

# 第一章 緒論

## 1.1 研究動機

在工程的分析上，常以板、殼、樑和構架等元素為基本的探討主題，而其中以樑為最基本形式。一般而言，對於樑的相關研究大都以直樑的為主要探討主題，然而直樑並不滿足所有工程需求，因此，曲形樑結構型式的設計乃是一個必然且必要的驅勢。

## 1.2 研究方法

本文利用基本材料性質、三個方向的動力方程式，總共六個方程式。在經由基本運算之後，導出兩個控制方程式。此兩個控制方程式則是角度和時間的偏微分方程式，則利用分離系數法分離變數。在帶入六個邊界條件得到六個方程式，合併之後可得到一個 6 乘 6 的矩陣  $B$ ，此稱為系統頻率矩陣。之後在利用其行列值為零的特性求出其頻率，帶回其假設之方程式則可得到其振態。

最後在利用不同的邊界條件，去解完整的環狀樑，同樣利用系統頻率矩陣行列式為零的特性求解，求出其振態。本文還使用有限元素軟體 ANSYS，樑元素 BEAM4 和彈簧元素 COMBIN14 組成其分析模型，模型採用降階法分析 (REDUCE)，因為模型並不複雜，故採用指令的方式建模，寫成 TXT 檔之後直接讀取。

### 1.3 文獻探討

非共平面的曲樑已經有很多學者發表了不少文章。Den Hartog[1]用 Rayleigh-Ritz 法去找出圓弧的最低頻率，他是用拓展 Volterra 和 Morell[2, 3]的方法，把中心線假設成擺線、懸垂線和拋物線。Ojalvo[4]則是去研究非完整彈性環成對的扭轉彎曲的振動。

有更多的研究是去做直樑放於彈性基礎上的動力反應。Kenny[5]和 Mathews[6]則是把樑放於 Winkler 基礎上，Rades[7]則是研究有限 Bernoulli-Euler 樑置於 Pasternak 基礎上的穩態反應。Wang 和 Stephens[8]研究 Timoshenko 樑置於 Winkler-Pasternak 基礎上的自然振動，他們是拓展 Wang 和 Gagnon[9]的多跨樑的自由和強迫振動的研究。Love 和 Oajalvo[3]則是用典型的運動方程式導出非完整環兩端固定時的自然振動頻率。Culver 和 Oestal[13]則是利用 Rayleigh-Ritz 法把兩跨曲樑和未降伏的支撐合併起來並且找到其自然振動頻率，Lee[14]則是在 U 形彎管中間放支撐點而去分析其自由振動頻率。雖然以上這兩種方法都可以用於多跨樑，但這些分析會十分的複雜和龐大。Chen[15]則利用動力三彎矩公式求出多跨樑在不可移動且不可旋轉的支點之自然頻率，但是在支點是可以旋轉且有位移是但還是無法求出。

而上面提及之研究都沒有討論水平曲樑置於彈性基礎上。

Panayotunakos 和 Theocaris[10]則是做出了圓形 Timoshenko 樑在 Winkler 基礎上的自由振動頻率分析，而這些研究都是要求出在 Winkler-Pasternak 基礎上對曲形樑有何影響。



## 第二章 內文

### 2.1 基本假設

1. 單位長度的質量為定值
2. 初應變為零
3. 初始應力為零
4. 線性彈性行為
5. 在梁只承受彎矩行為下做探討，不加入剪力變形
6. 忽略斷面翹曲現象(Warping)
7. 曲樑變形很小，而且在材料的幾何線性與彈性範圍內。
8. 振動發生在曲樑的主平面 (principle plane) 內。
9. 只考慮面外 (Out of plane)

### 2.2 理論推導

現考慮一個平放在 Winkler-Pasternak 基礎上的環狀樑。假設它微小振動並且忽略掉阻尼、旋轉慣性、翹曲如下圖 2.1 所示。

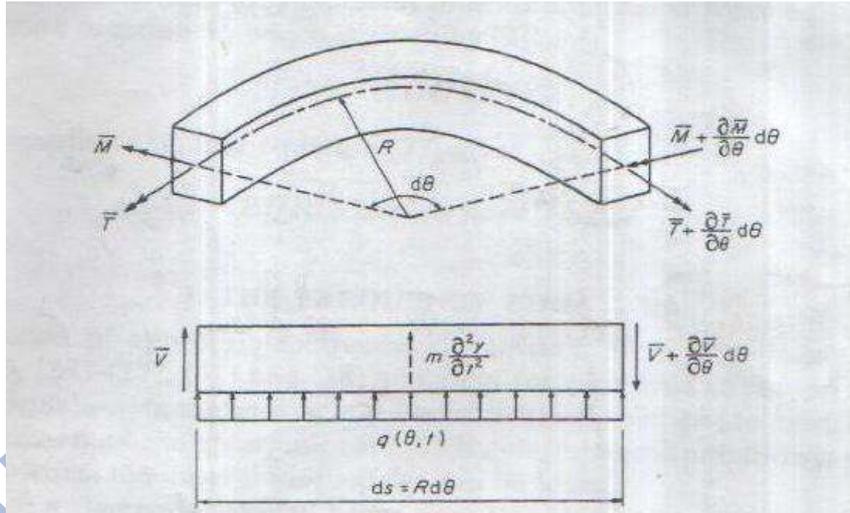


圖 2.1：施加力與彎矩的水平擺放之曲樑元素

由上圖可知：

$\bar{M}(\theta, t)$  — 彎曲彎矩

$\bar{T}(\theta, t)$  — 扭轉彎矩

$q(\theta, t)$  — 基礎反力

$y$  — 垂直位移

$\beta$  — 扭轉角

$R$  — 圓樑之半徑

$EI$  — 撓曲剛度

$GJ$  — 扭轉剛度

$\bar{V}$  — 剪力

$m$  — 單位長度之質量

Pasternak 基礎是一個含有剪力影響的 Winkler 基礎，所以它可以想

像成不可壓縮元素在尾端連接垂直彈簧。根據 A. D. KERR

的” Elastic and viscoelastic foundation models” [2]可以把  $q(\theta, t)$

表示成以下：

$$q(\theta, t) = ky \quad (1)$$

$k$  — Winkler 基礎彈簧係數

根據參考文獻[1]可以把  $\bar{M}(\theta, t)$ 、 $\bar{T}(\theta, t)$ 表示成以下：

$$\bar{M}(\theta, t) = (EI/R^2)(R\beta - \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2}) \quad (2)$$

$$\bar{T}(\theta, t) = (GJ/R^2)(R\frac{\partial \beta}{\partial \theta} - \frac{\partial y}{\partial \theta}) \quad (3)$$

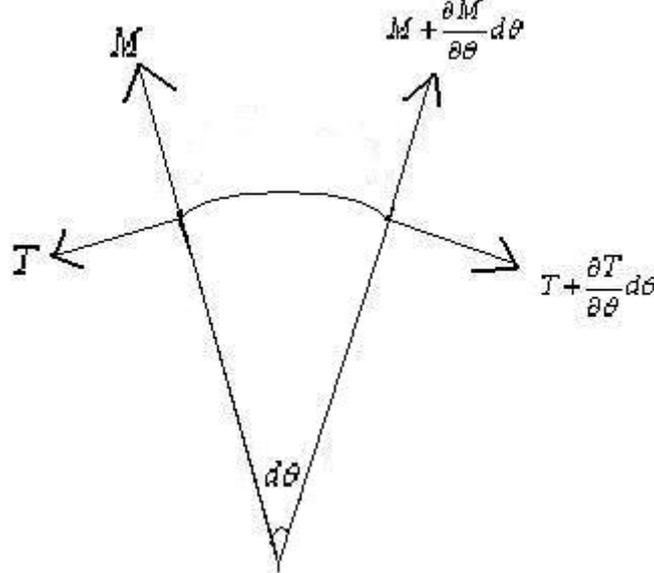


圖 2.2 圓樑之剖面力分解

### 2.3 動力方程式推導

由圖 2.1 和圖 2.2 之自由體可得三個平衡方程式

$$\sum M = 0$$

$$M - (M + \frac{\partial M}{\partial \theta} d\theta) \cos d\theta + (T + \frac{\partial T}{\partial \theta} d\theta) \sin d\theta + V \times (Rd\theta) = 0$$

$$\text{當 } d\theta \rightarrow 0 \Rightarrow \cos d\theta = 1 \quad \sin d\theta = d\theta \quad (d\theta)^2 \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial M}{\partial \theta} d\theta + T d\theta + VR d\theta = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{1}{R} \frac{\partial M}{\partial \theta} - \frac{T}{R} - V = 0}}$$

$$\sum T = 0$$

$$T - (M + \frac{\partial M}{\partial \theta} d\theta) \sin d\theta + (T + \frac{\partial T}{\partial \theta} d\theta) \cos d\theta = 0$$

$$T - M d\theta - T + \frac{\partial T}{\partial \theta} d\theta = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{M - \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0}}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$V - (V + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta) + (m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}) Rd\theta + qRd\theta = 0$$

$$-\frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta + mR \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} d\theta + Rq d\theta = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{1}{R} \frac{\partial V}{\partial \theta} - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - q = 0}}$$

整理過後，下面三個為模型之三個動力方程式

$$\bar{M} - \frac{\partial \bar{T}}{\partial \theta} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \theta} - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - q = 0 \quad (5)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial \bar{M}}{\partial \theta} - \frac{\bar{T}}{R} - \bar{V} = 0 \quad (6)$$

## 2.4 控制方程式推導

令  $\gamma = \frac{GJ}{EI}$  (撓曲扭轉剛度比)

分別對(2)(3)偏微分，可得式子(7)~(10)

$$\frac{\partial \bar{M}}{\partial \theta} = (EI/R^2)(R \frac{\partial \beta}{\partial \theta} - \frac{\partial^3 y}{\partial \theta^3}) \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial \theta^2} = (EI/R^2)(R \frac{\partial^2 \beta}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^4 y}{\partial \theta^4}) \quad (8)$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \theta} = (GJ/R^2)(R \frac{\partial^2 \beta}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2}) \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \theta^2} = (GJ/R^2)(R \frac{\partial^3 \beta}{\partial \theta^3} - \frac{\partial^3 y}{\partial \theta^3}) \quad (10)$$

式(6)經移項後可得  $\bar{V}$  (11)

$$\bar{V} = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial \bar{M}}{\partial \theta} - \bar{T} \right) \quad (11)$$

一次偏微分：

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial \theta} = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial \theta^2} - \frac{\partial \bar{T}}{\partial \theta} \right) \quad (12)$$

將式(12)代入式(5)：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \theta} - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - q = 0 \\ & \frac{1}{R} \times \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial \theta^2} - \frac{\partial \bar{T}}{\partial \theta} \right) - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - ky = 0 \\ & \frac{1}{R^4} \left[ EI \left( R \frac{\partial^2 \beta}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^4 y}{\partial \theta^4} \right) - GJ \left( R \frac{\partial^2 \beta}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} \right) \right] - m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - ky = 0 \\ & \Rightarrow \left( R \frac{\partial^2 \beta}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^4 y}{\partial \theta^4} \right) - \gamma \left( R \frac{\partial^2 \beta}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} \right) - \frac{R^4}{EI} m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{R^4}{EI} ky = 0 \\ & \Rightarrow \frac{\partial^2 \beta}{\partial \theta^2} (R - R\gamma) = \frac{\partial^4 y}{\partial \theta^4} - \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \frac{R^4}{EI} + \frac{R^4}{EI} ky \\ & \Rightarrow \frac{\partial^2 \beta}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{R} \frac{1}{1+\gamma} \left( \frac{\partial^4 y}{\partial \theta^4} - \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \frac{R^4}{EI} + \frac{R^4}{EI} ky \right) \quad (13) \end{aligned}$$

將式(2)、(9)代入：

$$\bar{M} - \frac{\partial \bar{T}}{\partial \theta} = 0 \quad (4)$$

得

$$(EI/R^2)(R\beta - \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2}) = (GJ/R^2)(R\frac{\partial^2 \beta}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2}) \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow R\beta - \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} &= \gamma(R\frac{\partial^2 \beta}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2}) \\ R\beta &= \gamma(R\frac{\partial^2 \beta}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2}) + \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} \end{aligned} \quad (15)$$

將(13)式代入式(15)：

$$\begin{aligned} R\beta &= -R\gamma \times \frac{1}{R} \frac{1}{1+\gamma} \left( \frac{\partial^4 y}{\partial \theta^4} - \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \frac{R^4}{EI} + \frac{R^4}{EI} ky \right) - \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} \\ &= -\frac{\gamma}{1+\gamma} \left\{ \frac{\partial^4 y}{\partial \theta^4} - \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} + m \frac{R^4}{EI} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{R^4}{EI} ky + \left[ -\gamma - \left( -\frac{1+\gamma}{1} \right) + \left( -\frac{1+\gamma}{\gamma} \right) \right] \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} \right\} \\ &= -\frac{\gamma}{1+\gamma} \left[ \frac{\partial^4 y}{\partial \theta^4} + \left( 2 + \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} + \frac{mR^4}{EI} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{R^4}{EI} ky \right] \\ \Rightarrow R\beta &= -\frac{\gamma}{1+\gamma} \left[ \frac{\partial^4 y}{\partial \theta^4} + \left( 2 + \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} + \frac{mR^4}{EI} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{R^4}{EI} ky \right] \end{aligned} \quad (16)$$

將式(16)對 $\theta$ 偏微分一次和兩次：

$$R \frac{\partial \beta}{\partial \theta} = -\frac{\gamma}{1+\gamma} \left[ \frac{\partial^5 y}{\partial \theta^5} + \left( 2 + \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\partial^3 y}{\partial \theta^3} + \frac{mR^4}{EI} \frac{\partial^3 y}{\partial t^2 \partial \theta} + \frac{kR^4}{EI} \frac{\partial y}{\partial \theta} \right] \quad (17)$$

$$R \frac{\partial^2 \beta}{\partial \theta^2} = -\frac{\gamma}{1+\gamma} \left[ \frac{\partial^6 y}{\partial \theta^6} + \left( 2 + \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial \theta^4} + \frac{mR^4}{EI} \frac{\partial^4 y}{\partial t^2 \partial \theta^2} + \frac{kR^4}{EI} \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} \right] \quad (18)$$

再將式(16)、式(18)代入式(15)中：

$$\begin{aligned} & -\frac{\gamma}{1+\gamma} \left[ \frac{\partial^4 y}{\partial \theta^4} + \left( 2 + \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} + \frac{mR^4}{EI} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{kR^4}{EI} y \right] - \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} \\ &= -\gamma \times \frac{\gamma}{1+\gamma} \left[ \frac{\partial^6 y}{\partial \theta^6} + \left( 2 + \frac{1}{\gamma} \right) \frac{\partial^4 y}{\partial \theta^4} + \frac{mR^4}{EI} \frac{\partial^4 y}{\partial t^2 \partial \theta^2} + \frac{kR^4}{EI} \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} \right] - \gamma \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} \end{aligned}$$

上式同乘以  $-\frac{1+\gamma}{\gamma^2}$  :

$$\Rightarrow \frac{1}{\gamma} \left[ \frac{\partial^4 y}{\partial \theta^4} \left(2 + \frac{1}{\gamma}\right) \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} + \frac{mR^4}{EI} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{R^4}{EI} ky \right] + \frac{1+\gamma}{\gamma^2} \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} =$$

$$\frac{\partial^6 y}{\partial \theta^6} \left(2 + \frac{1}{\gamma}\right) \frac{\partial^4 y}{\partial \theta^4} + \frac{mR^4}{EI} \frac{\partial^4 y}{\partial t^2 \partial \theta^2} + \frac{kR^4}{EI} \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} + \frac{1+\gamma}{\gamma} \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2}$$

經移項過後可得：

$$\frac{\partial^6 y}{\partial \theta^6} + \left(2 + \frac{1}{\gamma}\right) \frac{\partial^4 y}{\partial \theta^4} + \left(1 + \frac{kR^4}{EI}\right) \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} - \frac{kR^4}{\gamma EI} y + \frac{mR^4}{EI} \frac{\partial^4 y}{\partial t^2 \partial \theta^2} - \frac{mR^4}{\gamma EI} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (19)$$

故可得兩個式子，此為控制方程式：

$$R\beta = -\frac{\gamma}{1+\gamma} \left[ \frac{\partial^4 y}{\partial \theta^4} + \left(2 + \frac{1}{\gamma}\right) \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} + \frac{mR^4}{EI} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{R^4}{EI} ky \right] \quad (16)$$

$$\frac{\partial^6 y}{\partial \theta^6} + \left(2 + \frac{1}{\gamma}\right) \frac{\partial^4 y}{\partial \theta^4} + \left(1 + \frac{kR^4}{EI}\right) \frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} - \frac{kR^4}{\gamma EI} y + \frac{mR^4}{EI} \frac{\partial^4 y}{\partial t^2 \partial \theta^2} - \frac{mR^4}{\gamma EI} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (19)$$

## 2.5 求解控制方程式

$y$  為  $\theta$  (角度) 和  $t$  (時間) 的函數，故可以設  $y(\theta, t) = Y(\theta)G(t)$ ，使用分離變數法去解此二方程式，故：

$$\frac{\partial^6 y}{\partial \theta^6} = Y^{VI} G$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial \theta^4} = Y^{IV} G$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} = Y^{II} G$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial t^2 \partial \theta^2} = Y'' \ddot{G}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = Y \ddot{G}$$

故代入式(16)、(19)可得：

$$\Rightarrow Y^{VI} G + (2 + \frac{1}{\gamma}) Y^{IV} G + (1 + \frac{kR^4}{EI}) Y'' G - \frac{R^4 k}{\gamma EI} Y G + \frac{mR^4}{EI} Y'' \ddot{G} - \frac{mR^4}{\gamma EI} Y \ddot{G} = 0$$

$$G(Y^{VI} + (2 + \frac{1}{\gamma}) Y^{IV} + (1 + \frac{kR^4}{EI}) Y'' - \frac{R^4 k}{\gamma EI} Y) = \ddot{G} (\frac{mR^4}{\gamma EI} Y - \frac{mR^4}{EI} Y'')$$

$$\frac{Y^{VI} + (2 + \frac{1}{\gamma}) Y^{IV} + (1 + \frac{kR^4}{EI}) Y'' - \frac{R^4 k}{\gamma EI} Y}{\frac{mR^4}{\gamma EI} Y - \frac{mR^4}{EI} Y''} = \frac{\ddot{G}}{G} = -p^2$$

$$\text{則令 } \lambda^2 = \frac{mR^4 p^2}{EI}, \quad w^2 = \frac{kR^4}{EI}$$

設  $p$  為自然振動頻率，故可以得到兩條微分方程式：

$$\ddot{G} + p^2 G = 0 \quad (20)$$

$$Y^{VI} + 2Y^{IV} + (1 + w^2 - \lambda^2) Y'' + (\lambda^2 - w^2) Y / \gamma = 0 \quad (21)$$

解式(20)可解得：

$$G = C_1 e^{ipt} + C_2 e^{-ipt} \quad C_1, C_2 \text{ is constant} \quad (22)$$

解式(21)：

令  $Y = e^{r\theta}$  代入式(21)可得

$$\Rightarrow r^6 e^{n\theta} - \frac{2}{\gamma} r^4 e^{n\theta} + (1 + w^2 - \lambda^2) r^2 e^{r\theta} + e^{r\theta} (\lambda^2 - w^2) / \gamma = 0$$

$$e^{r\theta} \left[ r^6 - \frac{2}{\gamma} r^4 + (1 + w^2 - \lambda^2) r^2 + (\lambda^2 - w^2) / \gamma \right] = 0$$

解

$$r^6 - \frac{2}{\gamma}r^4 + (1+w^2 - \lambda^2)r^2 + (\lambda^2 - w^2)/\gamma = 0 \quad (23)$$

$r_1 \sim r_6$  為上式之解，故式(23)的解為：

$r_1 \sim r_6$  為 3 對共軛的虛數，本文後面有討論

$$Y = D_1 e^{r_1 \theta} + D_2 e^{r_2 \theta} + D_3 e^{r_3 \theta} + D_4 e^{r_4 \theta} + D_5 e^{r_5 \theta} + D_6 e^{r_6 \theta} \quad D_1 \sim D_6 \text{ is constant} \quad (24)$$

## 2.6 代入邊界條件解代定係數

現觀察式(23)可改修正為以下：

令  $s = r^2$

$$\Rightarrow s^3 - \frac{2}{\gamma}s^2 + (1+w^2 - \lambda^2)s + (\lambda^2 - w^2)/\gamma = 0 \quad (25)$$

式(25)為一元三次方程式，可用下列方法求解：

$$\text{已知 } as^3 + bs^2 + cs + d = 0, a \neq 0 \quad (26)$$

$$s_1 = -\frac{b}{3a} + \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a} + \sqrt{\left(\frac{b^3}{27a^3} + \frac{d}{2a} - \frac{bc}{6a^2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3}}$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a} - \sqrt{\left(\frac{b^3}{27a^3} + \frac{d}{2a} - \frac{bc}{6a^2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3}}$$

$$s_2 = -\frac{b}{3a} + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a} + \sqrt{\left(\frac{b^3}{27a^3} + \frac{d}{2a} - \frac{bc}{6a^2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3}}$$

$$+ \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a} - \sqrt{\left(\frac{b^3}{27a^3} + \frac{d}{2a} - \frac{bc}{6a^2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3}}$$

$$s_3 = -\frac{b}{3a} + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a} + \sqrt{\left(\frac{b^3}{27a^3} + \frac{d}{2a} - \frac{bc}{6a^2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3}}$$

$$+ \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \sqrt[3]{\frac{bc}{6a^2} - \frac{b^3}{27a^3} - \frac{d}{2a} - \sqrt{\left(\frac{b^3}{27a^3} + \frac{d}{2a} - \frac{bc}{6a^2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3}}$$

$$\text{判別式 } \Delta = \left(\frac{b^3}{27a^3} + \frac{d}{2a} - \frac{bc}{6a^2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3a} - \frac{b^2}{9a^2}\right)^3 \quad (27)$$

$\Delta > 0$  方程有一實根和兩共軛復根

$\Delta = 0$  方程有三重實根

$\Delta < 0$  方程有三實根

PS. 在本篇論文，只討論小於零的案例，其他的 CASE 不討論。

現把式(24)  $Y = D_1 e^{r_1 \theta} + D_2 e^{r_2 \theta} + D_3 e^{r_3 \theta} + D_4 e^{r_4 \theta} + D_5 e^{r_5 \theta} + D_6 e^{r_6 \theta}$  改成以下

$$Y(\theta) = c_1 \sinh(x_1 \theta) + c_2 \cosh(x_1 \theta) + c_3 \sinh(x_2 \theta) + c_4 \cosh(x_2 \theta) + c_5 \sinh(x_3 \theta) + c_6 \cosh(x_3 \theta) \quad (28)$$

$$\text{又 } x_1 = \sqrt{s_1} \text{、} x_2 = \sqrt{s_2} \text{、} x_3 = \sqrt{s_3}$$

故：

$$Y'(\theta) = c_1 x_1 \cosh(x_1 \theta) + c_2 x_2 \sinh(x_1 \theta) + c_3 x_2 \cosh(x_2 \theta) + c_4 x_2 \sinh(x_2 \theta) + c_5 x_3 \cosh(x_3 \theta) + c_6 x_3 \sinh(x_3 \theta)$$

$$Y''(\theta) = c_1 x_1^2 \sinh(x_1 \theta) + c_2 x_2^2 \cosh(x_1 \theta) + c_3 x_2^2 \sinh(x_2 \theta) + c_4 x_2^2 \cosh(x_2 \theta) + c_5 x_3^2 \sinh(x_3 \theta) + c_6 x_3^2 \cosh(x_3 \theta)$$

$$Y'''(\theta) = c_1 x_1^4 \sinh(x_1 \theta) + c_2 x_2^4 \cosh(x_1 \theta) + c_3 x_2^4 \sinh(x_2 \theta) + c_4 x_2^4 \cosh(x_2 \theta) + c_5 x_3^4 \sinh(x_3 \theta) + c_6 x_3^4 \cosh(x_3 \theta)$$

6 個邊界條件：

$$\text{當 } \theta = 0 \text{ 時} \quad Y(0) = 0, \quad Y'(0) = 0, \quad R\beta(0) = 0$$

$$\text{當 } \theta = \alpha \text{ 時} \quad Y(\alpha) = 0, \quad Y'(\alpha) = 0, \quad R\beta(\alpha) = 0$$

**BC. 1**  $Y(0) = 0$

$$\begin{aligned} Y(0) &= c_1 \sinh(x_1 \times 0) + c_2 \cosh(x_1 \times 0) + c_3 \sinh(x_2 \times 0) + c_4 \cosh(x_2 \times 0) + c_5 \sinh(x_3 \times 0) + c_6 \cosh(x_3 \times 0) \\ &= c_2 + c_4 + c_6 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{bmatrix} = 0$$

**BC. 2**  $Y'(0) = 0$

$$\begin{aligned} Y'(0) &= c_1 x_1 \cosh(x_1 \times 0) + c_2 x_2 \sinh(x_1 \times 0) + c_3 x_2 \cosh(x_2 \times 0) + c_4 x_2 \sinh(x_2 \times 0) + c_5 x_3 \cosh(x_3 \times 0) + c_6 x_3 \sinh(x_3 \times 0) \\ &= c_1 x_1 + c_3 x_2 + c_5 x_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & 0 & x_2 & 0 & x_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{bmatrix} = 0$$

**BC. 3**  $R\phi(0) = 0$

$$\text{令 } a_n = (1 + \gamma)^{-1} \{ \gamma x_n^4 + (1 + 2\gamma)x_n^2 + \gamma(w^2 - \lambda^2) \}, \quad n = 1 \sim 3 \quad (29)$$

$$\tilde{a}_1 = a_1 \sinh(x_1 \theta) \quad \tilde{a}_2 = a_1 \cosh(x_1 \theta) \quad \tilde{a}_3 = a_2 \sinh(x_2 \theta)$$

$$\tilde{a}_4 = a_2 \cosh(x_2 \theta) \quad \tilde{a}_5 = a_3 \sinh(x_3 \theta) \quad \tilde{a}_6 = a_3 \cosh(x_3 \theta)$$

$$\begin{aligned} R\phi(0) &= c_1 \tilde{a}_1 + c_2 \tilde{a}_2 + c_3 \tilde{a}_3 + c_4 \tilde{a}_4 + c_5 \tilde{a}_5 + c_6 \tilde{a}_6 \\ &= c_1 a_1 \sinh(x_1 \times 0) + c_2 a_1 \cosh(x_1 \times 0) + c_3 a_2 \sinh(x_2 \times 0) \\ &\quad + c_4 a_2 \cosh(x_2 \times 0) + c_5 a_3 \sinh(x_3 \times 0) + c_6 a_3 \cosh(x_3 \times 0) \\ &= c_2 a_1 + c_4 a_2 + c_6 a_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{bmatrix} = 0$$

**BC. 4**  $Y(\alpha) = 0$

$$Y(\alpha) = c_1 \sinh(x_1\alpha) + c_2 \cosh(x_1\alpha) + c_3 \sinh(x_2\alpha) + c_4 \cosh(x_2\alpha) + c_5 \sinh(x_3\alpha) + c_6 \cosh(x_3\alpha) = 0$$

$$\begin{bmatrix} \sinh(x_1\alpha) & \cosh(x_1\alpha) & \sinh(x_2\alpha) & \cosh(x_2\alpha) & \sinh(x_3\alpha) & \cosh(x_3\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{bmatrix} = 0$$

**BC. 5**  $Y'(\alpha) = 0$

$$Y'(\alpha) = c_1 x_1 \cosh(x_1\alpha) + c_2 x_1 \sinh(x_1\alpha) + c_3 x_2 \cosh(x_2\alpha) + c_4 x_2 \sinh(x_2\alpha) + c_5 x_3 \cosh(x_3\alpha) + c_6 x_3 \sinh(x_3\alpha) = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \cosh(x_1\alpha) & x_1 \sinh(x_1\alpha) & x_2 \cosh(x_2\alpha) & x_2 \sinh(x_2\alpha) & x_3 \cosh(x_3\alpha) & x_3 \sinh(x_3\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{bmatrix} = 0$$

**BC. 6**  $R\phi(\alpha) = 0$

$$\begin{aligned} R\phi(\alpha) &= c_1 \tilde{a}_1 + c_2 \tilde{a}_2 + c_3 \tilde{a}_3 + c_4 \tilde{a}_4 + c_5 \tilde{a}_5 + c_6 \tilde{a}_6 \\ &= c_1 a_1 \sinh(x_1\alpha) + c_2 a_1 \cosh(x_1\alpha) + c_3 a_2 \sinh(x_2\alpha) \\ &\quad + c_4 a_2 \cosh(x_2\alpha) + c_5 a_3 \sinh(x_3\alpha) + c_6 a_3 \cosh(x_3\alpha) = 0 \end{aligned}$$

$$[a_1 \sinh(x_1\alpha) \quad a_1 \cosh(x_1\alpha) \quad a_2 \sinh(x_2\alpha) \quad a_2 \cosh(x_2\alpha) \quad a_3 \sinh(x_3\alpha) \quad a_3 \cosh(x_3\alpha)] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{bmatrix} = 0$$

故整個系統可以寫成下列矩陣形式：

$$[B][X] = 0$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_1 & 0 & x_2 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3 \\ \sinh(x_1\alpha) & \cosh(x_1\alpha) & \sinh(x_2\alpha) & \cosh(x_2\alpha) & \sinh(x_3\alpha) & \cosh(x_3\alpha) \\ x_1 \cosh(x_1\alpha) & x_1 \sinh(x_1\alpha) & x_2 \cosh(x_2\alpha) & x_2 \sinh(x_2\alpha) & x_3 \cosh(x_3\alpha) & x_3 \sinh(x_3\alpha) \\ a_1 \sinh(x_1\alpha) & a_1 \cosh(x_1\alpha) & a_2 \sinh(x_2\alpha) & a_2 \cosh(x_2\alpha) & a_3 \sinh(x_3\alpha) & a_3 \cosh(x_3\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{bmatrix} = 0 \quad (30)$$

$$[X] = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{bmatrix}$$

系統頻率方程式為：

$$|B| = 0 \quad (31)$$

### 第三章 環型樑之分析

在此要分析角度為 360 度的樑，故其邊界條界會有所變化，會變

成以下六個：

$$Y(0) = Y(2\pi) \text{ 、 } Y'(0) = Y'(2\pi) \text{ 、 } R\beta(0) = R\beta(2\pi)$$

$$M(0) = -M(2\pi) \text{ 、 } T(0) = -T(2\pi) \text{ 、 } V(0) = -V(2\pi)$$

**BC. 1**  $Y(0) = Y(2\pi)$

$$Y(0) = c_2 + c_4 + c_6$$

$$Y(2\pi) = c_1 \sinh(2\pi x_1) + c_2 \cosh(2\pi x_1) + c_3 \sinh(2\pi x_2) + c_4 \cosh(2\pi x_2) + c_5 \sinh(2\pi x_3) + c_6 \cosh(2\pi x_3) = 0$$

$$c_1 \sinh(2\pi x_1) + c_2 [\cosh(2\pi x_1) - 1] + c_3 \sinh(2\pi x_2) +$$

$$c_4 [\cosh(2\pi x_2) - 1] + c_5 \sinh(2\pi x_3) + c_6 [\cosh(2\pi x_3) - 1] = 0$$

$$\begin{bmatrix} \sinh(2\pi x_1) & \cosh(2\pi x_1) - 1 & \sinh(2\pi x_2) & \cosh(2\pi x_2) - 1 & \sinh(2\pi x_3) & \cosh(2\pi x_3) - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{bmatrix} = 0$$

**BC. 2**  $Y'(0) = Y'(2\pi)$

$$Y'(0) = c_1 x_1 \cosh(x_1 \times 0) + c_2 x_2 \sinh(x_1 \times 0) + c_3 x_2 \cosh(x_2 \times 0) + c_4 x_2 \sinh(x_2 \times 0) + c_5 x_3 \cosh(x_3 \times 0) + c_6 x_3 \sinh(x_3 \times 0) = c_1 x_1 + c_3 x_2 + c_5 x_3 = 0$$

$$Y'(2\pi) = c_1 x_1 \cosh(2\pi x_1) + c_2 x_2 \sinh(2\pi x_1) + c_3 x_2 \cosh(2\pi x_2) + c_4 x_2 \sinh(2\pi x_2) + c_5 x_3 \cosh(2\pi x_3) + c_6 x_3 \sinh(2\pi x_3) = 0$$

$$c_1 x_1 [\cosh(2\pi x_1) - 1] + c_2 x_1 \sinh(2\pi x_1) + c_3 x_2 [\cosh(2\pi x_2) - 1] + c_4 x_2 \sinh(2\pi x_2) + c_5 x_3 [\cosh(2\pi x_3) - 1] + c_6 x_3 \sinh(2\pi x_3) = 0$$

$$[x_1(\cosh(2\pi x_1)-1) \quad \sinh(2\pi x_1) \quad x_2(\cosh(2\pi x_2)-1) \quad \sinh(2\pi x_2) \quad x_3(\cosh(2\pi x_3)-1) \quad \sinh(2\pi x_3)] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{bmatrix} = 0$$

**BC. 3**  $R\beta(0) = R\beta(2\pi)$

$$\text{令 } B_n = \left\{ \gamma x_n^4 + (1+2\gamma) \frac{1}{\gamma} x_n^2 + w^2 \right\}, \quad n=1 \sim 3 \quad (32)$$

$$R\beta(\theta) = R(c_1 B_1 \sinh(x_1 \theta) + c_2 B_1 \cosh(x_1 \theta) + c_3 B_2 \sinh(x_2 \theta) + c_4 B_2 \cosh(x_2 \theta) + c_5 B_3 \sinh(x_3 \theta) + c_6 B_3 \cosh(x_3 \theta))$$

$$R\beta(0) = R(c_2 B_1 + c_4 B_2 + c_6 B_3)$$

$$R\beta(2\pi) = R(c_1 B_1 \sinh(2\pi x_1) + c_2 B_1 \cosh(2\pi x_1) + c_3 B_2 \sinh(2\pi x_2) + c_4 B_2 \cosh(2\pi x_2) + c_5 B_3 \sinh(2\pi x_3) + c_6 B_3 \cosh(2\pi x_3))$$

$$c_1 B_1 \sinh(2\pi x_1) + c_2 B_1 [\cosh(2\pi x_1) - 1] + c_3 B_2 \sinh(2\pi x_2) + c_4 B_2 [\cosh(2\pi x_2) - 1] + c_5 B_3 \sinh(2\pi x_3) + c_6 B_3 [\cosh(2\pi x_3) - 1] = 0$$

$$[B_1 \sinh(2\pi x_1) \quad \cosh(2\pi x_1) - 1 \quad B_2 \sinh(2\pi x_2) \quad \cosh(2\pi x_2) - 1 \quad B_3 \sinh(2\pi x_3) \quad \cosh(2\pi x_3) - 1] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{bmatrix} = 0$$

**BC. 4**  $M(0) = -M(2\pi)$

$$\text{令 } D_n = B_n^2 + x_n^2, \quad n=1 \sim 3 \quad (33)$$

$$M(\theta) = c_1 D_1 \sinh(x_1 \theta) + c_2 D_1 \cosh(x_1 \theta) + c_3 D_2 \sinh(x_2 \theta) + c_4 D_2 \cosh(x_2 \theta) + c_5 D_3 \sinh(x_3 \theta) + c_6 D_3 \cosh(x_3 \theta)$$

$$M(0) = c_2 D_1 + c_4 D_2 + c_6 D_3$$

$$M(2\pi) = -(c_1 D_1 \sinh(2\pi x_1) + c_2 D_1 \cosh(2\pi x_1) + c_3 D_2 \sinh(2\pi x_2) + c_4 D_2 \cosh(2\pi x_2) + c_5 D_3 \sinh(2\pi x_3) + c_6 D_3 \cosh(2\pi x_3))$$

$$c_1 D_1 \sinh(2\pi x_1) + c_2 D_1 [\cosh(2\pi x_1) + 1] + c_3 D_2 \sinh(2\pi x_2) + c_4 D_2 [\cosh(2\pi x_2) + 1] + c_5 D_3 \sinh(2\pi x_3) + c_6 D_3 [\cosh(2\pi x_3) + 1] = 0$$

$$\begin{bmatrix} D_1 \sinh(2\pi x_1) & \cosh(2\pi x_1)+1 & D_2 \sinh(2\pi x_2) & \cosh(2\pi x_2)+1 & D_3 \sinh(2\pi x_3) & \cosh(2\pi x_3)+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{bmatrix} = 0$$

**BC. 5**  $T(0) = -T(2\pi)$

$$\text{令 } E_n = x_n^2(1 - B_n), \quad n = 1 \sim 3 \quad (34)$$

$$T(\theta) = c_1 E_1 \cosh(x_1 \theta) + c_2 E_1 \sinh(x_1 \theta) + c_3 E_2 \cos(x_2 \theta) + c_4 E_2 \sinh(x_2 \theta) + c_5 E_3 \cosh(x_3 \theta) + c_6 E_3 \sinh(x_3 \theta)$$

$$T(0) = c_1 E_1 + c_3 E_2 + c_5 E_3$$

$$T(2\pi) = -(c_1 E_1 \cosh(2\pi x_1) + c_2 E_1 \sinh(2\pi x_1) + c_3 E_2 \cos(2\pi x_2) + c_4 E_2 \sinh(2\pi x_2) + c_5 E_3 \cosh(2\pi x_3) + c_6 E_3 \sinh(2\pi x_3))$$

$$c_1 E_1 [\cosh(2\pi x_1) + 1] + c_2 E_1 \sinh(2\pi x_1) + c_3 E_2 [\cosh(2\pi x_2) + 1] + c_4 E_2 \sinh(2\pi x_2) + c_5 E_3 [\cosh(2\pi x_3) + 1] + c_6 E_3 \sinh(2\pi x_3) = 0$$

$$\begin{bmatrix} \cosh(2\pi x_1)+1 & E_1 \sinh(2\pi x_1) & \cosh(2\pi x_2)+1 & E_2 \sinh(2\pi x_2) & \cosh(2\pi x_3)+1 & E_3 \sinh(2\pi x_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{bmatrix} = 0$$

**BC. 6**  $V(0) = -V(2\pi)$

令

$$F_n = \gamma E_n - D_n x_n, \quad n = 1 \sim 3 \quad (35)$$

$$V(\theta) = c_1 F_1 \cosh(x_1 \theta) + c_2 F_1 \sinh(x_1 \theta) + c_3 F_2 \cos(x_2 \theta) + c_4 F_2 \sinh(x_2 \theta) + c_5 F_3 \cosh(x_3 \theta) + c_6 F_3 \sinh(x_3 \theta)$$

$$V(0) = c_1 F_1 + c_3 F_2 + c_5 F_3$$

$$V(2\pi) = -(c_1 F_1 \cosh(2\pi x_1) + c_2 F_1 \sinh(2\pi x_1) + c_3 F_2 \cos(2\pi x_2) + c_4 F_2 \sinh(2\pi x_2) + c_5 F_3 \cosh(2\pi x_3) + c_6 F_3 \sinh(2\pi x_3))$$

$$c_1 F_1 [\cosh(2\pi x_1) + 1] + c_2 F_1 \sinh(2\pi x_1) + c_3 F_2 [\cosh(2\pi x_2) + 1] + c_4 F_2 \sinh(2\pi x_2) + c_5 F_3 [\cosh(2\pi x_3) + 1] + c_6 F_3 \sinh(2\pi x_3) = 0$$

$$[\cosh(2\pi x_1) + 1 \quad F_1 \sinh(2\pi x_1) \quad \cosh(2\pi x_2) + 1 \quad F_2 \sinh(2\pi x_2) \quad \cosh(2\pi x_3) + 1 \quad F_3 \sinh(2\pi x_3)] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{bmatrix} = 0$$

故整個系統可以寫成下列矩陣形式：

$$[G][X] = 0$$

$$[G] = \begin{bmatrix} \sinh(2\pi x_1) & \cosh(2\pi x_1) - 1 & \sinh(2\pi x_2) & \cosh(2\pi x_2) - 1 & \sinh(2\pi x_3) & \cosh(2\pi x_3) - 1 \\ x_1 [\cosh(2\pi x_1) - 1] & x_1 [\sinh(2\pi x_1)] & x_2 [\cosh(2\pi x_2) - 1] & x_2 [\sinh(2\pi x_2)] & x_3 [\cosh(2\pi x_3) - 1] & x_3 [\sinh(2\pi x_3)] \\ B_1 [\sinh(2\pi x_1)] & B_1 [\cosh(2\pi x_1) - 1] & B_2 [\sinh(2\pi x_2)] & B_2 [\cosh(2\pi x_2) - 1] & B_3 [\sinh(2\pi x_3)] & B_3 [\cosh(2\pi x_3) - 1] \\ D_1 [\sinh(2\pi x_1)] & D_1 [\cosh(2\pi x_1) + 1] & D_2 [\sinh(2\pi x_2)] & D_2 [\cosh(2\pi x_2) + 1] & D_3 [\sinh(2\pi x_3)] & D_3 [\cosh(2\pi x_3) + 1] \\ E_1 [\cosh(2\pi x_1) + 1] & E_1 [\sinh(2\pi x_1)] & E_2 [\cosh(2\pi x_2) + 1] & E_2 [\sinh(2\pi x_2)] & E_3 [\cosh(2\pi x_3) + 1] & E_3 [\sinh(2\pi x_3)] \\ F_1 [\cosh(2\pi x_1) + 1] & F_1 [\sinh(2\pi x_1)] & F_2 [\cosh(2\pi x_2) + 1] & F_2 [\sinh(2\pi x_2)] & F_3 [\cosh(2\pi x_3) + 1] & F_3 [\sinh(2\pi x_3)] \end{bmatrix}$$

## 第四章 數值分析

### 4.1 使用系統頻率方程式

現假設  $w=4$  故  $w^2=16$ 、 $\gamma=1$ ，把已知代入式(25)可解出  $x_1$ 、 $x_2$ 、 $x_3$ ，再代入式(29)可得  $a_1$ 、 $a_2$ 、 $a_3$ ，之後把所有已知帶入矩陣[B]，解式(30)，利用試誤法可解得  $\lambda^2$ 。

在此定義一個參數，頻率參數  $C$ ， $C=4\lambda \sin^2(\alpha/2)$ ，可做出以下的

圖：

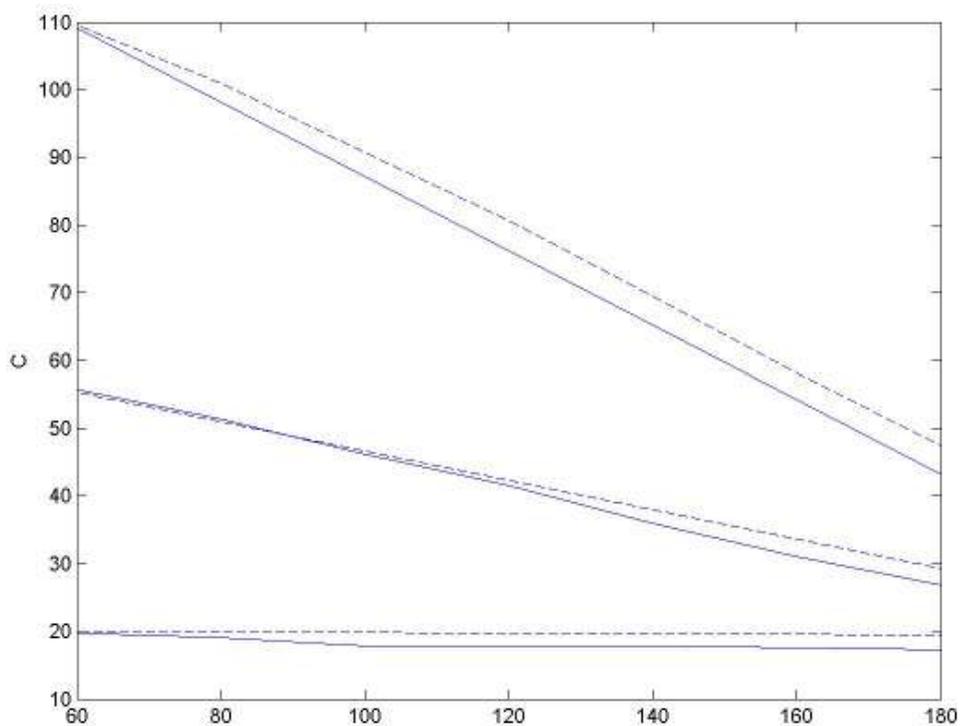


圖 4.1 角度-頻率參數

實線為 T.M Wang & W.F Branne 的數值，虛線為吾方法所求之數值。

### 4.2 模態之推導

由上已求出  $\lambda^2$ ，故可以帶入式(23)和式(29)分別求出  $x_1 \sim x_3$ 、 $a_1 \sim a_3$ ，並代入頻率矩陣  $[B]$ ，且令代定系數  $c_1=1$ ，則可以求出  $c_2 \sim c_6$ ，故把所有的已知帶入式(28)可得以下的圖(已正規化)。橫座標單位 (rad)、縱座標為垂直位移 (已無因次化)

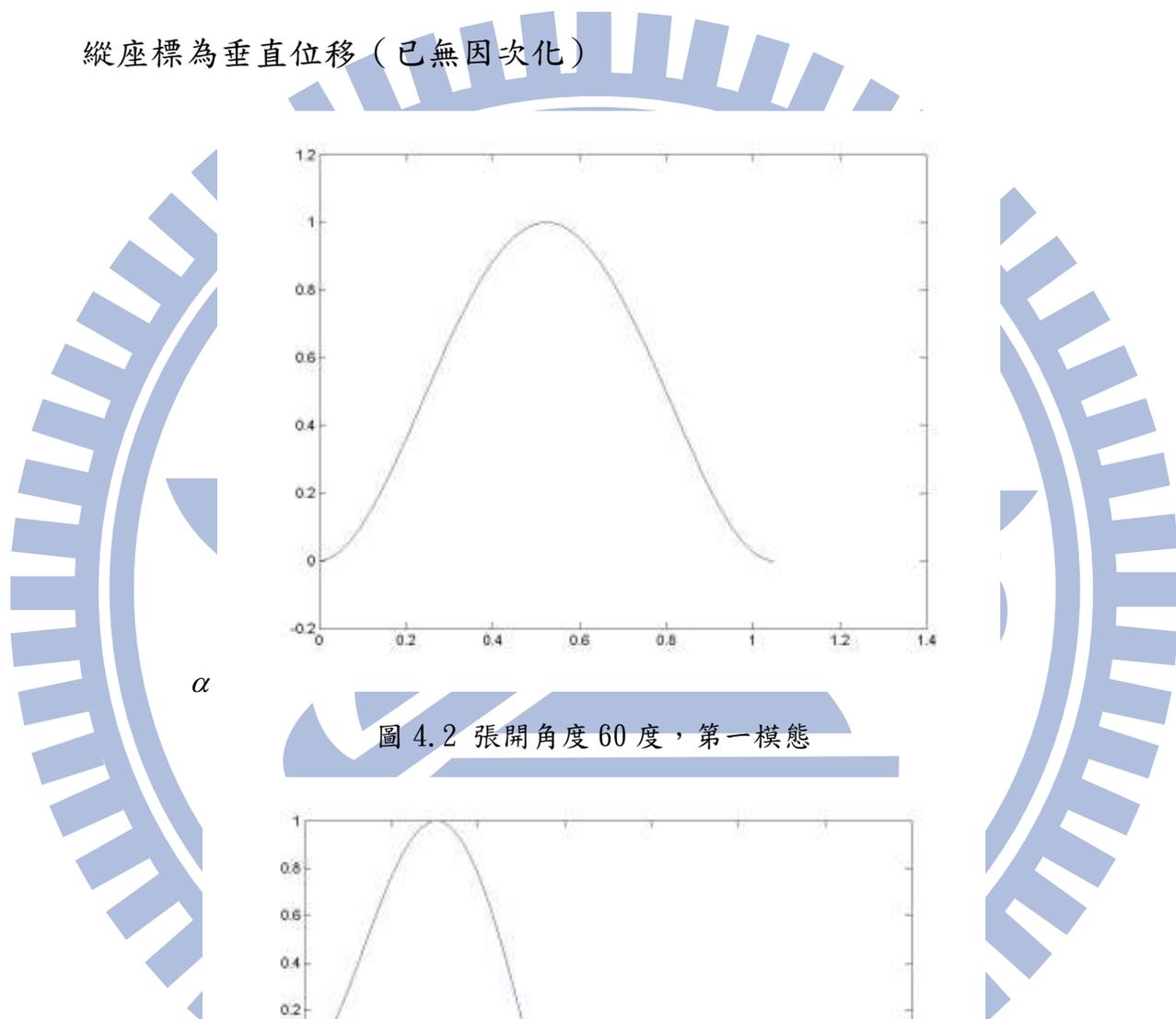


圖 4.2 張開角度 60 度，第一模態

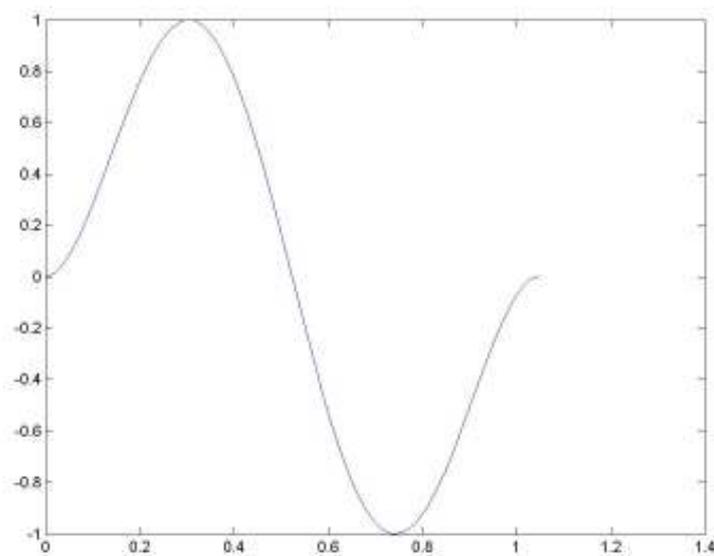


圖 4.3 張開角度 60 度，第二模態

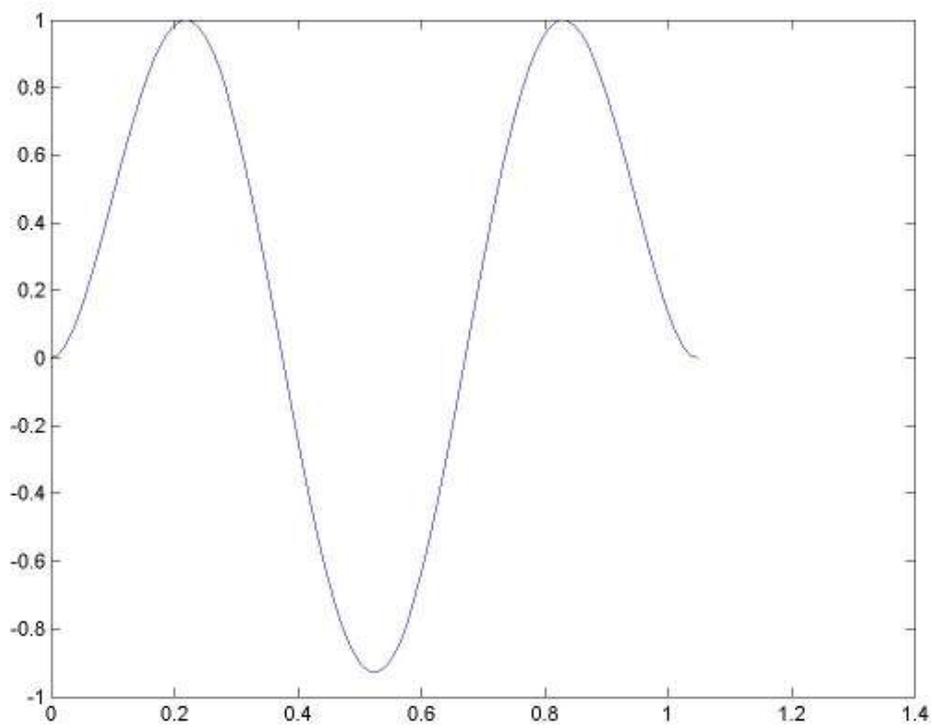


圖 4.4 張開角度 60 度，第三模態

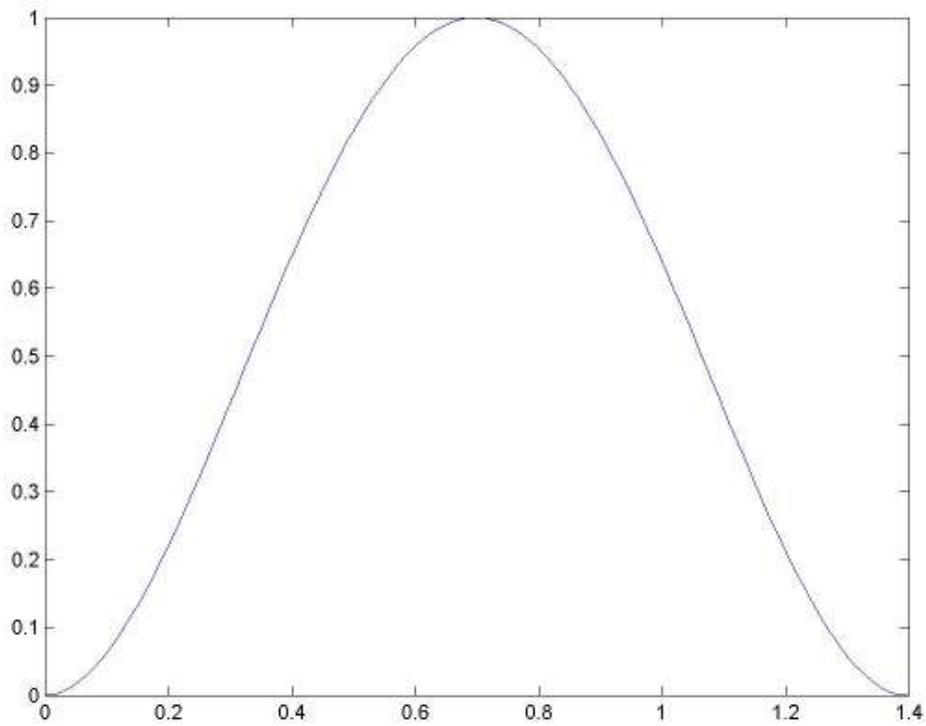


圖 4.5 張開角度 80 度，第一模態

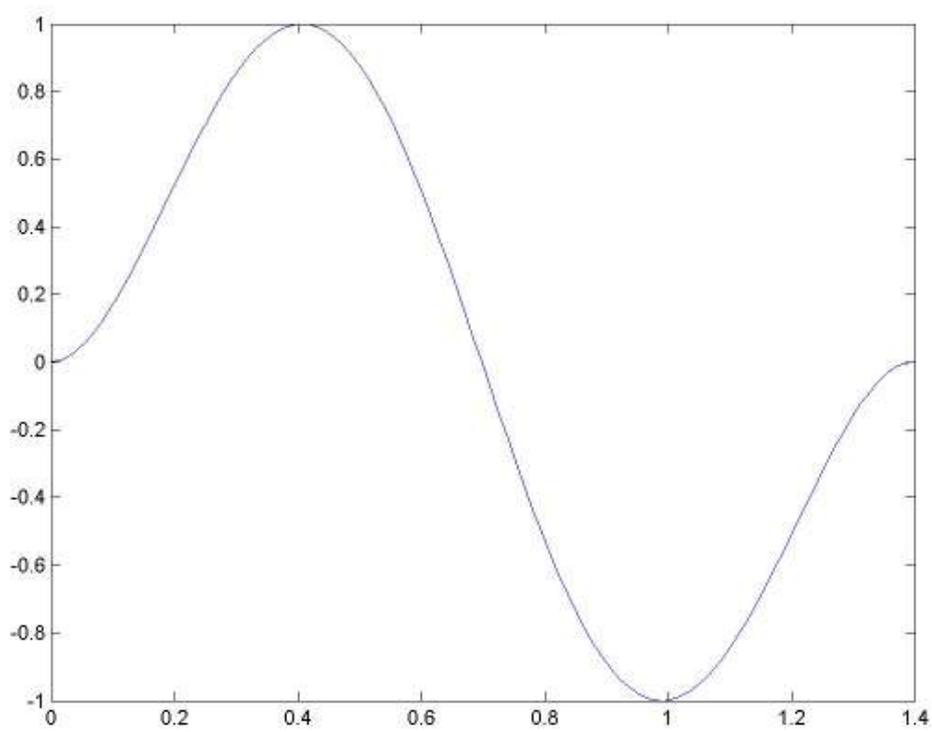


圖 4.6 張開角度 80 度，第二模態

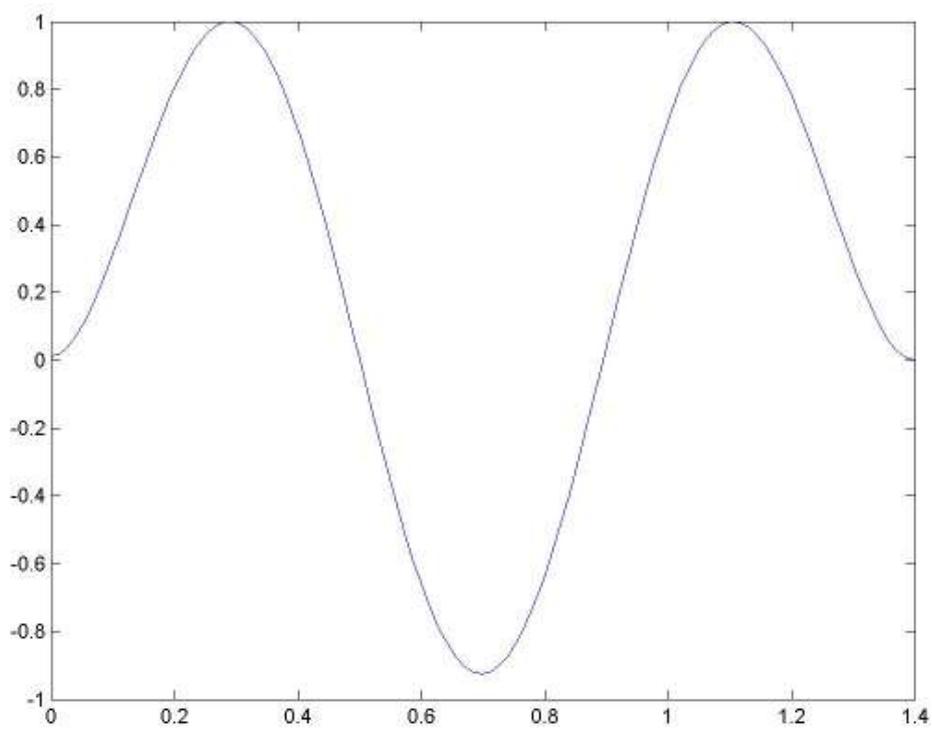


圖 4.7 張開角度 80 度，第三模態

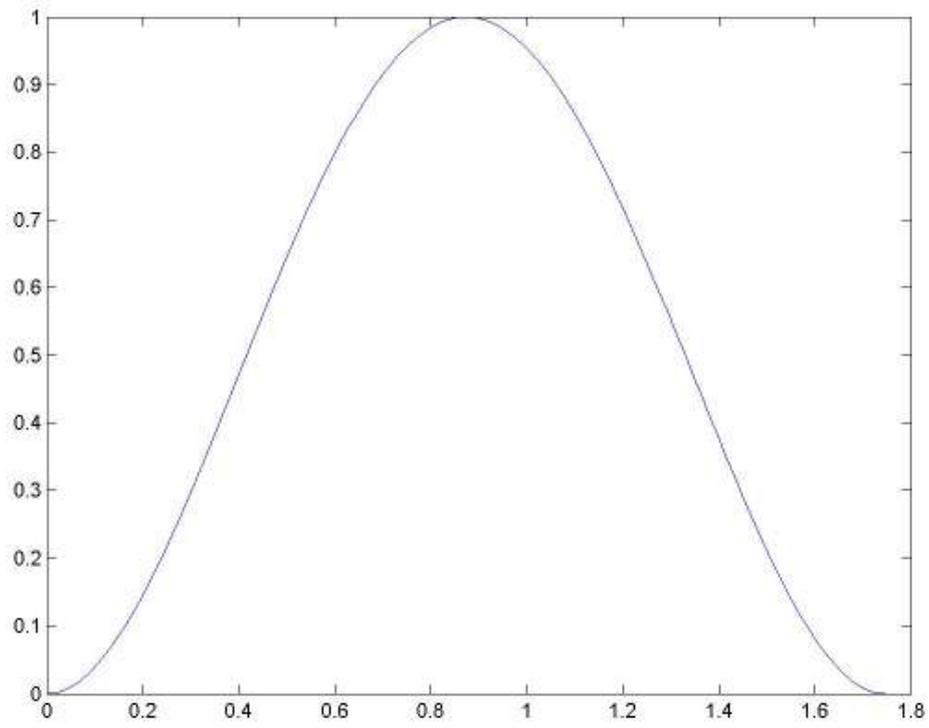


圖 4.8 張開角度 100 度，第一模態

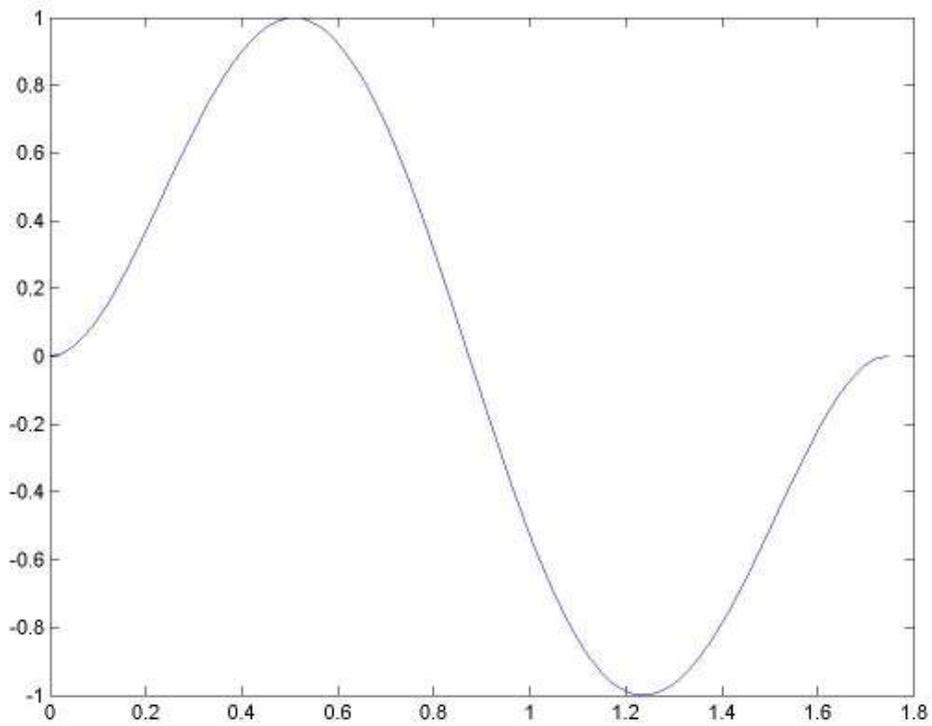


圖 4.9 張開角度 100 度，第二模態

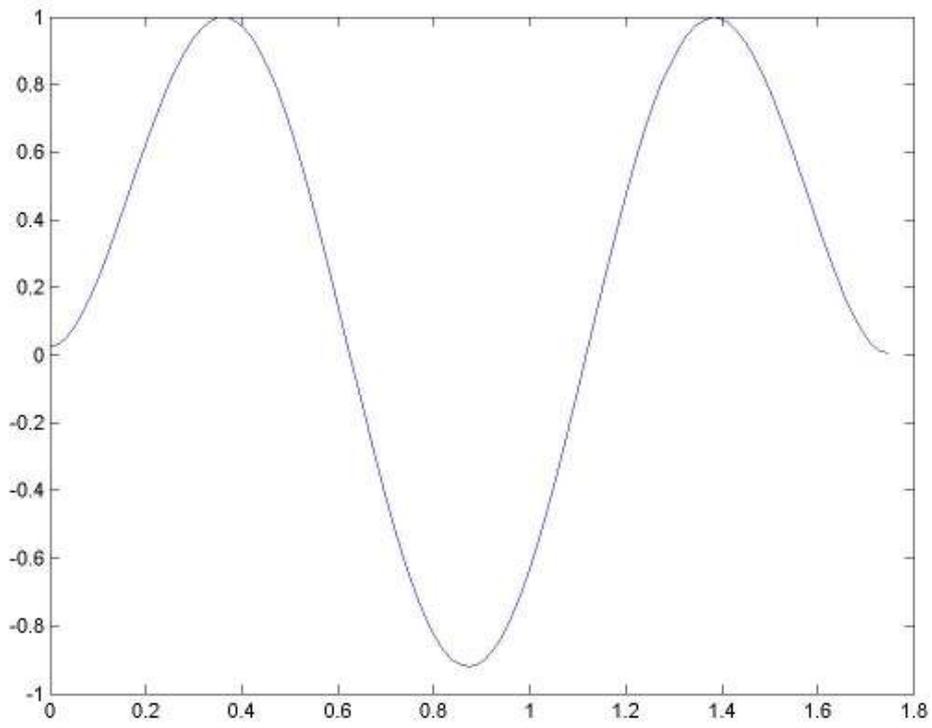


圖 4.10 張開角度 100 度，第三模態

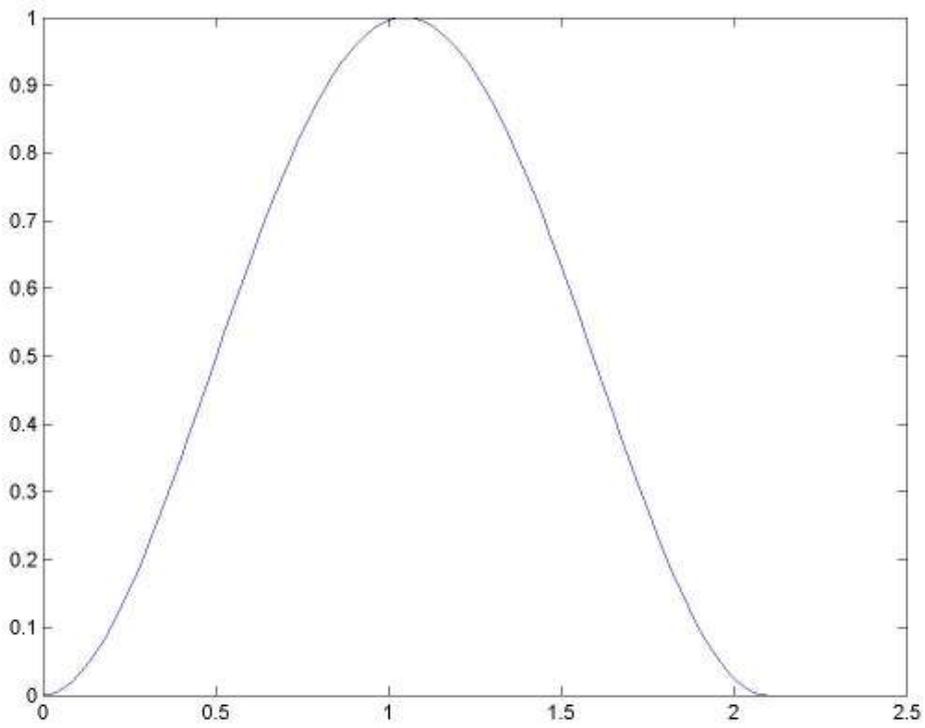


圖 4.11 張開角度 120 度，第一模態

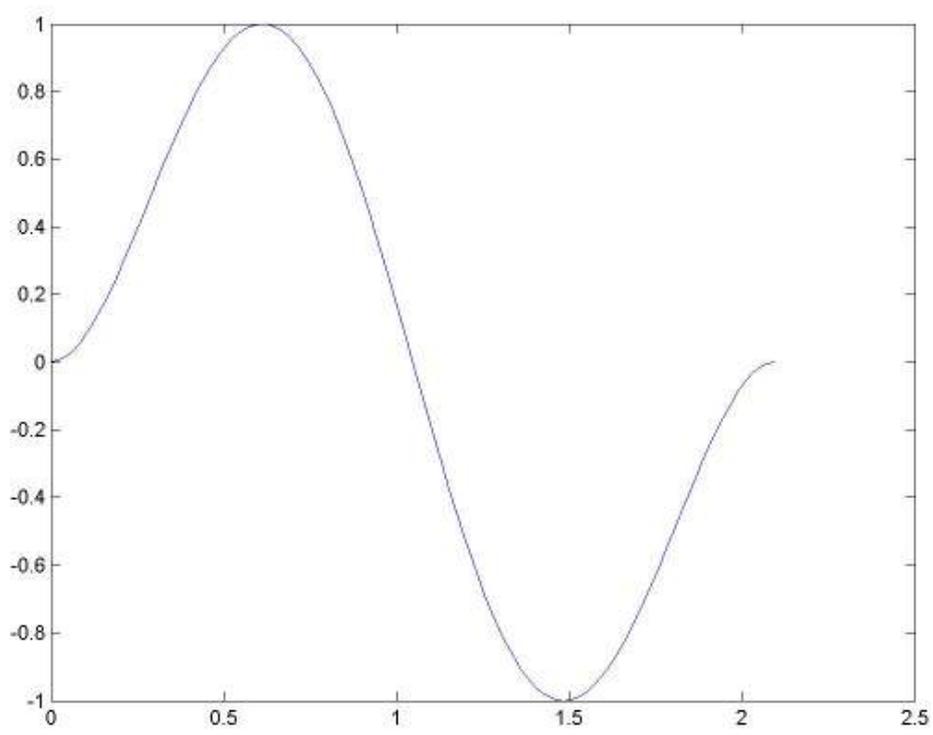


圖 4.12 張開角度 120 度，第二模態

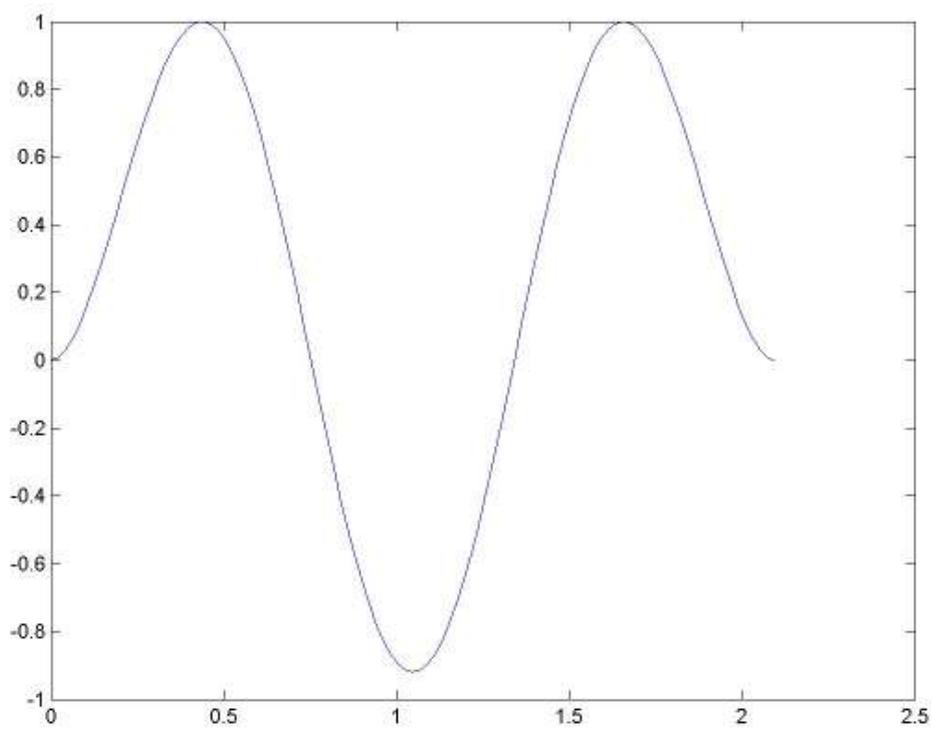


圖 4.13 張開角度 120 度，第三模態

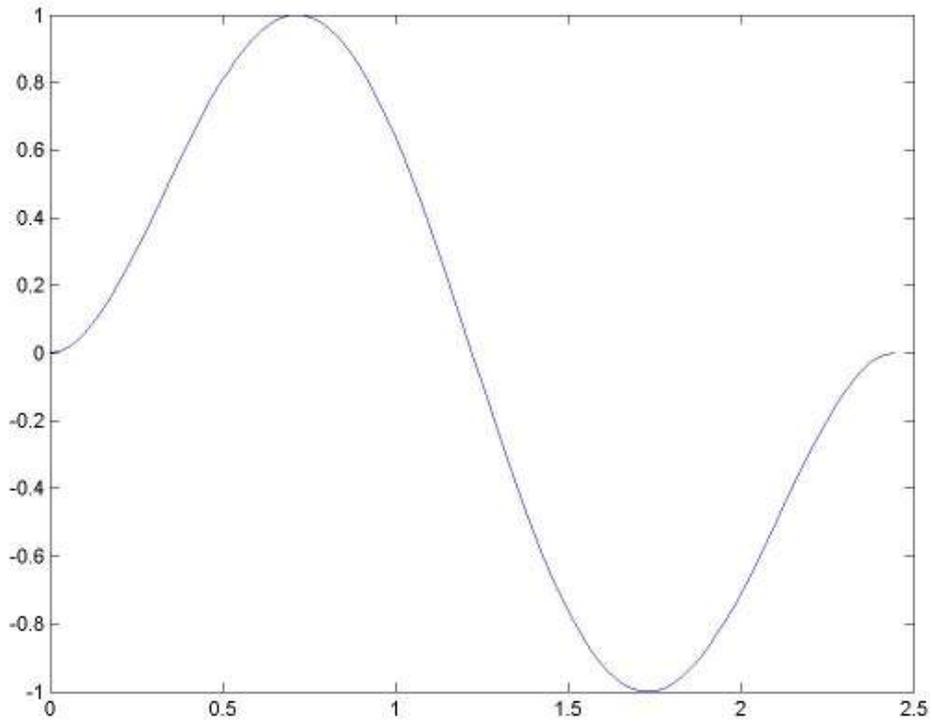


圖 4.14 張開角度 140 度，第一模態

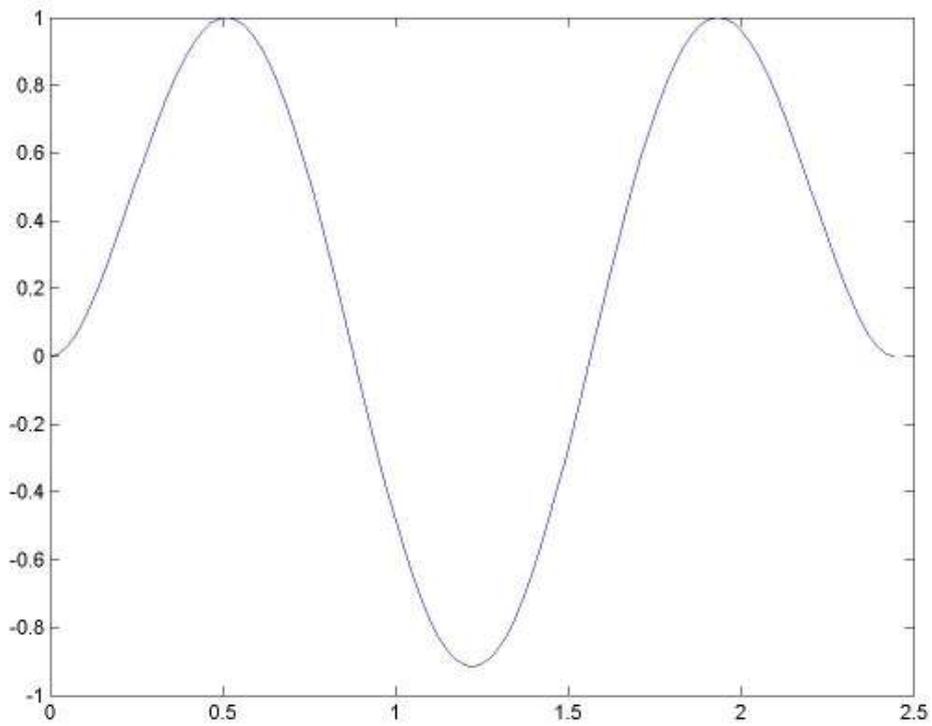


圖 4.15 張開角度 140 度，第二模態

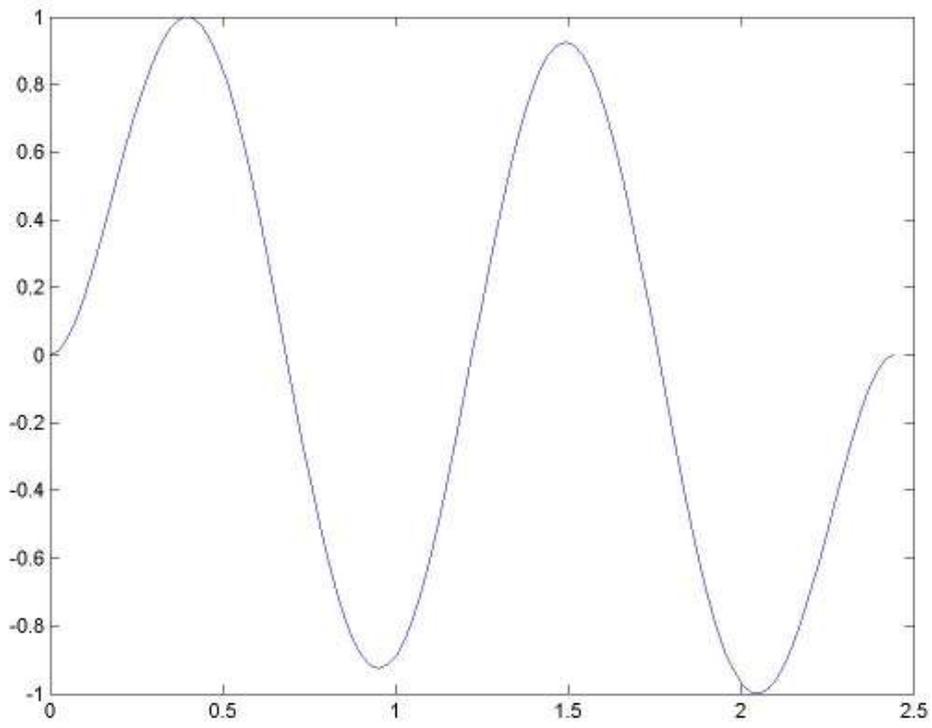


圖 4.16 張開角度 140 度，第三模態

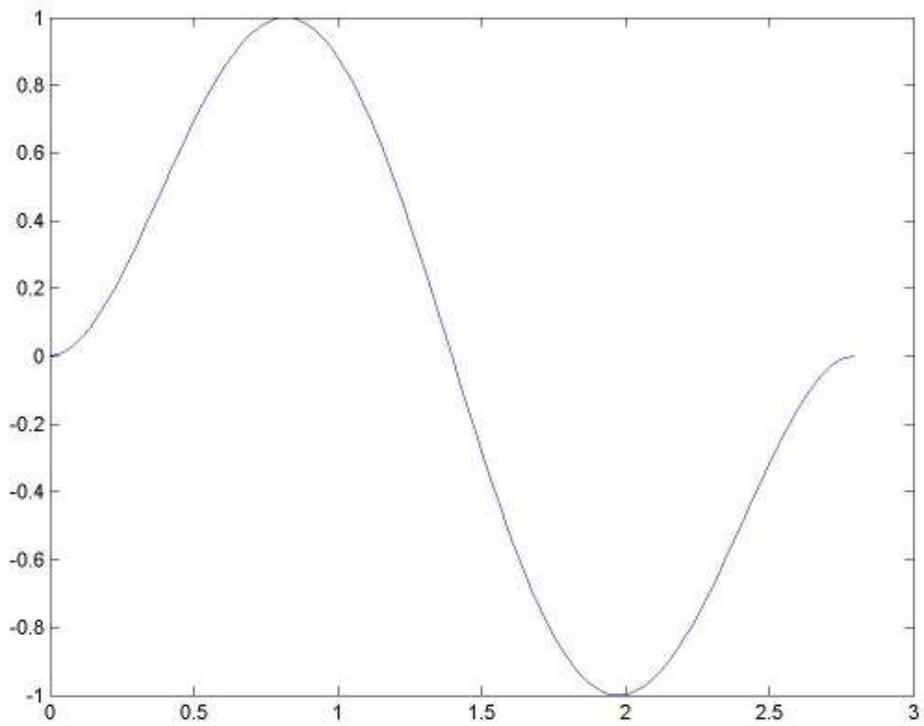


圖 4.17 張開角度 160 度，第一模態

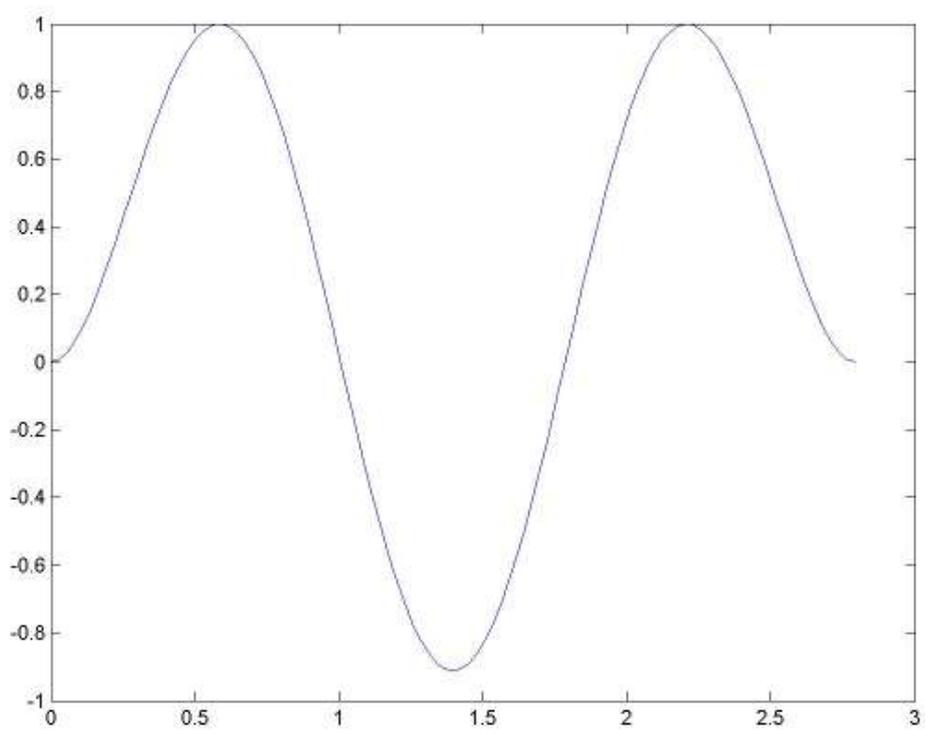


圖 4.18 張開角度 160 度，第二模態

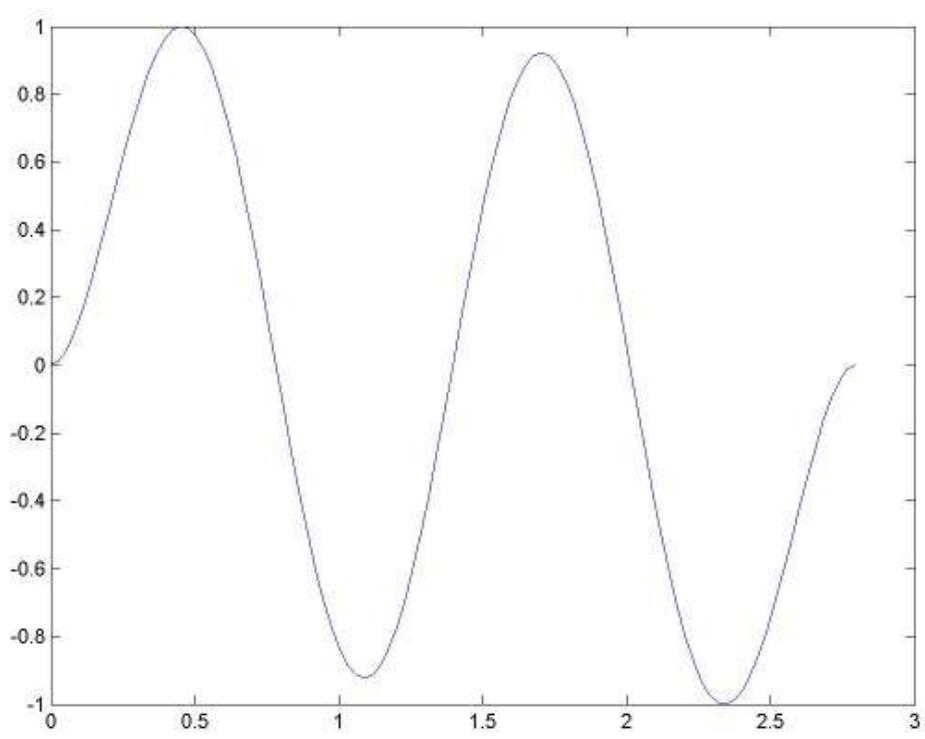


圖 4.19 張開角度 160 度，第三模態

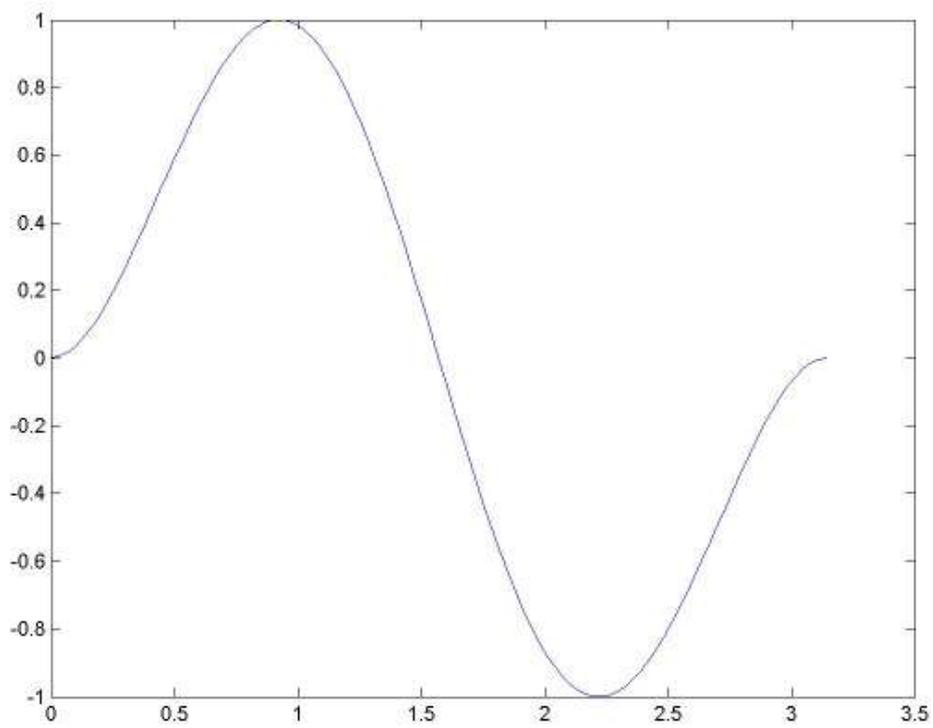


圖 4.20 張開角度 180 度，第一模態

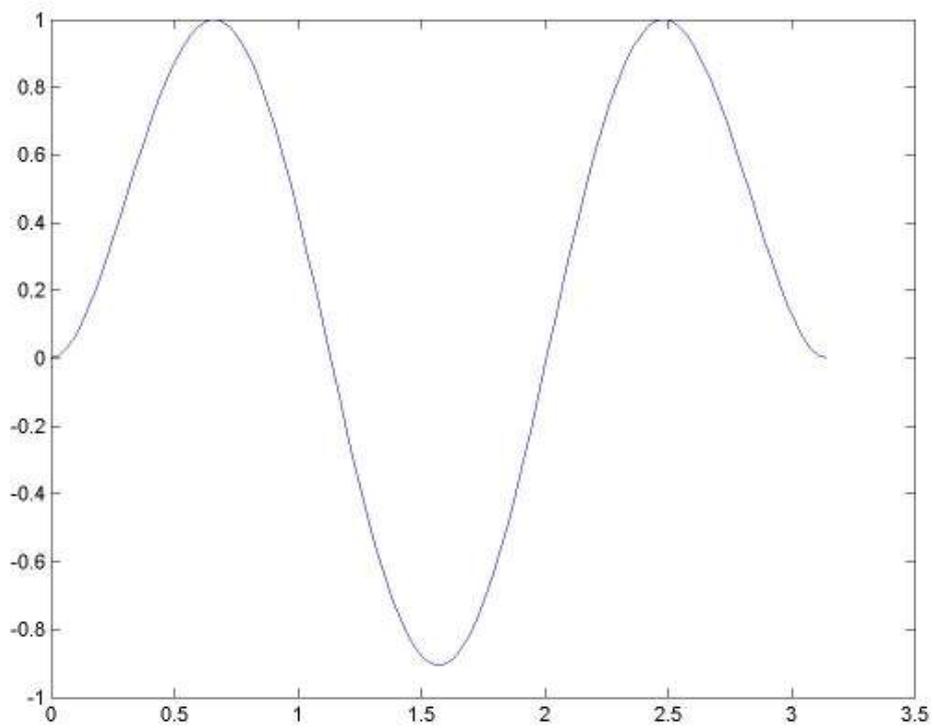


圖 4.21 張開角度 180 度，第二模態

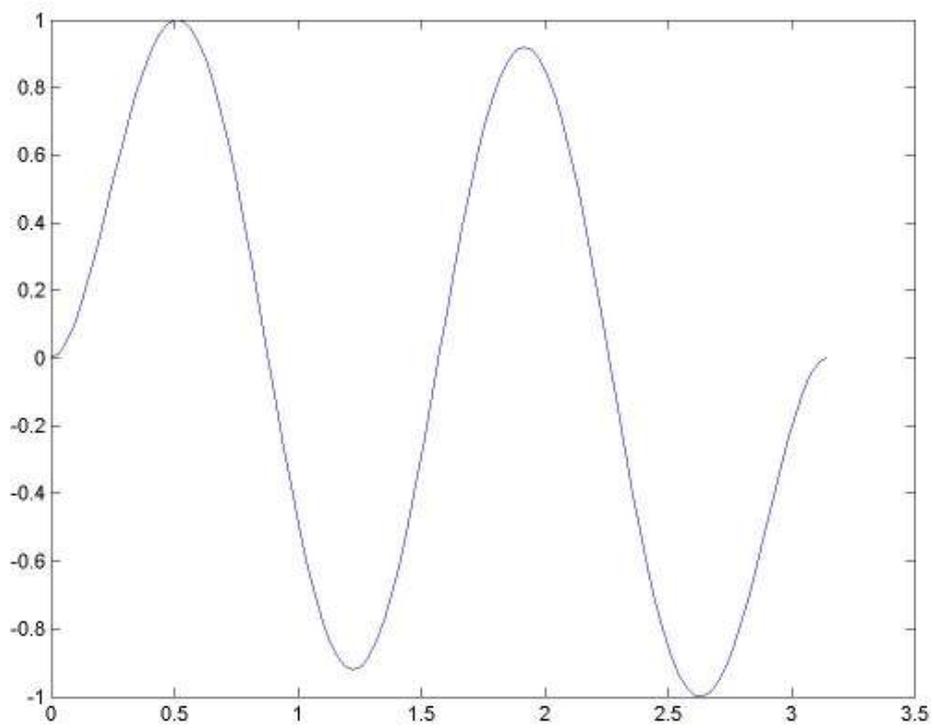
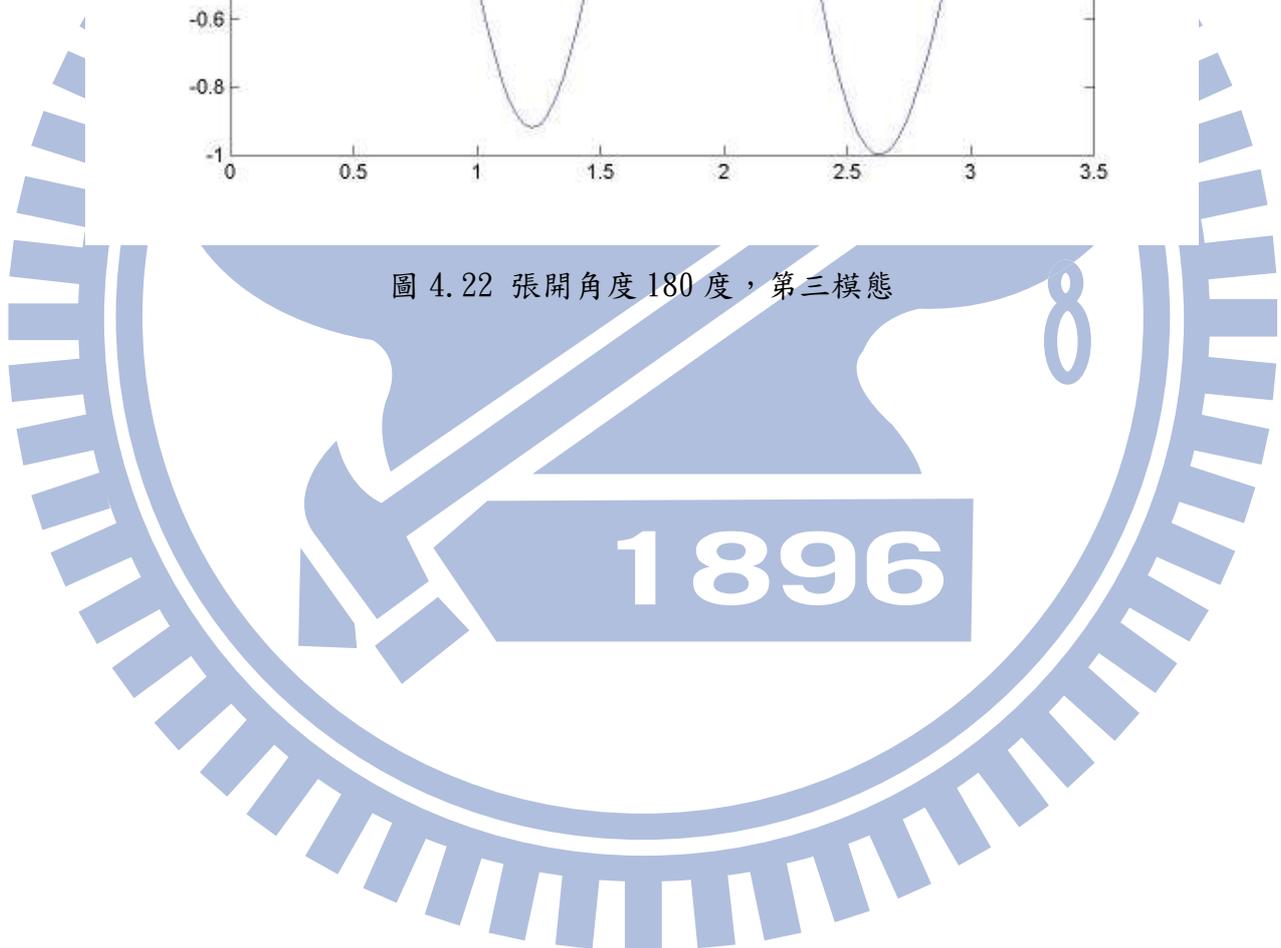


圖 4.22 張開角度 180 度，第三模態



利用矩陣  $G$  行列式值必須為零之條件，利用試誤法可解出其  $\lambda^2$ ，  
並且用模態分析方法即可得知其振態，其下為環之振態圖。

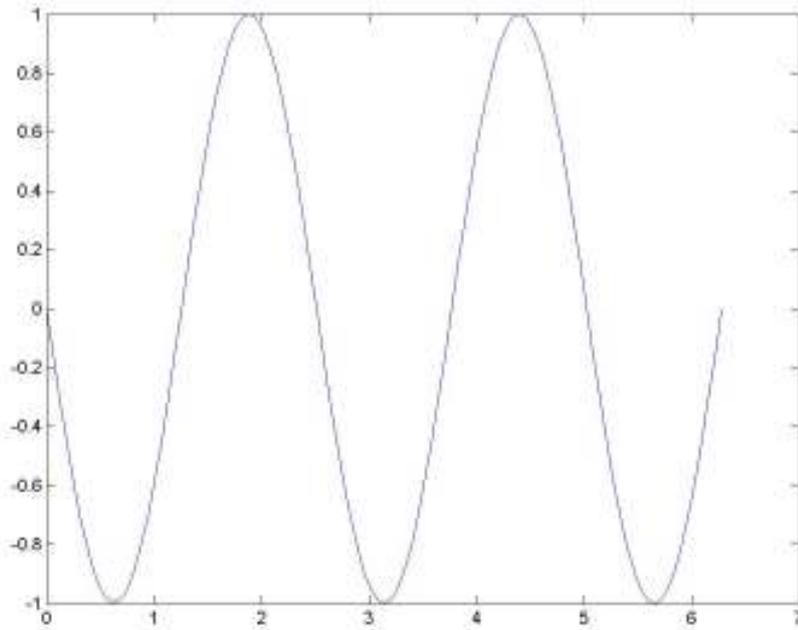


圖 4.23 角度 360 度，第一模態

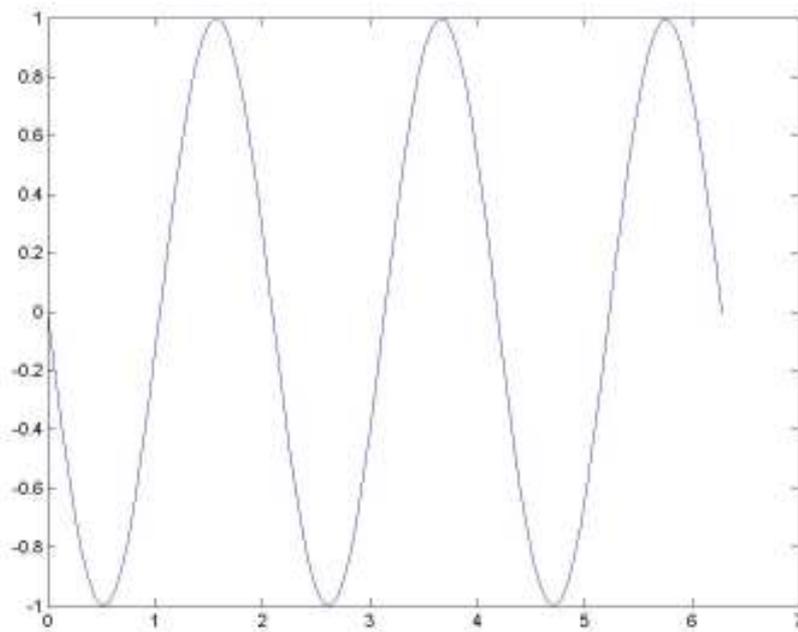


圖 4.24 角度 360 度，第二模態

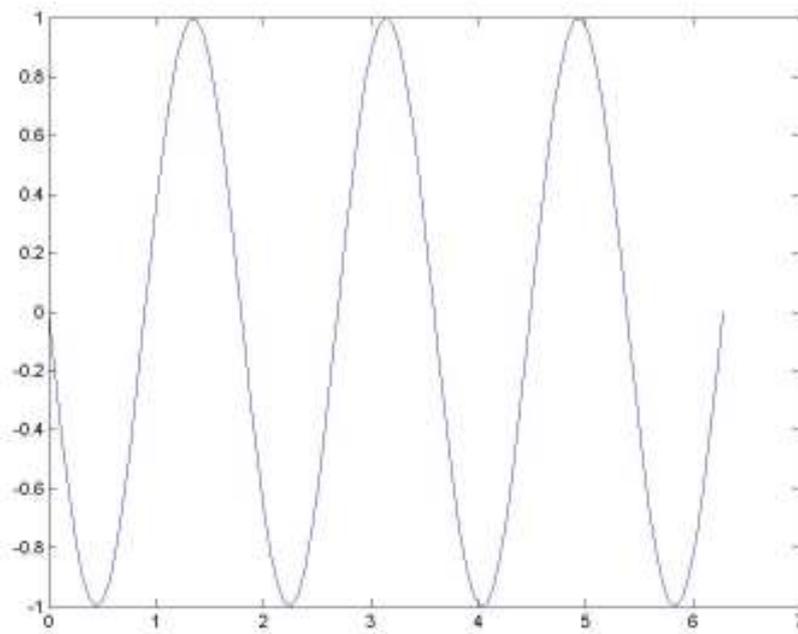


圖 4.25 角度 360 度，第三模態

## 4.2 討論

由系統頻率方程式得之頻率參數和文獻相比可做成圖 4.1，由圖可知所得之頻率參數在角度小的時候，和文獻所得相差的並不多，幾乎沒有什麼改變，且在低頻的時候所產生之差距並不大。但在大角度時，所產生之差距會隨著模態越高而差距越大，故可推測此方法在大角度和高頻時會產生較大的差距。

且觀看圖 4.2 至圖 4.22，其圖形形狀大都呈現為  $\sin$  和  $\cos$  之圖形，和吾之假設相符合，但在其峰處並不全都為 1，但其圖形都呈現對稱的現象，和吾之模型同樣有對稱的特性，其兩端垂直位移幾乎等於零，和吾假設之邊界符合；觀看這章的所有圖表，其兩端的線幾乎是平的，也就是說其斜率幾乎等於零，和吾假設邊界條件第二個和

第四個假設兩邊斜率為零相符合。

垂直位移的形狀呈現波形，和吾 Y 之假設相同，角度 120 度之前在第一模態時只有一個波峰，角度超過 120 度之後其第一模態會開始有兩個波峰，之後每增加一個模態則增加一個波峰。



## 第五章 ANSYS 分析與比較

### 5.1 元素介紹

#### BEAM4 (樑元素)

1. BEAM4 單元是一種具有拉壓彎扭能力的 3D 彈性單元。每節點 6 個自由度。

2. BEAM4 單元的定義包括：幾何位置的確定，單元坐標系的確定，截面特性的輸入。

BEAM4 單元包含兩個節點( $i, j$ )或三個節點( $i, j, k$ )， $k$  為單元的方向節點；單元的截面特性用實常數(REAL)給出，主要包括截面(area)，兩個方向的截面慣性矩(IZZ)和(IYY)，兩個方向的厚度(TKY 和 TKZ)，相對單元坐標系  $x$  軸的方向角(THETA)，扭轉慣性矩(IXX)。其中慣性矩，厚度，方向角都是在單元坐標系下給出的。

3. BEAM4 單元坐標系的方向確定如下：單元坐標系  $X$  軸由節點  $i, j$  連線方向確定由  $i$  指向  $j$ ；對於兩節點確定的 BEAM4 單元，若方向角  $\theta=0$ ，則單元坐標系  $y$  軸默認平行於整體坐標系的  $x-y$  平面；若單元坐標系  $x$  軸與整體坐標系  $z$  軸平行，則單元坐標系  $y$  軸默認平行整體坐標系的  $y$  軸， $z$  軸由右手法則判

定；若用戶希望自己來控制單元繞單元坐標系  $x$  軸的轉動角，則可以通過方向角  $\theta$  或第三個節點  $k$  來實現， $i, j, k$  確定一個平面，單元坐標系的  $Z$  軸就在該平面內。

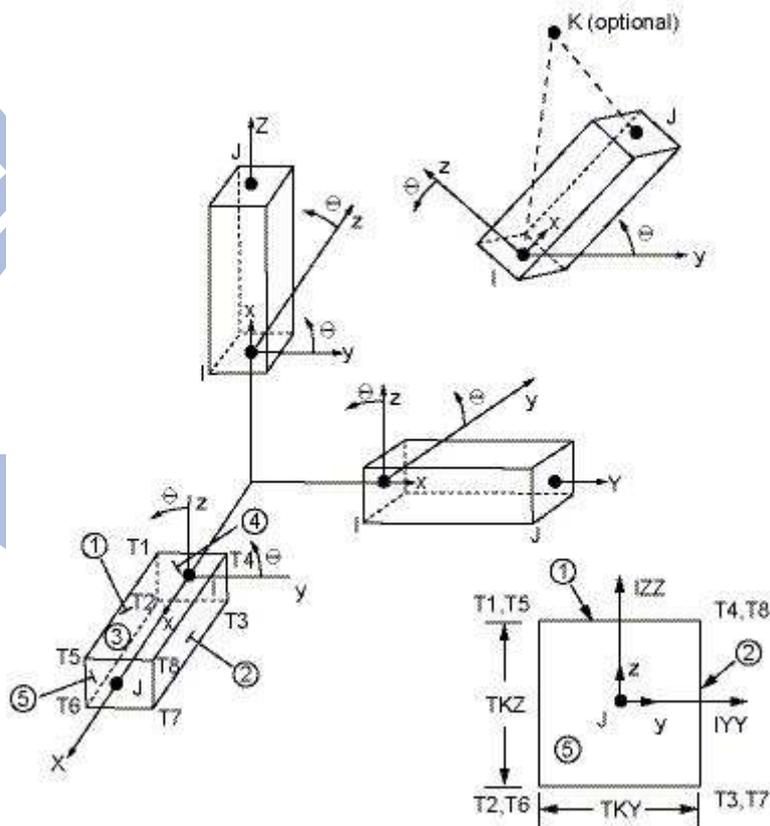


圖 5.1 BEAM4 幾何形狀

### COMBIN14 (彈簧元素)

COMBIN14 在縱向和扭轉有 1-D、2-D、或 3-D 的應用。縱向的彈簧阻尼選項為一個單軸的拉壓元素，且在每一個點有三個自由度：轉變成點  $x, y, z$  三個方向。彎曲和扭轉不在此考慮。扭轉彈簧阻尼選

項為一個純扭轉元素且每個點有三個自由度：分別對  $x$ 、 $y$ 、 $z$  三個軸旋轉。在此不考慮彎曲和軸向力。此彈簧組尼元素是沒有質量的。質量可以介由 MASS21 被加上。彈簧和阻尼可以從元素上面被移除。

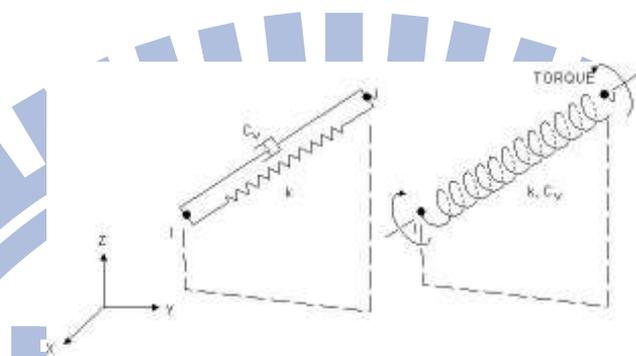


圖 5.2 COMBIN14 幾何形狀

## 5.2 建模與分析

因為模型較為簡單，故採用指令式的方法建模，且把它寫成 txt 檔（附錄 1），只需讀取指令檔就可以完成分析，且所需之所有基本參數都和第三章相同，分析完畢之後在與理論做比較。以下為 ANSYS 結果和理論的相比圖；實線為 ANSYS 之值，虛線為理論之值。橫座標單位 (rad)、縱座標為垂直位移（已無因次化）

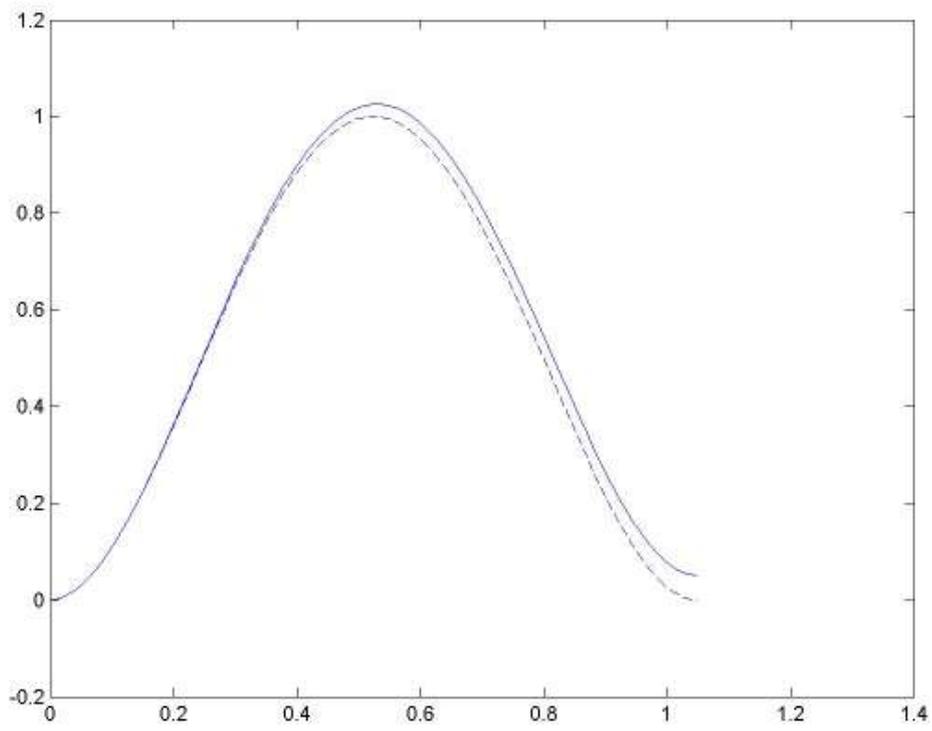


圖 5.3 張開角度 60 度，第一模態

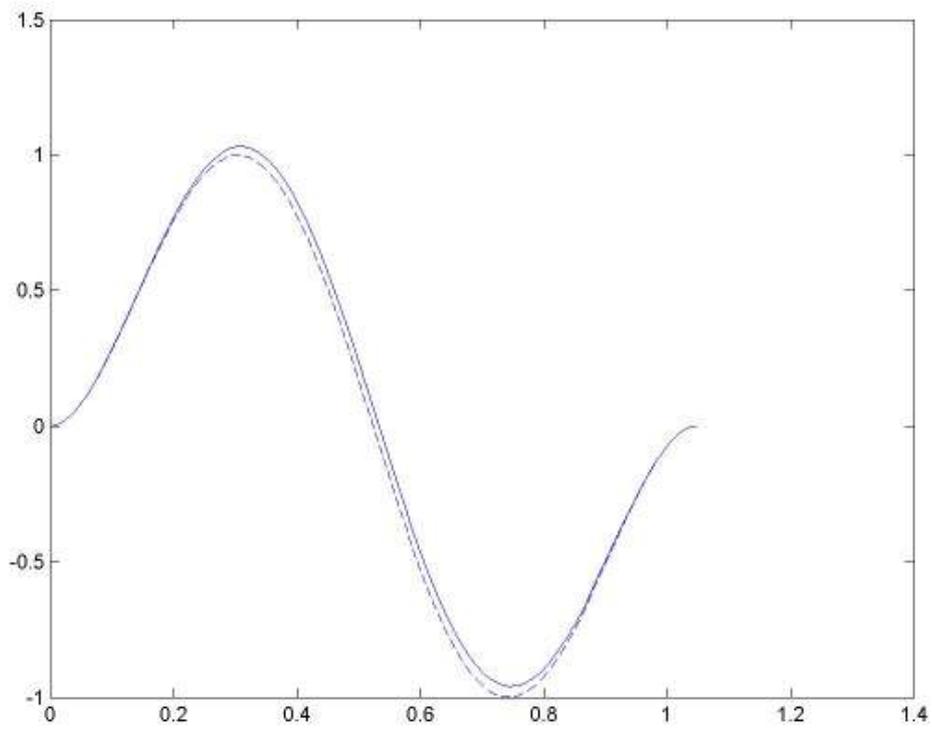


圖 5.4 張開角度 60 度，第二模態

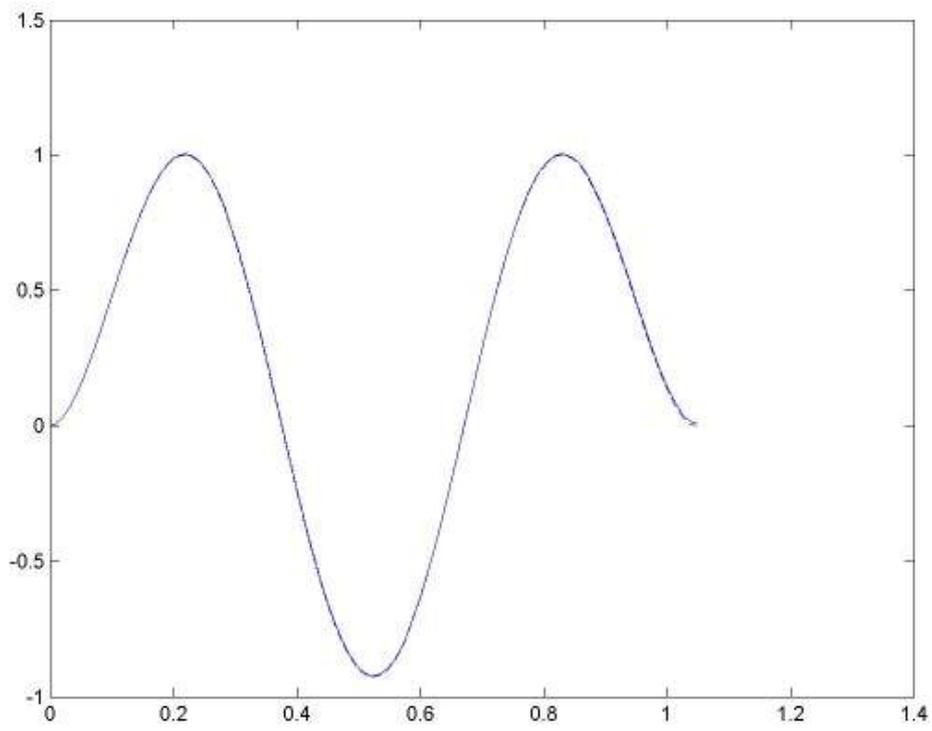


圖 5.5 張開角度 60 度，第三模態

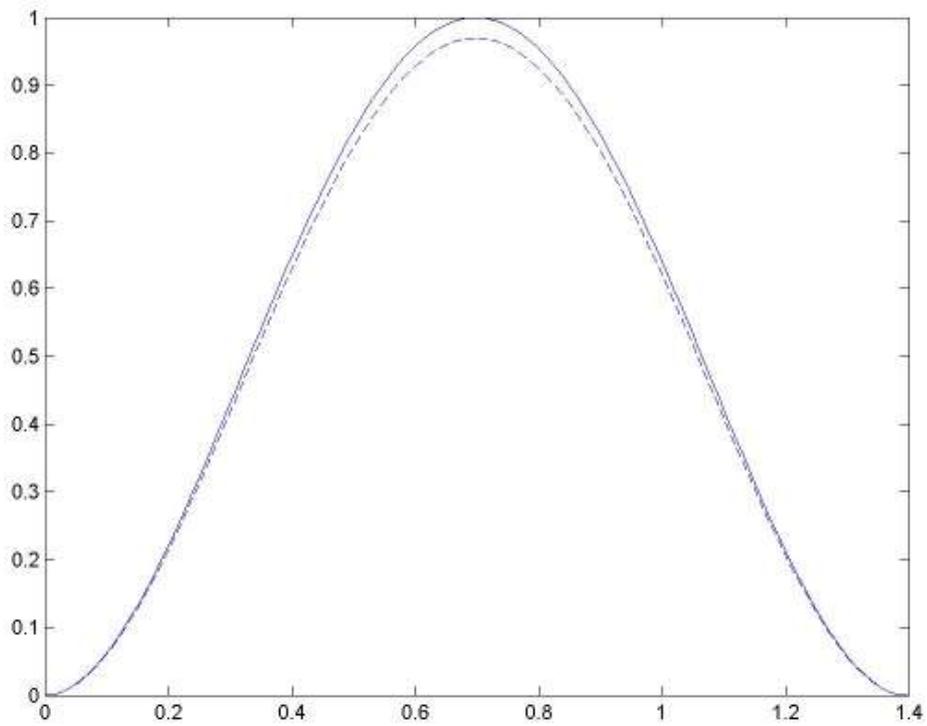


圖 5.6 張開角度 80 度，第一模態

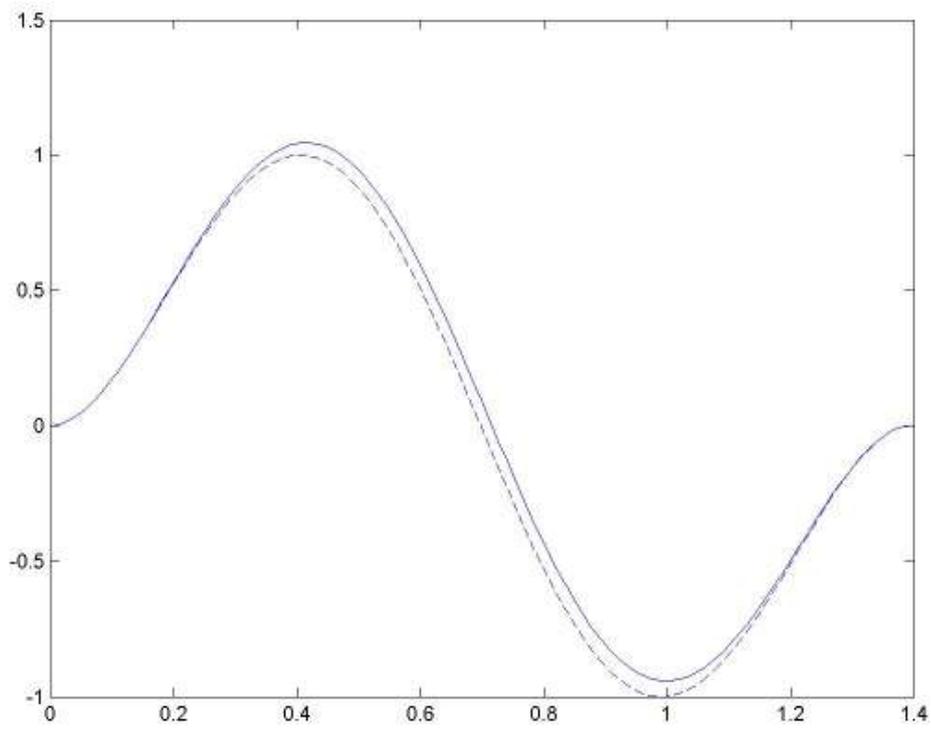


圖 5.7 張開角度 80 度，第二模態

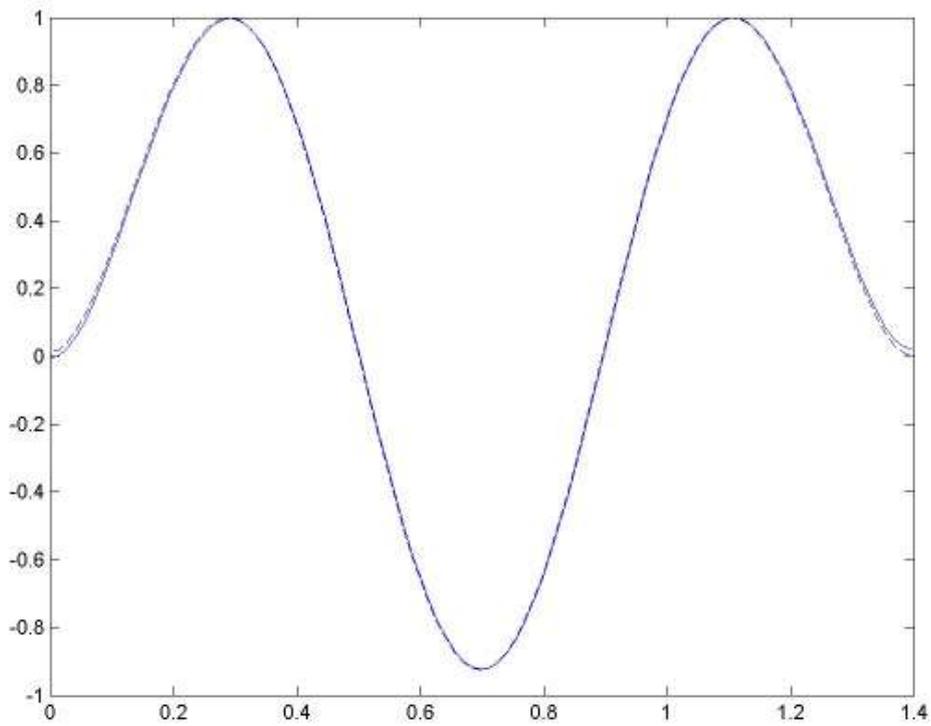


圖 5.8 張開角度 80 度，第三模態

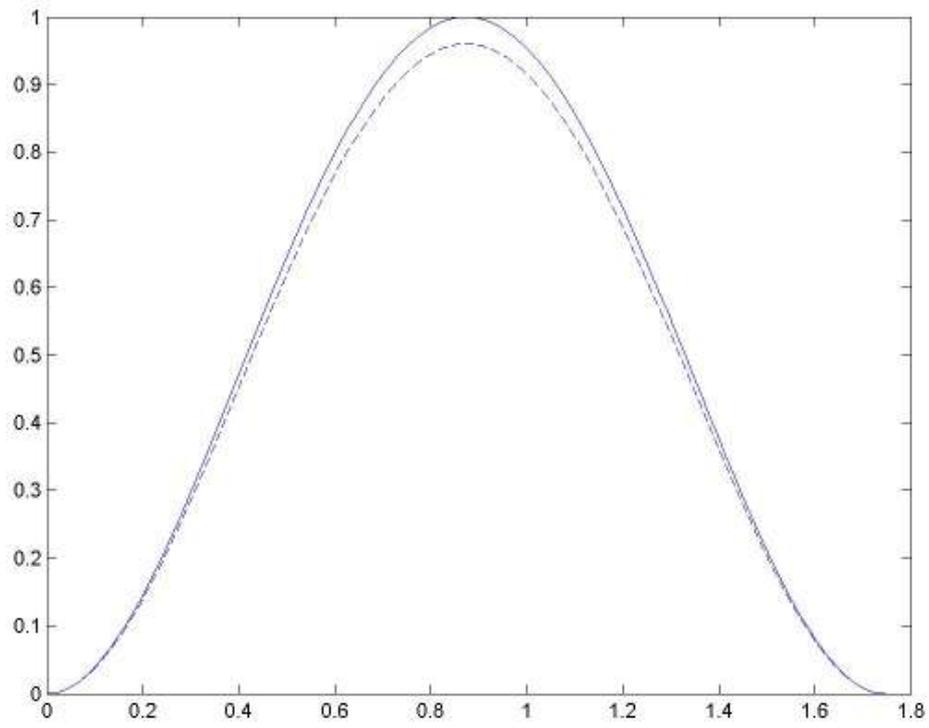


圖 5.9 張開角度 100 度，第一模態

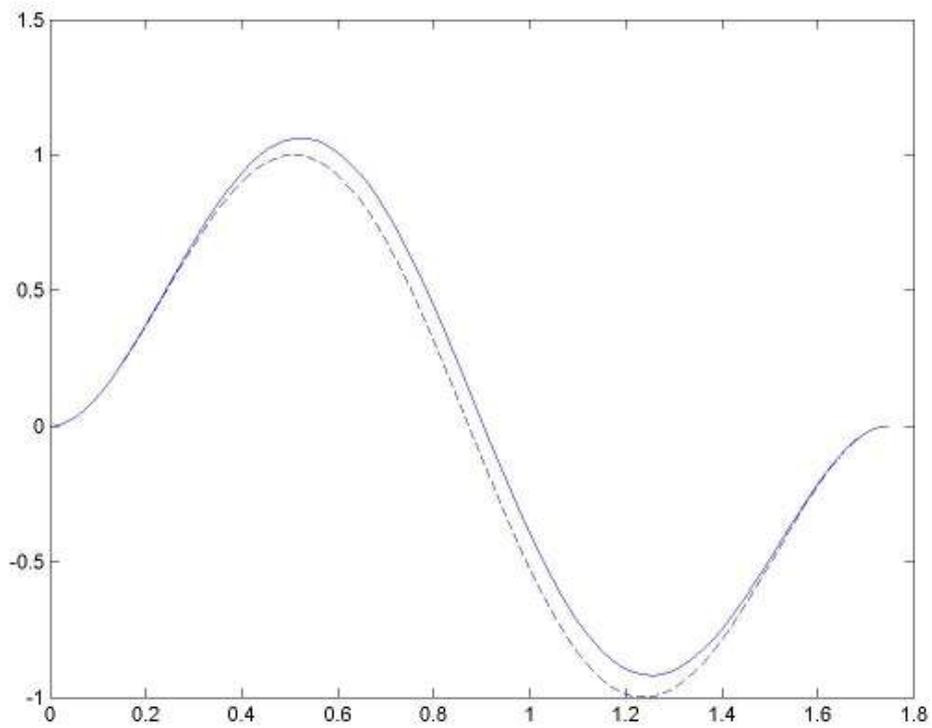


圖 5.10 張開角度 100 度，第二模態

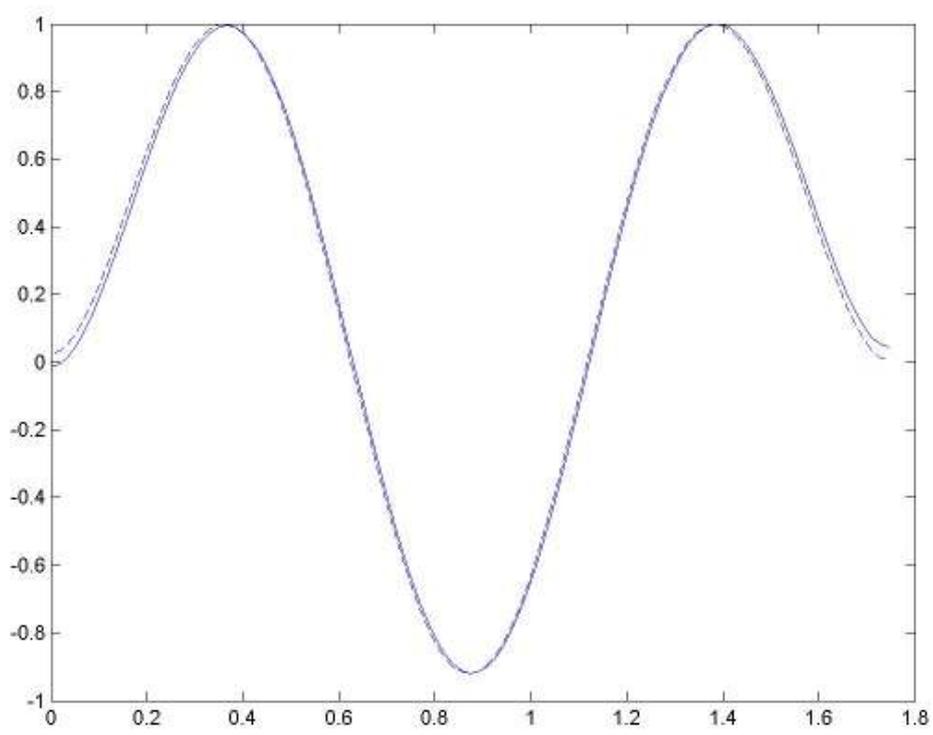


圖 5.11 張開角度 100 度，第三模態

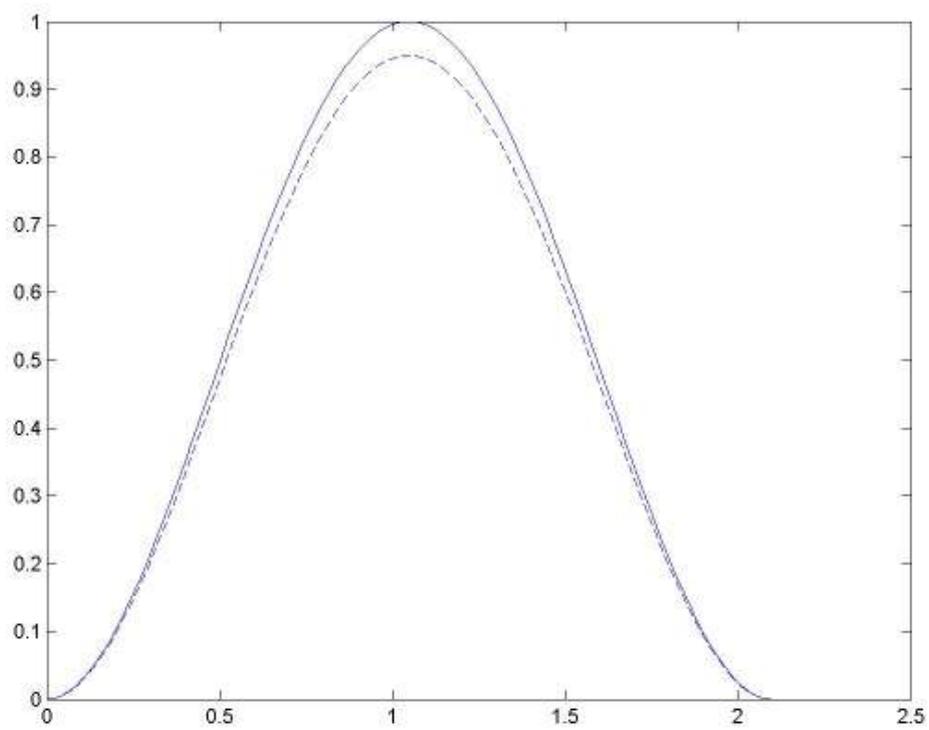


圖 5.12 張開角度 120 度，第一模態

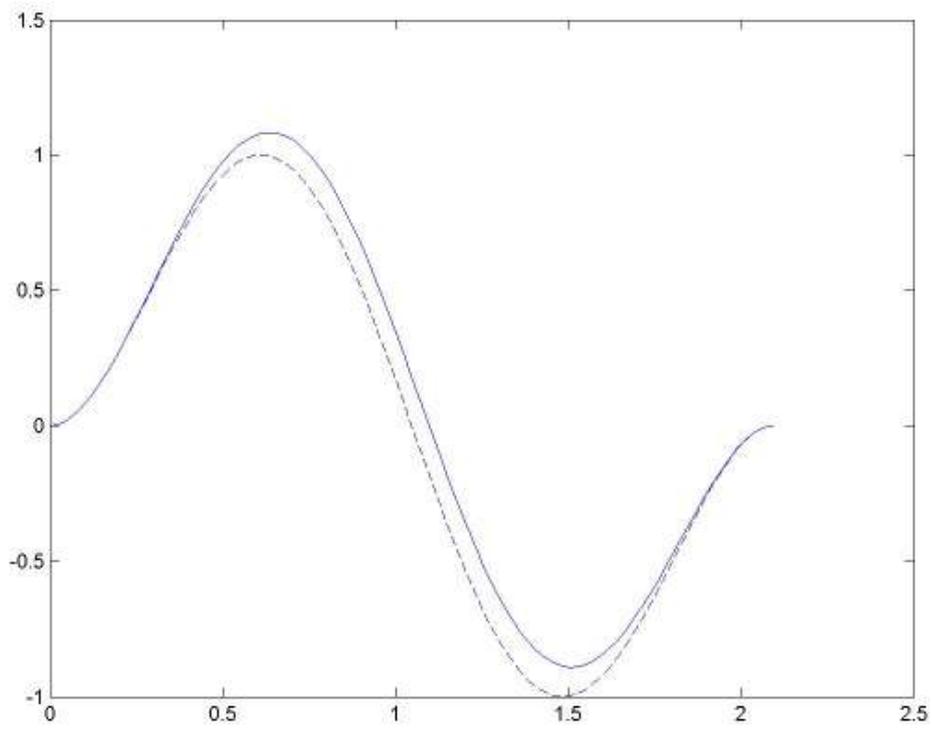


圖 5.13 張開角度 120 度，第二模態

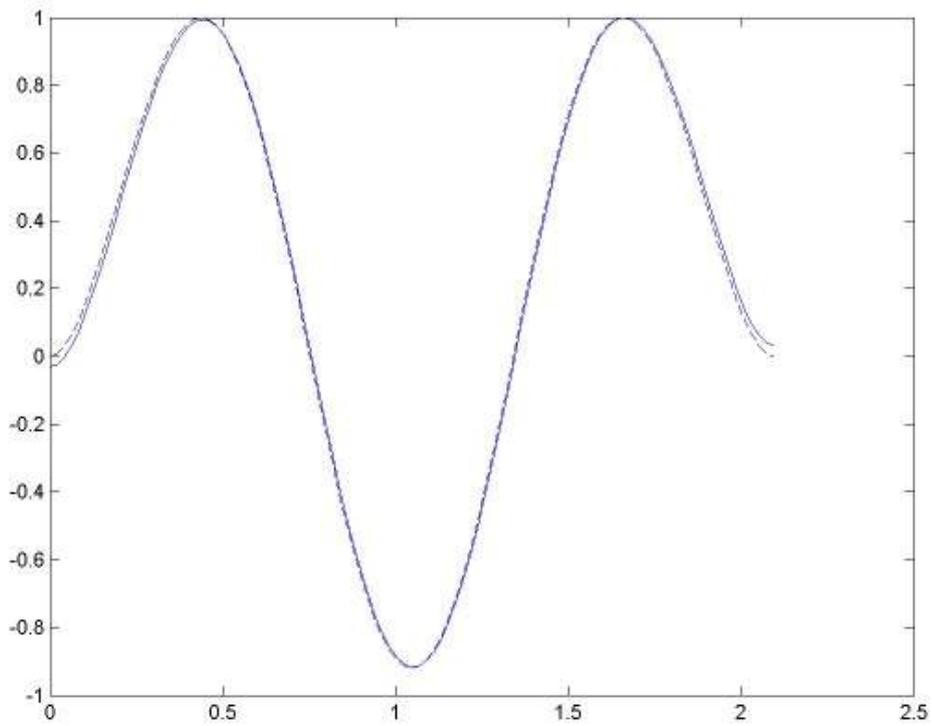


圖 5.14 張開角度 120 度，第三模態

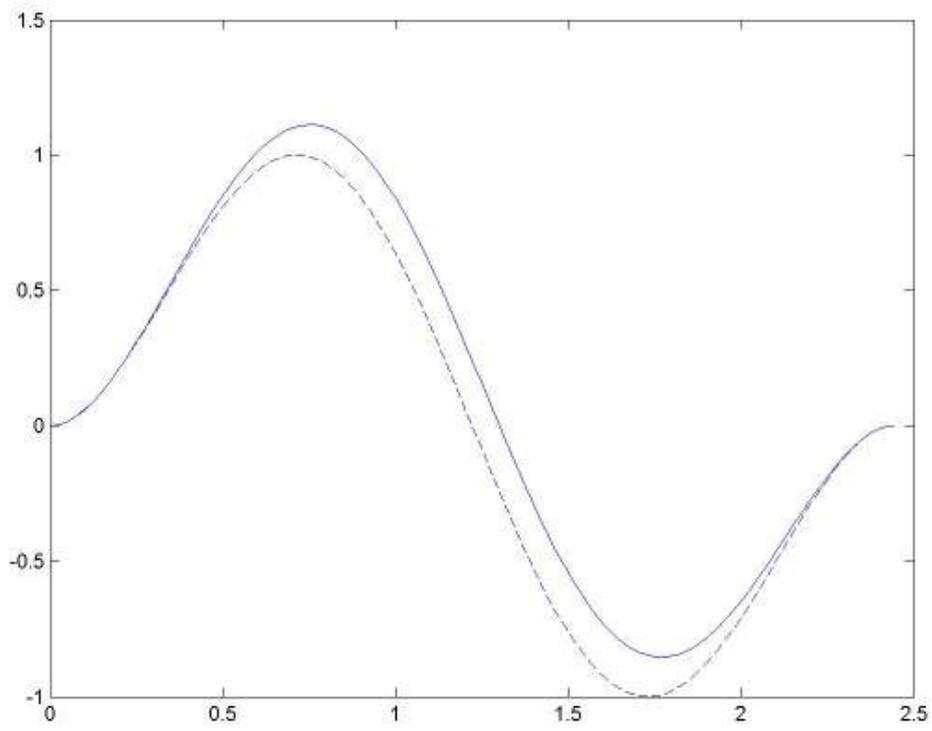


圖 5.15 張開角度 140 度，第一模態

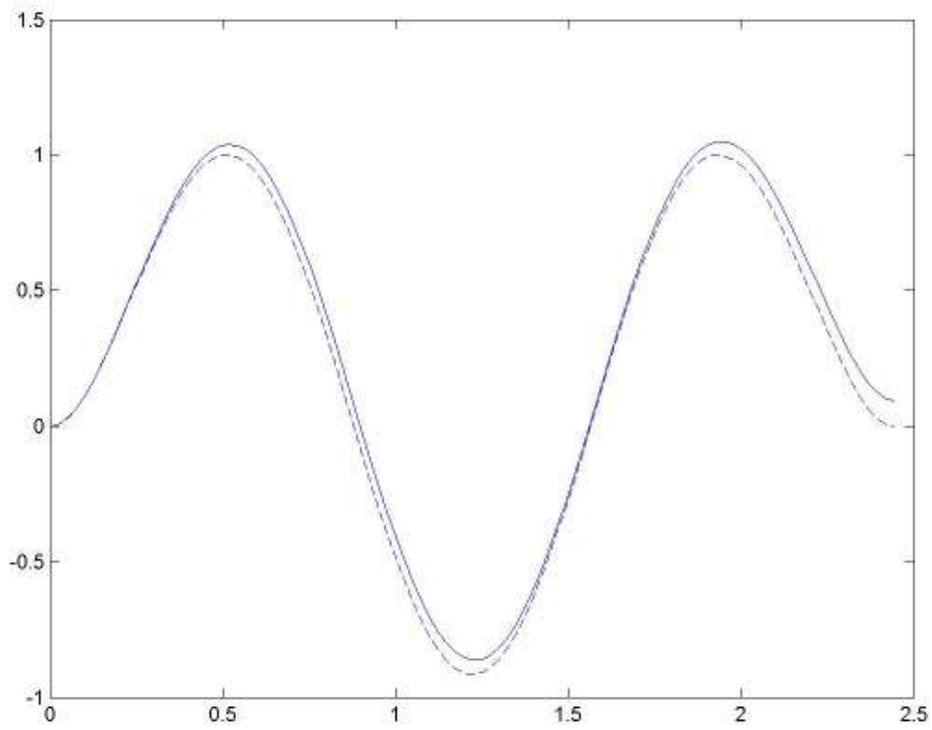


圖 5.16 張開角度 140 度，第二模態

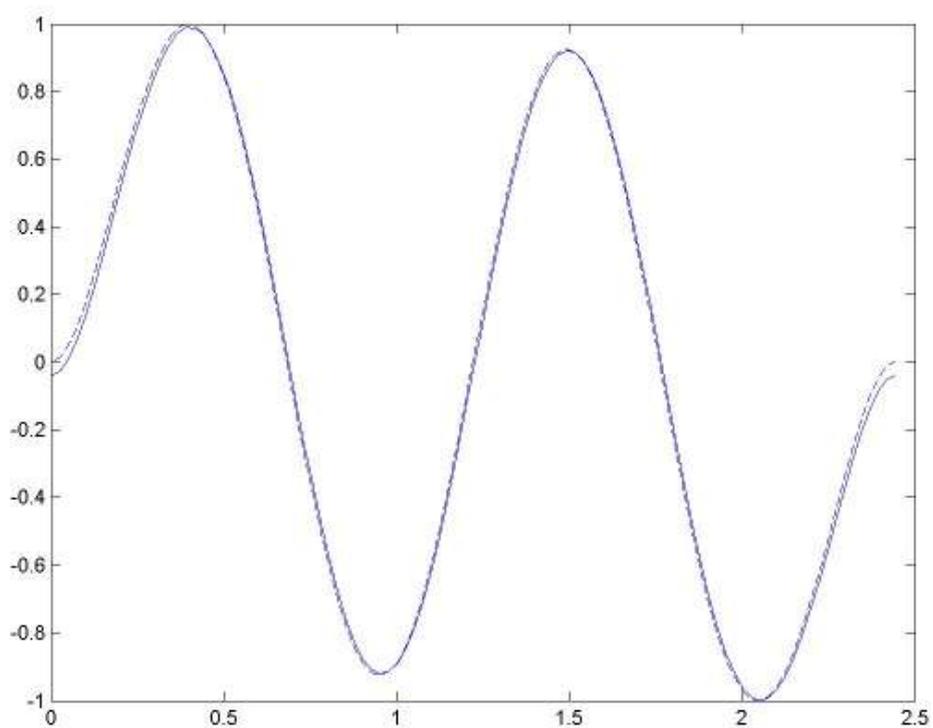


圖 5.17 張開角度 140 度，第三模態

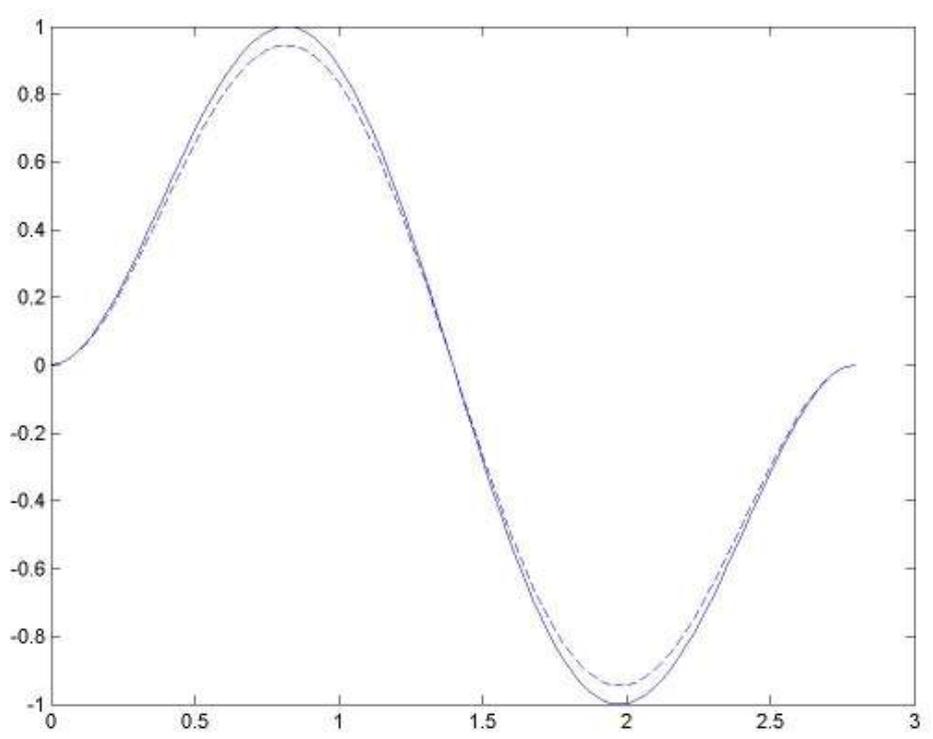


圖 5.18 張開角度 160 度，第一模態

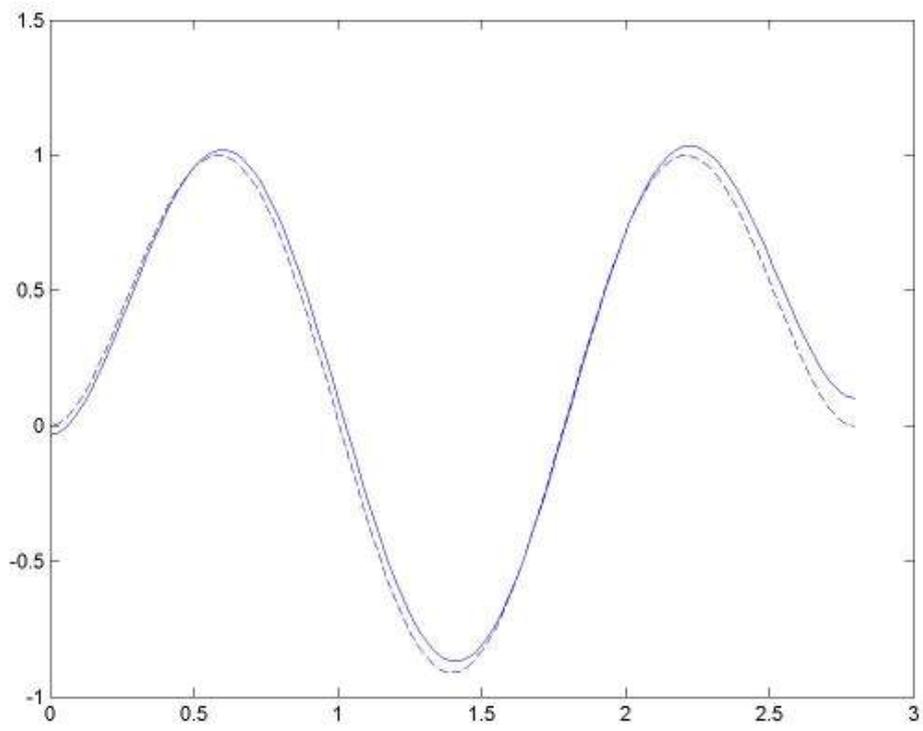


圖 5.19 張開角度 160 度，第二模態

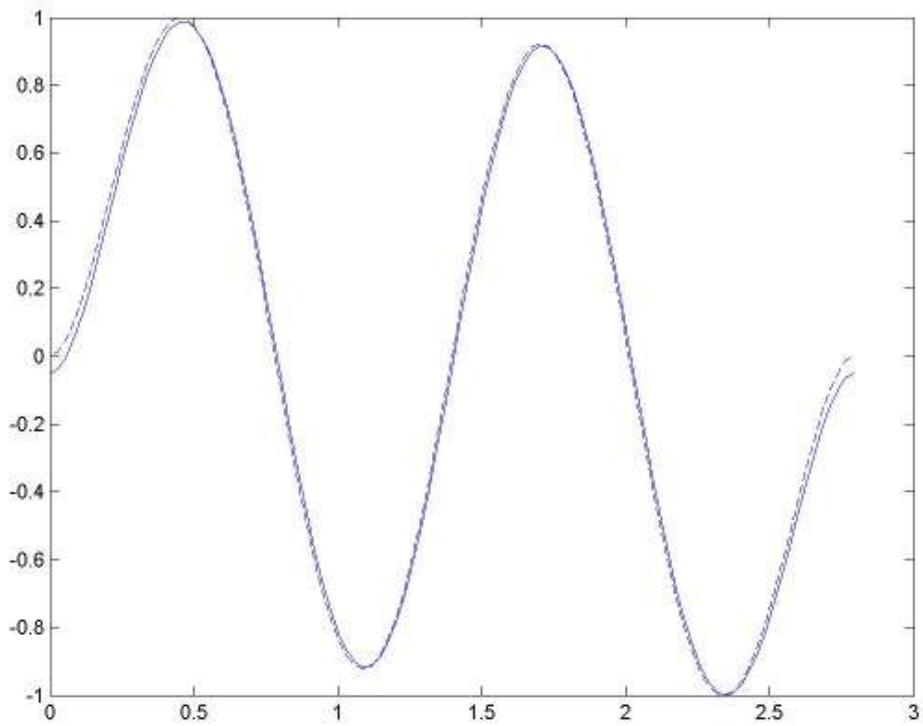


圖 5.20 張開角度 160 度，第三模態

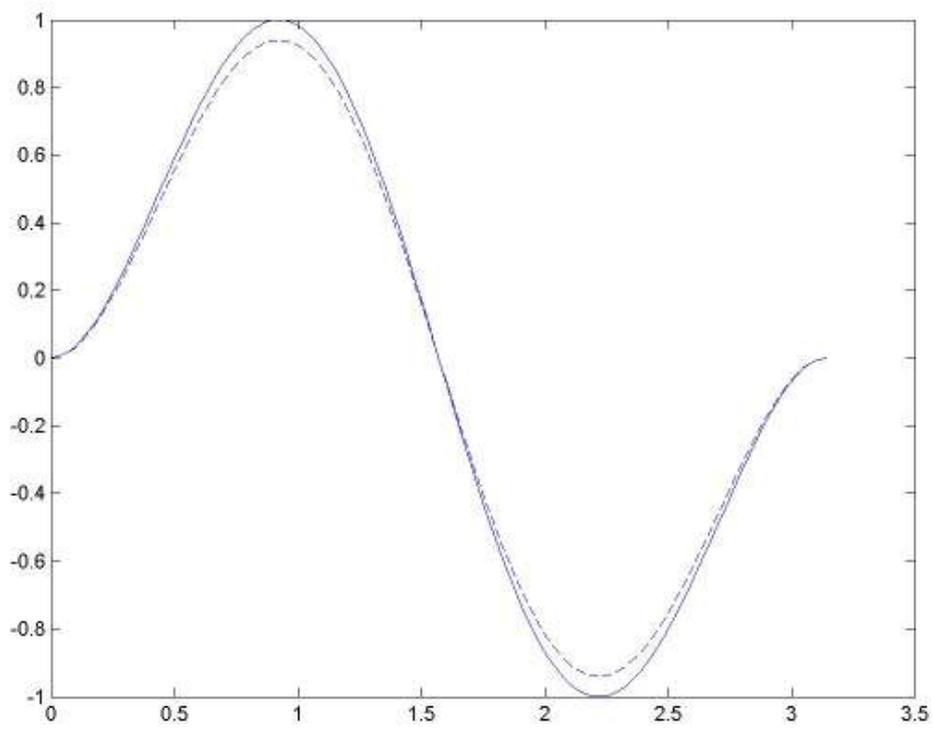


圖 5.21 張開角度 180 度，第一模態

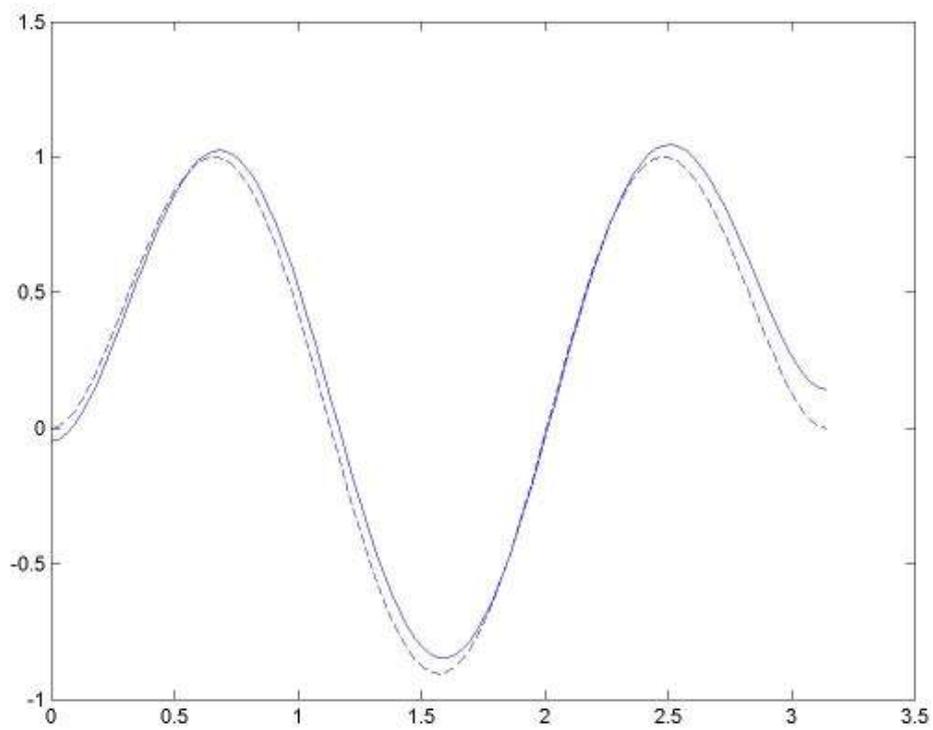


圖 5.22 張開角度 180 度，第二模態

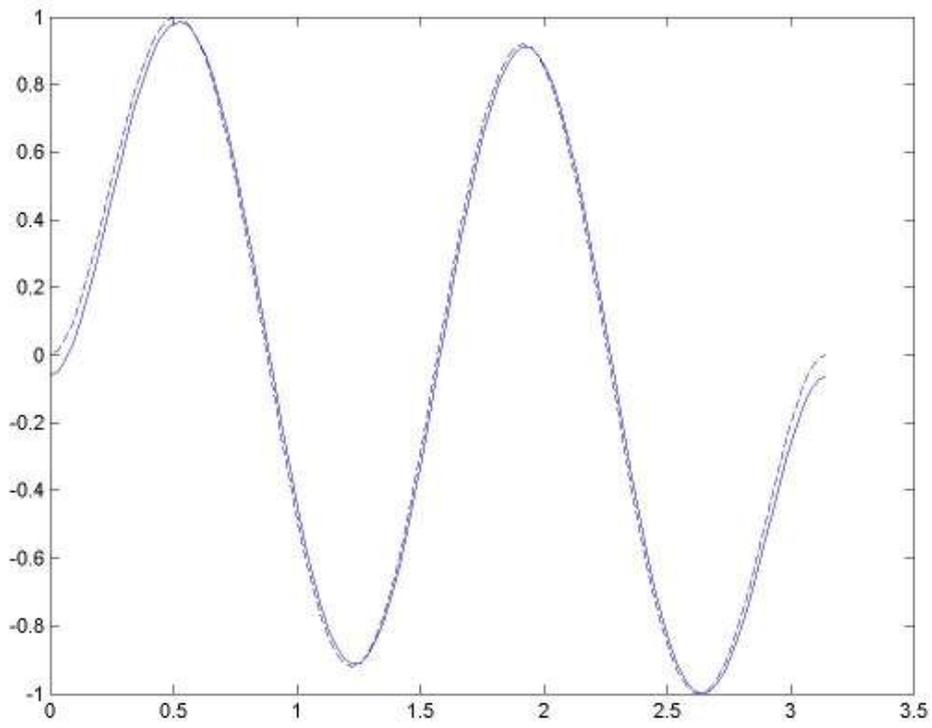
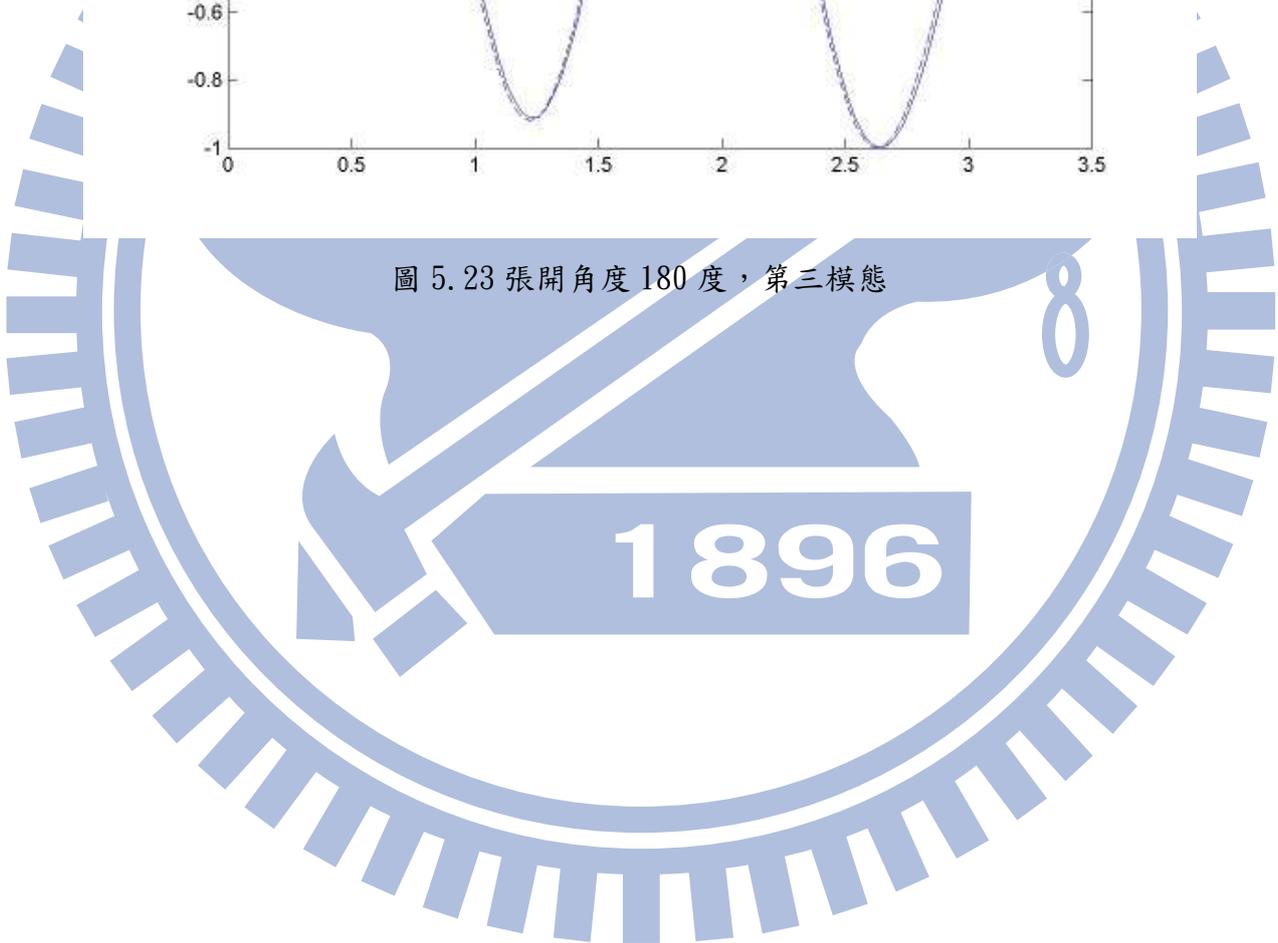


圖 5.23 張開角度 180 度，第三模態



## 第六章 結論與建議

### 6.1 結論

1. 當張開角度變大時，其自然頻率會變小。
2. 當張開角度變大時，其頻率參數差異性會變大。
3. 張開角度大於某個程度時，其第一振態並非只有一個波峰，而是出現多個波峰。
4. 找根時起始值很重要，會影響到最後結果是否找到的其解。
5. 找根時，利用三次方程式之判別式 $<0$ ，確定其根為純實數或純虛數，可提高找根之效率和正確性。
6. 其振態圖呈現對稱現象，和吾模型形狀假設相同。
7. 其振態圖呈現簡諧函數之圖形，和吾用雙曲函數和指數函數有關。
8. 與 ANSYS 結果相比，振態圖在兩端幾乎相同，中間才出現些許變化。
9. 與 ANSYS 結果相比，當角度越大時，模態在低頻差異越大，到了高頻則漸漸趨於相同。

### 6.2 建議

本文利用對物體很直觀的物理性質求出其控制方程式，相較於用有限元素法解同樣的問題，運算會更為精簡、快速。而在此提供一些新的考量運用於結構物中。

(一) 考慮更多形狀或是多跨距之不同響應。

(二) 改變其邊界束制條件。

(三) 可把曲線結構和直線結構做結合。

(四) 截面積為非均勻或是隨軸向變化。



## 參考文獻

1. J.P. DEN HARTOG 1956 Mechanical Vibrations. New York: McGraw-Hill, fourth edition.
2. E. VOLTERRA and J. D. MORELL 1961 Journal of the Acoustical Society of America 33, 1787-1790. Lowest natural frequencies of elastic hinged arcs.
3. E. VOLTERRA and J. D. MORELL 1961 Journal of Applied Mechanics 28, 624-62. Lowest natural frequencies of elastic arc for vibrations outside the plane of initial curvature.
4. I. U. OJALVO 1962 International Journal of Mechanical Sciences 4, 53-72. Coupled twist bending vibrations of incomplete elastic rings.
5. J. T. KENNY 1954 Journal of Applied Mechanics 21, 359-364. Steady-state vibrations of beam on elastic foundation for moving load.
6. P. M. MATHEWS 1958 Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 38, 105-115. Vibrations of a beam on elastic foundation.
7. M. RADES 1970 International Journal of Solids and Structures

- 6, 739-756. Steady-state response of a finite beam on a Pasternak-type foundation.
8. T. M. WANG and J. E. STEPHENS 1977 Journal of Sound and Vibration 51, 149-155. Natural frequencies of Timoshenko beams on Pasternak foundations.
9. T. M. Wang and L. W. GAGNON 1978 Journal of Sound and Vibration 59, 211-220. Vibrations of continuous Timoshenko beams on Winkler-Pasternak foundations.
10. D. E. PANAYOTOUNAKOS and P. S. THEOCARIS 1980 Journal of Applied Mechanics 47, 139-144. The dynamically loaded circular beam on an elastic foundation.
11. E. VOLTERRA and J. H. GAINES 1971 Advanced Strength of Materials. Englewood Clift New Jersey: Prentice-Hall.
12. A. D. KERR 1964 Journal of Applied Mechanics 31, 491-498. Elastic and viscoelast foundation models.
13. C. G. CULVER and D. J. OESTAL 1969 Journal of Sound and Vibration 10, 380-389. Natural frequencies of multispan curved beams.
14. L. S. S. LEE 1975 Journal of Engineering for Industry,

Transactions of the American Society of Mechanical Engineers  
97, 23-32. Vibrations of an intermediately supported U-bend  
tube.

15. S.-S. CHEN 1973 Journal of Acoustical Society of American  
53, 1179-1183. Coupled twist-bending waves and natural  
frequencies of multispan curved beams.

16. B. K. LEE, S. J. OH, J. M. MO and T. E. LEE 2008 Journal  
of Sound and Vibration 318 227-246. Out-of-plane free  
vibrations of curved beams with variable curvature.

17. F. Yang, R. SEDAGHATI and E. ESMAILZADEH Journal of Sound  
and Vibration 318 850-867. Free in-plane vibration of  
general curved beams using finite element method.

18. N. M. AUCIELLO and M. A. De ROSA 1994 Journal of Sound and  
Vibration 176(4) 433-458. Free vibrations of circular arches:  
a review.

19. T. M. Wang and W. F. BRANNEN Journal of Sound and Vibration  
84(2), 241-246. Natural Frequencies for out-of-plane  
vibrations of curved beams on elastic foundations.

## 附錄一(ANSYS 指令檔)

參數說明：

1. KK：其在單位面積內彈簧所承受之力，例如：截面積為  $10M \times 10M$ ，

三公尺切一個元素， $KK=10 \times 3 \times \text{彈簧系數}$ 。

2. R：設定元素之基本參數，長、寬、高、X 方向的慣性矩、Y 方向

的慣性矩、X 方向的厚度、Y 方向的厚度。

3. MPDATA：設定元素之楊式模數、波松比、密度

4. CIRCLE：設定元素之幾何形狀，張開角度。

5. MODOPT：設定分析方法，在此採用降階法。

模型參數說明：半徑為 100 公尺，截面積  $10 \times 5.6$  米，MESH 採用 3，

彈簧係數由式  $w^2$  反求出。

```
/prep7
/units,si
et,2,combin14,,2
r,2,KK !!!!!!!!!!!!! mesh3 k=10t
ET,1,BEAM4
R,1,100,10*10*10*10/12,10*10*10*10/12,10,10,,
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,21e6
MPDATA,PRXY,1,,0.3
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,DENS,1,,2300
```

```

FLST, 2, 2, 8
FITEM, 2, 0, 0, 0
FITEM, 2, 50, 0, 0
CIRCLE, P51X, , , , 180, ,
ESIZE, 3, 0,
FLST, 2, 2, 4, ORDE, 2
FITEM, 2, 1
FITEM, 2, -2
LMESH, P51X

/INPUT, 'N', 'txt', '.'
/INPUT, 'D', 'txt', '.'
/INPUT, 'L', 'txt', '.'

d, 1, all, 0
d, 29, ux, 0
d, 29, uy, 0

/SOL
!*
ANTYPE, 2
!*
MSAVE, 0
!*
MODOPT, REDUC, 10
EQSLV, FRONT
MXPAND, 10, , , 0
LUMPM, 0
PSTRES, 0
!*
MODOPT, REDUC, 10, 0, 10, 10, OFF
TOTAL, 1000, 0
MXPAND, 10, 0, 10, 1, 0.001,
/STATUS, SOLU

```

SOLVE



## 附錄二

$\theta$ \ M	M1	M2	M3
60	4.9542	14.0147	27.4550
80	2.9040	7.8222	14.9376
100	1.9136	4.9471	9.3383
120	1.4966	3.4838	6.3841
140	1.2717	2.5647	4.6388
160	1.1372	2.0155	3.5101
180	1.0838	1.6839	2.7124

表 2.1 不同角度和前三個模態下的頻率值(文獻值)

$\theta$ \ M	M1	M2	M3
60	5.0445	13.9119	27.5631
80	3.0520	7.7566	15.3644
100	2.1486	4.9959	9.7300
120	1.6810	3.5447	6.7613
140	1.4276	2.7014	4.9536
160	1.2997	2.1779	3.7713
180	1.2604	1.8391	2.9809

表 2.2 不同角度和前三個模態下的頻率值(自己導出)

$\theta$ \ M	M1	M2	M3
60	5.4489	15.2807	30.7826
80	3.2829	8.4373	16.8063
100	2.2981	5.5084	10.331
120	1.8033	3.8006	7.3491
140	1.5128	2.8526	5.3656
160	1.3972	2.3159	4.1859
180	1.375	2.1706	3.3515

表 2.3 不同角度和前三個模態下的頻率值(ANSYS)

### 附錄三

ANSYS 網格收斂分析

$\theta$ \ M	M1	M2	M3
60	6.924144	20.22008	48.6645
80	5.161244	11.61389	27.38311
100	3.149182	6.141945	15.91557
120	2.796168	6.263146	9.093636
140	1.881067	4.250247	7.18935
160	1.858297	2.799949	5.715654
180	1.917426	2.639365	4.473857

表 3.1 ANSYS 網格切 5

$\theta$ \ M	M1	M2	M3
60	5.567443	18.65631	37.44015
80	3.972485	10.92103	21.5096
100	2.716751	5.817745	12.78523
120	2.518614	4.973217	8.023959
140	1.713389	3.936682	6.935679
160	1.697818	2.509535	4.565342
180	1.77553	2.216177	4.17028

表 3.2 ANSYS 網格切 4

$\theta$ \ M	M1	M2	M3
60	5.4489	15.2807	30.7826
80	3.2829	8.4373	16.8063
100	2.2981	5.5084	10.331
120	1.8033	3.8006	7.3491
140	1.5128	2.8526	5.3656
160	1.3972	2.3159	4.1859
180	1.375	2.1706	3.3515

表 3.3 ANSYS 網格切 3

$\theta$ \ M	M1	M2	M3
60	5.034914	14.99872	25.59235
80	3.023981	7.236061	14.99682
100	1.907521	4.460231	8.745539
120	1.456406	3.525924	6.555803
140	1.320702	2.555999	4.719819
160	1.260655	2.069446	4.061394
180	1.231736	1.909493	2.90782

表 3.4 ANSYS 網格切 2

$\theta$ \ M	M1	M2	M3
60	4.836869	14.66661	24.53597
80	2.894175	6.977094	14.36166
100	1.833367	4.344445	8.742816
120	1.400207	3.358387	6.506702
140	1.281476	2.527718	4.583761
160	1.199706	1.980817	3.990458
180	1.172608	1.816753	2.880083

表 3.5 ANSYS 網格切 1

$\theta$ \ M	M1	M2	M3
60	4.760506	14.45177	24.34384
80	2.877598	6.860497	14.15809
100	1.802065	4.319422	8.511371
120	1.366722	3.308093	6.487024
140	1.275518	2.453522	4.574606
160	1.197527	1.929533	3.939484
180	1.150772	1.769891	2.81147

表 3.6 ANSYS 網格切 0.5