

國立交通大學

土木工程學系碩士班

碩士論文

利用 Ritz 法分析具有裂縫之矩形 Mindlin 板振動

Vibrations of rectangular cracked Mindlin plates via the Ritz



研究生：李榕師

指導教授：黃炯憲 博士

中華民國九十八年十一月

# 利用 Ritz 法分析具有裂縫之矩形 Mindlin 板振動

## Vibrations of rectangular cracked Mindlin plates via the Ritz method

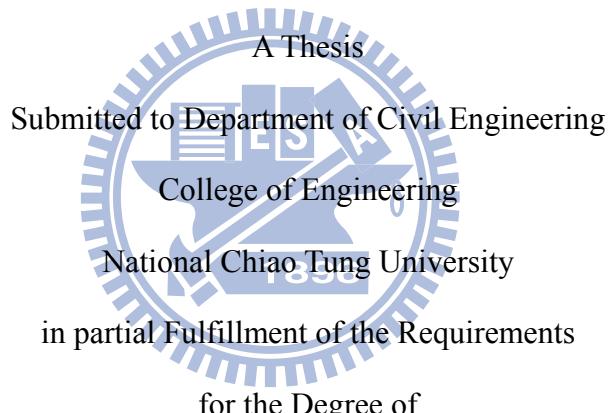
研究 生：李榕師

Student : Rong-Shi Li

指 導 教 授：黃 炯 憲

Advisor : Dr. Chiung-Shiann Huang

國 立 交 通 大 學  
土 木 工 程 研 究 所  
碩 士 論 文



Master

in

Civil Engineering

September 2009

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十八年十月

# 利用 Ritz 法分析具有裂縫之矩形 Mindlin 板振動

研究生：李榕師

指導教授：黃炯憲 博士

國立交通大學土木工程學系碩士班

## 摘要

本研究使用 Ritz 法分析含裂縫矩形 Mindlin 板之自然振動頻率與模態，其中考慮了邊緣與內部兩種裂縫。為能準確描述裂縫，在此提出一組新的允許函數，此允許函數包含能滿足邊界條件之多項式函數與能準確描述裂縫尖端之奇異性並滿足跨越裂縫位移與轉角不連續行為之函數。收斂性分析中，隨著允許函數項數增加，自然振動頻率值當能從上界收斂至真解，為了更有效求出振動頻率，本文將藉由大量的收斂性分析，並將其結果與古典板理論之文獻比較以驗證本程式的正確性。最後，進一步探討不同邊界、不同厚度、裂縫長度、角度與位置對板振動行為之影響。

# Vibrations of Rectangular cracked Mindlin plates via the Ritz method

Student: Rong-Shi Li

Adviser: Prof. Chiung-Shiann Huang

Department of Civil Engineering  
National Chiao-Tung University

## Abstract

This study applies the Ritz method to determine the frequencies and mode shape of cracked Mindlin rectangular plates. Two types of cracked configuration are considered, namely, side crack and internal crack. The work proposes a new set of admissible functions that are able to properly describe boundary conditions and the stress singularity behaviors near the tips of the crack and meet the discontinuities of displacement and slope crossing the crack. The present solutions monotonically converge to the exact frequencies of plates from the upper-bounds as the number of admissible functions increase. The efficiency and accuracy of the present solutions are confirmed through comprehensive convergence studies and comparison with the published results based on the classical thin plate theory. Finally, the present approach is applied to investigate the effects of boundary conditions, thick, location, length and orientation of cracks on the free vibration frequencies and mode shapes of rectangular plates with cracks.

## 誌謝

在這兩年的研究期間，感謝指導教授黃炯憲老師在課業上的辛勤指導與悉心教誨，耐心的指導論文研究，並提供良好的研究環境和設備，使論文得以順利完成，師恩浩瀚，學生銘記在心。

論文口試期間，承蒙交通大學土木工程學系師長，洪士林教授、鄭復平副教授以及林昌佑副教授餘口試期間提供寶貴的意見，使本文更臻完善，在此表達最由衷的謝意。

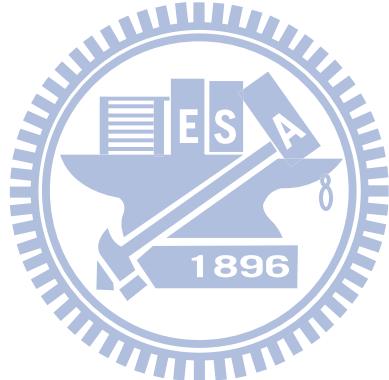
在研究所期間，感謝研究室明儒學長、威智學長、志偉學長與昱成學長的指導，在課業與研究上給予極大幫助。同時也感謝勝彥學長、增尉學長、佳穎學姊、政寧學長、仲維學長、靖俞學長、同窗政淵以及學弟凱平、學妹宛臻、嬿糧一起互相鼓勵，讓我在研究的路上不孤單。

最後將本論文獻給我最親愛家人，爸爸、媽媽與弟弟，感謝爸媽這二十多年的養育、栽培與支持，給予我無後顧之憂的求學環境，你們的辛苦我將銘記在心且繼續努力不讓你們失望。

# 目錄

中文摘要 .....	I
英文摘要 .....	II
誌謝 .....	III
目錄 .....	IV
表目錄 .....	VI
圖目錄 .....	IX
第一章 緒論 .....	1
1.1 研究背景 .....	1
1.2 文獻回顧 .....	2
1.3 究動機與方法 .....	5
1.4 內容概要 .....	6
第二章 具邊緣裂縫矩形 Mindlin 板之振動分析 .....	7
2.1 Mindlin 板之應變能與動能 .....	7
2.2 利用 Ritz 法求解 Mindlin 板之自然振動頻率 .....	8
2.3 允許函數之建構 .....	10
2.4 收斂性分析 .....	14
2.5 數值結果 .....	16
2.6 厚度效應 .....	26

第三章 具內部裂縫矩形 Mindlin 板之振動分析 .....	28
3.1 允許函數之建構 .....	28
3.2 收斂性分析 .....	29
3.3 數值結果 .....	31
第四章 結論與建議 .....	39
4.1 結論 .....	39
4.2 建議 .....	40
參考文獻 .....	41



# 表目錄

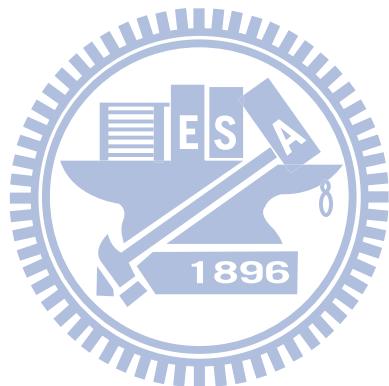
表 2.1 具水平邊緣裂縫簡支矩形薄板( $a/b = 2$ 、 $c_y/b = 0.5$ 、 $d/a = 0.2$ 、 $h/b = 0.01$ )之無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ 收斂性分析 .....	44
表 2.2 具水平邊緣裂縫簡支矩形薄板( $a/b = 2$ 、 $c_y/b = 0.5$ 、 $d/a = 0.6$ 、 $h/b = 0.01$ )之無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ 收斂性分析 .....	45
表 2.3 具水平邊緣裂縫簡支矩形薄板( $a/b = 2$ 、 $c_y/b = 0.5$ 、 $d/a = 0.8$ 、 $h/b = 0.01$ )之無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ 收斂性分析 .....	46
表 2.4 具水平邊緣裂縫簡支矩形厚板( $a/b = 2.0$ 、 $c_y/b = 0.5$ 、 $d/a = 0.6$ 、 $h/b = 0.1$ )之無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ 收斂性分析 .....	47
表 2.5 具水平邊緣裂縫懸臂矩形厚板( $a/b = 2.0$ 、 $c_y/b = 0.5$ 、 $d/a = 0.6$ 、 $h/b = 0.1$ )之無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ 收斂性分析 .....	48
表 2.6 具不同邊緣裂縫簡支方形中厚板無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ ( $h/b = 0.1$ ) .....	49
表 2.7 具不同邊緣裂縫簡支方形中厚板無因次化頻率折減量比 $\Delta\omega$ (%) ( $h/b = 0.1$ ) .....	50
表 2.8 具不同頂部裂縫簡支矩形中厚板無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ ( $a/b = 2$ 、 $h/b = 0.1$ ) .....	51
表 2.9 具不同頂部裂縫簡支矩形中厚板無因次化頻率折減量比 $\Delta\omega$ (%) ( $a/b = 2$ 、 $h/b = 0.1$ ) .....	52

表 2.10 具不同邊緣裂縫懸臂方形中厚板無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ ( $h/b = 0.1$ )	53
表 2.11 具不同邊緣裂縫懸臂方形中厚板無因次化頻率折減量比 $\Delta\omega$ (%) ( $h/b = 0.1$ )	54
表 2.12 具不同頂部裂縫懸臂方形中厚板無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ ( $h/b = 0.1$ )	55
表 2.13 具不同頂部裂縫懸臂方形中厚板無因次化頻率折減量比 $\Delta\omega$ (%) ( $h/b = 0.1$ )	56
表 2.14 具不同頂部裂縫懸臂矩形中厚板無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ ( $a/b = 2$ 、 $h/b = 0.1$ )	57
表 2.15 具不同頂部裂縫懸臂矩形中厚板無因次化頻率折減量比 $\Delta\omega$ (%) ( $a/b = 2$ 、 $h/b = 0.1$ )	58
表 2.16 具不同邊緣裂縫四邊自由端之方形中厚板無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ ( $h/b = 0.1$ )	59
表 2.17 具不同邊緣裂縫四邊自由端之方形中厚板無因次化頻率折減量比 $\Delta\omega$ (%) ( $h/b = 0.1$ )	60
表 2.18 具不同邊緣裂縫簡支方形 Mindlin 板之厚度效應 ( $\alpha = 0^\circ$ 、 $c_y/b = 0.5$ )	61
表 2.19 具不同邊緣裂縫懸臂方形 Mindlin 板之厚度效應 ( $\alpha = 0^\circ$ 、 $c_y/b = 0.5$ )	62
表 3.1 具水平內部裂縫簡支方形薄板 ( $x_0/a = y_0/b = 0.5$ 、 $d/a = 0.6$ 、 $h/b = 0.01$ ) 之無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ 收斂性分析	63

表 3.2 具水平內部裂縫簡支方形中厚板( $x_0/a = y_0/b = 0.5$ 、 $d/a = 0.3$ 、 $h/b = 0.1$ )之無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ 收斂性分析 .....	64
表 3.3 具水平內部裂縫簡支方形中厚板( $x_0/a = y_0/b = 0.5$ 、 $d/a = 0.6$ 、 $h/b = 0.1$ )之無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ 收斂性分析 .....	65
表 3.4 具水平內部裂縫簡支方形中厚板( $x_0/a = y_0/b = 0.5$ 、 $d/a = 0.6$ 、 $\alpha = 30^\circ$ 、 $h/b = 0.1$ )之無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ 收斂性分析 .....	66
表 3.5 具水平內部裂縫懸臂方形中厚板( $x_0/a = y_0/b = 0.5$ 、 $d/a = 0.6$ 、 $h/b = 0.1$ )之無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ 收斂性分析 .....	67
表 3.6 具不同內部裂縫簡支方形中厚板無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ ( $h/b = 0.1$ ) .....	68
表 3.7 具不同內部裂縫簡支方形中厚板無因次化頻率折減量比 $\Delta\omega$ (%) ( $h/b = 0.1$ ) .....	69
表 3.8 具不同內部裂縫懸臂方形中厚板無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ ( $h/b = 0.1$ ) .....	70
表 3.9 具不同內部裂縫懸臂方形中厚板無因次化頻率折減量比 $\Delta\omega$ (%) ( $h/b = 0.1$ ) .....	71
表 3.10 具不同內部裂縫懸臂矩形中厚板無因次化頻率 $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ ( $a/b = 2$ 、 $x_0/a = y_0/b = 0.5$ 、 $h/b = 0.1$ ) .....	72
表 3.11 具不同內部裂縫懸臂矩形中厚板無因次化頻率折減量比 $\Delta\omega$ (%) ( $a/b = 2$ 、 $x_0/a = y_0/b = 0.5$ 、 $h/b = 0.1$ ) .....	73

表 3.12 具不同內部裂縫懸臂矩形中厚板無因次化頻率  $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$  ( $a/b = 2$  、  
 $x_0/a = 0.25$  、  $y_0/b = 0.5$  、  $h/b = 0.1$ ) ..... 74

表 3.13 具不同內部裂縫懸臂矩形中厚板無因次化頻率折減量比  $\Delta\omega$  (%)  
( $a/b = 2$  、  $x_0/a = 0.25$  、  $y_0/b = 0.5$  、  $h/b = 0.1$ ) ..... 75



# 圖目錄

圖 2.1 具邊緣裂縫矩形板示意圖 (裂縫與 $x=a$ 軸相交) .....	76
圖 2.2 具邊緣裂縫矩形板示意圖 (裂縫與 $y=b$ 軸相交) .....	77
圖 2.3 座標轉換示意圖 .....	78
圖 2.4 具邊緣裂縫簡支方形板模態圖 .....	79
圖 2.5 具頂部裂縫簡支矩形板模態圖 ( $a/b=2$ ) .....	81
圖 2.6 具邊緣裂縫懸臂方形板模態圖 .....	82
圖 2.7 具頂部裂縫懸臂方形板模態圖 .....	84
圖 2.8 具頂部裂縫懸臂矩形板模態圖 ( $a/b=2$ ) .....	86
圖 2.9 具邊緣裂縫四邊自由端方形板模態圖 .....	87
圖 3.1 具邊內部縫矩形板示意圖 .....	89
圖 3.2 內部裂縫奇異點與連續線段示意圖 .....	90
圖 3.3 具內部裂縫簡支方形板模態圖 .....	91
圖 3.4 具內部裂縫懸臂方形板模態圖 .....	93
圖 3.5 具內部裂縫懸臂矩形板模態圖 ( $a/b=2$ 、 $x_0/a=0.5$ ) .....	95
圖 3.6 具內部裂縫懸臂矩形板模態圖 ( $a/b=2$ 、 $x_0/a=0.25$ ) .....	96

# 第一章 緒論

## 1.1 研究背景

近代工業發展上，厚板及薄板已廣泛應用於各類工程領域中，例如：土木運輸、機電通訊及化學、生醫工程等，因此各種厚板及薄板理論均扮演著重要的角色。其中常用來分析板的理論有三種，分別是：古典薄板理論 (CPT)、一階剪力變形板理論 (FSDT)、高階剪力變形板理論 (HSDPT)。

在古典板理論中，假設平板變形前後，平面仍保持平面 (plane remain plane)，而忽略了側向剪力變形 (transverse shear deformation) 與旋轉慣量 (rotary inertia) 所帶來之影響，用其分析，將會有低估撓度及高估振動頻率情況，因此僅適用於寬厚比 ( $b/h$ ) 大於 10 之薄板結構，並不適用於厚板分析。然而現今科學技術常應用於高速、高壓、高溫、強輻射及特殊複合材料之工程環境要求，板厚度增加是趨勢所致。隨著寬厚比減少，所造成之剪力變形與旋轉慣量問題則相形重要。因此由 Mindlin (1951) 考慮剪力變形與旋轉慣量對板之影響，並利用剪力修正因子  $\kappa^2$  (shear correction factor)，作為厚板理論之基礎，所發展之一階剪力變形板理論 (FSDT)，將逐漸受到重視。其中，以厚板理論當成分析基礎的特殊材料與功能梯度材料，也已廣泛的應用於工程中。

另外在板結構之設計上，常會面臨奇異點 (singularity) 之問題，而其

發生的原因有：(1) 幾何形狀之不連續，如裂縫尖端處或邊界條件所造成之不連續；(2) 載重，如集中載重或衝擊載重；(3) 材料性質，如複合材料之性質陡變。當所分析之結構元件含有奇異點時，須找到能夠正確描述奇異點特性之漸近解，方能得到準確之解。

## 1.2 文獻回顧

關於具有裂縫矩形板之研究，大部分文獻探討靜態行為，即用各種方法求取不同載重情況之應力強度因子（stress intensity factor），僅有少數研究振動行為者，其中又以利用古典板理論者居多。

在應用積分方程求解矩形薄板振動問題方面大部分僅適用於四邊簡支承或一對邊簡支承之矩形板，以下文獻分別利用了不同技巧建立所需之積分方程：Lynn和Kumbasar (1967) 分析了具裂縫四邊簡支承矩形板振動問題，首先用Green's函數來表示板之位移分量，並進一步將欲求問題轉換成齊性Fredholm第一型積分方程（homogeneous Fredholm integral equations of the first kind），再求解積分方程；Stahl和Keer (1972) 則將該振動問題以對偶級數方程（dual series equations）表示，並將其化成齊性Fredholm第二型積分方程（homogeneous Fredholm integral equations of the second kind），再利用數值分析法求解Fredholm積分方程；Aggarwala和Ariel (1981) 應用了Stahl和Keer (1972) 之方法，求解四邊簡支方形板具有位於中心點十字型裂縫或兩組(水平與垂直)對稱於中心點之邊緣裂縫振動問題；Nezu (1982)

則是修正Lynn和Kumbasar (1967) 之方法，以Levy解建立所須Green函數。

另外，Hirano和Okazaki (1980) 針對一對邊界，具簡支承之裂縫矩形板，利用Levy的解，將裂縫兩邊上不連續之位移與斜率當作未知函數，並進一步利用Fourier series展開與加權餘數法 (weighted residual method) 去處理，求解振動問題。Solecki (1983) 之作法類似Hirano和Okazaki (1980)，不過使用四邊簡支承板之解析解，將描述裂縫處位移和轉角的不連續函數，進行finite Fourier轉換，求解裂縫板振動問題。

於數值方法中，最常利用有限元素法與 Ritz 法分析具裂縫矩形板之振動問題，而在有限元素法中：Qian 等人 (1991) 為了發展一有限元素的解法，對裂縫尖端的元素，經由對應力強度因子的積分，建構含裂縫元素的勁度矩陣。Krawczuk (1993) 則提出類似 Qian 等人 (1991) 的解決方式，唯一的不同是對裂縫尖端元素勁度矩陣，採用封閉形式 (closed form) 的積分。Bachene 等 (2009) 討論在 Mindlin 板理論架構下利用延伸有限元素法 (extended finite element method (X-FEM)) 去分析含水平裂縫矩形薄板 (厚度比  $h/b \leq 1/500$ ) 的自然振動頻率。

在利用 Ritz 法分析結構振動問題是否成功，主要決定於所使用允許函數之恰當性。目前利用 Ritz 法求解裂縫板振動問題文獻如下：根據 Reissner 定理，Lee 和 Lim (1993) 利用區域分解的技巧去決定 Ritz 法求解含水平中心裂縫簡支矩形 Mindlin 板之允許函數，並求解振動頻率。Yuan 和 Dickinson

(1992) 則將矩形板分成數個區塊，並加置人工彈簧於各區塊連結之邊界上，因此，可用傳統的允許函數 (regular admissible functions) 於各區域來求解，不必用特別的函數來描述裂縫。用類似於 Yuan 和 Dickinson (1992) 之切割方法，Liew 等人 (1994) 則僅要求各區塊之允許函數於兩區塊交接處，以積分形式滿足允許函數及其一階微分之連續性。Khadem 和 Rezaee (2000) 利用 Levy's solution 建立所謂修正比較函數 (modified comparison functions)，作為 Ritz 法所中的允許函數 (admissible functions)，分析具水平裂縫簡支承矩形板於不同裂縫長度、深度與位置時之振動。然而，因為 Khadem 和 Rezaee (2000) 使用之允許函數較為特殊，其僅適用於處理至少一對邊是簡支承 (two opposite edges simply supported) 之裂縫矩形板振動問題。近期，Huang 和 Leissa (2009)<sup>3</sup> 利用 Williams (1952) 所推導裂縫尖端之漸近解，提出了一組可準確描述邊緣裂縫奇異行為的允許函數，並將此允許函數用於求解不同邊界條件下 (四邊簡支承與自由端) 含邊緣裂縫薄板的振動問題。

此外，以雷射為基礎的光學干涉方法已廣泛的應用在量測技術上，其中在量測含裂縫板之振動問題方面。Maruyama 和 Ichinomiya (1989) 採用均時全像干涉法 (time-averaged holographic interferometry) 之即時 (real-time) 技術，去決定含平直裂縫懸臂薄版 (厚寬比  $h/b = 1/187.5$ ) 的自然振動頻率與模態。Ma 和 Hung (2001) 與 Ma 和 Hsieh (2001) 則應用振幅變動法電

子斑點干涉術 (AFESPI)，以獲得具水平或垂直邊緣裂縫懸臂薄板 (厚寬比  $h/b \leq 1/60$ ) 之自然振動頻率與模態，並利用有限元素軟體 ABAQUS 去分析相同案例，與實驗結果做比較。

### 1.3 研究目的與方法

本論文主要目的分為兩部份 (1) 提出在利用 Ritz 法求解含直線裂縫 Mindlin 板所需的允許函數 (2) 擴展現今文獻中含裂縫中厚板之自然振動頻率值。Ritz 法自提出後就被廣泛用於求解板之振動問題，因其具有完整之數學理論背景與較佳之精確度。本文亦將利用此方法，以 Mindlin 板理論為基礎，分析具裂縫矩形板之振動行為。而在應用 Ritz 法求解具裂縫板振動問題的文獻中，絕大部分文獻均透過切割次區域 (sub-domain) 之技巧處理 (Yuan 和 Dickinson、Liew 等與 Lee 和 Lim)，先於各次區域選擇適當之允許函數，再利用各種近似連續條件，建構全域之允許函數。但這些文獻忽略了 Ritz 法頻率從上限收斂的特性，因為其允許函數在兩個次區域連接處並不是處處連續，而且若像 Yuan 和 Dickinson (1992) 安裝人造彈簧於次區域之連接處，強迫滿足必要之連續條件，彈簧的勁度也將影響答案之準確性。

為了修正上述因允許函數不連續所造成的缺陷，本文首先根據 Huang (2003) 所推導一階剪力變形板理論架構下，尖銳點所產生剪力與彎矩奇

異性之漸近解，接著利用 Huang 和 Leissa (2009) 所使用求解含邊緣裂縫薄板之技巧，將漸近解用於討論直線裂縫所造成之奇異性，創造出一組新的允許函數，使允許函數可滿足裂縫點所產生之奇異性與跨越裂縫造成位移與轉角不連續性，並進一步去求解不同情況下，含邊緣或內部裂縫之矩形 Mindlin 板振動問題。

## 1.4 內容概要

本論文共分為四章，其內容如下：

第一章 說明本文研究動機與目的，提出相關文獻之回顧並指出研究之方法與內容。



第二章 以 Ritz 法求解邊緣裂縫矩形 Mindlin 板之振動，在此將提出一組新的可描述邊緣裂縫之允許函數，除驗證本允許函數之優點，並用於分析不同案例之振動問題。

第三章 以 Ritz 法求解內部裂縫矩形 Mindlin 板之振動，在此將修正前章所提之允許函數，使其適用於描述內部裂縫，並用於分析不同案例之振動問題。

第四章 本研究之結論與建議。

## 第二章 具邊緣裂縫矩形 Mindlin 板之振動分析

本章將討論 Mindlin 板理論架構下，利用 Ritz 法求解含裂縫板（參考圖 2.1 與圖 2.2）振動問題時，所需之允許函數。首先為驗證允許函數正確性，先將其用於薄板 ( $h/b = 0.01$ ) 分析，並與文獻結果比較，最後進一步探討裂縫長度、位置、角度與厚度等不同參數對振動行為之影響。

### 2.1 Mindlin 板之應變能與動能

由於分析矩形板，以  $x-y$  直角座標系統表示 Mindlin 板之應變能與動能。Mindlin 板之應變能可以張量分量表示成：

$$U = \iint_A \frac{1}{2} (M_{\alpha\beta} m_{\alpha\beta} + Q_\alpha q_\alpha) dA \quad (2.1)$$

其中  $\alpha, \beta$  代表  $x$  或  $y$  獨立變數， $M_{\alpha\beta}$ 、 $m_{\alpha\beta}$ 、 $Q_\alpha$  與  $q_\alpha$  分別定義為

$$M_{xx} = D(\psi_{x,x} + \nu\psi_{y,y}) , \quad m_{xx} = \psi_{x,x} , \quad (2.2a)$$

$$M_{yy} = D(\psi_{y,y} + \nu\psi_{x,x}) , \quad m_{yy} = \psi_{y,y} , \quad (2.2b)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \frac{D}{2}(1-\nu)(\psi_{x,y} + \psi_{y,x}) , \quad m_{xy} = \frac{1}{2}(\psi_{x,y} + \psi_{y,x}) , \quad (2.2c)$$

$$Q_x = \kappa^2 G h (w_{,x} + \psi_x) , \quad q_x = w_{,x} + \psi_x , \quad (2.2d)$$

$$Q_y = \kappa^2 G h (w_{,y} + \psi_y) , \quad q_y = w_{,y} + \psi_y , \quad (2.2e)$$

式(2.2a)~(2.2e)中，下標 “,” 代表對其後自變數  $x$  或  $y$  之微分。 $M_{xx}$  為垂直於  $x$  面上沿  $y$  方向每單位長度的彎曲力矩， $M_{yy}$  為垂直於  $y$  面上沿  $x$  方向每單位長度的彎曲力矩， $M_{xy}$  為垂直於  $x$  面（或  $y$  面上）沿  $y$  方向（或  $x$  方向）每單

位長度的扭轉力矩， $Q_x$  為垂直  $x$  之面上沿  $z$  方向每單位長度的剪力（shear force intensity）， $Q_y$  為在垂直  $y$  之面上沿  $z$  方向每單位長度的剪力， $\psi_x$ 、 $\psi_y$ 、 $w$  為板中平面之轉角與位移函數， $h$  為板厚度， $E$  為彈性模數， $\nu$  為波松比， $G$  為剪力模數 ( $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ )， $D$  為撓曲剛度 ( $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ )， $\kappa^2$  為剪力修正因子。Reissner (1945) 取  $\kappa^2$  為  $\frac{5}{6}$ ，而 Mindlin (1951) 則取為  $\frac{\pi^2}{12}$ ，本研究中取  $\kappa^2 = \frac{\pi^2}{12}$ 。

若將式(2.1)中之彎矩與剪力用轉角與位移函數表示，則式(2.1)之應變能可表示成

$$U = \int_A \left\{ \frac{D}{2} \left[ \psi_{x,x}^2 + \psi_{y,y}^2 + 2\nu\psi_{x,x}\psi_{y,y} + \frac{1-\nu}{2}(\psi_{x,y} + \psi_{y,x})^2 \right] + \frac{\kappa^2 Gh}{2} \left[ (w_{,x} + \psi_x)^2 + (w_{,y} + \psi_y)^2 \right] \right\} dA \quad (2.3)$$

另外，Mindlin 板之動能表示成

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho [z^2 \dot{\psi}_x^2 + z^2 \dot{\psi}_y^2 + \dot{w}^2] dV \quad (2.4)$$

其中  $\rho$  為單位面積的質量。

## 2.2 利用 Ritz 法求解 Mindlin 板之自然振動頻率

利用 Ritz 法求解矩形板之自然振動頻率，其能量函數定義為

$$\Pi = U_{\max} - T_{\max} \quad (2.5)$$

其中， $T_{\max}$  為一振動週期內最大動能； $U_{\max}$  為一振動週期內最大應變能；

令

$$\psi_x(x,y,t) = \Psi_x(x,y) \cdot e^{i\omega t}, \quad \psi_y(x,y,t) = \Psi_y(x,y) \cdot e^{i\omega t}, \quad w_0(x,y,t) = W(x,y) \cdot e^{i\omega t} \quad (2.6)$$

其中， $\omega$ 為自然振動頻率。依式 (2.3) 及 (2.4) 可得

最大應變能及動能分別為

$$\begin{aligned} U_{\max} &= \int_A \left\{ \frac{D}{2} \left[ \Psi_{x,x}^2 + \Psi_{y,y}^2 + 2v\Psi_{x,x}\Psi_{y,y} + \frac{1-v}{2} (\Psi_{x,y} + \Psi_{y,x})^2 \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\kappa^2 Gh}{2} [(\Psi_x + W_x)^2 + (\Psi_y + W_y)^2] \right\} dA \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$T_{\max} = \frac{\omega^2}{2} \iint_A \left\{ \frac{\rho h^3}{12} (\Psi_x^2 + \Psi_y^2) + \rho h W^2 \right\} dA \quad (2.8)$$

將  $\Psi_x$ 、 $\Psi_y$ 、 $W$  利用具完備性之允許函數序列展開，假設表示成

$$\Psi_x = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \bar{\Psi}_{xi}, \quad \Psi_y = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \bar{\Psi}_{yi}, \quad W = \sum_{i=1}^{\infty} C_i \bar{W}_i \quad (2.9)$$

其中  $A_i$ 、 $B_i$ 、 $C_i$  為待定係數， $\bar{\Psi}_{xi}$ 、 $\bar{\Psi}_{yi}$ 、 $\bar{W}_i$  為滿足邊界條件之允許函數。

將式 (2.6)、式 (2.7) 與式 (2.8) 代入式 (2.5)，再對能量式  $\Pi$  取最小值

$$\text{即 } \frac{\partial \Pi}{\partial A_i} = \frac{\partial \Pi}{\partial B_i} = \frac{\partial \Pi}{\partial C_i} = 0 \quad (2.10)$$

整理可得一組特徵方程式

$$\begin{bmatrix} K^{11} & K^{12} & K^{13} \\ K^{21} & K^{22} & K^{23} \\ K^{31} & K^{32} & K^{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} M^{11} & 0 & 0 \\ 0 & M^{22} & 0 \\ 0 & 0 & M^{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_i \\ B_i \\ C_i \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

求解式 (2.11) 之特徵根與特徵向量可求得板之自然振動頻率與模態。

勁度矩陣  $[K]$  與質量矩陣  $[M]$ ，經推導可得各矩陣元素表示式為：

$$K_{11}^{(ij)} = D \iint \left( \bar{\Psi}_{xi,x} \bar{\Psi}_{xj,x} + \frac{(1-v)}{2} \bar{\Psi}_{xi,y} \bar{\Psi}_{xj,y} \right) dA + \kappa^2 G h \iint \bar{\Psi}_{xi} \bar{\Psi}_{xj} dA , \quad (2.12a)$$

$$K_{12}^{(ij)} = D \iint \left( v \bar{\Psi}_{xi,x} \bar{\Psi}_{yj,y} + \frac{(1-v)}{2} \bar{\Psi}_{xi,y} \bar{\Psi}_{yj,x} \right) dA , \quad (2.12b)$$

$$K_{13}^{(ij)} = \kappa^2 G h \iint \bar{\Psi}_{xi} \bar{W}_{j,x} dA , \quad (2.12c)$$

$$K_{22}^{(ij)} = D \iint \left( \bar{\Psi}_{yi,y} \bar{\Psi}_{yj,y} + \frac{(1-v)}{2} \bar{\Psi}_{yi,x} \bar{\Psi}_{yj,x} \right) dA + \kappa^2 G h \iint \bar{\Psi}_{yj} \bar{\Psi}_{yj} dA , \quad (2.12d)$$

$$K_{23}^{(ij)} = \kappa^2 G h \iint \bar{\Psi}_{yi} \bar{W}_{j,y} dA , \quad (2.12e)$$

$$K_{33}^{(ij)} = \kappa^2 G h \iint (\bar{W}_{i,x} \bar{W}_{j,x} + \bar{W}_{i,y} \bar{W}_{j,y}) dA , \quad (2.12f)$$

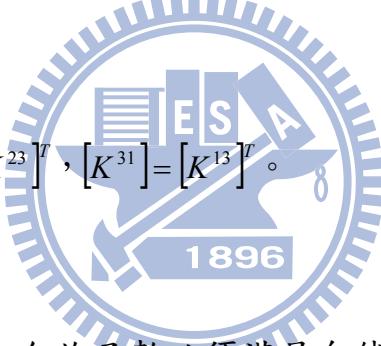
$$M_{11}^{(ij)} = \omega^2 \frac{\rho h^3}{12} \iint \bar{\Psi}_{xi} \bar{\Psi}_{xj} dA , \quad (2.13a)$$

$$M_{22}^{(ij)} = \omega^2 \frac{\rho h^3}{12} \iint \bar{\Psi}_{yi} \bar{\Psi}_{yj} dA , \quad (2.13b)$$

$$M_{33}^{(ij)} = \omega^2 \rho h \iint \bar{W}_i \bar{W}_j dA , \quad (2.13c)$$

$$\text{且 } [K^{21}] = [K^{12}]^T, [K^{32}] = [K^{23}]^T, [K^{31}] = [K^{13}]^T \circ \theta \quad (2.14)$$

### 2.3 允許函數之建構



在 Ritz 法中所用之允許函數必須滿足自然邊界條件。本文所使用之允許函數含完備的多項式函數集合 ( $\Psi_{xp}(x,y)$ 、 $\Psi_{yp}(x,y)$ 、 $W_p(x,y)$ ) 與能正確描述尖端處奇異應力行為及沿裂縫位移及斜率不連續現象之函數集 ( $\Psi_{xc}(r,\theta)$ 、 $\Psi_{yc}(r,\theta)$ 、 $W_c(r,\theta)$ )，即令

$$\Psi_x(x,y) = \Psi_{xp}(x,y) + \Psi_{xc}(r,\theta) \quad (2.15a)$$

$$\Psi_y(x,y) = \Psi_{yp}(x,y) + \Psi_{yc}(r,\theta) \quad (2.15b)$$

$$W(x,y) = W_p(x,y) + W_c(r,\theta) \quad (2.15c)$$

其中  $(x,y)$  及  $(r,\theta)$  座標系統之定義如圖 2.1 及 2.2 所示。

依 Bhat (1985)所提之正交多項式函數之建構方法， $\Psi_{xp}$ 、 $\Psi_{yp}$ 、 $W_p$ 可利用正交多項式表示成：

$$\Psi_{xp}(x,y) = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J a_{ij} \bar{\phi}_i(x) \bar{\varphi}_j(y) \quad (2.16a)$$

$$\Psi_{yp}(x,y) = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J b_{ij} \hat{\phi}_i(x) \hat{\varphi}_j(y) \quad (2.16b)$$

$$W_{yp}(x,y) = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J c_{ij} \phi_i(x) \varphi_j(y) \quad (2.16c)$$

其中， $I$ 和 $J$ 為多項式之項數， $a_{ij}$ 、 $b_{ij}$ 、 $c_{ij}$ 為待定係數， $\bar{\phi}_i(x)$ 、 $\hat{\phi}_i(x)$ 、 $\phi_i(x)$ 、 $\bar{\varphi}_j(y)$ 、 $\hat{\varphi}_j(y)$ 、 $\varphi_j(y)$ 是經由 Gram-Schmidt 的演算程序所獲得之正交多項式函數。

以建構 $\phi_i(x)$ 為例，考慮 $x=0$ 及 $x=a$ 處簡支承；

$$\phi_0(x) = x(a-x) \quad (2.17a)$$

$$\phi_1(x) = (x - \beta_1)\phi_0(x) \quad (2.17b)$$

$$\phi_i(x) = (x - \beta_i)\phi_{i-1}(x) - C_i\phi_{i-2}(x) \quad (2.17c)$$

$$\text{其中 } \beta_i = \frac{\int_0^a x \phi_{i-1}^2(x) dx}{\int_0^a \phi_{i-1}^2(x) dx}, \quad C_i = \frac{\int_0^a x \phi_{i-1}(x) \phi_{i-2}(x) dx}{\int_0^a \phi_{i-2}^2(x) dx},$$

$\phi_i(x)$ 須滿足  $\int_0^a \phi_k(x) \phi_l(x) dx = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ a_{kl}, & k = l \end{cases}$  使用正交多項式可改善使用多項式造成病態矩陣之現象。

若只使用式(2.16)之允許函數於 Ritz 法中，將無法辨識裂縫是否存在。因此，所得之結果將與無裂縫板結果一致。為使允許函數符合裂縫尖端之應力奇異性，以及跨越裂縫之位移與轉角不連續性，必需引入另一組函數

集。依 Hunag (2003) 利用特徵函數展開法求解扇形 Mindlin 板在各種徑向邊界條件組合下之應力奇異解，其中考慮尖端處之彎矩奇異性時，其轉角 ( $\psi_{ra}$ 、 $\psi_{\theta a}$ ) 與位移 ( $w_a$ ) 漸近解在極座標系統 (極座標  $(r, \theta)$ ) 之原點設定於裂縫尖端，其中  $-\pi \leq \theta \leq \pi$  (參考圖 3.1 與圖 3.2)) 表示如下

$$\psi_{ra}(r, \theta) = (A_1 \cos(\lambda + 1)\theta + A_2 \sin(\lambda + 1)\theta + A_3 \cos(\lambda - 1)\theta + A_4 \sin(\lambda - 1)\theta)r^\lambda \quad (2.18a)$$

$$\psi_{\theta a}(r, \theta) = (A_2 \cos(\lambda + 1)\theta - A_1 \sin(\lambda + 1)\theta + k_2 A_4 \cos(\lambda - 1)\theta - k_2 A_3 \sin(\lambda - 1)\theta)r^\lambda \quad (2.18b)$$

$$w_a(r, \theta) = (C_1 \cos(\lambda + 1)\theta + C_2 \sin(\lambda + 1)\theta + \gamma_1 A_3 \cos(\lambda - 1)\theta + \gamma_1 A_4 \sin(\lambda - 1)\theta)r^{\lambda+1} \quad (2.18c)$$

其中  $k_2 = -\frac{[2(1-\nu)+(1+\nu)(\lambda+1)]}{[2(1-\nu)-(1+\nu)(\lambda-1)]}$ ， $\gamma_1 = \frac{\nu-1}{-3+\lambda+\nu+\nu\lambda}$ ，而  $\lambda$  及係數  $A_i$  與  $C_j$

( $i = 1, 2, 3, 4$ ， $j = 1, 2$ ) 可由延著尖銳點兩端之徑向邊界條件決定，當取延著尖銳點兩端之邊界為自由端時，根據 Hunag (2003) 推導之結果， $\lambda$  必須滿足以下之特徵方程式：

$$(\sin \lambda \alpha - \lambda \sin \alpha)(\sin \lambda \alpha + \lambda \sin \alpha) = 0 \quad (2.19)$$

對應本文所考慮之裂縫問題 (即  $\alpha = 360^\circ$ )，可得其特徵根為  $\lambda = n/2$  ( $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ )； $A_i$  與  $C_j$  之關係可由文獻中 (Hunag, 2003) 獲得。

當考慮尖端處之剪力奇異性時，其漸近解可以極座標方式表示成

$$\psi_{ra}(r, \theta) = [\bar{A}_1 \cos \bar{\lambda} \theta + \bar{A}_2 \sin \bar{\lambda} \theta + \bar{A}_3 \cos(2 + \bar{\lambda})\theta + \bar{A}_4 \sin(2 + \bar{\lambda})\theta]r^{\bar{\lambda}+1} \quad (2.20a)$$

$$\psi_{\theta a}(r, \theta) = [\bar{B}_1 \cos \bar{\lambda} \theta + \bar{B}_2 \sin \bar{\lambda} \theta + \bar{A}_4 \cos(2 + \bar{\lambda})\theta - \bar{A}_3 \sin(2 + \bar{\lambda})\theta]r^{\bar{\lambda}+1} \quad (2.20b)$$

$$w_a(r, \theta) = [\bar{l}_1(\bar{A}_1 \cos \bar{\lambda} \theta + \bar{A}_2 \sin \bar{\lambda} \theta) + \bar{l}_2(\bar{B}_2 \cos \bar{\lambda} \theta - \bar{B}_1 \sin \bar{\lambda} \theta)]r^{\bar{\lambda}} \quad (2.20c)$$

其中  $\bar{l}_1 = \frac{-D}{2\kappa^2 Gh} (3 - \nu + (1 + \nu)(1 + \bar{\lambda}))$ ， $\bar{l}_2 = \frac{D}{2\kappa^2 Gh} (2(1 - \nu) - (1 + \nu)\bar{\lambda})$ ；在同樣考慮延

著尖銳點兩端之邊界為自由端時， $\bar{\lambda}$  必須滿足以下之特徵方程式：

$$(\cos \bar{\lambda} \alpha / 2)(\sin \bar{\lambda} \alpha / 2) = 0 \quad (2.21)$$

同樣取  $\alpha = 360^\circ$ ，可得  $\bar{\lambda} = n/2$  ( $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ )，而係數  $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \bar{A}_4, \bar{B}_1$  及  $\bar{B}_2$  之關係可由文獻中 (Hunag, 2003) 獲得。

由於式 (2.18) 與式 (2.20) 所表示之漸近解過於複雜，仔細觀察後，可發現式 (2.18) 與式 (2.20) 中，當  $\lambda$  與  $\bar{\lambda}$  為非整數時 (即  $\lambda = \bar{\lambda} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ )，此兩組式子可看成下面函數集之線性組合：

$$\left\{ r^{(2n+1)/2} \cos \frac{2l+1}{2} \theta \text{ 及 } r^{(2n+1)/2} \sin \frac{2l+1}{2} \theta \mid l = 0, 1, 2, \dots, n \text{ 且 } n = 1, 2, 3, \dots \right\} \quad (2.22)$$

另外，在此處不取  $\lambda$  與  $\bar{\lambda}$  為整數，因取整數時，所得函數集，可由有限項之多項式函數展開得到。因此  $\Psi_{xc}(r, \theta)$ 、 $\Psi_{yc}(r, \theta)$  與  $W_c(r, \theta)$  可表示成：

$$\Psi_{xc}(r, \theta) = f_x(x, y) \left\{ \sum_{n=1}^{\bar{N}_{11}} \sum_{m=0}^n \bar{a}_{ij} r^{\frac{2n-1}{2}} \cos \frac{2m+1}{2} \theta + \sum_{n=1}^{\bar{N}_{21}} \sum_{m=0}^n \tilde{a}_{ij} r^{\frac{2n-1}{2}} \sin \frac{2m+1}{2} \theta \right\} \quad (2.23a)$$

$$\Psi_{yc}(r, \theta) = f_y(x, y) \left\{ \sum_{n=1}^{\bar{N}_{12}} \sum_{m=0}^n \bar{b}_{ij} r^{\frac{2n-1}{2}} \cos \frac{2m+1}{2} \theta + \sum_{n=1}^{\bar{N}_{22}} \sum_{m=0}^n \tilde{b}_{ij} r^{\frac{2n-1}{2}} \sin \frac{2m+1}{2} \theta \right\} \quad (2.23b)$$

$$W_c(r, \theta) = f_w(x, y) \left\{ \sum_{n=1}^{\bar{N}_{13}} \sum_{m=0}^n \bar{c}_{ij} r^{\frac{2n-1}{2}} \cos \frac{2m+1}{2} \theta + \sum_{n=1}^{\bar{N}_{23}} \sum_{m=0}^n \tilde{c}_{ij} r^{\frac{2n-1}{2}} \sin \frac{2m+1}{2} \theta \right\} \quad (2.23c)$$

上式函數  $f_x(x, y)$ 、 $f_y(x, y)$  與  $f_w(x, y)$ ，為使  $\Psi_{xc}$ 、 $\Psi_{yc}$  及  $W_c$  滿足幾何邊界條件。

若考慮簡支承，則可表示成

$$f_x(x, y) = y(BL - y) \quad (2.24a)$$

$$f_y(x, y) = x(AL - x) \quad (2.24b)$$

$$f_w(x, y) = xy(AL - x)(BL - x) \quad (2.24c)$$

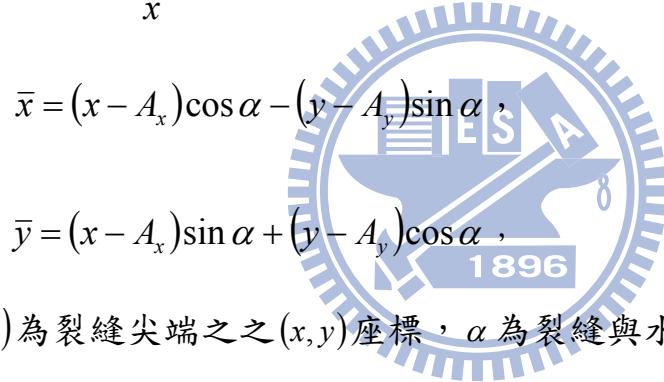
式(2.23)之函數集稱為“邊緣裂縫函數”。取式(2.23)中  $\bar{N}_{1k} = \bar{N}_{2k} = \bar{N}$  ( $k = 1, 2, 3$ )。將式(2.16)與式(2.23)代回式(2.15)，可得到  $3(I \times J + \bar{N}(\bar{N} + 3))$  條對應於待定係數  $a_{ij}$ 、 $\bar{a}_{ij}$ 、 $\tilde{a}_{ij}$ 、 $b_{ij}$ 、 $\bar{b}_{ij}$ 、 $\tilde{b}_{ij}$ 、 $c_{ij}$ 、 $\bar{c}_{ij}$ 、 $\tilde{c}_{ij}$  之線性代數方程式。

以上所定義之  $\Psi_{xc}(r, \theta)$ 、 $\Psi_{yc}(r, \theta)$  與  $W_c(r, \theta)$  皆以極座標(可參考圖 2.3)表示之，其中卡式座標  $(x, y)$  與極座標  $(r, \theta)$  之轉換關係如下：

$$r = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}, \quad (2.25)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\bar{y}}{\bar{x}}, \quad (2.26)$$

其中， $\bar{x} = (x - A_x) \cos \alpha - (y - A_y) \sin \alpha$ ， $\bar{y} = (x - A_x) \sin \alpha + (y - A_y) \cos \alpha$ ， $(A_x, A_y)$  為裂縫尖端之  $(x, y)$  座標， $\alpha$  為裂縫與水平軸之夾角。



## 2.4 收斂性分析

數學上，無限多項之允許函數構成一完備函數集合；當使用夠多的允許函數時，利用 Ritz 法求得之解當能收斂至真解。於收斂性分析中，首先分析薄板 ( $h/b = 0.01$ ) 之振動頻率，並與文獻值比較，以驗證本研究所提允許函數的正確性；接著進一步探討邊緣裂縫函數項數對數值收斂之影響。

本文之數值解乃利用 Fortran 程式語言，為求其精確之收斂解，以 128-bit 之變數撰寫電腦程式。所得之數值結果僅列出前五個模態之無因次化之自然振動頻率值  $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ ，而其中所使用之參數，波松比 ( $\nu$ ) 取為 0.3，剪

力修正因子為  $\frac{\pi^2}{12}$ 。 $a$ 、 $b$ 、 $c_x$ 、 $c_y$ 、 $d$  等幾何參數定義於圖 2.1 與圖 2.2 中。

表 2.1~2.3 為具不同長度水平邊緣裂縫之簡支矩形薄板 ( $a/b = 2, c_y/b = 0.5, d/a = 0.2, 0.6, 0.8, h/b = 0.01$ ) 的自然振動頻率收斂性分析。使用之允許函數乃依式 (2.16) 與式 (2.23) 所定義者。表中第一欄代表振態數， $S$  及  $A$  分別表示對稱與反對稱之振動模態。文獻之結果乃利用古典板理論所得者，其中 Stahl 和 Keer (1972) 精準地求解 Fredholm 積分方程；Liew 等人 (1994) 則是使用  $19 \times 9$  項正交多項式函數於各切割區域，並以積分方式強制各區域連結處之位移與斜率連續，然而這樣的方式並無法滿足位移及斜率處處連續。由於 Liew 等人 (1994) 之解無法滿足無裂縫處位移及斜率處處連續之條件，因此他們的解無法保證從上限收斂至真值。

表 2.1 中顯示裂縫長度與長邊比為  $d/a = 0.2$  時之結果。在各模態首列是未加入任何裂縫函數 ( $\bar{N} = 0$ ) 所得的無因次化頻率，可發現只使用多項式函數，無因次化頻率雖可收斂，但此收斂值只是“無裂縫”矩形板的收斂頻率，因此單使用多項式函數並無法知道裂縫之存在。將式 (2.23) 之裂縫函數加入允許函數時可發現，隨著裂縫函數項數提高所得到的結果也逐漸與文獻值接近。當  $I = J = 7$  及  $\bar{N} = 6$  (總項數 309) 時，可達至少 3 位有效位數之收斂值。

觀察表 2.1~表 2.3 之收斂頻率，可發現隨裂縫長度增加，所需之裂縫函數項數也必須提高，方可達到至少三位有效位數之收斂；另外可發現其

收斂的數值結果皆低於 Stahl 和 Keer (1972) 解析解，因為 Stahl 和 Keer (1972) 探討之問題是架構在薄板理論下，相對於 Mindlin 一階板理論會有高估自然振動頻率的現象。

以上結果確認本研究所提解法之正確性。將其進一步用於中厚板 ( $h/b = 0.1$ ) 之收斂分析，表 2.4 與表 2.5 為不同邊界條件下（簡支、懸臂）矩形中厚板之收斂結果；觀察可發現，當多項式項數  $I = J = 9$ ，角函數項數  $\bar{N} = 7$  時，前五個振態皆可達 3 位，甚至 4 位有效位數收斂。

## 2.5 數值結果

於 2.3 節已經驗證加入裂縫函數確實能有效描述裂縫存在，因此本節將其應用於分析具有邊緣裂縫之矩形厚板，討論在不同邊界條件和裂縫位置、角度及長度下，對振動行為的影響。其中允許函數項數之取法，乃根據表 2.4 與表 2.5 之收斂探討，取法如下：當裂縫長度  $d/a \geq 0.3$  時，取  $I = J = 9$  與  $\bar{N} = 8$ （總項數為 507 項），當裂縫長度  $d/a < 0.3$  時，取  $I = J = 9$  與  $\bar{N} = 7$ （總項數為 453 項）。表中列出前五個模態之無因次化頻率值，依簡化之收斂探討可確認所得之解至少準確至三位有效數字。所有結果均針對  $h/b = 0.1$  及  $\nu = 0.3$  之矩形板。

表 2.6 為具有邊緣裂縫四邊簡支承 (SSSS) 方形板之無因次化振動頻率；表 2.7 為其無因次化頻率折減量比，其定義為：

$$\Delta \omega = \frac{\omega_{\text{無裂縫}} - \omega_{\text{裂縫}}}{\omega_{\text{無裂縫}}} ;$$

其中， $\omega_{\text{無裂縫}}$  為完整板無因次化頻率值， $\omega_{\text{裂縫}}$  為具裂縫板之無因次化頻率值。

表 2.6 考慮不同裂縫位置 ( $c_y/b = 0.5$  與  $0.75$ )、角度 ( $\alpha = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ )、裂縫長度 ( $d/a = 0.1 \sim 0.6$ ) 與厚度 ( $h/b = 0.1$ ) 之影響。觀察表 2.6 與表 2.7 可發現以下現象

(1) 將無裂縫板 ( $d/a = 0$ ) 之結果與 S. Hosseini-Hashemi 等 (2005) 利用 Mindlin 板理論所得之解析解做比較，可發現所得結果最少可達到四位有效位數相同。

(2) 當裂縫長度增加時，無因次化頻率隨之下降；此乃裂縫長度增加，將導致板勁度降低之故。當  $d/a = 0.1$ ，各案例之頻率折減量比  $\Delta\omega$  皆小於 1%，表示裂縫較短時，各模態頻率值受裂縫引起的改變很小，勁度降低量較不明顯。

(3) 比較水平裂縫隨位置 ( $c_y/b = 0.5$  與  $0.75$ ) 對頻率值之影響，發現當  $d/a \geq 0.5$  時， $c_y/b = 0.5$  之前兩模態之頻率折減量比  $\Delta\omega$  較  $c_y/b = 0.75$  者大，而第三~第五模態則呈現相反趨勢。

(4) 觀察各模態頻率值隨角度增加 ( $\alpha = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ ) 之變化情形。發現當角度為  $30^\circ$  時，第一模態頻率相較其他角度有較小之頻率 ( $\Delta\omega$  較大)。此外，各案例頻率最大值，除第二模態，大部分集中在  $\alpha$  為  $0^\circ$  或  $45^\circ$ 。

表 2.8 為具頂部裂縫簡支 (SSSS) 矩形板 ( $a/b=2$ ) 之無因次化頻率，表 2.9 為其頻率折減量比，其中列出了不同裂縫角度 ( $\alpha=90^\circ$  與  $135^\circ$ ) 與位置 ( $c_x/a=0.25$  與  $0.5$ ) 之影響。觀察表 2.8 與表 2.9 可發現

(1) 不同裂縫位置 ( $c_x/a=0.25$ 、 $0.5$  且  $\alpha=90^\circ$ ) 對頻率之影響：當裂縫較長時 ( $d/b \geq 0.3$ )，位於  $c_x/a=0.5$  之第一與第五模態頻率值比位於  $c_x/a=0.25$  來的大，其餘模態則無明顯趨勢。

(2) 不同裂縫角度 ( $\alpha=90^\circ$ 、 $135^\circ$  且  $c_x/a=0.25$ ) 之影響：當  $\alpha=90^\circ$  且裂縫長度  $d/b \leq 0.5$  時，第一、四模態之頻率折減量比  $\Delta\omega$  較  $\alpha=135^\circ$  者大，而第二模態則呈現相反趨勢。

表 2.10 為具有邊緣裂縫懸臂 (CFFF) 方形板之無因次化頻率，表 2.11 為其頻率折減量比。觀察表 2.10 與 2.11 可發現以下現象

(1) 比較水平裂縫在不同位置 ( $c_y/b=0.5$  與  $0.75$ ) 情況下，其頻率值變化之情形，發現第一模態變化並無明顯差距，而當裂縫位置在  $c_y/b=0.5$  時，第二、四及五模態之頻率折減量比  $\Delta\omega$  較  $c_y/b=0.75$  者大，第三模態則呈現相反趨勢。與簡支承方形板之結果 (參看表 2.6) 比較，可發現，不論是簡支承或懸臂支承，當裂縫位置由  $c_y/b=0.5$  移至  $c_y/b=0.75$  時，第一模態並不會因位置的變化，造成頻率折減量比  $\Delta\omega$  有較大的改變；而第五模態，在懸臂支承之頻率折減量比  $\Delta\omega$  將

隨著位置由  $c_y/b = 0.5$  移至  $c_y/b = 0.75$  而跟著下降，簡支承則呈現相反趨勢。

(2) 比較不同角度下 ( $\alpha = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$  且  $c_y/b = 0.75$ ) 各模態頻率之大小。可發現第一模態最大值大部份都發生在  $\alpha = 0^\circ$  之時，第二模態最大值則發生在  $\alpha = 45^\circ$ 。同時觀察表 2.6 與 2.10，發現 SSSS 與 CFFF 裂縫板在第一、三、四及五模態的頻率最大值，大部分集中在  $\alpha$  為  $0^\circ$  或  $45^\circ$ 。

(3) 觀察各模態頻率值隨角度增加 ( $\alpha = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$  且  $c_y/b = 0.75$ ) 之變化情形。首先固定裂縫長度  $d/a = 0.2$ ，發現第一模態隨著角度增加而下降，第二、四與五模態隨著角度增加而上升。若固定裂縫長度  $d/a = 0.6$  時，發現第一、三模態隨著角度增加而下降，第二與五模態隨著角度增加而上升。比較簡支承 (表 2.6) 可發現在當裂縫長度  $d/a = 0.2$  時，第四模態頻率值同樣隨著角度增加而上升，但簡支承在第二與五模態則呈現相反趨勢；而  $d/a = 0.6$  時，只有在第五模態同樣隨著角度增加而上升。

表 2.12 為具有頂部裂縫懸臂 (CFFF) 方形板之無因次化頻率，表 2.13 為其頻率折減比。考慮不同裂縫位置 ( $c_x/b = 0.25, 0.5$  及  $0.75$ )、角度 ( $\alpha = 90^\circ, 30^\circ$  及  $60^\circ$ ) 與長度 ( $d/a = 0.1 \sim 0.6$ )，觀察表 2.12 與表 2.13 可發現以下現象：

(1) 比較垂直裂縫 ( $\alpha = 90^\circ$ ) 在不同位置 ( $c_x/b = 0.25, 0.5$  及  $0.75$ ) 上之模

態頻率；固定裂縫為  $d/a = 0.2$  時，發現  $c_x/b = 0.75$  之前三個模態有最大值，四、五模態有最小值，而  $c_x/b = 0.25$  在一、二模態有最小值，第四模態有最大值；固定裂縫為  $d/a = 0.6$  時，發現  $c_x/b = 0.75$  之第一、二及五模態有最大值，四模態有最小值，而  $c_x/b = 0.25$  在一、二及五模態有最小值，第四模態有最大值。因此可知當頂部裂縫之位置越接近懸臂端時，第一、二及五模態頻率值將逐漸下降，第四模態則呈現相反趨勢。

- (2) 比較各模態頻率值在不同角度下( $\alpha = 30^\circ$ 、 $60^\circ$ 、 $90^\circ$  且  $c_x/b = 0.75$ )之變化情形。固定裂縫長度為  $d/a = 0.2$ ，發現最大值都發生在  $\alpha = 30^\circ$ ；接著固定裂縫長為  $d/a = 0.6$ ，除第一模態，最大值發生在  $\alpha = 90^\circ$  外，其餘皆發生在  $\alpha = 30^\circ$ 。可知各模態（除第一模態）頻率值將隨角度越偏向懸臂端而增加。
- (3) 觀察方形板頂部垂直裂縫(表 2.12 且  $c_x/a = 0.5$ )與邊緣水平裂縫(表 2.10 且  $c_y/b = 0.5$ )。發現表 2.10 中第二、四與五模態頻率折減量比  $\Delta\omega$  較表 2.12 來的高。
- (4) 比較表 2.10 與 2.12 中  $\alpha = 30^\circ$  者，發現表 2.10 中除第一模態頻率折減量比  $\Delta\omega$  隨裂縫長度增加( $d/a = 0.1 \sim 0.6$ )幅度明顯較小(2.57%)外，其於模態降幅皆大於表 2.12 者。即裂縫交於板之  $x = a$  處者似乎較

$y=b$  者受裂縫增加之影響較為顯著。

表 2.14 為具有頂部裂縫懸臂 (CFFF) 矩形板 ( $a/b=2$ )，表 2.15 為其折減量比，考慮不同裂縫位置 ( $c_x/b=0.25$ 、 $0.5$  及  $0.75$ )、角度 ( $\alpha=90^\circ$  與  $135^\circ$ ) 與長度 ( $d/a=0.1 \sim 0.6$ )。觀察表 2.14 與表 2.15 可發現以下現象：.

(1) 比較不同裂縫角度 ( $\alpha=90^\circ$ 、 $135^\circ$  且  $c_x/b=0.25$ ) 之影響。當  $\alpha=90^\circ$  時，除第三模態，其餘各模態頻率折減量比  $\Delta\omega$  皆較  $\alpha=135^\circ$  來高。即裂縫角度越遠離懸臂端時 ( $\alpha=135^\circ$ )，對振動模態 (第三模態除外) 之影響將隨之降低。

(2) 觀察垂直 ( $\alpha=90^\circ$ ) 裂縫在不同位置 ( $c_x/a=0.25$  與  $0.5$ ) 對頻率之影響。當位於  $c_x/a=0.25$  時其前兩個模態頻率折減量比  $\Delta\omega$  較  $c_x/a=0.5$  大，其餘則呈現相反趨勢。

(3) 將表 2.14 與簡支矩形裂縫板 (表 2.8) 做比較，可發現在不同邊界條件下，懸臂支承隨裂縫增加 ( $d/a=0.1 \sim 0.6$ ) 的頻率折減量比  $\Delta\omega$ ，多數皆較簡支大。因此裂縫增加導致勁度下降之影響於懸臂邊界條件有較明顯的趨勢。

表 2.16 為四邊皆為自由端 (FFFF) 之方形板，表 2.17 為其折減量比，考慮不同裂縫位置 ( $c_y/b=0.5$  與  $0.75$ )、角度 ( $\alpha=0^\circ$ 、 $15^\circ$ 、 $30^\circ$ 、 $45^\circ$ ) 與長度 ( $d/a=0.1 \sim 0.6$ )。觀察表 2.16 與表 2.17 可發現以下現象：

(1) 考慮裂縫位置 ( $c_y/b = 0.5$  與  $0.75$ ) 對頻率值之影響，發現裂縫位於中央 ( $c_y/b = 0.5$ ) 時，其頻率折減量比  $\Delta\omega$ ，在第一、二及五模態，比裂縫位於  $c_y/b = 0.75$  時要高。而比較不同邊界條件下 (表 2.6、表 2.10 及表 2.16) 因為位置不同頻率之變化，可發現第一模態因位置改變在四邊自由端時，有較大差異；另外四邊自由端與懸臂支承在第二與五模態，當位置由  $c_y/b = 0.5$  移至  $c_y/b = 0.75$  時，頻率折減量比  $\Delta\omega$  將跟著降低。

(2) 比較當裂縫角度不同 ( $\alpha = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$  且  $c_y/b = 0.75$ ) 時頻率之變化；若固定裂縫長度  $d/a = 0.2$ ，第一、三及四模態頻率最大值發生在  $\alpha = 45^\circ$  者，而在二與五模態最大值則發生在  $\alpha = 0^\circ$ 。若固定裂縫長度  $d/a = 0.6$ ，第二、四與五模態最大值在  $\alpha = 0^\circ$ ，其餘第一與三模態最大值則分別在  $\alpha = 45^\circ$  與  $\alpha = 15^\circ$ 。綜合比較表 2.6、表 2.10 與表 2.16，可發現前五個模態最大值，大部份集中在  $\alpha = 0^\circ$  與  $\alpha = 45^\circ$ 。

(3) 將表 2.16 與簡支方形裂縫板 (表 2.6) 和懸臂方形裂縫板 (表 2.10) 做比較。其中懸臂方形裂縫板除第一模態頻率折減量比  $\Delta\omega$  ( $0.06\%$ ) 較小外，其餘第二～第五模態頻率折減量比  $\Delta\omega$  皆大於另外兩種邊界條件。而簡支方形裂縫板中，第二～四模態頻率折減量比  $\Delta\omega$  則皆較表 2.10 與表 2.16 小。可知因裂縫增加導致勁度下降之影響於懸臂邊界條件有較明顯之趨勢，簡支承相較於其他邊界下降幅度不明顯。

圖 2.4 為具有邊緣裂縫簡支方形板之模態圖（圖中虛線為位移=0 之節點線 (nodal line)），其中僅列出表 2.6 中  $d/a=0.2$  與  $0.6$  之圖形。觀察之現象如下：

- (1) 當裂縫位於中間 ( $c_y/b=0.5$ ) 且為水平 ( $\alpha=0^\circ$ ) 時，可發現其自由振動之模態圖皆為對稱或反對稱於裂縫軸 ( $y=b/2$ )。
- (2) 觀察  $c_y/b=0.75$  之圖形與  $c_y/b=0.5$  比較之，當裂縫移至  $c_y/b=0.75$  時，因為其幾何逐漸失去原有之對稱性，節點線亦出現較多扭曲之形式。觀察  $d/a=0.2$  第四模態，發現原兩相交垂直節點線產生分離。
- (3) 觀察圖形隨角度 ( $\alpha=0^\circ$ 、 $15^\circ$ 、 $30^\circ$ 、 $45^\circ$  且  $c_y/b=0.75$ ) 之變化情形。  
 $d/a=0.2$  者第一~四模態圖皆為相似，而第五模態有明顯差異；而  $d/a=0.6$  者圖形受角度影響之變化愈趨明顯，其中第四與第五模態圖形有較大差異。

圖 2.5 為具有頂部裂縫簡支矩形板 ( $a/b=2$ ) 之模態圖，裂縫與  $y=b$  相交，其中僅列出表 2.8 中  $d/b=0.2$  與  $0.6$  之圖形。可觀察到：

- (1) 當裂縫長度較短時 ( $d/b=0.2$ )，第一~四模態變化與無裂縫之模態相當類似，第五模態則因裂縫產生而有較大差異。
- (2) 由於四個邊皆為簡支承 (SSSS)，因此將裂縫位於  $c_x/a=0.5$  之結果

轉  $90^\circ$ ，與圖 2.4 位置  $c_y/b = 0.5$  之結果做比較；首先固定裂縫長度為  $d/a = 0.2$  發現，其前兩個模態類似，方形板第三個模態也與矩形板第四個模態相近；當裂縫長度增加為  $d/a = 0.6$  時，發現前兩個模態一樣相當類似，而方型板第三模態則與矩形板第五模態類似。

圖 2.6 為具有邊緣裂縫懸臂方形板之模態圖(其中虛線為位移=0 之連線)，其中僅列出表 2.10 中  $d/a = 0.2$  與  $0.6$  之圖形。觀察之現象如下：

(1) 當水平裂縫位於  $c_y/b = 0.5$  時，該板幾何對稱於  $y = b/2$ ，故其節點線呈現對稱與反對稱形式。

(2) 觀察圖形隨裂縫角度之變化( $0^\circ$ 、 $15^\circ$ 、 $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 且  $c_y/b = 0.75$ )。發現裂縫較短 ( $d/a = 0.2$ ) 者各模態圖形皆為相似；裂縫較長 ( $d/a = 0.6$ ) 者，當角度為  $45^\circ$  時與其他角度有較明顯之差異。

圖 2.7 為具有頂部裂縫懸臂方形板之模態圖(其中虛線為位移=0 之連線)，其中僅列出表 2.12 中  $d/a = 0.2$  與  $0.6$  之圖形。觀察之現象如下：

(1) 比較裂縫在不同位置 ( $c_x/a = 0.25$ 、 $0.5$  及  $0.75$ ) 其模態圖之變化。當裂縫長度較短 ( $d/a = 0.2$ ) 時，前三個模態圖形皆相類似，第四模態有較明顯之差異，而第五模態則是在裂縫靠近固定端時 ( $c_x/a = 0.25$ ) 才有較大之變化。

(2) 觀察圖形隨裂縫角度之變化( $30^\circ$ 、 $60^\circ$ 、 $90^\circ$ 且  $c_x/a = 0.75$ )。當裂縫較

短 ( $d/a = 0.2$ ) 時，除第四模態有較大之差異，其餘各模態圖形皆為相似；而裂縫較長 ( $d/a = 0.6$ ) 者，當裂縫垂直 ( $\alpha = 90^\circ$ ) 時，第二、三模態，相較其他角度有較明顯差異。例如：在第二模態當裂縫垂直時，節點線會被分割成兩條。

圖 2.8 為具有頂部裂縫懸臂矩形板 ( $a/b = 2$ ) 之模態圖，其中僅列出表 2.14 中  $d/a = 0.2$  與  $0.6$  之圖形。觀察之現象如下：

- (1) 將矩形板垂直裂縫位於  $c_x/a = 0.5$  之模態圖，與方型板（圖 2.7）裂縫在同樣位置之模態做比較，發現固定長度  $d/a = 0.2$  時，前三個模態類似，而方形板第五模態則與矩形板第四模態類似；當長度  $d/a = 0.6$ ；前三個模態相類似，其餘有較大之差異。
- (2) 比較圖 2.8 與圖 2.5 中  $c_y/b = 0.5$  之水平裂縫圖形。圖 2.5 由於幾何邊界之對稱亦使其節點線型式簡單且多為直線，而圖 2.8 者則出現較多曲線形式。

圖 2.9 為具有四邊皆為自由端之方形板模態圖，其中僅列出表 2.16 中  $d/a = 0.2$  與  $0.6$  之圖形。觀察之現象如下：

- (1) 當裂縫位於中間 ( $c_y/b = 0.5$ ) 且為水平 ( $\alpha = 0^\circ$ ) 時，可發現其自由振動之模態圖皆為對稱或反對稱於裂縫軸 ( $y = b/2$ )。當裂縫長度由  $d/a = 0.2$  增加到  $d/a = 0.6$  時，只有在第五模態差異較小。

(2) 觀察圖形隨裂縫角度之變化( $\alpha = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$  且  $c_y/b = 0.75$ )。發現裂縫較短 ( $d/a = 0.2$ ) 者，第一模態隨著角度增加兩條曲線分離將較明顯，其餘各模態差異不大；其中值得注意的是第一模態水平裂縫者 ( $\alpha = 0^\circ$ )，其節點線並非兩條相交之線。

(3) 比較不同邊界條件（圖 2.4、圖 2.6 及圖 2.9）中  $c_y/b = 0.5$  之水平裂縫圖形。在簡支稱與懸臂邊界條件下第一模態並沒有節點線產生，而在四邊自由端的情況下，將會有節點線的出現。觀察各模態變化也可發現，在四邊沒有束制的情況下，其模態圖較為複雜。

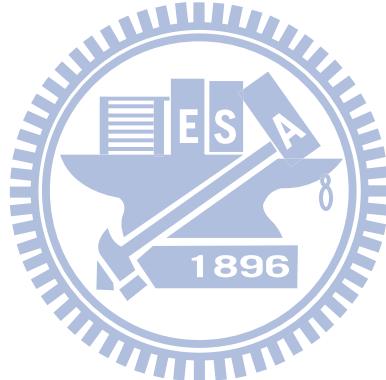
## 2.6 厚度效應

厚度效應中，將允許函數用於分析不同厚度 ( $h/b = 0.002, 0.01, 0.05$  及  $0.1$ ) 與位於  $c_y/b = 0.5$  之水平裂縫 ( $d/a = 0, 0.2, 0.4$  及  $0.6$ ) 方形板，表 2.18 與表 2.19 列出邊界條件為簡支與懸臂之結果，其中 [ ] 之值為 Huang 與 Leissa (2009)，利用古典板理論所得結果。

- (1) 厚寬比為  $h/b = 0.002$  時，本研究所得無因次化頻率與文獻值所得之值非常接近。
- (2) 隨厚度增加，其無因次化頻率將隨之下降，此乃因無因次化頻率中含  $(\frac{1}{h})$  之項。
- (3) 觀察表 2.18 與表 2.19 比較不同厚度情況下，Mindlin 板理論與古典板理論之相對差異，可發現當厚度  $h/b = 0.002$  與  $h/b = 0.01$  時，相對古典板

理論誤差分別小於 0.06% 與 0.52% , 厚度增加為  $h/b = 0.05$  時誤差則介於 0.37%~5.82% ; 但如果厚度  $h/b = 0.1$  , 其誤差則高達 1.21%~14.62% 。其中表 2.18 誤差最大值大部分發生在第五模態；表 2.19 誤差最大值在  $d/a \leq 0.2$  時大部分發生在第五模態，但當  $d/a \geq 0.4$  時，誤差最大值則集中於第三模態；因此由以上討論可知 Mindlin 板理論對於分析厚板，有其重要性。

(4) 比較表 2.18 與表 2.19 不同邊界情況下，其相對古典板理論的誤差；可發現簡支承因厚度增加其誤差要比懸臂支承來的明顯。



### 第三章 具內部裂縫矩形 Mindlin 板之振動分析

本章旨在分析具有內部裂縫之懸臂與簡支矩形 Mindlin 板的振動(參考圖 3.1)。由於內部裂縫具有兩個裂縫尖端，因此本章將修正前章所示之裂縫函數 ( $\Psi_{xc}$ 、 $\Psi_{yc}$  及  $W_c$ )，同樣先將修正過之裂縫函數用於分析薄板 ( $h/b = 0.01$ )，與文獻中薄板理論所得者比較以確認解之正確性，再探討不同邊界條件之裂縫長度、位置、角度等參數對振動行為之影響。

#### 3.1 允許函數之建構

類似於具邊緣裂縫板之解，具內部裂縫板所使用之允許函數亦表示成：

$$\Psi_x(x, y) = \Psi_{xp}(x, y) + \Psi_{xc}^*(r, \theta) \quad (3.1a)$$

$$\Psi_y(x, y) = \Psi_{yp}(x, y) + \Psi_{yc}^*(r, \theta) \quad (3.1b)$$

$$W(x, y) = W_p(x, y) + W_c^*(r, \theta) \quad (3.1c)$$

其中， $\Psi_{xp}(x, y)$ 、 $\Psi_{yp}(x, y)$  與  $W_p(x, y)$  同式 (2.16)； $\Psi_{xc}^*(r, \theta)$ 、 $\Psi_{yc}^*(r, \theta)$  與  $W_c^*(r, \theta)$  為描述內部裂縫尖端應力奇異性與裂縫處位移和斜率不連續現象之函數，以幫助 Ritz 法辨識裂縫之存在，此些函數取為

$$\begin{aligned} \Psi_{xc}^*(r, \theta) &= f_x(x, y) \{ \sum_{n=1}^{\bar{N}_{11}-1} \sum_{l=0}^n \bar{a}_{ij}^{(A)} r_1^{(2n-1)/2} \cos \frac{2l+1}{2} \theta_1 + \sum_{n=1}^{\bar{N}_{11}-2} \sum_{l=0}^n \bar{a}_{ij}^{(B)} r_2^{(2n-1)/2} \cos \frac{2l+1}{2} \theta_2 \\ &+ r_2^\beta \sin^2(\theta_2/2) \sum_{n=1}^{\bar{N}_{21}-1} \sum_{l=0}^n \tilde{a}_{ij}^{(A)} r_1^{(2n-1)/2} \sin \frac{2l+1}{2} \theta_1 + r_1^\beta \sin^2(\theta_1/2) \sum_{n=1}^{\bar{N}_{21}-2} \sum_{l=0}^n \tilde{a}_{ij}^{(B)} r_2^{(2n-1)/2} \sin \frac{2l+1}{2} \theta_2 \} \end{aligned} \quad (3.2a)$$

$$\Psi_{yc}^*(r, \theta) = f_y(x, y) \{ r_2^\beta \sin^2(\theta_2/2) \sum_{n=1}^{\bar{N}_{12}-1} \sum_{l=0}^n \bar{b}_{ij}^{(A)} r_1^{(2n-1)/2} \cos \frac{2l+1}{2} \theta_1$$

$$\begin{aligned}
& + r_1^\beta \sin^2(\theta_1/2) \sum_{n=1}^{\bar{N}_{12-2}} \sum_{l=0}^n \bar{b}_{ij}^{(B)} r_2^{(2n-1)/2} \cos \frac{2l+1}{2} \theta_2 \\
& + \sum_{n=1}^{\bar{N}_{22-2}} \sum_{l=0}^n \tilde{b}_{ij}^{(A)} r_1^{(2n-1)/2} \sin \frac{2l+1}{2} \theta_1 + \sum_{n=1}^{\bar{N}_{22-2}} \sum_{l=0}^n \tilde{b}_{ij}^{(B)} r_2^{(2n-1)/2} \sin \frac{2l+1}{2} \theta_2 \}
\end{aligned} \quad (3.2b)$$

$$\begin{aligned}
W_c^*(r, \theta) = f(x, y) \{ & \sum_{n=1}^{\bar{N}_{13-1}} \sum_{l=0}^n \bar{c}_{ij}^{(A)} r_1^{(2n-1)/2} \cos \frac{2l+1}{2} \theta_1 + \sum_{n=1}^{\bar{N}_{13-2}} \sum_{l=0}^n \bar{c}_{ij}^{(B)} r_2^{(2n-1)/2} \cos \frac{2l+1}{2} \theta_2 \\
& + r_2^\beta \sin^2(\theta_2/2) \sum_{n=1}^{\bar{N}_{23-1}} \sum_{l=0}^n \bar{c}_{ij}^{(A)} r_1^{(2n-1)/2} \sin \frac{2l+1}{2} \theta_1 + r_1^\beta \sin^2(\theta_1/2) \sum_{n=1}^{\bar{N}_{23-2}} \sum_{l=0}^n \bar{c}_{ij}^{(B)} r_2^{(2n-1)/2} \sin \frac{2l+1}{2} \theta_2 \}
\end{aligned} \quad (3.2c)$$

其中座標系統  $(r_1, \theta_1)$  與  $(r_2, \theta_2)$  之原點分別定於裂縫兩端點（參看圖 3.1）。

式 (3.2) 中，由於  $\sin\left(\frac{2l+1}{2}\theta_1\right)$  在  $\theta_1 = \pm\pi$  時（圖 3.2 中  $\overline{1B}$  線段）並不連續，造成圖 3.2 中  $\overline{2B}$  線段不連續，此在真解是不被允許地，因此於  $\sin\left(\frac{2l+1}{2}\theta_1\right)$  項乘上  $\sin^2(\theta_2/2)$  以保證於  $\theta_2 = 0$  時（圖 3.2 中  $\overline{2B}$  線段）為連續的。另外  $\sin^2(\theta_2/2)$  對稱於  $\theta_2 = 0$ ，乘上  $\sin^2(\theta_2/2)$  並不會改變  $\sin\left(\frac{2l+1}{2}\theta_1\right)$  的對稱性，故  $\sin^2(\theta_2/2) \sin\left(\frac{2l+1}{2}\theta_1\right)$  依舊為反對稱於含裂縫之直線。但是，由於  $\sin^2(\theta_2/2)$  函數之一階導函數於  $r_2 = 0$  具  $1/r_2$  之奇異性，因此另外乘上一函數  $r_2^\beta$ ，其中取  $\beta \geq 0.5$  以避免該一階導數造成裂縫尖端處不對之奇異特性。同理，對  $\sin\left(\frac{2l+1}{2}\theta_2\right)$  項做類似之處理。當取  $\beta > 1$  時，則  $r_2^\beta \sin^2(\theta_2/2)$  或  $r_1^\beta \sin^2(\theta_1/2)$  之一階微分不會於  $r_2 \rightarrow 0$  或  $r_1 \rightarrow 0$  處產生奇異性，故在本研究取  $\beta = 1.5$ ，讓裂縫尖端處之應力奇異行為主要由雙疊加符號內之函數來描述。

## 3.2 收斂性分析

本節首先分析薄板 ( $h/b=0.01$ ) 之振動頻率，並將結果與文獻比較，驗證上節所提允許函數的可行性及正確性；接著探討內部裂縫函數項數對數值收斂的影響。為方便計算，取式 (2.6) 之項數  $I=J$ ，式 (3.2) 之項數  $\bar{N}_{1k\_1} = \bar{N}_{1k\_2} = \bar{N}_{2k\_1} = \bar{N}_{2k\_2} = \bar{N}$  ( $k=1, 2, 3$ )；如此可得允許函數總項數為  $3(I \times J + 2\bar{N}(\bar{N} + 3))$  項。幾何參數定義於圖 3.1，其中  $a$ 、 $b$  為板之長寬， $d$  與  $\alpha$  分別為裂縫長度與角度， $(x_0, y_0)$  為裂縫中心點所在位置。

表 3.1 為具水平中心內部裂縫簡支方形薄板 ( $a/b=1, x_0/a=0.5, y_0/b=0.5, d/a=0.6, h/b=0.01$ ) 之收斂性分析。在不使用裂縫函數的情況下（即  $\bar{N}=0$ ），所得收斂頻率乃無裂縫板之結果。相反地，若一味增加裂縫函數項數，且只用少數多項式函數，亦無法得到精確之收斂解；例如，當裂縫函數項數採用  $\bar{N}=8$  時，可發現多項式函數項數在  $I=J=5$  之第四與五模態頻率值與實際收斂值有較明顯差異。隨多項式函數與裂縫函數項數增加，當  $I=J=8$  及  $\bar{N}=8$ （總項數 720）時，可達 3 位有效位數收斂。比較此收斂值與文獻之結果，可發現收斂之結果非常接近 Stahl 和 Keer (1972) 之結果，但稍小；其原因為 Stahl 和 Keer (1972) 之結果使用古典板理論上，而本文結果採用 Mindlin 板理論。古典板理論不考慮剪力變形，導致該理論所得之板振動頻率較剪力變形板理論所得者高。

經由表 3.1 之結果，可了解增加式 (3.2) 之內部裂縫函數於允許函數

中，將可有效描述內部裂縫存在。表 3.2 與表 3.3 考慮了不同水平中心內部裂縫長度 ( $d/a = 0.3, 0.6$ ) 簡支方形中厚板 ( $a/b = 1, x_0/a = 0.5, y_0/b = 0.5, h/b = 0.1$ ) 之收斂性分析；表 3.4 則同樣列出裂縫長度為  $d/a = 0.6$ ，但角度  $\alpha = 30^\circ$  之簡支方形中厚板收斂性。由表 3.2~表 3.4 可發現不論裂縫長度或角度為何，當項數使用  $I = J = 8$  及  $\bar{N} = 5$  (總項數 432) 時，即可達至少 3 位有效位數收斂。

表 3.5 則列出了具內部裂縫懸臂方形中厚板 ( $a/b = 1, x_0/a = 0.5, y_0/b = 0.5, d/a = 0.6, h/b = 0.1$ ) 之收斂性，同樣當項數使用  $I = J = 8$  及  $\bar{N} = 5$  (總項數 432) 時可達 3 位有效位數收斂。比較不同厚度下 (表 3.1 與表 3.3) 收斂的項數，可發現，隨厚度減少，所需的允許函數項數必須增加，方能達到準確之收斂解。

### 3.3 數值結果

在 3.2 節中已驗證使用式(3.2)之內部裂縫函數能描述內部裂縫的存在。於本節中，吾人將其用於分析具有內部裂縫之簡支與懸臂方形板，探討不同裂縫位置、角度及長度對振動行為之影響。根據收斂性分析之探討，為獲得至少三位有效數字之精度，依以下所示原則去允許函數：當  $d/a \leq 0.3$  時，取多項式函數集合  $I = J = 8$ ；及  $\bar{N} = 5$  之內部裂縫函數集合 (總項數 432 項)；若  $d/a \geq 0.4$  時，取多項式函數集合  $I = J = 8$ ，及  $\bar{N} = 6$  之內部裂縫函數集合 (總項數 516 項)；無裂縫板 ( $d/a = 0$ ) 則只取多項式函數為  $I = J = 10$  (總

項數 100 項)。所有結果均針對  $h/b = 0.1$  及  $\nu = 0.3$  之方形板。根據簡化收斂探討，可確認所得之解最少達三位有效。

表 3.6 與表 3.8 為具有內部裂縫簡支與懸臂方形板之無因次化頻率；表 3.7 與 3.9 分別為其無因次化頻率折減量比。其中考慮不同裂縫中心 ( $x_0/a = 0.5$  且  $y_0/b = 0.5$  與 0.75)、裂縫角度 ( $\alpha = 0^\circ$ 、 $15^\circ$ 、 $30^\circ$ 、 $45^\circ$ ) 與長度 ( $d/a = 0.1 \sim 0.6$ ) 之影響。觀察表 3.6~表 3.9 可發現

- (1) 頻率值因裂縫長度增加 ( $d/a = 0.1 \sim 0.6$ ) 而下降 (因勁度減小之故)。當裂縫長度較短 ( $d/a = 0.1$ ) 時，簡支方形板之前四個模態與懸臂方形板前五個模態之頻率折減量比  $\Delta\omega$  皆小於 1.1%，因此較無法從其頻率值判斷裂縫之存在。
- (2) 觀察表 3.7 之頻率折減量比  $\Delta\omega_{18}$ ，可發現第三模態者明顯小於其餘四個模態者；顯示內部裂縫對簡支方形板之第三模態影響較不明顯。
- (3) 觀察表 3.9，第四模態頻率折減量比  $\Delta\omega$  較其他模態來的大，顯示懸臂支承方形板之第四個模態對內部裂縫的存在較敏感。
- (4) 同時觀察表 3.7 與表 3.9 之頻率折減量比  $\Delta\omega$ ，可發現除第四模態者與  $\alpha \geq 30^\circ$  之第三模態者，整體來說，裂縫對簡支承板之影響要比懸臂支承者來的明顯。
- (5) 比較不同水平內部裂縫位置 ( $y_0/b = 0.5$  與 0.75) 對簡支板頻率值之影響 (參看表 3.7)：當裂縫長度  $d/a \leq 0.3$ ，且位置由  $y_0/b = 0.5$  向上移至

$y_0/b = 0.75$  時，第一、四與五模態頻率折減量比  $\Delta\omega$  將隨位置向上移動而下降，二與三模態則隨著上升；若裂縫長度增長至  $d/a \geq 0.5$  時，前三個模態頻率折減量比  $\Delta\omega$ ，將隨著裂縫位置上移而下降，四、五模態則隨著裂縫上移而上升。

(6) 比較不同水平內部裂縫位置 ( $y_0/b = 0.5$  與  $0.75$ ) 對懸臂方形板頻率值之影響 (參看表 3.9)：當水平裂縫位置由  $y_0/b = 0.5$  向上移至  $y_0/b = 0.75$  時，除第三模態外，其餘模態之折減量比  $\Delta\omega$  皆隨裂縫上移而下降。綜合 (5)、(6) 兩點之討論，可知若水平裂縫位置偏移矩形板中心時，對頻率折減之影響，於懸臂端較有規律；而簡支承則因裂縫長度不同，較無一致規律。

(7) 裂縫角度 ( $\alpha = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 145^\circ$ ) 對頻率值之影響：簡支方形板 (表 3.6) 之第一、三及四模態頻率隨角度增加而下降；懸臂方形板 (表 3.8) 之第一、三模態亦有相同趨勢。

(8) 比較簡支方形板水平內部 (表 3.6 中  $y_0/b = 0.5$  者) 與邊緣 (表 2.6 中  $c_y/b = 0.5$  者) 裂縫對頻率值之影響；當裂縫位於板邊緣 (表 2.6) 時，第一、二、五模態頻率值較大，而第三與第四模態則為相反。

(9) 比較懸臂方形板水平內部 (表 3.9 中  $y_0/b = 0.5$  者) 與邊緣 (表 2.11 中  $c_y/b = 0.5$  者) 裂縫對頻率值之影響；發現內部裂縫於第二～五模態頻率值皆較邊緣裂縫大；而邊緣裂縫因裂縫長度增加造成頻率下降也

較為明顯。

(10) 綜合第(8)與第(9)之討論，可知道，懸臂方形板對邊緣裂縫造成頻率下降的幅度要比內部裂縫明顯很多；而簡支承方形板變化較無一定之規律。

表3.10與表3.12分別列出在不同位置( $x_0/a=0.5$ 與 $x_0/a=0.25$ )懸臂矩形中厚板( $a/b=2, h/b=0.1$ )之無因次化頻率。表3.11與3.13分別為其無因次化頻率折減量比。其中考慮不同裂縫角度( $\alpha=0^\circ, 30^\circ, 90^\circ$ )與長度( $d/b=0.1\sim0.6$ )之影響。觀察表3.10~表3.13可發現

(1) 觀察表3.11之頻率折減量比 $\Delta\omega$ ，可發現除第三模態且 $\alpha=90^\circ$ 者明顯有較高之頻率折減比外，其餘各模態頻率折減比則相對較低；顯示當裂縫位於矩形板中心時( $x_0/a=0.5$ )，隨裂縫增加，頻率變化除第三模態且 $\alpha=90^\circ$ 者，其餘大部分不明顯。

(2) 觀察表3.13之頻率折減量比 $\Delta\omega$ ，可發現 $\alpha=90^\circ$ 之第一與第五模態頻率折減比明顯要高出其餘各模態；因此可知當裂縫位於 $x_0/a=0.25$ 時，隨裂縫長度增加，導致頻率之折減效應，除 $\alpha=90^\circ$ 之第一與第五模態較明顯外，其餘各模態則較不明顯。

(3) 比較表3.11與表3.13，裂縫在不同位置( $x_0/a=0.5, x_0/a=0.25$ )之頻率折減情況；若角度固定( $\alpha=0^\circ, 30^\circ, 90^\circ$ )，當裂縫位於 $x_0/a=0.25$ 時，在第一、二與五模態相較於 $x_0/a=0.5$ 有較高之頻率折減比，第三

模態呈現相反趨勢，第四模態則無一定之規律。

(4) 比較表 3.11 隨角度變化 ( $\alpha = 0^\circ, 30^\circ, 90^\circ$ ) 頻率折減比之變化，發現在第一、三與五模態將隨角度增加頻率折減比跟著增加，第四模態則呈現相反趨勢。

(5) 同樣觀察表 3.13 隨角度變化 ( $\alpha = 0^\circ, 30^\circ, 90^\circ$ ) 頻率折減比之變化，可發現在與表 3.11 相同，在第一、三與五模態頻率折減比隨角度增加而跟著增加，第四模態則呈現相反趨勢。因此可知位置改變 ( $x_0/a = 0.5$  移至  $x_0/a = 0.25$ ) 並不會影響各種角度對頻率值之變化。

(6) 比較具有內部與頂部裂縫懸臂矩形板之頻率折減比 (表 3.11、表 3.13 與表 2.15)。當考慮裂縫角度為  $\alpha = 90^\circ$  時，比較裂縫位於  $x_0/a = 0.5$  與  $c_x/a = 0.5$  之頻率折減變化，可發現裂縫位於  $c_x/a = 0.5$  之頻率折減比  $\Delta\omega$  在各模態皆比位於  $x_0/a = 0.5$  來的大；接著同樣比較  $\alpha = 90^\circ$ ，位於  $x_0/a = 0.25$  與  $c_x/a = 0.25$  之頻率折減變化，可發現  $c_x/a = 0.25$  之頻率折減比  $\Delta\omega$  較  $x_0/a = 0.25$  大。因此可知邊緣裂縫所造成之頻率折減量要比內部裂縫來的明顯。

圖 3.3 與圖 3.4 分別為具內部裂縫簡支與懸臂方形板的模態圖，僅列出表 3.5 與表 3.7 中，裂縫長度為  $d/a = 0.2$  與  $0.6$  之圖形，圖中模態側向位移等高線以實線表示，虛線則表示節點線 (側向位移為零)。可觀察到：

(1) 觀察圖 3.3，比較不同裂縫長度 ( $d/a = 0.2$  與  $0.6$ ) 對各模態之影響。

當裂縫位於  $y_0/b = 0.5$  時，不論裂縫角度為何 ( $\alpha = 0^\circ$ 、 $30^\circ$  及  $45^\circ$ )，可發現，不同長度的裂縫對前四個模態振形影響皆不明顯，但第五模態出現較大變化；而若水平裂縫位於  $y_0/b = 0.75$  時，其中不同長度的裂縫，對前三個模態振形較為不明顯，不過值得注意的是  $d/a = 0.2$  之第二模態的節點線，並非是一水平線，另外不同長度的裂縫對四、五模態則出現了較大之變化，其中  $d/a = 0.2$  之第四模態與  $d/a = 0.6$  之第五模態圖形似乎有互換的情況；

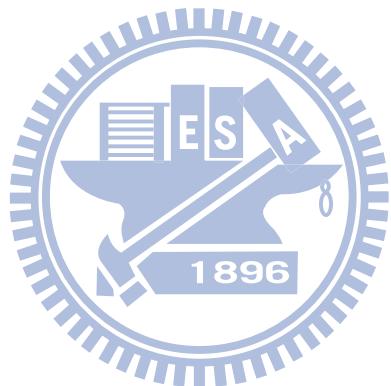
- (2) 觀察圖 3.4 不同裂縫長度 ( $d/a = 0.2$  與  $0.6$ ) 之變化。當裂縫長度由  $d/a = 0.2$  增至  $d/a = 0.6$  時，前四個模態中，除裂縫位於水平中心之第三、四模態者因裂縫改變而模態振形有較大改變之外，其餘因裂縫改變所造成的變化皆較不明顯。
- (3) 當裂縫位於對稱軸上且裂縫中心為  $(x_0/a, y_0/b) = (0.5, 0.5)$  時，其振動模態將呈現對稱與反對稱的情況。在圖 3.3 中  $\alpha = 0^\circ$  與  $45^\circ$  與圖 3.4 中  $\alpha = 0^\circ$  者，可看出此情況。
- (4) 觀察圖 3.3 第四模態與圖 3.4 第五模態。可發現當裂縫之存在破壞板之對稱性時，原本相交的兩條節線將呈現分離的情況。
- (5) 以水平內部裂縫且  $y_0/b = 0.5$  者為基準，將其與水平邊緣裂縫且  $c_y/b = 0.5$  者相比，觀察內部與邊緣裂縫模態圖的差異。在簡支承的情況下（圖 2.4 與圖 3.3），裂縫長為  $d/a = 0.2$  時，第一到第四模態類似，第五模態

有較大差異；而  $d/a = 0.6$ ，除第四模態，其餘皆類似。若為懸臂支承（圖 2.6 與圖 3.4），發現  $d/a = 0.2$ ，在各模態圖形皆相類似； $d/a = 0.6$  則是在第三、四及五模態，有明顯差異。

圖 3.5 與圖 3.6 分別為具不同位置 ( $x_0/a = 0.5$  與  $x_0/a = 0.25$ ) 之內部裂縫懸臂矩形板的模態圖；且僅列出表 3.10 與表 3.12 中，裂縫長度為  $d/b = 0.2$  與 0.6 之圖形，觀察可得：

- (1) 當裂縫之存在不會改變板之幾何對稱時，板之振動模態將呈現對稱與反對稱之型式；圖 3.5 與圖 3.6 中  $\alpha = 0^\circ$  與  $\alpha = 90^\circ$  有這樣之情況。
- (2) 觀察圖 3.5 與圖 3.6 之第四模態且  $\alpha = 30^\circ$  者，可發現當裂縫之存在破壞板之對稱時，原本相交的兩直線將呈現分離的情況。
- (3) 觀察圖 3.5，比較不同裂縫長度 ( $d/a = 0.2$  與  $d/a = 0.6$ ) 對各模態圖之影響，可發現不論裂縫角度為何 ( $\alpha = 0^\circ$ 、 $30^\circ$  及  $90^\circ$ )，不同長度的裂縫對前五的模態之變化不大。
- (4) 觀察圖 3.6，不同裂縫長度 ( $d/a = 0.2$  與  $d/a = 0.6$ ) 對各模態圖之影響，可發現不論裂縫角度為何 ( $\alpha = 0^\circ$ 、 $30^\circ$  及  $90^\circ$ )，不同長度的裂縫對前五的模態之變化均不明顯。因此由第 (3) 與第 (4) 可知內部裂縫長度增加，對矩形板之模態圖較無明顯的改變。
- (5) 將矩形板垂直裂縫位於 ( $x_0/a = 0.5$ ) 之模態圖（圖 3.5），與具頂部垂直裂縫且位於 ( $c_x/a = 0.5$ ) 之矩形板（圖 3.4）模態圖做比較，可發

現因頂部裂縫使得板失去對稱性，在裂縫長度較長時 ( $d/b = 0.6$ )，第四五模態出現很明顯的差異



## 第四章 結論與建議

### 4.1 結論

利用 Ritz 法求解含裂縫 Mindlin 板振動問題時，要能準確的求出自然振動頻率，必須使用適當的允許函數。根據本文之討論，Mindlin 板理論中之轉角 ( $\Psi_x$ 、 $\Psi_y$ ) 與側向位移 ( $W$ ) 的允許函數，可由多項式函數配合一組新的函數（裂縫函數）所構成，此新的函數除了能準確描述裂縫尖端的應力奇異性，並能符合裂縫處位移與轉角不連續特性。

為了更加有效率的使用所提之裂縫函數，本文分別針對了具有邊緣或內部裂縫之簡支與懸臂板，作大量的收斂行為探討；並將裂縫簡支矩形薄板 ( $h/b = 0.01$ ) 之收斂結果，與古典板理論架構下所得文獻結果相比，可發現收斂值與文獻值相當接近，因此進一步證實了本研究數值結果之正確性。

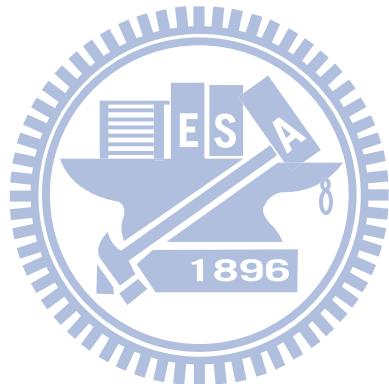
數值結果中，本文列出的無因次化頻率與模態圖，皆針對矩形中厚板 ( $h/b = 0.1$ ) 去分析，且分成邊緣裂縫與內部裂縫兩個部份（a）邊緣裂縫中，考慮了簡支承、懸臂端及四邊自由端三種邊界條件下，在不同裂縫位置 ( $c_y = 0.5$ 、 $0.75$  或  $c_x = 0.25$ 、 $0.5$ 、 $0.75$ )、長度 ( $d/a = 0.1 \sim 0.6$ )、角度 ( $\alpha = 0^\circ$ 、 $15^\circ$ 、 $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $60^\circ$ 、 $90^\circ$  及  $135^\circ$ ) 的振動分析。（b）內部裂縫中，則列出了簡支承、懸臂端下，在不同裂縫位置 ( $x_0 = 0.25$ 、 $0.5$  與  $y_0 = 0.5$ 、 $0.75$ )、長度 ( $d/a = 0.1 \sim 0.6$ )、角度 ( $\alpha = 0^\circ$ 、 $15^\circ$ 、 $30^\circ$  及  $45^\circ$ ) 的振動結果。其中本文所有數值結果皆可達三位有效。另外，不論邊界條件或裂縫類型，裂縫長

度增加將使得板的勁度下降，而頻率也跟著降低。當裂縫長度較短

(  $d/a = 0.1$  ) 時，前五個模態頻率值下降幅度較不明顯。

## 4.2 建議

Ritz 法常用來分析板振動問題，本研究所提出之裂縫函數增強了 Ritz 法求解裂縫板的能力。將來，本文提出之裂縫函數用於：(1)計算不同載重下之應力強度因子。(2)無網格 Galerkin 法之基底函數以分析裂縫板靜力與動力問題。(3)將問題衍伸至其他板理論之振動分析(例：3-D 彈性理論)。



## 參考文獻

Aggarwala, B. D. and Ariel, P. D. (1981) "Vibration and bending of a cracked plate", *Rozprawy Inzynierskie*, 29(2), pp. 295-310.

Bachene, M., Tiberkak, R., Rechak, S. (2009) "Vibration analysis of cracked plates using the extended finite element method", *Archive of Applied Mechanics*, 79, pp. 249-262

Bhat, R. B. (1985) "Natural frequencies of rectangular plates using characteristic orthogonal polynomials in Rayleigh-Ritz method", *Journal of Sound and Vibration*, 102(4), pp. 493-499

Hirano, Y. and Okazaki, K. (1980) "Vibration of cracked rectangular plates", *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers*, 23(179), pp. 732-740.

Huang, C. S. and Leissa, A. W. (2009) "Vibration analysis of rectangular plates with side cracks via the Ritz method", *Journal of Sound and Vibration*, 323(3-5), pp. 974-988

Huang, C. S. (2003) "Stress singularities at angular corners in first-order shear deformation plate theory", *International Journal of Mechanical Sciences*, 45, pp. 1-20

Khadem, S. E. and Rezaee, M. (2000) "Introduction of modified comparison functions for vibration analysis of a rectangular cracked plate", *Journal of Sound and Vibration*, 236(2), pp. 245-258.

Krawczuk, M. (1993) "Natural vibrations of rectangular plates with a through crack", *Archive of Applied Mechanics*, 63(7), pp. 491-504.

Lee, H. P. and Lim, S. P. (1993) "Vibration of cracked rectangular plates including transverse shear deformation and rotary inertia", *Computers & Structures*, 49(4), pp.715-718

Liew, K. M., Hung, K. C. and Lim, M. K. (1994) "A solution method for analysis of cracked plates under vibration", *Engineering Fracture Mechanics*, 48(3), pp. 393-404.

Lynn, P. P. and Kumbasar, N. (1967) "Free vibrations of thin rectangular plates having narrow cracks with simply supported edges", *Developments in Mechanics, 4, Proc. 10<sup>th</sup> Midwestern Mechanics Conference*, Colorado State University, Fort Collins, Colorado, August 21-23, pp. 911-928.

Ma, C. C. and Hsieh, D. M. (2001) "Full-field experimental investigations on resonant vibration of cracked rectangular cantilever plates", *AIAA Journal*, 39(12), pp.2419-2422

Ma, C. C., Huang, C. H. (2001) "Experimental and numerical analysis of vibrating cracked plates at resonant frequencies", *Experimental Mechanics*, 41(1), pp.8-18

Maruyama, K. and Ichinomiya O. (1989) "Experimental study of free vibration of clamped rectangular plates with straight narrow slites", *JSME International Journal Series III*, 32(2), pp.187-193

Mindlin, R. D. (1951) "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic, elastic plates", *Journal of Applied Mechanics*, 18, pp.31-38

Nezu, K. (1982) "Free vibration of a simply-supported rectangular plate with a straight through-notch", *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers*, 25(199), pp. 16-23.

Qian, G. L., Gu, S. N. and Jiang, J. S. (1991) "A finite element model of cracked plates and application to vibration problems", *Computers and Structures*, 39(5), pp. 483-487.

Solecki, R. (1983) "Bending vibration of a simply supported rectangular plate with a crack parallel to one edge", *Engineering Fracture Mechanics*, 18(6), pp. 1111-1118.

Stahl, B. and Keer, L. M. (1972) "Vibration and Stability of cracked rectangular plates", *International Journal of Solids and Structures*, 8(1), pp. 69-91.

Williams, M. L. (1952) "Surface Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates under Bending", *Proceedings of the First U.S. National Congress of Applied Mechanics*, pp.325-329.

Yuan, J. and Dickinson, S. M. (1992) "The flexural vibration of rectangular plate systems approached by using artificial springs in the Rayleigh-Ritz method", *Journal of Sound and Vibration*, 159(1), pp. 39-55

表 2.1 具水平邊緣裂縫簡支矩形薄板 ( $a/b = 2$  、  $c_y/b = 0.5$  、  $d/a = 0.2$  、  $h/b = 0.01$ ) 之無因次化頻率  $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$  收斂性分析

Mode No.	No. of Crack Functions ( $\bar{N}$ )	order of polynomial ( $I \times J$ )						文獻值
		4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	
1(S)	0	49.35	49.35	49.34	49.34	49.34	49.34	[48.95] (49.05)
	1	49.34	49.34	49.33	49.33	49.33	49.33	
	3	49.02	48.98	48.97	48.96	48.96	48.96	
	4	48.98	48.97	48.96	48.96	48.96	48.96	
	5	48.96	48.96	48.96	48.96	48.95	48.95	
	6	48.96	48.96	48.96	48.95	48.95	48.95	
2(S)	0	85.96	79.04	79.03	78.93	78.93	78.93	[77.87] (78.08)
	1	85.91	79.03	79.02	78.91	78.91	78.91	
	3	79.63	77.96	77.95	77.84	77.84	77.83	
	4	77.99	77.93	77.85	77.83	77.82	77.82	
	5	77.94	77.85	77.83	77.82	77.82	77.81	
	6	77.83	77.82	77.82	77.82	77.82	77.81	
3(S)	0	164.2	164.2	129.5	129.5	128.2	128.2	[126.6] (126.9)
	1	164.1	164.0	129.4	129.4	128.2	128.2	
	3	155.0	141.5	127.4	127.2	126.5	126.5	
	4	140.7	127.8	127.2	126.9	126.5	126.5	
	5	127.3	127.2	127.1	126.5	126.5	126.4	
	6	127.2	126.9	126.5	126.4	126.4	126.4	
4(A)	0	208.9	168.3	168.3	167.7	167.7	167.7	[167.1] (167.2)
	1	208.7	168.3	168.3	167.6	167.6	167.6	
	3	174.0	167.6	167.5	167.0	167.0	167.0	
	4	167.4	167.2	167.1	167.0	166.9	166.9	
	5	167.1	167.0	166.9	166.9	166.9	166.9	
	6	167.0	166.9	166.9	166.9	166.9	166.9	
5(A)	0	238.3	197.8	197.8	197.2	197.2	197.2	[194.0] (194.7)
	1	238.0	197.8	197.8	197.2	197.2	197.2	
	3	222.5	194.8	194.5	194.0	194.0	193.9	
	4	201.7	194.2	194.2	193.8	193.8	193.7	
	5	194.2	194.0	193.9	193.8	193.8	193.7	
	6	193.9	193.8	193.8	193.8	193.7	193.7	

Note : [ ] : Stahl and Keer (1972) 之結果

( ) : Liew, Hung and Lim (1994) 之結果

表 2.2 具水平邊緣裂縫簡支矩形薄板 ( $a/b = 2$  、  $c_y/b = 0.5$  、  $d/a = 0.6$  、  $h/b = 0.01$ ) 之無因次化頻率  $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$  收斂性分析

Mode No.	No. of Crack Functions ( $\bar{N}$ )	order of polynomial ( $I \times J$ )						文獻值
		5×5	6×6	7×7	8×8	9*9	10*10	
1(S)	4	36.24	36.20	36.16	36.16	36.14	36.14	[36.17] (37.44)
	5	36.16	36.15	36.14	36.14	36.13	36.13	
	6	36.15	36.14	36.13	36.13	36.12	36.12	
	7	36.14	36.13	36.12	36.12	36.11	36.11	
	8	36.13	36.12	36.11	36.11	36.10	36.10	
	9	36.12	36.11	36.11	36.10	36.09	36.09	
2(A)	4	57.93	57.75	57.69	57.65	57.63	57.61	[57.49] (59.31)
	5	57.45	57.40	57.39	57.37	57.37	57.35	
	6	57.40	57.37	57.37	57.36	57.35	57.34	
	7	57.37	57.36	57.35	57.33	57.33	57.31	
	8	57.36	57.34	57.34	57.32	57.31	57.30	
	9	57.34	57.32	57.32	57.31	57.30	57.28	
3(S)	4	72.87	72.77	72.66	72.66	72.62	72.62	[72.59] (72.62)
	5	72.65	72.55	72.54	72.54	72.53	72.53	
	6	72.60	72.54	72.53	72.53	72.53	72.53	
	7	72.58	72.53	72.53	72.53	72.52	72.52	
	8	72.57	72.53	72.52	72.52	72.52	72.52	
	9	72.57	72.53	72.52	72.52	72.51	72.51	
4(S)	4	122.6	122.0	121.9	121.6	121.5	121.5	[121.3] (121.0)
	5	122.0	121.7	121.4	121.3	121.3	121.3	
	6	121.9	121.5	121.2	121.2	121.2	121.2	
	7	121.8	121.4	121.2	121.2	121.2	121.2	
	8	121.8	121.3	121.2	121.2	121.2	121.2	
	9	121.7	121.3	121.2	121.2	121.2	121.2	
5(A)	4	169.9	165.7	163.4	162.5	161.9	161.3	[141.4] (145.8)
	5	142.4	142.1	141.9	141.7	141.6	141.6	
	6	141.7	141.6	141.5	141.4	141.4	141.4	
	7	141.4	141.3	141.3	141.3	141.3	141.2	
	8	141.3	141.3	141.3	141.2	141.2	141.2	
	9	141.3	141.2	141.2	141.2	141.2	141.2	

Note : [ ] : Stahl and Keer (1972) 之結果

( ) : Liew, Hung and Lim (1994) 之結果

表 2.3 具水平邊緣裂縫簡支矩形薄板 ( $a/b = 2.0$  、  $c_y/b = 0.5$  、  $d/a = 0.8$  、  $h/b = 0.01$ ) 之無因次化頻率  $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$  收斂性分析

Mode No.	No. of Crack Functions ( $\bar{N}$ )	order of polynomial ( $I \times J$ )						文獻值
		5×5	6×6	7×7	8×8	9*9	10*10	
1(S)	4	30.05	29.99	29.92	29.92	29.89	29.89	[29.90] (30.50)
	5	29.91	29.89	29.88	29.87	29.86	29.86	
	6	29.90	29.87	29.86	29.85	29.84	29.84	
	7	29.89	29.87	29.85	29.84	29.84	29.84	
	8	29.88	29.86	29.84	29.83	29.83	29.83	
	9	29.87	29.85	29.83	29.83	29.82	29.82	
2(A)	4	40.82	40.70	40.63	40.59	40.57	40.54	[39.53] (40.02)
	5	39.81	39.73	39.72	39.70	39.69	39.68	
	6	39.58	39.55	39.54	39.53	39.52	39.51	
	7	39.50	39.49	39.48	39.46	39.46	39.45	
	8	39.47	39.46	39.45	39.45	39.44	39.43	
	9	39.46	39.44	39.43	39.43	39.43	39.42	
3(S)	4	69.28	69.06	68.82	68.77	68.62	68.59	[68.20] (68.82)
	5	68.43	68.19	68.16	68.16	68.14	68.14	
	6	68.32	68.16	68.14	68.14	68.13	68.13	
	7	68.26	68.14	68.13	68.13	68.11	68.11	
	8	68.24	68.13	68.12	68.11	68.10	68.10	
	9	68.23	68.12	68.11	68.10	68.09	68.09	
4(A)	4	131.2	124.1	123.3	122.9	122.5	122.0	[94.50] (95.79)
	5	96.29	95.76	95.53	95.43	95.38	95.34	
	6	94.56	94.42	94.41	94.38	94.37	94.35	
	7	94.41	94.37	94.37	94.35	94.34	94.32	
	8	94.34	94.32	94.32	94.29	94.28	94.25	
	9	94.29	94.27	94.27	94.25	94.25	94.23	
5(S)	4	132.8	126.0	124.1	123.3	122.6	122.5	[120.2] (120.3)
	5	132.1	121.8	121.0	120.8	120.6	120.6	
	6	130.6	121.2	120.3	120.1	120.1	120.1	
	7	130.1	120.9	120.2	120.1	120.1	120.1	
	8	129.9	120.6	120.2	120.1	120.1	120.1	
	9	129.8	120.6	120.2	120.1	120.0	120.0	

Note : [ ] : Stahl and Keer (1972) 之結果

( ) : Liew, Hung and Lim (1994) 之結果

表 2.4 具水平邊緣裂縫簡支矩形中厚板 ( $a/b = 2.0$  、  $c_y/b = 0.5$  、  $d/a = 0.6$  、  $h/b = 0.1$ ) 之無因次化頻率  $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$  收斂性分析

Mode No.	No. of Crack Functions ( $\bar{N}$ )	order of polynomial ( $I \times J$ )					
		5×5	6×6	7×7	8×8	9*9	10*10
1(S)	0	48.27	48.26	48.26	48.26	48.26	48.26
	1	44.88	44.87	44.34	44.33	43.85	43.84
	4	34.51	34.49	34.45	34.44	34.42	34.41
	5	34.46	34.44	34.41	34.41	34.40	34.39
	6	34.42	34.41	34.39	34.39	34.38	34.38
	7	34.41	34.40	34.39	34.38	34.38	34.38
	8	34.40	34.39	34.38	34.38	34.38	34.38
2(A)	0	76.34	76.33	76.23	76.23	76.23	76.23
	1	74.71	74.68	74.39	74.38	74.20	74.19
	4	53.06	52.90	52.85	52.78	52.75	52.71
	5	52.83	52.74	52.72	52.68	52.67	52.66
	6	52.73	52.69	52.68	52.67	52.66	52.65
	7	52.68	52.67	52.66	52.65	52.65	52.65
	8	52.66	52.65	52.65	52.65	52.65	52.65
3(S)	0	150.7	122.4	122.4	121.4	121.4	121.4
	1	106.7	100.9	99.58	96.03	95.00	92.63
	4	69.83	69.81	69.77	69.76	69.75	69.74
	5	69.78	69.74	69.72	69.71	69.71	69.70
	6	69.74	69.71	69.70	69.70	69.70	69.70
	7	69.72	69.70	69.70	69.70	69.69	69.69
	8	69.72	69.70	69.69	69.69	69.69	69.69
4(S)	0	156.8	156.8	156.3	156.3	156.3	156.3
	1	150.5	122.4	122.4	121.4	121.4	121.4
	4	114.6	114.6	114.4	114.3	114.2	114.2
	5	114.4	114.2	114.1	114.1	114.1	114.1
	6	114.2	114.1	114.1	114.1	114.1	114.1
	7	114.2	114.1	114.1	114.1	114.1	114.1
	8	114.2	114.1	114.1	114.1	114.1	114.1
5(A)	0	182.3	182.3	181.8	181.8	181.8	181.8
	1	173.1	172.8	172.3	172.1	172.1	172.0
	4	129.6	128.4	128.2	127.8	127.7	127.6
	5	127.0	126.6	126.6	126.4	126.4	126.4
	6	126.4	126.3	126.2	126.2	126.2	126.2
	7	126.2	126.2	126.2	126.2	126.2	126.2
	8	126.2	126.2	126.2	126.2	126.2	126.2

表 2.5 具水平邊緣裂縫懸臂矩形中厚板 ( $a/b = 2.0$  、  $c_y/b = 0.5$  、  $d/a = 0.6$  、  $h/b = 0.1$ ) 之無因次化頻率  $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$  收斂性分析

Mode No.	No. of Crack Functions ( $\bar{N}$ )	order of polynomial ( $I \times J$ )					
		5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	10×10
1(S)	4	3.422	3.421	3.420	3.420	3.419	3.419
	5	3.421	3.421	3.420	3.420	3.419	3.419
	6	3.421	3.421	3.420	3.420	3.419	3.419
	7	3.420	3.420	3.420	3.420	3.419	3.419
	8	3.420	3.420	3.420	3.419	3.419	3.419
	9	3.419	3.419	3.419	3.419	3.419	3.419
2(A)	4	6.429	6.423	6.418	6.411	6.410	6.406
	5	6.415	6.409	6.404	6.400	6.399	6.397
	6	6.404	6.400	6.398	6.397	6.397	6.395
	7	6.399	6.397	6.396	6.395	6.394	6.394
	8	6.396	6.395	6.395	6.394	6.393	6.393
	9	6.395	6.394	6.394	6.393	6.393	6.393
3(S)	4	21.05	21.04	21.04	21.04	21.03	21.03
	5	21.05	21.04	21.04	21.04	21.03	21.03
	6	21.04	21.04	21.04	21.03	21.03	21.03
	7	21.04	21.04	21.03	21.03	21.03	21.03
	8	21.04	21.04	21.03	21.03	21.03	21.03
	9	21.03	21.03	21.03	21.03	21.03	21.03
4(A)	4	23.64	23.53	23.52	23.49	23.48	23.47
	5	23.52	23.48	23.48	23.46	23.46	23.45
	6	23.50	23.48	23.47	23.46	23.45	23.45
	7	23.47	23.46	23.46	23.45	23.45	23.45
	8	23.46	23.46	23.46	23.45	23.45	23.45
	9	23.45	23.45	23.45	23.45	23.45	23.45
5(S)	4	32.56	32.54	32.21	32.20	32.18	32.18
	5	32.27	32.21	32.16	32.15	32.12	32.12
	6	32.19	32.16	32.14	32.14	32.10	32.10
	7	32.16	32.14	32.11	32.10	32.09	32.09
	8	32.14	32.11	32.10	32.09	32.09	32.09
	9	32.12	32.10	32.09	32.09	32.09	32.09

表 2.6 具不同邊緣裂縫簡支方形中厚板無因次化頻率  $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$  (  $h/b = 0.1$  )

$\alpha$	$c_y/b$	$d/a$	Mode				
			1	2	3	4	5
$0^\circ$		0	19.06 [19.06]	45.45 [45.45]	45.45 [45.45]	69.72 [69.72]	84.93 [84.93]
			19.05	45.35	45.43	69.50	84.84
	0.5	0.1	19.00	45.15	45.23	68.96	83.97
		0.2	18.79	44.54	44.76	66.75	81.78
		0.3	18.38	42.42	44.24	61.28	78.75
		0.4	17.76	37.44	43.98	57.08	75.42
		0.5	17.04	31.40	43.95	56.02	72.09
		0.6	19.02	45.39	45.43	69.65	84.83
	0.75	0.1	18.95	45.05	45.37	69.03	84.39
		0.2	18.79	43.96	45.21	67.54	81.55
		0.3	18.46	42.08	44.64	65.38	70.17
		0.4	17.88	39.90	42.97	56.39	66.62
		0.5	17.04	37.26	40.20	50.14	66.29
		0.6	19.02	45.36	45.43	69.66	84.78
$15^\circ$	0.75	0.1	18.91	45.00	45.36	69.09	84.28
		0.2	18.68	44.09	45.14	67.63	81.10
		0.3	18.24	42.74	44.36	63.87	70.55
		0.4	17.59	40.23	42.61	55.65	67.42
		0.5	16.80	34.61	41.88	52.06	66.38
		0.6	19.02	45.34	45.44	69.66	84.71
$30^\circ$	0.75	0.1	18.89	44.92	45.36	69.21	83.80
		0.2	18.62	44.08	45.09	67.86	80.88
		0.3	18.17	43.11	44.02	63.66	72.79
		0.4	17.54	40.25	42.46	56.72	69.43
		0.5	16.78	33.87	42.27	54.31	68.19
		0.6	19.02	45.33	45.44	69.66	84.65
$45^\circ$	0.75	0.1	18.89	44.82	45.37	69.30	83.23
		0.2	18.66	43.71	45.10	68.22	80.26
		0.3	18.27	42.18	44.15	64.87	76.02
		0.4	17.74	40.21	41.86	58.01	73.58
		0.5	17.09	35.29	40.64	53.02	72.86
		0.6	19.02	45.36	45.43	69.66	84.83

Note : [ ] : S. Hosseini-Hashemi, M. Arsanjani (2005) 之結果

表 2.7 具不同邊緣裂縫簡支方形中厚板無因次化頻率折減量比  $\Delta\omega$  (%)(  $h/b = 0.1$  )

$\alpha$	$c_y/b$	$d/a$	Mode				
			1	2	3	4	5
$0^\circ$	0.5	0.1	0.05	0.22	0.04	0.32	0.11
		0.2	0.31	0.66	0.48	1.09	1.13
		0.3	1.42	2.00	1.52	4.26	3.71
		0.4	3.57	6.67	2.66	12.11	7.28
		0.5	6.82	17.62	3.23	18.13	11.20
		0.6	10.60	30.91	3.30	19.65	15.12
	0.75	0.1	0.21	0.13	0.04	0.10	0.12
		0.2	0.58	0.88	0.18	0.99	0.64
		0.3	1.42	3.28	0.53	3.13	3.98
		0.4	3.15	7.41	1.78	6.22	17.38
		0.5	6.19	12.21	5.46	19.12	21.56
		0.6	10.60	18.02	11.55	28.08	21.95
$15^\circ$	0.75	0.1	0.21	0.20	0.04	0.09	0.18
		0.2	0.79	0.99	0.20	0.90	0.77
		0.3	1.99	1.89	0.68	3.00	4.51
		0.4	4.30	5.96	2.40	8.39	16.93
		0.5	7.71	11.49	6.25	20.18	20.62
		0.6	11.86	23.85	7.85	25.33	21.84
$30^\circ$	0.75	0.1	0.26	0.24	0.02	0.09	0.26
		0.2	0.89	1.17	0.20	0.73	1.33
		0.3	2.31	3.01	0.79	2.67	4.77
		0.4	4.67	5.15	3.15	8.69	14.29
		0.5	7.97	11.44	6.58	18.65	18.25
		0.6	11.96	25.48	7.00	22.10	19.71
$45^\circ$	0.75	0.1	0.21	0.26	0.02	0.09	0.33
		0.2	0.89	1.39	0.18	0.60	2.00
		0.3	2.10	3.83	0.77	2.15	5.50
		0.4	4.14	7.19	2.86	6.96	10.49
		0.5	6.93	11.53	7.90	16.80	13.36
		0.6	10.34	22.35	10.58	23.95	14.21

表 2.8 具不同頂部裂縫簡支矩形中厚板無因次化頻率  $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$

(  $a/b = 2$  、  $h/b = 0.1$  )

$\alpha$	$c_x/a$	$d/b$	Mode				
			1	2	3	4	5
$90^\circ$	0.5	0	48.26	76.23	121.4	156.3	181.8
		0.1	48.26	76.10	121.4	156.3	181.4
		0.2	48.22	75.92	121.1	156.1	180.7
		0.3	48.10	75.68	120.2	155.6	178.8
		0.4	47.85	75.17	118.2	155.0	172.1
		0.5	47.44	73.98	115.2	154.8	156.9
	0.25	0.6	46.91	71.49	111.9	138.2	154.8
		0.1	48.23	76.22	121.3	156.2	181.6
		0.2	48.18	76.11	121.0	155.7	180.2
		0.3	48.08	75.70	120.3	155.7	180.0
		0.4	47.90	74.84	118.5	155.0	175.3
		0.5	47.58	73.51	114.8	152.5	163.6
$135^\circ$	0.25	0.6	47.07	71.86	107.5	142.0	157.3
		0.1	48.22	76.22	121.3	156.1	181.6
		0.2	48.07	76.17	121.0	155.4	180.6
		0.3	47.75	76.00	120.3	153.4	178.6
		0.4	47.17	75.67	118.9	150.2	176.1
		0.5	46.30	75.08	116.1	146.9	173.4
		0.6	45.15	74.08	111.3	144.8	165.0

表 2.9 具不同頂部裂縫簡支矩形中厚板無因次化頻率折減量比  $\Delta\omega$  (%)

(  $a/b = 2$  、  $h/b = 0.1$  )

$\alpha$	$c_x/a$	$d/b$	Mode				
			1	2	3	4	5
$90^\circ$	0.5	0.1	0.00	0.17	0.00	0.00	0.22
		0.2	0.08	0.41	0.25	0.13	0.61
		0.3	0.33	0.72	0.99	0.45	1.65
		0.4	0.85	1.39	2.64	0.83	5.34
		0.5	1.70	2.95	5.11	0.96	13.70
		0.6	2.80	6.22	7.83	11.58	14.85
	0.25	0.1	0.06	0.01	0.08	0.06	0.11
		0.2	0.17	0.16	0.33	0.38	0.88
		0.3	0.37	0.70	0.91	0.38	0.99
		0.4	0.75	1.82	2.39	0.83	3.58
		0.5	1.41	3.57	5.44	2.43	10.01
		0.6	2.47	5.73	11.45	9.15	13.48
$135^\circ$	0.25	0.1	0.08	0.01	0.08	0.13	0.11
		0.2	0.39	0.08	0.33	0.58	0.66
		0.3	1.06	1.80	0.91	1.86	1.76
		0.4	2.26	0.73	2.06	3.90	3.14
		0.5	4.06	1.51	4.37	6.01	4.62
		0.6	6.44	2.82	8.32	7.36	9.24

表 2.10 具不同邊緣裂縫懸臂方形中厚板無因次化頻率  $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$

(  $h/b = 0.1$  )

$\alpha$	$c_y/b$	$d/a$	Mode				
			1	2	3	4	5
$0^\circ$	0.5	0	3.430	8.057	20.08	25.49	28.22
		0.1	3.430	7.996	19.99	24.51	27.70
		0.2	3.430	7.754	19.70	22.70	25.66
		0.3	3.429	7.271	18.83	21.25	22.27
		0.4	3.429	6.547	17.34	19.15	20.67
		0.5	3.429	5.699	15.87	17.15	20.45
	0.75	0.6	3.428	4.888	14.70	15.95	20.33
		0.1	3.430	8.017	20.04	25.03	27.90
		0.2	3.430	7.862	19.87	23.16	26.91
		0.3	3.430	7.526	18.34	20.69	25.82
		0.4	3.429	6.939	15.01	20.33	24.88
		0.5	3.429	6.117	12.76	20.28	24.00
$15^\circ$	0.75	0.6	3.429	5.226	11.49	20.26	23.12
		0.1	3.430	8.016	20.04	25.01	27.90
		0.2	3.430	7.852	19.77	23.16	26.88
		0.3	3.429	7.511	17.96	21.13	25.58
		0.4	3.426	6.948	14.84	20.72	24.34
		0.5	3.417	6.201	12.61	20.54	23.37
	0.75	0.6	3.393	5.420	11.23	20.28	22.75
		0.1	3.430	8.020	20.04	25.06	27.94
		0.2	3.430	7.874	19.73	23.36	27.01
		0.3	3.427	7.579	17.92	21.50	25.62
		0.4	3.420	7.099	14.79	20.94	24.19
		0.5	3.399	6.445	12.39	20.37	23.19
$30^\circ$	0.75	0.6	3.342	5.725	10.83	19.53	22.78
		0.1	3.430	8.029	20.05	25.15	28.01
		0.2	3.430	7.921	19.78	23.78	27.28
		0.3	3.427	7.709	18.28	21.94	26.05
		0.4	3.419	7.367	15.14	21.15	24.52
		0.5	3.394	6.866	12.40	20.24	23.36
	0.75	0.6	3.329	6.213	10.53	18.78	22.94

表 2.11 具不同邊緣裂縫懸臂方形中厚板無因次化頻率折減量比  $\Delta\omega$  (%)(  $h/b = 0.1$  )

$\alpha$	$c_y/b$	$d/a$	Mode				
			1	2	3	4	5
$0^\circ$	0.5	0.1	0.00	0.76	0.45	3.84	1.84
		0.2	0.00	3.76	1.89	10.95	9.07
		0.3	0.03	9.76	6.23	16.63	21.08
		0.4	0.03	18.74	13.65	24.87	26.75
		0.5	0.03	29.27	20.97	32.72	27.53
		0.6	0.06	39.33	26.79	37.43	27.96
	0.75	0.1	0.00	0.50	0.20	1.80	1.13
		0.2	0.00	2.42	1.05	9.14	4.64
		0.3	0.00	6.59	8.67	18.83	8.50
		0.4	0.03	13.88	25.25	20.24	11.84
		0.5	0.03	24.08	36.45	20.44	14.95
		0.6	0.03	35.14	42.78	20.52	18.07
$15^\circ$	0.75	0.1	0.00	0.51	0.20	1.88	1.13
		0.2	0.00	2.54	1.54	9.14	4.75
		0.3	0.03	6.78	10.56	17.10	9.36
		0.4	0.12	13.76	26.10	18.71	13.75
		0.5	0.38	23.04	37.20	19.42	17.19
		0.6	1.08	32.73	44.07	20.44	19.38
$30^\circ$	0.75	0.1	0.00	0.46	0.20	1.69	0.99
		0.2	0.00	2.27	1.74	8.36	4.29
		0.3	0.09	5.93	10.76	15.65	9.21
		0.4	0.29	11.89	26.34	17.85	14.28
		0.5	0.90	20.01	38.30	20.09	17.82
		0.6	2.57	28.94	46.07	23.38	19.28
$45^\circ$	0.75	0.1	0.00	0.35	0.15	1.33	0.74
		0.2	0.00	1.69	1.49	6.71	3.33
		0.3	0.09	4.32	8.96	13.93	7.69
		0.4	0.32	8.56	24.60	17.03	13.11
		0.5	1.05	14.78	38.25	20.60	17.22
		0.6	2.94	22.89	47.56	26.32	18.71

表 2.12 具不同頂部裂縫懸臂方形中厚板無因次化頻率  $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$

(  $h/b = 0.1$  )

$\alpha$	$c_x/a$	$d/b$	Mode				
			1	2	3	4	5
		0	3.430	8.057	20.08	25.49	28.22
$90^\circ$	0.25	0.1	3.369	7.927	19.87	25.39	27.82
		0.2	3.232	7.523	18.94	25.11	26.67
		0.3	3.043	6.900	17.15	24.74	25.65
		0.4	2.809	6.154	15.22	24.51	25.06
		0.5	2.537	5.387	13.69	24.41	24.53
		0.6	2.232	4.665	12.53	23.85	24.35
	0.5	0.1	3.411	7.969	19.65	25.33	27.67
		0.2	3.359	7.649	18.65	24.64	26.90
		0.3	3.268	7.100	17.36	23.20	26.57
		0.4	3.126	6.402	16.04	21.33	26.48
		0.5	2.918	5.695	14.79	19.67	26.05
		0.6	2.637	5.079	13.64	18.45	24.71
	0.75	0.1	3.428	8.013	19.90	25.38	27.82
		0.2	3.419	7.859	19.27	24.46	26.55
		0.3	3.396	7.561	17.47	21.86	26.03
		0.4	3.349	7.082	14.54	20.44	25.87
		0.5	3.257	6.446	12.31	19.60	25.60
		0.6	3.092	5.785	10.97	18.73	25.11
$30^\circ$	0.75	0.1	3.429	8.038	19.98	25.46	28.07
		0.2	3.420	7.962	19.54	25.40	27.31
		0.3	3.394	7.824	18.40	25.22	25.57
		0.4	3.333	7.635	16.28	22.98	25.33
		0.5	3.224	7.409	13.88	21.23	25.26
		0.6	3.063	7.151	12.21	20.03	25.13
$60^\circ$	0.75	0.1	3.428	8.015	19.89	25.42	27.87
		0.2	3.414	7.859	19.08	25.05	26.52
		0.3	3.376	7.579	17.14	23.35	25.67
		0.4	3.294	7.180	14.50	21.71	25.39
		0.5	3.148	6.696	12.40	20.48	24.99
		0.6	2.923	6.179	11.07	19.29	24.44

表 2.13 具不同頂部裂縫懸臂方形中厚板無因次化頻率折減量比  $\Delta\omega$  (%)(  $h/b = 0.1$  )

$\alpha$	$c_x/a$	$d/b$	Mode				
			1	2	3	4	5
$90^\circ$	0.25	0.1	1.78	1.61	1.05	0.39	1.42
		0.2	5.77	6.63	5.68	1.49	5.49
		0.3	11.28	14.36	14.59	2.94	9.11
		0.4	18.10	23.62	24.20	3.84	11.20
		0.5	26.03	33.14	31.82	4.24	13.08
		0.6	34.93	42.10	37.60	6.43	13.71
	0.5	0.1	0.55	1.09	2.14	0.63	1.95
		0.2	2.07	5.06	7.12	3.33	4.68
		0.3	4.72	11.88	13.55	8.98	5.85
		0.4	8.86	20.54	20.12	16.32	6.17
		0.5	14.93	29.32	26.34	22.83	7.69
		0.6	23.12	36.96	32.07	27.62	12.44
	0.75	0.1	0.06	0.55	0.90	0.43	1.42
		0.2	0.32	2.46	4.03	4.04	5.92
		0.3	0.99	6.16	13.00	14.24	7.76
		0.4	2.36	12.10	27.59	19.81	8.33
		0.5	5.04	20.00	38.70	23.11	9.28
		0.6	9.85	28.20	45.37	26.52	11.02
$30^\circ$	0.75	0.1	0.03	0.24	0.50	0.12	0.53
		0.2	0.29	1.18	2.69	0.35	3.22
		0.3	1.05	2.89	8.37	1.06	9.39
		0.4	2.83	5.24	18.92	9.85	10.24
		0.5	6.01	8.04	30.88	16.71	10.49
		0.6	10.70	11.24	39.19	21.42	10.95
$60^\circ$	0.75	0.1	0.06	0.52	0.95	0.27	1.24
		0.2	0.47	2.46	4.98	1.73	6.02
		0.3	1.57	5.93	14.64	8.40	9.04
		0.4	3.97	10.88	27.79	14.83	10.03
		0.5	8.22	16.89	38.25	19.65	11.45
		0.6	14.78	23.31	44.87	24.32	13.39

表 2.14 具不同頂部裂縫懸臂矩形中厚板無因次化頻率  $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$

(  $a/b = 2$  、  $h/b = 0.1$  )

$\alpha$	$c_x/a$	$d/b$	Mode				
			1	2	3	4	5
$90^\circ$	0.5	0	3.422	14.18	21.09	45.72	58.00
		0.1	3.413	14.10	20.86	45.44	57.84
		0.2	3.390	13.84	20.35	44.75	57.03
		0.3	3.352	13.37	19.63	43.66	54.90
		0.4	3.296	12.72	18.77	41.80	51.33
		0.5	3.219	11.89	17.81	38.58	48.28
	0.25	0.6	3.114	10.92	16.80	34.68	46.74
		0.1	3.390	14.08	21.05	45.49	57.57
		0.2	3.314	13.71	20.91	44.69	56.57
		0.3	3.204	13.08	20.63	43.36	55.23
		0.4	3.063	12.20	20.20	41.67	53.78
		0.5	2.892	11.11	19.65	39.98	52.34
$135^\circ$	0.25	0.6	2.693	9.881	19.03	38.59	50.92
		0.1	3.406	14.12	21.06	45.60	57.72
		0.2	3.372	13.92	20.92	45.11	56.92
		0.3	3.330	13.56	20.57	44.13	55.82
		0.4	3.283	13.05	19.93	42.60	54.81
		0.5	3.233	12.38	18.97	40.69	54.08
		0.6	3.182	11.55	17.79	38.75	53.38

表 2.15 具不同頂部裂縫懸臂矩形中厚板無因次化頻率折減量比  $\Delta\omega$  (%)

(  $a/b = 2$  、  $h/b = 0.1$  )

$\alpha$	$c_x/a$	$d/b$	Mode				
			1	2	3	4	5
$90^\circ$	0.5	0.1	0.26	0.56	1.09	0.61	0.28
		0.2	0.94	2.40	3.51	2.12	1.67
		0.3	2.05	5.71	6.92	4.51	5.34
		0.4	3.68	10.30	11.00	8.57	11.50
		0.5	5.93	16.15	15.55	15.62	16.76
		0.6	9.00	22.99	20.34	24.15	19.41
	0.25	0.1	0.94	0.71	0.19	0.50	0.74
		0.2	3.16	3.31	0.85	2.25	2.47
		0.3	6.37	7.76	2.18	5.16	4.78
		0.4	10.49	13.96	4.22	8.86	7.28
		0.5	15.49	21.65	6.83	12.55	9.76
		0.6	21.30	30.32	9.77	15.59	12.21
$135^\circ$	0.25	0.1	0.47	0.42	0.14	0.26	0.48
		0.2	1.46	1.83	0.81	1.33	1.86
		0.3	2.69	18.94	4.37	2.47	3.48
		0.4	4.06	7.97	5.50	6.82	5.50
		0.5	5.52	12.69	10.05	11.00	6.76
		0.6	7.01	18.55	15.65	15.24	7.97

表 2.16 具不同邊緣裂縫四邊自由端之方形中厚板無因次化頻率  $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$

(  $h/b = 0.1$  )

$\alpha$	$c_y/b$	$d/a$	Mode				
			1	2	3	4	5
$0^\circ$	0.5	0	12.71	18.94	23.32	31.90	31.90
		0.1	12.57	18.66	23.04	31.18	31.38
		0.2	11.98	17.89	22.43	29.28	30.13
		0.3	10.85	16.64	21.80	25.71	29.53
		0.4	9.293	15.11	21.35	22.65	29.35
		0.5	7.699	13.54	20.78	21.05	29.34
	0.75	0.6	6.316	12.05	19.52	20.87	29.24
		0.1	12.62	18.83	23.21	31.28	31.71
		0.2	12.24	18.41	22.72	28.68	31.31
		0.3	11.38	17.25	21.48	25.65	30.89
		0.4	9.860	15.42	20.51	24.30	30.56
		0.5	8.046	14.06	20.15	23.39	30.32
$15^\circ$	0.75	0.6	6.456	13.09	19.98	22.40	29.95
		0.1	12.62	18.81	23.20	31.30	31.69
		0.2	12.23	18.26	22.73	28.86	31.17
		0.3	11.39	16.73	21.88	25.86	30.63
		0.4	9.983	14.64	21.30	24.05	30.29
		0.5	8.281	13.04	21.07	22.74	30.09
		0.6	6.743	11.80	20.93	21.60	29.58
$30^\circ$	0.75	0.1	12.63	18.82	23.22	31.40	31.70
		0.2	12.28	18.22	22.80	29.29	31.10
		0.3	11.57	16.56	22.13	26.32	30.42
		0.4	10.35	14.26	21.62	24.20	29.96
		0.5	8.703	12.52	21.12	22.87	29.72
		0.6	7.109	11.24	20.34	22.21	29.41
$45^\circ$	0.75	0.1	12.65	18.84	23.24	31.53	31.73
		0.2	12.39	18.34	22.92	29.91	31.17
		0.3	11.89	16.83	22.38	27.02	30.39
		0.4	10.97	14.46	21.83	24.49	29.68
		0.5	9.451	12.58	21.04	23.00	29.17
		0.6	7.693	11.37	19.80	22.34	28.78

表 2.17 具不同邊緣裂縫四邊自由端之方形中厚板

無因次化頻率折減量比  $\Delta\omega$  (%) ( $h/b = 0.1$ )

$\alpha$	$c_y/b$	$d/a$	Mode				
			1	2	3	4	5
$0^\circ$	0.5	0.1	1.10	1.48	1.20	2.26	1.63
		0.2	5.74	5.54	3.82	8.21	5.55
		0.3	14.63	12.14	6.52	19.40	7.43
		0.4	26.88	20.22	8.45	29.00	7.99
		0.5	39.43	28.51	10.89	34.01	8.03
		0.6	50.31	36.38	16.30	34.58	8.34
	0.75	0.1	0.71	0.58	0.47	1.94	0.60
		0.2	3.70	2.80	2.57	10.09	1.85
		0.3	10.46	8.92	7.89	19.59	3.17
		0.4	22.42	18.59	12.05	23.82	4.20
		0.5	36.70	25.77	13.59	26.68	4.95
		0.6	49.21	30.89	14.32	29.78	6.11
$15^\circ$	0.75	0.1	0.71	0.69	0.51	1.88	0.66
		0.2	3.78	3.59	2.53	9.53	2.29
		0.3	10.39	18.11	6.17	18.93	3.98
		0.4	21.46	22.70	8.66	24.61	5.05
		0.5	34.85	31.15	9.65	28.71	5.67
		0.6	46.95	37.70	10.25	32.29	7.27
$30^\circ$	0.75	0.1	0.63	0.63	0.43	1.57	0.63
		0.2	3.38	3.80	2.23	8.18	2.51
		0.3	8.97	12.57	5.10	17.49	4.64
		0.4	18.57	24.71	7.29	24.14	6.08
		0.5	31.53	33.90	9.43	28.31	6.83
		0.6	44.07	40.65	12.78	30.38	7.81
$45^\circ$	0.75	0.1	0.47	0.53	0.34	1.16	0.53
		0.2	2.52	3.17	1.72	6.24	2.29
		0.3	6.45	11.14	4.03	15.30	4.73
		0.4	13.69	23.65	6.39	23.23	6.96
		0.5	25.64	33.58	9.78	27.90	8.56
		0.6	39.47	39.97	15.09	29.97	9.78

表 2.18 具不同邊緣裂縫簡支方形 Mindlin 板之厚度效應 ( $\alpha = 0^\circ$ 、 $c_y/b = 0.5$ )

$d/a$	$h/b$	Mode				
		1	2	3	4	5
0	0.002	19.74 [19.74]	49.35 [49.35]	49.35 [49.35]	78.95 [78.96]	98.69 [98.70]
	0.01	19.73	49.30	49.30	78.84	98.52
	0.05	19.56	48.26	48.26	76.23	94.51
	0.1	19.06	45.45	45.45	69.72	84.93
0.2	0.002	19.70 [19.70]	49.19 [49.19]	49.32 [49.33]	78.78 [78.78]	97.87 [97.88]
	0.01	19.69	49.13	49.26	78.63	97.65
	0.05	19.50	48.05	48.08	75.70	93.48
	0.1	19.00	45.15	45.23	68.96	83.97
0.4	0.002	19.20 [19.20]	47.79 [47.80]	48.24 [48.24]	71.26 [71.27]	92.22 [92.23]
	0.01	19.18	47.67	48.17	71.03	91.89
	0.05	18.92	45.92	47.03	67.69	87.55
	0.1	18.38	42.42	44.24	61.28	78.75
0.6	0.002	17.96 [17.96]	36.44 [36.45]	47.86 [47.86]	62.24 [62.24]	83.76 [83.78]
	0.01	17.92	36.26	47.80	62.15	83.45
	0.05	17.60	34.33	46.70	60.36	79.60
	0.1	17.04	31.40	43.95	56.02	72.09

Note : [ ] : Huang and Leissa (2009) 之結果

表 2.19 具不同邊緣裂縫懸臂方形 Mindlin 板之厚度效應 ( $\alpha = 0^\circ$ 、 $c_y/b = 0.5$ )

$d/a$	$h/b$	Mode				
		1	2	3	4	5
0	0.002	3.471 [3.471]	8.506 [8.508]	21.28 [21.29]	27.20 [27.20]	30.95 [30.96]
	0.01	3.470	8.493	21.27	27.16	30.89
	0.05	3.458	8.331	20.94	26.63	30.00
	0.1	3.430	8.057	20.08	25.49	28.22
0.2	0.002	3.471 [3.471]	8.195 [8.195]	21.04 [21.04]	24.81 [24.81]	28.23 [28.23]
	0.01	3.470	8.182	21.01	24.71	28.17
	0.05	3.458	8.020	20.60	23.91	27.31
	0.1	3.430	7.754	19.70	22.70	25.67
0.4	0.002	3.471 [3.471]	6.939 [6.940]	19.26 [19.26]	21.25 [21.26]	22.07 [22.07]
	0.01	3.470	6.924	19.16	21.19	22.03
	0.05	3.457	6.768	18.39	20.44	21.61
	0.1	3.429	6.547	17.34	19.15	20.67
0.6	0.002	3.470 [3.470]	5.141 [5.142] <sup>96</sup>	16.46 [16.47]	17.71 [17.71]	21.56 [21.57]
	0.01	3.469	5.129	16.37	17.65	21.54
	0.05	3.457	5.024	15.66	17.02	21.21
	0.1	3.428	4.888	14.70	15.95	20.33

Note : [ ] : Huang and Leissa (2009) 之結果

表 3.1 具水平內部裂縫簡支方形薄板( $x_0/a = y_0/b = 0.5$ 、 $d/a = 0.6$ 、 $h/b = 0.01$ )

之無因次化頻率  $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$  收斂性分析

Mode No.	No. of Crack Functions ( $\bar{N}$ )	order of polynomial ( $I \times J$ )						文獻值
		5×5	6×6	7×7	8×8	9*9	10*10	
1(S)	0	19.74	19.73	19.73	19.73	19.73	19.73	[17.19] (17.33)
	1	19.68	19.67	19.67	19.67	19.66	19.66	
	4	17.19	17.19	17.18	17.18	17.17	17.17	
	5	17.17	17.16	17.15	17.15	17.15	17.15	
	6	17.16	17.15	17.15	17.15	17.14	17.14	
	7	17.15	17.14	17.14	17.14	17.14	17.14	
	8	17.15	17.14	17.13	17.13	17.13	17.13	
	0	49.45	49.45	49.30	49.30	49.30	49.30	
2(A)	1	49.08	49.04	48.85	48.82	48.79	48.76	[37.98] (37.75)
	4	37.94	37.92	37.89	37.87	37.86	37.83	
	5	37.83	37.82	37.80	37.79	37.78	37.77	
	6	37.79	37.78	37.77	37.75	37.74	37.73	
	7	37.77	37.75	37.75	37.72	37.71	37.71	
	8	37.74	37.73	37.72	37.70	37.69	37.69	
	0	49.45	49.45	49.30	49.30	49.30	49.30	
	1	49.43	49.42	49.28	49.28	49.27	49.27	
3(S)	4	48.24	48.22	48.22	48.21	48.20	48.19	[48.22] (48.26)
	5	48.15	48.15	48.15	48.15	48.15	48.14	
	6	48.15	48.15	48.14	48.14	48.14	48.14	
	7	48.14	48.14	48.13	48.13	48.13	48.13	
	8	48.14	48.14	48.13	48.13	48.13	48.13	
	0	79.05	79.05	78.84	78.84	78.84	78.84	
	1	79.01	79.00	78.79	78.78	78.78	78.77	
	4	75.56	75.43	75.43	75.41	75.41	75.39	
4(A)	5	75.41	75.38	75.37	75.35	75.35	75.34	[75.58] (75.23)
	6	75.37	75.35	75.35	75.32	75.32	75.31	
	7	75.35	75.34	75.33	75.31	75.31	75.30	
	8	75.32	75.32	75.31	75.30	75.29	75.28	
	0	139.1	99.93	99.93	98.54	98.54	98.52	
	1	137.8	99.32	99.26	97.86	97.81	97.78	
	4	79.79	79.66	79.57	79.46	79.43	79.42	
	5	79.38	79.36	79.34	79.33	79.32	79.32	
5(S)	6	79.33	79.31	79.31	79.30	79.30	79.29	[79.59] (80.32)
	7	79.31	79.29	79.28	79.27	79.26	79.25	
	8	79.31	79.26	79.25	79.24	79.22	79.22	

Note : [ ] : Stahl and Keer (1972) 之結果

( ) : Liew, Hung and Lim (1994) 之結果

表 3.2 具水平內部裂縫簡支方形中厚板 ( $x_0/a = y_0/b = 0.5$  、  $d/a = 0.3$  、  $h/b = 0.1$ ) 之無因次化頻率  $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$  收斂性分析

Mode No.	No. of Crack Functions ( $\bar{N}$ )	order of polynomial ( $I \times J$ )				
		5×5	6×6	7×7	8×8	9×9
1(S)	0	19.06	19.06	19.06	19.06	19.06
	1	18.32	18.26	18.23	18.23	18.21
	4	17.90	17.89	17.89	17.89	18.89
	5	17.89	17.88	17.88	17.88	17.88
	6	17.88	17.88	17.88	17.88	17.88
	7	17.88	17.88	17.88	17.88	17.88
	8	17.88	17.88	17.88	17.88	17.88
2(A)	0	45.56	45.56	45.45	45.45	45.45
	1	44.27	44.13	43.88	43.84	43.77
	4	43.50	43.47	43.47	43.46	43.46
	5	43.47	43.47	43.47	43.46	43.46
	6	43.46	43.46	43.46	43.46	43.46
	7	43.46	43.46	43.46	43.46	43.45
	8	43.46	43.46	43.45	43.45	43.44
3(S)	0	45.56	45.56	45.45	45.45	45.45
	1	45.49	45.48	45.37	45.36	45.35
	4	45.30	45.30	45.29	45.29	45.29
	5	45.29	45.29	45.29	45.29	45.29
	6	45.29	45.29	45.28	45.28	45.28
	7	45.28	45.28	45.28	45.28	45.28
	8	45.28	45.28	45.28	45.28	45.28
4(A)	0	69.87	69.86	69.72	69.72	69.72
	1	69.31	69.29	69.13	69.10	69.09
	4	68.93	68.92	68.91	68.91	68.91
	5	68.92	68.91	68.91	68.91	68.91
	6	68.91	68.91	68.91	68.91	68.91
	7	68.91	68.91	68.91	68.91	68.91
	8	68.91	68.91	68.91	68.91	68.89
5(S)	0	109.1	85.91	85.89	84.94	84.94
	1	102.2	79.88	79.66	78.46	78.32
	4	76.11	76.09	76.05	76.04	76.00
	5	76.03	76.01	76.00	76.00	75.99
	6	76.00	76.00	76.00	76.00	75.99
	7	76.00	75.99	75.99	75.99	75.99
	8	75.99	75.99	75.99	75.99	75.99

表 3.3 具水平內部裂縫簡支方形中厚板 ( $x_0/a = y_0/b = 0.5$  、  $d/a = 0.6$  、  $h/b = 0.1$ ) 之無因次化頻率  $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$  收斂性分析

Mode No.	No. of Crack Functions ( $\bar{N}$ )	order of polynomial ( $I \times J$ )					
		4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9
1(S)	3	16.30	16.28	16.27	16.26	16.26	16.25
	4	16.25	16.25	16.24	16.24	16.23	16.23
	5	16.24	16.23	16.23	16.23	16.23	16.23
	6	16.24	16.23	16.23	16.23	16.23	16.23
	7	16.24	16.23	16.23	16.23	16.23	16.23
	8	16.24	16.23	16.23	16.23	16.23	16.23
2(A)	3	31.92	31.85	31.76	31.75	31.72	31.71
	4	31.74	31.71	31.69	31.69	31.67	31.66
	5	31.71	31.70	31.67	31.66	31.66	31.66
	6	31.67	31.66	31.65	31.65	31.65	31.65
	7	31.66	31.65	31.65	31.65	31.65	31.65
	8	31.66	31.65	31.65	31.65	31.65	31.65
3(S)	3	44.44	44.27	44.25	44.20	44.19	44.18
	4	44.27	44.13	44.12	44.12	44.12	44.11
	5	44.21	44.11	44.11	44.11	44.11	44.10
	6	44.20	44.10	44.10	44.10	44.10	44.10
	7	44.20	44.10	44.10	44.10	44.10	44.10
	8	44.19	44.10	44.10	44.10	44.10	44.10
4(A)	3	64.40	64.35	64.29	64.24	64.21	64.21
	4	64.27	64.26	64.18	64.17	64.16	64.16
	5	64.19	64.19	64.16	64.16	64.16	64.16
	6	64.17	64.17	64.16	64.16	64.16	64.16
	7	64.16	64.16	64.16	64.16	64.16	64.16
	8	64.16	64.16	64.16	64.16	64.16	64.16
5(S)	3	69.35	69.16	69.15	69.11	68.88	68.86
	4	68.97	68.90	68.83	68.81	68.79	68.79
	5	68.80	68.79	68.78	68.78	68.77	68.77
	6	68.78	68.78	68.77	68.77	68.77	68.77
	7	68.78	68.77	68.77	68.77	68.77	68.77
	8	68.78	68.77	68.77	68.77	68.77	68.77

表 3.4 具角度內部裂縫簡支方形中厚板 ( $x_0/a = y_0/b = 0.5$ 、 $d/a = 0.6$ 、 $\alpha = 30^\circ$ 、 $h/b = 0.1$ ) 之無因次化頻率  $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$  收斂性分析

Mode No.	No. of Crack Functions ( $\bar{N}$ )	order of polynomial ( $I \times J$ )				
		5×5	6×6	7×7	8×8	9×9
1(S)	0	19.06	19.06	19.06	19.06	19.06
	1	17.14	17.04	17.00	16.97	16.90
	3	15.99	15.98	15.97	15.97	15.95
	4	15.94	15.93	15.93	15.93	15.93
	5	15.93	15.92	15.92	15.92	15.92
	6	15.92	15.92	15.92	15.92	15.92
2(A)	0	45.56	45.56	45.45	45.45	45.45
	1	34.61	34.15	34.08	33.92	33.76
	3	31.85	31.81	31.78	31.76	31.74
	4	31.74	31.73	31.72	31.70	31.70
	5	31.72	31.70	31.70	31.69	31.69
	6	31.70	31.69	31.69	31.69	31.69
3(S)	0	45.56	45.56	45.45	45.45	45.45
	1	44.58	44.44	44.30	44.25	44.21
	3	43.77	43.73	43.69	43.66	43.65
	4	43.53	43.52	43.52	43.51	43.51
	5	43.49	43.49	43.49	43.49	43.48
	6	43.49	43.49	43.48	43.48	43.48
4(A)	0	69.87	69.86	69.72	69.72	69.72
	1	66.75	66.28	65.88	65.72	65.55
	3	63.35	63.32	63.28	63.26	63.25
	4	63.23	63.21	63.20	63.19	63.18
	5	63.18	63.17	63.17	63.17	63.16
	6	63.17	63.17	63.16	63.16	63.16
5(S)	0	109.1	85.91	85.89	84.94	84.94
	1	76.61	73.99	73.52	73.05	72.63
	3	69.85	69.76	69.68	69.65	69.62
	4	69.66	69.63	69.60	69.57	69.57
	5	69.61	69.58	69.57	69.56	69.55
	6	69.57	69.57	69.56	69.55	69.55

表 3.5 具水平內部裂縫懸臂方形中厚板( $x_0/a = y_0/b = 0.5$ 、 $d/a = 0.6$ 、 $h/b = 0.1$ )

之無因次化頻率  $\omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$  收斂性分析

Mode No.	No. of Corner functions	order of polynomial ( $I \times J$ )				
		5×5	6×6	7×7	8×8	9×9
1(S)	0	3.433	3.433	3.431	3.431	3.431
	1	3.430	3.429	3.427	3.427	3.426
	4	3.420	3.419	3.418	3.418	3.418
	5	3.419	3.418	3.418	3.418	3.418
	6	3.418	3.418	3.418	3.418	3.418
	7	3.418	3.418	3.418	3.418	3.418
	8	3.418	3.418	3.418	3.418	3.418
2(A)	0	8.170	8.091	8.088	8.063	8.063
	1	8.092	7.955	7.953	7.949	7.948
	4	7.897	7.880	7.878	7.875	7.875
	5	7.879	7.877	7.876	7.872	7.872
	6	7.877	7.873	7.873	7.872	7.872
	7	7.872	7.872	7.872	7.872	7.871
	8	7.872	7.872	7.871	7.871	7.871
3(S)	0	20.17	20.11	20.09	20.09	20.08
	1	20.14	20.09	20.06	20.06	20.05
	4	19.89	19.88	19.87	19.86	19.86
	5	19.87	19.876	19.86	19.86	19.85
	6	19.86	19.86	19.85	19.85	19.85
	7	19.86	19.85	19.85	19.85	19.85
	8	19.85	19.85	19.85	19.85	19.85
4(A)	0	25.81	25.68	25.51	25.51	25.49
	1	23.23	23.16	22.98	22.94	22.79
	4	20.77	20.76	20.75	20.75	20.74
	5	20.74	20.74	20.74	20.74	20.73
	6	20.74	20.73	20.73	20.73	20.73
	7	20.73	20.73	20.73	20.73	20.73
	8	20.73	20.73	20.73	20.73	20.73
5(S)	0	28.60	28.35	28.30	28.25	28.24
	1	27.58	27.18	27.09	26.95	26.92
	4	26.16	26.14	26.13	26.11	26.11
	5	26.13	26.12	26.11	26.10	26.10
	6	26.11	26.10	26.10	26.10	26.10
	7	26.10	26.10	26.10	26.10	26.10
	8	26.10	26.10	26.10	26.10	26.10

表 3.6 具不同內部裂縫簡支方形中厚板無因次化頻率  $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$

(  $h/b = 0.1$  )

$\alpha$	$(x_0/a, y_0/b)$	$d/a$	Mode				
			1	2	3	4	5
$0^\circ$	$(0.5, 0.5)$	0	19.06	45.45	45.45	69.72	84.93
		0.1	18.86	45.35	45.45	69.56	83.20
		0.2	18.43	44.84	45.41	69.28	79.70
		0.3	17.88	43.46	45.29	68.91	76.00
		0.4	17.29	40.65	45.02	68.22	72.87
		0.5	16.72	36.43	44.62	66.81	70.50
		0.6	16.23	31.65	44.10	64.16	68.77
	$(0.5, 0.75)$	0.1	18.95	44.69	45.41	69.71	83.94
		0.2	18.69	43.05	45.34	69.59	81.39
		0.3	18.29	41.07	45.22	69.20	76.28
		0.4	17.77	39.07	45.01	66.38	68.38
		0.5	17.14	37.15	44.66	55.52	67.13
		0.6	16.46	35.17	44.14	47.38	65.60
$15^\circ$	$(0.5, 0.5)$	0.1	18.85	45.35	45.44	69.54	83.13
		0.2	18.44	44.85	45.41	69.19	80.06
		0.3	17.85	43.47	45.28	68.52	76.61
		0.4	17.24	40.65	44.98	67.42	74.11
		0.5	16.66	36.40	44.51	65.90	72.09
		0.6	16.13	31.67	43.91	63.78	69.88
$30^\circ$	$(0.5, 0.5)$	0.1	18.88	45.35	45.44	69.54	83.59
		0.2	18.43	44.84	45.40	68.99	80.60
		0.3	17.85	43.44	45.24	67.96	78.07
		0.4	17.21	40.63	44.88	66.47	76.49
		0.5	16.55	36.42	44.29	64.81	74.48
		0.6	15.92	31.69	43.48	63.16	69.55
$45^\circ$	$(0.5, 0.5)$	0.1	18.87	45.35	45.44	69.52	83.53
		0.2	18.43	44.84	45.40	68.89	80.93
		0.3	17.85	43.44	45.22	67.71	78.87
		0.4	17.18	40.62	44.83	66.07	77.88
		0.5	16.49	36.42	44.17	64.39	74.22
		0.6	15.80	31.69	43.25	62.87	69.19

表 3.7 具不同內部裂縫簡支方形中厚板無因次化頻率折減量比  $\Delta\omega$  (%)(  $h/b = 0.1$  )

$\alpha$	$(x_0/a, y_0/b)$	$d/a$	Mode				
			1	2	3	4	5
$0^\circ$	$(0.5, 0.5)$	0.1	1.05	0.22	0.00	0.23	2.04
		0.2	3.31	1.34	0.09	0.63	6.16
		0.3	6.19	4.38	0.35	1.16	10.51
		0.4	9.29	10.56	0.95	2.15	14.20
		0.5	12.28	19.85	1.83	4.17	16.99
		0.6	14.85	30.36	2.97	7.97	19.03
	$(0.5, 0.75)$	0.1	0.58	1.67	0.09	0.01	1.17
		0.2	1.94	5.28	0.24	0.19	4.17
		0.3	4.04	9.64	0.51	0.75	10.18
		0.4	6.77	14.04	0.97	4.79	19.49
		0.5	10.07	18.26	1.74	20.37	20.96
		0.6	13.64	22.62	2.88	32.04	22.76
$15^\circ$	$(0.5, 0.5)$	0.1	1.10	0.22	0.02	0.26	2.12
		0.2	3.25	1.32	0.09	0.76	5.73
		0.3	6.35	4.36	0.37	1.72	9.80
		0.4	9.55	10.56	1.03	3.30	12.74
		0.5	12.59	19.91	2.07	5.48	15.12
		0.6	15.37	30.32	3.39	8.52	17.72
$30^\circ$	$(0.5, 0.5)$	0.1	0.94	0.22	0.02	0.26	1.58
		0.2	3.31	1.34	0.11	1.05	5.10
		0.3	6.35	4.42	0.46	2.52	8.08
		0.4	9.71	10.61	1.25	4.66	9.94
		0.5	13.17	19.87	2.55	7.04	12.30
		0.6	16.47	30.28	4.33	9.41	18.11
$45^\circ$	$(0.5, 0.5)$	0.1	1.00	0.22	0.02	0.29	1.65
		0.2	3.31	1.34	0.11	1.19	4.71
		0.3	6.35	4.42	0.51	2.88	7.14
		0.4	9.86	10.63	1.36	5.24	8.30
		0.5	13.48	19.87	2.82	7.64	12.61
		0.6	17.10	30.28	4.84	9.83	18.53

表 3.8 具不同內部裂縫懸臂方形中厚板無因次化頻率  $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$

(  $h/b = 0.1$  )

$\alpha$	$(x_0/a, y_0/b)$	$d/a$	Mode				
			1	2	3	4	5
$0^\circ$	$(0.5, 0.5)$	0	3.430	8.057	20.08	25.49	28.22
		0.1	3.430	8.038	20.08	25.21	28.21
		0.2	3.429	8.005	20.08	24.58	28.16
		0.3	3.428	7.971	20.08	23.72	28.02
		0.4	3.426	7.937	20.07	22.71	27.71
		0.5	3.422	7.904	20.03	21.65	27.13
	$(0.5, 0.75)$	0.6	3.418	7.871	19.85	20.73	26.10
		0.1	3.430	8.040	20.08	25.38	28.21
		0.2	3.430	8.010	20.07	25.11	28.15
		0.3	3.429	7.978	20.07	24.67	28.03
		0.4	3.428	7.947	20.06	24.03	27.81
		0.5	3.426	7.917	20.04	23.16	27.41
$15^\circ$	$(0.5, 0.5)$	0.6	3.423	7.888	19.87	22.03	26.80
		0.1	3.430	8.035	20.07	25.21	28.22
		0.2	3.428	8.000	20.05	24.64	28.17
		0.3	3.424	7.949	20.04	23.79	28.04
		0.4	3.419	7.900	20.02	22.84	27.77
		0.5	3.413	7.842	20.00	21.85	27.26
	$(0.5, 0.5)$	0.6	3.402	7.774	19.94	20.85	26.31
		0.1	3.428	8.036	20.04	25.28	28.22
		0.2	3.422	7.987	19.97	24.75	28.18
		0.3	3.414	7.907	19.90	24.07	28.09
		0.4	3.400	7.822	19.80	23.05	27.90
		0.5	3.382	7.711	19.70	22.44	27.55
$30^\circ$	$(0.5, 0.5)$	0.6	3.356	7.576	19.58	21.62	26.86
		0.1	3.428	8.041	20.00	25.33	28.22
		0.2	3.415	7.986	19.84	24.96	28.20
		0.3	3.403	7.922	19.69	24.51	28.15
		0.4	3.373	7.795	19.36	23.86	28.06
		0.5	3.336	7.648	19.07	23.26	27.86
	$(0.5, 0.5)$	0.6	3.287	7.395	18.64	22.46	27.38

表 3.9 具不同內部裂縫懸臂方形中厚板無因次化頻率折減量比  $\Delta\omega$  (%)(  $h/b = 0.1$  )

$\alpha$	$(x_0/a, y_0/b)$	$d/a$	Mode				
			1	2	3	4	5
$0^\circ$	$(0.5, 0.5)$	0.1	0.00	0.24	0.00	1.10	0.04
		0.2	0.03	0.65	0.00	3.57	0.21
		0.3	0.06	1.07	0.00	6.94	0.71
		0.4	0.12	1.49	0.05	10.91	1.81
		0.5	0.23	1.90	0.25	15.06	3.86
		0.6	0.35	2.31	1.15	18.67	7.51
	$(0.5, 0.75)$	0.1	0.00	0.21	0.00	0.43	0.04
		0.2	0.00	0.58	0.05	1.49	0.25
		0.3	0.03	0.98	0.05	3.22	0.67
		0.4	0.06	1.37	0.10	5.73	1.45
		0.5	0.12	1.74	0.20	9.14	2.87
		0.6	0.20	2.10	1.05	13.57	5.03
$15^\circ$	$(0.5, 0.5)$	0.1	0.00	0.27	0.05	1.10	0.00
		0.2	0.06	0.71	0.15	3.33	0.18
		0.3	0.17896	1.34	0.20	6.67	0.64
		0.4	0.32	1.95	0.30	10.40	1.59
		0.5	0.50	2.67	0.40	14.28	3.40
		0.6	0.82	3.51	0.70	18.20	6.77
		0.1	0.06	0.26	0.20	0.82	0.00
$30^\circ$	$(0.5, 0.5)$	0.2	0.23	0.87	0.55	2.90	0.14
		0.3	0.47	1.86	0.90	5.57	0.46
		0.4	0.87	2.92	1.39	9.57	1.13
		0.5	1.40	4.29	1.89	11.97	2.37
		0.6	2.16	5.97	2.49	15.18	4.82
		0.1	0.06	0.20	0.40	0.63	0.00
$45^\circ$	$(0.5, 0.5)$	0.2	0.44	0.88	1.20	2.08	0.07
		0.3	0.79	1.68	1.94	3.84	0.25
		0.4	1.66	3.25	3.59	6.39	0.57
		0.5	2.74	5.08	5.03	8.75	1.28
		0.6	4.17	8.22	7.17	11.89	2.98

表 3.10 具不同內部裂縫懸臂矩形中厚板無因次化頻率  $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$

(  $a/b = 2$  、  $h/b = 0.1$  )

$\alpha$	$(x_0/a, y_0/b)$	$d/a$	Mode				
			1	2	3	4	5
$0^\circ$	$(0.5, 0.5)$	0	3.422	14.18	21.09	45.72	58.00
		0.1	3.422	14.17	21.09	45.72	58.00
		0.2	3.422	14.14	21.08	45.67	58.00
		0.3	3.422	14.10	21.08	45.60	57.99
		0.4	3.422	14.06	21.07	45.46	57.97
		0.5	3.422	14.03	21.06	45.19	57.94
		0.6	3.422	13.99	21.05	44.78	57.89
$30^\circ$	$(0.5, 0.5)$	0.1	3.421	14.17	21.06	45.72	58.00
		0.2	3.419	14.13	21.01	45.68	57.94
		0.3	3.416	14.05	20.93	45.59	57.92
		0.4	3.413	13.97	20.86	45.46	57.78
		0.5	3.408	13.85	20.76	45.24	57.51
		0.6	3.402	13.71	20.67	44.91	57.08
$90^\circ$	$(0.5, 0.5)$	0.1	3.418	14.17	20.97	45.72	58.00
		0.2	3.406	14.14	20.68	45.70	57.95
		0.3	3.387	14.10	20.26	45.65	57.83
		0.4	3.361	14.07	19.71	45.58	57.58
		0.5	3.326	14.03	19.04	45.48	57.12
		0.6	3.278	14.00	18.25	45.31	56.34

表 3.11 具不同內部裂縫懸臂矩形厚板無因次化頻率折減量比  $\Delta\omega$  (%)

(  $a/b = 2$  、  $h/b = 0.1$  )

$\alpha$	$(x_0/a, y_0/b)$	$d/a$	Mode				
			1	2	3	4	5
$0^\circ$	$(0.5, 0.5)$	0.1	0.00	0.07	0.00	0.00	0.00
		0.2	0.00	0.28	0.05	0.11	0.00
		0.3	0.00	0.56	0.05	0.26	0.02
		0.4	0.00	0.85	0.09	0.57	0.05
		0.5	0.00	1.06	0.14	1.16	0.10
		0.6	0.00	1.34	0.19	2.06	0.19
$30^\circ$	$(0.5, 0.5)$	0.1	0.03	0.07	0.14	0.00	0.00
		0.2	0.09	0.35	0.38	0.09	0.10
		0.3	0.18	0.92	0.76	0.28	0.14
		0.4	0.26	1.48	1.09	0.57	0.38
		0.5	0.41	2.33	1.56	1.05	0.84
		0.6	0.58	3.31	1.99	1.77	1.59
$90^\circ$	$(0.5, 0.5)$	0.1	0.12	0.07	0.57	0.00	0.00
		0.2	0.47	0.28	1.94	0.04	0.09
		0.3	1.02	0.56	3.94	0.15	0.29
		0.4	1.78	0.78	6.54	0.31	0.72
		0.5	2.81	1.06	9.72	0.52	1.52
		0.6	4.21	1.27	13.47	0.90	2.86

表 3.12 具不同內部裂縫懸臂矩形中厚板無因次化頻率  $\omega a^2 \sqrt{\rho h / D}$

(  $a/b = 2$  、  $h/b = 0.1$  )

$\alpha$	$(x_0/a, y_0/b)$	$d/a$	Mode				
			1	2	3	4	5
$0^\circ$	$(0.25, 0.5)$	0	3.422	14.18	21.09	45.72	58.00
		0.1	3.422	14.17	21.09	45.72	57.99
		0.2	3.420	14.13	21.09	45.66	57.95
		0.3	3.418	14.09	21.08	45.60	57.92
		0.4	3.416	14.05	21.08	45.53	57.87
		0.5	3.413	14.00	21.08	45.40	57.80
		0.6	3.408	13.96	21.07	45.22	57.74
$30^\circ$	$(0.25, 0.5)$	0.1	3.419	14.16	21.09	45.72	57.96
		0.2	3.413	14.13	21.08	45.70	57.88
		0.3	3.401	14.04	21.07	45.60	57.69
		0.4	3.382	13.94	21.04	45.45	57.50
		0.5	3.369	13.83	21.00	45.27	57.22
		0.6	3.335	13.67	20.88	44.96	56.90
$90^\circ$	$(0.25, 0.5)$	0.1	3.405	14.16	21.08	45.72	57.80
		0.2	3.363	14.12	21.06	45.68	57.28
		0.3	3.299	14.08	21.02	45.62	56.50
		0.4	3.214	14.04	20.96	45.56	55.49
		0.5	3.104	14.00	20.84	45.46	54.22
		0.6	2.972	13.95	20.69	45.36	52.78

表 3.13 具不同內部裂縫懸臂矩形中厚板無因次化頻率折減量比  $\Delta\omega$  (%)

(  $a/b = 2$  、  $h/b = 0.1$  )

$\alpha$	$(x_0/a, y_0/b)$	$d/a$	Mode				
			1	2	3	4	5
$0^\circ$	$(0.25, 0.5)$	0.1	0.00	0.07	0.00	0.00	0.02
		0.2	0.06	0.35	0.00	0.13	0.09
		0.3	0.12	0.63	0.05	0.26	0.14
		0.4	0.18	0.92	0.05	0.42	0.22
		0.5	0.26	1.27	0.05	0.70	0.34
		0.6	0.41	1.55	0.09	1.09	0.45
$30^\circ$	$(0.25, 0.5)$	0.1	0.09	0.14	0.00	0.00	0.07
		0.2	0.26	0.35	0.05	0.04	0.21
		0.3	0.61	0.99	0.09	0.26	0.53
		0.4	1.17	1.69	0.24	0.59	0.86
		0.5	1.55	2.47	0.43	0.98	1.34
		0.6	2.54	3.60	1.00	1.66	1.90
$90^\circ$	$(0.25, 0.5)$	0.1	0.50	0.14	0.05	0.00	0.34
		0.2	1.72	0.42	0.14	0.09	1.24
		0.3	3.59	3.96	0.71	0.33	2.59
		0.4	6.08	0.99	0.62	0.35	4.33
		0.5	9.29	1.27	1.19	0.57	6.52
		0.6	13.15	1.62	1.90	0.79	9.00

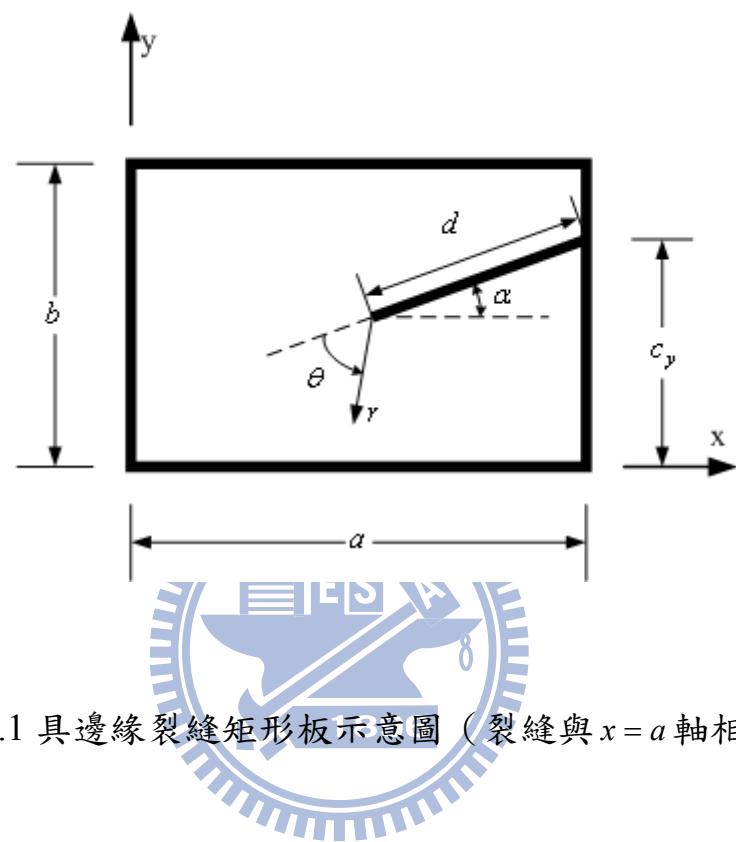


圖 2.1 具邊緣裂縫矩形板示意圖（裂縫與  $x=a$  軸相交）

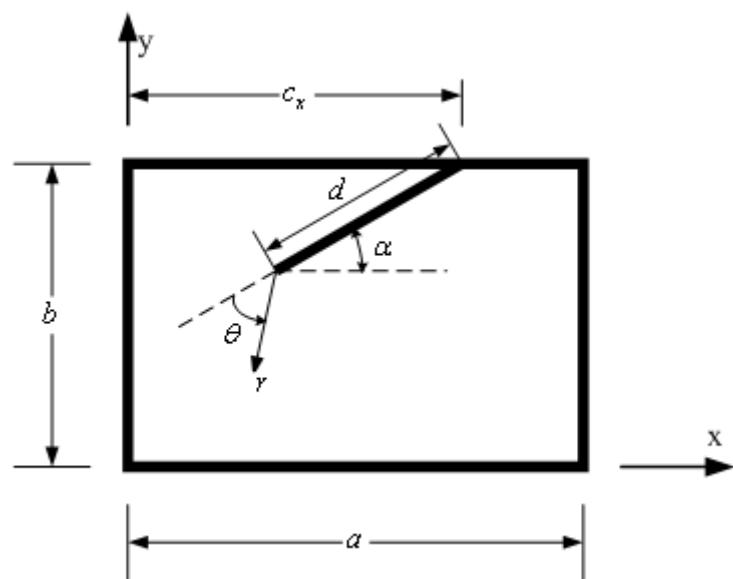


圖 2.2 具邊緣裂縫矩形板示意圖 (裂縫與  $y = b$  軸相交)



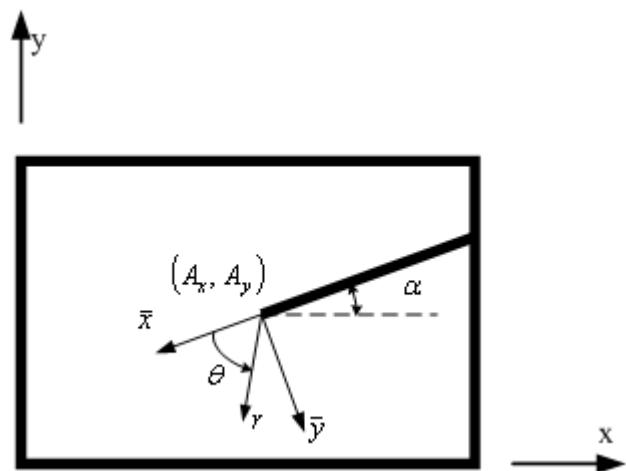


圖 2.3 座標轉換示意圖

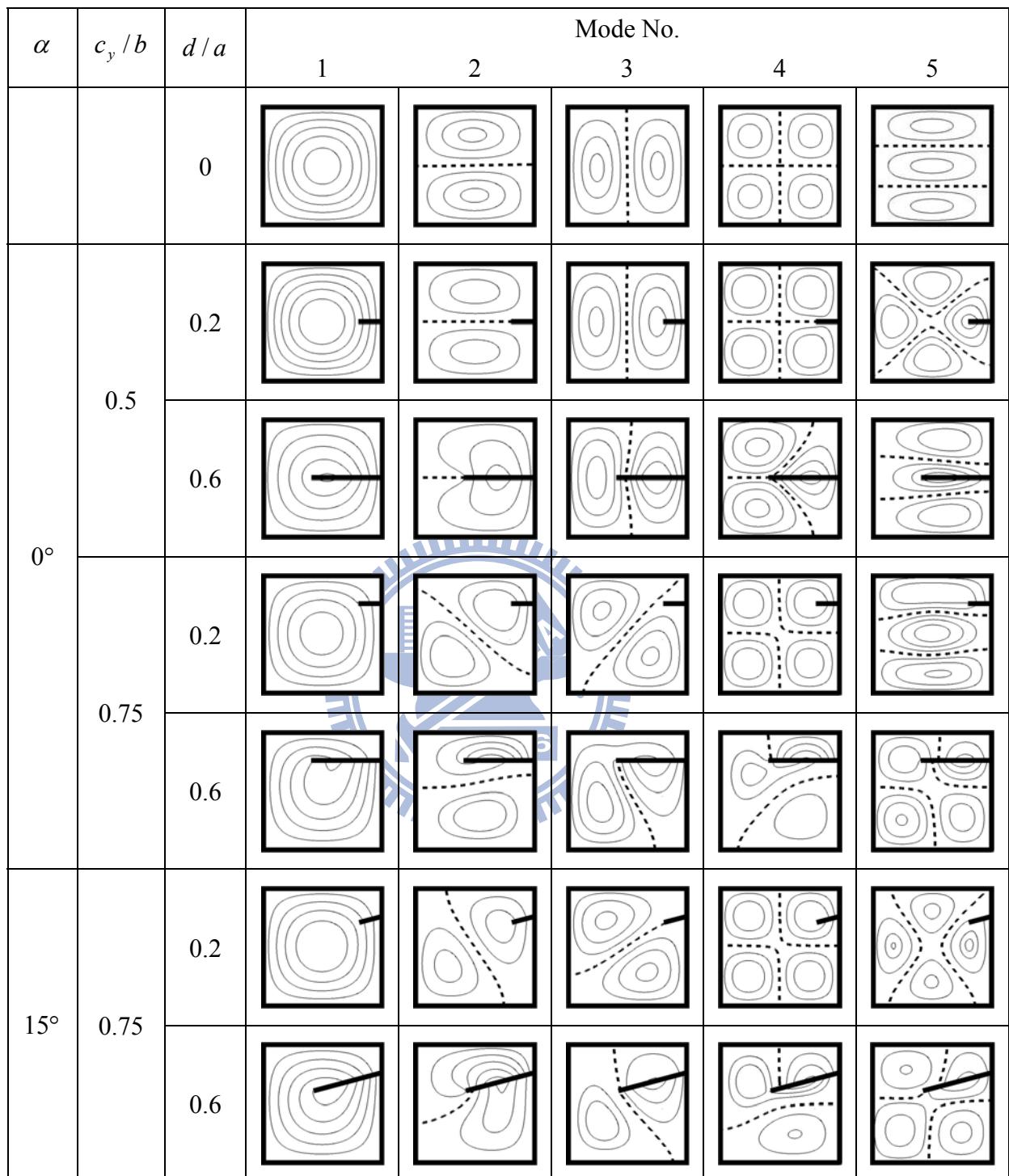


圖 2.4 具邊緣裂縫簡支方形板模態圖

(虛線表各模態之節點線)

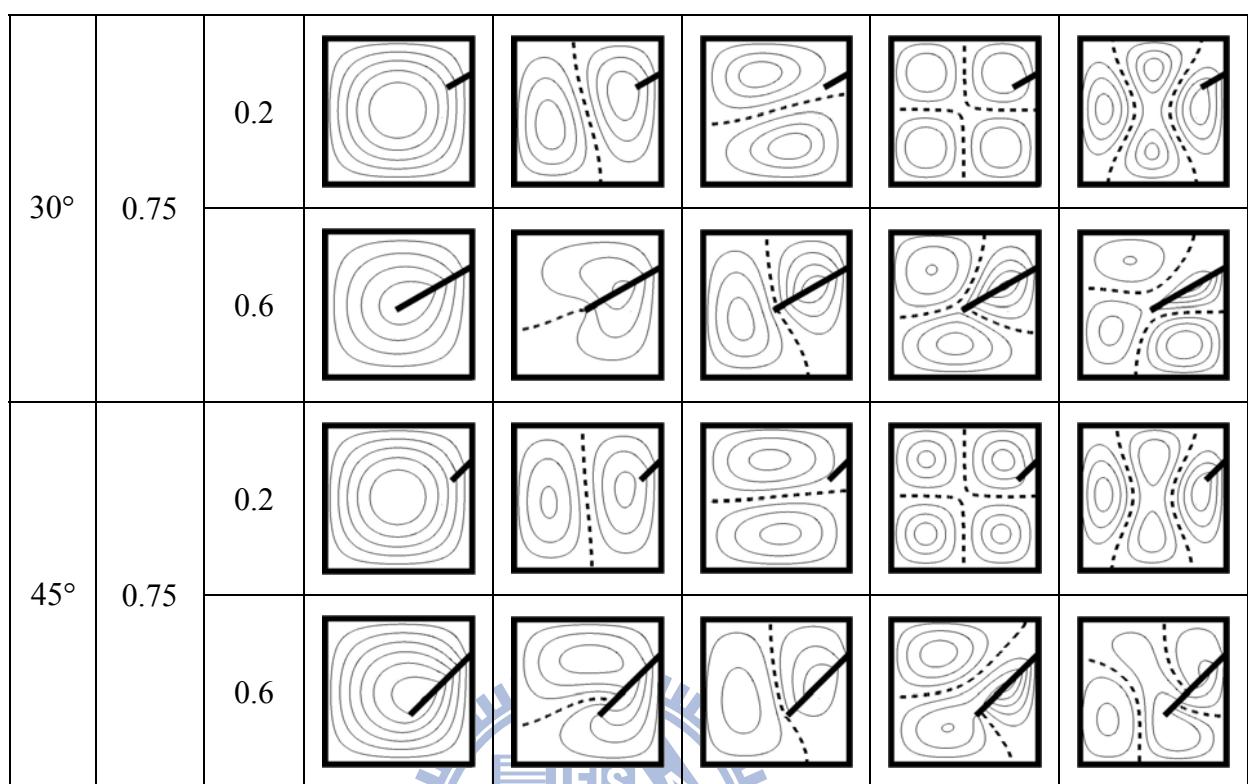


圖 2.4 (續上頁)

1896

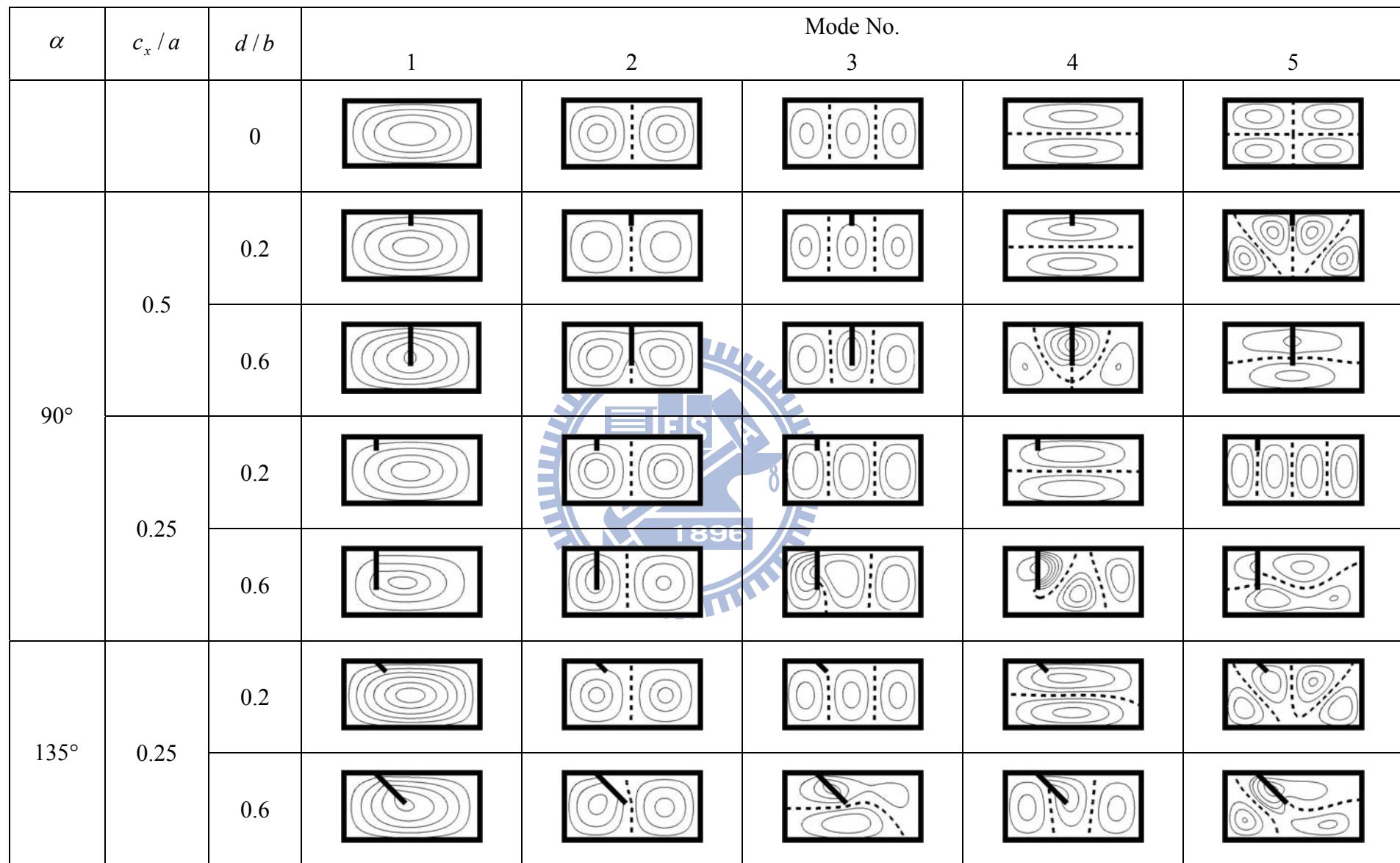


圖 2.5 具頂部裂縫簡支矩形板模態圖

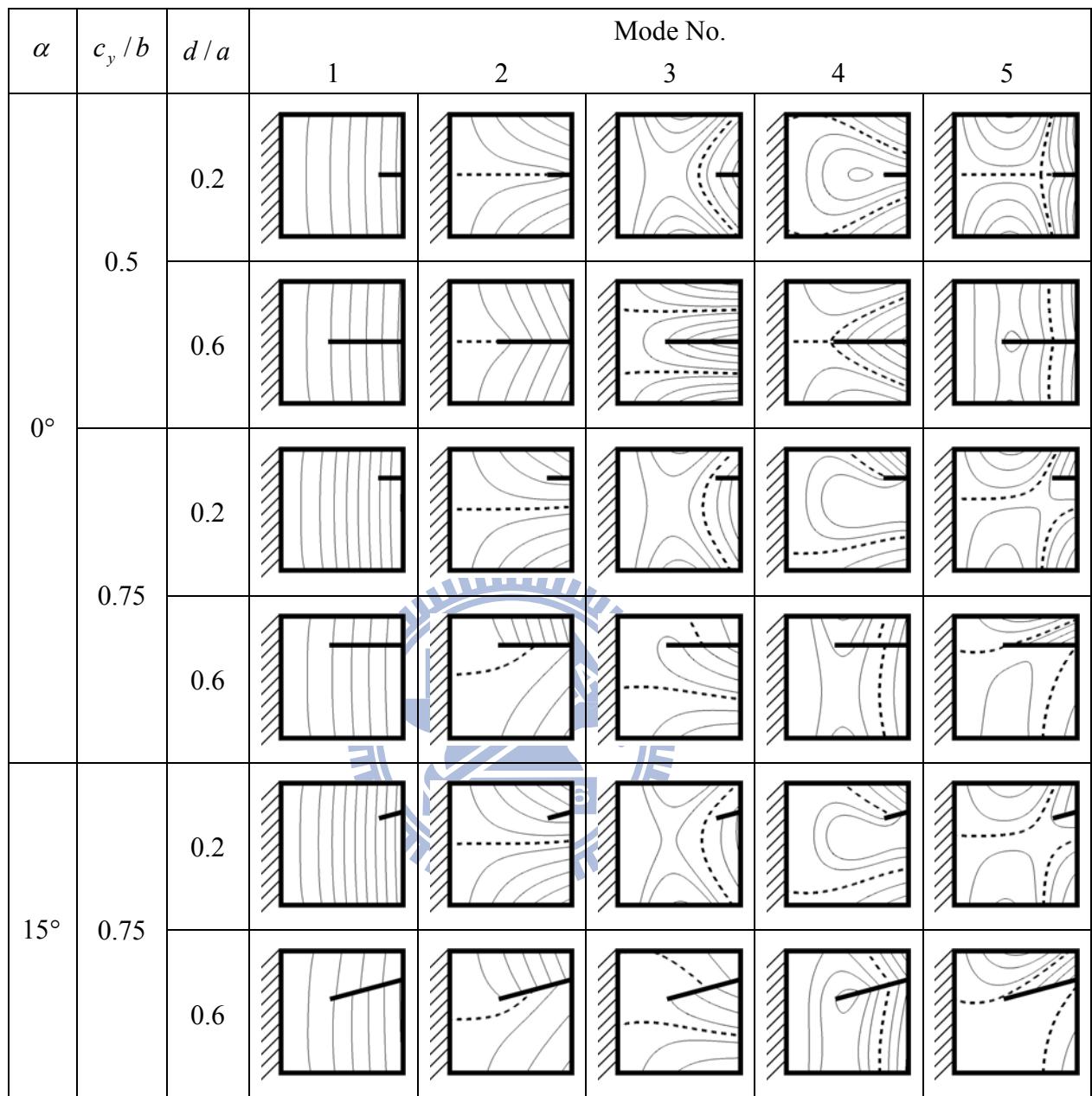


圖 2.6 具邊緣裂縫懸臂方形板模態圖

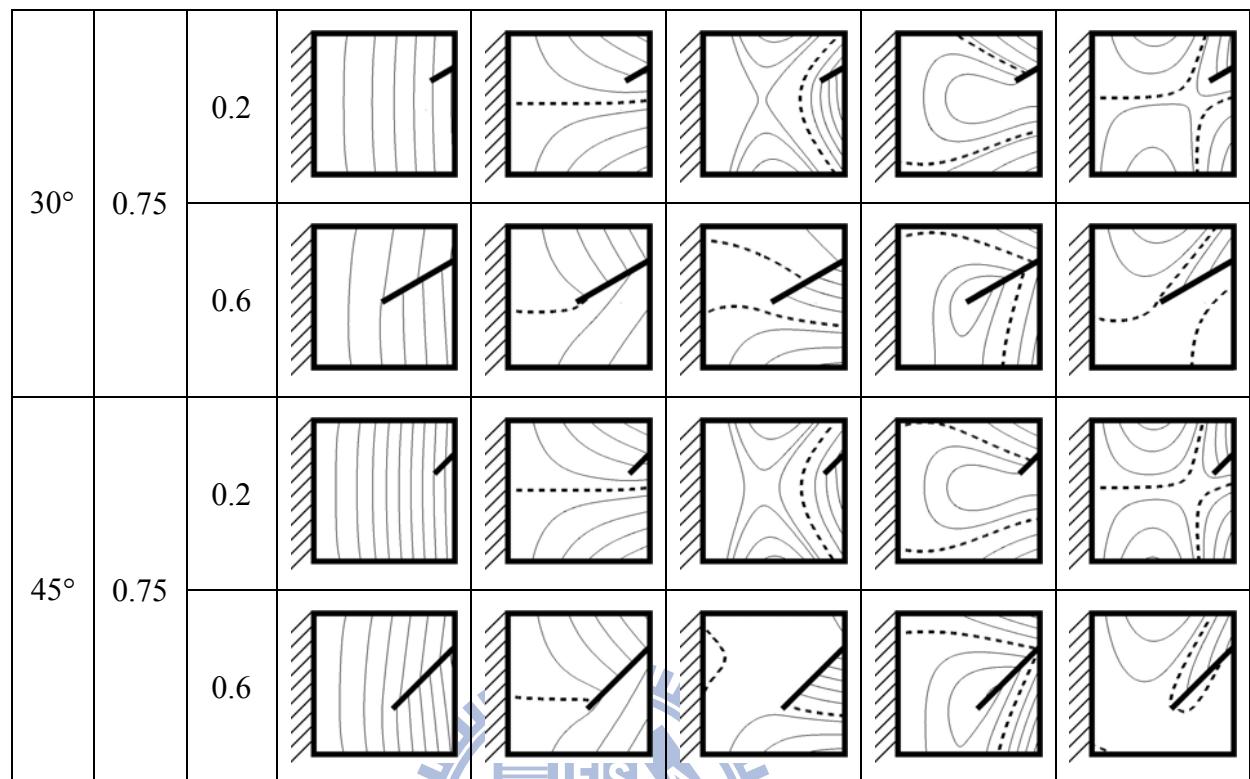


圖 2.6 (續上頁)



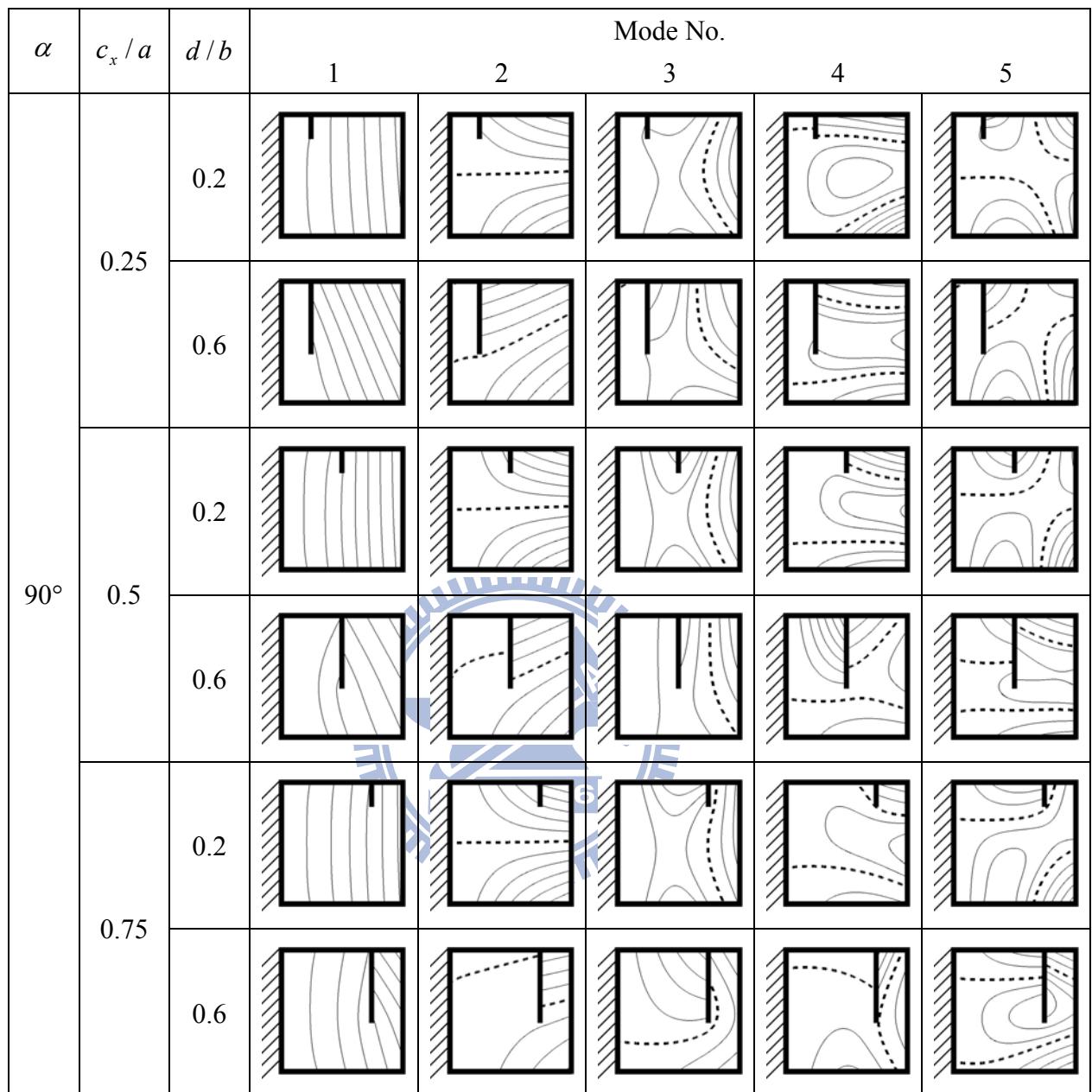


圖 2.7 具頂部裂縫懸臂方形板模態圖

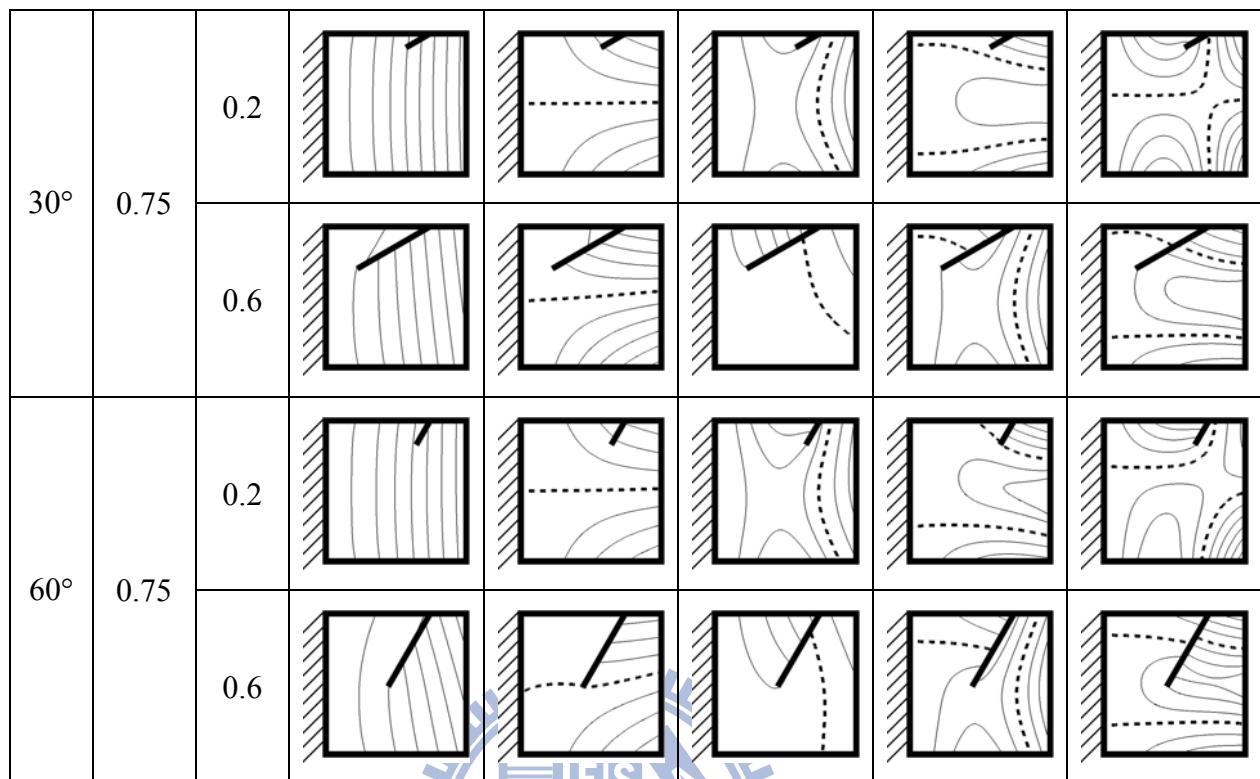


圖 2.7 (續上頁)

1896

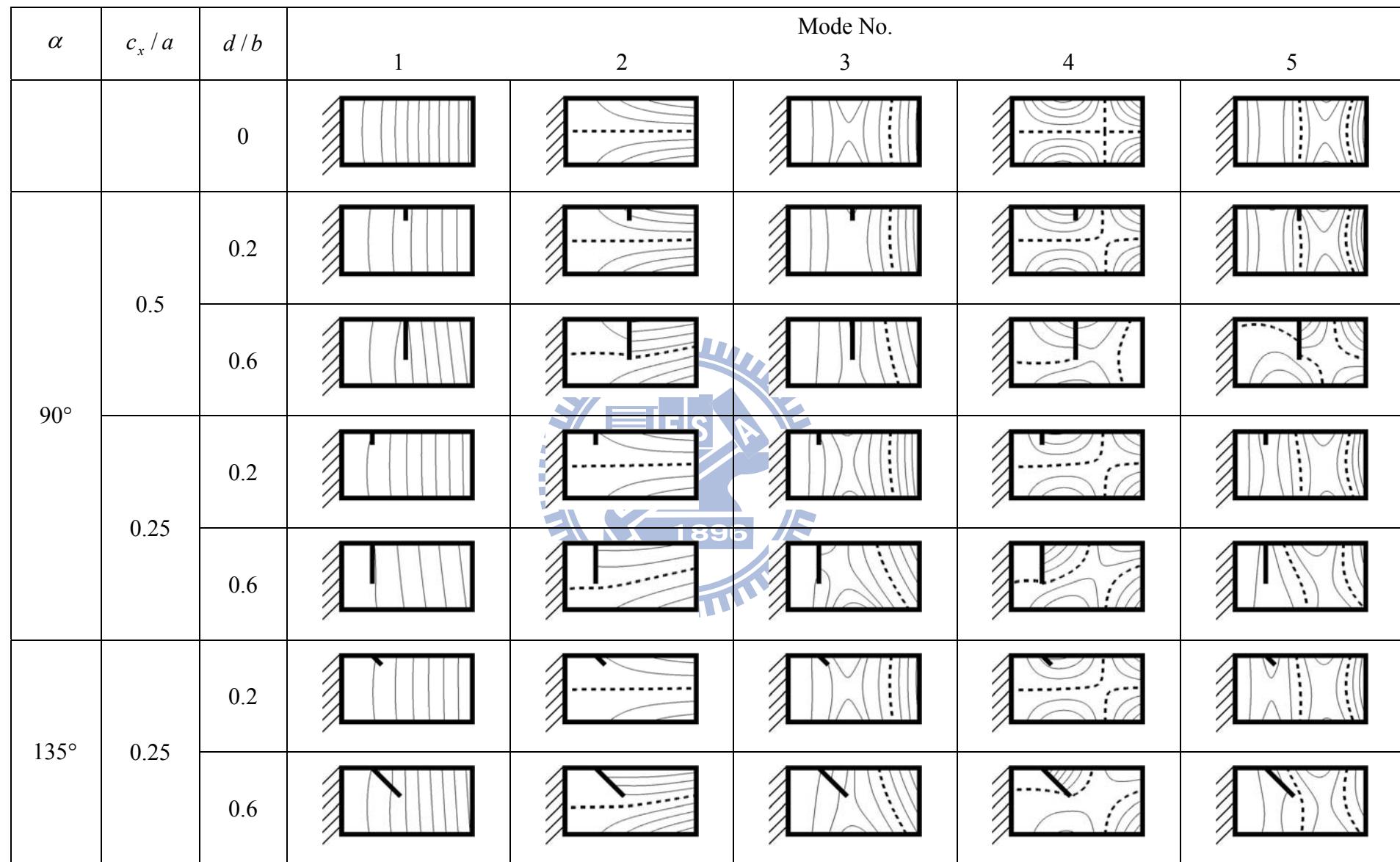


圖 2.8 具頂部裂縫懸臂矩形板模態圖

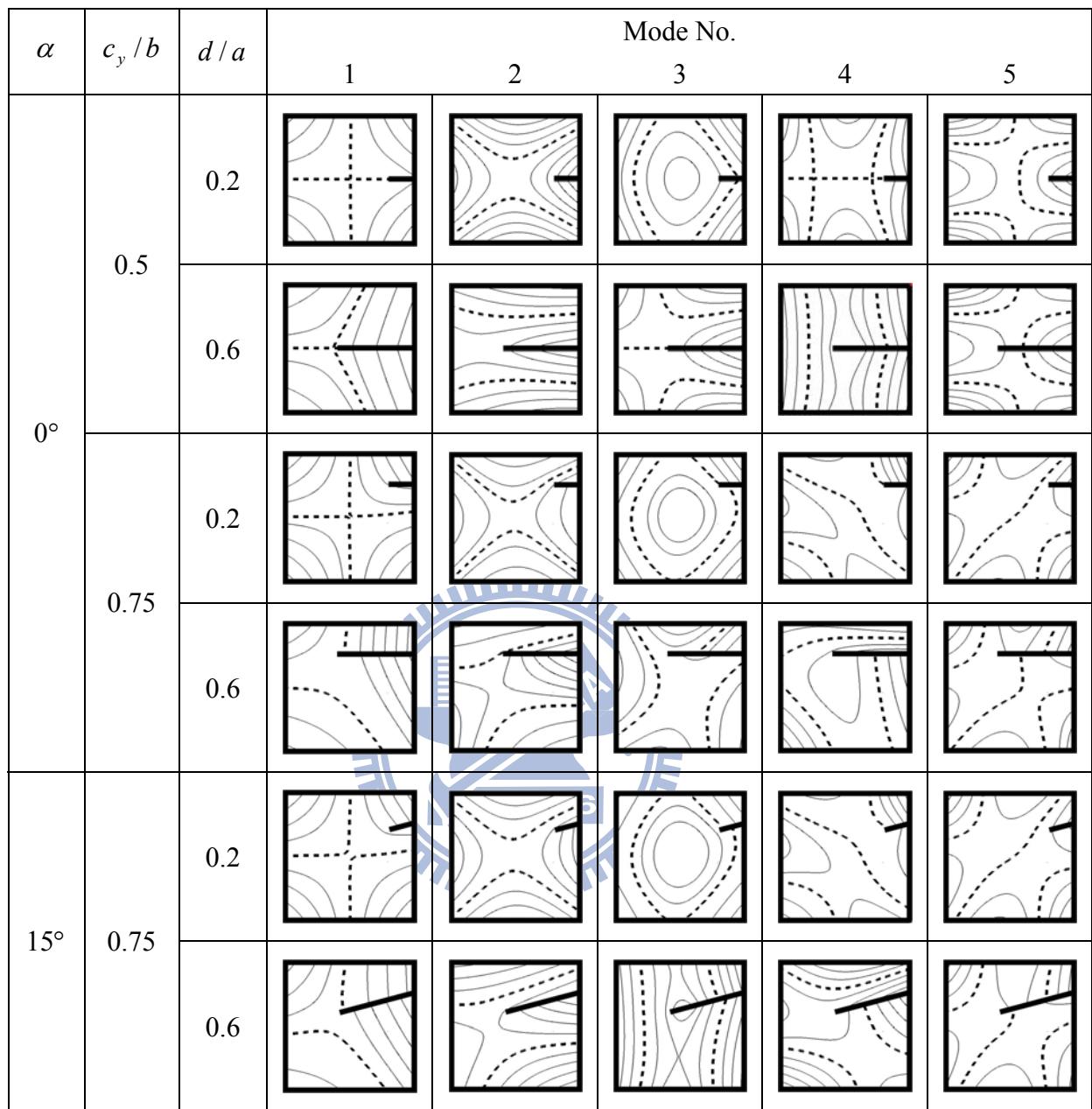


圖 2.9 具邊緣裂縫四邊自由端方形板模態圖

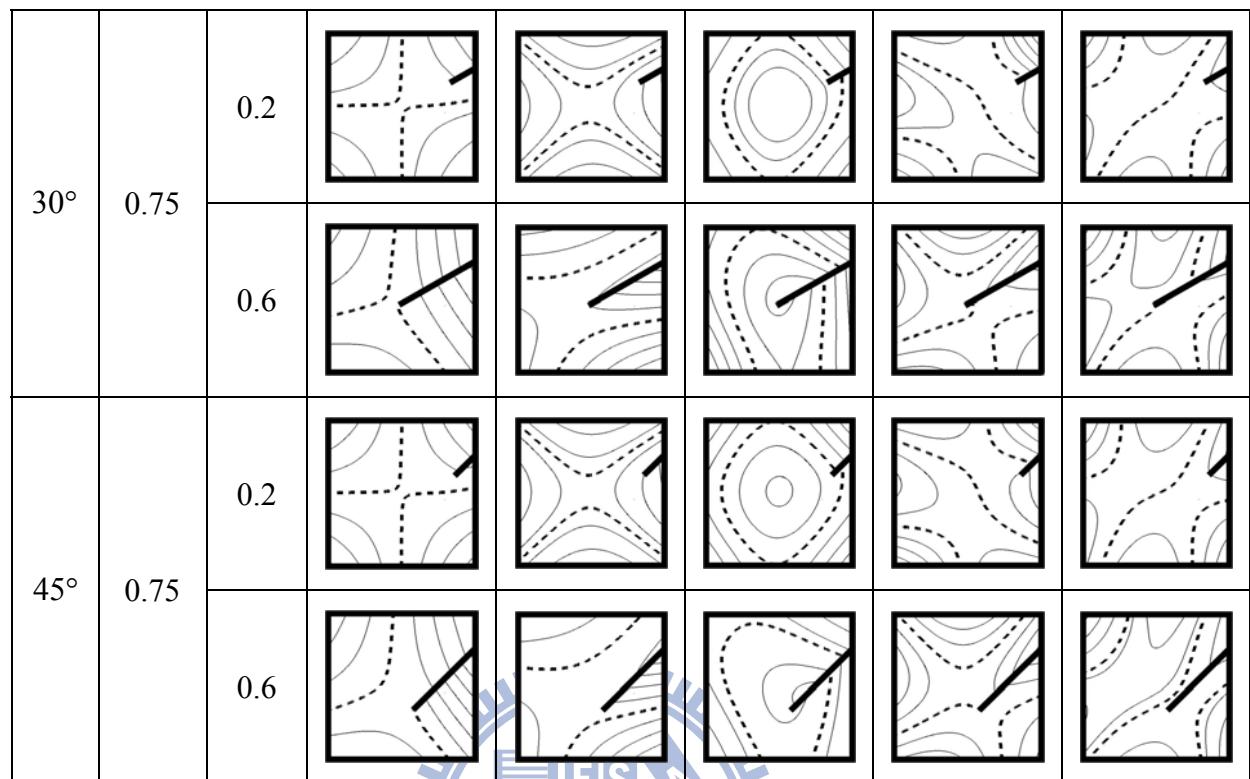


圖 2.9 (續上頁)

1896

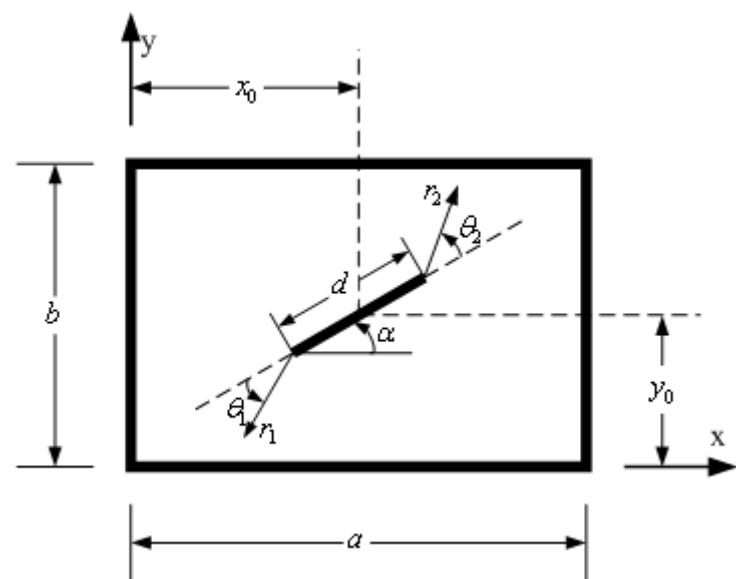


圖 3.1 具邊內部縫矩形板示意圖



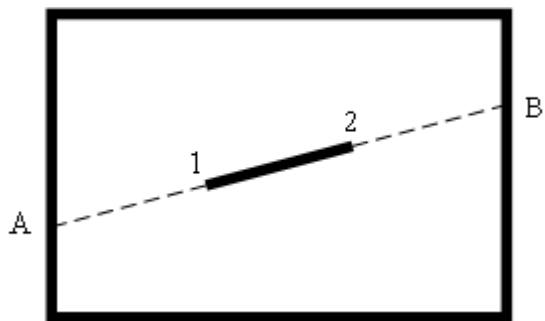


圖 3.2 內部裂縫奇異點與連續線段示意圖



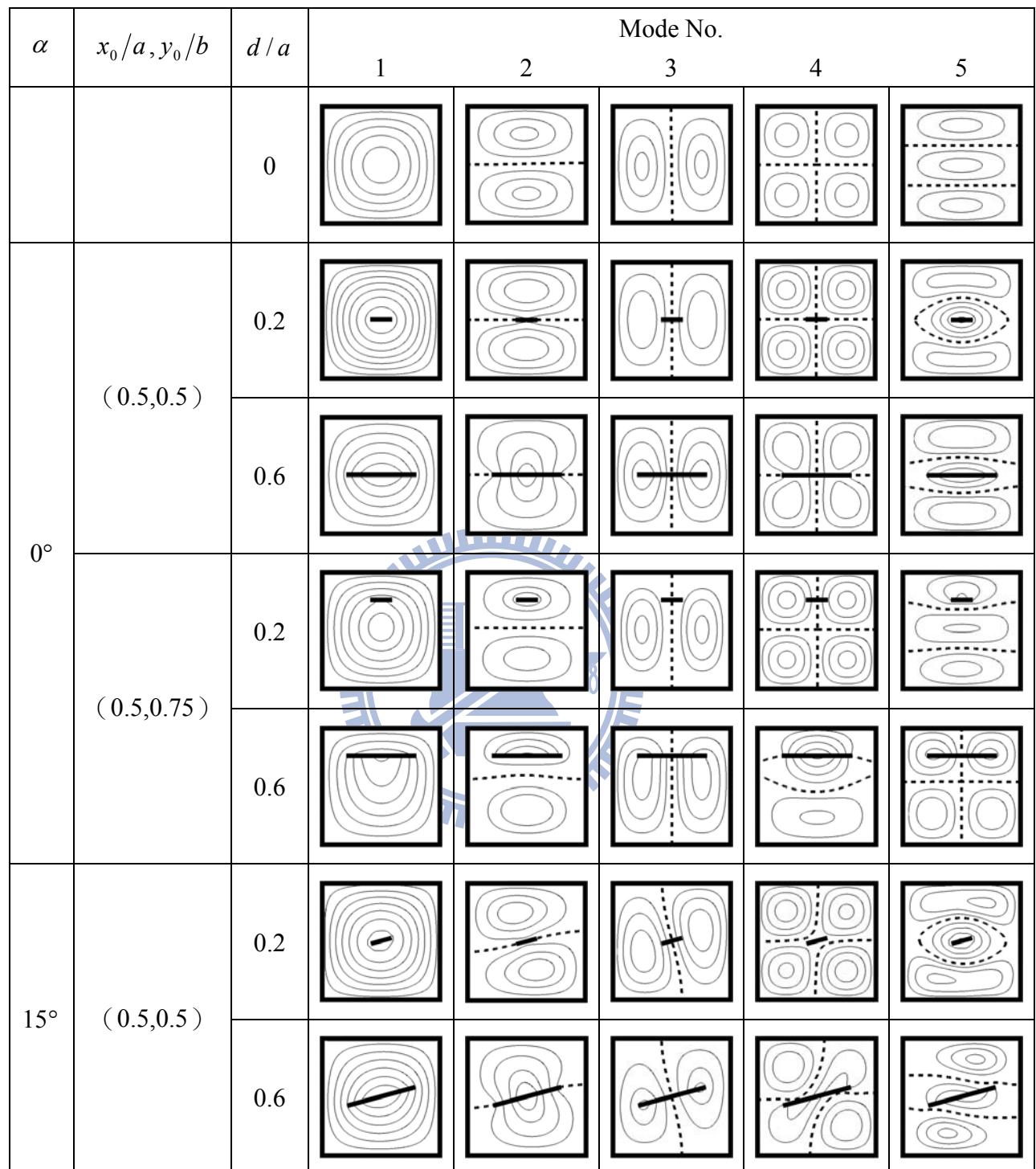


圖 3.3 具內部裂縫簡支方形板模態圖

(虛線表各模態之節點線)

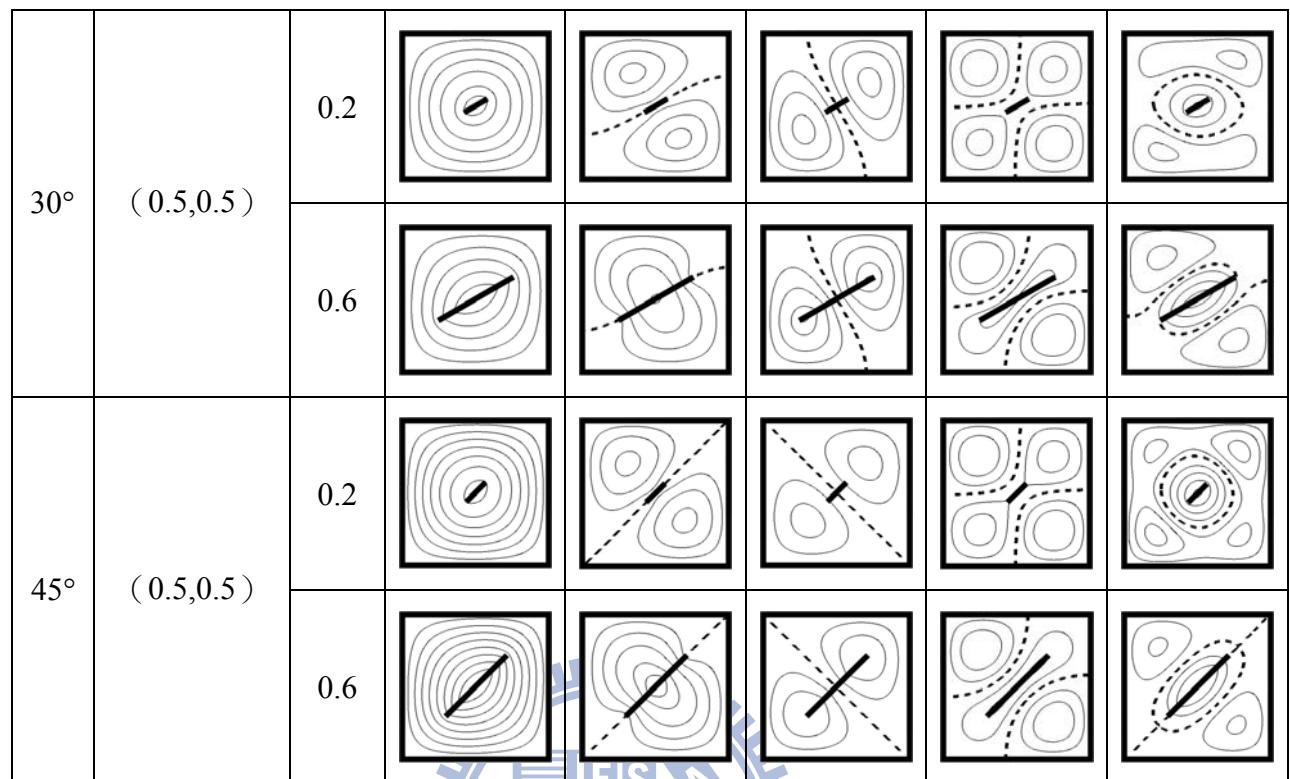


圖 3.3 (續上頁)

1896

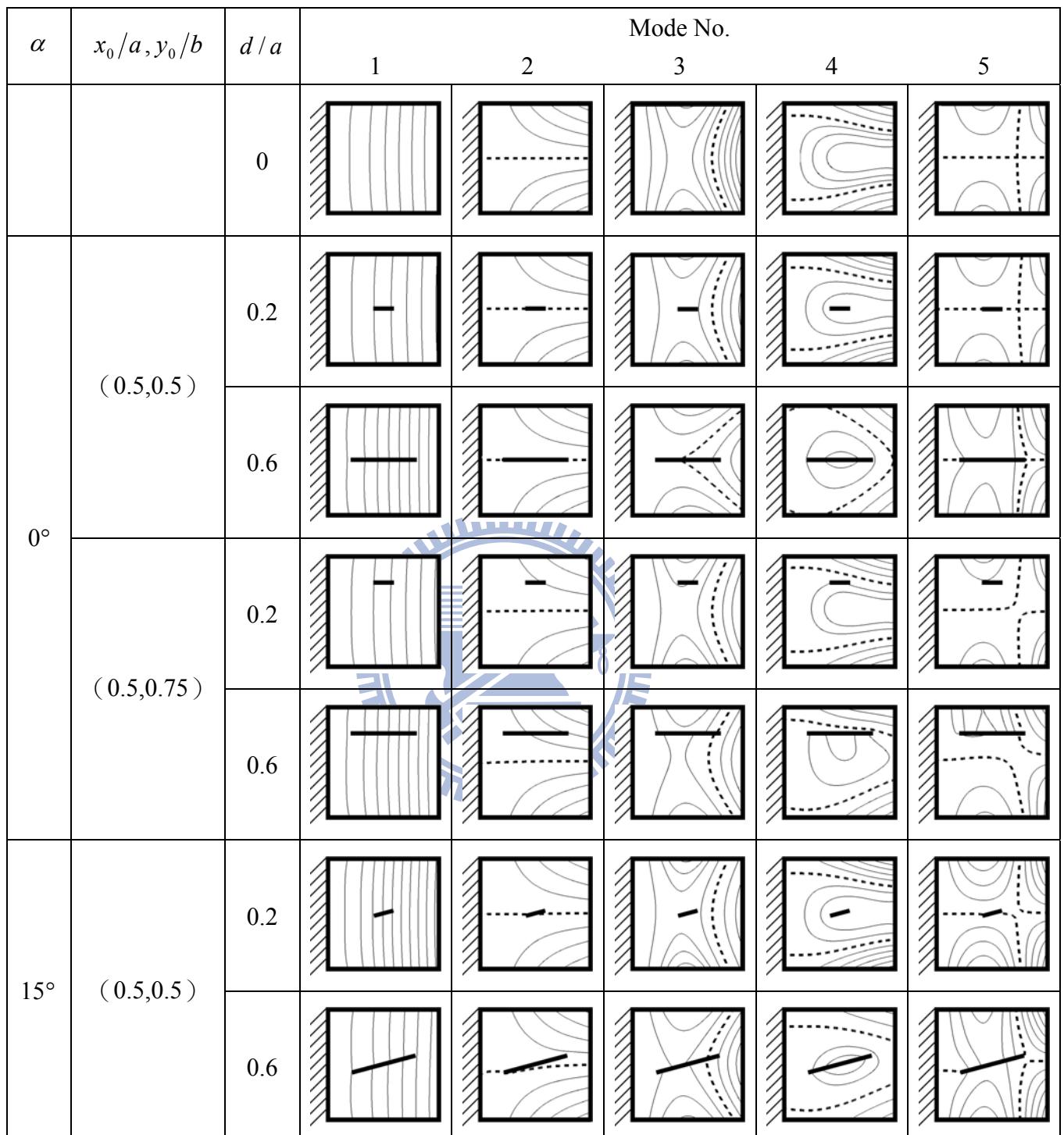


圖 3.4 具內部裂縫懸臂方形板模態圖

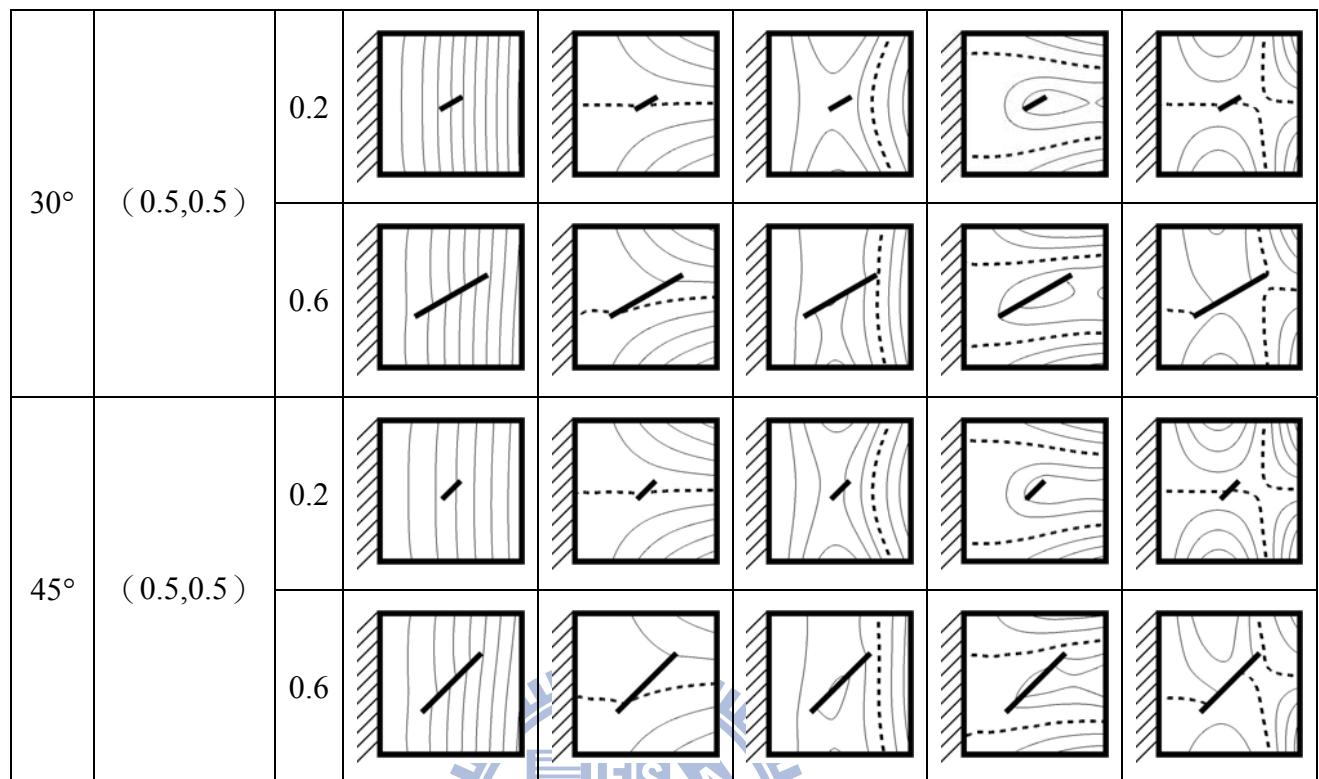


圖 3.4 (續上頁)

1896

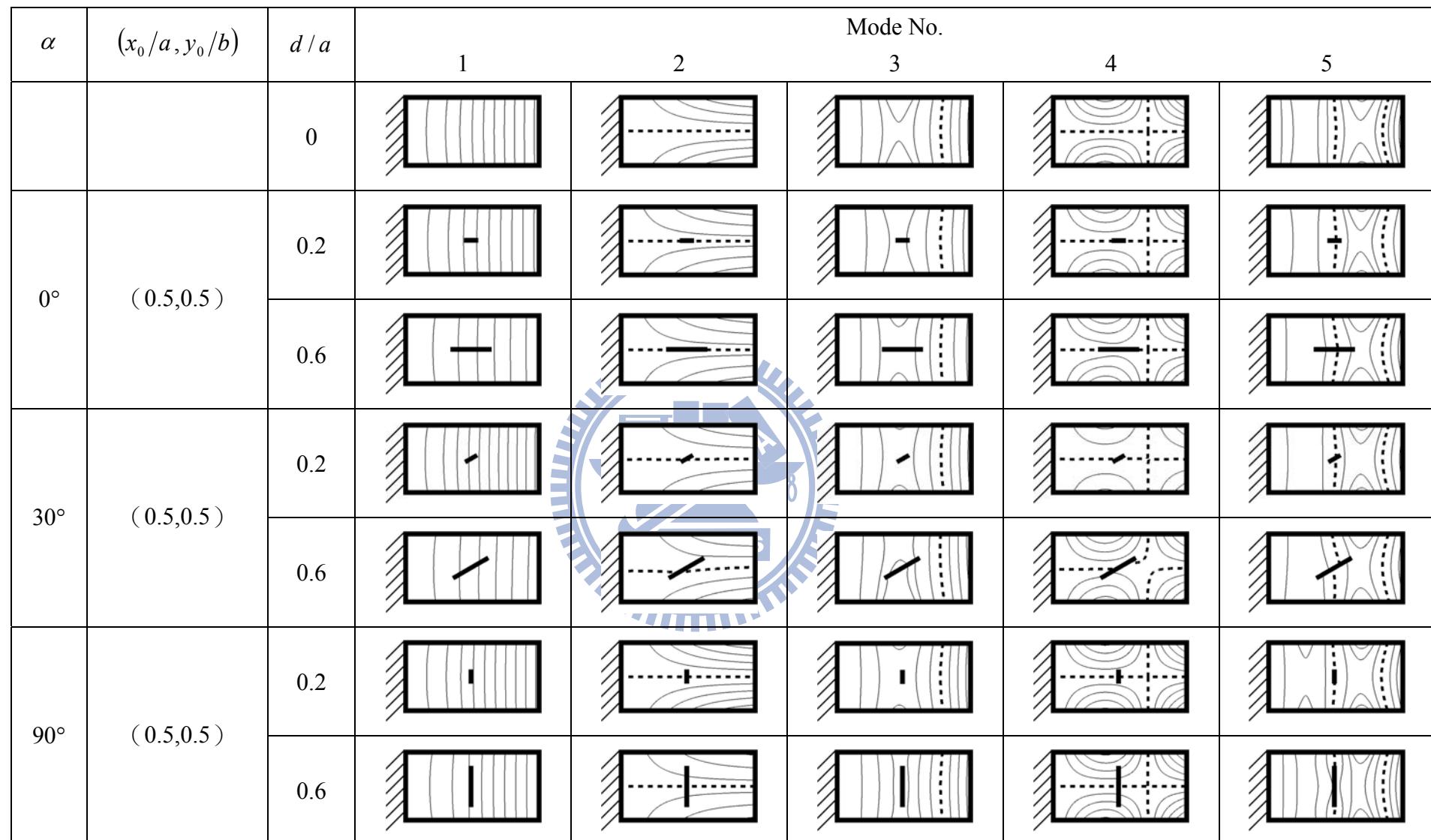


圖 3.5 具內部裂縫懸臂矩形板 ( $a/b = 2$ ) 模態圖

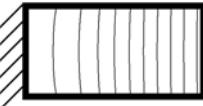
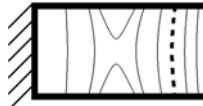
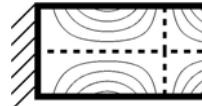
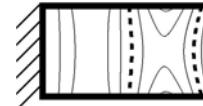
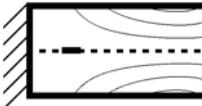
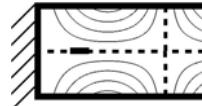
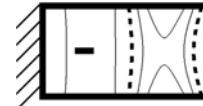
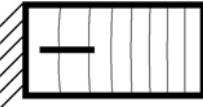
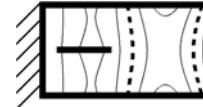
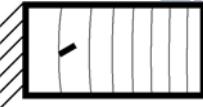
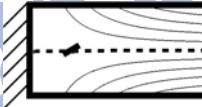
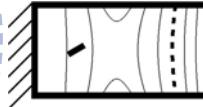
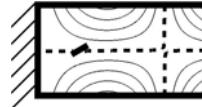
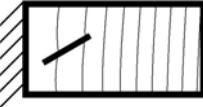
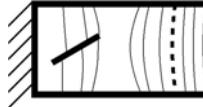
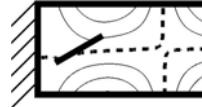
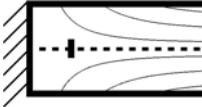
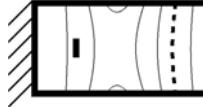
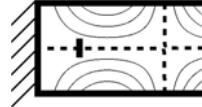
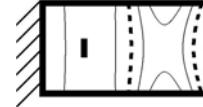
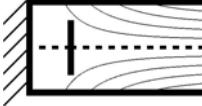
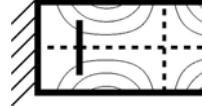
$\alpha$	$(x_0/a, y_0/b)$	$d/a$	Mode No.				
			1	2	3	4	5
		0					
$0^\circ$	$(0.25, 0.5)$	0.2					
		0.6					
$30^\circ$	$(0.25, 0.5)$	0.2					
		0.6					
$90^\circ$	$(0.25, 0.5)$	0.2					
		0.6					

圖 3.6 具內部裂縫懸臂矩形板 ( $a/b = 2$ ) 模態圖