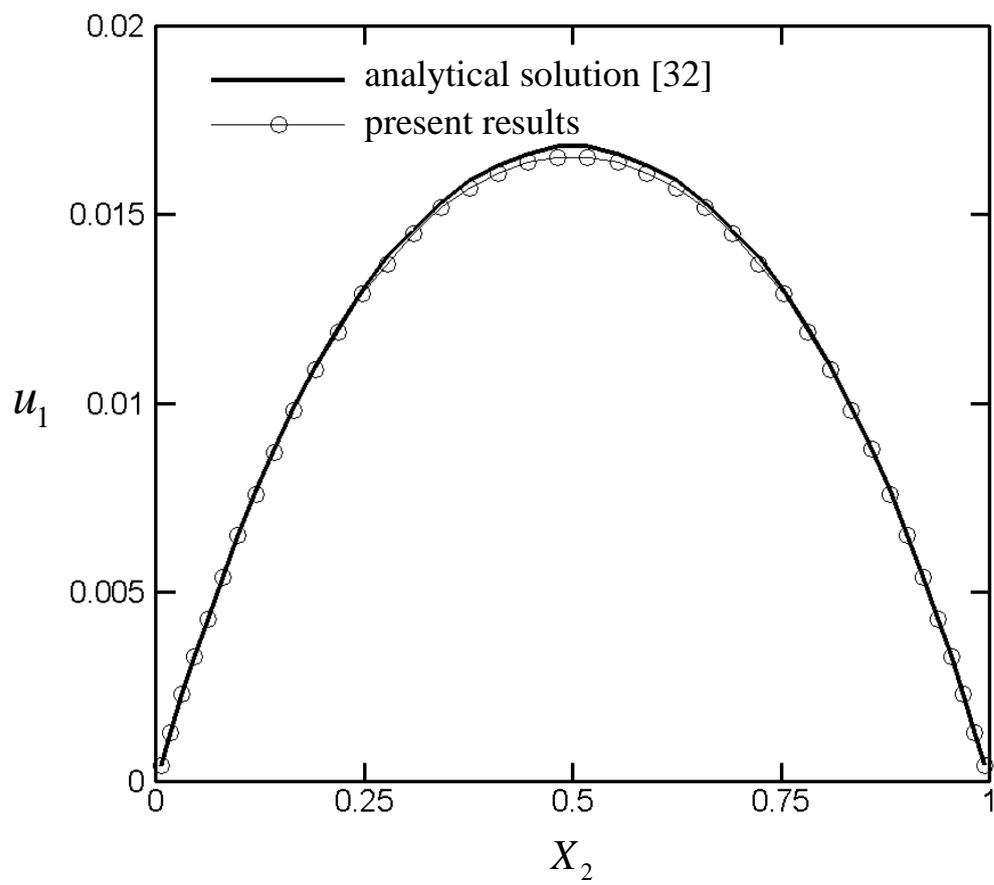


圖 4-2 解析解與數值解之比較

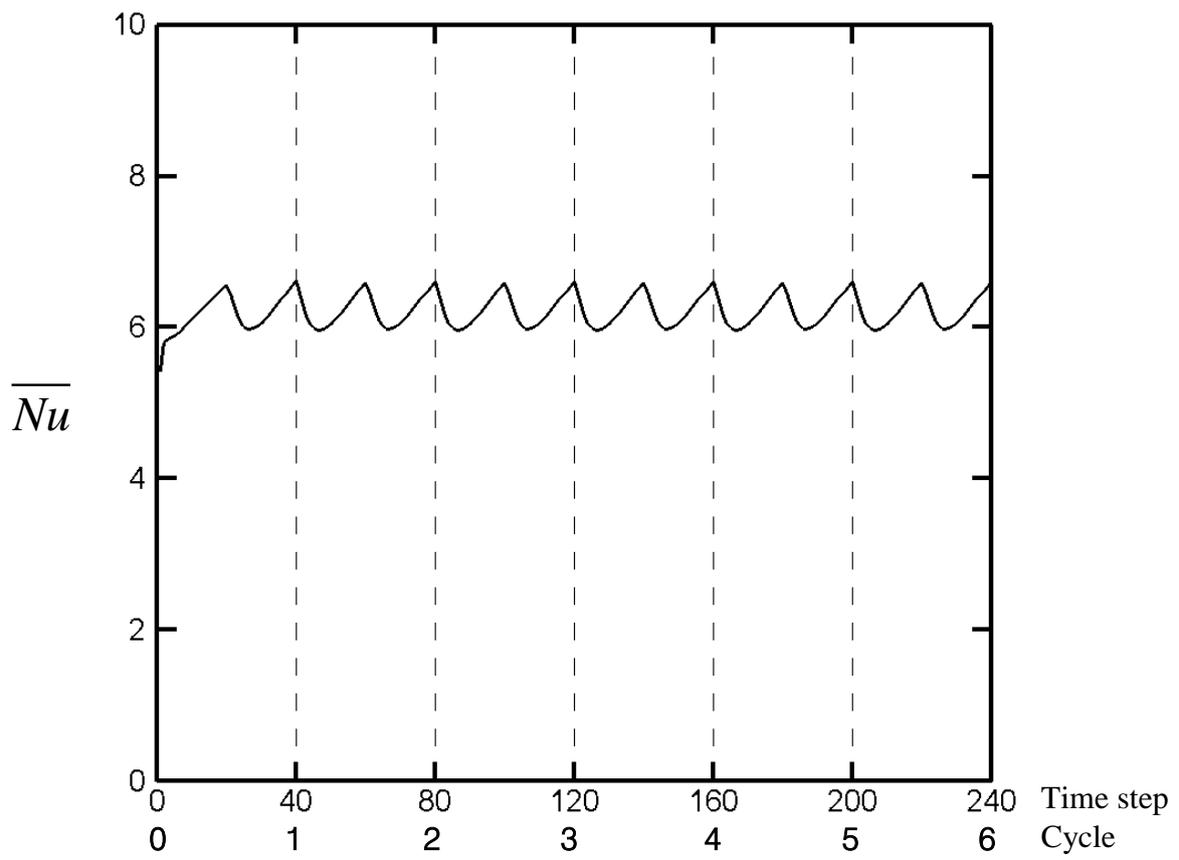


圖 4-3 雷諾數 200 平均紐塞數隨時間周期變化示意圖

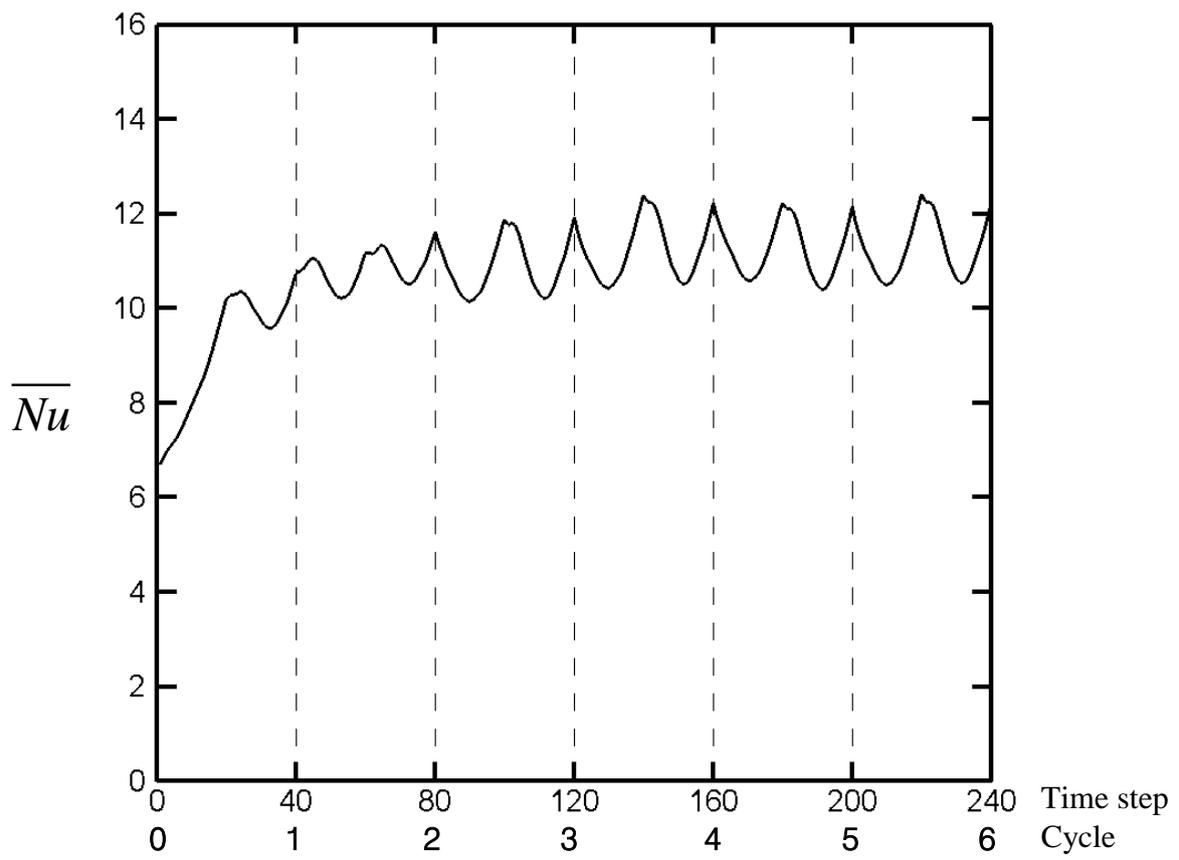


圖 4-4 雷諾數 600 平均紐塞數隨時間周期變化示意圖

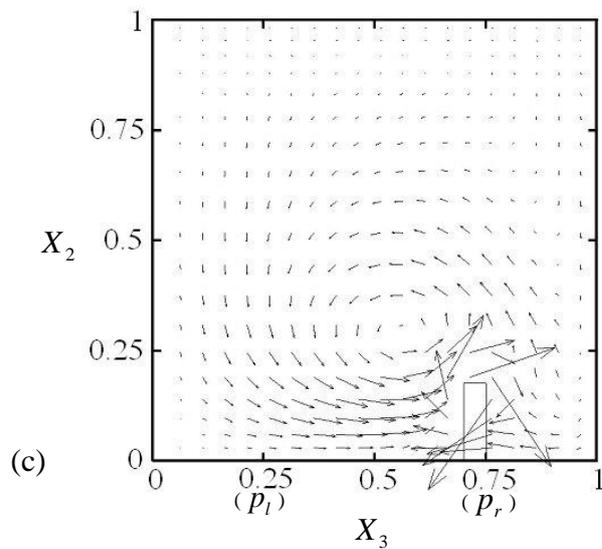
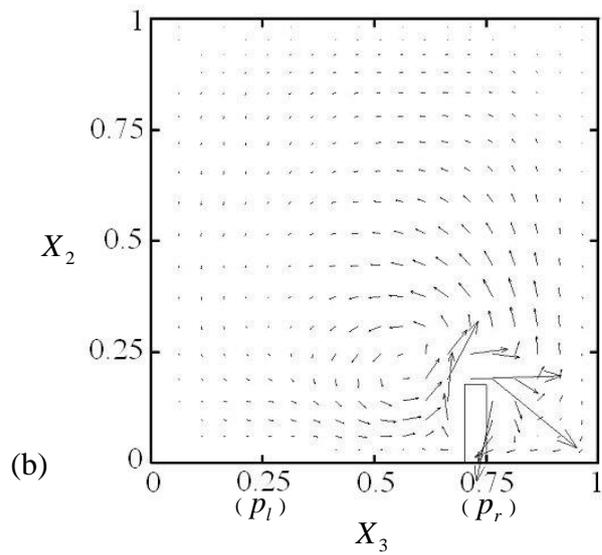
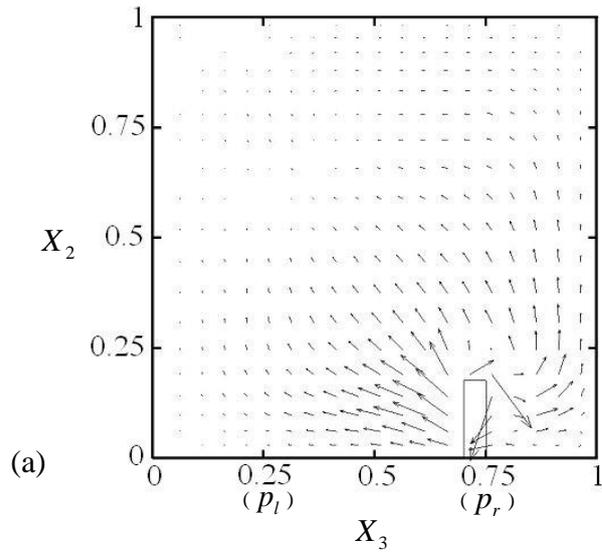


圖 4-5 x_2x_3 平面流場示意圖.(雷諾數=200, $V_b=1/4$)

(a) AB 截面流場

(b) CD 截面流場

(c) EF 截面流場

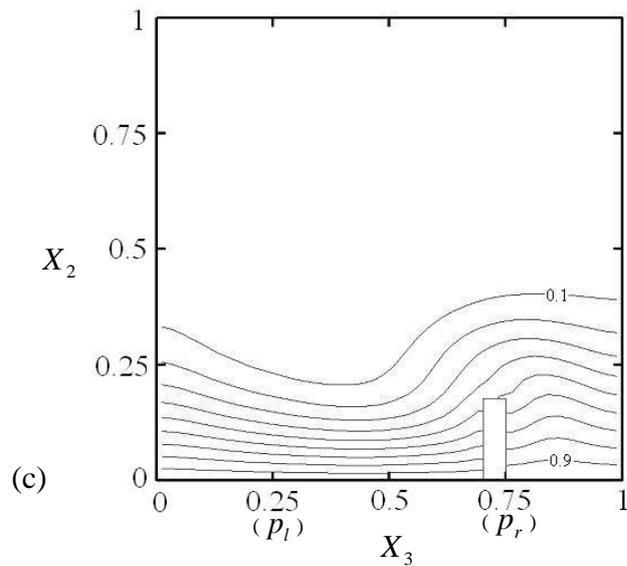
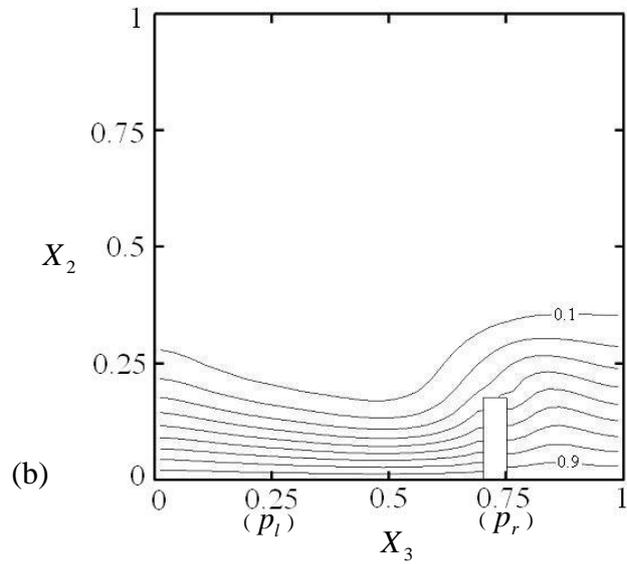
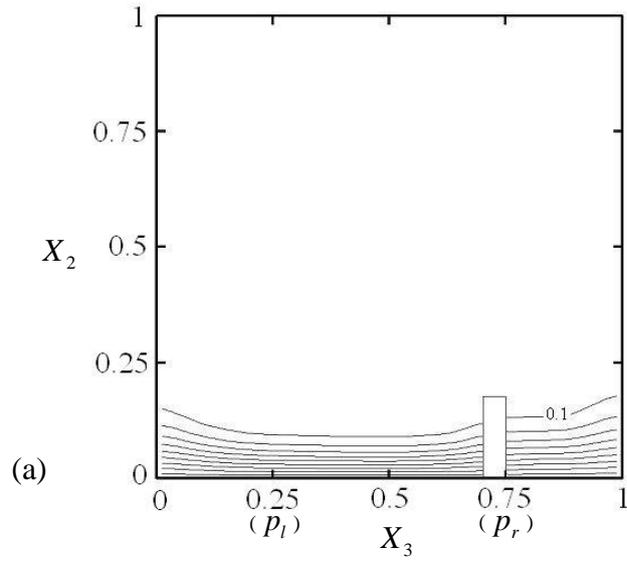


圖 4-6 x_2x_3 平面溫度場示意圖。(雷諾數=200, $V_b=1/4$)

(a) AB 截面溫度場

(b) CD 截面溫度場

(c) EF 截面溫度場

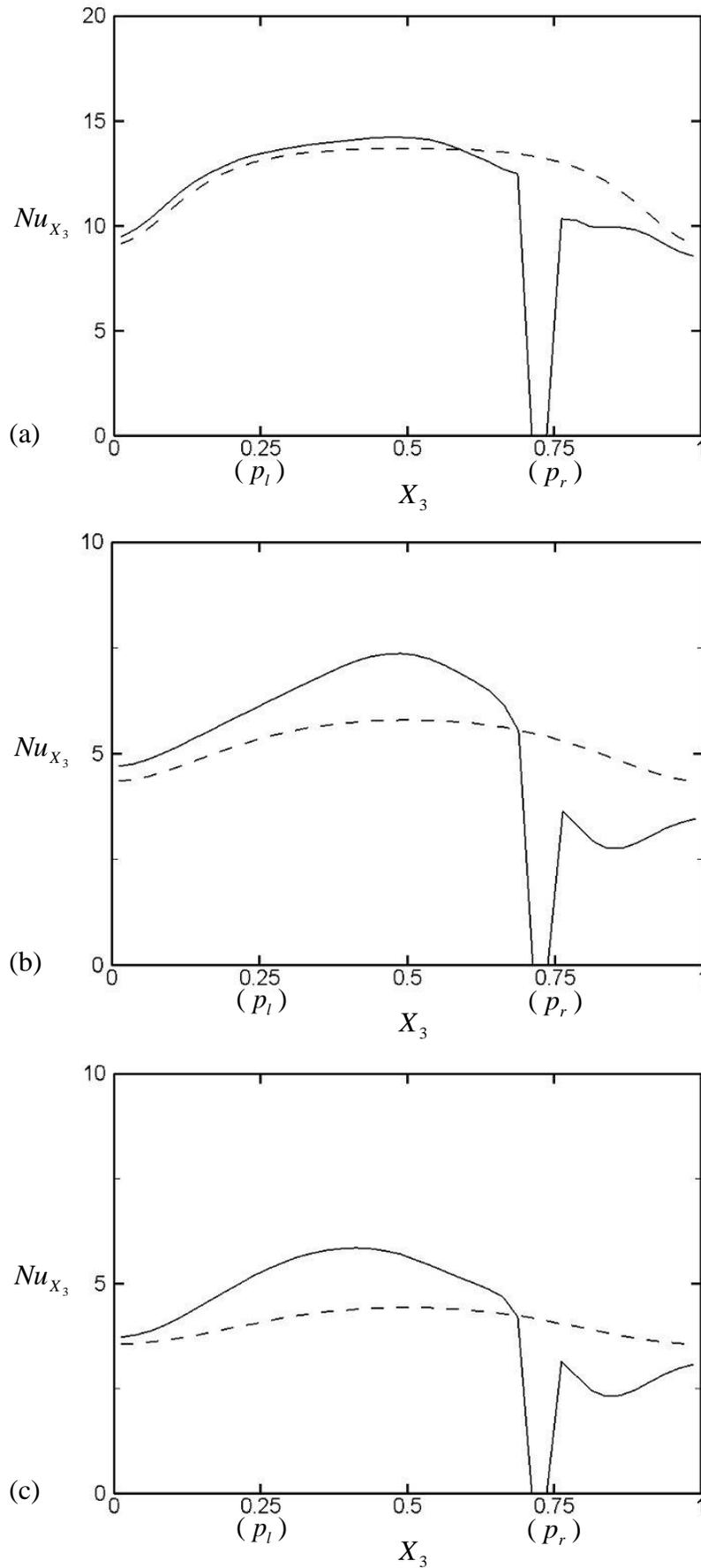


圖 4-7 局部紐塞數示意圖。(雷諾數=200, $V_b=1/4$)

(a) AB 線段上紐塞數分布

(b) CD 線段上紐塞數分布

(c) EF 線段上紐塞數分布

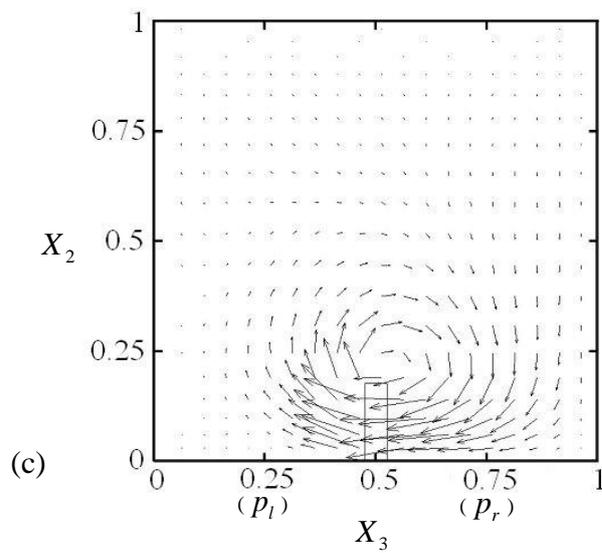
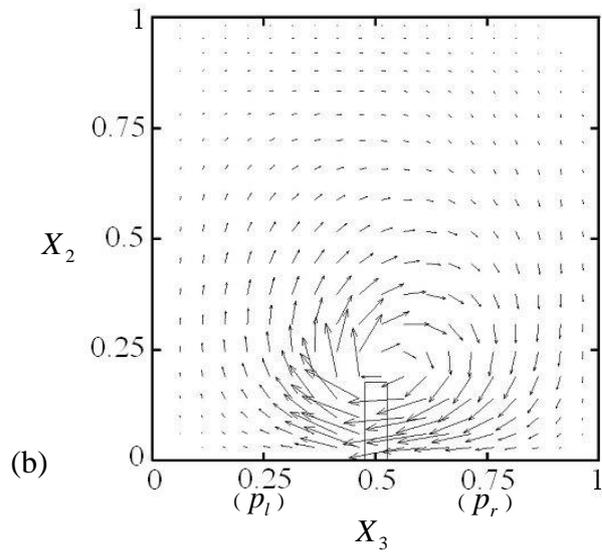
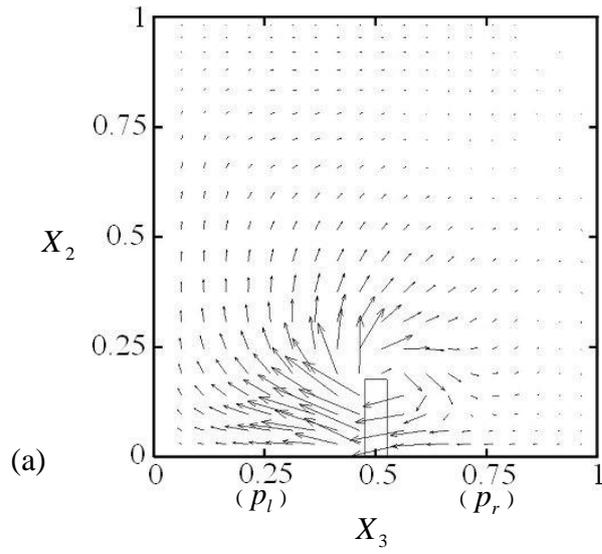


圖 4-8 x_2x_3 平面流場示意圖。(雷諾數=200, $V_b=1/4$)

(a) AB 截面流場

(b) CD 截面流場

(c) EF 截面流場

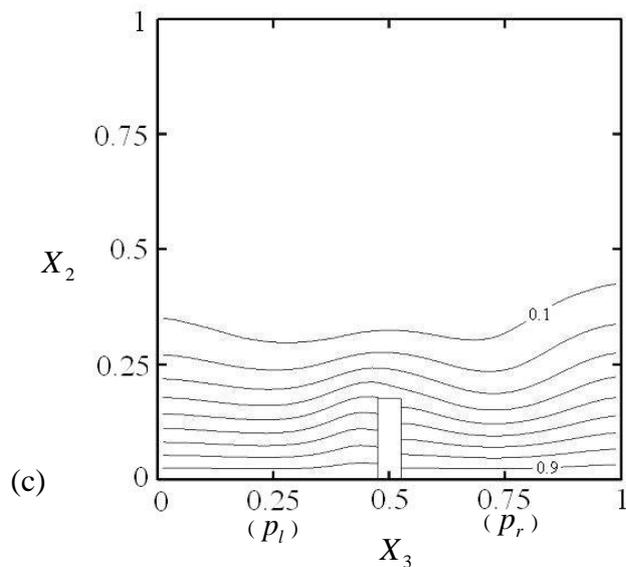
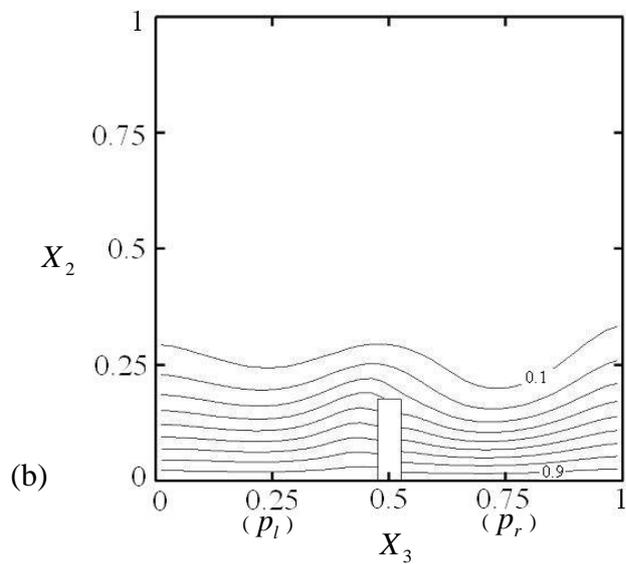
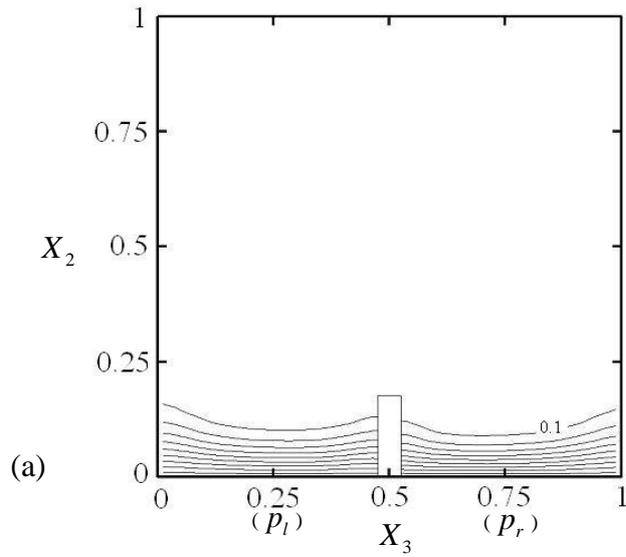


圖 4-9 x_2x_3 平面溫度場示意圖。(雷諾數=200, $V_b=1/4$)

- (a) AB 截面溫度場
- (b) CD 截面溫度場
- (c) EF 截面溫度場

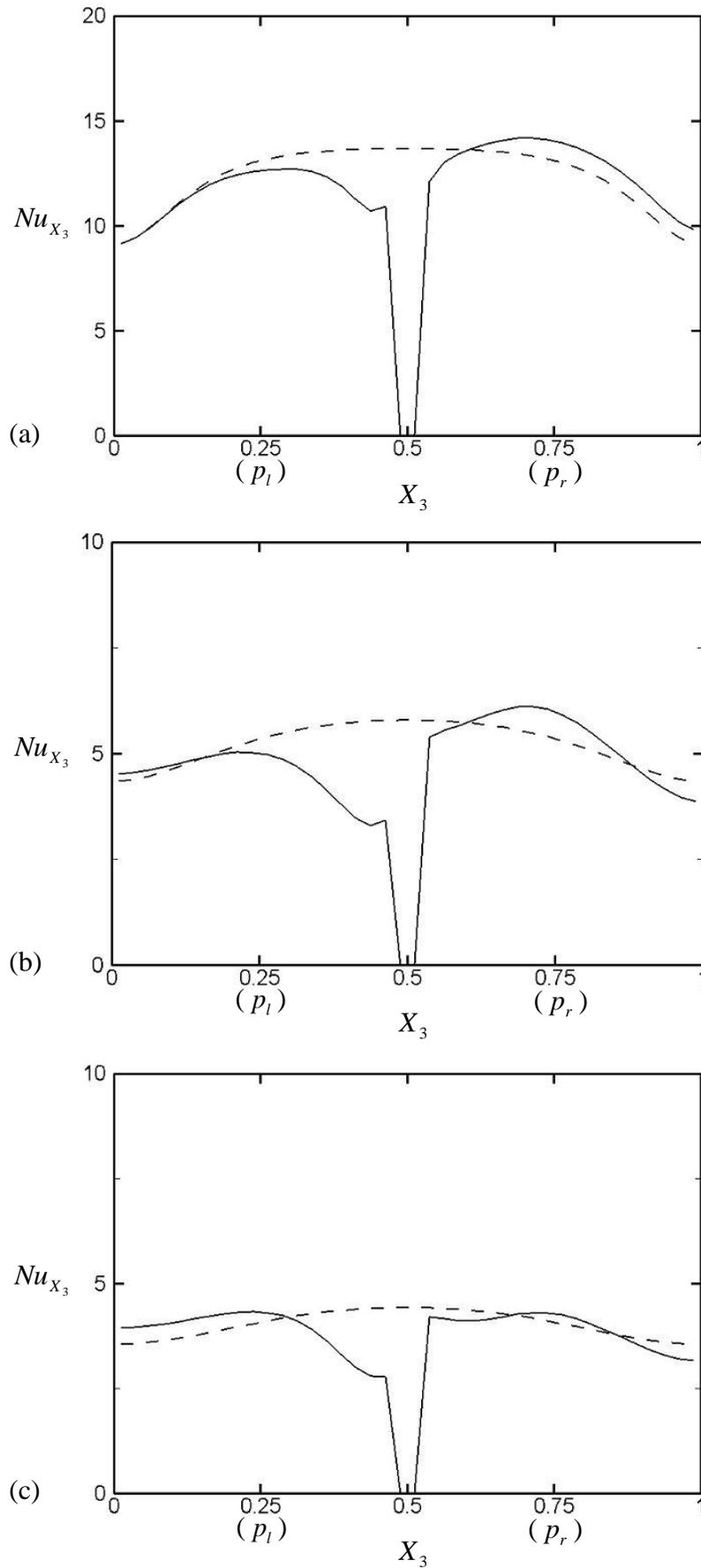


圖 4-10 局部紐塞數示意圖。(雷諾數=200, $V_b=1/4$)
 (a) AB 線段上紐塞數分布
 (b) CD 線段上紐塞數分布
 (c) EF 線段上紐塞數分布

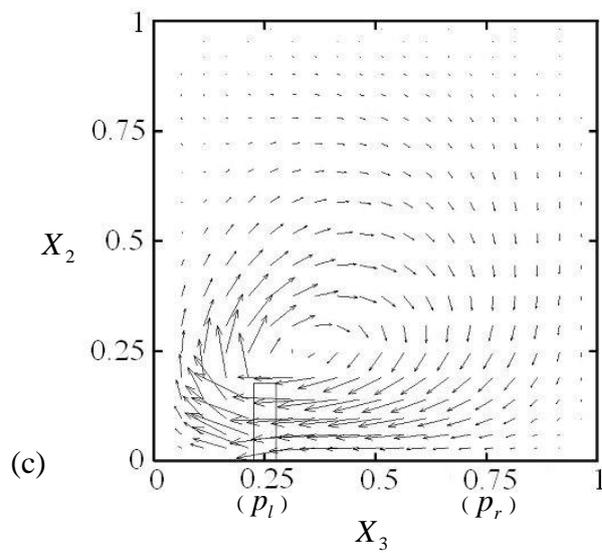
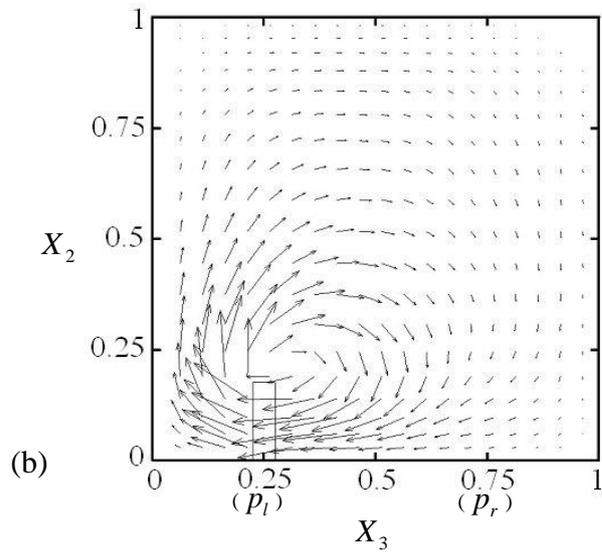
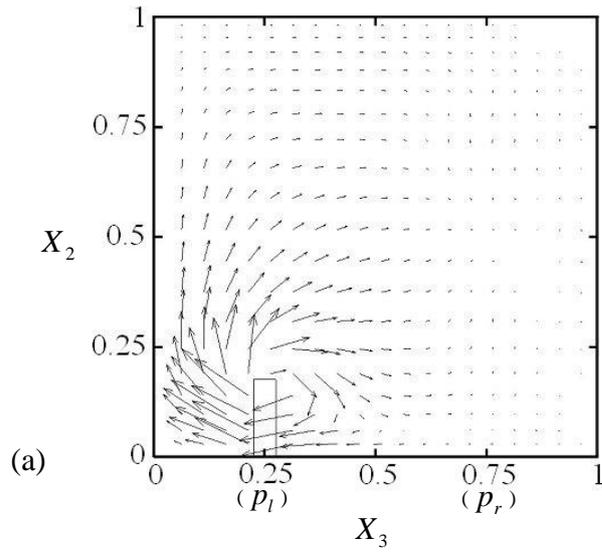


圖 4-11 x_2x_3 平面流場示意圖。(雷諾數=200, $V_b=1/4$)

(a) AB 截面流場

(b) CD 截面流場

(c) EF 截面流場

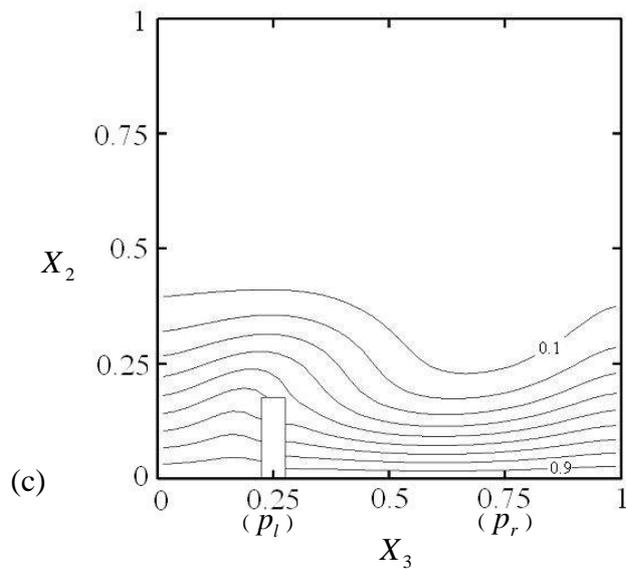
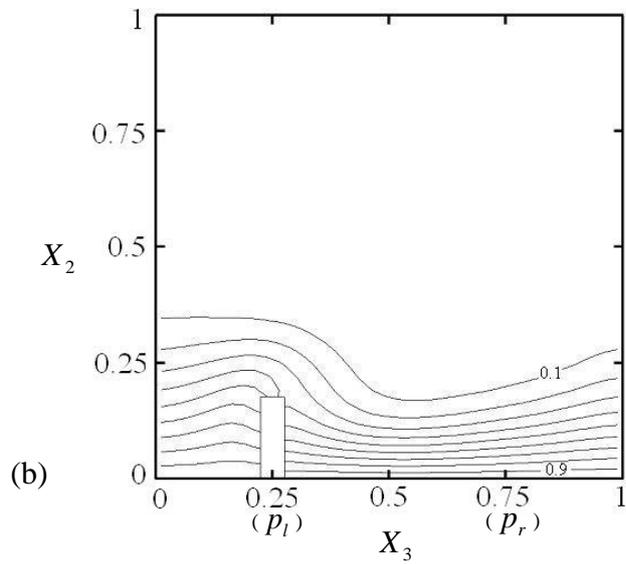
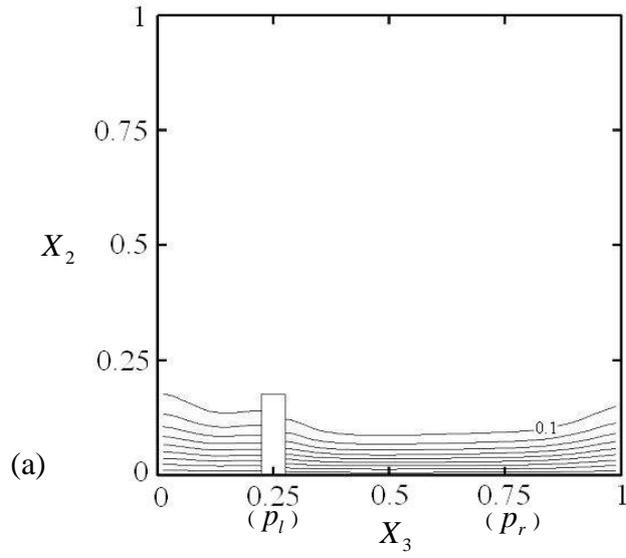


圖 4-12 x_2x_3 平面溫度場示意圖。(雷諾數=200, $V_b=1/4$)

- (a) AB 截面溫度場
- (b) CD 截面溫度場
- (c) EF 截面溫度場

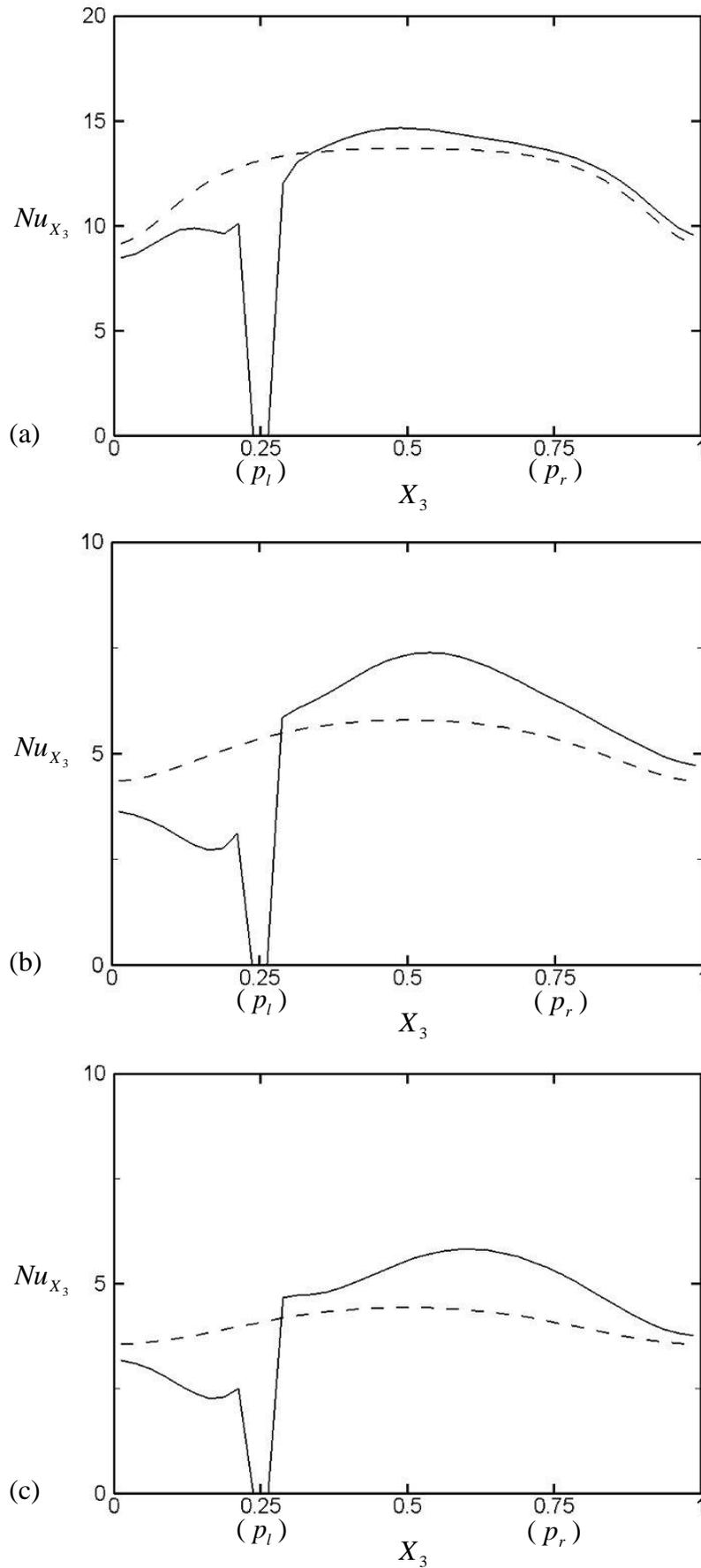


圖 4-13 局部紐塞數示意圖。(雷諾數=200, $V_b=1/4$)
 (a) AB 線段上紐塞數分布
 (b) CD 線段上紐塞數分布
 (c) EF 線段上紐塞數分布

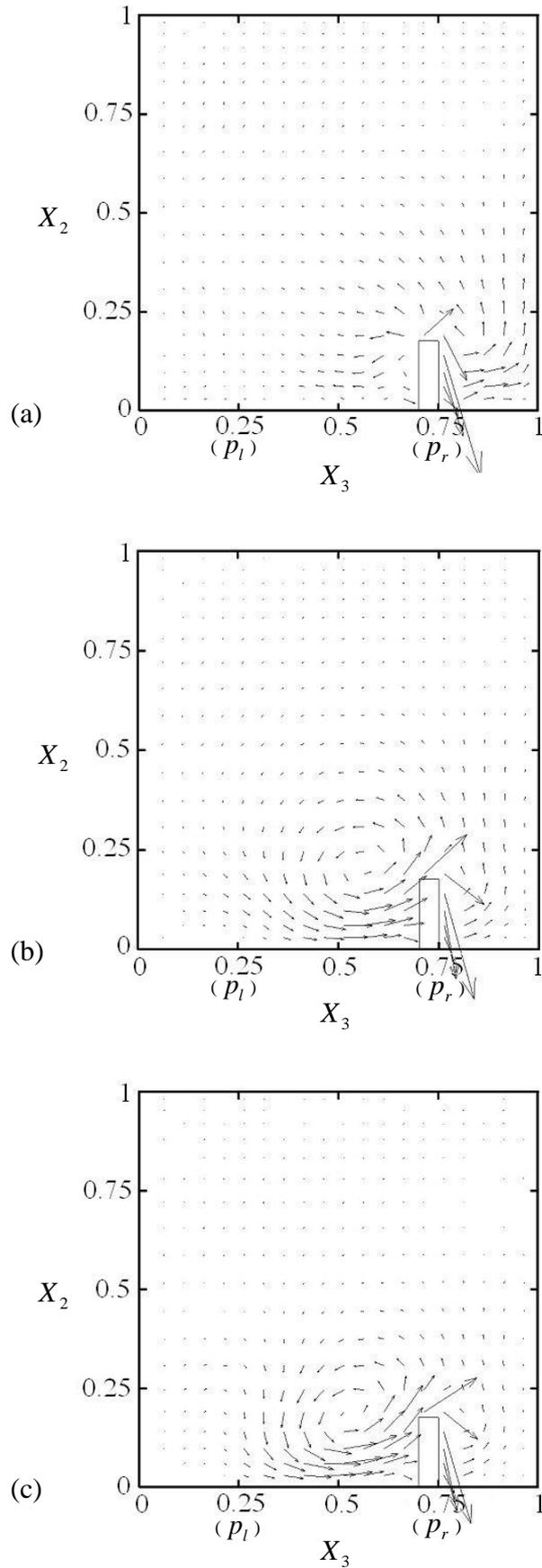


圖 4-14 x_2x_3 平面流場示意圖.(雷諾數=600, $V_b=1/2$)

- (a) AB 截面流場
- (b) CD 截面流場
- (c) EF 截面流場

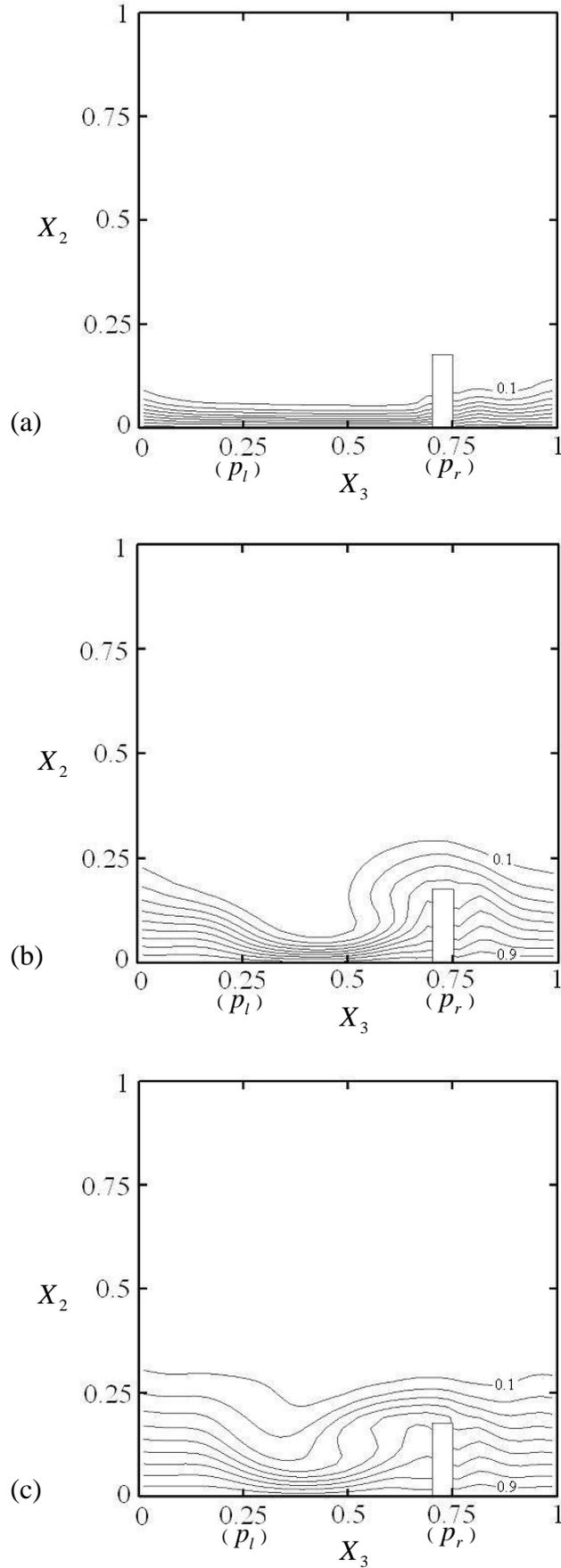


圖 4-15 x_2x_3 平面溫度場示意圖。(雷諾數=600, $V_b=1/2$)

- (a) AB 截面溫度場
- (b) CD 截面溫度場
- (c) EF 截面溫度場

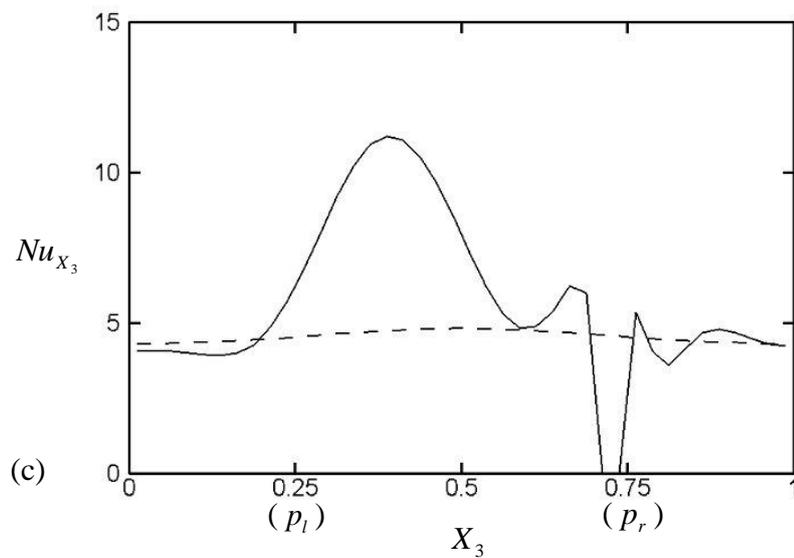
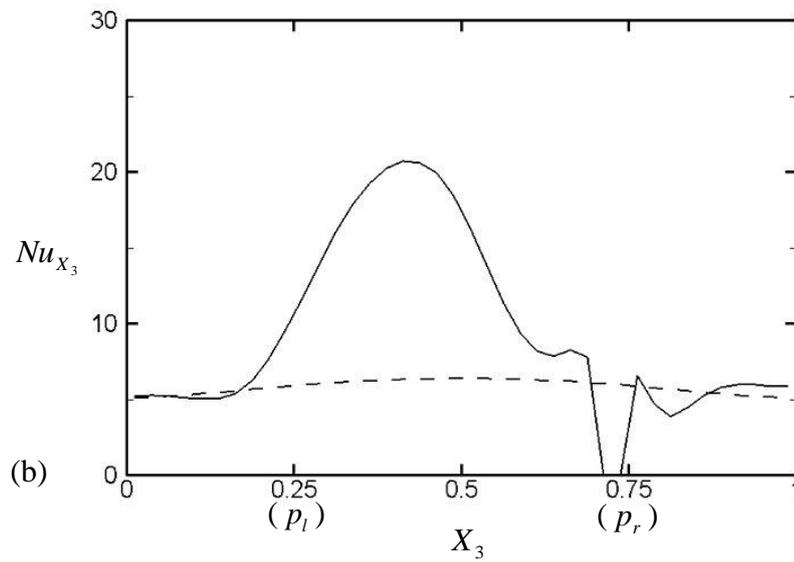
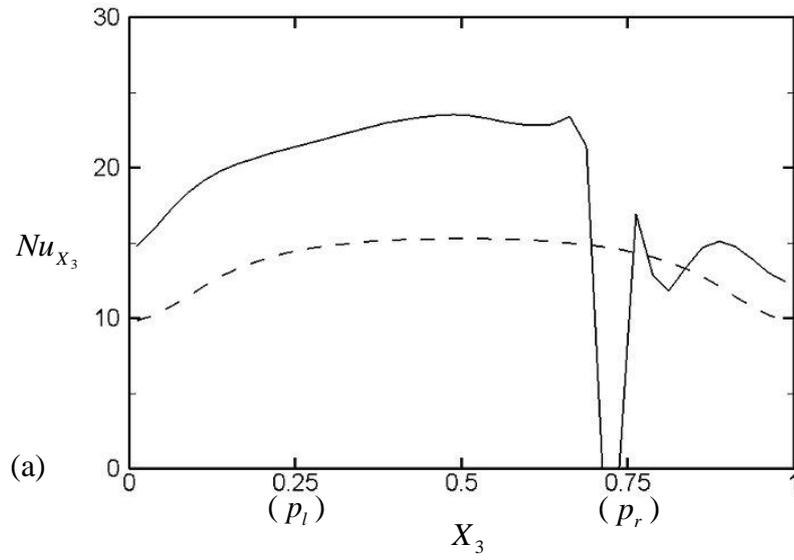


圖 4-16 局部紐塞數示意圖。(雷諾數=600, $V_b=1/2$)

- (a) AB 線段上紐塞數分布
- (b) CD 線段上紐塞數分布
- (c) EF 線段上紐塞數分布

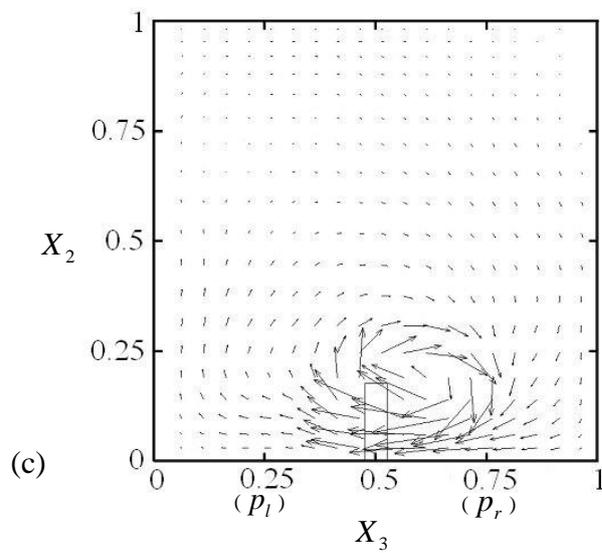
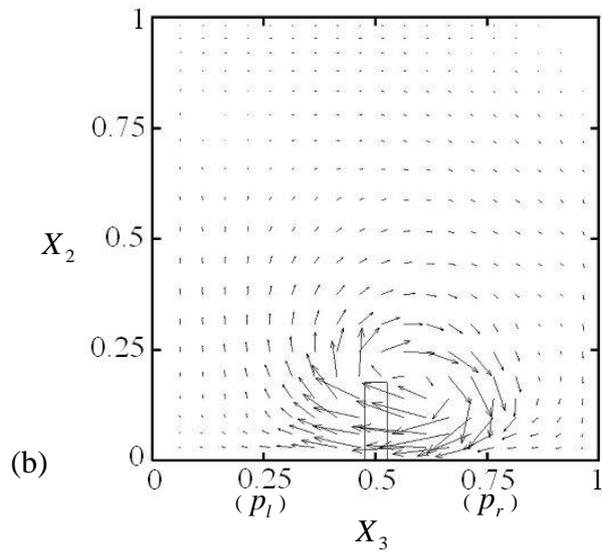
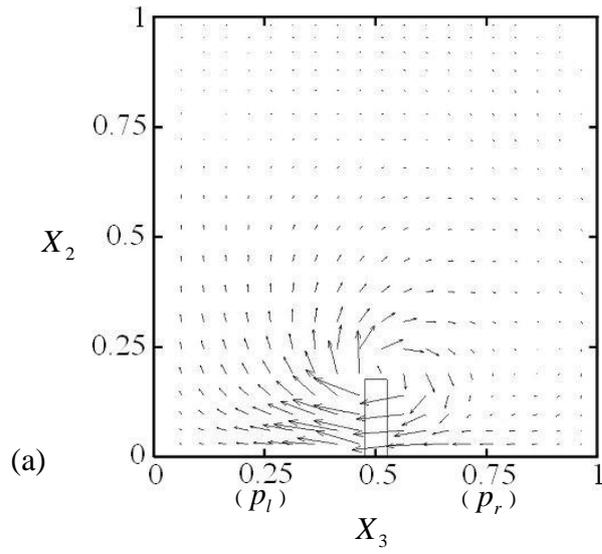


圖 4-17 x_2x_3 平面流場示意圖。(雷諾數=600, $V_b=1/2$)
 (a) AB 截面流場
 (b) CD 截面流場
 (c) EF 截面流場

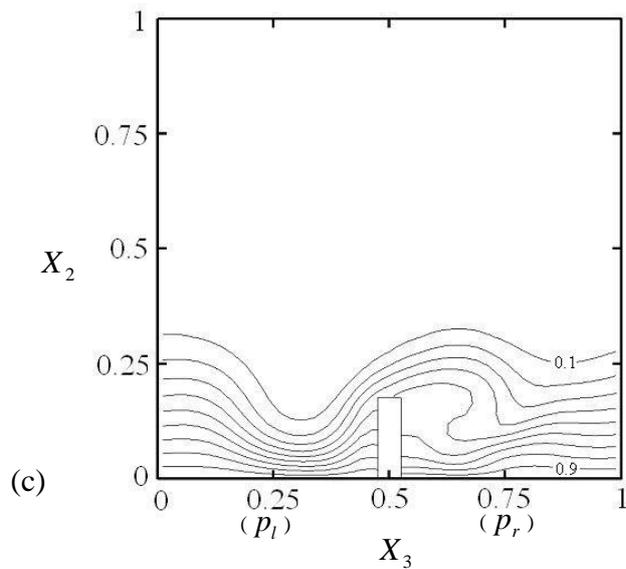
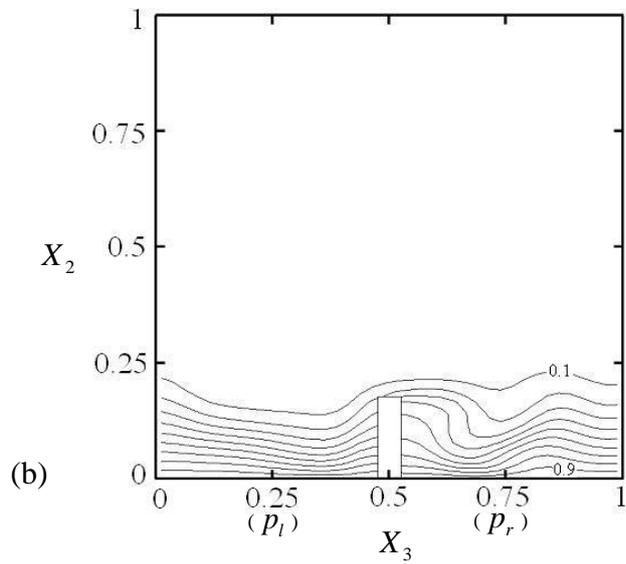
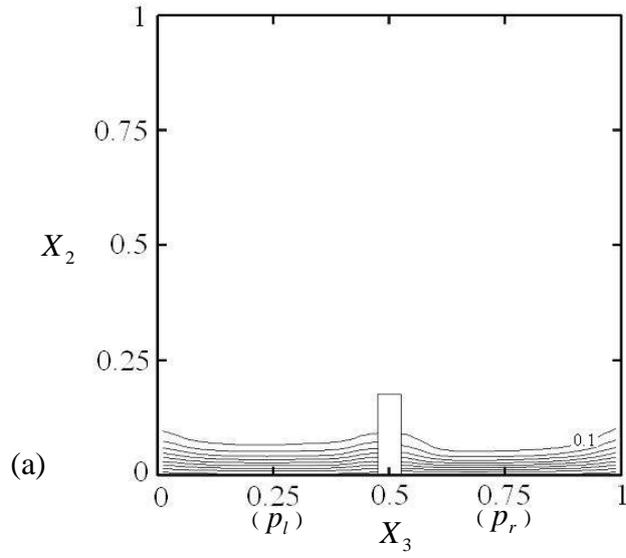


圖 4-18 x_2x_3 平面溫度場示意圖。(雷諾數=600, $V_b=1/2$)

- (a) AB 截面溫度場
- (b) CD 截面溫度場
- (c) EF 截面溫度場

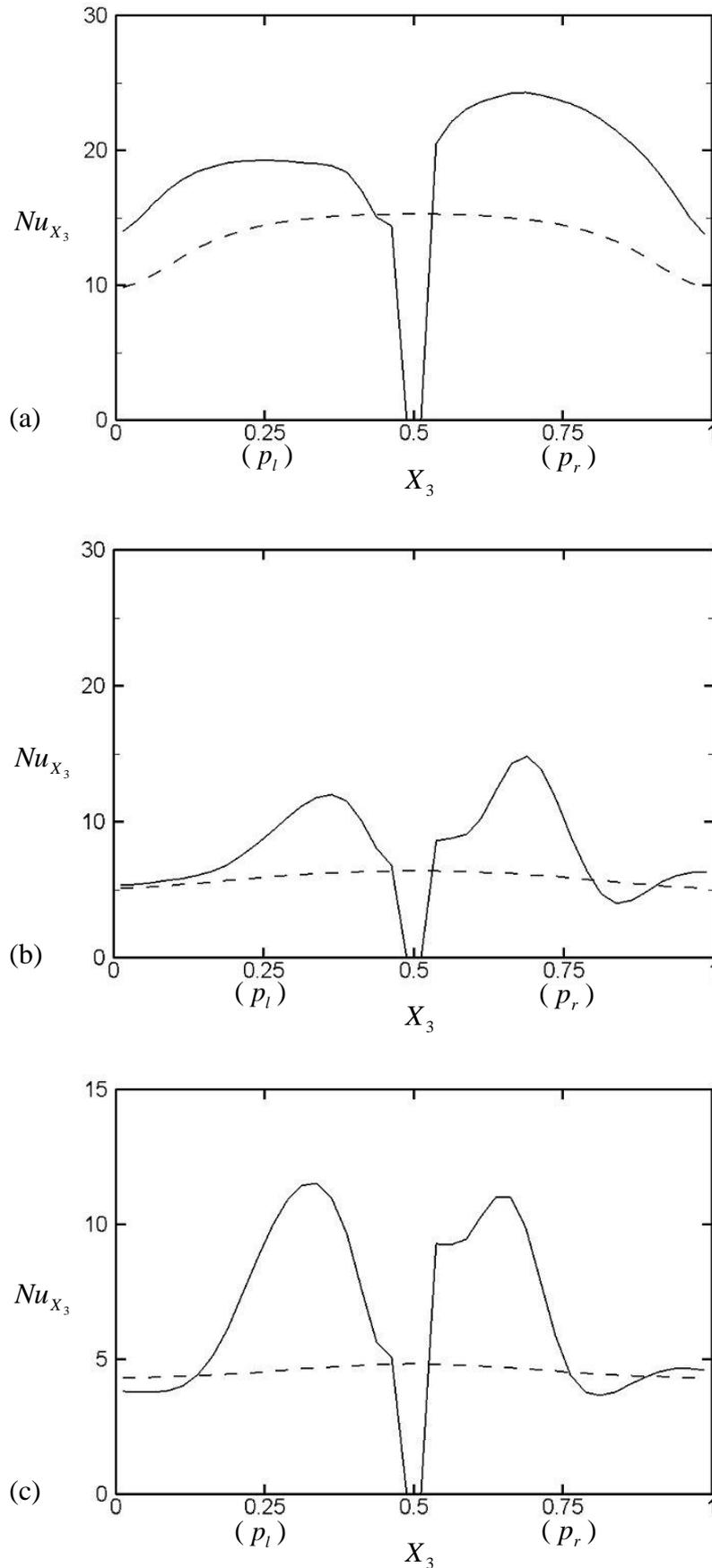


圖 4-19 局部紐塞數示意圖。(雷諾數=600, $V_b=1/2$)

(a) AB 線段上紐塞數分布

(b) CD 線段上紐塞數分布

(c) EF 線段上紐塞數分布

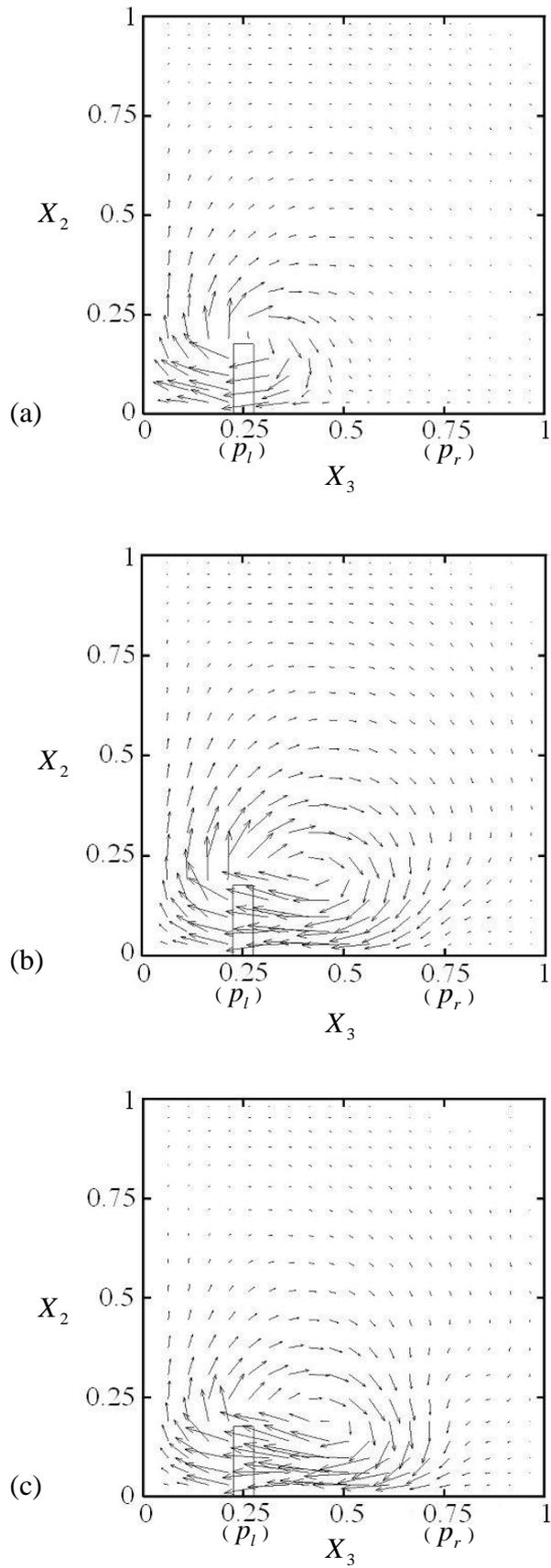


圖 4-20 x_2x_3 平面流場示意圖。(雷諾數=600, $V_b=1/2$)

(a) AB 截面流場

(b) CD 截面流場

(c) EF 截面流場

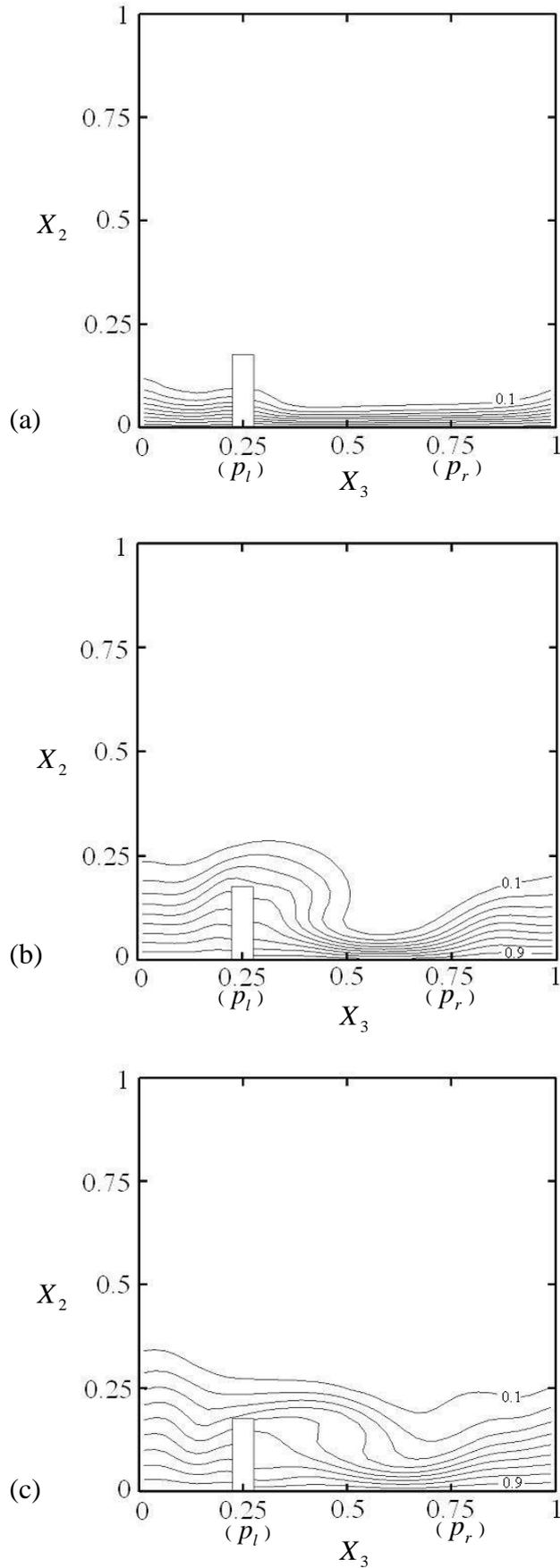


圖 4-21 x_2x_3 平面溫度場示意圖。(雷諾數=600, $V_b=1/2$)

- (a) AB 截面溫度場
- (b) CD 截面溫度場
- (c) EF 截面溫度場

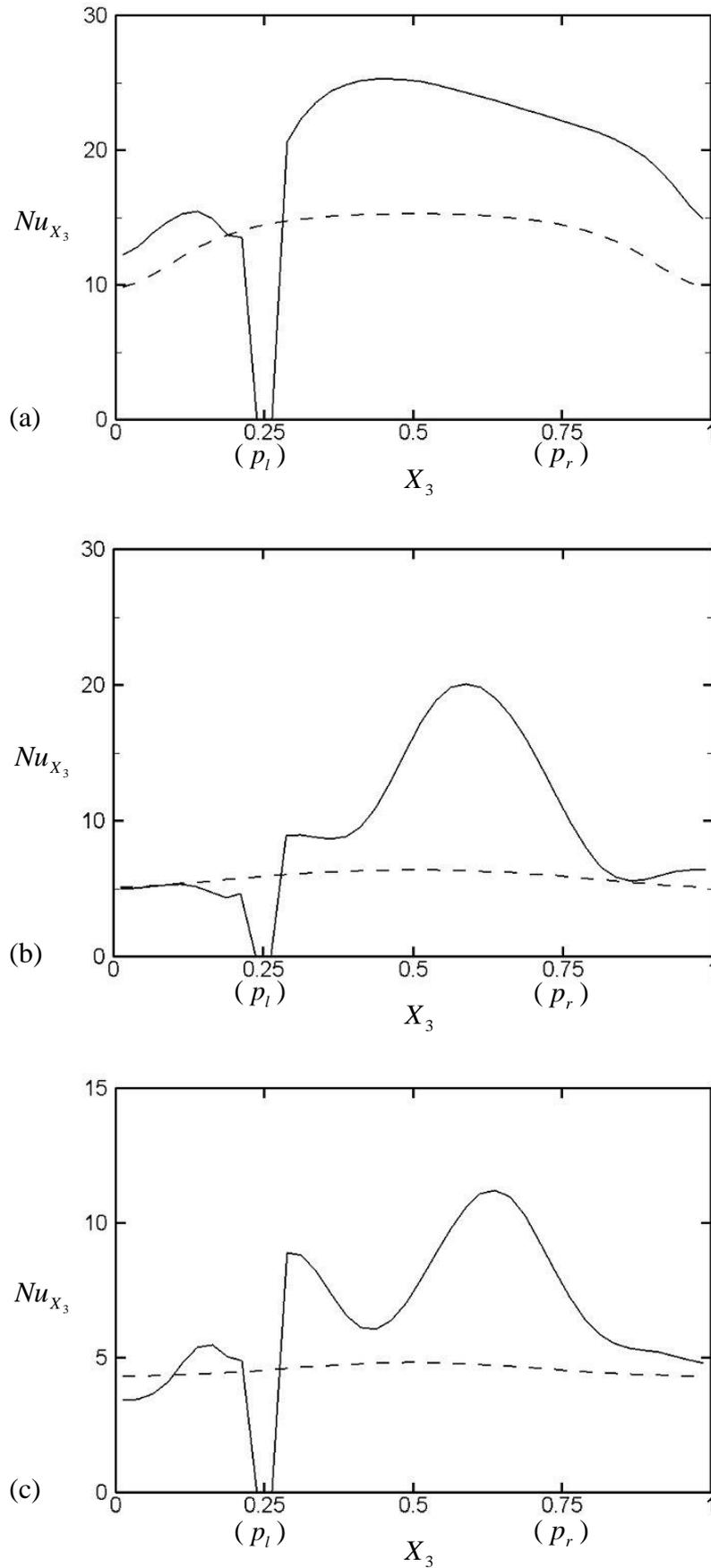


圖 4-22 局部紐塞數示意圖。(雷諾數=600, $V_b=1/2$)

- (a) AB 線段上紐塞數分布
- (b) CD 線段上紐塞數分布
- (c) EF 線段上紐塞數分布

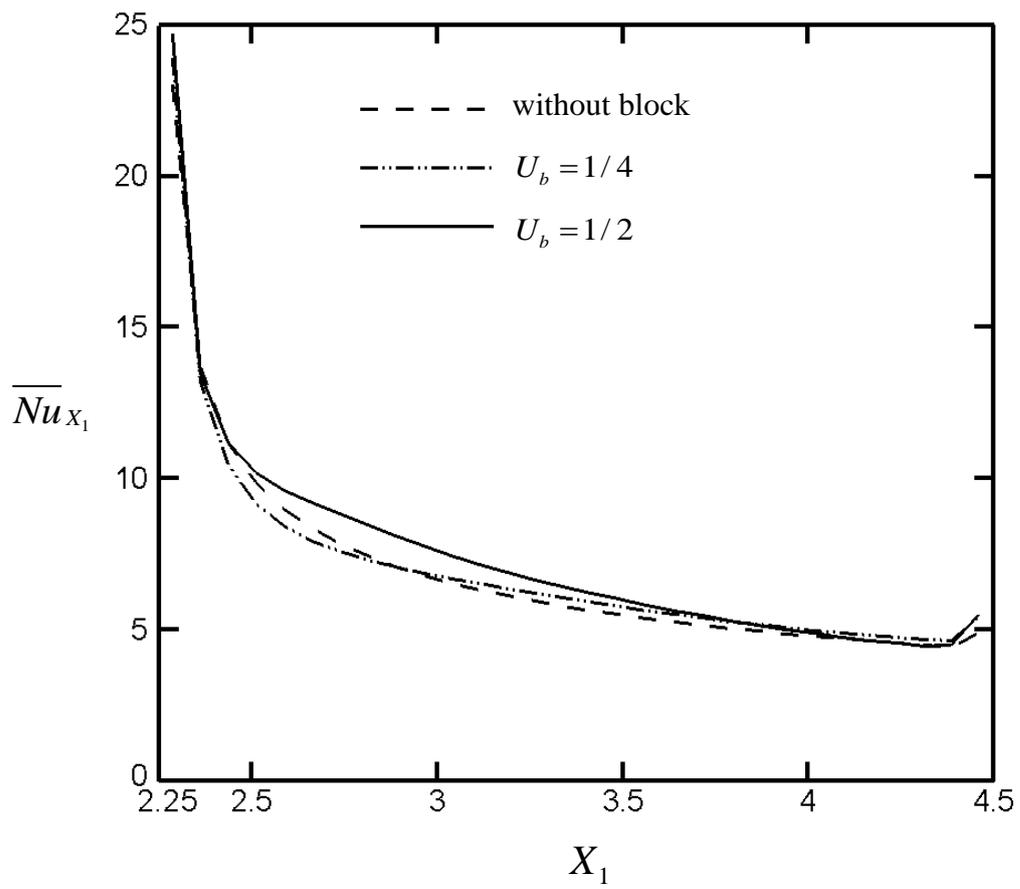


圖 4-23 雷諾數 200 下流動方向加熱壁面中央處之平均局部紐塞數比較圖

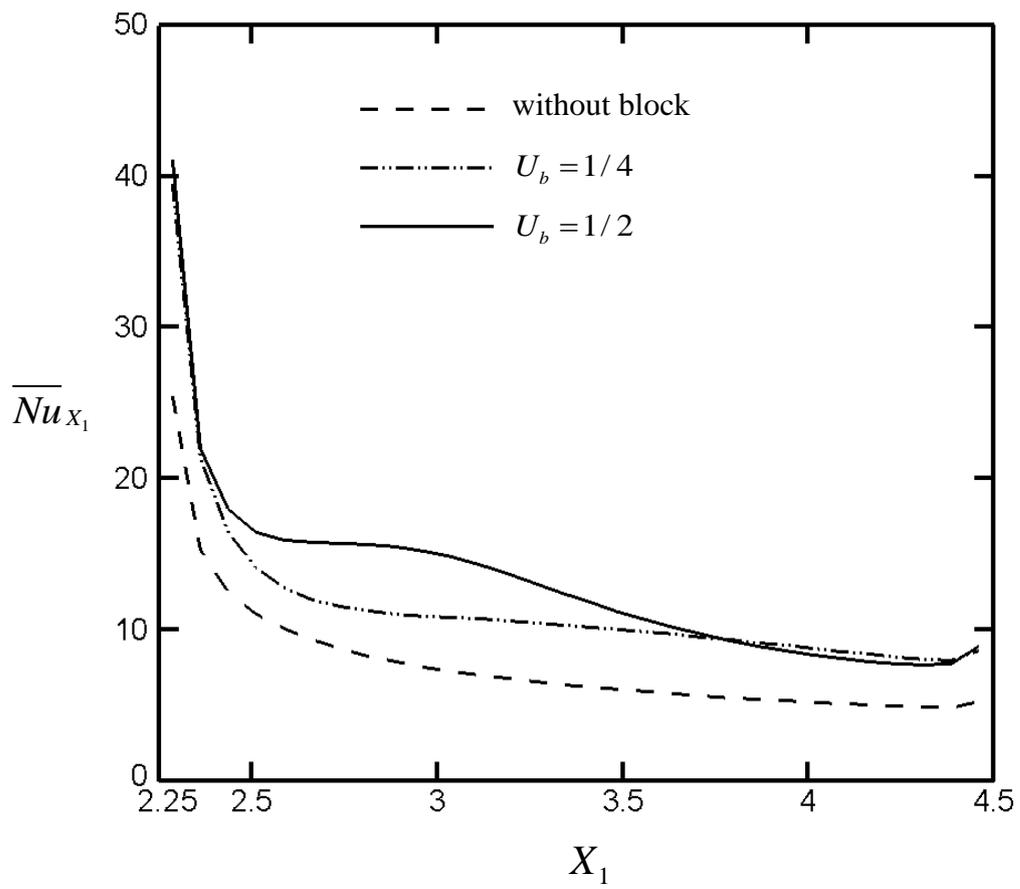


圖 4-24 雷諾數 600 下流動方向加熱壁面中央處之平均局部紐塞數比較圖

表 4-2 不同雷諾數與薄板移動之熱傳增益比較

Re	U_b	(Nu)	En
200	N/A	6.31	N/A
200	$U_b = 1/4$	6.22	-1.42%
200	$U_b = 1/2$	6.51	3.11%
600	N/A	7.03	N/A
600	$U_b = 1/4$	10.02	42.40%
600	$U_b = 1/2$	10.84	54.04%

4-2、三維垂直管道加裝移動平板混合對流：

本研究探討三維垂直管道混合對流中往復運動的薄板對高溫壁面附近溫度與速度場的影響，並說明高溫壁面上的平均紐塞數隨著薄板運動而產生的變化，進而比較不同的進口速度、加熱壁面溫度及薄板運動速度對流場與溫度場的影響與對熱傳效率的提升。本研究總共計算兩個不同加熱壁面溫度及不同浮慣比下度的案例，如表 4-3、表 4-4 所示，溫差有 12K 及 100K 兩種，浮慣比有 0.11、1.3 和 11.5 三種，此外模擬相關物理尺寸比例如下：

$$w_2 / w_1 = 1$$

$$w_3 / w_1 = 0.05$$

$$h / w_1 = 0.5$$

$$l_1 / w_1 = 15$$

$$l_2 / w_1 = l_3 / w_1 = 2.25$$

$$l_4 = 10.5$$

在高浮慣比的助流流場中，浮力作用會較強烈，圖 4-25 為比較兩個不同高低浮慣比，於管道中央 x_1x_2 截面某個時間點的溫度分布圖，從圖 4-25(a)中可看出浮慣比較低的條件中由於較強的強制對流作用，其等溫線較密。圖 4-25(b)則為浮慣比較高的情形，由於浮力作用較強烈影響了下方冷口氣對加熱面的降溫作用，故其等溫線分布較為稀疏。因模擬案例眾多，以下將分析其中兩個情形，一是浮慣比=0.11、薄板移動速度 $V_b = 1/2$ 的狀況，另一個為浮慣比=11.5、薄板移動速度 $V_b = 1/2$ 的情形，圖 4-26(a)~圖 4-26(c)為雷諾數 350、溫差 12K、浮慣比=0.11 的條件下，薄板往復運動前半週期從位置 p_r 向 p_l 位置運動，於加熱區上方前(AB)、中(CD)、後段(EF)三個不同位置 x_2x_3 截面的流場示意圖，此為進口強制對流不停的衝擊薄板前端，加上薄板運動跟流體間的交互作用影響結果，圖 4-26(a)中可以看出由於此截面接近管道流體接觸薄板的邊緣處有較激烈的速度場，而薄板右邊附近的流場由於前個時階板子為向右移動，此時為折返後往左移動，加上薄板向左移動會造成流體會向薄板右方遞補類似迴流效應而有向下的速度向量，而薄板左方的流場則是受道薄板推擠而向左運動。圖 4-26(b)及圖 4-26(c)則為同個

時階下位於加熱區 CD 與 EF 上方的 x_2x_3 截面流場圖，此兩個截面由於距離加熱面前端較遠，加上受到薄板的阻隔造成管道流在這一瞬時還沒到達此兩個截面，而上個時階薄板仍為向右移動，故三維流場中還大多是向右的趨勢，並造成與緊鄰薄板左邊的地方有向上的速度向量，也可觀察到薄板左邊有類似回流的區域。圖 4-27(a)~圖 4-27(c)為對應前述三個截面的等溫線分布圖，圖 4-27(a)為薄板前端 AB 截面的溫度場，由於入口管道流還未接觸到加熱面，故在此圖上的等溫線分布很緊密，而薄板左側部分又較右側稍微緊密，此為通過左邊空間的流量會大於通過右邊空間的緣故。圖 4-27(b)及圖 4-27(c)則是對應前面 CD、EF 截面流場的等溫線分布圖，由於位於較下游區域可以看到這兩個地方跟前面相比等溫線分布稀疏很多，此外可看到薄板右邊空間的等溫線明顯比左側區域稀疏，而由於薄板與管道流的交互作用造成在薄板左邊的區域有類似旋轉流產生，對靠近薄板左側的地方產生衝擊，所以可觀察到等溫線的凹陷。圖 4-28(a)~圖 4-28(c)則是對應前述三個位置的局部紐塞數分布圖，圖中虛線為在相同條件下未加裝移動薄板的局部紐塞數。圖 4-28(a)中由於由進口過來的管道流剛碰到加熱面，使得熱傳效益瞬間提升，可以觀察到在薄板左邊的局部紐塞數都比未加平板時高不少，而在薄板右邊區域因為空間較小及上個時階薄板往右擠壓運動的影響，通過的流體流量小很多，故其熱傳效益甚至比未加薄板時差。圖 4-28(b)和圖 4-28(c)的紐塞數可以看到整體數值會較圖 4-28(a)中為低，此為這兩個區域距離加熱面前端較遠的緣故，在薄板左側的地方因為前面所提及之類似迴旋流場衝擊的關係，可以觀察到鄰近薄板左側區域的局部紐塞數都比未加裝薄板時增高不少，而在最左邊的地方也因上述影響，所以角落附近的熱傳會較低。在薄板右側的區域由於前面提到流體的流動性較差，所以熱傳效益較差是可以預期的。

圖 4-29(a)~圖 4-29(c)為薄板移動到管道中央位置，於加熱區上方前(AB)、中(CD)、後段(EF)三個不同位置的 x_2x_3 截面流場圖，一樣可以看出緊鄰薄板處有較激烈的速度場，薄板與管道流交互作用產生的迴旋流場情形在這時階下更加明顯，在底部附近的流場趨勢也受到此迴旋流場的影響。圖 4-30(a)~圖 4-30(c)為對應此

時階流場下的等溫線分布圖，可以觀察到與前個時階圖 4-27 溫度場類似的現象。圖 4-31(a)~圖 4-31(c)則為在此時階下三個截面的局部紐塞數分布圖，在薄板右側的區域，由於薄板剛破壞過溫度邊界層，故可以觀察到對比未加裝移動薄板時較高的熱傳增益，而在左邊區域的部份受到浮力作用對流及流場趨勢的影響，只有在 EF 截面上的熱傳較好。

接下來討論的為雷諾數 35、溫差 12K、浮慣比=11.5 的條件下的結果。圖 4-32(a)~圖 4-32(c)為薄板往復運動前半週期從位置 p_r 向 p_l 位置運動，於加熱區上方前(AB)、中(CD)、後段(EF)三個不同位置 x_2x_3 截面的流場示意圖，跟前面討論的圖 4-26 有類似的流場，由於強制對流進口速度及薄板移動速度變低，薄板與進口流的交互作用變弱，也使得圖 4-33 中的等溫線分布與前面案例圖 4-27 相比稀疏很多。而圖 4-34 中的局部紐塞數分布也因上述原因並無很高的數值，可以看到大部份的熱傳跟為加裝移動薄板時相比還要低。而圖 4-35(a)~圖 4-35(c)為相同條件下薄板移動到管道中央的流場分布圖，跟前面圖 4-29(a)~圖 4-29(c)的流場很類似，而等溫線的分布從圖 4-36(a)~圖 4-36(c)中可以看到跟前面案例相比趨勢是類似的但是更加稀疏，而圖 4-37(a)~圖 4-37(c)的紐塞數分布中，跟前面案例相比也是更低，與未加裝移動薄板比較是較低，主要是因為在此案例中浮力作用較強，導致接近加熱面上流體向上流動而阻礙了入口管道較低溫流體的接觸，使得熱傳效益降低。

圖 4-38(a)及 4-38(b)為比較在浮慣比 0.11 以及浮慣比 11.5 下有無薄板的熱傳效果，圖中紐塞數為沿流動方向加熱壁面上正中央在一個週期內的平均紐塞數，其表示如下：

$$\overline{Nu_{x_1}} = \frac{1}{t_p} \int_t Nu_{x_1} dt, \quad t_p = \text{time of a cycle} \quad (4-14)$$

圖 4-38(a)中，可以觀察到在浮慣比 0.11 較小的情形中，由於強制對流與移動薄板交互作用比較強烈，破壞了溫度邊界層而提升了熱傳效果。圖 4-38(b)則為浮慣比 11.5 的平均紐塞數結果，進口流速較低加上薄板移動也較慢，加熱面浮力

作用較強，往加熱面上流動而類似於阻礙了進口管流的流動，使得熱傳效益在加裝移動平板下仍相對較差。

表 4-5 及表 4-6 為本研究所有不同溫差及浮慣比平均紐塞數的整理，為了方便觀察熱傳效果，定義一熱傳增益 En ，其表示如下：

$$En = \frac{(Nu)_{with\ block} - (Nu)_{without\ block}}{(Nu)_{without\ block}} \quad (4-15)$$

$$\text{where } (Nu) = \frac{1}{t_p} \int_t \overline{Nu} dt$$

表 4-5 為溫差 100K 的熱傳增益比較，在浮慣比較低的情況中，由於移動薄板與管流的交互作用比較強烈，最高可以看到有 30% 的熱傳增益。反之，在表 4-6 溫差較低的案例中，由於交互作用較弱而抑制了熱傳效果，熱傳增益最好的情形僅有大約 10%，而大部分的案例甚至熱傳效果比未加薄板時更低。

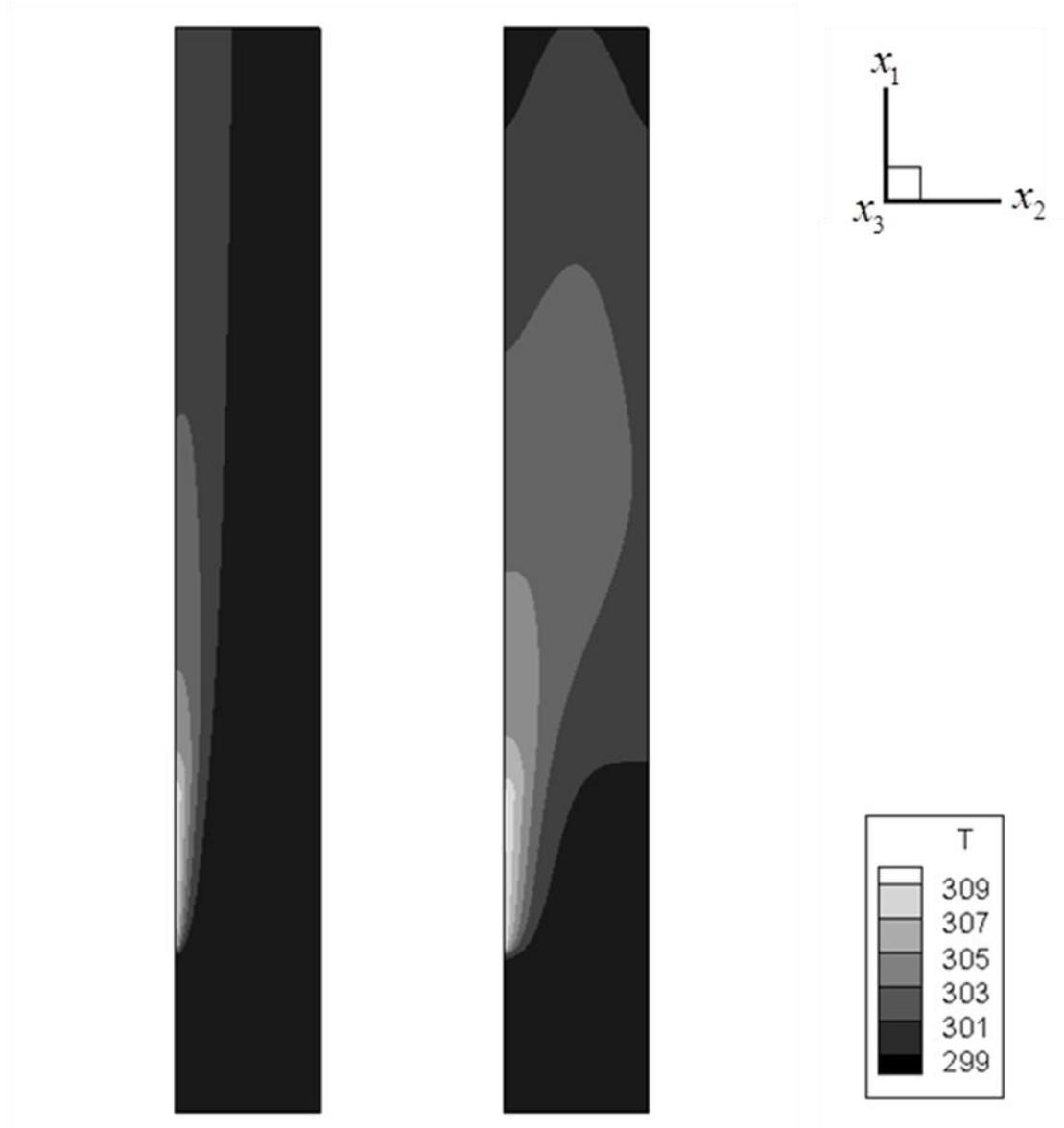


表 4-3 本研究在 $\Delta T = 12K$ 的模拟案例

Re	Gr / Re^2	Velocity of the block (v_b)
350	0.11	1/4
350	0.11	1/2
100	1.3	1/4
100	1.3	1/2
35	11.5	1/4
35	11.5	1/2

表 4-4 本研究在 $\Delta T = 100K$ 的模拟案例

Re	Gr / Re^2	Velocity of the block (v_b)
1000	0.11	1/4
1000	0.11	1/2
300	1.3	1/4
300	1.3	1/2
100	11.5	1/4
100	11.5	1/2



(a) $Gr/Re^2 = 0.11$

(b) $Gr/Re^2 = 11.5$

圖 4-25 不同浮慣比下的管道中央 x_1x_2 平面溫度場比較圖

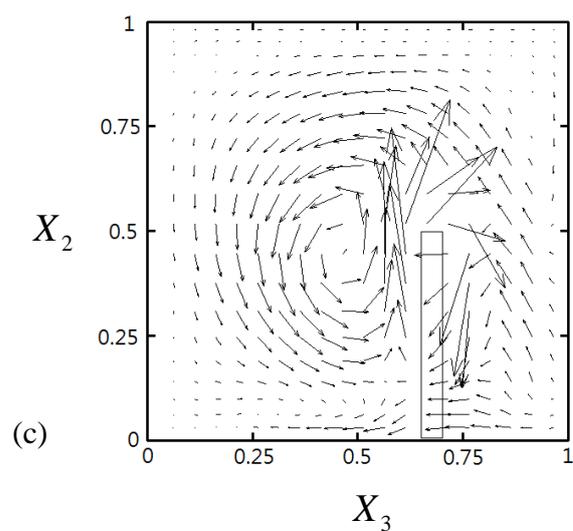
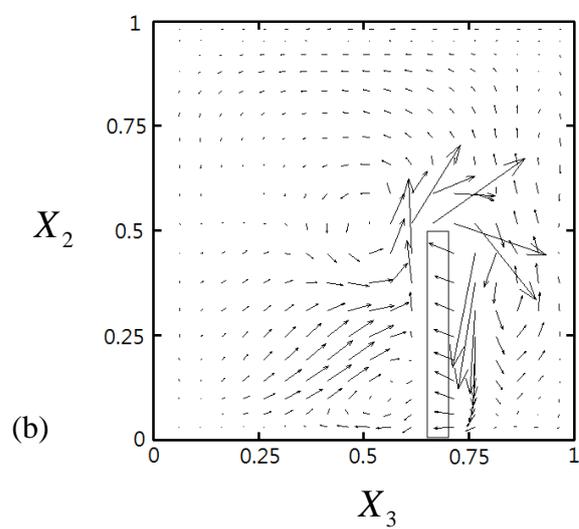
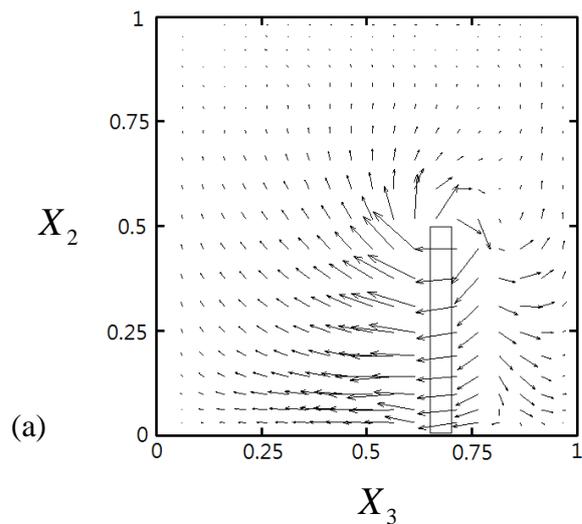


圖 4-26 x_2x_3 平面流場示意圖 ($Gr/Re^2 = 0.11$, $\Delta T = 12K$)

(a) AB 截面流場

(b) CD 截面流場

(c) EF 截面流場

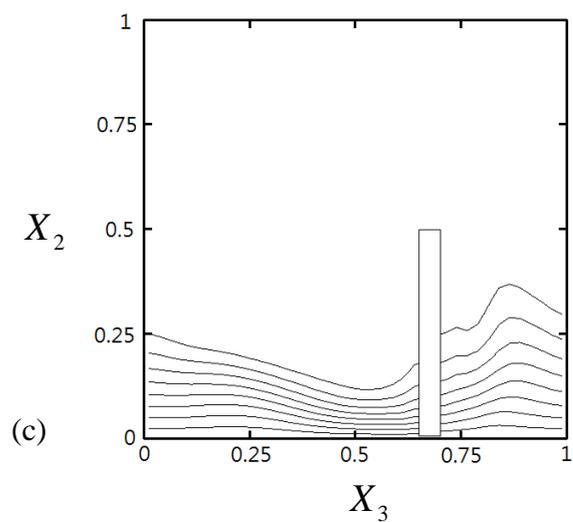
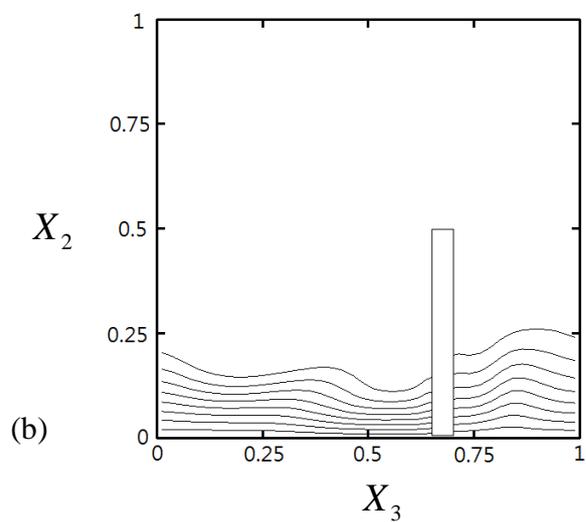
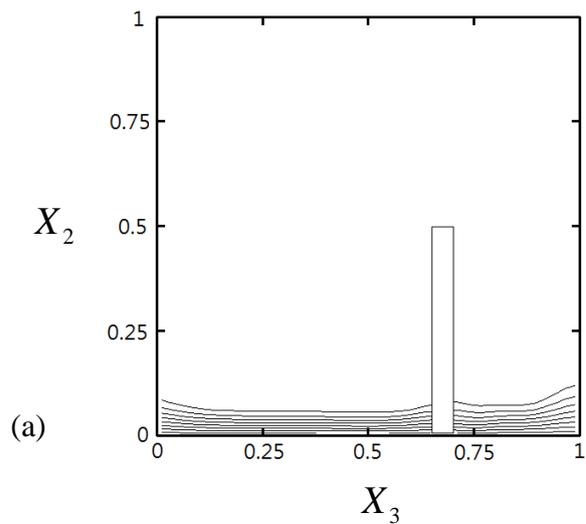


圖 4-27 x_2x_3 平面溫度場示意圖 ($Gr/Re^2 = 0.11$, $\Delta T = 12K$)

- (a) AB 截面溫度場
- (b) CD 截面溫度場
- (c) EF 截面溫度場

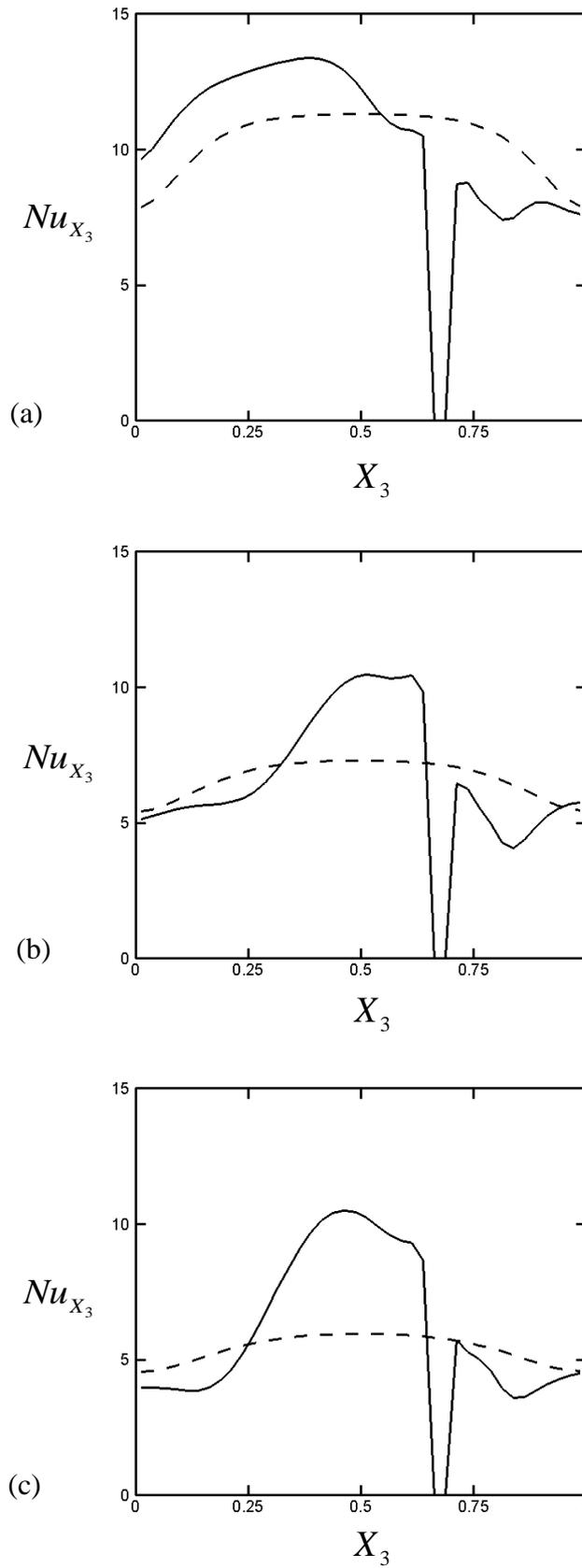


圖 4-28 局部紐塞數示意圖($Gr/Re^2 = 0.11$, $\Delta T = 12K$)

- (a) AB 線段上紐塞數分布
- (b) CD 線段上紐塞數分布
- (c) EF 線段上紐塞數分布

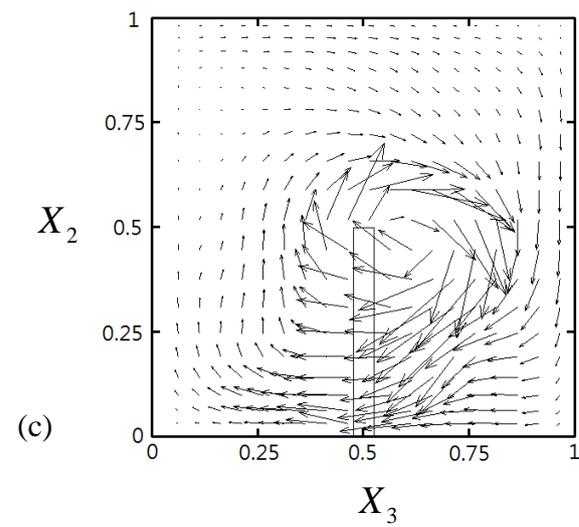
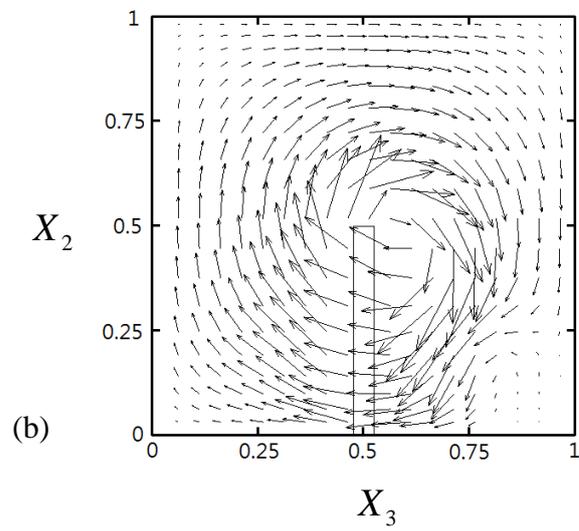
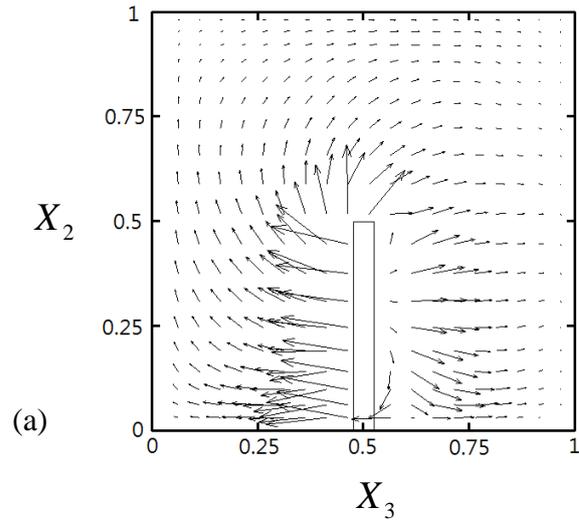


圖 4-29 x_2x_3 平面流場示意圖 ($Gr/Re^2 = 0.11$, $\Delta T = 12K$)

(a) AB 截面流場

(b) CD 截面流場

(c) EF 截面流場

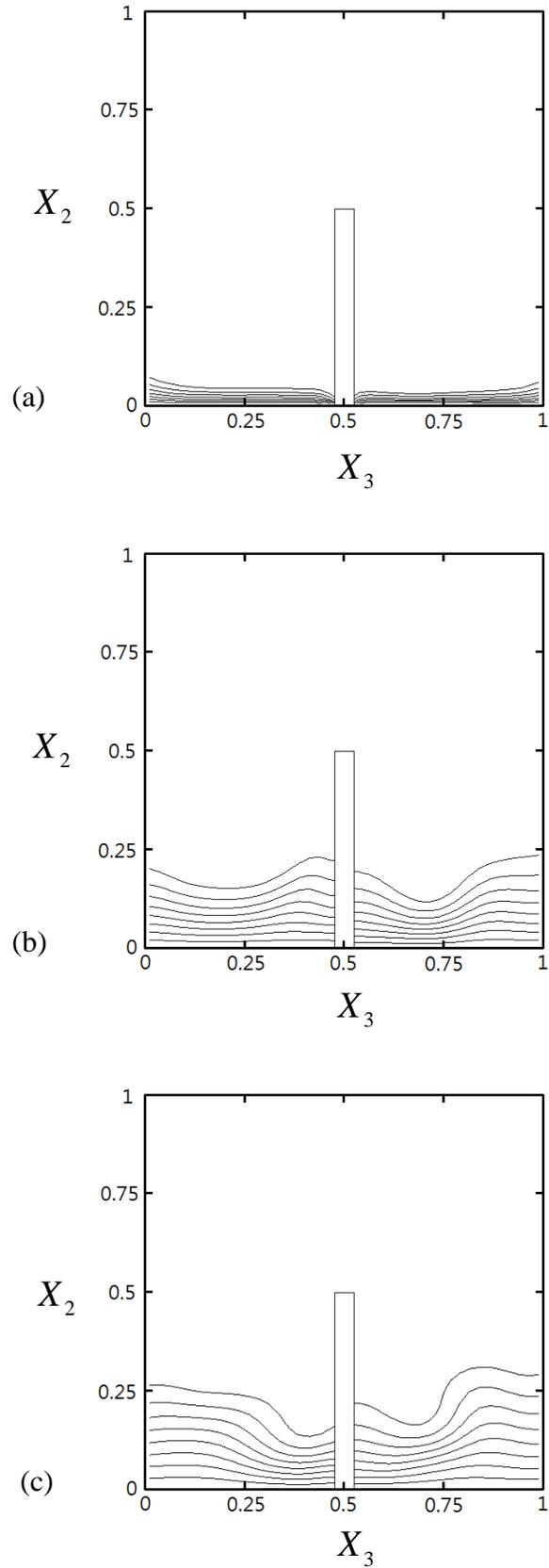


圖 4-30 x_2x_3 平面溫度場示意圖($Gr/Re^2 = 0.11$, $\Delta T = 12K$)

(a) AB 截面溫度場

(b) CD 截面溫度場

(c) EF 截面溫度場

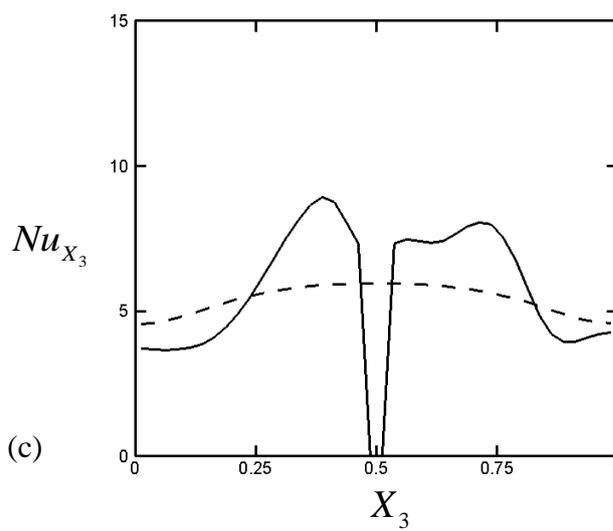
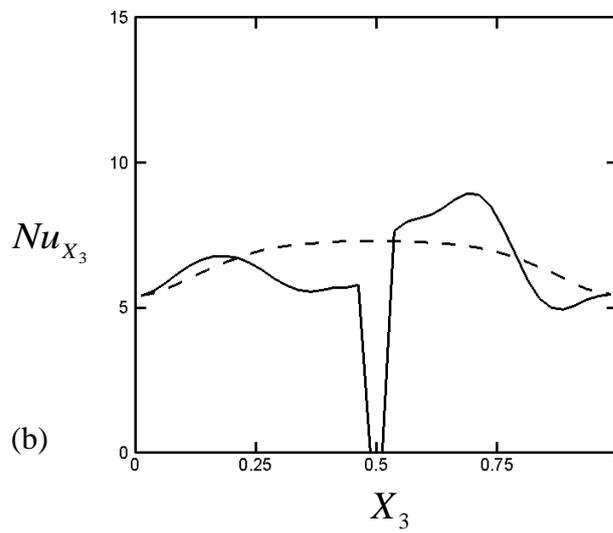
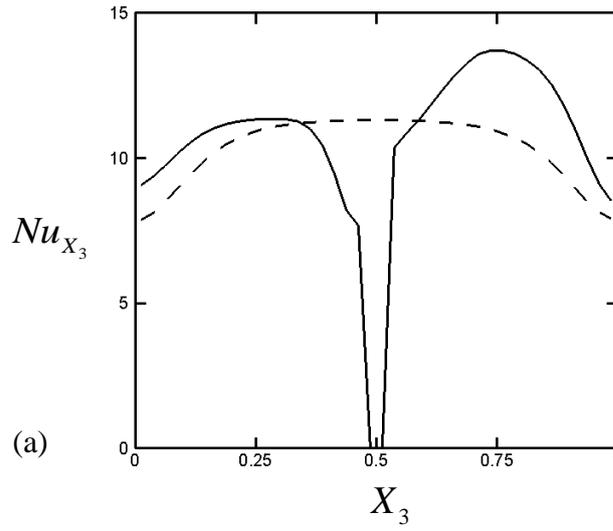


圖 4-31 局部紐塞數示意圖($Gr/Re^2 = 0.11$, $\Delta T = 12K$)

- (a) AB 線段上紐塞數分布
- (b) CD 線段上紐塞數分布
- (c) EF 線段上紐塞數分布

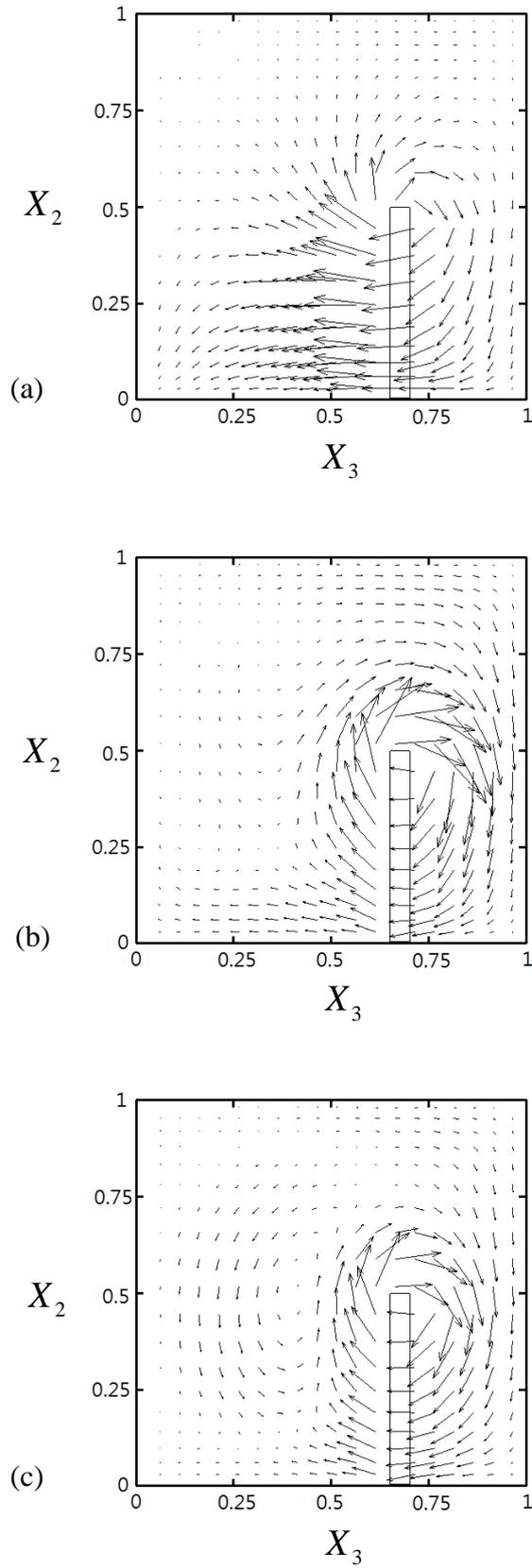


圖 4-32 x_2x_3 平面流場示意圖 ($Gr/Re^2 = 11.5$, $\Delta T = 12K$)

(a) AB 截面流場

(b) CD 截面流場

(c) EF 截面流場

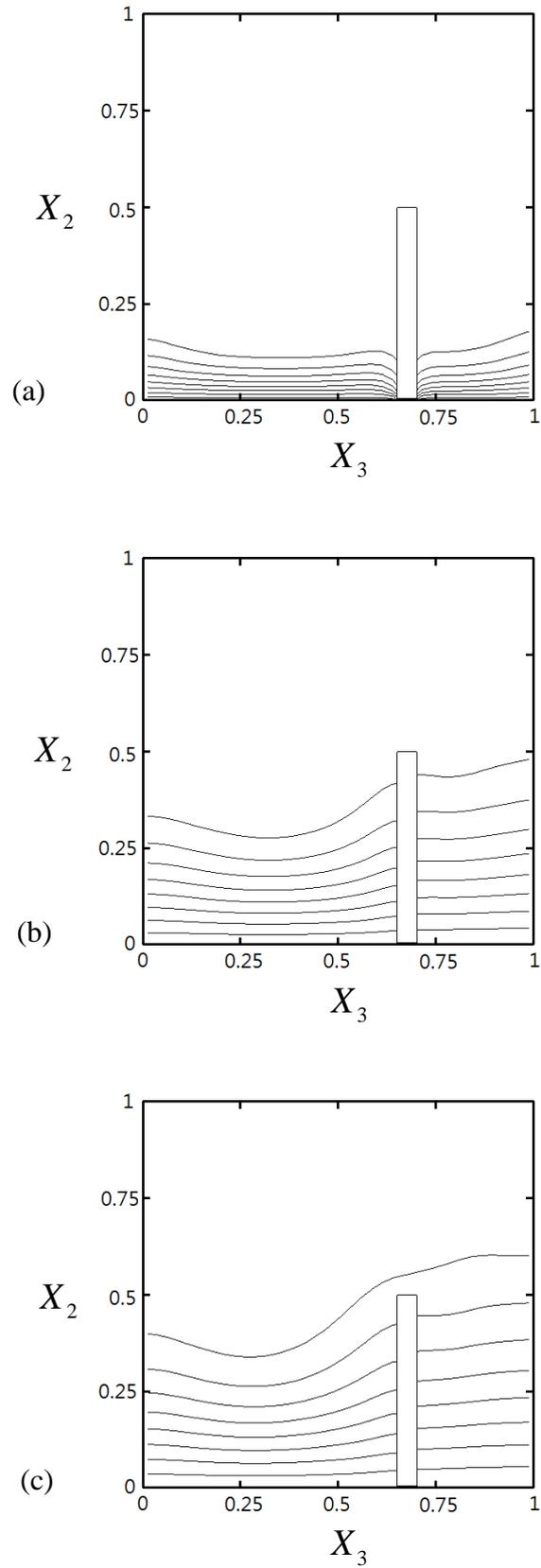


圖 4-33 x_2x_3 平面溫度場示意圖($Gr/Re^2 = 11.5$, $\Delta T = 12K$)

(a) AB 截面溫度場

(b) CD 截面溫度場

(c) EF 截面溫度場

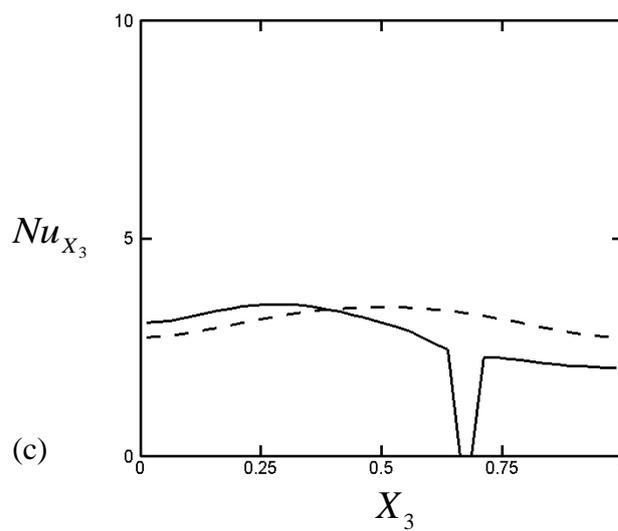
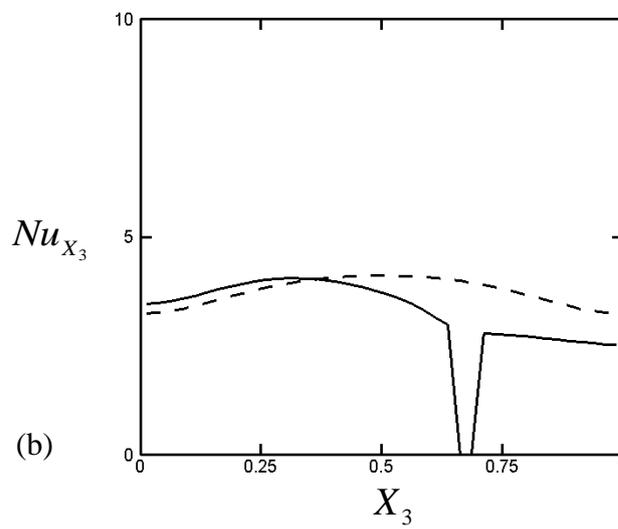
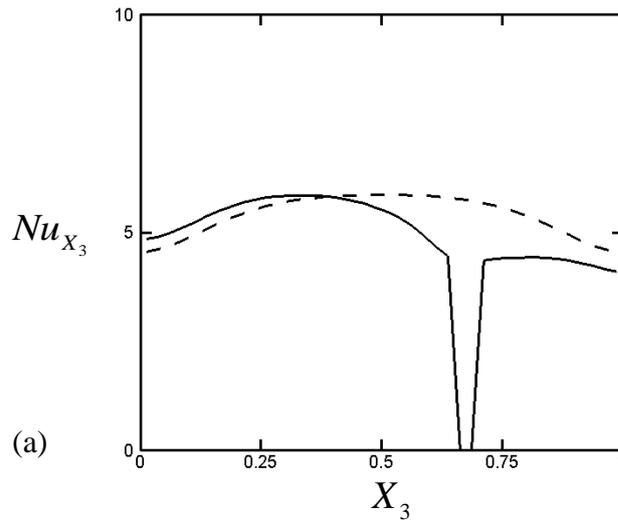


圖 4-34 局部紐塞數示意圖($Gr/Re^2 = 11.5$, $\Delta T = 12K$)

(a) AB 線段上紐塞數分布

(b) CD 線段上紐塞數分布

(c) EF 線段上紐塞數分布

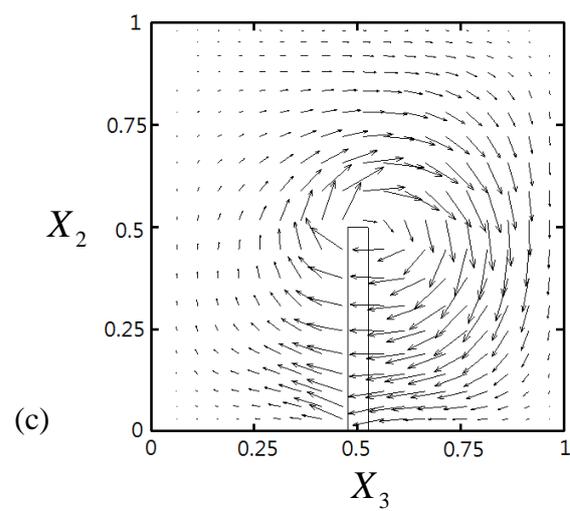
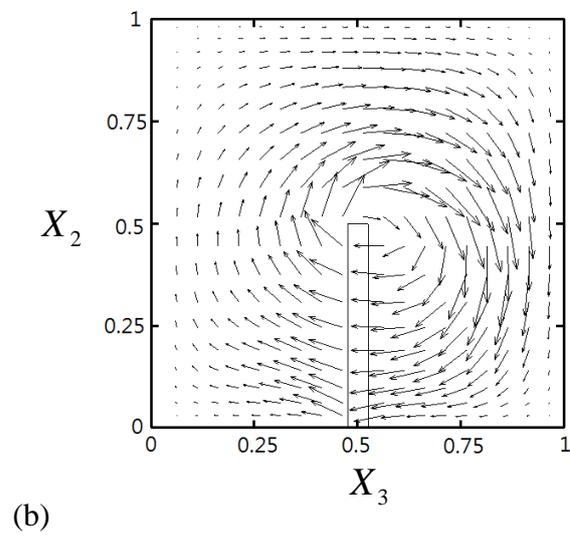
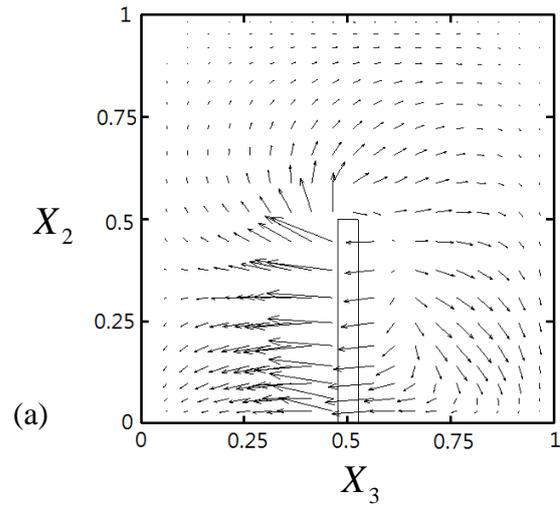


圖 4-35 x_2x_3 平面流場示意圖($Gr/Re^2 = 11.5$, $\Delta T = 12K$)

(a) AB 截面流場

(b) CD 截面流場

(c) EF 截面流場

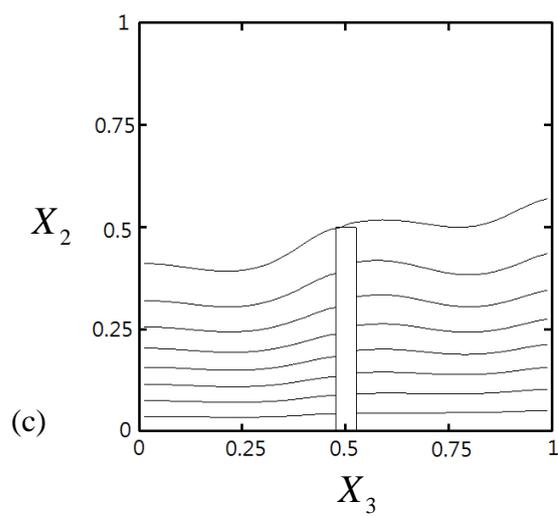
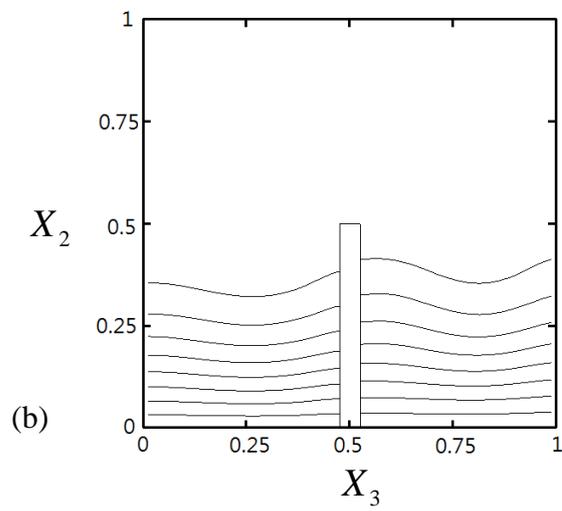
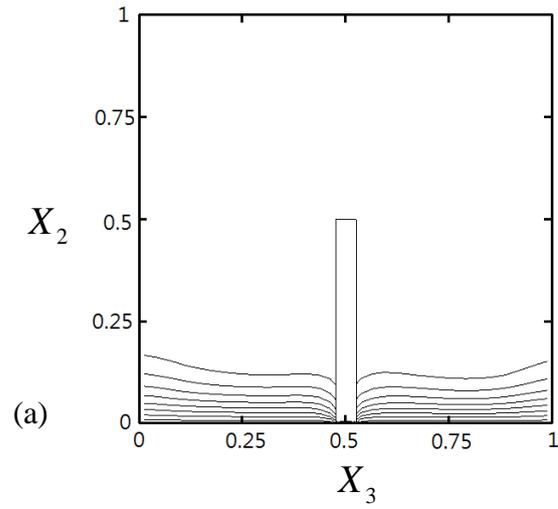


圖 4-36 x_2x_3 平面溫度場示意圖($Gr/Re^2 = 11.5$, $\Delta T = 12K$)

(a) AB 截面溫度場

(b) CD 截面溫度場

(c) EF 截面溫度場

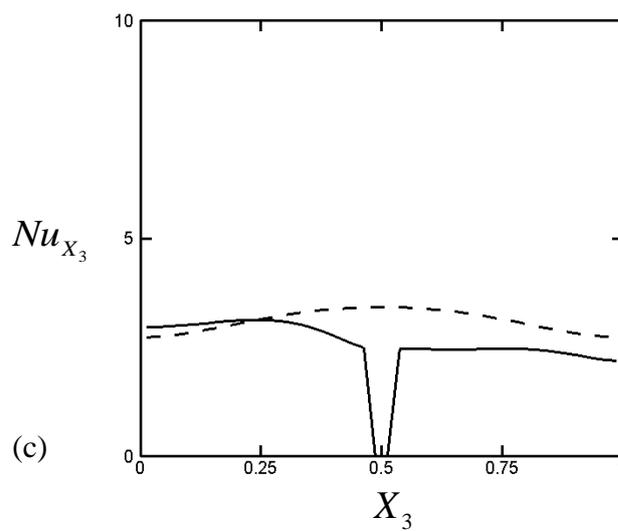
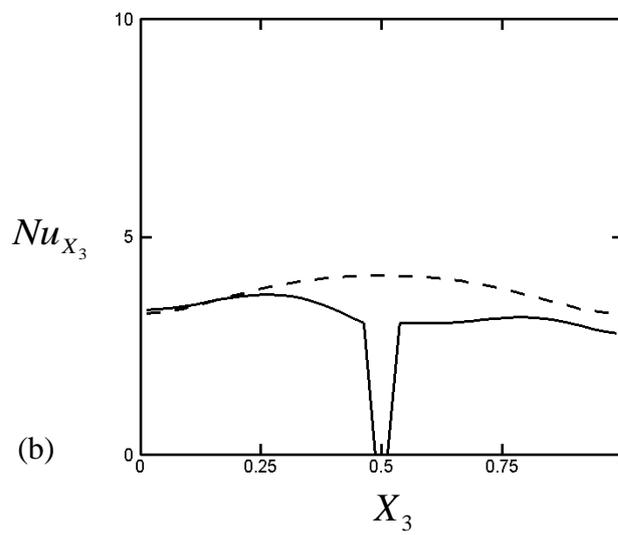
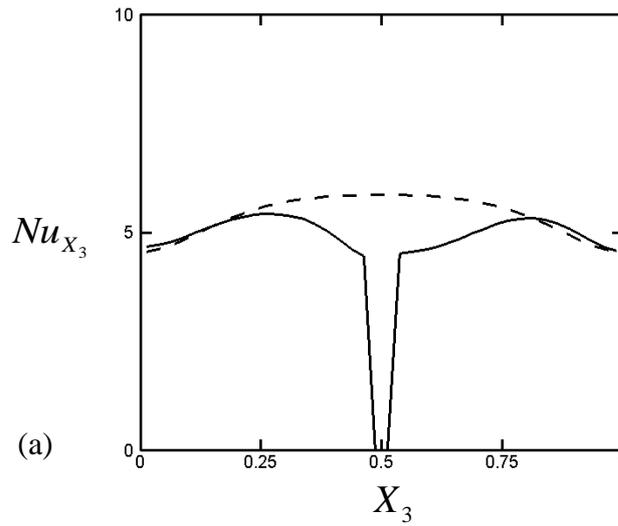


圖 4-37 局部紐塞數示意圖($Gr/Re^2 = 11.5$, $\Delta T = 12K$)

(a) AB 線段上紐塞數分布

(b) CD 線段上紐塞數分布

(c) EF 線段上紐塞數分布

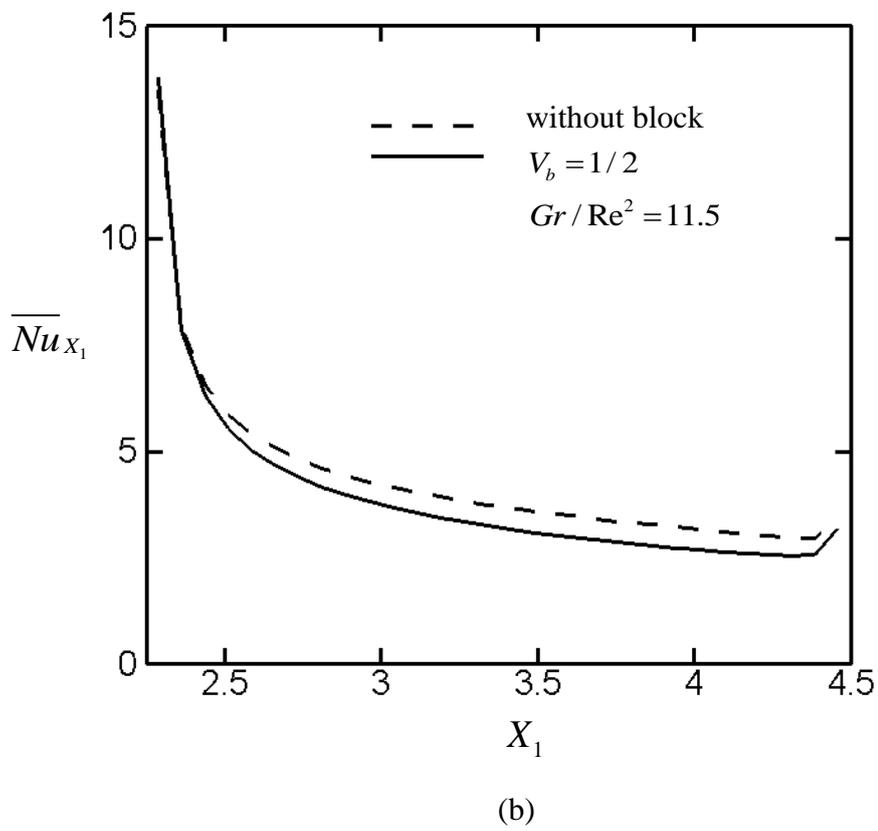
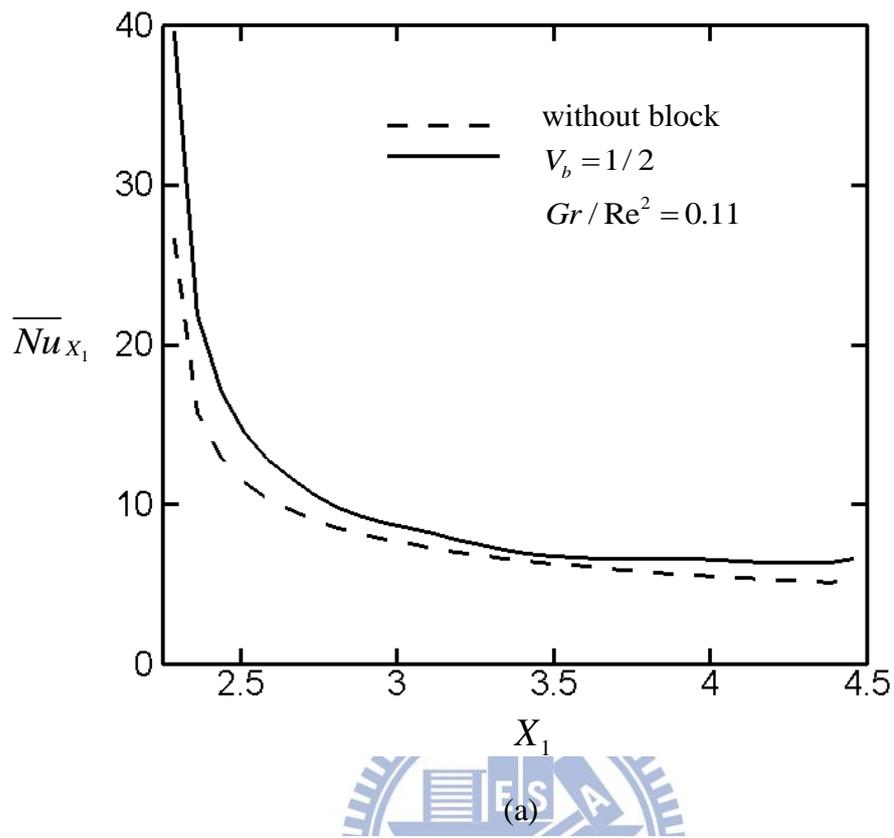


圖 4-38 x_1 流動方向加熱壁面中央處之平均局部紐塞數比較圖

表 4-5 不同浮慣比與薄板移動之熱傳增益比較 En ($\Delta T = 100K$)

Re	Gr / Re^2	V_b	\overline{Nu}	En
1000	0.11	N/A	13.16	N/A
1000	0.11	1/4	14.38	9.3%
1000	0.11	1/2	17.32	31.6%
300	1.3	N/A	8.70	N/A
300	1.3	1/4	8.82	1.4%
300	1.3	1/2	9.13	5.0%
100	11.5	N/A	7.35	N/A
100	11.5	1/4	7.11	-3.2%
100	11.5	1/2	7.22	-1.7%

表 4-6 不同浮慣比與薄板移動之熱傳增益比較 En ($\Delta T = 12K$)

Re	Gr / Re^2	V_b	\overline{Nu}	En
350	0.11	N/A	8.02	N/A
350	0.11	1/4	8.40	4.9%
350	0.11	1/2	8.82	10.0%
100	1.3	N/A	5.40	N/A
100	1.3	1/4	5.18	-4.0%
100	1.3	1/2	5.26	-2.6%
35	11.5	N/A	4.38	N/A
35	11.5	1/4	3.95	-9.7%
35	11.5	1/2	4.03	-8%

4-3、三維垂直管道自然對流：

由於過去有關係流模擬之研究大多為強制對流下給定已知流量及擾動，此種方法對於純自然對流下誘導產生不穩定再發展成紊流的情形無法得知，由於自然對流無法預先得知進口流量，其流量為高溫壁面加熱流體驅動造成的進口流量，而過去利用 Bossinesq 假設所模擬的自然對流現象並不適用於溫差大於 30K 的範圍，實際工業應用上會受到限制，故本研究以可壓縮流針對三維垂直管道進行自然對流誘導不穩定流場進行暫態模擬，依加熱面溫度及物理尺寸共有三種案例如表 4-7 所示，以下將分開討論說明。

在此模擬中同時考慮可壓縮性與溫度對流體黏度之影響，以管道垂直高度做為特徵長度時，雷利數其定義如下：

$$Ra_x = Pr \frac{g \rho_0^2 (T_h - T_c) h^3}{T_c \mu(T)^2} \quad (4-16)$$

首先討論長寬比 $R=3.75$ ，溫差 400K，雷利數約為 1.35×10^8 的結果。根據 Bejan[31] 提到在 $Pr \sim 1$ 的流體其垂直等溫壁面自然對流轉變成紊流之臨界雷利數約為 10^9 ，本研究流體為空氣， $Pr = 0.71$ ，換算後其臨界雷利數約為 7×10^8 ，此案例的雷利數已接近此臨界值，故已有相當不穩定的流場結果產生，以下為其呈現不穩定狀態的流場，為方便分析取其類似循環動態平衡的五個時間點於管道中央處流場。圖 4-39 為第一個時間點($t=6.21$ 秒)的流場流線圖與等溫線圖，從流線圖中可以看到在左邊加熱壁面沿線附近，其流體流向皆因受到加熱其浮力影響而往上方流動，在管道下方的地方也受到浮力作用所牽引吸進流體，而在上方出口處，右側地方受到靠近左邊加熱壁面上升流體牽引，會帶近部分外界空氣，進而造成在下方處產生渦流現象，這也是造成整個流場不穩定之因素，在溫度場中可以看到對應流線圖中渦流部分的等溫線揚起。圖 4-40 為下個時間點($t=6.27$ 秒)的流場流線示意圖及等溫線分布圖，一樣可以觀察到下方為整體向上吸入，而左邊壁面沿線皆為受到加熱浮力作用向上流動，而圖中的渦流部分可以看到前個時間點中流線圖裡較大的渦流在這時間點位置已上升一點，而溫度場中一樣可觀察到對應流場的等溫線起伏。圖 4-41 則為第三個時間點($t=6.35$ 秒)的流場流線示意圖及等溫線分布圖，前面提及的渦流較大的部分位置更往上移一些，其下方開始產生另一個渦流，等溫線分布圖中揚起處一樣也是對應其流線中渦流部分。圖 4-42 為第四個時間點($t=6.4$ 秒)時的流場流線示意圖及等溫線分布圖，從流線圖中與前個時間點

相比，可以觀察到前面看到的兩個渦流部分位置也往上提升，溫度場圖中跟前面時間點相比也觀察得到其等溫線揚起的位置上升。圖 4-43 則為第五個時間點 (t=6.45 秒) 的流場流線示意圖及等溫線分布圖，可以看到此時的流線與溫度場與前面第一個時間點極為類似，故其流場的變化就是類似動態平衡的循環。為了探討流場對其加熱壁面熱傳的影響，於左方管道壁面 $\frac{1}{4}$ (A 點)、 $\frac{1}{2}$ (B 點) 和 $\frac{3}{4}$ (C 點) 處三個監控點，觀察其隨時間變化的局部紐塞數，其定義如下：

$$Nu_x = \frac{w}{k_0(T_h - T_c)} [k(T) \frac{\partial T}{\partial y}] \quad (4-17)$$

圖 4-44 即為三個點局部紐塞數隨時間變化的比較圖，由於流場的不穩定三條線皆呈現震盪的情況，其中最上方的線為靠近下方 A 點的紐塞數，可以觀察到其為三點中熱傳效果最高的地方，而隨著位置越靠近上方出口處，由於流場的不穩定現象越明顯，其紐塞數震盪的情形更趨嚴重。

接下來為長寬比 $R=2.75$ ，溫差 400K 雷利數約為 5.35×10^7 的結果，此案例與前面相比不同處為管道垂直高度，為前述的 $\frac{11}{15}$ 長度。為方便分析與前述一樣取其類似循環動態平衡的四個時間點流場，圖 4-45 為第一個時間點 (t=6.15 秒) 的流場流線示意圖及等溫線分布圖，可以觀察到與前段類似的流場，靠近左邊加熱壁面沿線附近，其流體流向皆因受到加熱其浮力影響而往上方流動，在管道上方左側，由於受到壁面附近向上空氣與右側吸入之流體交互作用，造成有一渦流產生，而管道下方處流體皆為向上吸入，在管道中央附近與上方吸入之流體交互作用，造成流場渦旋的現象，流線圖中可看到一較大的渦旋，部分流線結束於管道中為此流線圖為三維管道中取二維截面所得，故部分流動情形無法顯示於此平面，而溫度場圖中其等溫線揚起也是對應到其流場的部分。圖 4-46 為第二個時間點 (t=6.2 秒) 的流場流線示意圖及等溫線分布圖，流線圖中跟前面時間點相比可以觀察到較大渦流的部分位置上升一些，而溫度場中的等溫線揚起同樣對應了流線的分布。圖 4-47 為第三個時間點 (t=6.25 秒) 的流場流線示意圖及等溫線分布圖，可以看到前張較大的渦流位置更接近上方出口處，而管道上方附近依然可觀察到右邊吸入而左邊向上排出的現象，溫度場同樣也對應了其流線的分布。圖 4-48 為第四個時間點 (t=6.30 秒) 的流場流線示意圖及等溫線分布圖，可以觀察到此圖

跟前面第一個時間點的結果非常類似，故其暫態流場的變化也是類似於動態平衡的循環。而整體跟前面一個長寬比不同的案例相比，可以觀察到類似的流場不穩定現象，其中等溫線揚起處皆對應前面所提到的渦流影響而產生，而發生位置一樣主要於管道上半段部分，但整體不穩定的現象管段稍稍偏上，並無跟前述案例延伸至管道中央部分情形。圖 4-49 一樣針對左方管道壁面 $\frac{1}{4}$ (A 點)、 $\frac{1}{2}$ (B 點) 和 $\frac{3}{4}$ (C 點) 處三個監控點，觀察其隨時間變化的局部紐塞數，與前面案例相比局部紐塞數震盪的情形稍緩，而靠近管道下方的 A 點處仍為紐塞數較高的地方，隨著位置的上升紐塞數稍降，而且由於流場的晃動造成紐塞數也一樣有震盪情形。

接下來討論長寬比 $R=2.75$ ，溫差 100K 雷利數約為 1.34×10^7 的模擬結果，由於在此條件下已低於臨界雷利數甚多，整個流場短時間就趨於穩定狀態，圖 4-50 為其流場流線分布圖與溫度場圖，可以觀察到在靠近壁面處流體依然受到加熱浮力作用影響向上流動，管道上方出口處右邊部分依然有受到左側牽引將流體吸進的現象。而等溫線疏密呈現穩定狀態，只有靠近左側加熱壁面的溫度較高。圖 4-51 一樣針對左方管道壁面 $\frac{1}{4}$ (A 點)、 $\frac{1}{2}$ (B 點) 和 $\frac{3}{4}$ (C 點) 處三個監控點，觀察其隨時間變化的局部紐塞數，跟前面兩個案例相比，沒有發生震盪的情形，紐塞數呈現穩定的狀態，而一樣在下方 A 點處有較高的紐塞數，隨位置上升局部紐塞數會降低。

由以上結果可以先觀察出在垂直管道純自然對流驅動下流體不穩定情形，以及長寬比和加熱溫度對流場及熱傳效益的影響，Rayleigh 數尺度約在 10^8 以上流體皆有不穩定之現象，此自然對流從加熱到開始不穩定的整個過程結果為前人文獻未曾提及，對於之後進行三維模擬自然對流誘導紊流之研究有很大的幫助。

表 4-7 三維垂直管道自然對流案例

	R 長寬比	溫差(K)	Ra_x 雷利數
Case1	3.75	400	1.35×10^8
Case2	2.75	400	5.35×10^7
Case3	2.75	100	1.34×10^7

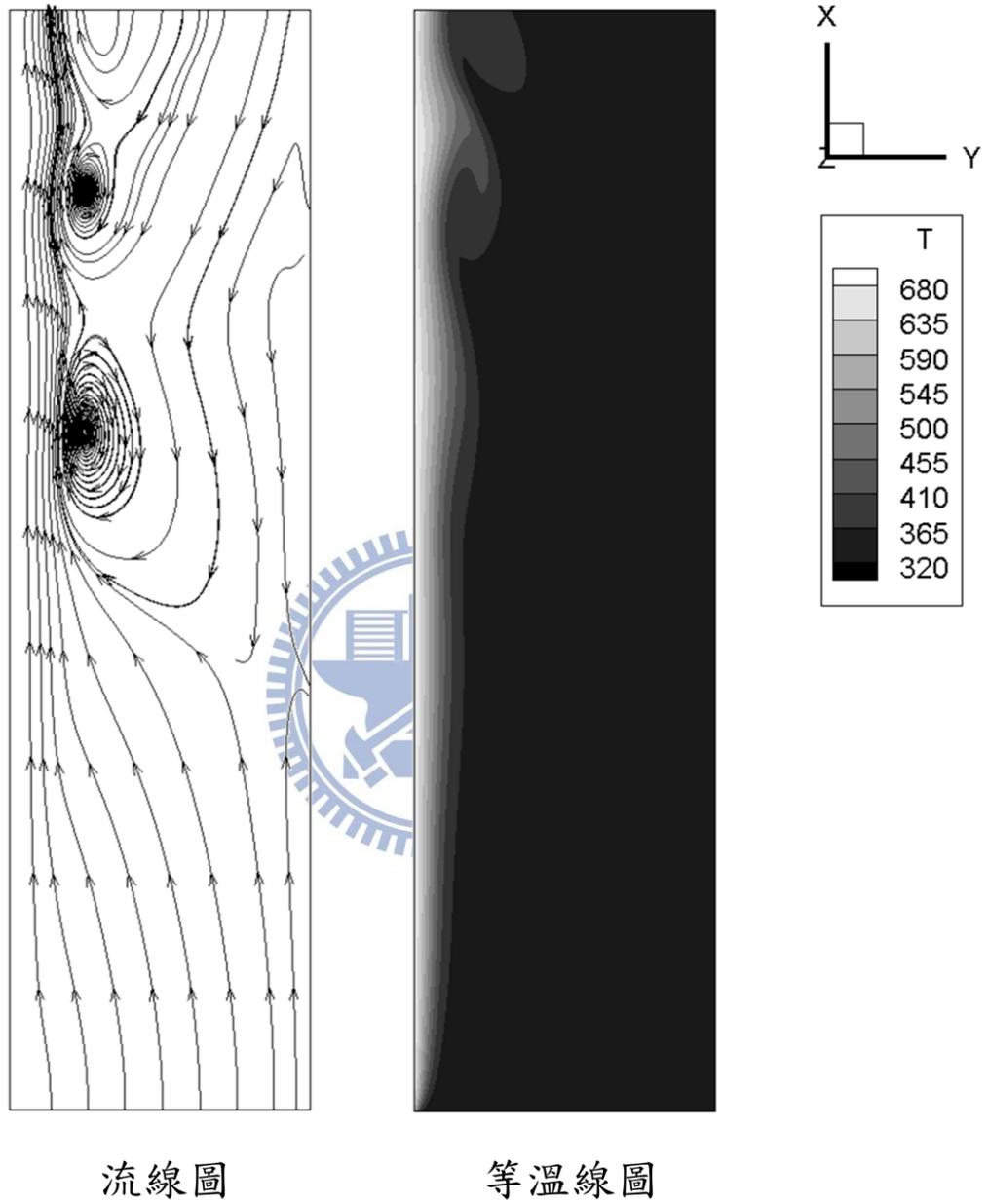
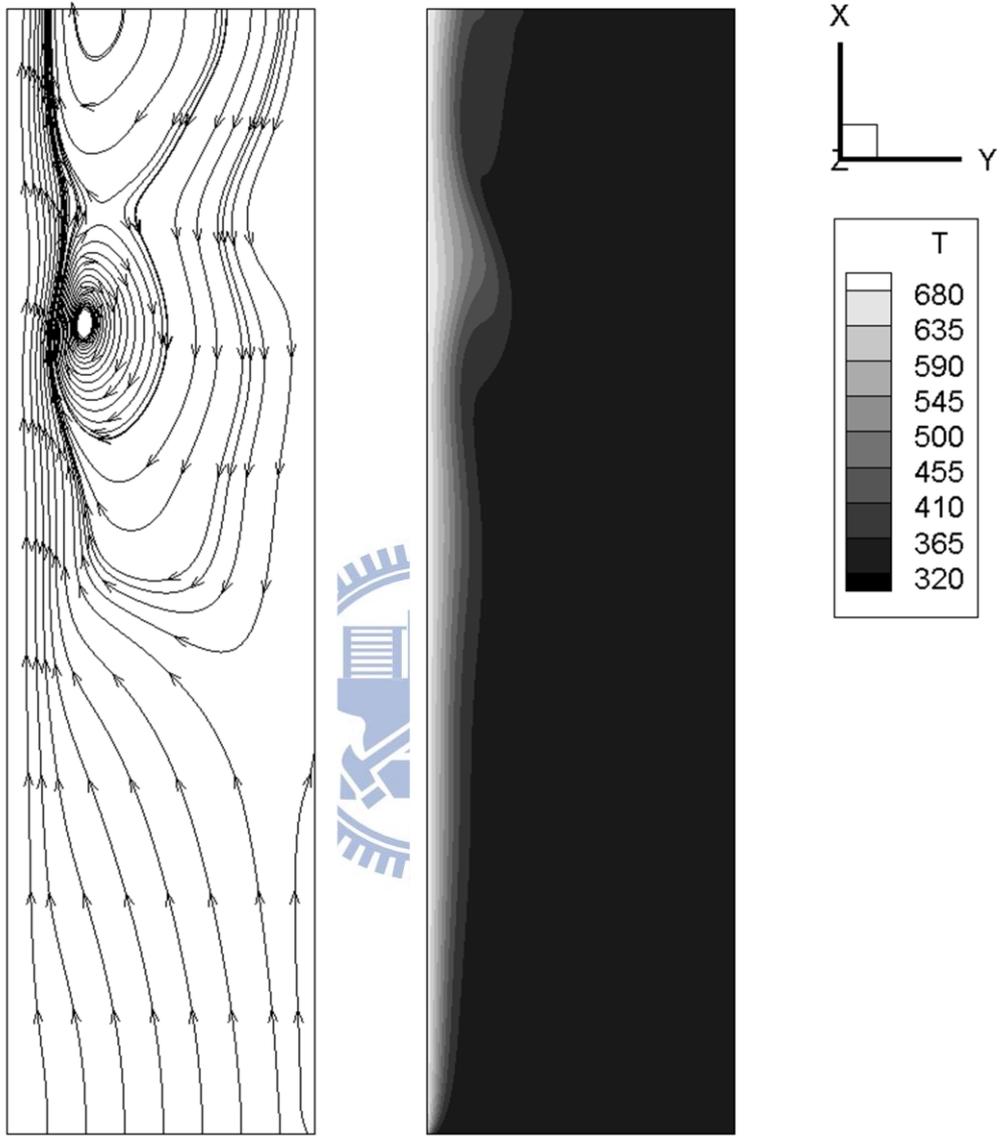


圖 4-39 $R=3.75$ 、 $Ra_x = 1.35 \times 10^8$ 、 $t=6.21$ 秒時流線圖與等溫線分布圖



流線圖

等溫線圖

圖 4-40 $R=3.75$ 、 $Ra_x=1.35 \times 10^8$ 、 $t=6.27$ 秒時流線圖與等溫線分布圖

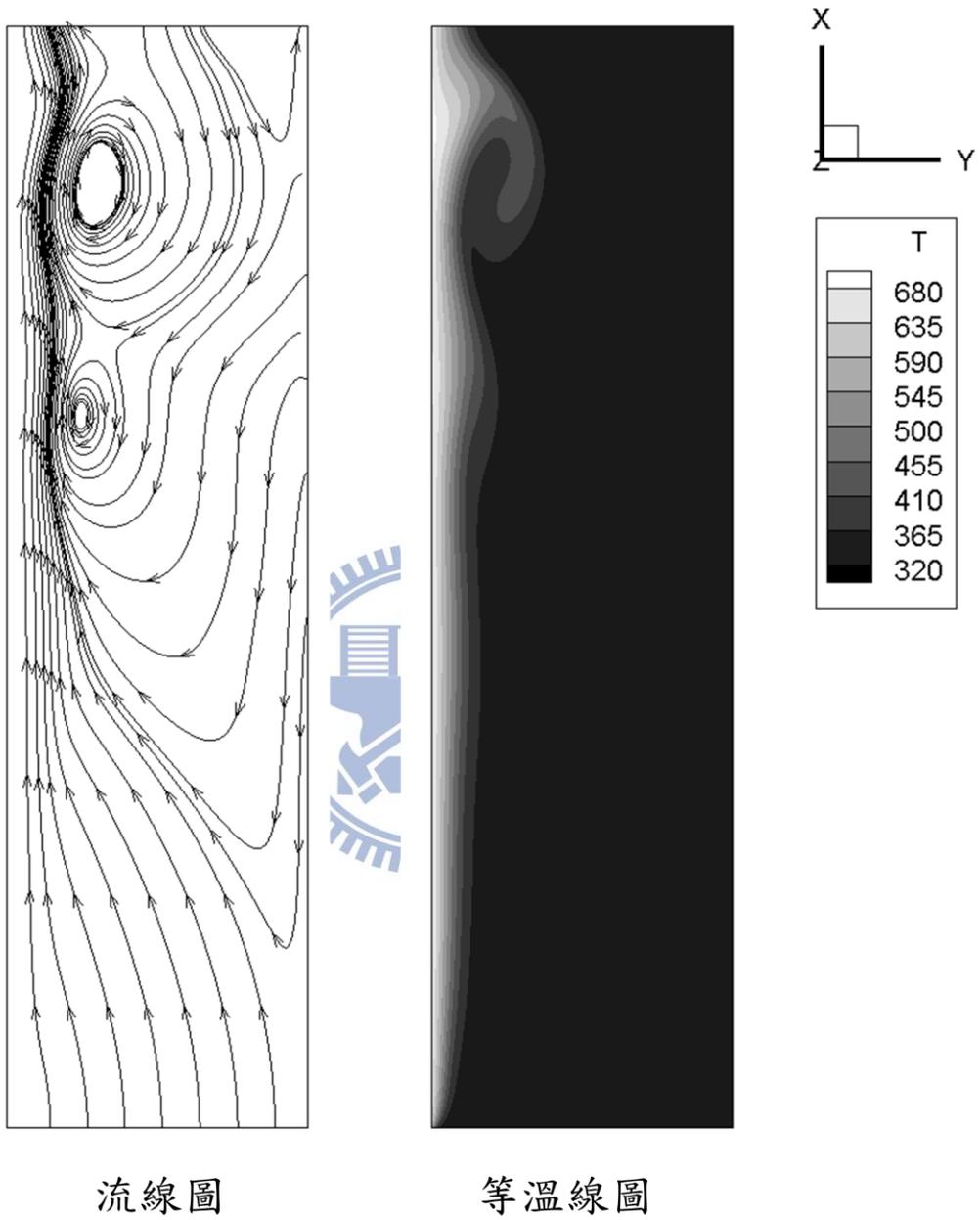


圖 4-41 $R=3.75$ 、 $Ra_x = 1.35 \times 10^8$ 、 $t=6.35$ 秒時流線圖與等溫線分布圖



流線圖

等溫線圖

圖 4-42 $R=3.75$ 、 $Ra_x = 1.35 \times 10^8$ 、 $t=6.4$ 秒時流線圖與等溫線分布圖

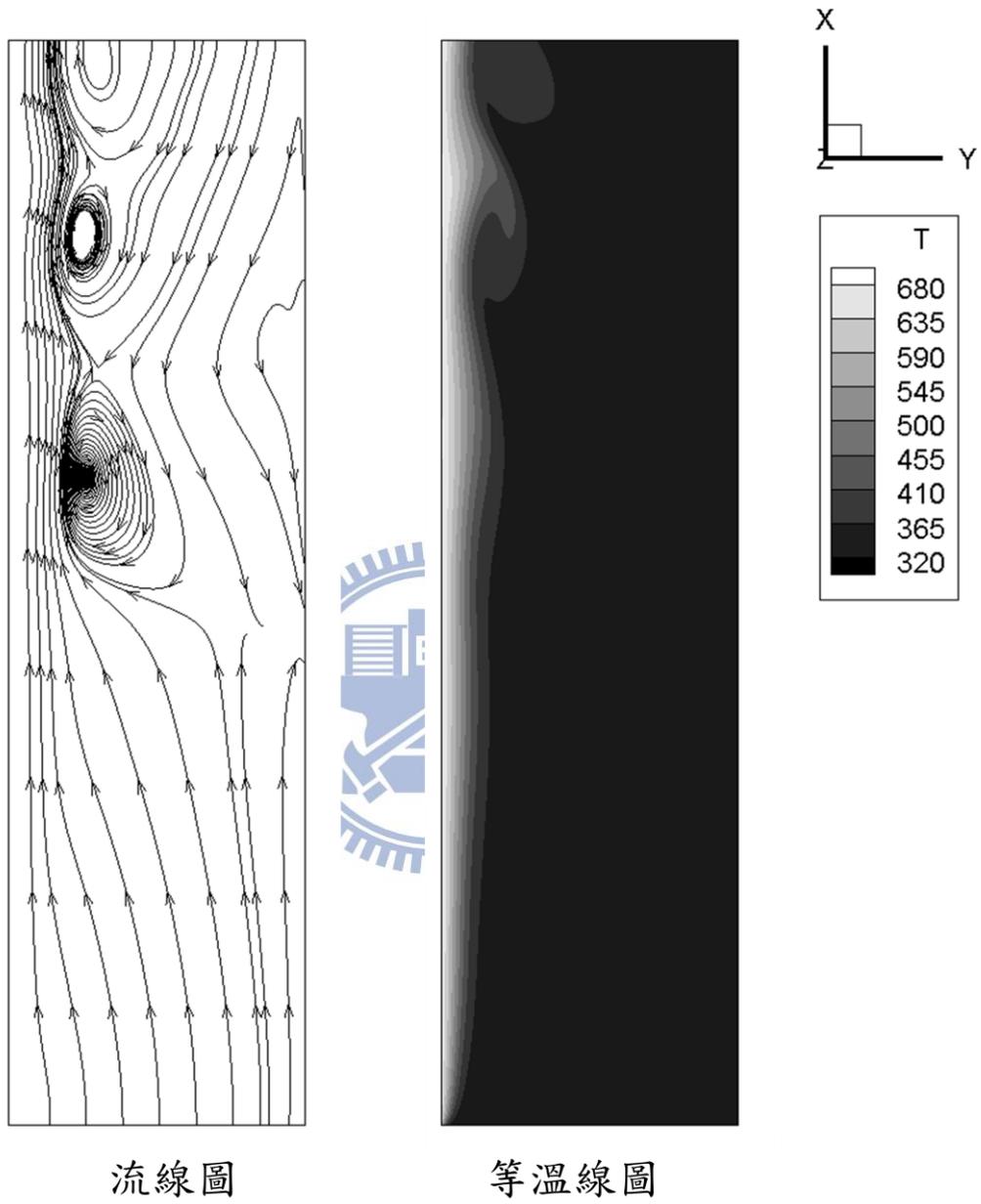


圖 4-43 $R=3.75$ 、 $Ra_x=1.35 \times 10^8$ 、 $t=6.45$ 秒時流線圖與等溫線分布圖

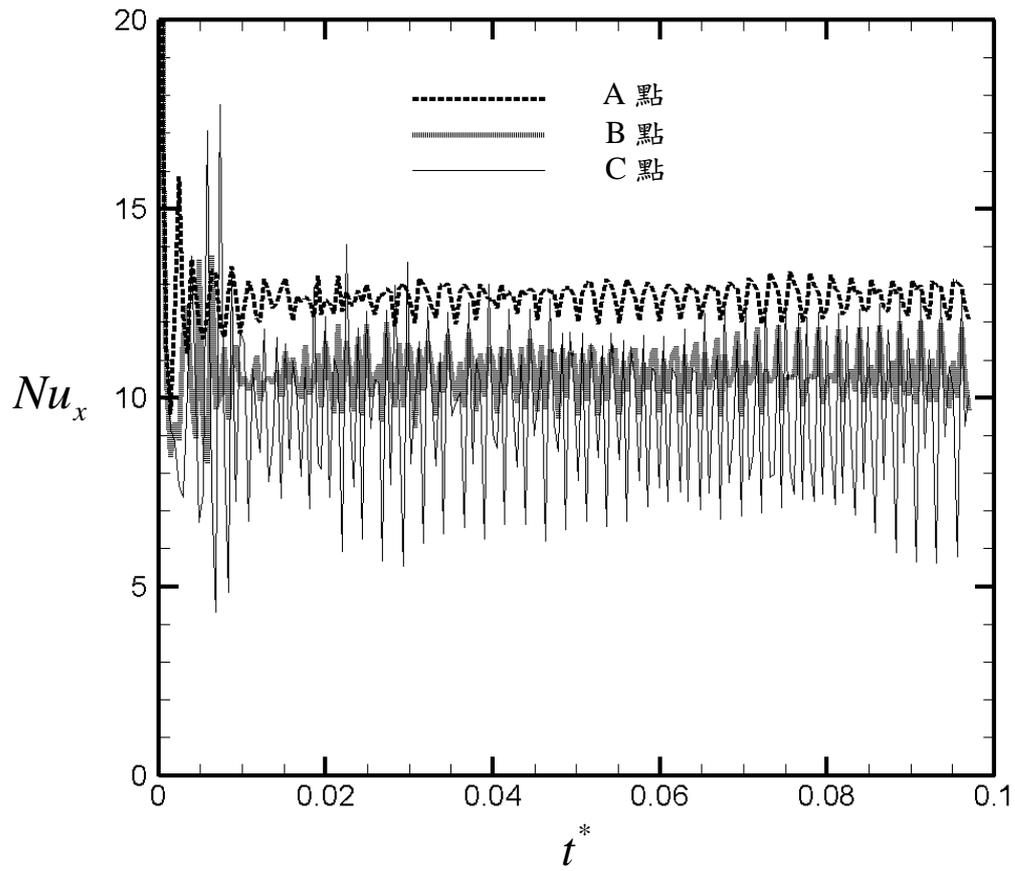


圖 4-44 $R=3.75 \cdot Ra_x = 1.35 \times 10^8$ 加熱壁面上 ABC 三點隨時間變化之局部紐塞數

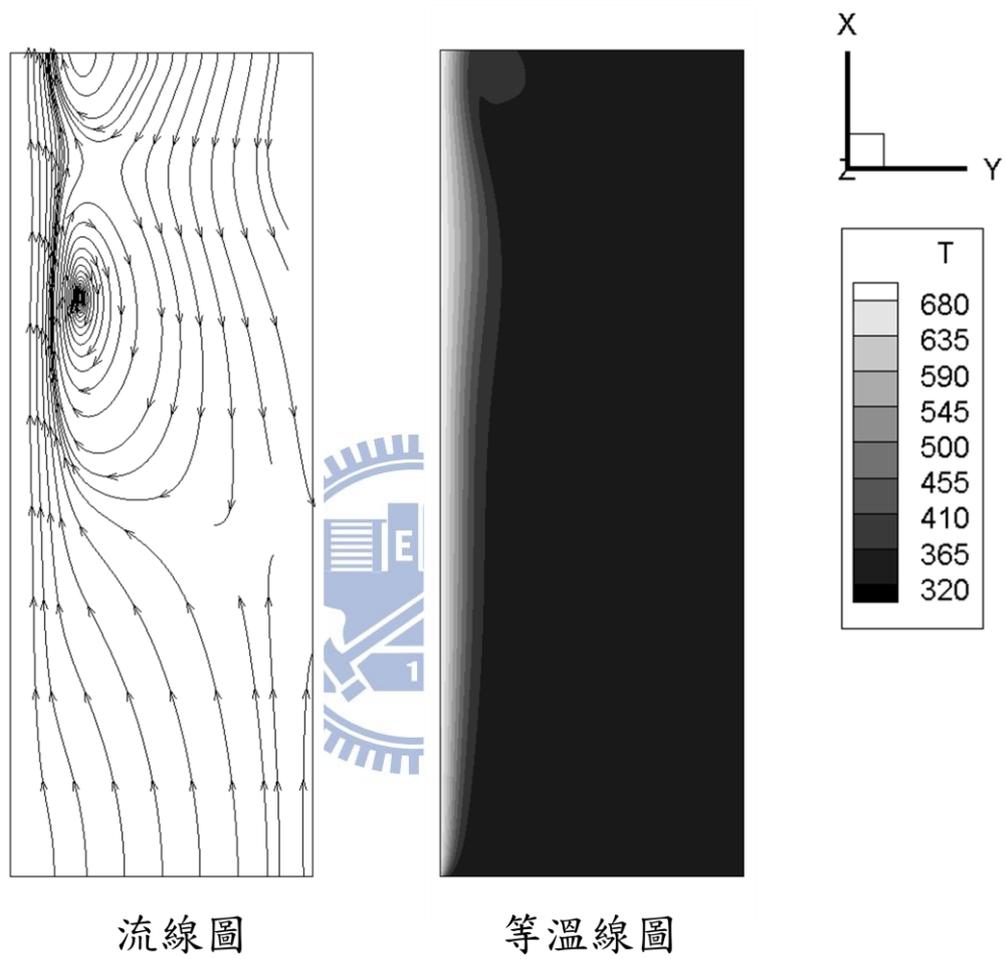


圖 4-45 $R=2.75$ 、 $Ra_x = 5.35 \times 10^7$ 、 $t=6.15$ 秒時流線圖與等溫線分布圖

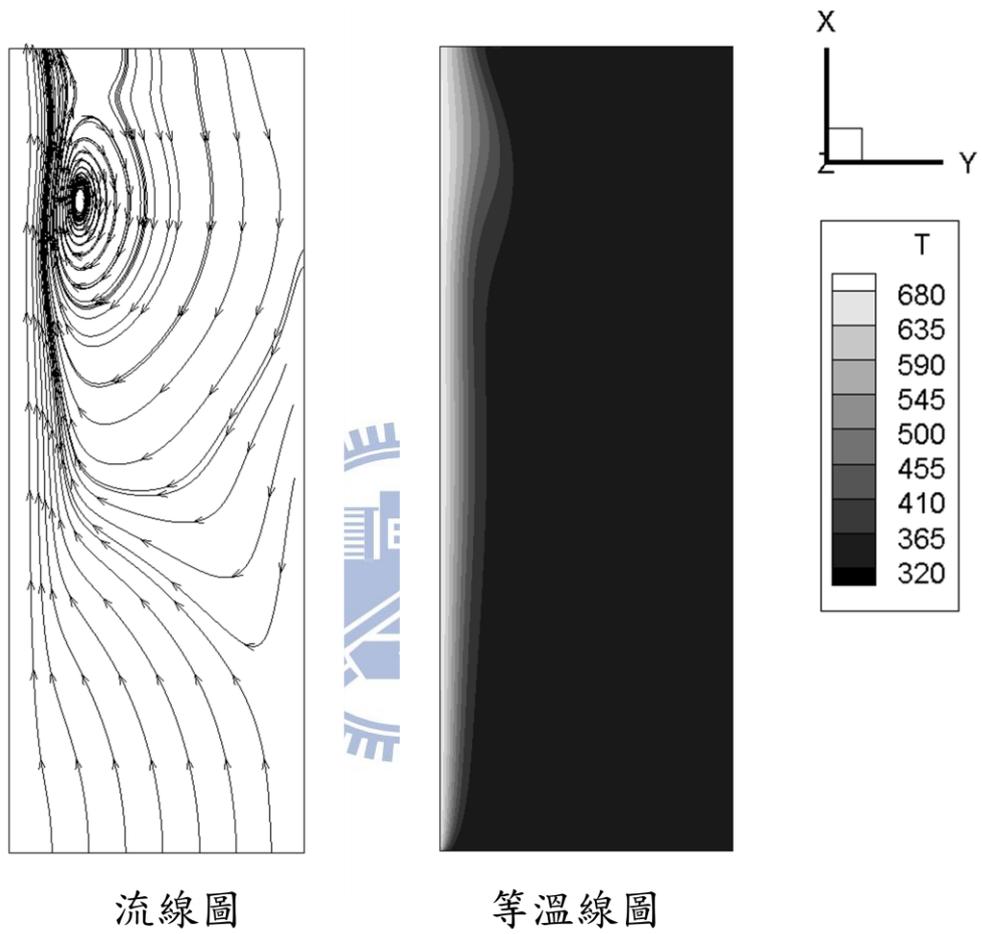


圖 4-46 $R=2.75$ 、 $Ra_x = 5.35 \times 10^7$ 、 $t=6.2$ 秒時流線圖與等溫線分布圖

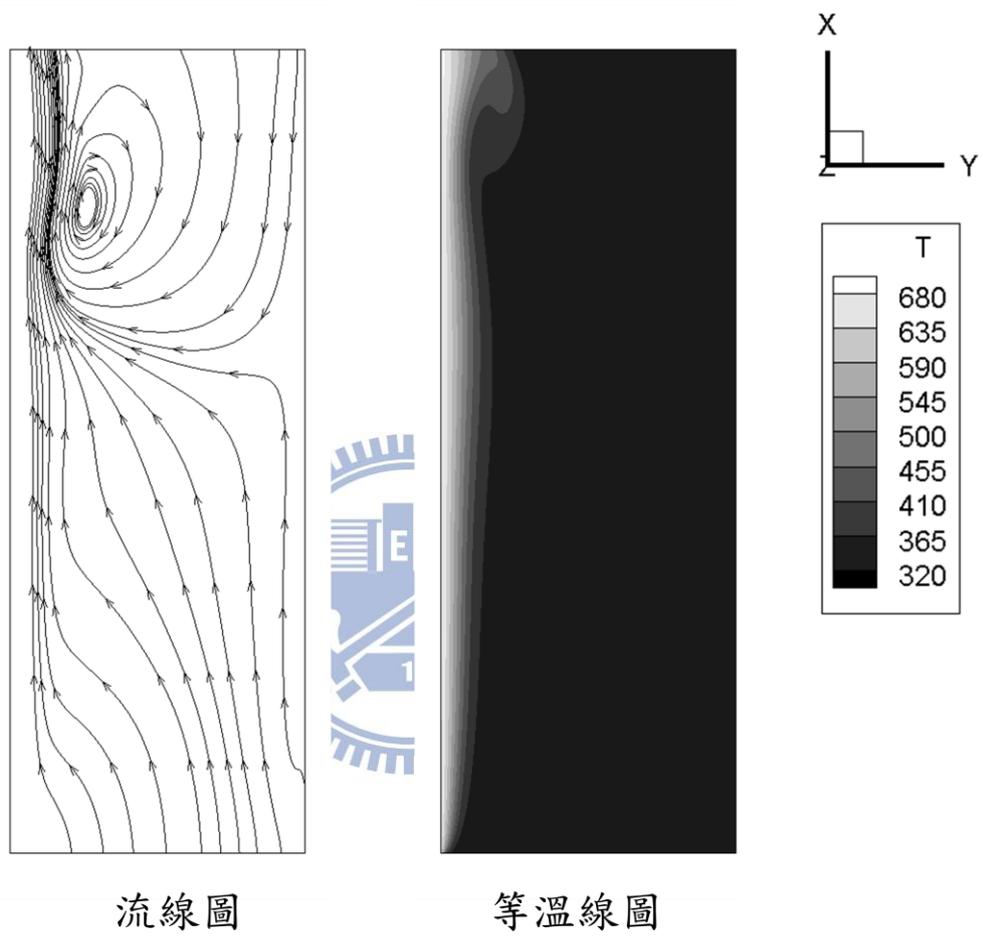
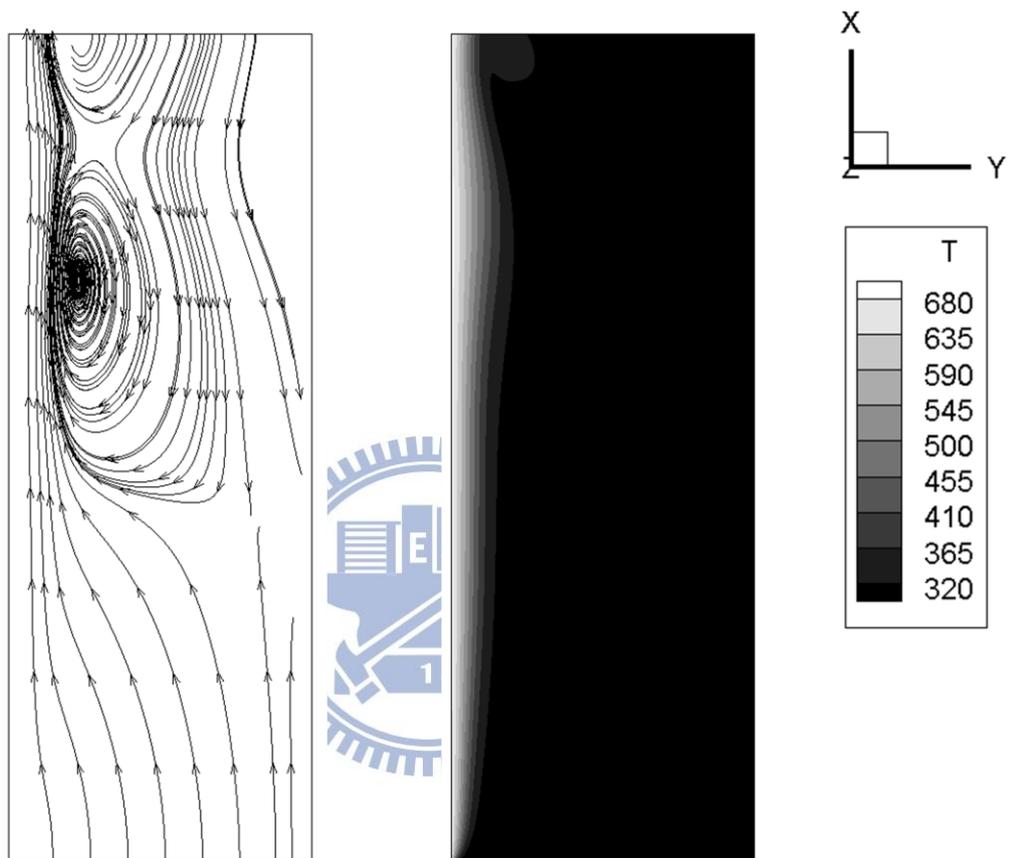


圖 4-47 $R=2.75$ 、 $Ra_x = 5.35 \times 10^7$ 、 $t=6.25$ 秒時流線圖與等溫線分布圖



流線圖

等溫線圖

圖 4-48 $R=2.75$ 、 $Ra_x = 5.35 \times 10^7$ 、 $t=6.3$ 秒時流線圖與等溫線分布圖

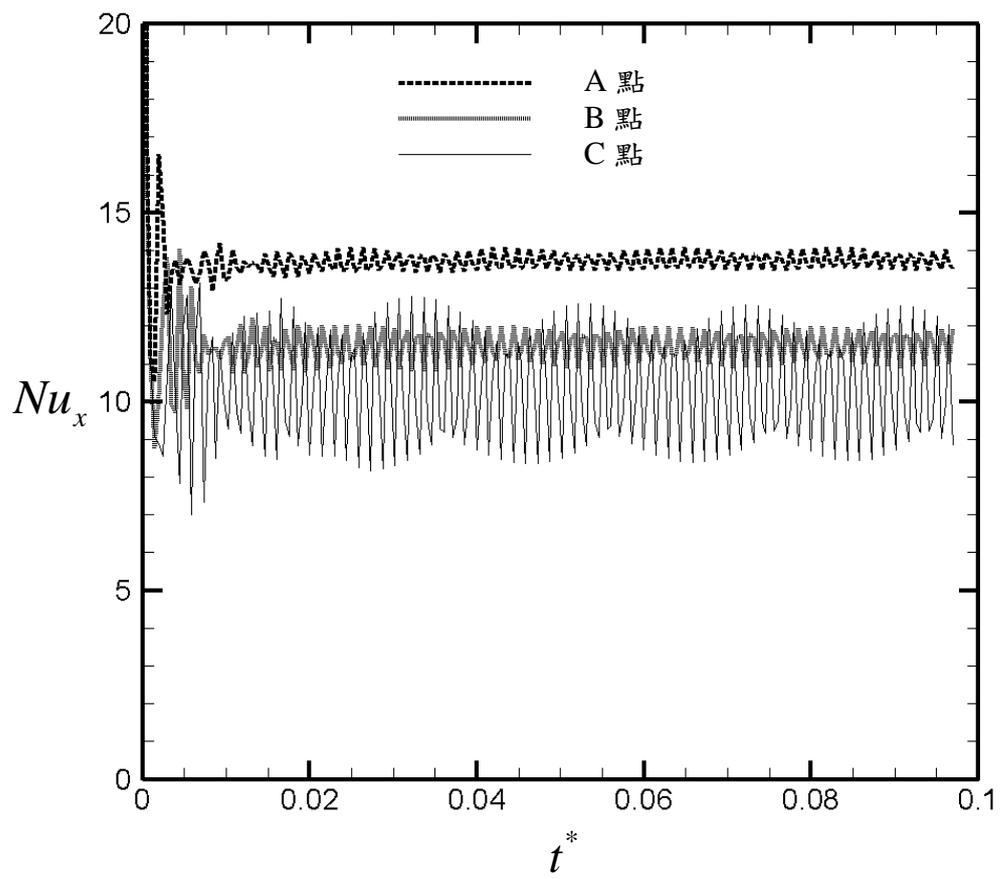
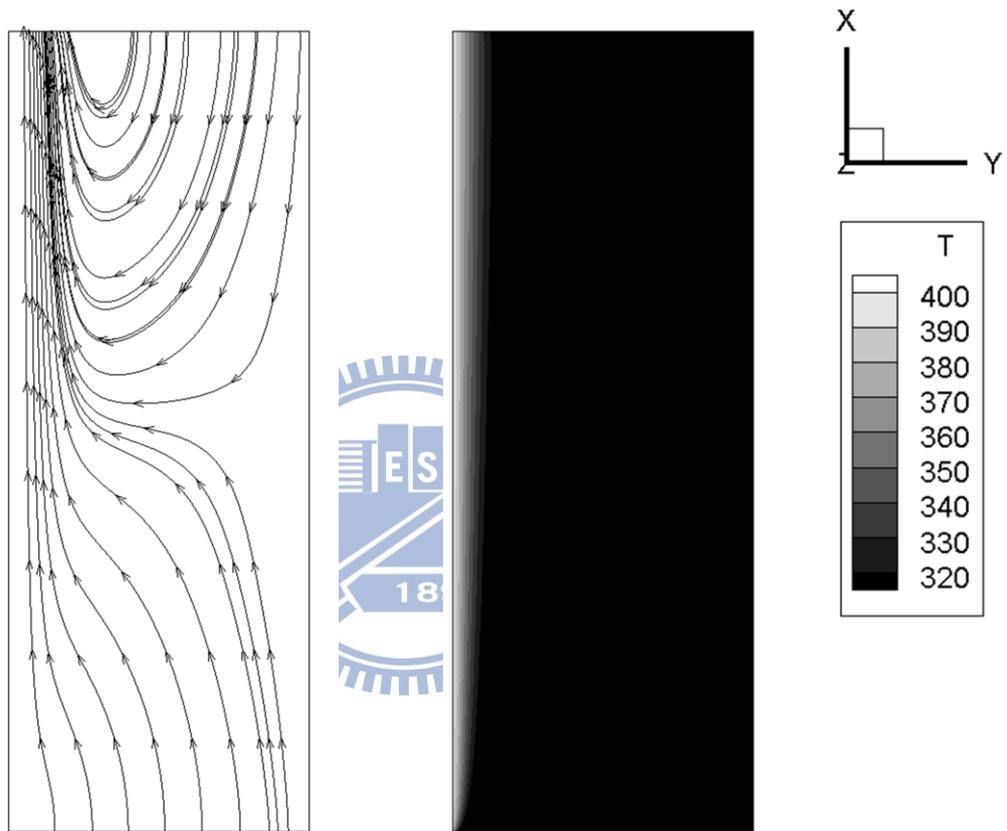


圖 4-49 $R=2.75$ 、 $Ra_x = 5.35 \times 10^7$ 加熱壁面上 ABC 三點隨時間變化之局部紐塞數



流線圖

等溫線圖

圖 4-50 $R=2.75$ 、 $Ra_x=1.34 \times 10^7$ 流線圖與等溫線分布圖

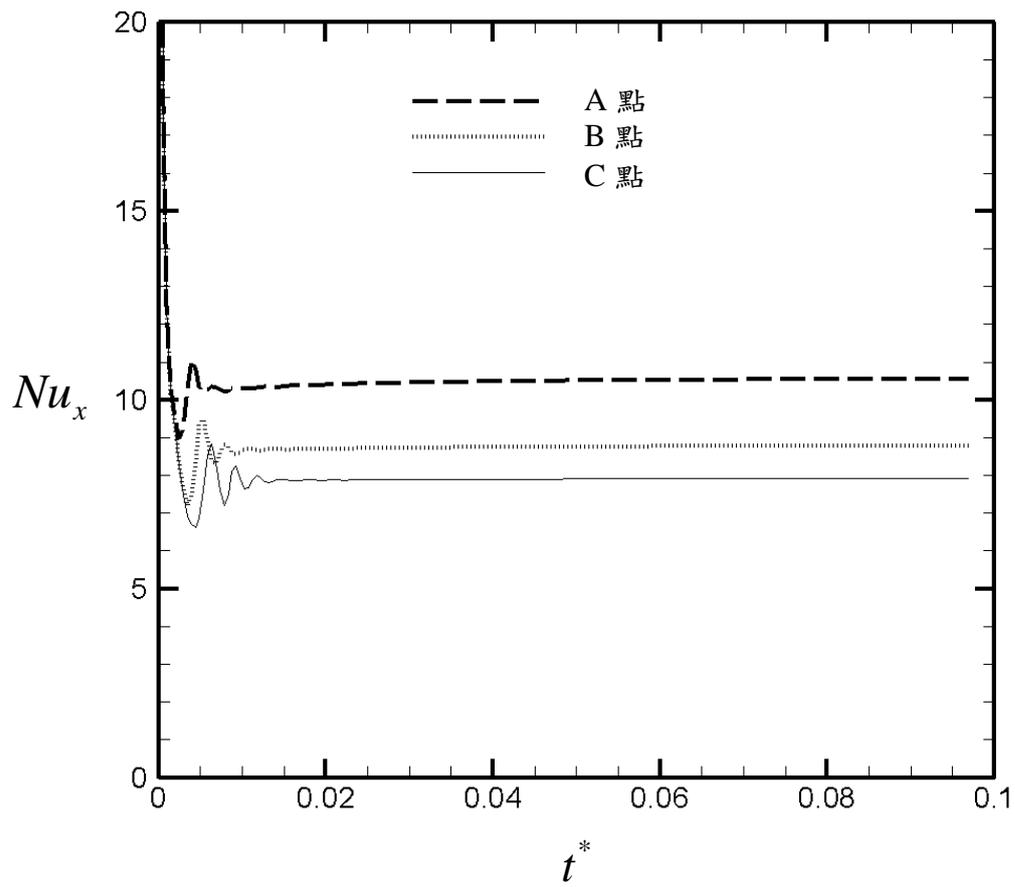


圖 4-51 $R=2.75$ 、 $Ra_x=1.34 \times 10^7$ 加熱壁面上 ABC 三點隨時間變化之局部紐塞數

第五章 結論

本研究利用數值方法研究移動平板對三維矩形管道強制與混合對流熱傳增進之研究，以及三維垂直有限管道自然對流誘導不穩定之現象與加熱壁面的熱傳關係。主要的結論敘述如下：

1. 在三維水平管道加裝移動薄板強制對流的結果中，由於移動薄板與進口管道流的交互作用下，薄板左右移動造成流體向薄板後方遞補類似迴流效應而有向下的速度向量，形成類似一迴旋流場破壞了溫度邊界層，於加熱區的下游區域有顯著的熱傳增益，於低雷諾數下和移動薄板速度較慢的案例中，其較緩慢的薄板移動阻礙了進口的強制對流通過加熱區，與未加裝薄板相比反而稍稍降低了熱傳效果，而在雷諾數與薄板速度較高的案例中，則可達到 54% 的熱傳增益。此類三維的管流與薄板的交互作用現象於前人文獻中未見，為首次利用移動薄板增強熱傳的數值研究。
2. 在三維垂直管道加裝移動薄板混合對流的結果中，浮慣比較高的案例中由於浮力效應較強，產生與加熱面垂直向上的自然對流，進口管流與移動薄板引起之捲流受到阻礙，而無法直接與高溫壁面接觸將熱量帶走，故熱傳效益無法有效率的提升，反之在浮慣比較低強制對流效應較強的案例中，有較好的熱傳效果，而移動薄板的速度越快也會有越佳的熱傳效益。
3. 三維垂直管道自然對流的研究中，在接近臨界雷諾數下的案例裡皆可觀察到自然對流誘導不穩動的現象，此為因左邊高溫壁面浮力作用引起的向上流動與右側由外界吸入的流體在管道中形成渦流，不斷的形成並向上排出造成整個流場的不穩定，而隨時間變化下類似於一動態平衡，而隨著等效雷利數的上升可以看到其熱傳增益也越高。而過去以擾動流場利用紊流現象增加熱傳效益的數值模擬研究皆是以周期性邊界加以紊流強度反覆計算得到一個紊流流場，並非真實物理尺寸下的紊流模擬，自然對流狀態下的有限長度物理模型，無法預先得知因流場變化而產生的進口流量，即無法利用前述方法計算，

故本研究成功觀察到自然對流誘導下的流場不穩定，其資料對日後自然對流誘導紊流之研究極為重要。



參考文獻

1. M. Najam, A. Amahmid, M. Hasnaoui, M. El Alami, “Unsteady Mixed Convection in a Horizontal Channel with Rectangular Blocks Periodically Distributed on its Lower Wall,” *Int. J. Heat Fluid Flow*, 24, pp.726-735, 2003.
2. K. Kitamura, K. Mototani, and F. Kimura, “Heat Transfer of Combined Forced and Natural Convection from Horizontal Cylinder to Air,” *Heat Transfer*, 36, pp. 474–488, 2007.
3. C. Gau, K. A. Yih, W. Aung “Reversed Flow Structure and Heat Transfer Measurements for Bouyancy Assisted Convection in a Heated Vertical Duct,” *ASME, Journal of Heat Transfer*, 114, No. 4, pp.928-935, 1992.
4. G. Desrayaud, G. Lauriat, “Flow Reversal of Laminar Mixed Convection in the Entry Region of Symmetrically Heated, Vertical Plate Channels,” *Int. J. Thermal Sciences*, 48, pp. 2036-2045, 2009.
5. L. Martinez-Suastegui, C. Trevino, “Transient Laminar Opposing Mixed Convection in a Differentially and Asymmetrically Heated Vertical Channel of Finite Length,” *Int. J. Heat Mass Transfer*, 51, pp.5991-6005, 2008.
6. D. D. Joye, “Comparison of Correlations and Experiment in Opposing Flow, Mixed Convection Heat Transfer in a Vertical Tube with Grashorf Number Variation,” *Int. J. Heat Mass Transfer*, 39, pp.1033-1038, 1996.
7. A.E. Bergles, “Recent Development in Convective Heat-transfer Augmentation,” *Applied Mechanics Reviews*, vol.26, pp.675-682, 1973.
8. A.E. Bergles, “Survey and Evaluation of Techniques to Augment Convective Heat and Mass Transfer,” *Heat and Mass Transfer*, vol.1, pp.331-424, 1969.
9. J.J. Hwang and T.M. Liou, “Heat Transfer Augmentation in a Rectangular channel with Slit Rib-turbulators on Two Opposite Walls, ”*Journal of Turbomachinery- Transactions of the ASME*, vol.199, pp.617-623, 1997.

10. Y. Park, J. Cha, and M. Kim, "Heat Transfer Augmentation Characteristics of Various Inserts in a Heat Exchanger Tube," *Journal of Enhanced Heat Transfer*, vol.7, pp.23-33, 2000.
11. Y. Iida, T. Tsuyuki, T. Mashima, T. Takashima, and K. Okuyama, "Augmentation of Boiling Heat Transfer from Horizontal Cylinder to Liquid by Movable Particles," *KAGAKU KOGAKU RONBUNSHU*, vol.26, pp.575-580, 2000.
12. T. Fusegi, "Numerical Study of Turbulent Forced Convection in a Periodically Ribbed Channel with Oscillatory Throughflow," *International Journal of Numerical Methods in Fluid*, vol.23, pp.1223-1233, 1996.
13. J.S. Sitter, T.J. Snyder, J.N. Chung, and P.L. Martson, "Terrestrial and Microgravity Pool Boiling Heat Transfer from a Wire in an Acoustic Field," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol.41, pp.2143-2155, 1998.
14. 劉謹德, "通道內設凸起物往復運動時混合對流之熱傳研究", 國立成功大學碩士論文, 2001.
15. W.S. Fu, K.N. Wang, "An Investigation of a Block Moving Back and Forth on a Heat Plate under a Slot Jet," *Int. J. Heat Mass Transfer*, 44, pp.2621-2631, 2001.
16. H.W. Wu and S.W. Perng, "Effect of an Oblique Plate on the Heat Transfer Enhancement of Mixed Convection over Heated Blocks in a Horizontal Channel," *International Journal of Heat and Mass Transfer* vol.42, pp.1217-1235, 1999.
17. M. Dogan and M. Sivrioglu, "Experimental Investigation of Mixed Convection Heat Transfer from Longitudinal Fins in a Horizontal Rectangular Channel," *International Journal of Heat and Mass Transfer* vol.53, pp.2149-2158, 2010.

18. M.H. Yang and R.H. Yeh, "Mixed Convective Cooling of a Fin in a Channel," *International Journal of Heat and Mass Transfer* vol.53, pp.760-771, 2010.
19. A. Hamouche and R. Bessaih, "Mixed Convection Air Cooling of Protruding Heat Sources Mounted in a Horizontal Channel," *International Journal of Heat and Mass Transfer* vol.49, pp.2652-2662, 2006.
20. A.Dogan and M.sivrioglu, "Investigation of Mixed Convection Heat Transfer in Horizontal Channel with Discrete Heat Sources at the Top and at the Bottom," *International Communications in Heat and Mass Transfer* vol.49, pp.841-849, 2009.
21. Y. Azizi and B. Benhamou, "Buoyancy Effects on Upward and Downward Laminar Mixed Convection Heat and Mass Transfer in a Vertical Channel," *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, vol.17 NO.3, pp.333-353, 2007.
22. W.S. Fu, C.G. Li, "An Investigation of a High Temperature Difference Natural Convection in a Finite Length Channel without Boussinesq Assumption," *International Journal of Heat and Mass Transfer* vol.52, pp.2571-2580, 2009.
23. E. Turkel, "Preconditioned Method for Solving the Incompressible and Low Speed Compressible Equations," *Journal of Computational Physics*, vol.72, pp.277-298, 1987.
24. P. L. Roe, "Approximation Riemann solver, Parameter Vectors, and Difference Schemes," *Journal of Computational Physics*, vol.43, pp.357-372, 1981.
25. D.D. Gray, A. Giorigini, "The Validity of Boussinesq Approximation for Liquids and Gases," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 19, pp.545-551, 1976.

26. S. Yoon, A. Jameson, "Lower-upper symmetric-Gauss-Seidel method for Euler and Navier-Stokes equations" , AIAA Journal, 26, pp.1025-1026, 1988.
27. X.F. Xu, J.S. Lee and R.H. Pletcher, " A Compressible Finite Volume Formulation for Large Eddy Simulation of Turbulent Pipe Flows at Low Mach Number in Cartesian Coordinates," Journal of Computational Physics, vol.203, pp.22-48, 2005.
28. C. S. Peskin, "Flow Patterns around Heart Valves: A Numerical Method." Journal of Computational Physics, Vol. 10, pp.252-271, 1972.
29. J. M. Weiss, W. A. Smith, "Preconditioning Applied to Variable and Constants Density Flows," AIAA, Vol.33, pp.2050-2056, 1995.
30. T. J. Poinso, S. K. Lele, "Boundary Conditions for Navier-Stokes," J. Comput. Phys., 101, pp.104-129, 1992.
31. J. Dennis, P. Thomas, B. Pieter, "Recent Enhancements to OVERFLOW," Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 35th, Reno, NV.
32. F.M. White, "Viscous Fluid Flow," McGrawHill Co., Ltd. pp.113, 2006.
33. A. Bejan, "Convection Heat Transfer," Wiley Co., 3rd edition, pp.280, 2004
34. S.Sathe, K.M. Karki, C. Tai, C. Lamb, S.V. Patanker, "Numerical Prediction of Flow and Heat Transfer in an Impingement Heat Sink," Journal of Electron Packaging, 119, pp.58-63, 1997.
35. N. Yucel, R. T. Guven, "Forced-convection Cooling Enhancement of Heated Elements in a Parallel-plate Channels Using Porous Inserts," Numerical Heat Transfer A, 51, pp.293-312, 2007.
36. Y. Zeng, K. Vafai, "An Investigation of Convective Cooling of An Array of Channel-mounted Obstacles," Numerical Heat Transfer A, 55, pp.967-982, 2009.

37. W.S. Fu, B.H. Tong, "Numerical Investigation of Heat Transfer from a Heated Oscillating Cylinder in a Cross Flow," *Int. J. Heat Mass Transfer*, 45, pp.3033-3043, 2005.
38. W.S. Fu, B.H. Tong, "Numerical Investigation of Heat Transfer Characteristics of the Heated Blocks in the Channel with a Transversely Oscillating Cylinder," *Int. J. Heat Mass Transfer*, 47, pp.341-351, 2004.
39. W.S. Fu, C.C. Tseng, K.N. Wang, C.P. Huang, "An Experimental Investigation of a Block Moving Back and Forth on a Heat Plate under a Slot Jet", *Int. J. Heat Mass Transfer*, 50, pp.3224-3233, 2007.
40. T. M. Huang, C. Gau, W. Aung, "Flow and Mixed Convection Heat Transfer in a Divergent Heated Vertical Channel," *ASME, Journal of Heat Transfer*, 118, No. 3, pp.605-615, 1996.
41. D. Choi, C. L. Merkel, "Application of Time-iterative Schemes to Incompressible Flow," *AIAA*, 25(6), pp.1518-1524, 1985.
42. D. Choi, C. L. Merkel, "The Application of Preconditioning in Viscous Flows," *J. Comput. Phys.*, 105, pp.207-223, 1993.
43. I. Abalakin, A. Dervieux, T. Kozubskaya, "A Vertex Centered High Order MUSCL Scheme Applying to Linearized Euler Acoustics," *INRIA*, No.4459, 2002.
44. R. Verzicco, J. Mohd-Yusof, P. Orlandi, D. Haworth, "LES in Complex Geometries Using Boundary Body Forces, *AIAA*, 38, pp.427-433, 2000.
45. D.G.E. Grigoriadis, J.G. Bartzis, A. Goulas, "LES of the Flow Past a Rectangular Cylinder Using an Immersed Boundary Concept," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 41, pp.615-632, 2003.
46. C.W. Li, L.L. Wang, "An Immersed Boundary Finite Difference Method for

LES of Flow around Bluff Shapes,” Int. J. Numer. Meth. Fluids, 46,
pp.85-107, 2004.

