

國立交通大學

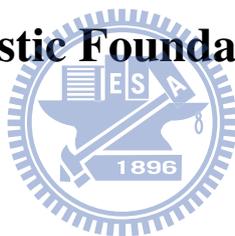
土木工程學系

碩士論文

彈性基礎上環狀板振動分析

Vibration Analysis of Axial Symmetric Plates On

Elastic Foundation



研究生：林暉盛

指導教授：劉俊秀 博士

中華民國九十九年七月

# 彈性基礎上環狀板振動分析

## Vibration Analysis of Axial Symmetric Plates On Elastic Foundation

研究生：林暉盛

Student: Wei-Sheng Lin

指導教授：劉俊秀

Advisor: Gin-Show Liou

國立交通大學

土木工程學系

碩士論文



Submitted to Department of Civil Engineering  
National Chiao Tung University  
in partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of  
Master of Science  
in  
Civil Engineering  
July 2010  
Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十九年七月

# 彈性基礎上環狀板振動分析

研究生：林暉盛

指導教授：劉俊秀 博士

國立交通大學土木工程學系

## 摘要

從工程應用之觀點，有關板之問題是一個很重要的課題。板承受動態外力發生震動需要解決之諸問題，須先求得板之自由振動頻率和振態始可進一步分析研究。而處理板之有關文獻中大致上可分為解析解法與有限元素法兩種，在解析解法中動力反應分析模式，係藉由運動方程式經解析得一含貝索函數的變位函數。再藉由板之邊界條件推衍得頻率方程式，進而求得頻率參數與振態。而有限元素法，首先求得板元素之勁度矩陣及質量矩陣，再合成為板之勁度矩陣及質量矩陣，並代入邊界條件，其次由解(eigenvalue and eigenvector)求得板之自然振動頻率與振態。

而本文之目的即為使用有限元素法應用之套裝軟體來求得動態反應下板之變形情形，並由解析解法來驗證其準確性。進而分析當考慮彈性基礎時，將板依不同的邊界條件，觀察其對板振態之影響。

# Vibration Analysis of Axial Symmetric Plates On Elastic Foundation

Student: Wei-Sheng Lin

Advisor: Prof. Gin-Show Liou

Institute of Civil Engineering  
College of Engineering  
National Chiao Tung University

## Abstract

In the engineering application point of view, solving the problems of the vibration of plate caused by dynamic forces exerted on plate, in general, is required to obtain the natural vibration frequency and mode shape of the plate first, and then the further analysis. The processing board of the relevant literature can be broadly divided into the analytical solution and finite element method are two types of models in classical mechanics, the system by the equations of motion obtained by the analysis of a deflection function with Bessel function. By plate boundary conditions and then inferring the frequency equation may then obtain the frequency parameters and mode shapes. The finite element method, first obtained by plate element stiffness matrix and mass matrix, and then synthesized for the plate stiffness matrix and mass matrix, and substituted into the boundary conditions, followed by the solution (eigenvalue and eigenvector) obtained the natural frequencies of the plate and mode shapes.

The purpose of this paper is to use the Application of the finite element method software package to obtain the dynamic response of the plate deformation case, by the analytical solution to verify its accuracy. Further analysis when considering the elastic foundation, the board according to different boundary conditions, to observe the effect of deformation on the plate.

## 誌謝

研究生的生涯終於在此告一個段落，雖然過程有如電影般嶮折精彩，太多意想不到的事情發生，但我想這應該可以成為最美好得回憶吧。首先要感謝我的老師劉俊秀教授，在一路的學習上耐心的指導，其為人治學處世之態度與嚴謹的精神，適足以為學生所受教，因此受益匪淺，在此致上最誠摯的感謝。

於論文口試期間，承蒙口試委員鄭復平教授、黃炯憲教授給于我指導與寶貴的意見，讓我這本論文更加完整，感激不盡並以誌之。

研究期間，特別感謝鍾瑜隆學長這段時間的指導，學弟們的協助幫忙，以及同窗好友天宇在我撰寫論文時互相勉勵與協助，土研所全體同學、學長、學弟宛如家人般地相親相愛，均惠我良多，衷心感謝。

最後感謝在我求學期間給我物質上和精神上最大幫助的家人，我的父母、女友，謝謝你們的支持與關懷，感謝你們。

## 目錄

圖目錄

符號說明

<b>彈性基礎上環狀板振動分析.....</b>	<b>I</b>
<b>第一章 緒論.....</b>	<b>1</b>
1.1 前言.....	1
1.2 文獻回顧.....	2
1.3 研究動機.....	4
<b>第二章 基礎上彈性環狀板之動力反應推導.....</b>	<b>5</b>
2.1 概論.....	5
2.2 虛功原理推導板之控制方程式.....	6
2.3 分析方法.....	10
2.4 環狀板之分析.....	15
2.4.1 前言.....	15
2.4.2 邊界條件.....	15
2.5 頻率方程式求根.....	25
2.5.1 Bracketing Method.....	25
2.5.2 Open Method.....	26

2.5.3 應用求解.....	27
<b>第三章 ANSYS 分析與介紹 .....</b>	<b>28</b>
3.1 前言.....	28
3.2 ANSYS 分析步驟 .....	29
3.2.1 前處理.....	29
3.2.2 加載及求解.....	35
<b>第四章 實例分析 .....</b>	<b>36</b>
4.1 頻率參數 .....	36
4.2 基礎上環狀彈性板之振態 .....	41
4.3 ANSYS 應用分析 .....	56
4.4 理論值與 ANSYS 之值分析比較.....	69
<b>第五章 結論與建議 .....</b>	<b>73</b>
5.1 結論 .....	73
5.2 建議.....	75



## 圖目錄

圖 1. 平板置於彈性半平面示意圖.....	5
圖 2. 環狀板內板為固定端，外板為自由端 .....	15
圖 3. 環狀板內板為自由端，外板為簡之承 .....	16
圖 4. 環狀板內板為自由端，外板為自由端 .....	17
圖 5. 環狀板內板為固定端，外板為固定端 .....	18
圖 6. SHELL63 Element.....	31
圖 7. COMBIN14 Element.....	32
圖 8. Mathematica 軟體所繪頻率方程式曲線圖 .....	37
圖 11. 環狀板內板為固定端，外板為自由端 .....	41
圖 12. 內緣為固定端，外緣為自由端之環狀板，角度固定 $\theta = 0^\circ$ ， .....	42
圖 13. 內緣為固定端，外緣為自由端之環狀板，角度固定 $\theta = 0^\circ$ ， .....	42
圖 14. 內緣為固定端，外緣為自由端之環狀板，角度固定 $\theta = 0^\circ$ ， .....	43
圖 15. 內緣為固定端，外緣為自由端之環狀板，角度固定 $\theta = 0^\circ$ ， .....	43

圖 16. 內緣為固定端，外緣為自由端之環狀板，角度固定	
$\theta=0^\circ$ ， .....	44
圖 17. 內緣為固定端，外緣為自由端之環狀板，模態固定	
$n=1$ ，角度 $\theta=0^\circ$ ，半徑.....	44
圖 18. 環狀板內板為自由端，外板為簡之承 .....	45
圖 19. 內緣為自由端，外緣為簡支承之環狀板，角度固定	
$\theta=0^\circ$ ， .....	45
圖 20. 內緣為自由端，外緣為簡支承之環狀板，角度固定	
$\theta=0^\circ$ ， .....	46
圖 21. 內緣為自由端，外緣為簡支承之環狀板，角度固定	
$\theta=0^\circ$ ， .....	46
圖 22. 內緣為自由端，外緣為簡支承之環狀板，角度固定	
$\theta=0^\circ$ ， .....	47
圖 23. 內緣為自由端，外緣為簡支承之環狀板，角度固定	
$\theta=0^\circ$ ， .....	47
圖 24. 內緣為自由端，外緣為簡支承之環狀板，模態固定	
<u><math>n=1</math></u> ，角度 <u><math>\theta=0^\circ</math></u> ，半徑 <u><math>r=30\sim 100</math></u> ，不同基礎彈性模數 <u><math>K</math></u>	
下半徑與振幅的關係圖.....	48
圖 25. 內緣自由端，外緣簡支承之環狀板，模態固定 <u><math>n=1</math></u> ，	

角度 $\theta=0^\circ$ ，半徑 $r=30\sim 100$ ，將數值無因次化後不同彈性模數 $K$ 下半徑與振幅的關係圖 .....	48
圖 26. 環狀板內板為自由端，外板為自由端 .....	49
圖 27. 內緣為自由端，外緣為自由端之環狀板，角度固定 $\theta=0^\circ$ ，角度固定 $\theta=0^\circ$ ， .....	49
圖 28. 內緣為自由端，外緣為自由端之環狀板，半徑固定 $r=50$ ，角度固定 $\theta=0^\circ$ ， .....	50
圖 29. 內緣為自由端，外緣為自由端之環狀板，角度固定 $\theta=0^\circ$ ， .....	50
圖 30. 內緣為自由端，外緣為自由端之環狀板，角度固定 $\theta=0^\circ$ ， .....	51
圖 31. 內緣為自由端，外緣為自由端之環狀板，角度固定 $\theta=0^\circ$ ， .....	51
圖 32. 內緣自由端，外緣簡支承之環狀板，模態固定 $n=1$ ，角度 $\theta=0^\circ$ ，半徑 $r=30\sim 100$ ，將數值無因次化後不同彈性模數 $K$ 下半徑與振幅的關係圖 .....	52
圖 33. 環狀板內板為固定端，外板為固定端 .....	52
圖 34. 內緣為固定端，外緣為固定端之環狀板，角度固定 $\theta=0^\circ$ ，角度固定 $\theta=0^\circ$ ， .....	53

圖 35. 內緣為固定端，外緣為固定端之環狀板，角度固定 $\theta=0^\circ$ ， .....	53
圖 36. 內緣為固定端，外緣為固定端之環狀板，角度固定 $\theta=0^\circ$ ， .....	54
圖 37. 內緣為固定端，外緣為固定端之環狀板，角度固定 $\theta=0^\circ$ ， .....	54
圖 38. 內緣為固定端，外緣為固定端之環狀板，角度固定 $\theta=0^\circ$ ， .....	55
圖 39. 內緣為固定端，外緣為固定端之環狀板，模態固定 <u><math>n=1</math></u> ， <u>角度 <math>\theta=0^\circ</math></u> ， <u>半徑 <math>r=30\sim 100</math></u> ，將數值無因次化後不 同彈性模數 <u><math>K</math></u> 下半徑與振幅的關係圖 .....	55
圖 40. 邊界條件一，第一模態之振態圖 .....	62
圖 41. 邊界條件一，第二模態之振態圖 .....	62
圖 42. 邊界條件一，第三模態之振態圖 .....	63
圖 43. 邊界條件一，第四模態之振態圖 .....	63
圖 44. 邊界條件一，第五模態之振態圖 .....	64
圖 45. 邊界條件二，第一模態之振態圖 .....	64
圖 46. 邊界條件二，第二模態之振態圖 .....	65
圖 47. 邊界條件二，第三模態之振態圖 .....	65

圖 48. 邊界條件三，第二模態之振態圖 .....	66
圖 49. 邊界條件三，第一模態之振態圖 .....	66
圖 50. 邊界條件四，第一模態之振態圖 .....	67
圖 51. 邊界條件四，第二模態之振態圖 .....	67
圖 52. 邊界條件四，第五模態之振態圖 .....	68
圖 53. 內緣為固定端，外緣為自由端之環狀板，角度固定 $\theta=0^\circ$ ， .....	69
圖 54. 內緣為固定端，外緣為自由端之環狀板，角度固定 $\theta=0^\circ$ ， .....	70
圖 55. 內緣為固定端，外緣為自由端之環狀板，角度固定 $\theta=0^\circ$ ， .....	70
圖 56. 內緣為固定端，外緣為自由端之環狀板，角度固定 $\theta=0^\circ$ ， .....	71
圖 57. 內緣為固定端，外緣為自由端之環狀板，角度固定 $\theta=0^\circ$ ， .....	71
圖 58. 內緣為固定端，外緣為自由端之環狀板，角度固定 $\theta=0^\circ$ ， .....	72

## 符號說明

$a$  : 彈性環狀板之外徑

$b$  : 彈性環狀板之內徑

$h$  : 彈性環狀板之厚度

$n$  : 富立葉展開的第個項

$\omega$  : 彈性環狀板之自然頻率

$\rho$  : 彈性環狀板之比重量

$K$  : 彈性環狀板之基礎彈性模數

$\beta$  : 彈性環狀板之頻率參數

$u_{zz}(r, \theta, t)$  : 彈性環狀板之總變位



$A_v$  : 垂直擾動(Vertical excitation)之剛性變位

$A_\theta$  : 翻轉擾動(Rocking excitation) 之剛性變位

$r, \theta, t, z$  : 圓柱座標系統之軸

$W(r, \theta)$  : 彈性環狀板之振態

$D$  : 彈性環狀板之撓曲剛度(flexural rigidity)

$E$  : 彈性環狀板之彈性模數

$\nu$  : 彈性環狀板之卜森比(poisson ratio)

$\sigma_{zz}^n$  : 第個富立葉展開項之正向應力(normal stress)

$\tau_{zr}''$  : 第個富立葉展開項之剪應力(shear stress)

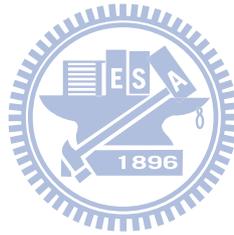
$\tau_{z\theta}''$  : 第個富立葉展開項之剪應力(shear stress)

$I_n$  : 第一類修正型貝索(bessel)函數

$J_n$  : 第一類貝索(bessel)函數

$K_n$  : 第二類修正型貝索(bessel)函數

$Y_n$  : 第二類貝索(bessel)函數



# 第一章 緒論

## 1.1 前言

近年來，電腦日新月異，其處理資料的能力及計算的速度與日俱增，過去一些煩雜的問題，藉由電腦的輔助至今均能迎刃而解。故如何應用電腦分析結構問題，成為近年來學術界及工程界中極重要的一項研究工作。有限元素法即是這種情況下發展出來的一種分析方法，其基本理論是由個體到整體的觀念，將結構物上的問題簡化成一定的步驟，再藉由電腦輔助求得其解。然而在土木工程方面，隨著人類科技文明的發展，施工技術不斷改進，因此各種巨積結構體，如海域鑽油平台、雷達站的基礎、核電廠圍阻體、拱壩等，日漸增多。而在傳統的結構動力分析中，將基礎假設固定於岩盤之上，意謂視土壤介質為剛性體，此與土壤的實際物理性質，顯然相去甚遠，並不足以模擬土壤對結構體的影響。是以，對此類巨積結構物處於地震動力狀態時，土壤介質與結構物之間的交互作用，已廣泛引起工程界的重視與探討。板承受動態外力發生震動需要解決之諸問題，須先求得板之自

由振動頻率和振態始可進一步分析研究。而處理板之有關文獻中大致上可分為解析解法與有限元素法兩種，而本文之目的即為使用有限元素法應用之套裝軟體來求得動態反應下板之變形情形，並由解析解法來驗證其準確性。

## 1.2 文獻回顧

對於彈性板受擾動後所產生的自由振動(free vibration)的研究，已有很長的一段歷史，如包森(Poisson)對徑向對稱之自由橫向振動的分析；克西荷夫對彈性板之非軸向對稱震動的分析，對於強迫震動(force vibration)，其研究也很多，福來(Flynn)以可分離積解(The separable product solution)來處理固定邊界圓板受衝量壓力載重(Impulsive pressure loading)的問題，欽哈姆(Kantham)[2]決定了彈性束縛板(Elastically built-in plate)之自然頻率及正規函數，此外還有雷伊斯曼(Reismann)[2]，威尼(Weiner)[4]等人皆對彈性板的強迫振動都有不少研究。從結構力學領域中，平板結構體甚早即受重視及研究，但僅始於自由振動下之實驗。於1776年Euler[5]首度提出以數學方法，企圖對平板問題之變位行為加以描述。此後歷經 J. Bernoulli[6]；Jr, Sophie Germain；Lagrange；Navier 等加以

推衍或修正，乃至 Kirchhoff[7]，進一步同時考慮板的彎曲及伸展特性，並發現平板的頻率方程式和提出以虛位移法(virtual displacement methods)求解平板問題。

關於 Kirchhoff 所提出薄板理論推論以下結果，做為薄板理論簡化的根據。

- 薄板的厚度，於變形後的變化可略去不計。
- 薄板內部平行於中性面的平面應力，沿著厚度之積分總值(即薄板張力)可略去不計。
- 薄板中，垂直於中性面的法線，變形後仍為中性面的法線。
- 在考慮平衡方程時，薄板乃作為一個平板看待。

在板應用於分析土壤-結構物互制問題中，分為直接法(Directed method)與次結構法(Sub-structure method)，其中以後者廣泛為學者所研究。於此分析方法中，基礎動力反力矩陣支求得，為一重要研究課題。而 1992 年，Liou 和 Lee[1]藉由 Tzong 和 Penzien 所提之邊界解法，並利用其文獻中所引述之分離技巧，導出任意形狀平板的動力反力矩陣(Impedance Matrix)。且於推導過程中，並未假設釋放性邊界條件，是以更能真實地模擬土壤-結構物之交互行為。因而，將本文之推導加以延伸求得外力-變位關係式，將可應用於其上。

### 1.3 研究動機

在早期的研究中，對土壤-結構互制問題，均侷限於假設基礎為一剛性體，置於彈性(elastic)或黏彈性(visco elastic)半平面的土壤介質上。於上述假設前提下，並無須顧慮基礎的柔度(flexibility)對其動力反應效應，但在近年來對實際建築物所作的動力試驗，發現基礎具有相當非共平面的變位，因此，於土壤-結構互制研究課題中，彈性基礎的影響成了不可或缺的考慮因素。所以本文係針對基礎上彈性環狀板的基礎模式，分別引入考慮基礎彈性模數與不考慮基礎彈性模數之動力反應，來相互比較，並使用現有套裝軟體來印証。



## 第二章 基礎上彈性環狀板之動力反應推導

### 2.1 概論

基本假設：

本文所討論之板乃針對小變位之薄板而言，亦即板之變位遠小於板厚，故有以下之假設：

- (1) 板具有線彈性、均質、等向的特性
- (2) 板變形前與平面垂直之點，在變形後仍與之垂直。
- (3) 薄板內部平行於中性面的平面應力，沿著厚度之積分總值(即薄板張力)可略去不計。

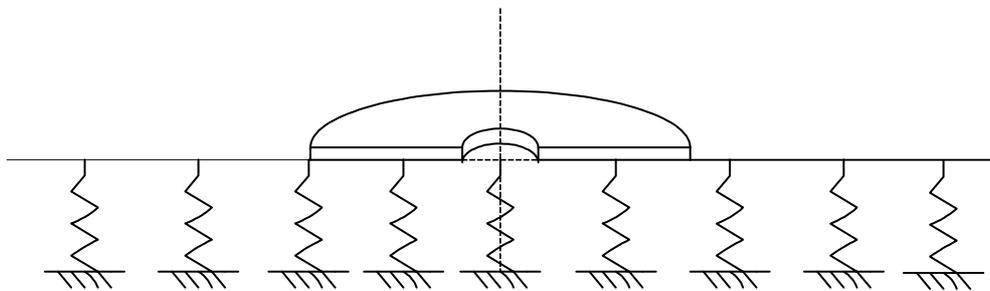


圖 1. 平板置於彈性半平面示意圖

本章推導平板置於彈性半平面之界面模式中，彈性板的動力反應分析。亦即於運動方程式中，考慮慣性力(Inertia force)，以求軸對稱彈性薄板之外力-變位關係式。

## 2.2 虛功原理推導板之控制方程式

古典理論版之變位場為：

$$u_1(x, y, z, t) = u - z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad u_2(x, y, z, t) = v - z \frac{\partial w}{\partial y}, \quad u_3(x, y, z, t) = w(x, y, t)$$

其中  $(u_1, u_2, u_3)$  代表點  $(x, y, z)$  沿  $x, y, z$  方向之變位。

則對應於  $w$  變位之線性應變為：

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$$

而根據虛變位原理

$$\begin{aligned} 0 = \int_{V^e} \left[ \rho z^2 \left( \frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial \delta w}{\partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2} \right) + \rho \delta w \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \delta \varepsilon_x \sigma_x + \delta \varepsilon_y \sigma_y + 2 \delta \varepsilon_{xy} \sigma_{xy} \right] dV \\ + \int_{\Omega} K \delta w n t dxdy + \int_{\Omega} C \delta w \frac{\partial w}{\partial t} dxdy - \int_{\Omega} P \delta w t dxdy - \oint_{\Gamma^e} (-M_n \frac{\partial \delta w}{\partial n} + V_n \delta w) ds \end{aligned} \quad (2-1)$$

因  $V^e = \Omega^e \times (-\frac{1}{2}h_e, \frac{1}{2}h_e)$ ，且彎矩  $M_x$ ， $M_y$ ， $M_{xy}$  分別為：

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz, \quad M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} z dz$$

$$\text{又令 } I_0 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho dz = \rho h, \quad I_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho z^2 dz = \frac{1}{12} \rho h^3$$

則(2-1)式可寫成

$$\begin{aligned}
0 = \int_{\Omega} e & (\delta w I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial \delta w}{\partial x} I_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial \delta w}{\partial y} I_2 \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2} \\
& - M_x \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} - M_y \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} - 2M_{xy} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} + K \delta w w + C \frac{\partial w}{\partial t} \delta w - P \delta w) dx dy \\
& - \oint_{\Gamma} e (-M_n \frac{\partial \delta w}{\partial n} + V_n \delta w) ds
\end{aligned}
\tag{2-2}$$

若板中也具有阻尼的作用，則：

對非等向(Orthotropic)的材料而言

$$\begin{aligned}
M_x &= -(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) - (L_{11} \frac{\partial^2 \frac{\partial w}{\partial t}}{\partial x^2} + L_{12} \frac{\partial^2 \frac{\partial w}{\partial t}}{\partial y^2}) \\
M_y &= -(D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) - (L_{12} \frac{\partial^2 \frac{\partial w}{\partial t}}{\partial x^2} + L_{22} \frac{\partial^2 \frac{\partial w}{\partial t}}{\partial y^2}) \\
M_{xy} &= -2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - 2L_{66} \frac{\partial^2 \frac{\partial w}{\partial t}}{\partial x \partial y}
\end{aligned}$$

其中  $D_{ij}$  是板的剛度，

$$\begin{aligned}
D_{11} &= \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}, \quad D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})} \\
D_{12} &= \frac{\nu_{12} E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}, \quad D_{66} = \frac{1}{12} G_{12} h^3 \\
L_{11} &= \frac{C_{S_1} h^3}{12(1 - \nu_{d_{12}} \nu_{d_{21}})}, \quad L_{22} = \frac{C_{S_2} h^3}{12(1 - \nu_{d_{12}} \nu_{d_{21}})} \\
L_{12} &= \frac{\nu_{d_{12}} C_{S_2} h^3}{12(1 - \nu_{d_{12}} \nu_{d_{21}})}, \quad L_{66} = \frac{1}{12} \Lambda_{12} h^3
\end{aligned}$$

其中  $\nu$  為卜森比，即  $\nu = -\frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{xx}}$

而  $\nu_d$  為側向應變率除以軸向應變率，即

$$v_d = - \frac{\frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial t}}{\frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial t}}$$

$C_s$  為應變率 (strain ratio) 阻尼係數

而  $M_n$  和  $V_n$  與  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$  的關係為:

$$M_n = M_x n_x^2 + M_y n_y^2 + 2M_{xy} n_x n_y$$

$$V_n = Q_x n_x + Q_y n_y + I_2 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} n_x + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2} n_y \right) + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}$$

$$M_{ns} = (M_y - M_x) n_x n_y + M_{xy} (n_x^2 - n_y^2)$$

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}, \quad Q_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y}$$

則(2-2)式可寫成

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\Omega} e \left[ \delta w I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial \delta w}{\partial x} I_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial \delta w}{\partial y} I_2 \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2} \right. \\ + (D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + L_{11} \frac{\partial^2 \frac{\partial w}{\partial t}}{\partial x^2} + L_{12} \frac{\partial^2 \frac{\partial w}{\partial t}}{\partial y^2}) \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \\ + (D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + L_{12} \frac{\partial^2 \frac{\partial w}{\partial t}}{\partial x^2} + L_{22} \frac{\partial^2 \frac{\partial w}{\partial t}}{\partial y^2}) \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \\ + (4D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 4L_{66} \frac{\partial^2 \frac{\partial w}{\partial t}}{\partial x \partial y}) \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} + K \delta w w + C \frac{\partial w}{\partial t} \delta w - P \delta w \left. \right] dx dy \\ - \oint_{\Gamma} e \left( -M_n \frac{\partial \delta w}{\partial n} + V_n \delta w \right) ds \end{aligned}$$

(2-3)

所以由(2-3)式中可得出控制方程式

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2}{\partial x^2} (D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + L_{11} \frac{\partial^2 \frac{\partial w}{\partial t}}{\partial x^2} + L_{12} \frac{\partial^2 \frac{\partial w}{\partial t}}{\partial y^2}) + \\
& \frac{\partial^2}{\partial y^2} (D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + L_{12} \frac{\partial^2 \frac{\partial w}{\partial t}}{\partial x^2} + L_{22} \frac{\partial^2 \frac{\partial w}{\partial t}}{\partial y^2}) + \\
& 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 2L_{66} \frac{\partial^2 \frac{\partial w}{\partial t}}{\partial x \partial y}) + Kw + C \frac{\partial w}{\partial t} - P + \\
& I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) = 0
\end{aligned}$$

(2-4)

當板的材料性質具有均質性及等向性時，

$$D_{11} = D_{22} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = D$$

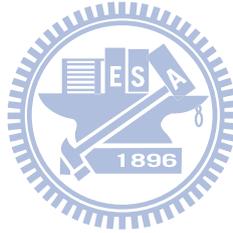
$$D_{12} = \frac{\nu Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$L_{66} = \frac{1}{12} Gh^3 = \frac{1}{12} \times \frac{E}{2(1+\nu)} h^3$$

$$L_{11} = L_{22} = \frac{C_s h^3}{12(1-\nu_d^2)} = L$$

$$L_{12} = \frac{\nu_d C_s h^3}{12(1-\nu_d^2)}$$

$$L_{66} = \frac{1}{12} \Lambda_{12} h^3 = \frac{1}{12} \times \frac{C_s}{2(1+\nu_d)} h^3$$



則(2-4)式變為

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + L \nabla^2 \nabla^2 \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) + Kw + C \frac{\partial w}{\partial t} + I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla^2) w = P \quad (2-5)$$

其中  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  若以極座標表示，則

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

若薄板為均質等向，則(2-5)式可寫成

$$D\nabla^2\nabla^2 w + L\nabla^2\nabla^2\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right) + Kw + C\frac{\partial w}{\partial t} + I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P \quad (2-6)$$

若為均質等向的彈性薄板，則(2-6)式可寫成

$$D\nabla^2\nabla^2 w + Kw + C\frac{\partial w}{\partial t} + I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P \quad (2-7)$$

因此，引用彈性薄板於動力反應模式下之控制方程式，以圓柱座標系統表示之。

$$D\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)u_{zz}(r, \theta, t) + Ku_{zz}(r, \theta, t) + \rho h\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_{zz}(r, \theta, t) = q(r, \theta, t) \quad (2.8)$$

$$D\nabla^2\nabla^2 u_{zz}(r, \theta, t) + Ku_{zz}(r, \theta, t) + \rho h\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_{zz}(r, \theta, t) = q(r, \theta, t) \quad (2.9)$$

其中

$$u_{zz}(r, \theta, t) = \Delta(r, \theta, t) + w(r, \theta, t) \quad (2.10)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (2.11)$$

於 $u_{zz}(r, \theta, t)$ 中， $w(r, \theta, t)$ 表沿板邊緣所計算的位移函數， $\Delta(r, \theta, t)$ 表沿板邊緣之振動大小，亦即整體板的剛性變位(rigid body motion)。

## 2.3 分析方法

假設除了彈性平板的板面外，無表面應力作用於其上，且於推導過程中，將板於徑向方位視作剛性，亦即無共平面(in-plane)方向之

變位，此外板下知剛性變位為可任意指定的。則於 $z=0$ 之邊界上

(1) 垂直擾動(Vertical excitation)，指振態 $n=0$

$$u_{zz}^0(r, \theta, t) = \Delta_1 e^{i\omega t} + w_0(r, \theta, t) \quad ; \quad b \leq r \leq a \quad (2.12)$$

$$\sigma_{zz}^0(r, \theta, t) = 0 \quad ; \quad r > a, \quad r < b \quad (2.13)$$

$$\tau_{rz}^0(r, \theta, t) = \tau_{z\theta}^0(r, \theta, t) = 0 \quad ; \quad 0 \leq r \leq \infty \quad (2.14)$$

(2) 翻轉擾動(Rocking excitation)，指振態 $n=1$

$$u_{zz}^1(r, \theta, t) = \Delta_1 r \cos \theta e^{i\omega t} + w_1(r, \theta, t) \quad ; \quad b \leq r \leq a \quad (2.15)$$

$$\sigma_{zz}^1(r, \theta, t) = 0 \quad ; \quad r > a, \quad r < b \quad (2.16)$$

$$\tau_{rz}^1(r, \theta, t) = \tau_{z\theta}^1(r, \theta, t) = 0 \quad ; \quad 0 \leq r \leq \infty \quad (2.17)$$

(3) 對振態 $n > 1$

$$u_{zz}^n(r, \theta, t) = w_n(r, \theta, t) \quad ; \quad b \leq r \leq a \quad (2.18)$$

$$\sigma_{zz}^n(r, \theta, t) = 0 \quad ; \quad r > a, \quad r < b \quad (2.19)$$

$$\tau_{rz}^n(r, \theta, t) = \tau_{z\theta}^n(r, \theta, t) = 0 \quad ; \quad 0 \leq r \leq \infty \quad (2.20)$$

於動力反應分析中，分為兩種情況：

(1) 分佈參數系統的振態疊加分析

(2) 分離座標系統的振態疊加分析

而於分佈參數系統的振態疊加分析中，只要振態與頻率求出，就可完全與分離座標系統相同。因此，兩者均以各振態反應分量之振

幅，作為定義結構物反應的廣義座標。然而，原則上在分佈參數系統中，因具有無限多個振態，故此座標有無限多個，但實際上只有那些對反應有明顯作用的振態才需考慮，故本文轉化成分離參數型式，用有限個數振態(正規)座標來描述軸對稱彈性薄板的動力反應。

基於上述分析步驟，藉以推導軸對稱薄板之外力-變位關係式。

因此，對彈性環狀板的自由振動運動方程式

$$D\nabla^2\nabla^2 w(r, \theta, t) + Kw(r, \theta, t) + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(r, \theta, t) = 0 \quad (2.21)$$

首先，採用分離變數法(separation of variables)，並假設變位函數的形式為  $w(r, \theta, t) = W(r, \theta)Y(t)$ ，亦即此自由振動運動包含一形狀不變的振態  $W(r, \theta)$ ，而其振幅隨時間成  $Y(t)$  的變化。代入運動方程式(2.21)中，可得

$$D\nabla^2\nabla^2 w(r, \theta)Y(t) + Kw(r, \theta)Y(t) - \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(r, \theta)Y(t) = 0 \quad (2.22)$$

將變數分離

$$\left[ D\nabla^2\nabla^2 w(r, \theta) + Kw(r, \theta) \right] Y(t) = \left[ \rho h w(r, \theta) \right] \frac{\partial^2}{\partial t^2} Y(t)$$

$$\frac{D\nabla^2\nabla^2 w(r, \theta) + Kw(r, \theta)}{\rho h w(r, \theta)} = \frac{Y(t)''}{Y(t)} = -\omega^2 \quad (2.23)$$

整理(2.23)式可得

$$D\nabla^2\nabla^2 w(r, \theta) + Kw(r, \theta) + \omega^2 \rho h w(r, \theta) = 0 \quad (2.24)$$

其中，頻率參數  $\beta$  與自然頻率  $\omega$  之關係式

$$\beta^4 = \frac{\rho h \omega^2}{D} - \frac{K}{D} \quad (2.25)$$

為了方便計算將(2.25)兩邊同乘  $K^4$

$$K^4 \beta^4 = \frac{\rho h \omega^2 K^4}{D} - \frac{K^5}{D} \quad (2.26)$$

則(2.24)可改寫成

$$\begin{aligned} (\nabla^4 - K^4 \beta^4) w(r, \theta) &= 0 \\ (\nabla^2 + K^2 \beta^2)(\nabla^2 - K^2 \beta^2) w(r, \theta) &= 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

由於線性微分方程之原理(linear differential equations)，(2.27)

式的完整解可由疊加法獲得

$$\begin{cases} \nabla^2 w_1(r, \theta) - K^2 \beta^2 w_1(r, \theta) = 0 \\ \nabla^2 w_2(r, \theta) + K^2 \beta^2 w_2(r, \theta) = 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

再將  $W(r, \theta)$  對  $\theta$  作富立葉轉換(Fourier components)

$$W(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(r) \cos n\theta + \sum_{n=0}^{\infty} W'_n(r) \sin n\theta \quad (2.29)$$

其中  $n$  表富立葉展開之第  $n$  個項

將(2.29)式代入(2.28)中可得

$$\begin{cases} \nabla^2 W_{n1}(r) \cos n\theta - K^2 \beta^2 W_{n1}(r) \cos n\theta = 0 \\ \nabla^2 W_{n1}(r) \sin n\theta + K^2 \beta^2 W_{n1}(r) \sin n\theta = 0 \\ \nabla^2 W'_{n2}(r) \cos n\theta - K^2 \beta^2 W'_{n2}(r) \cos n\theta = 0 \\ \nabla^2 W'_{n2}(r) \sin n\theta + K^2 \beta^2 W'_{n2}(r) \sin n\theta = 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

其中  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$  代入(2.30)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial^2 r} W_{n1}(r) \cos n\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} W_{n1}(r) \cos n\theta + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial^2 \theta} W_{n1}(r) \cos n\theta - K^2 \beta^2 W_{n1}(r) \cos n\theta = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial^2 r} W_{n1}(r) \sin n\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} W_{n1}(r) \sin n\theta + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial^2 \theta} W_{n1}(r) \sin n\theta + K^2 \beta^2 W_{n1}(r) \sin n\theta = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial^2 r} W'_{n2}(r) \cos n\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} W'_{n2}(r) \cos n\theta + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial^2 \theta} W'_{n2}(r) \cos n\theta - K^2 \beta^2 W'_{n2}(r) \cos n\theta = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial^2 r} W'_{n2}(r) \sin n\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} W'_{n2}(r) \sin n\theta + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial^2 \theta} W'_{n2}(r) \sin n\theta + K^2 \beta^2 W'_{n2}(r) \sin n\theta = 0 \end{cases}$$

將上式化簡可得

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial^2 r} W_{n1}(r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} W_{n1}(r) - \left( \frac{n^2}{r^2} - K^2 \beta^2 \right) W_{n1}(r) = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial^2 r} W_{n1}(r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} W_{n1}(r) - \left( \frac{n^2}{r^2} + K^2 \beta^2 \right) W_{n1}(r) = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial^2 r} W'_{n2}(r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} W'_{n2}(r) - \left( \frac{n^2}{r^2} - K^2 \beta^2 \right) W'_{n2}(r) = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial^2 r} W'_{n2}(r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} W'_{n2}(r) - \left( \frac{n^2}{r^2} + K^2 \beta^2 \right) W'_{n2}(r) = 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

將(2.31)式做 Bessel functions 轉換

$$\begin{cases} W_{n1} = A_n J_n(K\beta r) + B_n Y_n(K\beta r) \\ W_{n2} = C_n I_n(K\beta r) + D_n K_n(K\beta r) \\ W'_{n1} = A'_n J_n(K\beta r) + B'_n Y_n(K\beta r) \\ W'_{n2} = C'_n I_n(K\beta r) + D'_n K_n(K\beta r) \end{cases} \quad (2.32)$$

最後將(2.32)式代回(2.29)

$$W(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(r) \cos n\theta + \sum_{n=0}^{\infty} W'_n(r) \sin n\theta$$

則可得一含貝索函數(Bessel Function)之函式  $W(r, \theta)$

$$\begin{aligned} W(r, \theta) = & \{A_{1n} J_n(K\beta r) + A_{2n} Y_n(K\beta r) + A_{3n} I_n(K\beta r) + A_{4n} K_n(K\beta r)\} \cos n\theta \\ & + \{A'_{1n} J_n(K\beta r) + A'_{2n} Y_n(K\beta r) + A'_{3n} I_n(K\beta r) + A'_{4n} K_n(K\beta r)\} \sin n\theta \end{aligned} \quad (2.33)$$

而(2.28)式中的八個係數  $A_{kn}$  ;  $A'_{kn}$  ,  $k=1,2,3,4$  定義了板振動時的形狀

與振幅，再由板邊緣的邊界條件，可求得一頻率方程式，並可藉以解出頻率參數  $\beta_n$ ，進而求得自然頻率  $\omega_n$ 。其中  $W(r, \theta)$  具有  $\cos n\theta$  及  $\sin n\theta$ ，因兩者具有類似之週期特性，故以下僅就加以  $\cos n\theta$  推導。

## 2.4 環狀板之分析

### 2.4.1 前言

彈性環狀板的自由振動運動控制方程式，經由分離變數法可得

$$W(r, \theta) = \{A_{1n}J_n(K\beta r) + A_{2n}Y_n(K\beta r) + A_{3n}I_n(K\beta r) + A_{4n}K_n(K\beta r)\} \cos n\theta, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.34)$$

### 2.4.2 邊界條件

本文就四種邊界條件情況之環狀板加以推導。

邊界條件一：

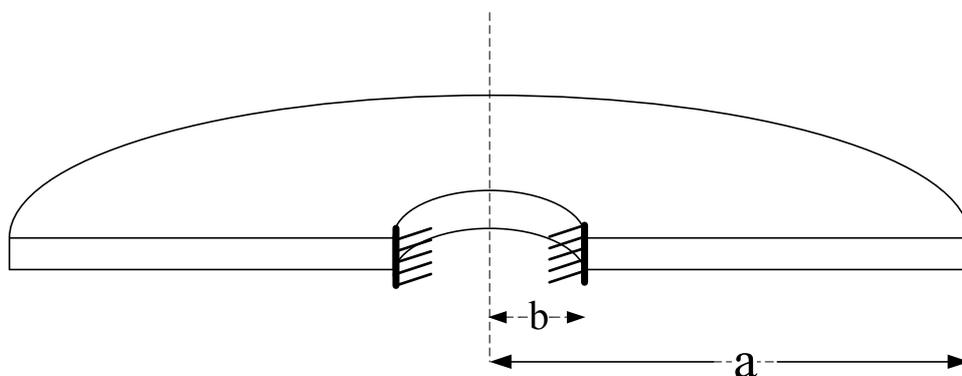


圖 2. 環狀板內板為固定端，外板為自由端

(i) 內板之邊緣為固定端，則  $r=b$  處的變位為零。

$$[W_n(r, \theta)]_{r=b} = 0 \quad (2.35)$$

(ii) 內板之邊緣為固定端，則  $r=b$  處的轉角為零。

$$\left[ \frac{\partial W_n(r, \theta)}{\partial r} \right]_{r=b} = 0 \quad (2.36)$$

(iii) 外板之邊緣為自由端，則  $r=a$  處的徑向彎矩為零。

$$(M_r)_{r=a} = 0 \quad (2.37)$$

(iv) 外板之邊緣為自由端，則  $r=a$  處的反力為零。

$$V = \left[ Q_r - \frac{\partial M_r}{r \partial \theta} \right]_{r=a} = 0 \quad (2.38)$$

邊界條件二：

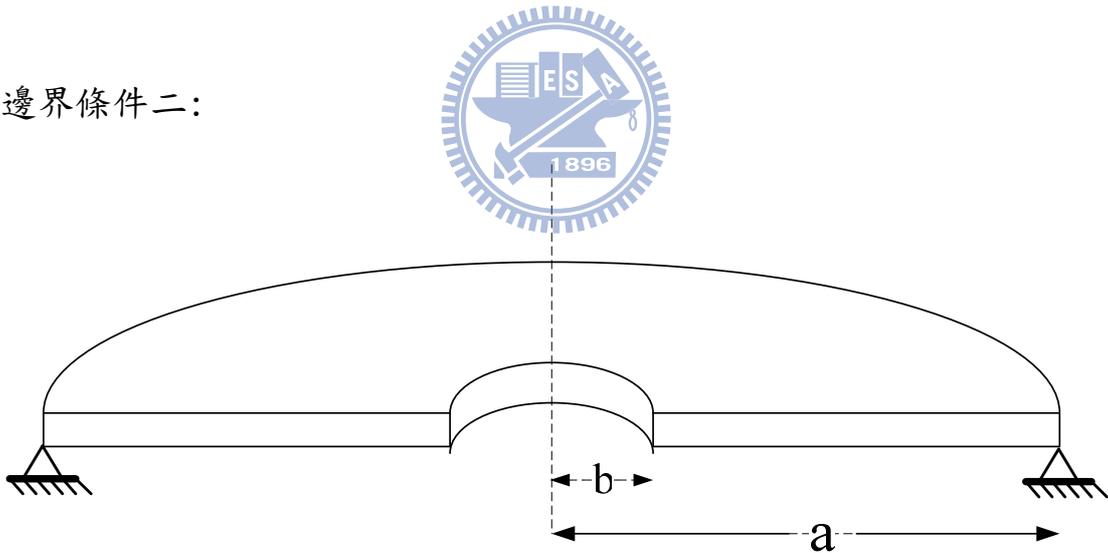


圖 3. 環狀板內板為自由端，外板為簡之承

(i) 內板之邊緣為自由端，則  $r=b$  處的徑向彎矩為零。

$$(M_r)_{r=b} = 0 \quad (2.39)$$

(ii) 內板之邊緣為自由端，則  $r=b$  處的反力為零。

$$V = \left[ Q_r - \frac{\partial M_r}{r \partial \theta} \right]_{r=b} = 0 \quad (2.40)$$

(iii) 外板之邊緣為簡之承，則  $r=a$  處的徑向彎矩為零。

$$(M_r)_{r=a} = 0 \quad (2.41)$$

(iv) 外板之邊緣為簡之承，則  $r=a$  處的變位為零。

$$[W_n(r, \theta)]_{r=a} = 0 \quad (2.42)$$

邊界條件三：

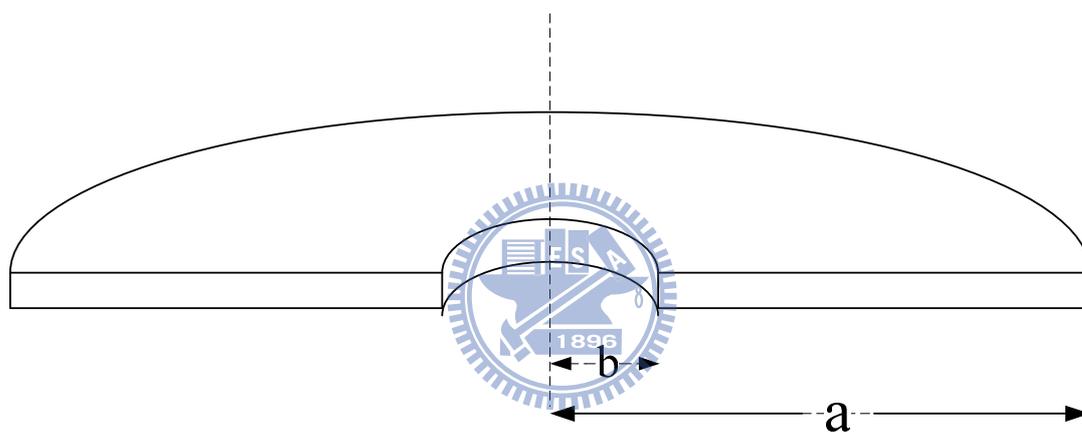


圖 4. 環狀板內板為自由端，外板為自由端

(i) 內板之邊緣為自由端，則  $r=b$  處的徑向彎矩為零。

$$(M_r)_{r=b} = 0 \quad (2.43)$$

(ii) 內板之邊緣為自由端，則  $r=b$  處的反力為零。

$$V = \left[ Q_r - \frac{\partial M_r}{r \partial \theta} \right]_{r=b} = 0 \quad (2.44)$$

(iii) 外板之邊緣為自由端，則  $r=a$  處的徑向彎矩為零。

$$(M_r)_{r=a} = 0 \quad (2.45)$$

(iv) 外板之邊緣為自由端，則  $r=a$  處的反力為零。

$$V = \left[ Q_r - \frac{\partial M_r}{r \partial \theta} \right]_{r=a} = 0 \quad (2.46)$$

邊界條件四：

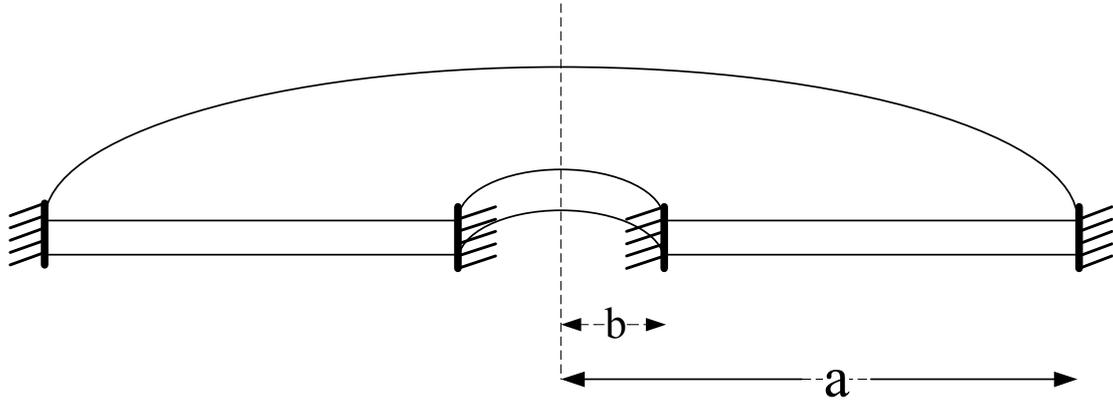


圖 5. 環狀板內板為固定端，外板為固定端

(i) 內板之邊緣為固定端，則  $r=b$  處的變位為零。

$$[W_n(r, \theta)]_{r=b} = 0 \quad (2.47)$$

(ii) 內板之邊緣為固定端，則  $r=b$  處的轉角為零。

$$\left[ \frac{\partial W_n(r, \theta)}{\partial r} \right]_{r=b} = 0 \quad (2.48)$$

(iii) 外板之邊緣為固定端，則  $r=a$  處的變位為零。

$$[W_n(r, \theta)]_{r=a} = 0 \quad (2.49)$$

(iv) 外板之邊緣為固定端，則  $r=a$  處的轉角為零。

$$\left[ \frac{\partial W_n(r, \theta)}{\partial r} \right]_{r=a} = 0 \quad (2.50)$$

藉由各邊界情況之邊界條件，可得：

$$\begin{bmatrix} Coe_{11} & Coe_{12} & Coe_{13} & Coe_{14} \\ Coe_{21} & Coe_{22} & Coe_{23} & Coe_{24} \\ Coe_{31} & Coe_{32} & Coe_{33} & Coe_{34} \\ Coe_{41} & Coe_{42} & Coe_{43} & Coe_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1n} \\ A_{2n} \\ A_{3n} \\ A_{4n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

其中

邊界條件情況一：

$$Coe_{11} = J_n(K\beta b)$$

$$Coe_{12} = Y_n(K\beta b)$$

$$Coe_{13} = I_n(K\beta b)$$

$$Coe_{14} = K_n(K\beta b)$$

$$Coe_{21} = -K\beta J_{n+1}(K\beta b) + \frac{n}{b} J_n(K\beta b)$$

$$Coe_{22} = -K\beta Y_{n+1}(K\beta b) + \frac{n}{b} Y_n(K\beta b)$$

$$Coe_{23} = K\beta I_{n+1}(K\beta b) + \frac{n}{b} I_n(K\beta b)$$

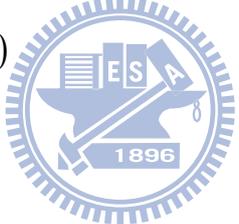
$$Coe_{24} = -K\beta K_{n+1}(K\beta b) + \frac{n}{b} K_n(K\beta b)$$

$$Coe_{31} = K^2 \beta^2 J_{n+2}(K\beta a) - \frac{K\beta}{a} (2n+1+\nu) J_{n+1}(K\beta a) + \frac{n(n-1)(1-\nu)}{a^2} J_n(K\beta a)$$

$$Coe_{32} = K^2 \beta^2 Y_{n+2}(K\beta a) - \frac{K\beta}{a} (2n+1+\nu) Y_{n+1}(K\beta a) + \frac{n(n-1)(1-\nu)}{a^2} Y_n(K\beta a)$$

$$Coe_{33} = K^2 \beta^2 I_{n+2}(K\beta a) + \frac{K\beta}{a} (2n+1+\nu) I_{n+1}(K\beta a) + \frac{n(n-1)(1-\nu)}{a^2} I_n(K\beta a)$$

$$Coe_{34} = K^2 \beta^2 K_{n+2}(K\beta a) - \frac{K\beta}{a} (2n+1+\nu) K_{n+1}(K\beta a) + \frac{n(n-1)(1-\nu)}{a^2} K_n(K\beta a)$$

$$\begin{aligned}
Coe_{41} &= -K^3 \beta^3 J_{n+3}(K\beta a) - \frac{K^2 \beta^2}{a} (3n+4) J_{n+2}(K\beta a) - \frac{K\beta [n^2(1+\nu)+2n]}{a^2} J_{n+1}(K\beta a) \\
&\quad + \frac{n^2(1-n)(1-\nu)}{a^3} J_n(K\beta a) \\
Coe_{42} &= -K^3 \beta^3 Y_{n+3}(K\beta a) + \frac{K^2 \beta^2}{a} (3n+4) Y_{n+2}(K\beta a) - \frac{K\beta [n^2(1+\nu)+2n]}{a^2} Y_{n+1}(K\beta a) \\
&\quad + \frac{n^2(1-n)(1-\nu)}{a^3} Y_n(K\beta a) \\
Coe_{43} &= K^3 \beta^3 I_{n+3}(K\beta a) + \frac{K^2 \beta^2}{a} (3n+4) I_{n+2}(K\beta a) + \frac{K\beta [n^2(1+\nu)+2n]}{a^2} I_{n+1}(K\beta a) \\
&\quad + \frac{n^2(1-n)(1-\nu)}{a^3} I_n(K\beta a) \\
Coe_{44} &= -K^3 \beta^3 K_{n+3}(K\beta a) + \frac{K^2 \beta^2}{a} (3n+4) K_{n+2}(K\beta a) - \frac{K\beta [n^2(1+\nu)+2n]}{a^2} K_{n+1}(K\beta a) \\
&\quad + \frac{n^2(1-n)(1-\nu)}{a^3} K_n(K\beta a)
\end{aligned}$$


(2.52)

邊界條件情況二：

$$\begin{aligned}
Coe_{11} &= K^2 \beta^2 J_{n+2}(K\beta b) - \frac{K\beta}{b} (2n+1+\nu) J_{n+2}(K\beta b) + \frac{n(n-1)(1-\nu)}{a^2} J_n(K\beta b) \\
Coe_{12} &= K^2 \beta^2 Y_{n+2}(K\beta b) - \frac{K\beta}{b} (2n+1+\nu) Y_{n+2}(K\beta b) + \frac{n(n-1)(1-\nu)}{a^2} Y_n(K\beta b) \\
Coe_{13} &= K^2 \beta^2 I_{n+2}(K\beta b) + \frac{K\beta}{b} (2n+1+\nu) I_{n+2}(K\beta b) + \frac{n(n-1)(1-\nu)}{b^2} I_n(K\beta b) \\
Coe_{14} &= K^2 \beta^2 K_{n+2}(K\beta b) - \frac{K\beta}{b} (2n+1+\nu) K_{n+2}(K\beta b) + \frac{n(n-1)(1-\nu)}{b^2} K_n(K\beta b) \\
Coe_{21} &= -K^3 \beta^3 J_{n+3}(K\beta b) - \frac{K^2 \beta^2}{b} (3n+4) J_{n+2}(K\beta b) - \frac{K\beta [n^2(1+\nu)+2n]}{b^2} J_{n+1}(K\beta b) \\
&\quad + \frac{n^2(1-n)(1-\nu)}{b^3} J_n(K\beta b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Coe_{22} = & -K^3 \beta^3 Y_{n+3}(K\beta b) + \frac{K^2 \beta^2}{b} (3n+4) Y_{n+2}(K\beta b) - \frac{K\beta [n^2(1+\nu)+2n]}{b^2} Y_{n+1}(K\beta b) \\ & + \frac{n^2(1-n)(1-\nu)}{b^3} Y_n(K\beta b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Coe_{23} = & K^3 \beta^3 I_{n+3}(K\beta b) + \frac{K^2 \beta^2}{b} (3n+4) I_{n+2}(K\beta b) + \frac{K\beta [n^2(1+\nu)+2n]}{b^2} I_{n+1}(K\beta b) \\ & + \frac{n^2(1-n)(1-\nu)}{b^3} I_n(K\beta b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Coe_{24} = & -K^3 \beta^3 K_{n+3}(K\beta b) + \frac{K^2 \beta^2}{b} (3n+4) K_{n+2}(K\beta b) - \frac{K\beta [n^2(1+\nu)+2n]}{b^2} K_{n+1}(K\beta b) \\ & + \frac{n^2(1-n)(1-\nu)}{b^3} K_n(K\beta b) \end{aligned}$$

$$Coe_{31} = K^2 \beta^2 J_{n+2}(K\beta a) - \frac{K\beta}{a} (2n+1+\nu) J_{n+2}(K\beta a) + \frac{n(n-1)(1-\nu)}{a^2} J_n(K\beta a)$$

$$Coe_{32} = K^2 \beta^2 Y_{n+2}(K\beta a) - \frac{K\beta}{a} (2n+1+\nu) Y_{n+2}(K\beta a) + \frac{n(n-1)(1-\nu)}{a^2} Y_n(K\beta a)$$

$$Coe_{33} = K^2 \beta^2 I_{n+2}(K\beta a) + \frac{K\beta}{a} (2n+1+\nu) I_{n+2}(K\beta a) + \frac{n(n-1)(1-\nu)}{a^2} I_n(K\beta a)$$

$$Coe_{34} = K^2 \beta^2 K_{n+2}(K\beta a) - \frac{K\beta}{a} (2n+1+\nu) K_{n+2}(K\beta a) + \frac{n(n-1)(1-\nu)}{a^2} K_n(K\beta a)$$

$$Coe_{41} = J_n(K\beta a)$$

$$Coe_{42} = Y_n(K\beta a)$$

$$Coe_{43} = I_n(K\beta a)$$

$$Coe_{44} = K_n(K\beta a)$$

(2.53)

邊界條件情況三：

$$Coe_{11} = K^2 \beta^2 J_{n+2}(K\beta b) - \frac{K\beta}{b} (2n+1+\nu) J_{n+2}(K\beta b) + \frac{n(n-1)(1-\nu)}{a^2} J_n(K\beta b)$$

$$Coe_{12} = K^2 \beta^2 Y_{n+2}(K\beta b) - \frac{K\beta}{b} (2n+1+\nu) Y_{n+2}(K\beta b) + \frac{n(n-1)(1-\nu)}{a^2} Y_n(K\beta b)$$

$$Coe_{13} = K^2 \beta^2 I_{n+2}(K\beta b) + \frac{K\beta}{b} (2n+1+\nu) I_{n+2}(K\beta b) + \frac{n(n-1)(1-\nu)}{b^2} I_n(K\beta b)$$

$$Coe_{14} = K^2 \beta^2 K_{n+2}(K\beta b) - \frac{K\beta}{b} (2n+1+\nu) K_{n+2}(K\beta b) + \frac{n(n-1)(1-\nu)}{b^2} K_n(K\beta b)$$

$$Coe_{21} = -K^3 \beta^3 J_{n+3}(K\beta b) - \frac{K^2 \beta^2}{b} (3n+4) J_{n+2}(K\beta b) - \frac{K\beta [n^2(1+\nu)+2n]}{b^2} J_{n+1}(K\beta b) \\ + \frac{n^2(1-n)(1-\nu)}{b^3} J_n(K\beta b)$$

$$Coe_{22} = -K^3 \beta^3 Y_{n+3}(K\beta b) + \frac{K^2 \beta^2}{b} (3n+4) Y_{n+2}(K\beta b) - \frac{K\beta [n^2(1+\nu)+2n]}{b^2} Y_{n+1}(K\beta b) \\ + \frac{n^2(1-n)(1-\nu)}{b^3} Y_n(K\beta b)$$

$$Coe_{23} = K^3 \beta^3 I_{n+3}(K\beta b) + \frac{K^2 \beta^2}{b} (3n+4) I_{n+2}(K\beta b) + \frac{K\beta [n^2(1+\nu)+2n]}{b^2} I_{n+1}(K\beta b) \\ + \frac{n^2(1-n)(1-\nu)}{b^3} I_n(K\beta b)$$

$$Coe_{24} = -K^3 \beta^3 K_{n+3}(K\beta b) + \frac{K^2 \beta^2}{b} (3n+4) K_{n+2}(K\beta b) - \frac{K\beta [n^2(1+\nu)+2n]}{b^2} K_{n+1}(K\beta b) \\ + \frac{n^2(1-n)(1-\nu)}{b^3} K_n(K\beta b)$$

$$Coe_{31} = K^2 \beta^2 J_{n+2}(K\beta a) - \frac{K\beta}{a} (2n+1+\nu) J_{n+2}(K\beta a) + \frac{n(n-1)(1-\nu)}{a^2} J_n(K\beta a)$$

$$Coe_{32} = K^2 \beta^2 Y_{n+2}(K\beta a) - \frac{K\beta}{a} (2n+1+\nu) Y_{n+2}(K\beta a) + \frac{n(n-1)(1-\nu)}{a^2} Y_n(K\beta a)$$

$$Coe_{33} = K^2 \beta^2 I_{n+2}(K\beta a) + \frac{K\beta}{a} (2n+1+\nu) I_{n+2}(K\beta a) + \frac{n(n-1)(1-\nu)}{a^2} I_n(K\beta a)$$

$$Coe_{34} = K^2 \beta^2 K_{n+2}(K\beta a) - \frac{K\beta}{a} (2n+1+\nu) K_{n+2}(K\beta a) + \frac{n(n-1)(1-\nu)}{a^2} K_n(K\beta a)$$

$$Coe_{41} = -K^3 \beta^3 J_{n+3}(K\beta a) - \frac{K^2 \beta^2}{a} (3n+4) J_{n+2}(K\beta a) - \frac{K\beta [n^2(1+\nu)+2n]}{a^2} J_{n+1}(K\beta a) \\ + \frac{n^2(1-n)(1-\nu)}{a^3} J_n(K\beta a)$$

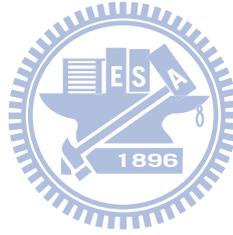
$$\begin{aligned} Coe_{42} = & -K^3 \beta^3 Y_{n+3}(K\beta a) + \frac{K^2 \beta^2}{a} (3n+4) Y_{n+2}(K\beta a) - \frac{K\beta [n^2(1+\nu)+2n]}{a^2} Y_{n+1}(K\beta a) \\ & + \frac{n^2(1-n)(1-\nu)}{a^3} Y_n(K\beta a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Coe_{43} = & K^3 \beta^3 I_{n+3}(K\beta a) + \frac{K^2 \beta^2}{a} (3n+4) I_{n+2}(K\beta a) + \frac{K\beta [n^2(1+\nu)+2n]}{a^2} I_{n+1}(K\beta a) \\ & + \frac{n^2(1-n)(1-\nu)}{a^3} I_n(K\beta a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Coe_{44} = & -K^3 \beta^3 K_{n+3}(K\beta a) + \frac{K^2 \beta^2}{a} (3n+4) K_{n+2}(K\beta a) - \frac{K\beta [n^2(1+\nu)+2n]}{a^2} K_{n+1}(K\beta a) \\ & + \frac{n^2(1-n)(1-\nu)}{a^3} K_n(K\beta a) \end{aligned}$$

(2.54)

邊界條件情況四：



$$Coe_{11} = J_n(K\beta b)$$

$$Coe_{12} = Y_n(K\beta b)$$

$$Coe_{13} = I_n(K\beta b)$$

$$Coe_{14} = K_n(K\beta b)$$

$$Coe_{21} = -K\beta J_{n+1}(K\beta b) + \frac{n}{b} J_n(K\beta b)$$

$$Coe_{22} = -K\beta Y_{n+1}(K\beta b) + \frac{n}{b} Y_n(K\beta b)$$

$$Coe_{23} = K\beta I_{n+1}(K\beta b) + \frac{n}{b} I_n(K\beta b)$$

$$Coe_{24} = -K\beta K_{n+1}(K\beta b) + \frac{n}{b} K_n(K\beta b)$$

$$Coe_{31} = J_n(K\beta a)$$

$$\begin{aligned}
Coe_{32} &= Y_n(K\beta a) \\
Coe_{33} &= I_n(K\beta a) \\
Coe_{34} &= K_n(K\beta a) \\
Coe_{41} &= -K\beta J_{n+1}(K\beta a) + \frac{n}{a} J_n(K\beta a) \\
Coe_{42} &= -K\beta Y_{n+1}(K\beta a) + \frac{n}{a} Y_n(K\beta a) \\
Coe_{43} &= K\beta I_{n+1}(K\beta a) + \frac{n}{a} I_n(K\beta a) \\
Coe_{44} &= -K\beta K_{n+1}(K\beta a) + \frac{n}{a} K_n(K\beta a)
\end{aligned}
\tag{2.55}$$

若為不使得空解(trivial solution)，則矩陣的行列式值必為零，置此行列式值為零，可得頻率方程式，此為一實數系之超越函數，故利用數值方法(勘根定理與 secant 方法)，以求得頻率參數  $\beta_n$ ，由(2.51)式的矩陣中之任三個方程式都可將  $A_{2n}, A_{3n}, A_{4n}$  用  $A_{1n}$  表示出來。

既已求得頻率參數  $\beta_n$  及  $A_{1n}, A_{2n}, A_{3n}, A_{4n}$ ，代回式子(2.28)

$$\begin{aligned}
W(r, \theta) &= \{A_{1n} J_n(K\beta r) + A_{2n} Y_n(K\beta r) + A_{3n} I_n(K\beta r) + A_{4n} K_n(K\beta r)\} \cos n\theta \\
&\quad + \{A'_{1n} J_n(K\beta r) + A'_{2n} Y_n(K\beta r) + A'_{3n} I_n(K\beta r) + A'_{4n} K_n(K\beta r)\} \sin n\theta
\end{aligned}$$

即可求得基礎上環狀彈性板在不同邊界條件情況下，自由振動運動的振態  $W(r, \theta)$ 。

## 2.5 頻率方程式求根

為了求解彈性板於自由振動下之振態，因而推導出頻率方程式，然而此數學式為一含bessel函數之超越函式，可得無限多組解，是以藉數值方法求之。引用兩種數值技巧：

- (1) Bracketing Method
- (2) Open Method

### 2.5.1 Bracketing Method



本法利用函數於根的兩側，其函數值為異號之特性。因此，需要兩個初始猜想值(initial guess)以求根，此二值必須位於真實根之兩側，亦即涵蓋根值之範圍。可得以下結論

設一函數  $f(x)$ ，兩個初始猜想值  $x_l$ ， $x_u$

若  $f(x_l) \times f(x_u) < 0$ ，則  $[x_l, x_u]$ ， $x_u$  區間內有奇數個根。

若  $f(x_l) \times f(x_u) > 0$ ，則  $[x_l, x_u]$ ， $x_u$  區間內有偶數個根或無解。

以上通則，適用於大部分函數，但當函數為與自變數之軸相切，即重根(multiple root)或為一不連續，則無法引用上述法則。

## 2.5.2 Open Method

於 Bracketing Method 中，其根為介於兩個初始猜想值之間，而藉不斷引用其結論，以趨近根值。故可謂其方法具收斂性之優點。而本節之方法，係引用單一或二個初始猜值，但無須將根值涵蓋於其範圍內。故此法有時會遠離根值，甚而具發散特性之缺點。但此法具有 Bracketing Method 所不及的優點，也就是當其收斂時，則收斂速度甚快。

Open Method 可概分為三種：

(1) Simple One-Point Iteration

(2) The Newton-Raphson Method

(3) The Secant Method

本文引用第三種，設一函數  $f(x)$ ，利用  $F.D.M$  可得一次導數之近似式

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i}$$

藉代入 The Newton-Raphson Method 之疊代公式中，故可得另一疊代公式

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \\ &= x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)} \end{aligned}$$

而上式中須二個猜想值，但無須具 Bracketing Method 之特性。

### 2.5.3 應用求解

如前兩小節所述，分別具有其優缺點。是以本文藉同時引用，以擷取二者之優點，彌補其缺點。因為頻率方程式為一具有無限多組解之超越函式，故先引用 Bracketing Method，以等間距之值作初始猜值(initial guess)，並利用 Bracketing Method 之通則，藉以判斷於初始猜值(initial guess)間具唯一根值。而於 Bracketing Method 中，為認定是否具唯一根值，故以縮小間距加以檢測。結果，發現頻率方程式之根值間具近似等差之特性，此一發現更助於求根之過程，可藉此將求根之過程無因次化(Non-Dimensionize)。

接著，將 Bracketing Method 所求得約略根值，分別加減一小於間距之值，以為 The Secant Method 之二個初始猜值(initial guess)。藉以求頻率方程式之根值。

求解過程中，本文利用 Bracketing Method 作為判斷區間內具唯一根值之技巧。為避免此方法於求根過程缺乏效率，在引用 Open Method 中之 The Secant Method，由先前之步驟，確定其具收斂性，再利用此法之優點，迅速收斂，求得頻率方程式之根值。

## 第三章 ANSYS 分析與介紹

### 3.1 前言

隨著科技軟體的快速發展，發展出許多 CAE 計算軟體，如 ANSYS、ANSYS 的 LS-DYNA 模組、ABAQUS、MARC、ALGOR、ADINA、ASKA 等商用軟體。ANSYS 軟體是融合結構、流體、電場、磁場、聲場、分析於一體的大型通用有限元素分析軟體。由世界上最大的有限元素分析軟體公司之一的美國 ANSYS 開發，它可以與多數 CAD 軟體界面結合，展現數據及數值的共享和交換，Pro/Engineer, NASTRAN, Alogor, I-DEAS, AutoCAD 等，是現代產品設計中的高階 CAD 工具之一。它能同時分析 MODEL 受到靜力、動力、流力及熱傳等多重物理現象影響時之變化，所以多應用在土木、機械、航太、材料、電子、生物、醫學工程等多種領域。其中的運算原理乃根據有限元素法(Finite element)，因此當模型建立，並給它相關的參數設定，並加以網格化後，再來只需附加模型的邊界條件，即可直接利用有限原素法來計算。而在 ANSYS 建構模型的部份，可以利用三種方式，如，利用 GUI 介面建構模型、以指令方式建構模型、以 CAD 軟體建構模型，再輸入 ANSYS 介面，來探討其動力特性。

## 3.2 ANSYS 分析步驟

軟體主要包括三個部分：前處理，分析計算和後處理。 [ 前處理 ] 提供了一個強大的實體建模及網格劃分工具，可以很方便地建構有限元素模型； [ 分析計算 ] 包括結構分析（可進行線性分析、非線性分析和高度非線性分析）、流體動力學分析、電磁場分析、聲場分析、壓電分析以及多物理場的耦合分析，具有靈敏度分析及優化分析能力； [ 後處理 ] 可將計算結果以色彩顯示、梯度顯示、立體切片顯示、透明及半透明顯示（可看到架構內部）等圖形模式顯示出來，也可將計算結果以圖表、曲線形式顯示或輸出。軟體提供了 100 種以上的單元類型，用來比擬工程中的各種結構和材料。

啟動 ANSYS 後，進入軟體畫面以後，程式停留在開始平台。從（主選單）即可進入各處理模組：PREP7（前處理模組），SOLUTION（求解模組），POST1（通用後處理模組），POST26（時間歷程後處理模組）。

### 3.2.1 前處理

前處理主要的分析流程包含定義元素的屬性(Element Attributes)，建立實體模型(Solid Modeling)，網格劃分

( Meshing ) 。

## 一、定義元素的屬性(Element Attributes)

元素的選取應用是一開始就要決定的，但往往是最難的動作。而元素的種類又可分為點元素，例如 MASS21。它是以質量點來代替物理系統中各部份，如此即可簡化元素的使用。線元素，線元素又包含了樑元素、管元素、Link 元素，例如 Beam3、Beam54、Pipe16、Link1。其中 Link 元素同時又可用來使用 Cable 等相關結構。薄殼元素，例如 Shell63、Shell191。使用的概念理論包含了薄殼、薄膜及厚板等相關理論。再來就是體積元素，例如 Solid45、Solid95。只要將模型的體積是當切割，就可將體積格點化。

元素選定後，即可開始定義它的材料性質(material property)，一開始是以線性材料為主要考量，反之就必須以非線性的模式重新設定。

本文使用 SHELL63 元素，因為它支援線性彈性的材料模式，這是 ANSYS 的古典板殼元素。雖然 SHELL63 是 2D 的幾何形狀，但是它是佈置在 3D 的空間中，所以板殼結構分析是 3D 的問題而不是 2D 的問題。SHELL63 元素描述

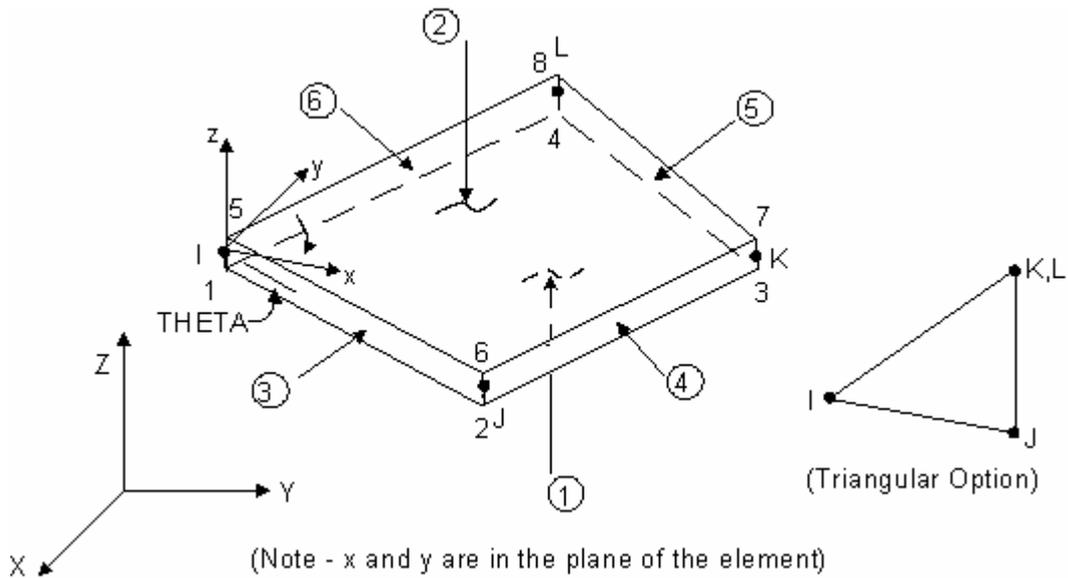


圖 6. SHELL63 Element

SHELL63 有 4 個節點 (I, J, K, L)，每個節點有 6 個自由度：3 個位移 (UX, UY, UZ) 及 3 個轉角 (ROTX, ROTY, ROTZ)，所以一個元素共有 24 個自由度。若 K、L 兩個節點重疊在一起時，它就退化成一個三角形，如圖 1.右圖所示。I-J-K-L 四個節點假設是共平面，若不共平面則以一最接近的平面來「修正」這四個節點。

SHELL63 的元素座標系統表示在圖 1.中，原點是在 I 節點上，X 軸和 I-J 邊可以有一角度差 (THETA，可以透過 R 命令輸入)，X-Y 平面是在 I-J-K-L 四個節點所定義的平面上，Z 軸則由右手規則依 I-J-K-L 順序決定。如果要指定 surface force 時，可以參照 6 個面，其編號如圖所示，作用在第 1、2 面的力稱為 out-of-plane force，作用在第 3、4、5、6 面 (邊) 的力稱為 in-plane force。當你指定壓力作用在第 1 個面時，力量是從下面往上 (+Z 方向)，若是壓力作用在第

2 個面則是由上面往下 (-Z 方向)。

### COMBIN14 彈簧元素描述

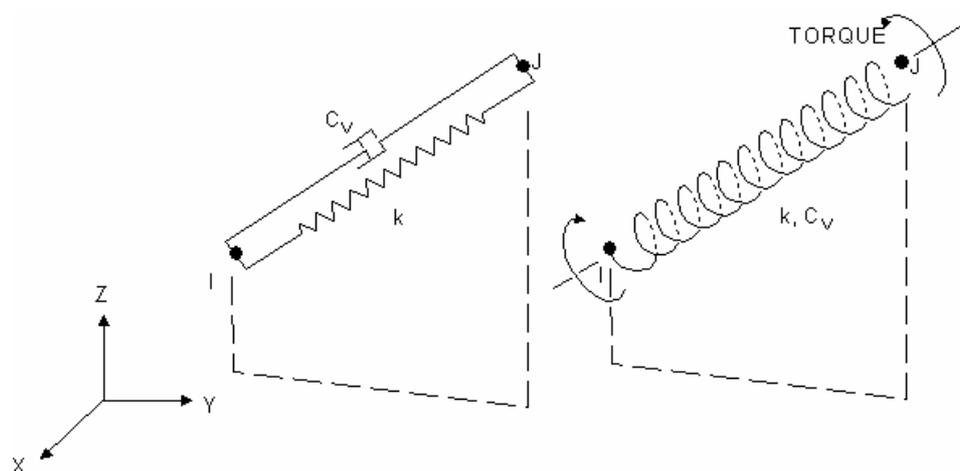


圖 7. COMBIN14 Element

COMBIN14(圖 2.)可以用來表示連結兩個節點間的彈簧及阻尼(兩者同時存在或只有其中之一),其中彈簧或阻尼可以是縱向(longitudinal)或旋轉(rotational)。Figure 13-3 左圖是一組縱向彈簧及阻尼,右圖則是旋轉彈簧及阻尼。一個彈簧是以彈簧常數(spring constant)表示其性能,而阻尼則以阻尼係數(damping coefficient)表示其性能。其中彈簧常數的 SI 單位是 N/m 或 N-m/radian, 阻尼係數的 SI 單位是 N-s/m 或 N-m-s/radian。

COMBIN14 在縱向和扭轉有 1-D、2-D、或 3-D 的應用。縱向的彈簧阻尼選項為一個單軸的拉壓元素,且在每一個點有三個自由度:轉變成點 x、y、z 三個方向。彎曲和扭轉不在此考慮。扭轉彈簧

阻尼選項為一個純扭轉元素且每個點有三個自由度:分別對 x、y、z 三個軸旋轉。在此不考慮彎曲和軸向力。此彈簧組尼元素是沒有質量的。質量可以介由 MASS21 被加上。彈簧和阻尼可以從元素上面被移除。

## 二、建立實體模型(Solid Modeling )

建構模型主要可以使用三種方法來建構，利用指令的方式來建構、利用 GUI 介面來建構、利用 CAD 軟體來建構。



### (1)以指令方式建構模型:

以指令的方式來輸入，例如要建立一個環狀圓板。以環狀圓板中心點之 X、Y 座標 (XC, YC) 為基準，RAD1, RAD2 為圓柱之內外半徑，THETA1, THETA2 為圓柱之起啟，終結角度。圓柱的高度為 DEPTH，而當 DEPTH=0 時 則產生一塊圓形面積。輸入指令的格式為 [CYL4, XCENTER, YCENTER, RAD1, THETA1, RAD2, THETA2, DEPTH ]。指令也可以全部建好在文字檔案裡，修改時也較方便。好處是可以透過指令直接改變幾何，缺點是要非常了解其建模指令。

(2)利用 GUI 介面來建構模型：

即以[ Main > Preprocessor > Modeling > Create ] 的方式來建構，可分為從上而下（top-down）以及由下而上（bottom-up）兩種模式。從上而下（top-down）的做法必須先建立基礎幾何單元，如四方體、圓柱等。再將這些基礎單元透過布林運算（Boolean operation）的技巧組合起來。至於由下而上（bottom-up）的做法則是先建立結構物上的重要關鍵點，再將點連成線，線再連成面，而後面再合成一個體積，最後亦需透過布林運算完成實體模型，此方法的好處就是可以直接在介面上建構模型，缺點是比較複雜的模型不易建構。



(3)利用 CAD 軟體來建構模型：

可利用 CAD 軟體例如 AutoCad、Solid works 等繪圖軟體來建構模型，可經由 IGES、SAT、PARA 等轉換的方式匯入，可以說是相當方便。此方法的好處是較複雜的結構幾何易構建。

### 三、網格劃分(Meshing)

即[Main Menu > Preprocessor > Meshing > Mesh Tool]，其方法分為自由網格（free mesh）與規則網格（mapped mesh）兩種。自

由網格的限制比較少，規則網格法則有較多條件限制，其模形的幾何體積必須符合一定的要求，否則將無法網格化，因此需花費較多時間將實體模型作細部分割。至於規則網格化之計算果較自由網格法準確。

### 3.2.2 加載及求解

完成有線元素模型之後，就可以設定邊界條件進而求解。分析一開始要選擇模型分析之形式，大致分為靜態分析(static analysis)、模態分析(modal analysis)、簡諧分析(harmonic analysis)、暫態分析(transient analysis)、子結構分析(substructure analysis)、挫曲分析(buckling analysis)。本研究是使用模態分析(modal analysis)。

ANSYS 將邊界條件區分五大類，為自由度約束 (DOF constraint)、集中式負載 (force)、表面負載 (surface load)、內部負載 (body force)、慣性負載 (inertia load)。當每次施加邊界後 ANSYS 就會將邊界條件加載的狀況顯現出來，邊界條件設定完後即可求解。求解之結果會存到一輸出檔，若有新的邊界條件也可繼續設定求解。

## 第四章 實例分析

根據前述對基礎上的彈性環狀板於自由振動下，動力反應的推導以及 ANSYS 的應用分析，兩者來做比較，加以印証。

控制變因

環狀板，板內徑  $b = 30$  (in)；板外徑  $a = 100$  (in)

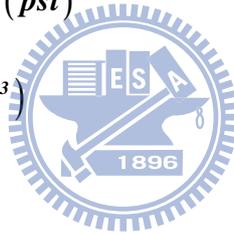
平板之撓曲剛度 (flexural rigidity)  $D = 343406.5934$  (lb-in)

平板之卜森比 (poisson ratio)  $\nu = 0.3$

平板之彈性模數  $E = 3 \times 10^7$  (psi)

平板之比重量  $\rho = 150$  (lb/in<sup>3</sup>)

平板之厚度  $h = 0.5$  (in)



本文就四種邊界條件情況之環狀板加以推導

### 4.1 頻率參數

我們可以使用一些數學軟體來求解頻率參數值，如 Matlab、Mathematica 將結果得出，來達到輔助的效果。在本文中

$$\begin{bmatrix} Coe_{11} & Coe_{12} & Coe_{13} & Coe_{14} \\ Coe_{21} & Coe_{22} & Coe_{23} & Coe_{24} \\ Coe_{31} & Coe_{32} & Coe_{33} & Coe_{34} \\ Coe_{41} & Coe_{42} & Coe_{43} & Coe_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1n} \\ A_{2n} \\ A_{3n} \\ A_{4n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

若為不使得空解(trivial solution)，則矩陣的行列式值必為零，置此行列式值為零，可得頻率方程式，將此頻率方程式套入 Mathematica 中，可得到一曲線圖如下，圖中可見曲線與原點之交會即為所求頻率參數  $\beta_n$ 。

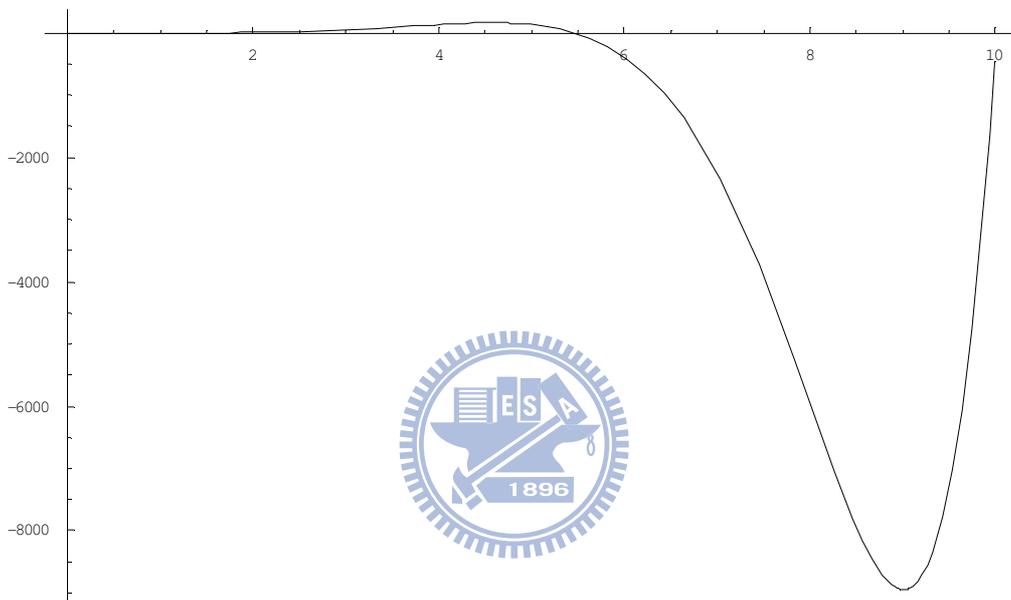
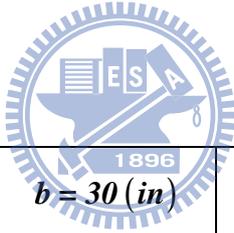


圖 8. Mathematica 軟體所繪頻率方程式曲線圖

- 以內緣為固定端，外緣為自由端之環狀板為例，於圖 9.、圖 10. 中，標示著振態  $n=0,1,2,3,4\dots$ ，在不同內外徑比值下之前  $m$  個根值。
- 由頻率方程式之，頻率方程式具有平板內徑  $b$ ，平板外徑  $a$ ，平板之卜森比  $\nu$ ，基礎彈性模數  $K$ ，四個控制變因。
  - 對各種板徑值，其振態  $n$  間，頻率參數值且隨內外半徑比值越大，差值越小。

- 對各種板徑值，其振態  $m$  間具有近似等差之特性，且隨內外半徑比值越大，特性更明顯。
- 利用上述特性，可對頻率參數於固定值時做無因次化 (non-dimensional) 過程，亦即先求得內外徑比值為  $x$  ( $0 < x < 1$ )、基礎彈性模數  $K = 1 (lb/in^3)$  之頻率參數值，當真實內外徑比值均放大  $y$  倍時，僅須將無因次化之頻率參數值縮小  $y$  倍，當真實基礎彈性模數值均放大  $z$  倍時，僅須將無因次化之頻率參數值縮小  $z$  倍，即為真實頻率參數值。

表 1. 頻率參數值



頻率參數	$a = 100 (in)$	$b = 30 (in)$	$K = 1 (lb/in^3)$	
	邊界條件一	邊界條件二	邊界條件三	邊界條件四
n=0	2.55975	2.15965	6.73396	5.47518
n=1	2.58077	3.57993	6.82961	5.60379
n=2	2.82073	4.91082	7.15114	6.02025
n=3	3.64359	6.22693	7.74813	6.74232
n=4	4.69827	7.50001	8.59912	7.69892
n=5	5.79287	8.71638	9.61745	8.78252
n=6	6.88428	9.89543	10.7165	9.91503
n=7	7.96609	11.0524	11.8431	11.0578
n=8	9.03909	12.1951	12.9732	12.1965
n=9	10.1049	13.3271	14.0987	13.3274
n=10	11.1648	14.4505	15.2177	14.4506

表 2. 頻率參數值(邊界條件一)

頻率參數	$a = 100 (in)$	$b = 30 (in)$	$K = 1 (lb/in^3)$ 邊界條件一	
	第一模態	第二模態	第三模態	第四模態
n=0	2.55975	6.52796	11.1115	15.6265
n=1	2.58077	6.68065	11.2171	15.7094
n=2	2.82073	7.13774	11.5362	15.9588
n=3	3.64359	7.87756	12.2361	16.2074

表 3. 頻率參數值(邊界條件二)

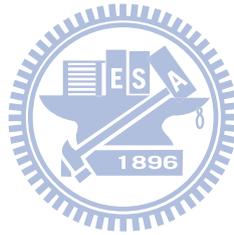
頻率參數	$a = 100 (in)$	$b = 30 (in)$	$K = 1 (lb/in^3)$ 邊界條件二	
	第一模態	第二模態	第三模態	第四模態
n=0	2.15965	6.08623	10.3667	14.7691
n=1	3.57993	6.77031	10.6883	14.9595
n=2	4.91081	8.06481	11.5341	15.5039
n=3	6.22693	9.43089	11.9862	16.0324

表 4. 頻率參數值(邊界條件三)

頻率參數	$a = 100 (in)$	$b = 30 (in)$	$K = 1 (lb/in^3)$ 邊界條件三	
	第一模態	第二模態	第三模態	第四模態
n=0	6.73396	11.1965	15.6894	20.1802
n=1	6.82961	11.2863	15.7639	20.2432
n=2	7.15114	11.5617	15.9896	20.4328
n=3	7.74813	12.0346	16.4379	20.6245

表 5. 頻率參數值(邊界條件四)

頻率參數	$a = 100 (in)$	$b = 30 (in)$	$K = 1 (lb/in^3)$ 邊界條件四	
	第一模態	第二模態	第三模態	第四模態
n=0	5.47519	10.0211	14.5303	19.0303
n=1	5.60379	10.1234	14.6123	19.0981
n=2	6.02025	10.4365	14.8602	19.3022
n=3	6.74032	10.9701	15.1462	19.8925



## 4.2 基礎上環狀彈性板之振態

既已求得頻率參數  $\beta_n$ ，代回本文式子

$$W(r, \theta) = \{A_{1n}J_n(K\beta r) + A_{2n}Y_n(K\beta r) + A_{3n}I_n(K\beta r) + A_{4n}K_n(K\beta r)\} \cos n\theta \\ + \{A'_{1n}J_n(K\beta r) + A'_{2n}Y_n(K\beta r) + A'_{3n}I_n(K\beta r) + A'_{4n}K_n(K\beta r)\} \sin n\theta$$

即可求得基礎上環狀彈性板在不同邊界條件情況下，自由振動運動的振態  $W(r, \theta)$ 。本文就四種邊界條件情況之環狀板加以推導。

邊界條件一：

內緣為固定端，外緣為自由端之環狀板

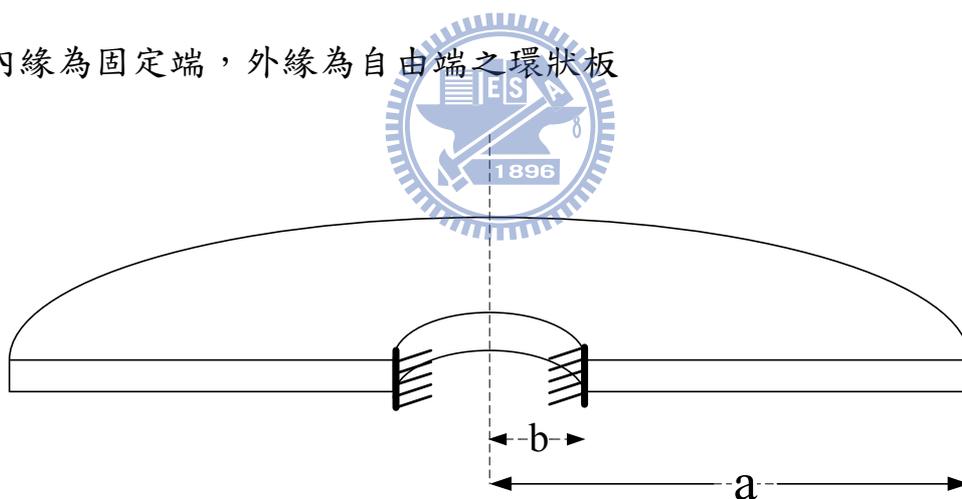


圖 9. 環狀板內板為固定端，外板為自由端

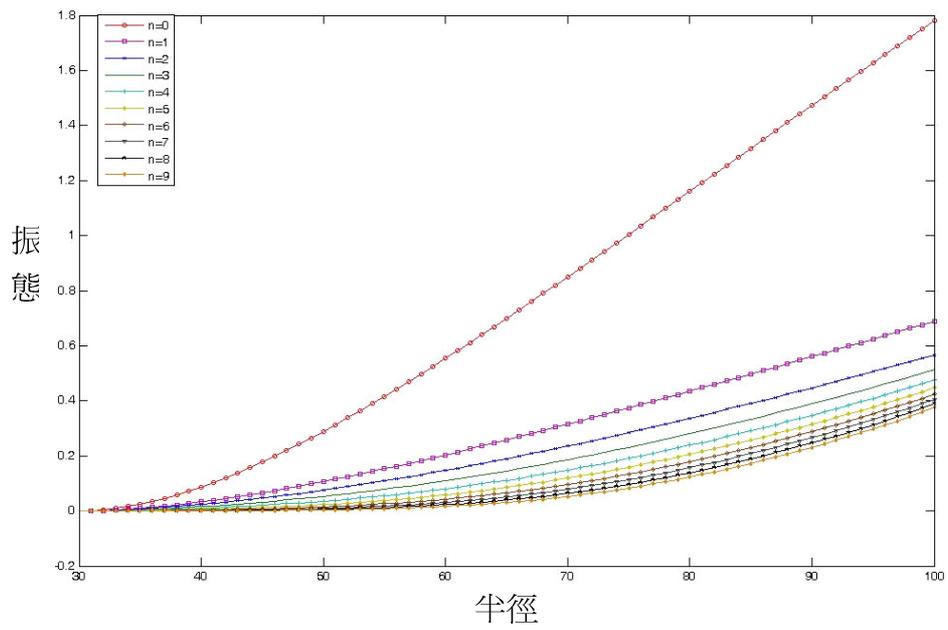


圖 10. 內緣為固定端，外緣為自由端之環狀板，角度固定  $\theta = 0^\circ$ ，半徑  $r = 30 \sim 100$ ，第一模態下在不同  $n$  的情況半徑與振態的關係圖

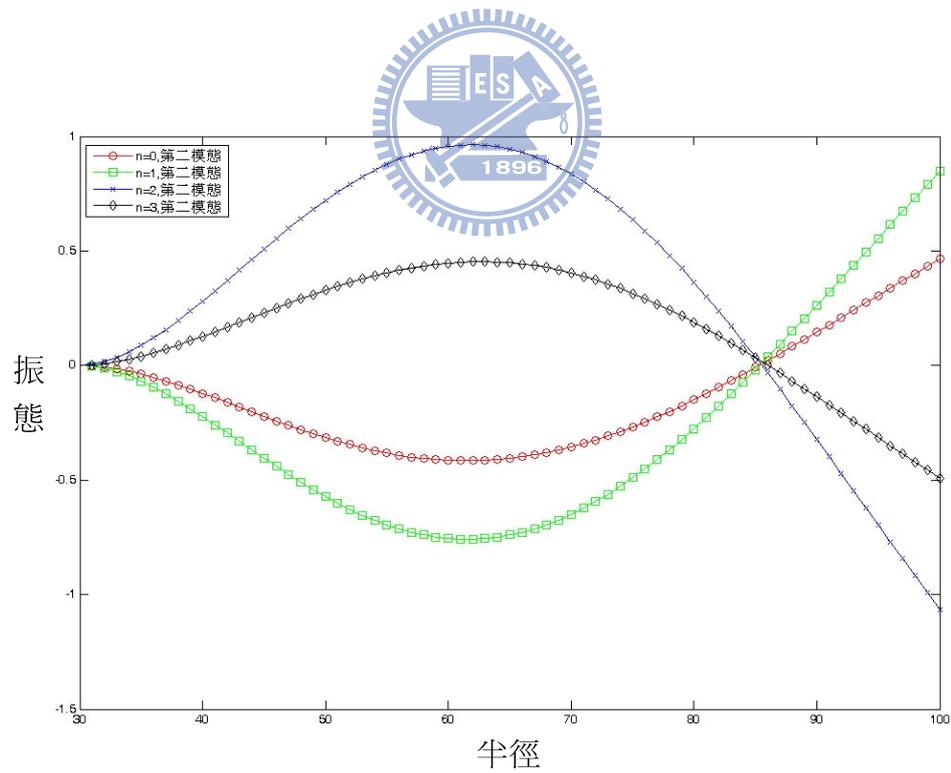


圖 11. 內緣為固定端，外緣為自由端之環狀板，角度固定  $\theta = 0^\circ$ ，半徑  $r = 30 \sim 100$ ，第二模態下在不同  $n$  的情況半徑與振態的關係圖

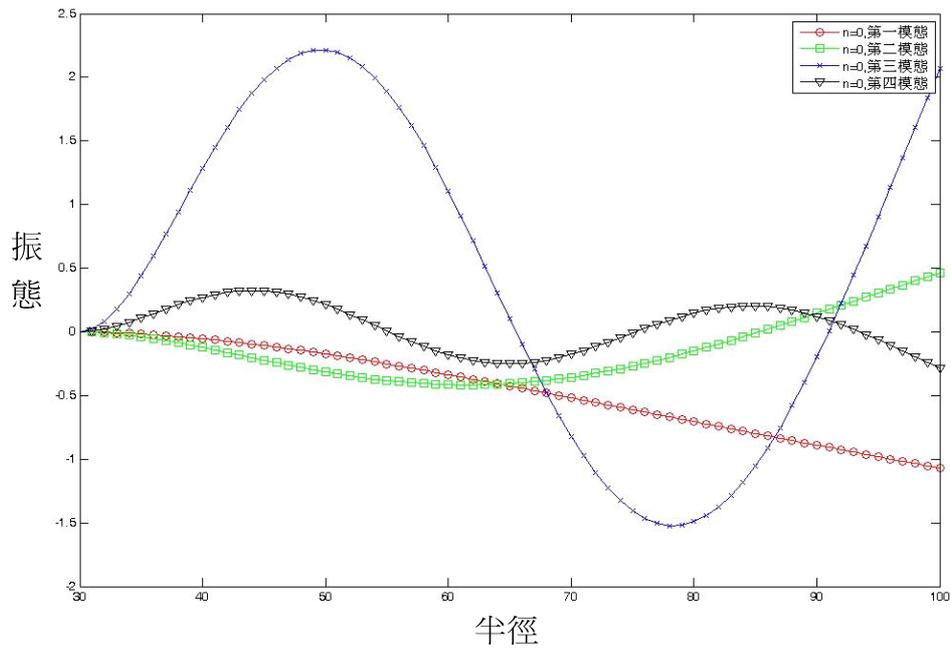


圖 12. 內緣為固定端，外緣為自由端之環狀板，角度固定  $\theta = 0^\circ$ ，半徑  $r = 30 \sim 100$ ， $n = 0$  在不同模態下半徑與振態的關係圖

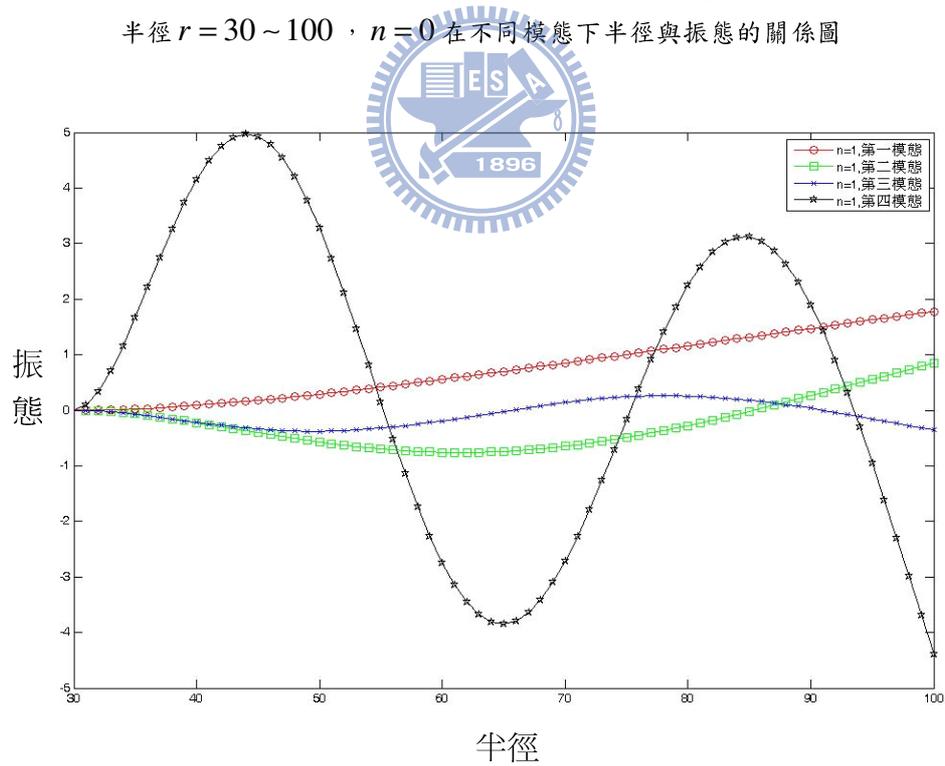


圖 13. 內緣為固定端，外緣為自由端之環狀板，角度固定  $\theta = 0^\circ$ ，半徑  $r = 30 \sim 100$ ， $n = 1$  在不同模態下半徑與振態的關係圖

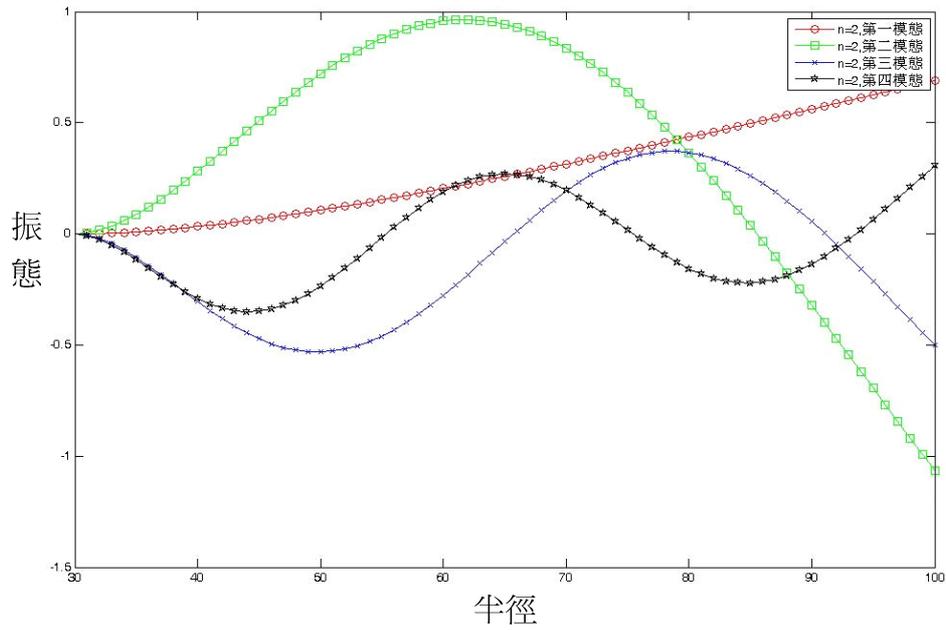


圖 14. 內緣為固定端，外緣為自由端之環狀板，角度固定  $\theta = 0^\circ$ ，半徑  $r = 30 \sim 100$ ， $n = 2$  在不同模態下半徑與振態的關係圖

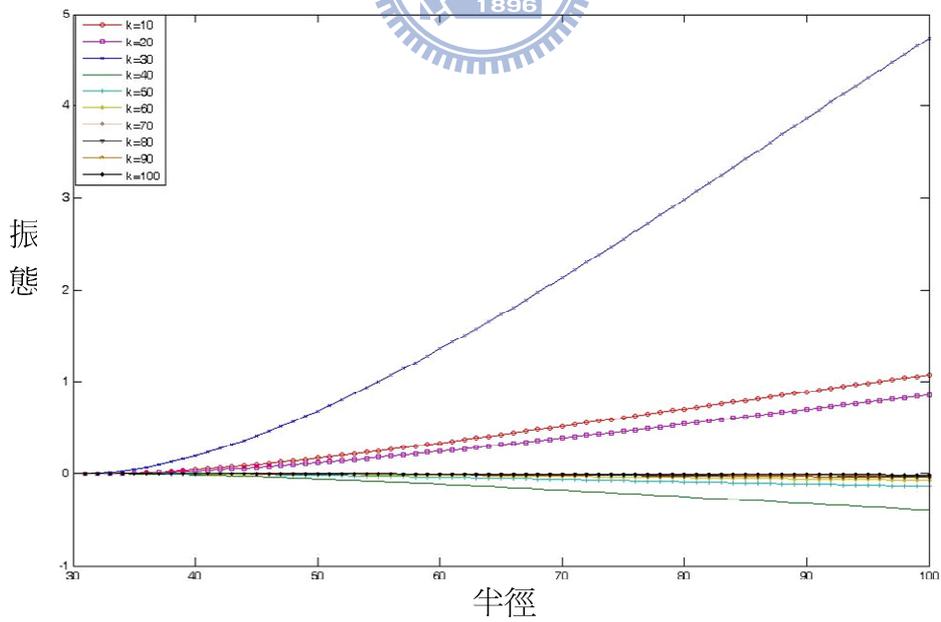


圖 15. 內緣為固定端，外緣為自由端之環狀板，模態固定  $n = 1$ ，角度  $\theta = 0^\circ$ ，半徑  $r = 30 \sim 100$ ，不同基礎彈性模數  $K$  下半徑與振幅的關係圖

邊界條件二:

內緣為自由端，外緣為簡支承之環狀板

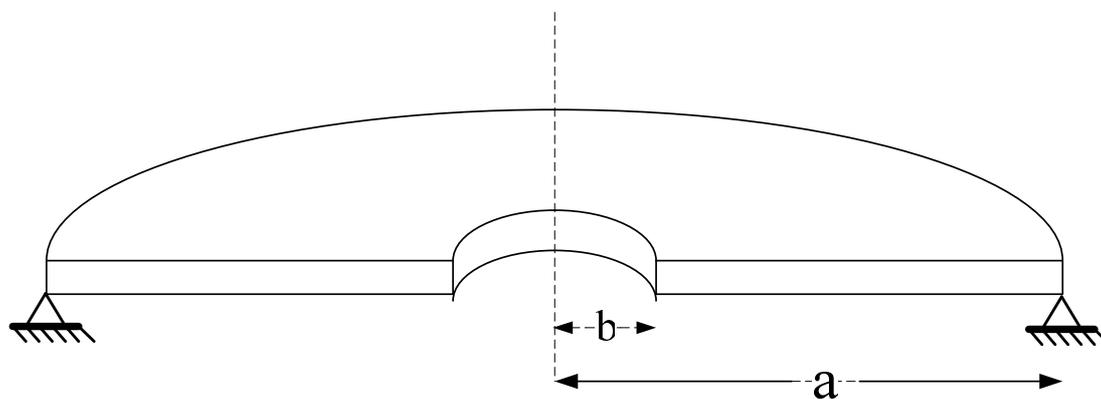


圖 16. 環狀板內板為自由端，外板為簡之承

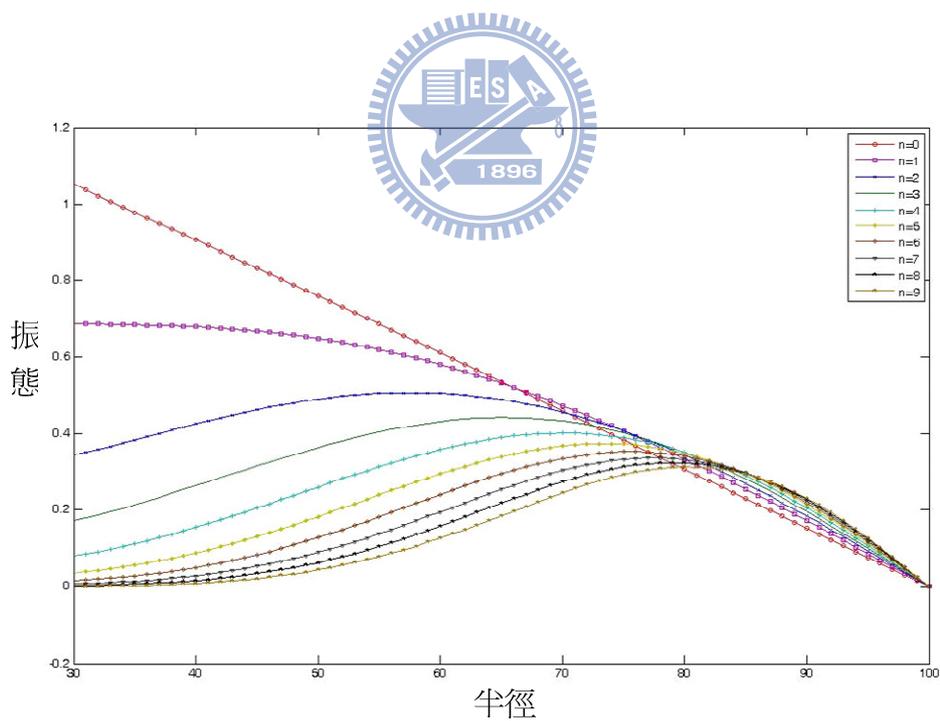


圖 17. 內緣為自由端，外緣為簡支承之環狀板，角度固定  $\theta = 0^\circ$ ，半徑  $r = 30 \sim 100$ ，第一模態下在不同  $n$  的情況半徑與振態的關係圖

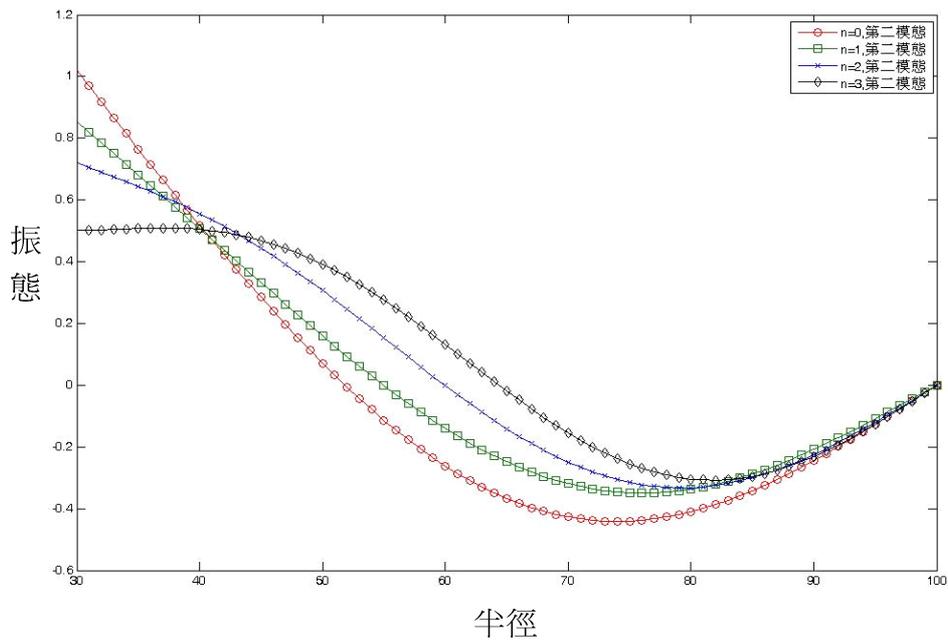


圖 18. 內緣為自由端，外緣為簡支承之環狀板，角度固定  $\theta = 0^\circ$ ，半徑  $r = 30 \sim 100$ ，第二模態下在不同  $n$  的情況半徑與振態的關係圖

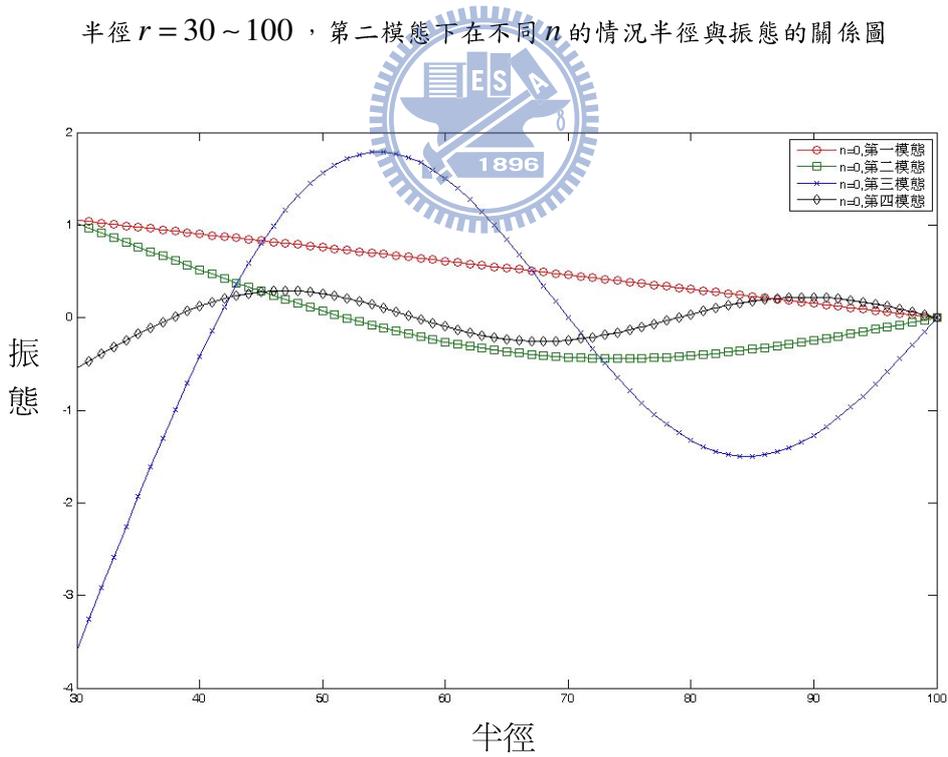


圖 19. 內緣為自由端，外緣為簡支承之環狀板，角度固定  $\theta = 0^\circ$ ，半徑  $r = 30 \sim 100$ ， $n = 0$  在不同模態下半徑與振態的關係圖

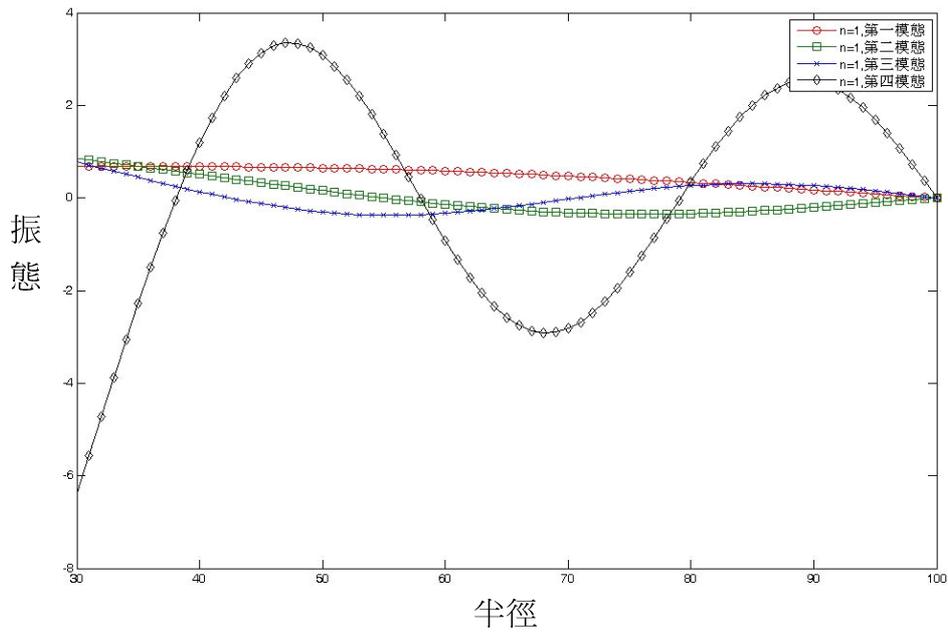


圖 20. 內緣為自由端，外緣為簡支承之環狀板，角度固定  $\theta = 0^\circ$ ，半徑  $r = 30 \sim 100$ ， $n = 1$  在不同模態下半徑與振態的關係圖

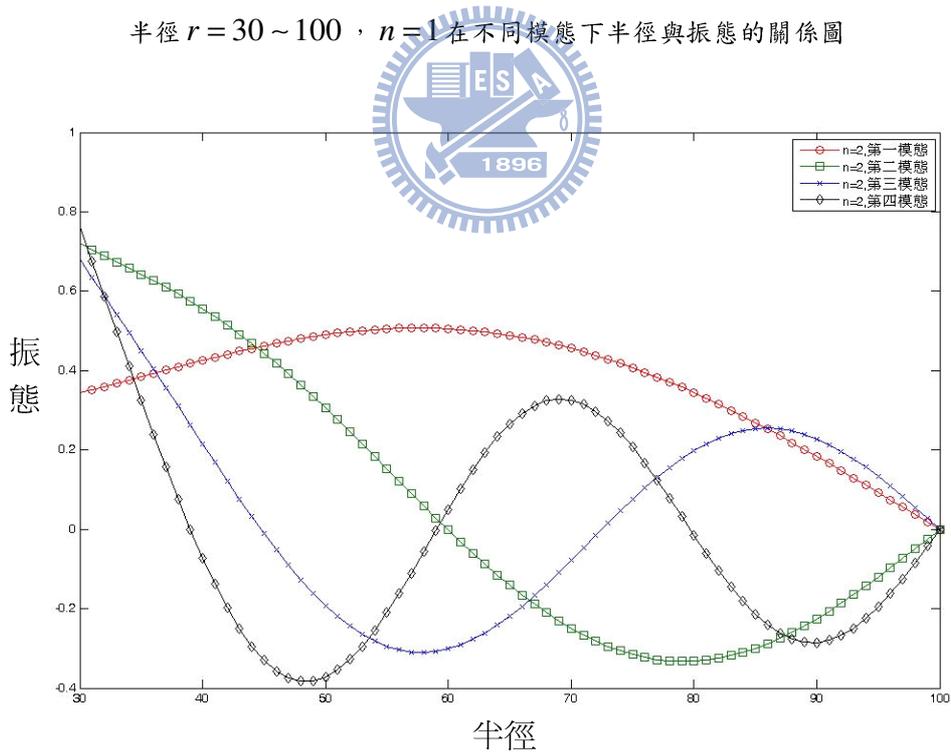


圖 21. 內緣為自由端，外緣為簡支承之環狀板，角度固定  $\theta = 0^\circ$ ，半徑  $r = 30 \sim 100$ ， $n = 2$  在不同模態下半徑與振態的關係圖

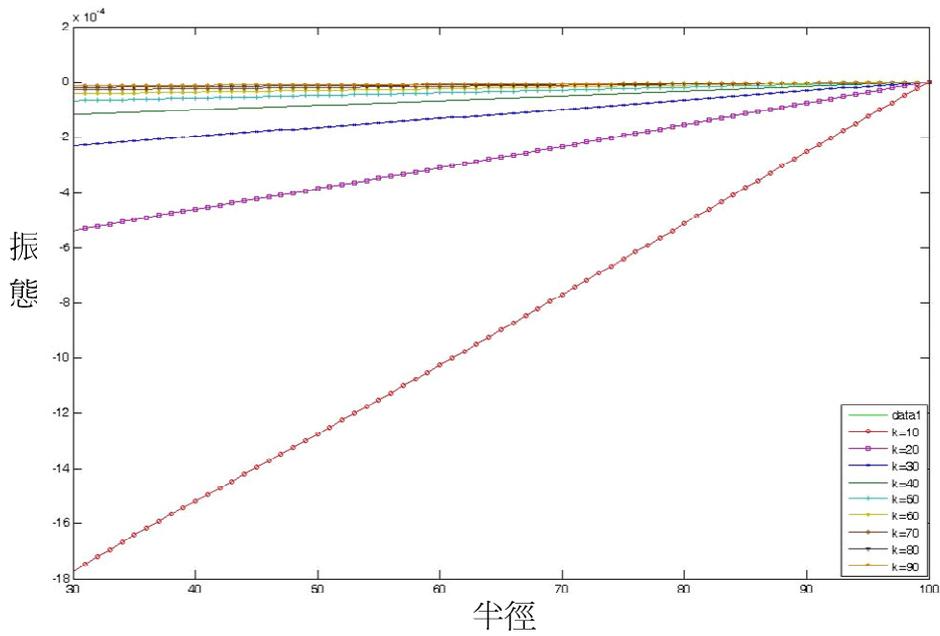


圖 22. 內緣為自由端，外緣為簡支承之環狀板，模態固定  $n=1$ ，角度  $\theta=0^\circ$ ，半徑  $r=30 \sim 100$ ，不同基礎彈性模數  $K$  下半徑與振幅的關係圖

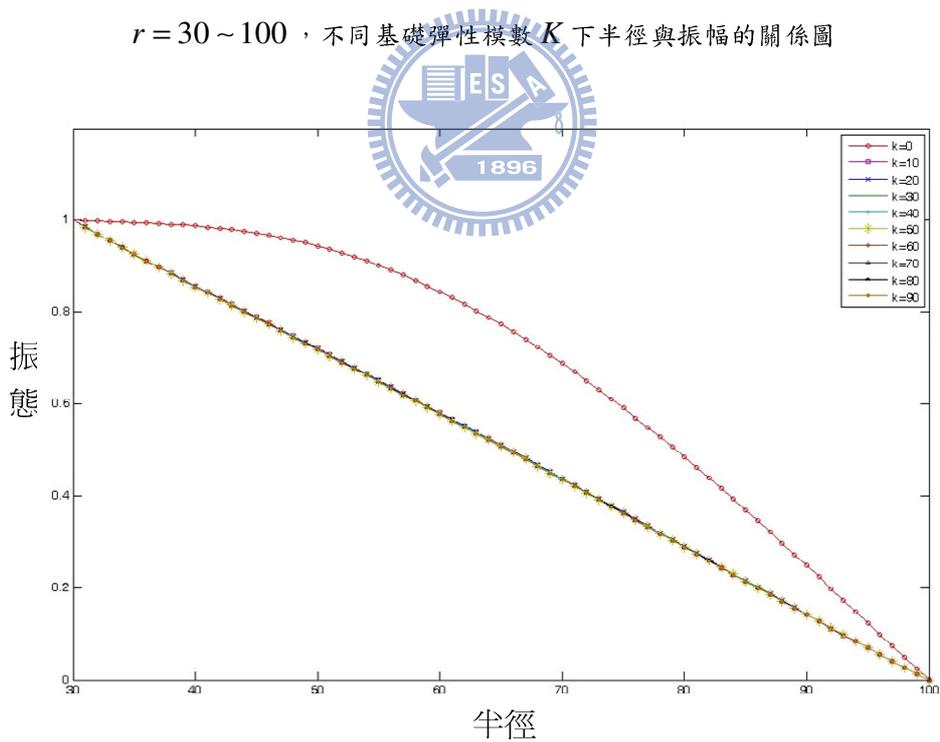


圖 23. 內緣自由端，外緣簡支承之環狀板，模態固定  $n=1$ ，角度  $\theta=0^\circ$ ，半徑  $r=30 \sim 100$ ，將數值無因次化後不同彈性模數  $K$  下半徑與振幅的關係圖

邊界條件三：

內緣為自由端，外緣為自由端之環狀板

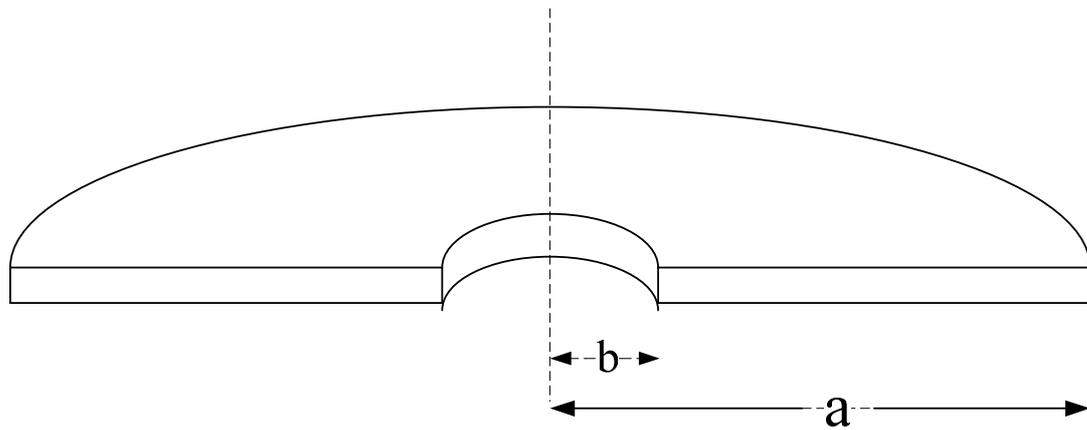


圖 24. 環狀板內板為自由端，外板為自由端

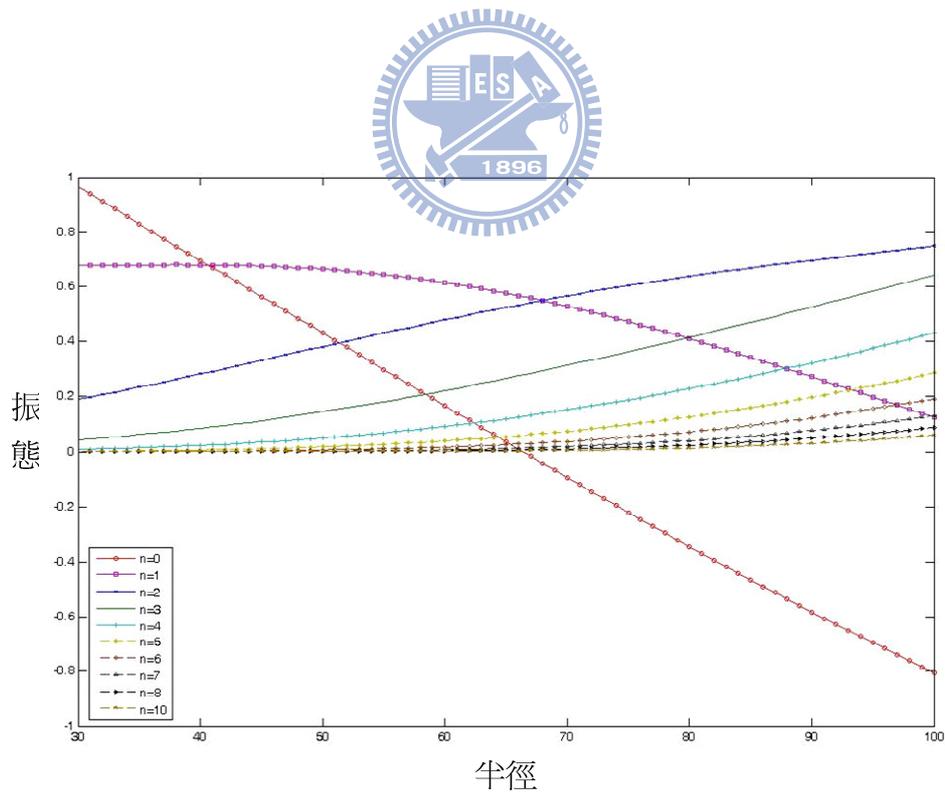


圖 25. 內緣為自由端，外緣為自由端之環狀板，角度固定  $\theta = 0^\circ$ ，角度固定  $\theta = 0^\circ$ ，

半徑  $r = 30 \sim 100$ ，第一模態下在不同  $n$  的情況半徑與振態的關係圖

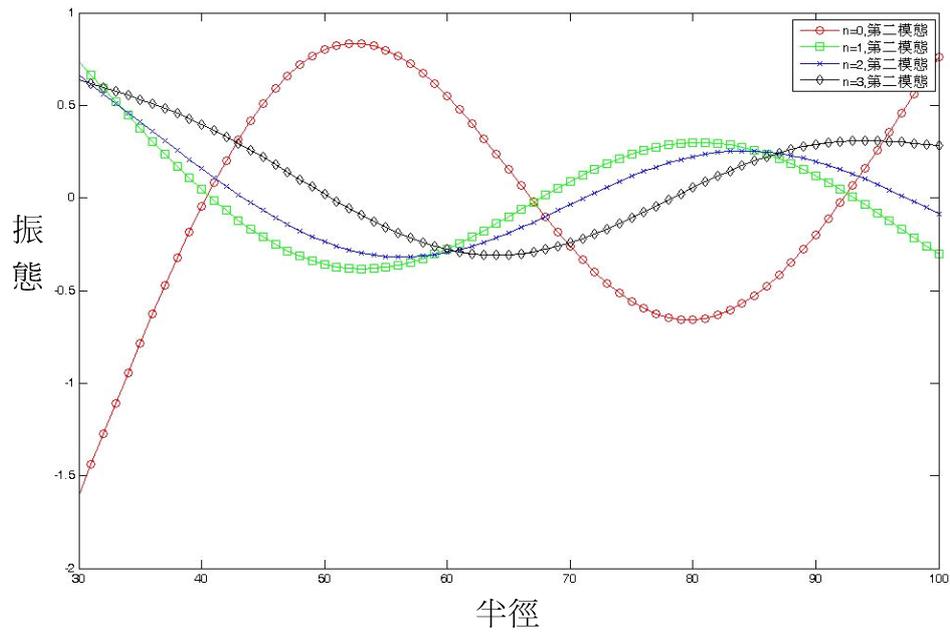


圖 26. 內緣為自由端，外緣為自由端之環狀板，半徑固定  $r=50$ ，角度固定  $\theta=0^\circ$ ，半徑  $r=30\sim 100$ ，第二模態下在不同  $n$  的情況半徑與振態的關係圖

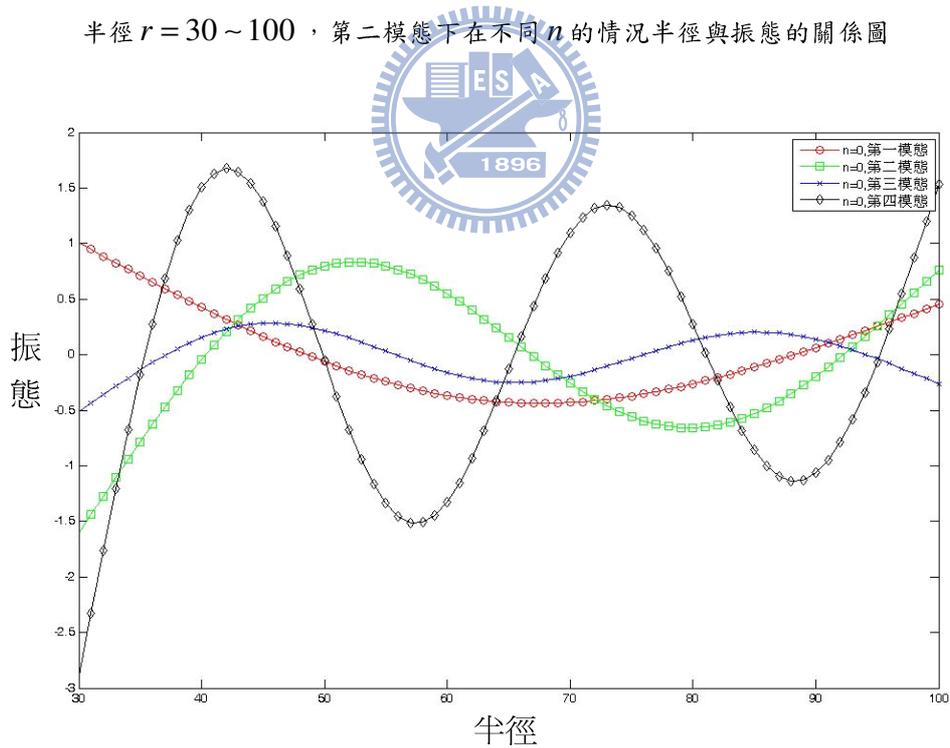


圖 27. 內緣為自由端，外緣為自由端之環狀板，角度固定  $\theta=0^\circ$ ，半徑  $r=30\sim 100$ ， $n=0$  在不同模態下半徑與振態的關係圖

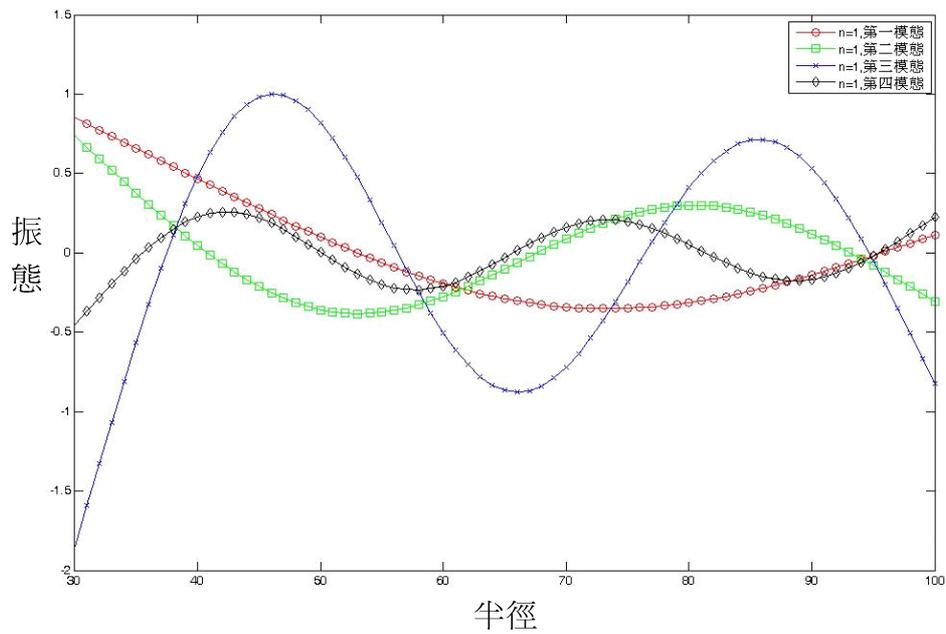


圖 28. 內緣為自由端，外緣為自由端之環狀板，角度固定  $\theta = 0^\circ$ ，半徑  $r = 30 \sim 100$ ， $n = 1$  在不同模態下半徑與振態的關係圖

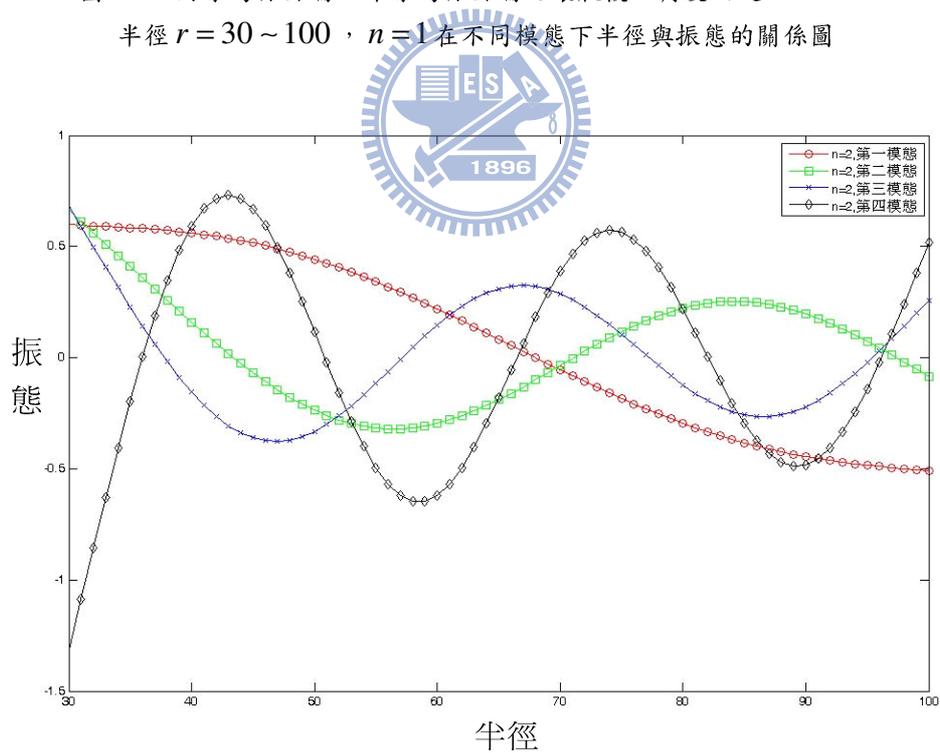


圖 29. 內緣為自由端，外緣為自由端之環狀板，角度固定  $\theta = 0^\circ$ ，半徑  $r = 30 \sim 100$ ， $n = 2$  在不同模態下半徑與振態的關係圖

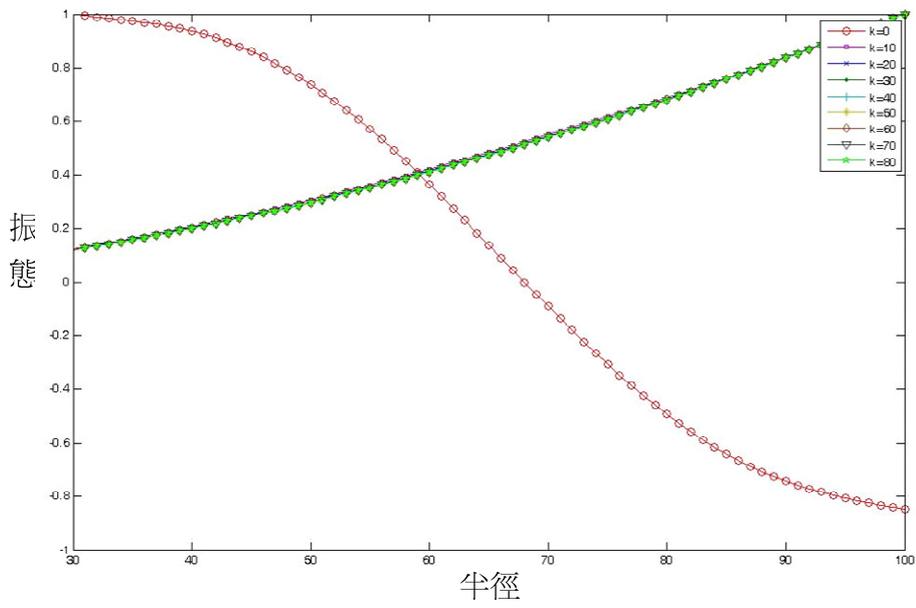


圖 30. 內緣自由端，外緣簡支承之環狀板，模態固定  $n=1$ ，角度  $\theta=0^\circ$ ，半徑  $r=30\sim 100$ ，  
將數值無因次化後不同彈性模數  $K$  下半徑與振幅的關係圖



邊界條件四：

內緣為固定端，外緣為固定端之環狀板

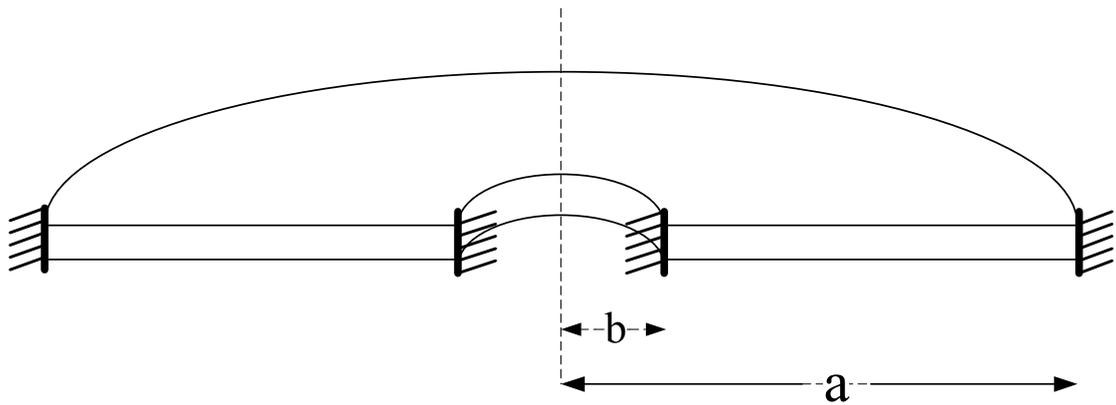


圖 31. 環狀板內板為固定端，外板為固定端

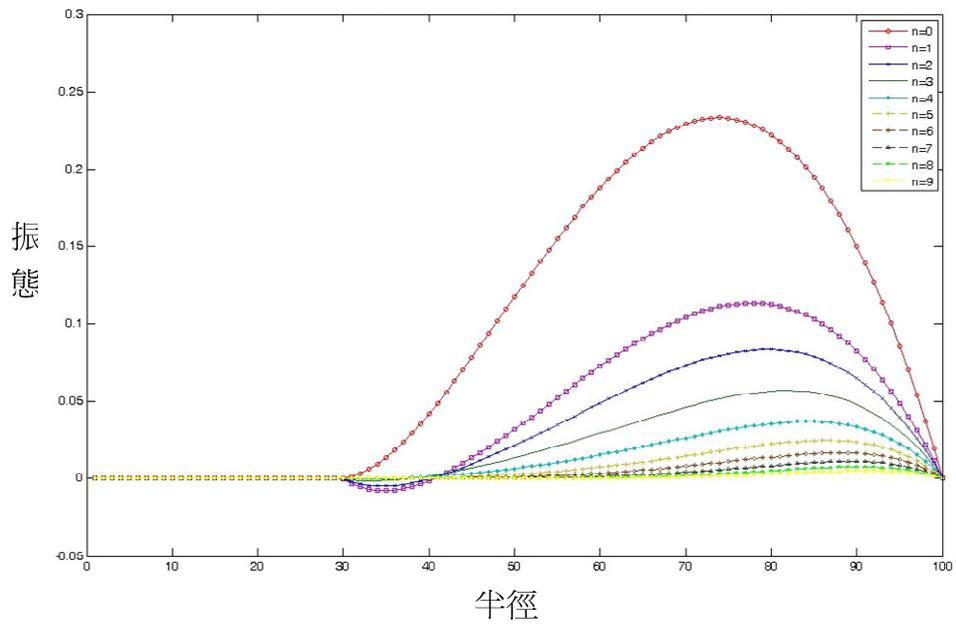


圖 32. 內緣為固定端，外緣為固定端之環狀板，角度固定  $\theta = 0^\circ$ ，角度固定  $\theta = 0^\circ$ ，  
半徑  $r = 30 \sim 100$ ，第一模態下在不同  $n$  的情況半徑與振態的關係圖

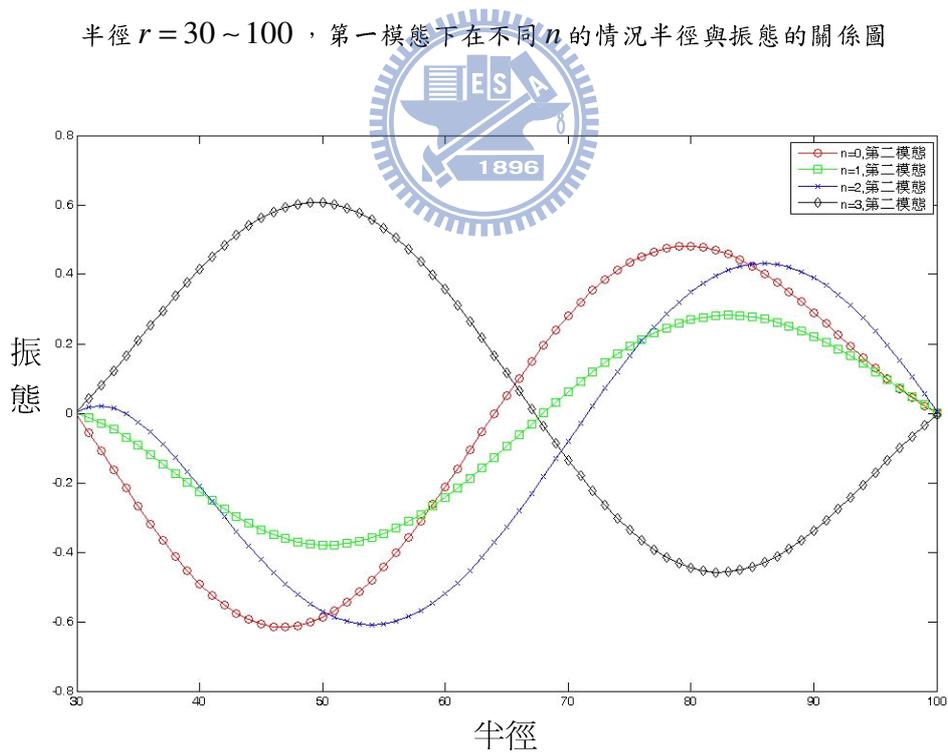


圖 33. 內緣為固定端，外緣為固定端之環狀板，角度固定  $\theta = 0^\circ$ ，  
半徑  $r = 30 \sim 100$ ，第二模態下在不同  $n$  的情況半徑與振態的關係圖

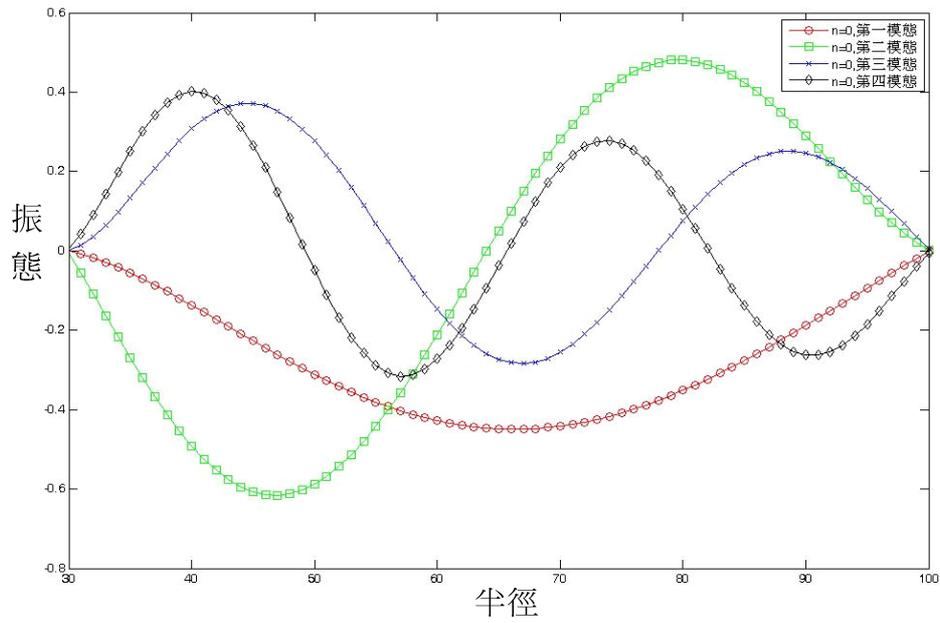


圖 34. 內緣為固定端，外緣為固定端之環狀板，角度固定  $\theta = 0^\circ$ ，半徑  $r = 30 \sim 100$ ， $n = 0$  在不同模態下半徑與振態的關係圖

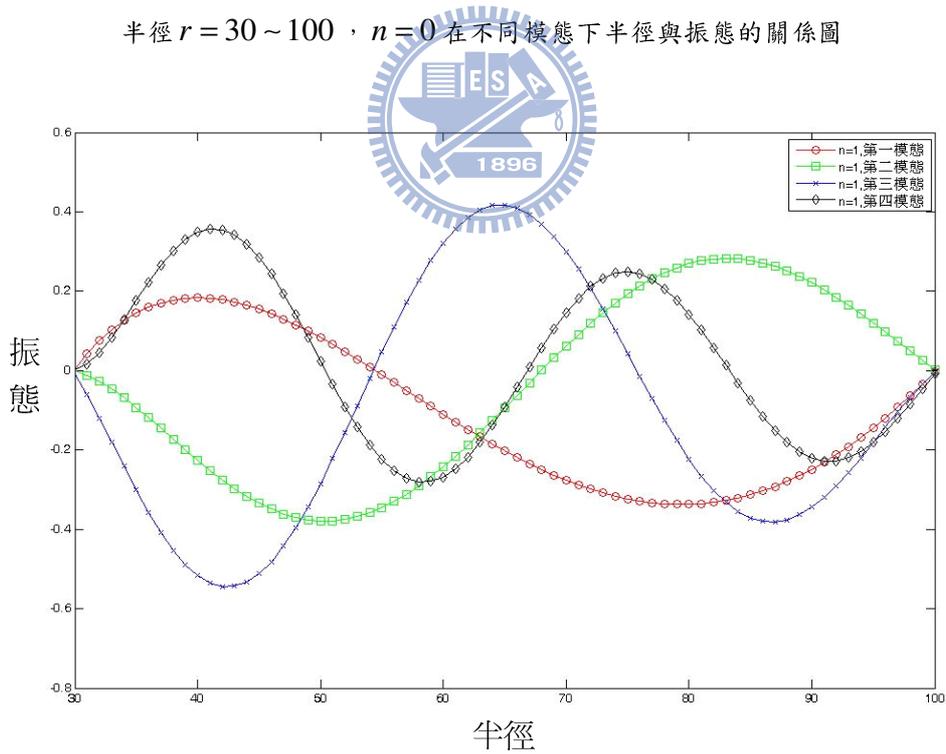


圖 35. 內緣為固定端，外緣為固定端之環狀板，角度固定  $\theta = 0^\circ$ ，半徑  $r = 30 \sim 100$ ， $n = 1$  在不同模態下半徑與振態的關係圖

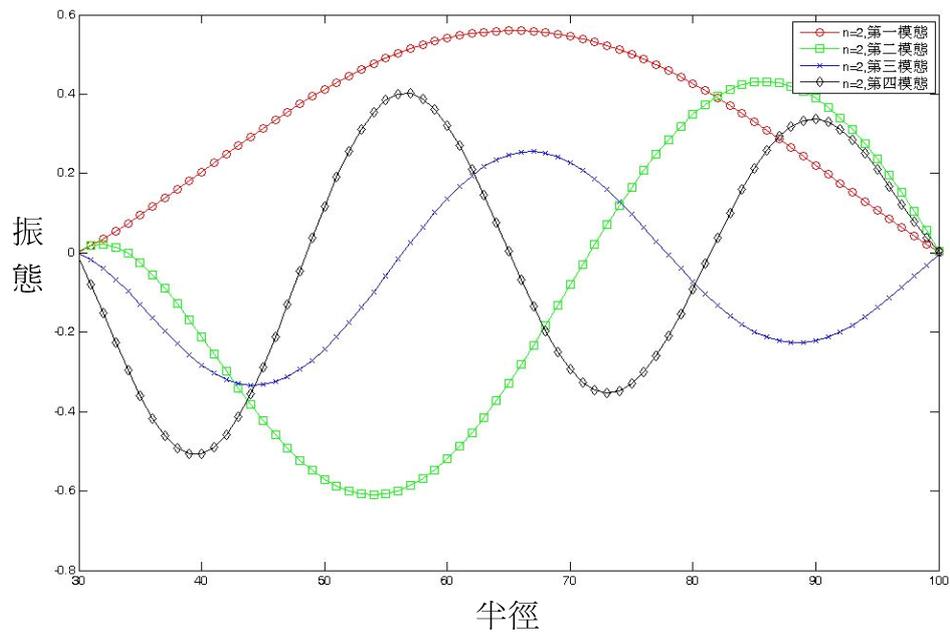


圖 36. 內緣為固定端，外緣為固定端之環狀板，角度固定  $\theta = 0^\circ$ ，半徑  $r = 30 \sim 100$ ， $n = 2$  在不同模態下半徑與振態的關係圖

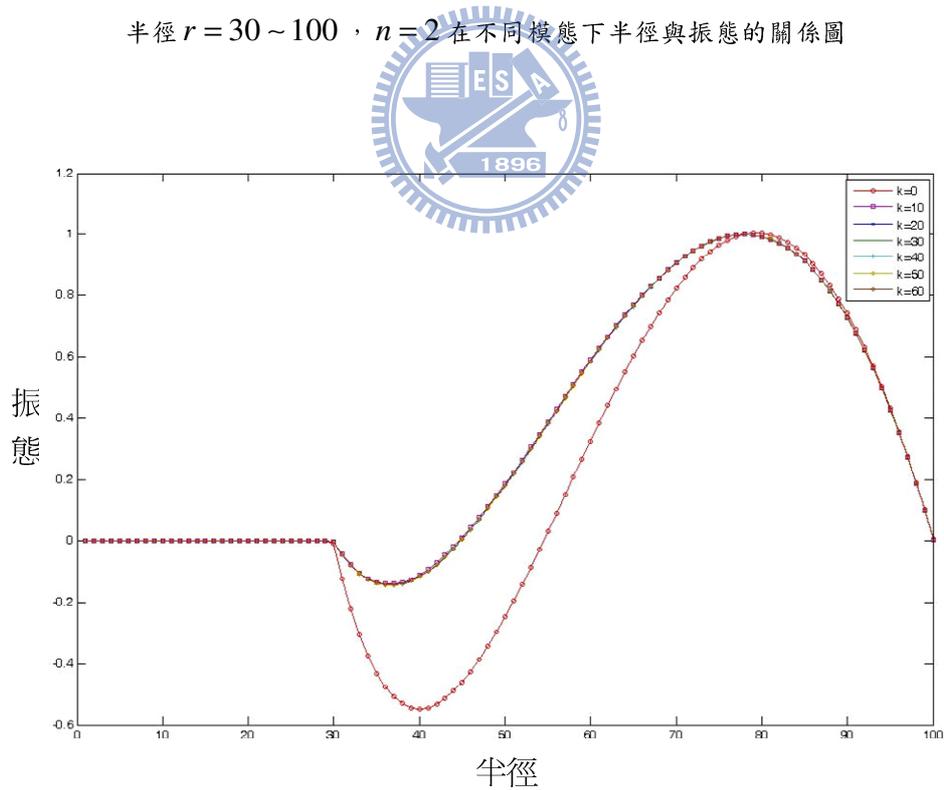


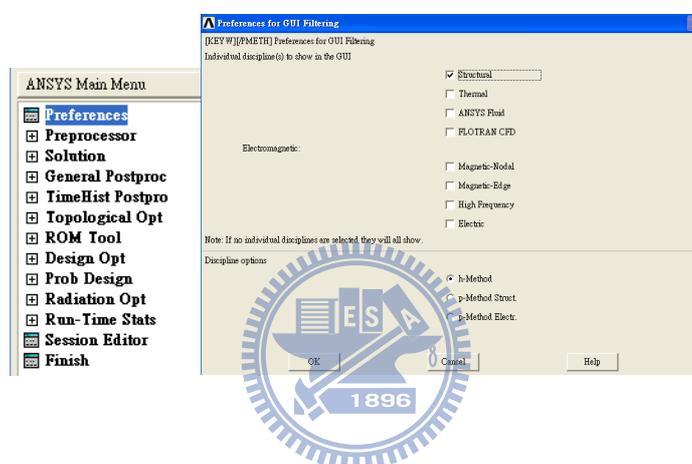
圖 37. 內緣為固定端，外緣為固定端之環狀板，模態固定  $n = 1$ ，角度  $\theta = 0^\circ$ ，半徑  $r = 30 \sim 100$ ，將數值無因次化後不同彈性模數  $K$  下半徑與振幅的關係圖

## 4.3 ANSYS 應用分析

### 1. 系統環境設定

- 指定為結構分析

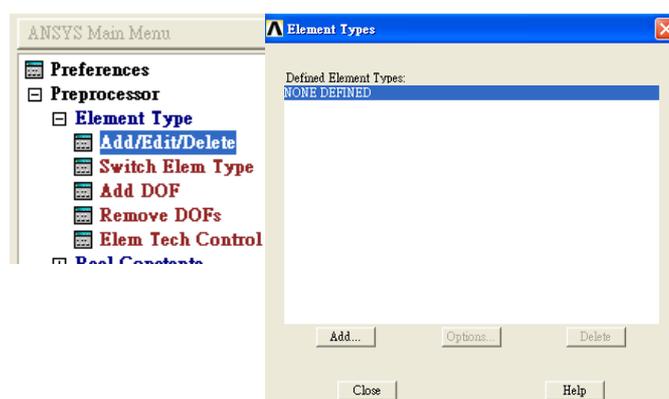
執行主功能表 [Main Menu > Preferences > Structural]，指定分析形式為結構分析。



### 2. 定義元素

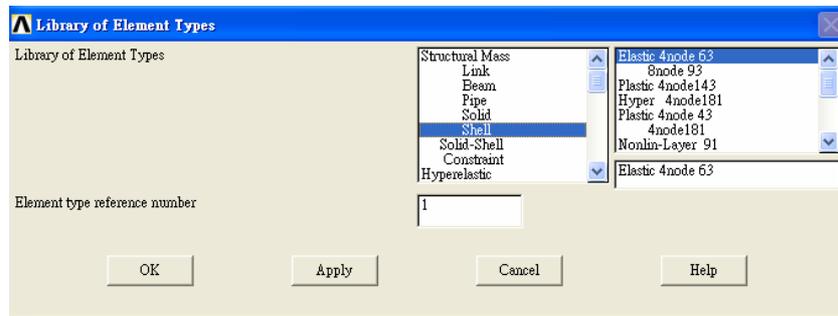
- 新增元素型式

執行主功能表 [Main Menu > Preprocessor > Element Type > Add/Edit/Delete]，新增元素型式。



- 定義板元素型式

選擇殼元素中的 Elastic 4node 63 彈性 4 個節點元素。

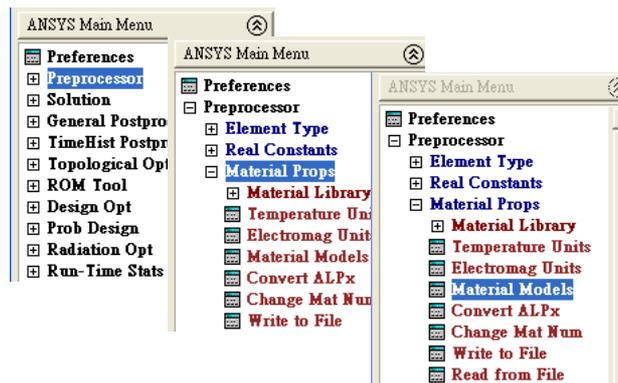


### 3. 定義材料性質

- 材料性質



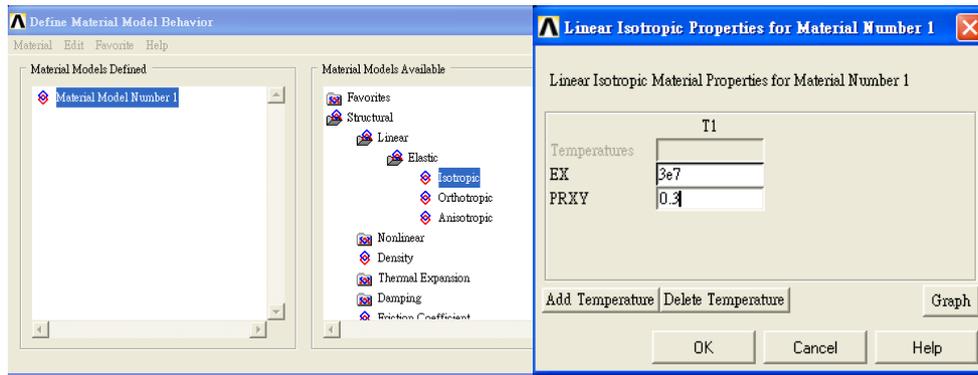
執行主功能表 [Main Menu > Preprocessor > Material Props > Material Models]，系統會顯示設定對話框。



- 設定楊氏係數、卜森比及密度

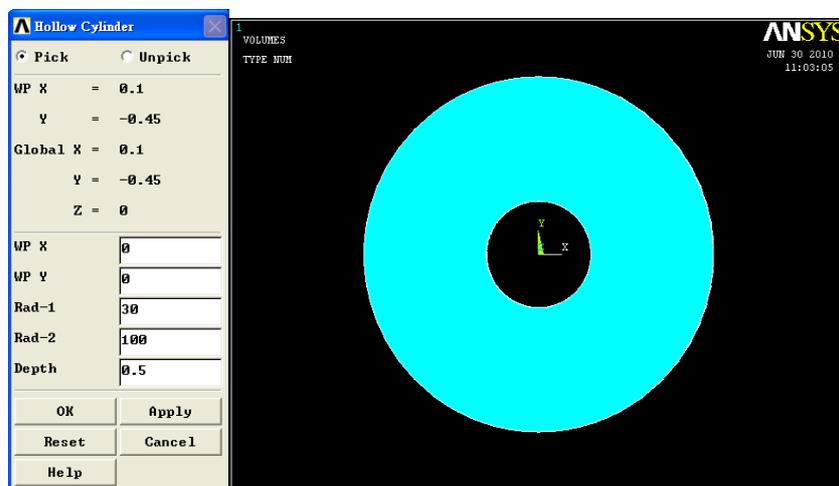
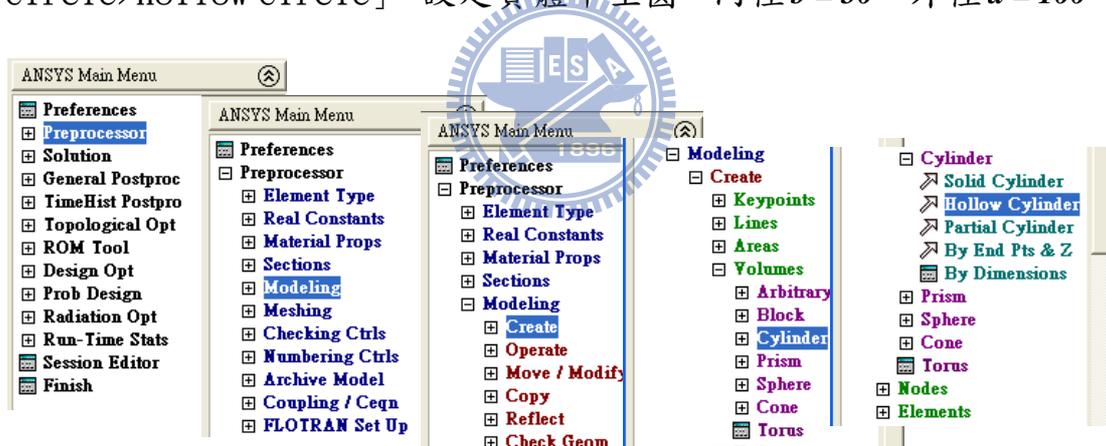
執行設定對話框 [Structural > Linear > Elastic > Isotropic]，

設定楊氏係數  $E = 3 \times 10^7$ 、卜森比  $\nu = 0.3$  及密度  $\rho = 150 \times 9.81$ 。



#### 4. 繪製幾何圖形

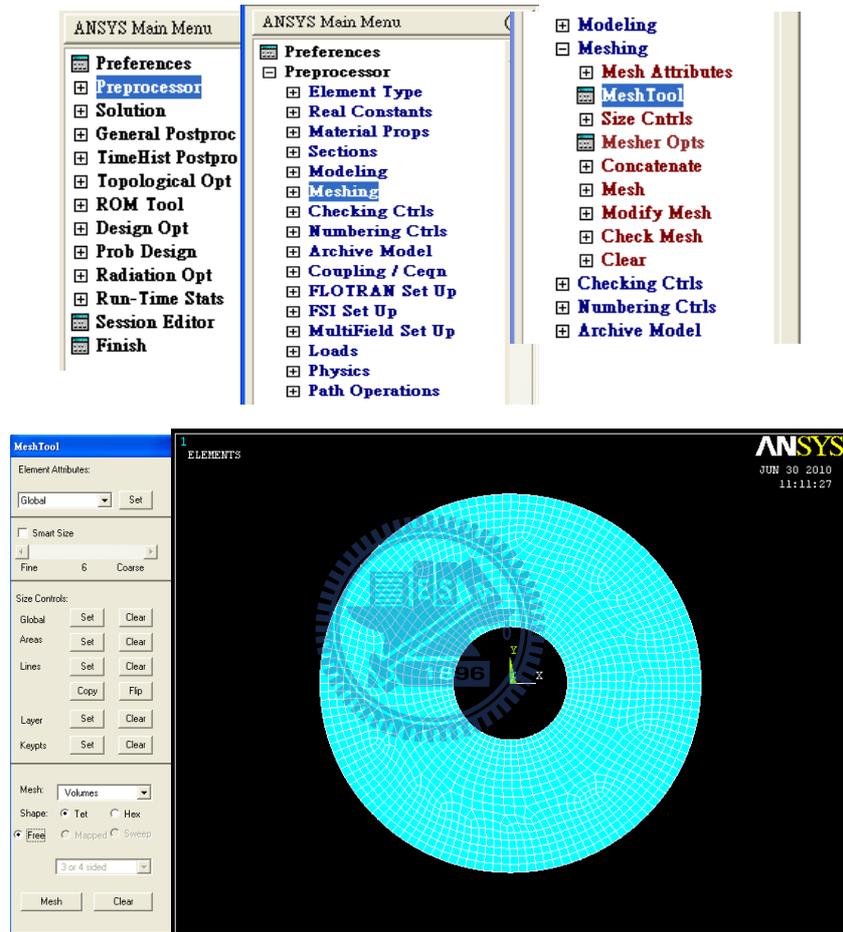
執行主功能表 [Main Menu > Preprocessor > Modeling > Create > Circle > Hollow Circle]，設定實體中空圓，內徑  $b = 30$ 、外徑  $a = 100$ 。



## 5. 網格劃分

執行主功能表[Main Menu > Preprocessor > Meshing > Mesh Tool]，

系統會顯示設定對話框，使用（free mesh）邊界條件設定。



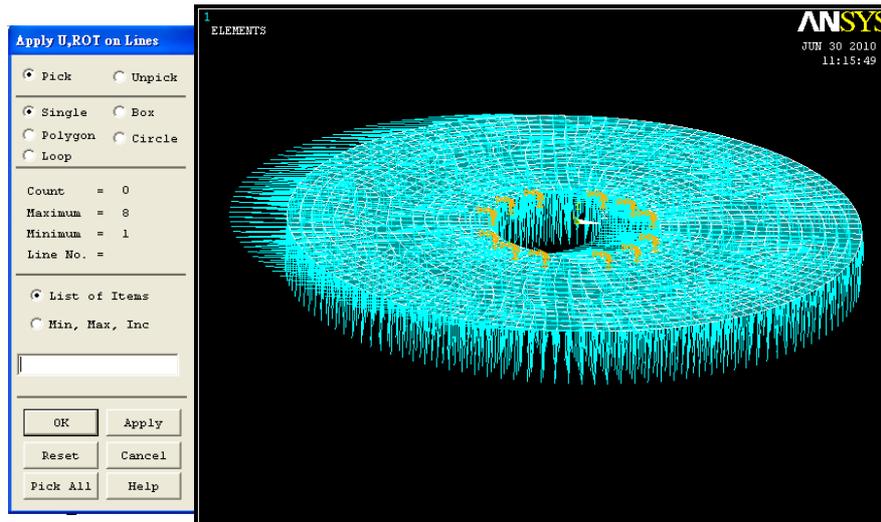
## 6. 夾持與附載

- 邊界條件

執行主功能表[Main Menu > Solution > Add>

Structural>Displacement>On Lines]，系統會顯示設定對話框，設

定邊界條件。



- 彈簧加載

此處以指令方式建構分析較為方便準確。詳細指令，請參考附錄一。

## 7. 模態分析

此處以指令方式建構分析較為方便準確。

```

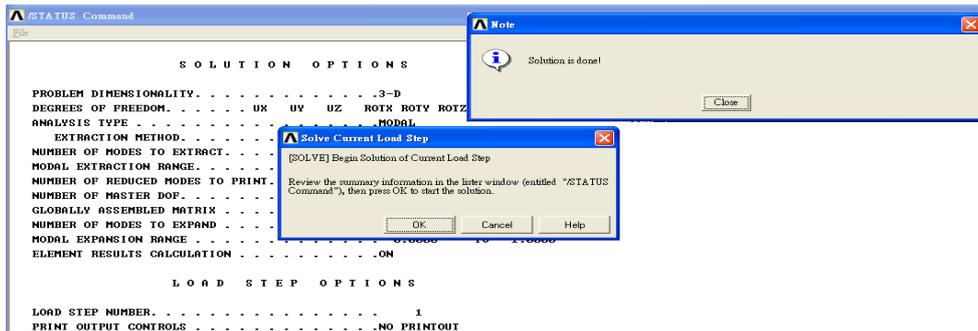
new2 - 記事本
檔案(F) 編輯(E) 格式(O) 檢視(V) 說明(H)

ANTYPE,2
!*
MSAVE,0
!*
MODOPT,REDUC,10
EQSLV,FRONT
MXPAND,10,, ,0
LUMPM,0
PSTRES,0
!*
MODOPT,REDUC,10,0,10,10,OFF
TOTAL,100,0
MXPAND,10,0,1,1,0.001,
/REPLOT,RESIZE
/REPLOT,RESIZE
  
```

## 8. 求解

- 執行分析

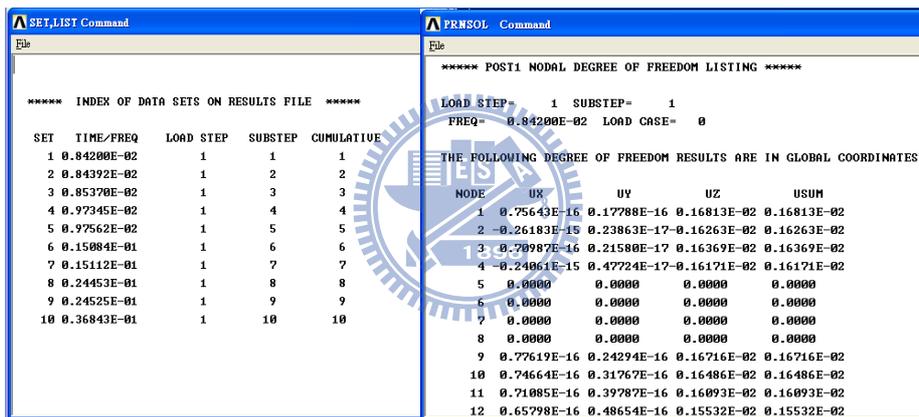
執行主功能表[Main Menu > Solution > Current Ls]。



- 結果摘要

執行主功能表[Main Menu > General Postproc > Results

Summary]，系統產生對話框顯示分析後的結果數據。



- 產生動態的振動模型

執行下拉式功能表[PolCtrl > Animate > Mode Shape]，系統產生

在不同的模態下，振動模型的動態圖。

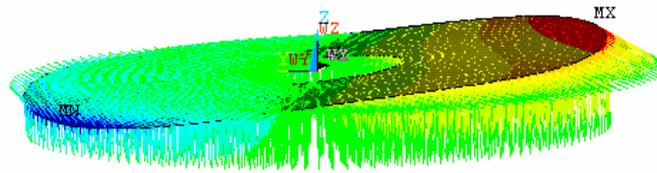


圖 38. 邊界條件一，第一模態之振態圖

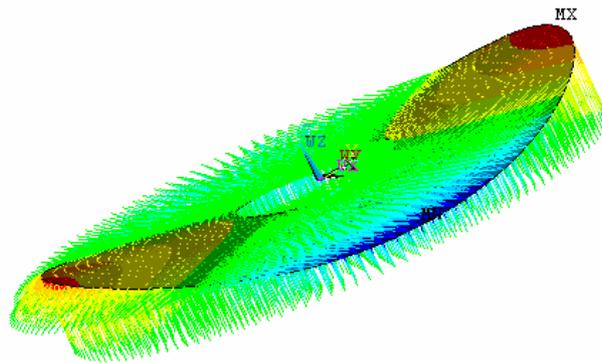
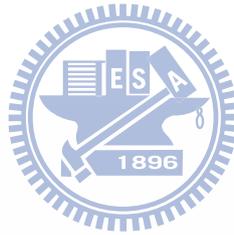


圖 39. 邊界條件一，第二模態之振態圖

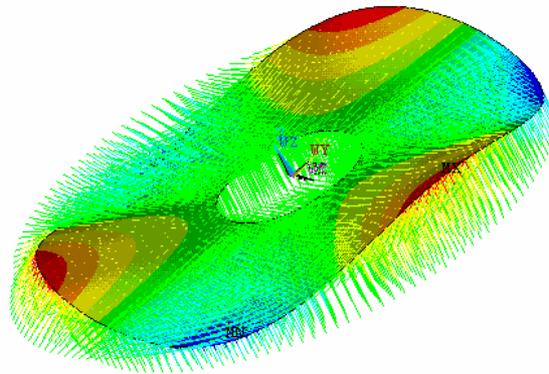


圖 40. 邊界條件一，第三模態之振態圖

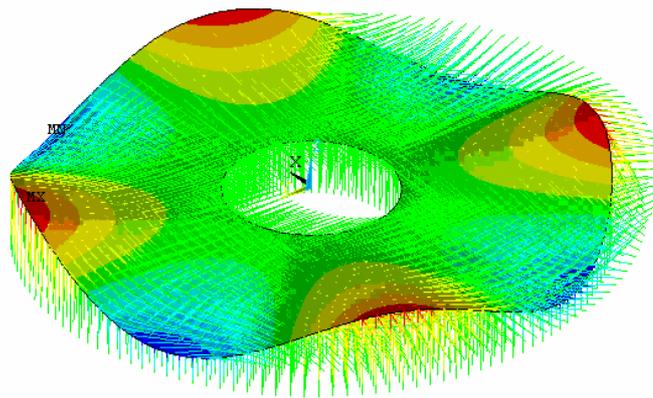


圖 41. 邊界條件一，第四模態之振態圖

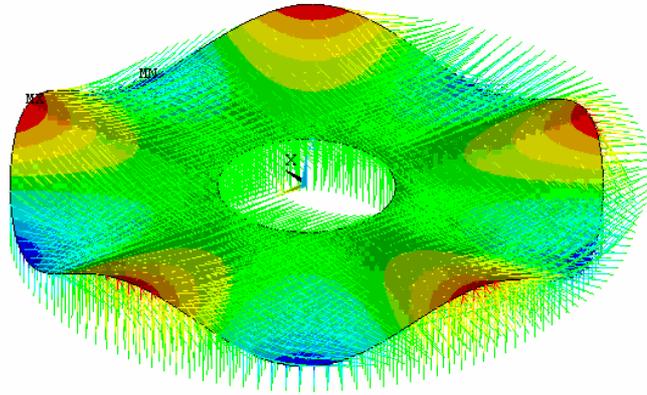


圖 42. 邊界條件一，第五模態之振態圖

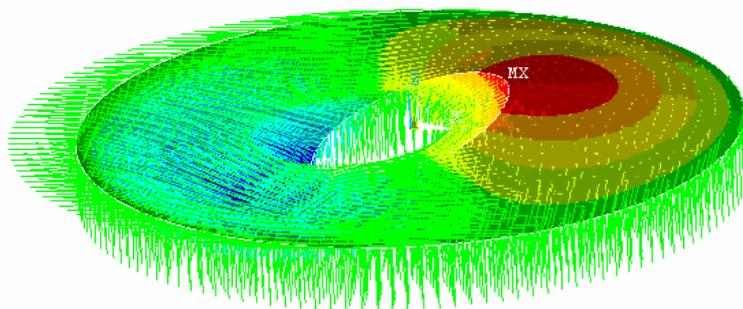
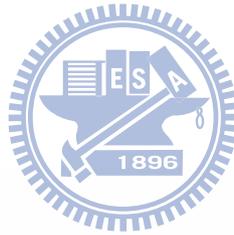


圖 43. 邊界條件二，第一模態之振態圖

1

**ANSYS**

JUN 4 2010  
13:48:23

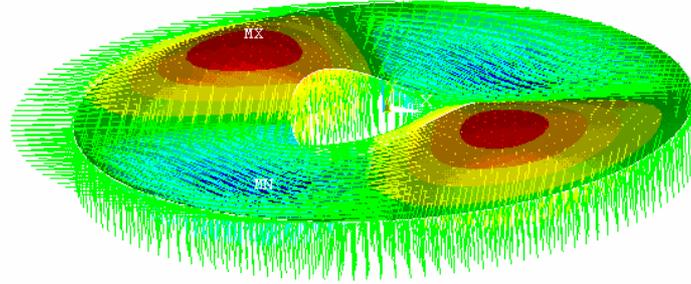
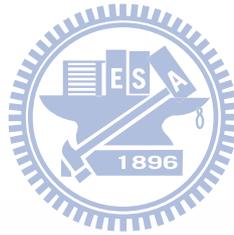


圖 44. 邊界條件二，第二模態之振態圖



1

**ANSYS**

JUN 4 2010  
13:48:23

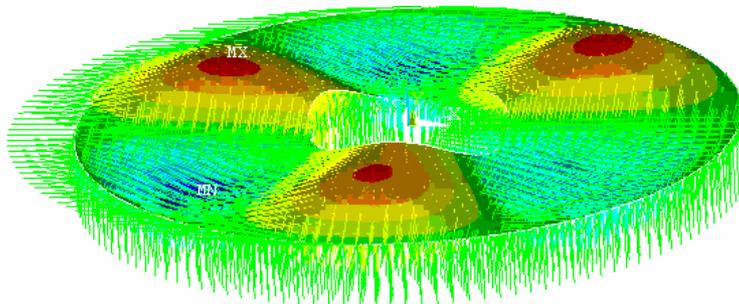


圖 45. 邊界條件二，第三模態之振態圖

1

ANSYS  
JUN 4 2010  
13:48:23

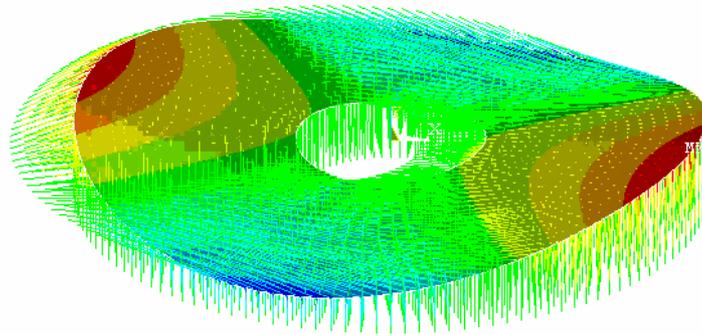
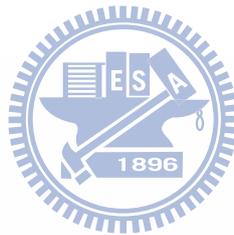


圖 46. 邊界條件三，第二模態之振態圖

1



ANSYS  
JUN 4 2010  
13:48:23

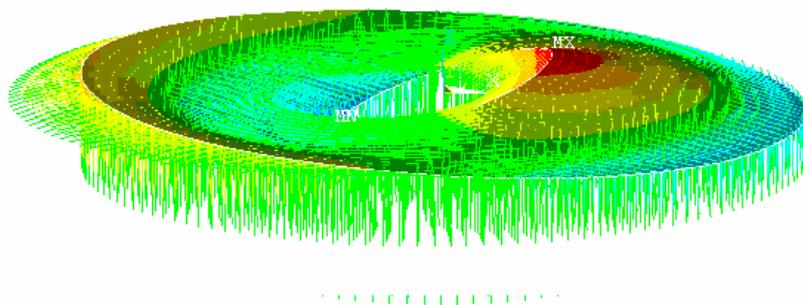


圖 47. 邊界條件三，第一模態之振態圖

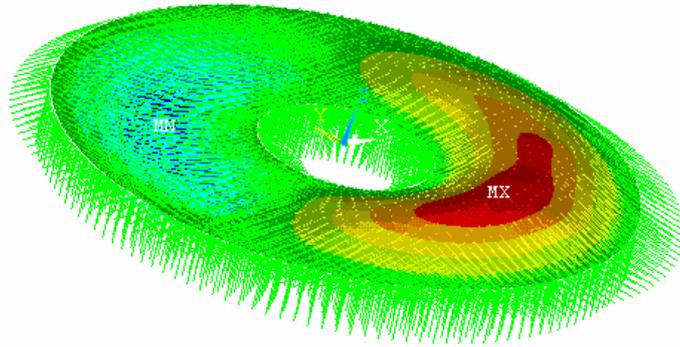


圖 48. 邊界條件四，第一模態之振態圖

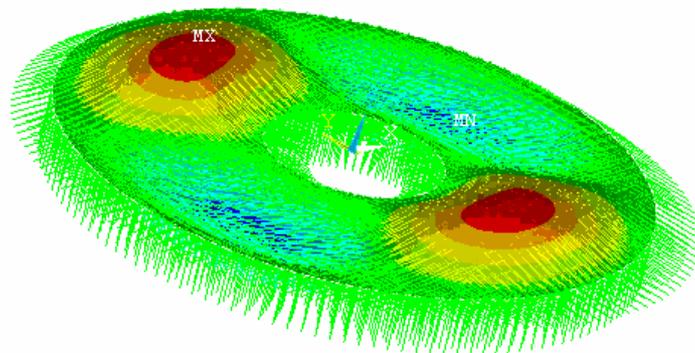
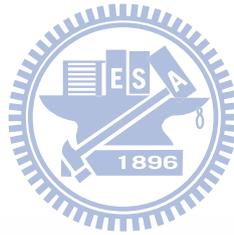


圖 49. 邊界條件四，第二模態之振態圖

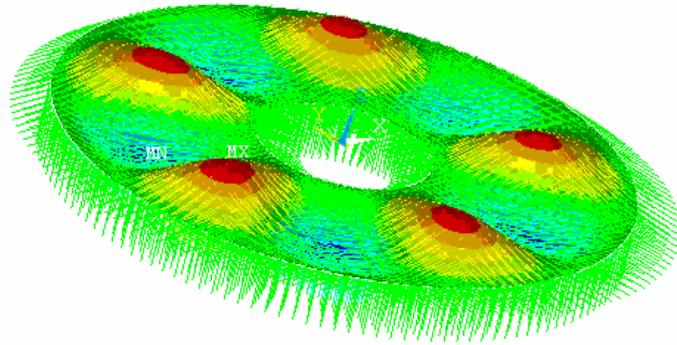
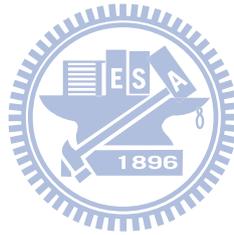


圖 50. 邊界條件四，第五模態之振態圖



#### 4.4 理論值與 ANSYS 之值分析比較

將本文推導之理論結果，與 ANSYS 求出之結果作富立葉轉換，經過無因次化後兩者做比較。

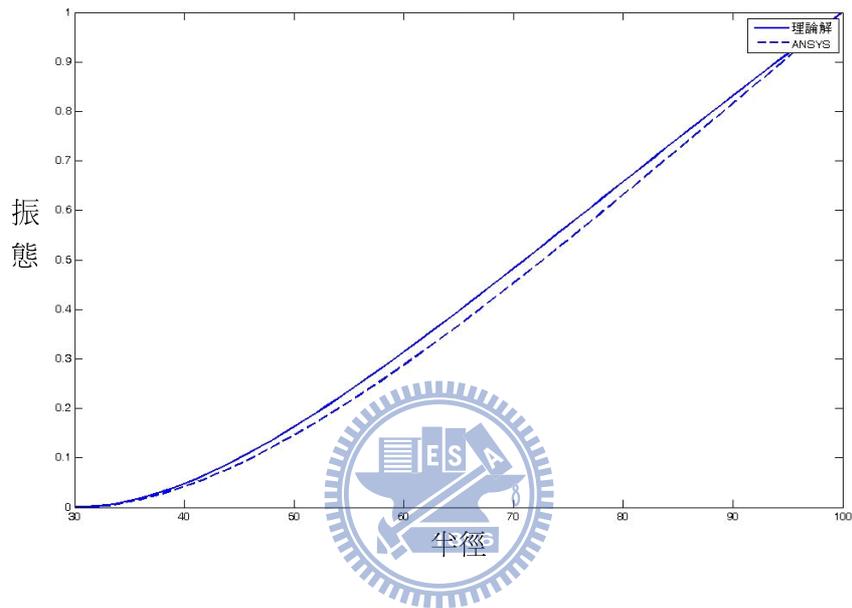


圖 51. 內緣為固定端，外緣為自由端之環狀板，角度固定  $\theta = 0^\circ$ ，半徑  $r = 30 \sim 100$ ， $n = 0$  在第一模態下半徑與振態的關係圖

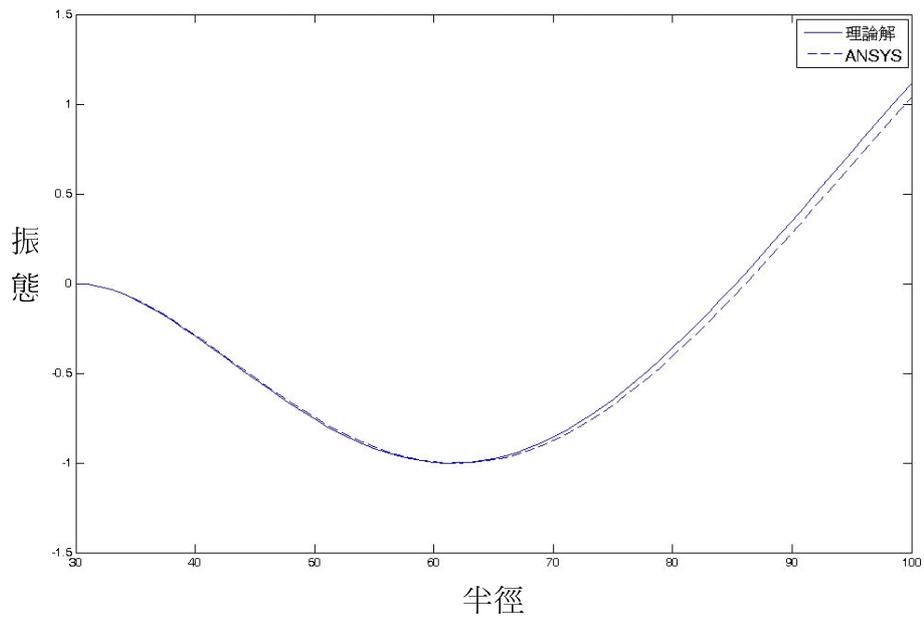


圖 52. 內緣為固定端，外緣為自由端之環狀板，角度固定  $\theta = 0^\circ$ ，半徑  $r = 30 \sim 100$ ， $n = 0$  在第二模態下半徑與振態的關係圖

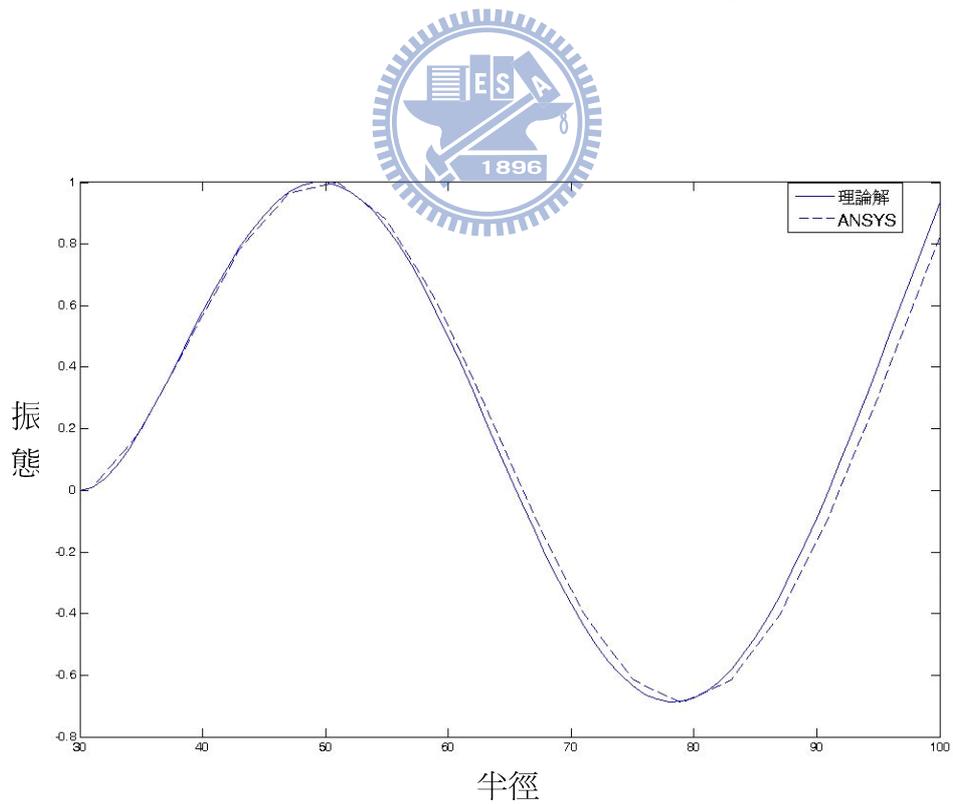


圖 53. 內緣為固定端，外緣為自由端之環狀板，角度固定  $\theta = 0^\circ$ ，半徑  $r = 30 \sim 100$ ， $n = 0$  在第三模態下半徑與振態的關係圖

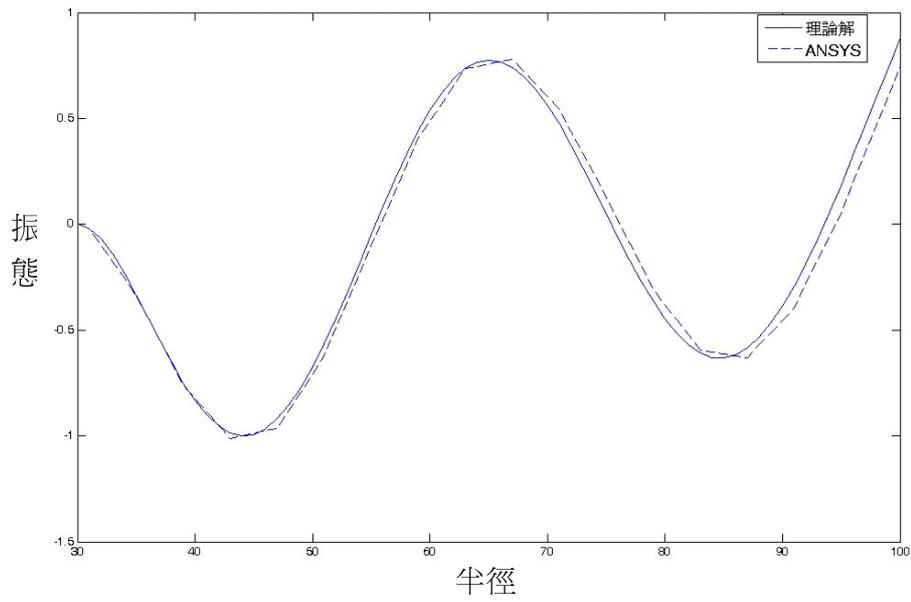


圖 54. 內緣為固定端，外緣為自由端之環狀板，角度固定  $\theta = 0^\circ$ ，半徑  $r = 30 \sim 100$ ， $n = 0$  在第四模態下半徑與振態的關係圖

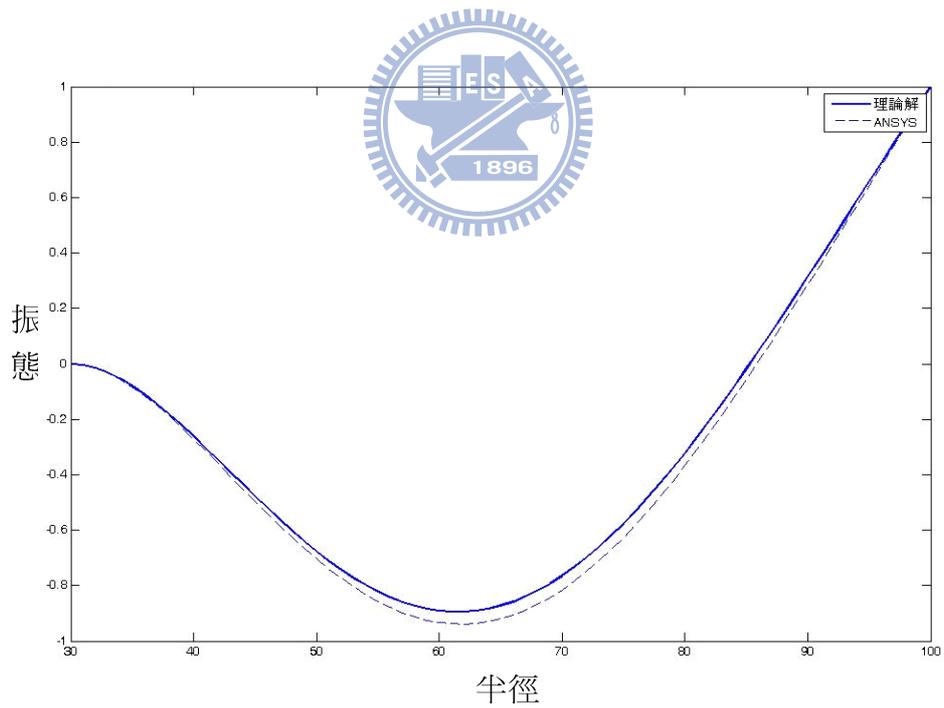


圖 55. 內緣為固定端，外緣為自由端之環狀板，角度固定  $\theta = 0^\circ$ ，半徑  $r = 30 \sim 100$ ， $n = 1$  在第二模態下半徑與振態的關係圖

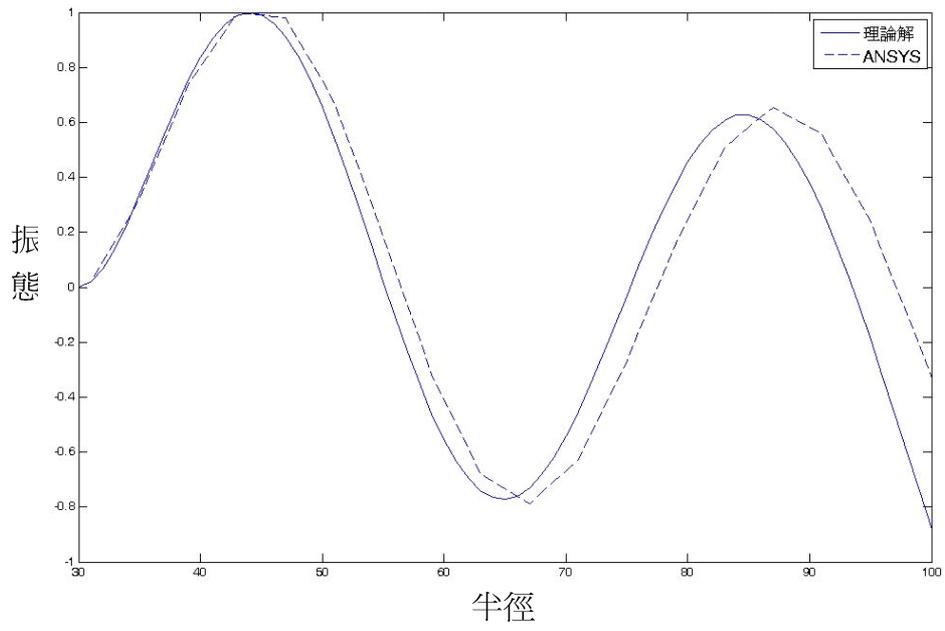


圖 56. 內緣為固定端，外緣為自由端之環狀板，角度固定  $\theta = 0^\circ$ ，半徑  $r = 30 \sim 100$ ， $n = 2$  在第四模態下半徑與振態的關係圖



## 第五章 結論與建議

### 5.1 結論

1. 本文所提出的動力反應推導過程中，求解環狀彈性薄板之頻率方程式的根，根值經過數值分析，可知環狀彈性薄板之頻率參數間，具有一明顯的等差性質，頻率參數之值越大，其間等差之特性越明顯。利用上述特性，可對頻率參數於固定值時做無因次化 (non-dimensional) 過程，亦即先求得內外徑比值為  $x$  ( $0 < x < 1$ )、基礎彈性模數  $K = 1 \text{ (lb/in}^3\text{)}$  之頻率參數值，當真實內外徑比值均放大  $y$  倍時，僅須將無因次化之頻率參數值縮小  $y$  倍，當真實基礎彈性模數值均放大  $z$  倍時，僅須將無因次化之頻率參數值縮小  $z$  倍，即為真實頻率參數值。

2. 於各種邊界條件下，對環狀彈性薄板的頻率方程式，所作之分析求解，本文就環狀彈性薄板內緣為自由端，外緣為簡支承，與彈性薄圓板兩者間的頻率參數做比較，發現在相同的卜森比值下，隨板內外徑比值越小，其板之幾何形狀越相近，可得兩者的頻率參數值亦越接近之結果。且各種板徑值，其振態  $n$  間，頻率參數值且隨內外半徑比值越大，差值越小。

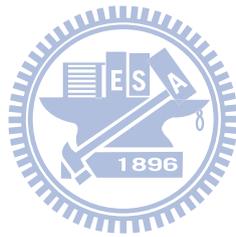
3. 頻率參數求解過程中，本文利用 Bracketing Method 作為判斷區間內具唯一根值之技巧，再引用 Open Method 中之 The Secant Method，求得頻率方程式之根值，此方法於求根過程缺乏效率。而使用輔助軟體 Mathematica 求出的結果精準度不夠，只能求得六位數字，但影響結果不大。

4. 當基礎彈性模數不同時，可以比較出  $K$  值越大則其頻率越大，而周期越小，振動曲線越陡，反之， $K$  值越小則其頻率越小，而周期越大，振動曲線平緩。在不同  $K$  值的情況下，將求出之振幅無因次化做比較，發現其為一形狀不變的振態  $W(r, \theta)$ ，所以基礎彈性模數之大小，基礎軟硬程度，相差很大時，所得振幅、頻率、周期，相去亦遠，兒由圖所知軟質基礎也就是值小者，振幅大，硬質基礎也就是值大者，振幅小，但振動的形狀皆不改變，相當合理。

5. 以有限元素軟體 ANSYS 加以分析模態，將其振幅之結果與理論解作比較，可以發現有所不同，其誤差來源為將問題領域分割成網格的大小狀況，其元素的選取也會有引響，處理切割數之誤差上，只要切割的細一點則影響可改善很多，以最小分割之結果與理論解已相當接近。

## 5.2 建議

本文所推導之動力反應過程中，僅為無外力作用下系統的自由振動反應，建議可進一步討論在外力作用下，基礎上彈性環狀板的外力-變位關係，或者引入阻尼效應，去觀察當外力荷重函數之頻率與自然振動頻率相近或相等時，所產生的共振現象。

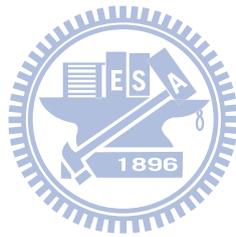


## 參考文獻

1. Gin-Show Liou, G. C. Lee “Impedance Matrices for Axial Symmetric Foundations on Layered Media” , Structural Eng./Earthquake Eng., JSCE, Vol. 9, 33-44, 1992.
2. C. L. Kantham, ” Bending and vibration of elastically restrained circular plates,” J. Franklin Inst. 265, 483-491 (1958).
3. Herbert Reismann, “ Forced vibrations of a circular plate,” Trans. A. S. M. E., J. Appl. Mech., 26 (1959), pp. 526-527.
4. R. S. Weiner, “Forced Axisymmetric Motions of Circular Elastic Plates,” J. Appl. Mech. 82~ 893, 1965.
5. Euler, L., ” De motu vibratorio tympanorum,” Novi Commentari Acad. Petropolit., 10(1766), p243-260
6. Bernoulli, J., Jr. “Essai theorique sur les vibrations de plaques elastiques rectangularies et libers,” Novi Commentari Acad Petropolit, Vol. 5, pp. 197-219, 1789.
7. Kirchhoff, G., “Vorlesungen uber mathematische physik,” Vol. 1, B. G. Teubner, Leipzig, 1876.
8. Lysmer, J., “Vertical Motion of Rigid Footings,” Dept. of Civil Eng., Univ. of Michigan Report to WES Contract Report No. 3-115 Under Contract No. DA-22-079-eng-340; also a Ph. D. dissertation, Univ. of Michigan, Aug. (1965).
9. S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, “Theory of Plates and Shells,” McGRAW-HILL Book Company, 1959.
10. Szilard, R., Theory and Analysis of Plates Classical and Numerical Methods, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1974.

11. Michio Iguchi, and J. Enrique Luco, "Vibration of Flexible Plate on Viscoelastic Medium," ASCE, Vol. 108, No. EM6, December, 1982.
12. Ray W. Clough, and J. Penzien, "Dynamics of Structures," McGraw-Hill Book Company, 1975.
13. Gin-Show Liou "Vibration of Surface Foundations of Arbitrary Shapes," Earthquake Eng. Str. Dyn., Vol. 20, 1115-1125, 1991.
14. A. C. Ugural, "Stresses in Plates and Shells," McGRAW-HILL Book Company, 1981.
15. Y. J. Lin, "Dynamic Response of Circular Plates Resting on Viscoelastic Half Space," Journal of Applied Mechanics, Vol. 45, 1978.
16. J. T. Chen, S. R. Kuo, I. L. Chen and C. X. Huang " Study on the true and spurious eigensolutions of two-dimensional cavities using the dual multiple reciprocity method," Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 27, No. 7, pp. 655-670, 2003.
17. J. T. Chen, C. S. Wu and K. H. Chen, "A study of free terms for plate problems in the dual boundary integral equations," Engineering Analysis with Boundary Elements, Accepted, 2005.
18. 黃寶翰, " 軸對稱彈性板承受任意載重之研究" 國立交通大學土木工程研究所碩士論文, 1993。
19. 羅遠智, " 彈性矩形板承受任意載重之研究" 國立交通大學土木工程研究所碩士論文, 1995。
20. 洪慶章 劉清吉, " ANSYS 教學範例 " 知城數位科技股份有限公司 2005 年 5 月。
21. 李輝煌, " ANSYS 工程分析基礎與觀念 " 高立圖書有限公司 2005 年。
22. 康淵, 陳信吉, " ANSYS 入門 " 全華科技圖書有限公司 2006 年。

23. 張起豪, 林敬三, ” Mathematica 入門與教學 ” 碁峰資訊股份有限公司  
2009 年。
24. 張錚, ” MATLAB 程式設計與應用教學範本 ” 知城數位科技股份有限公司  
2008 年 8 月。



## 附錄一:ANSYS 彈簧加載指令建構程式碼

```
clear all
a1=load('origin.txt');
a = length(a1); % the number of the vector
for i = 1:a;
    b(i) = i+0;
end
b = b';
aa = 158 ; %%% 全部號碼的總數
bb = a1(:,1); %% 正常的號碼
c = b + aa; %% x 座標平移之後的號碼
d = b + a +aa; %% y 座標平移之後的號碼
e = b + 2*a + aa; %% z 座標平移之後的號碼

%% x 座標平移-20 的座標點
a3 = a1;
a3(:,1) = c;
a3(:,2) = a3(:,2) - 20;

%% y 座標平移-20 的座標點
a4 = a1;
a4(:,1) = d;
a4(:,3) = a4(:,3) - 20;

%% z 座標平移-10 的座標點
a5 = a1;
a5(:,1) = e;
a5(:,4) = a5(:,4) - 20;
a6 = [a3; a4; a5] ; %% 把座標並成一個大的
a7 = [bb c]; % x 方向連線
a8 = [bb d]; % y 方向連線
a9 = [bb e]; % z 方向連線
a10 = [a7; a8; a9]; % 把連線並成一個大的
f = zeros(a,1);
a11 = [c f]; % x 方向自由度
```



```

a12 = [d f]; % y 方向自由度
a13 = [e f]; % z 方向自由度
a14 = [a11; a12; a13]; %把自由度並成一個大的
save ('result1.txt','a6','-ascii') %%存座標點
save ('result2.txt','a10','-ascii') %%存連線
save ('result3.txt','a14','-ascii') %%存自由度
將 result1.txt 改成 ANSYS 可讀之 .txt 檔案 'N' %%座標點
將 result2.txt 改成 ANSYS 可讀之 .txt 檔案 'L' %%連線
將 result3.txt 改成 ANSYS 可讀之 .txt 檔案 'D' %%自由度

```

```

/INPUT,'N','txt','.'
/INPUT,'L','txt','.'
/INPUT,'D','txt','.'

```

```

ANTYPE, 2
!*
MSAVE, 0
!*
MODOPT, REDUC, 10
EQLV, FRONT
MXPAND, 10, , , 0
LUMP, 0
PSTRES, 0
!*
MODOPT, REDUC, 10, 0, 10, 10, OFF
TOTAL, 100, 0
MXPAND, 10, 0, 1, 1, 0.001,
/REPOST, RESIZE
/REPOST, RESIZE

```

