

第三節 正切弦函數的和角公式之動態圖說證明

本節將利用利用矩形，來介紹正切函數的和角公式之動態圖說證明。

首先介紹的是 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$ 的動態圖說證明，利用的是矩形中做二個不同的

直角三角形，本例是 Proofs Without Words II 一書中第 47 頁的例子，作者為 R. B.

Nelsen(2000)，在 PowerPoint 中的呈現方式如下列各圖所示(圖 4-3-1-1~圖 4-3-1-12)。

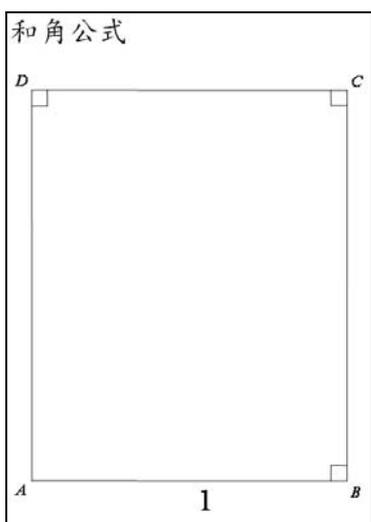


圖 4-3-1-1：矩形 $ABCD$ ，設 $\overline{AB} = 1$ 。

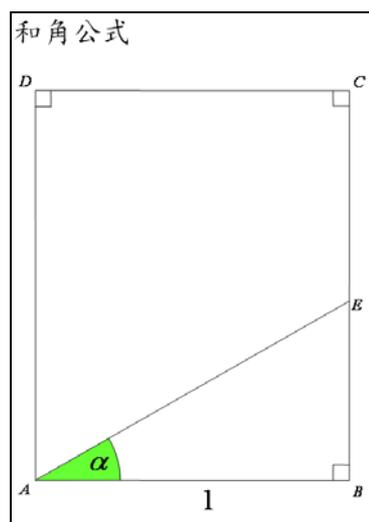


圖 4-3-1-2：做 \overline{AE} 交 \overline{BC} 於 E ，設 $\angle BAE = \alpha$ 。

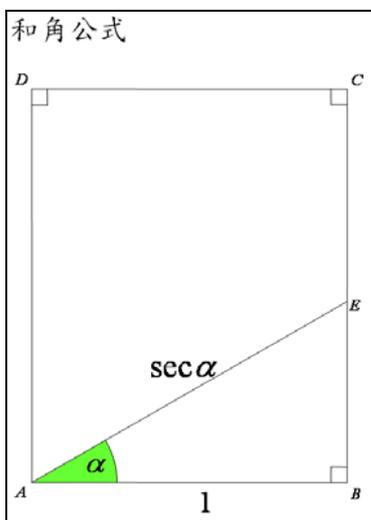


圖 4-3-1-3：得 $\overline{AE} = \sec \alpha$ 。

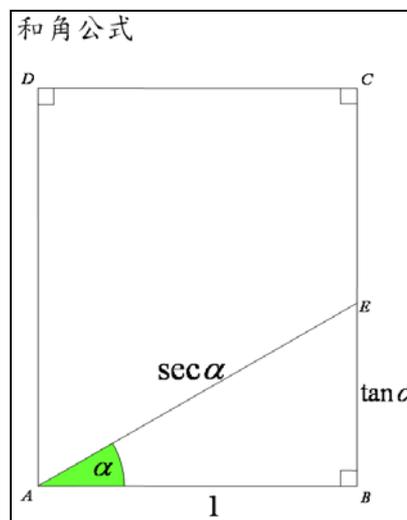


圖 4-3-1-4：得 $\overline{BE} = \tan \alpha$ 。

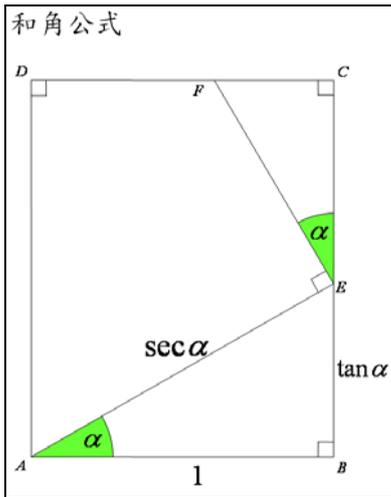


圖 4-3-1-5：做 $\overline{EF} \perp \overline{AE}$ ，交 \overline{CD} 於 F ，
則 $\angle CEF = \alpha$ 。

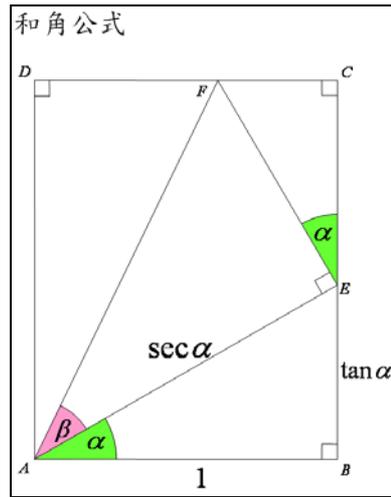


圖 4-3-1-6：連 \overline{AF} ，設 $\angle EAF = \beta$ 。

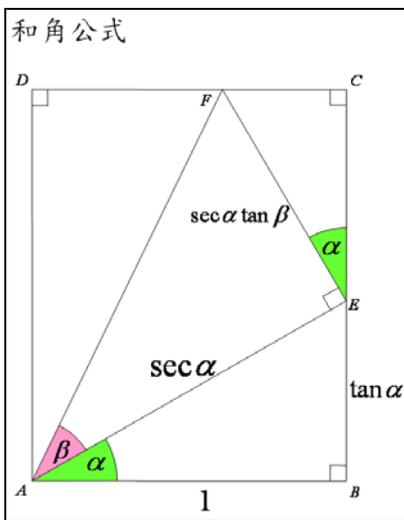


圖 4-3-1-7：得 $\overline{EF} = \sec \alpha \tan \beta$ 。

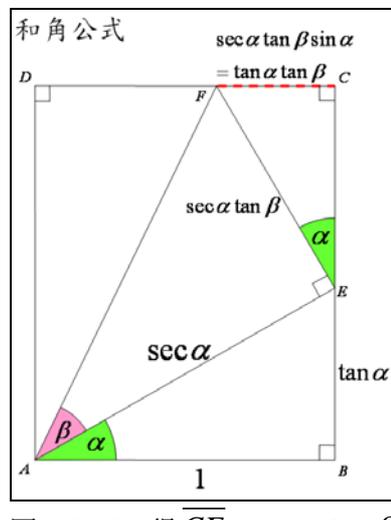


圖 4-3-1-8：得 $\overline{CF} = \sec \alpha \tan \beta \sin \alpha$
 $= \tan \alpha \tan \beta$ 。

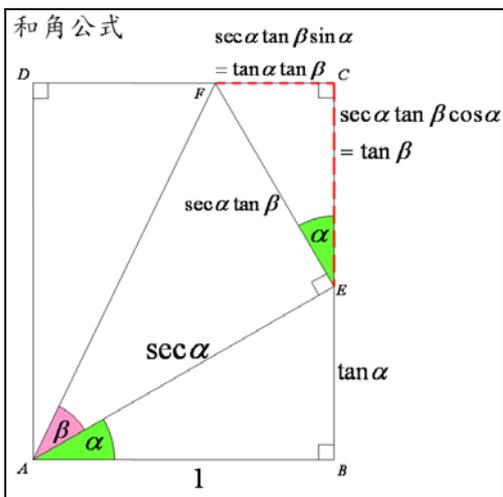


圖 4-3-1-9：得 $\overline{CE} = \sec \alpha \tan \beta \cos \alpha$
 $= \tan \beta$ 。

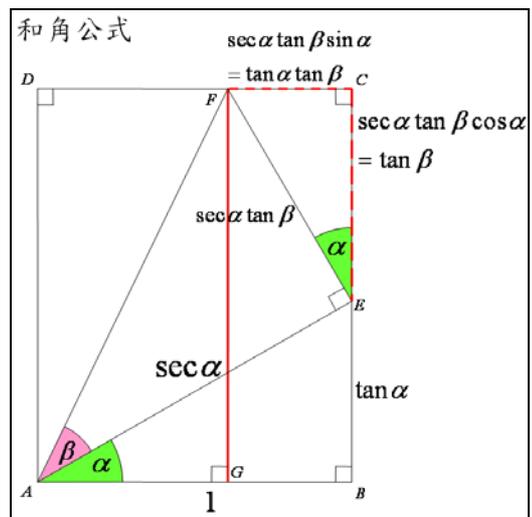


圖 4-3-1-10：做 $\overline{FG} \perp \overline{AB}$ 於 G 。

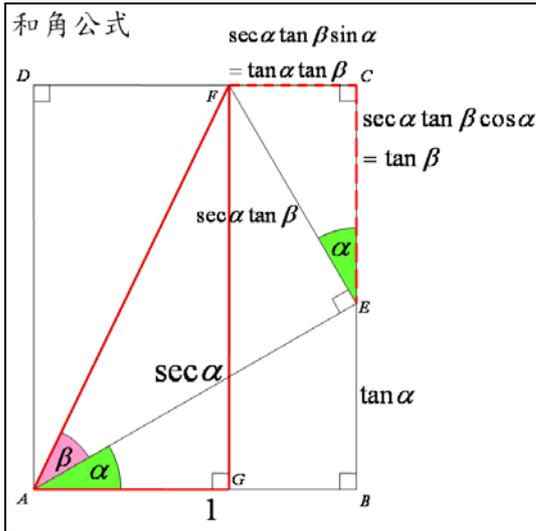


圖 4-3-1-11：標示直角 $\triangle AFG$ 。

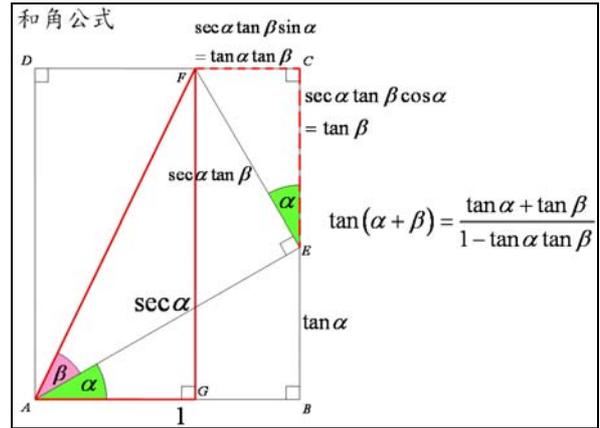


圖 4-3-1-12：得 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$ 。

其次介紹的是 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$ 的動態圖說證明，同樣利用的是矩形中做二個不

同的直角三角形，本例是 Proofs Without Words II 一書中第 47 頁的例子，作者為 R. B. Nelsen(2000)，在 PowerPoint 中的呈現方式如下列各圖所示(圖 4-3-2-1~圖 4-3-2-13)。

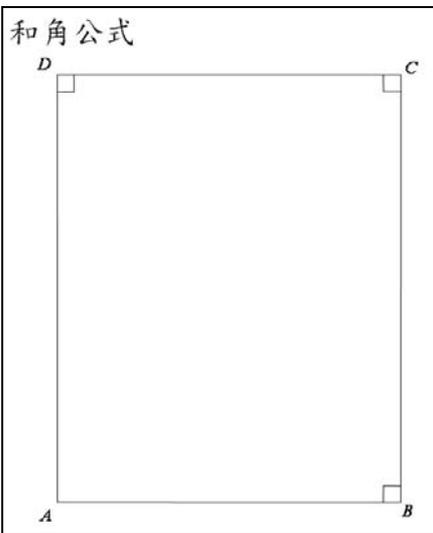


圖 4-3-2-1：任一矩形 $ABCD$ 。

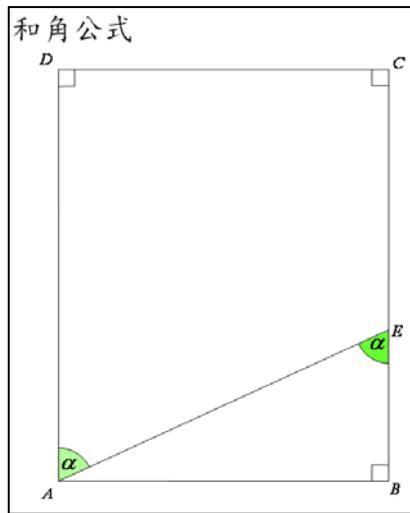


圖 4-3-2-2：做 \overline{AE} 交 \overline{BC} 於 E ，且 $\angle DAE = \alpha$ 、 $\angle AEB = \alpha$ 。

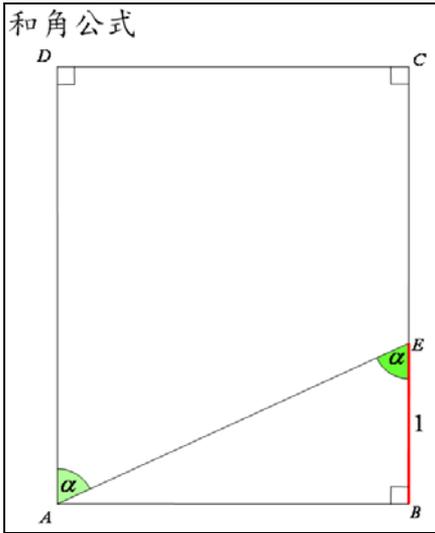


圖 4-3-2-3：設 $\overline{BE} = 1$ 。

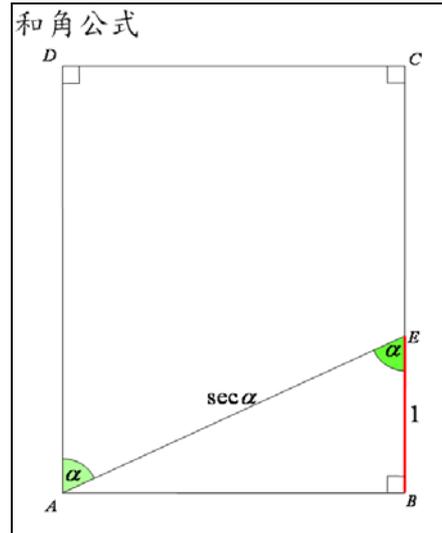


圖 4-3-2-4：得 $\overline{BE} = \sec \alpha$ 。

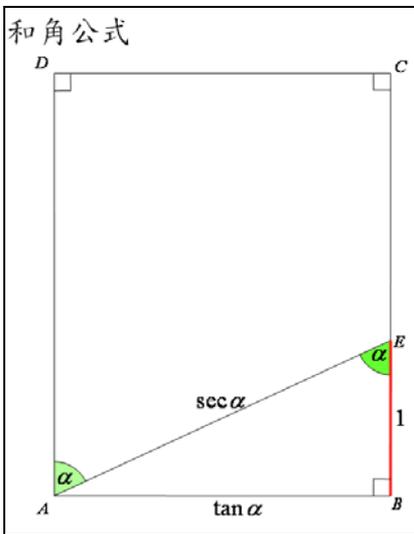


圖 4-3-2-5：得 $\overline{AB} = \tan \alpha$ 。

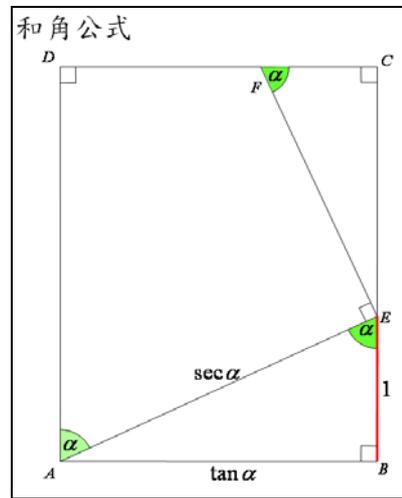


圖 4-3-2-6：做 $\overline{EF} \perp \overline{AE}$ 交 \overline{CD} 於 F ，得 $\angle CFE = \alpha$ 。

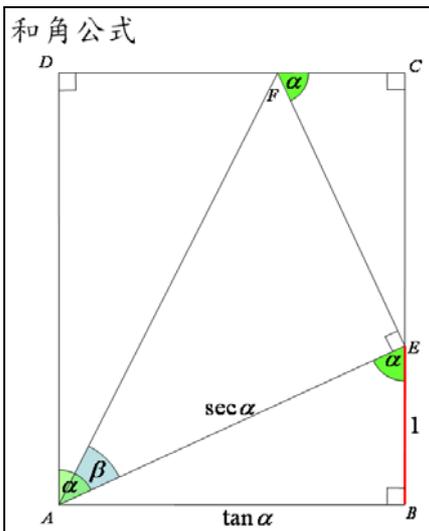


圖 4-3-2-7：做 \overline{AF} ，設 $\angle EAF = \beta$ 。

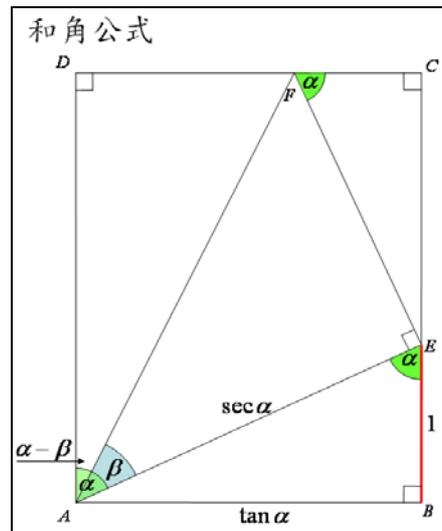


圖 4-3-2-8：得 $\angle DAF = \alpha - \beta$ 。

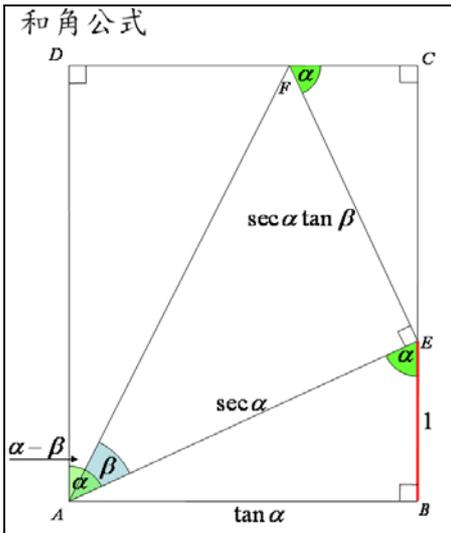


圖 4-3-2-9：得 $\overline{FE} = \sec \alpha \tan \beta$ 。

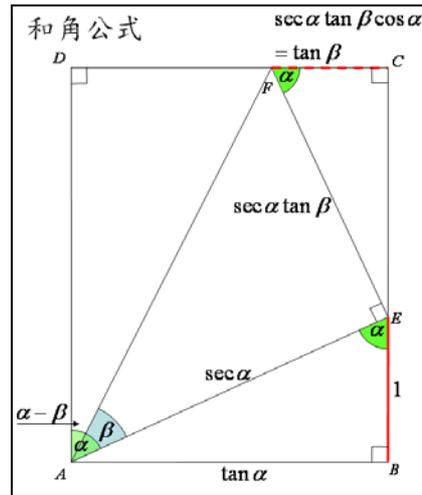


圖 4-3-2-10：得 $\overline{FC} = \sec \alpha \tan \beta \cos \alpha = \tan \beta$ 。

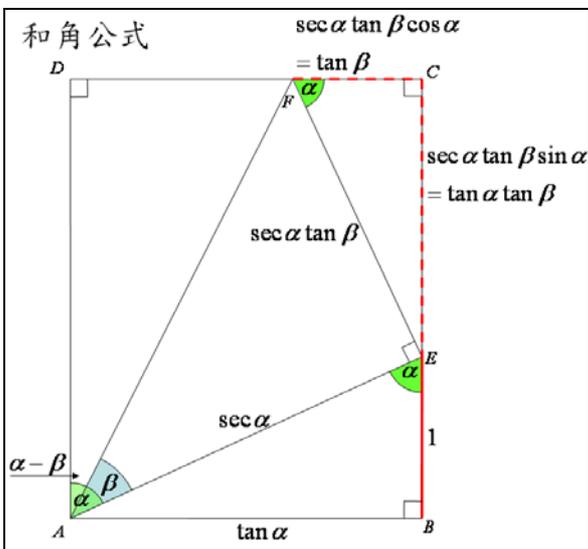


圖 4-3-2-11：得 $\overline{CE} = \sec \alpha \tan \beta \sin \alpha = \tan \alpha \tan \beta$ 。

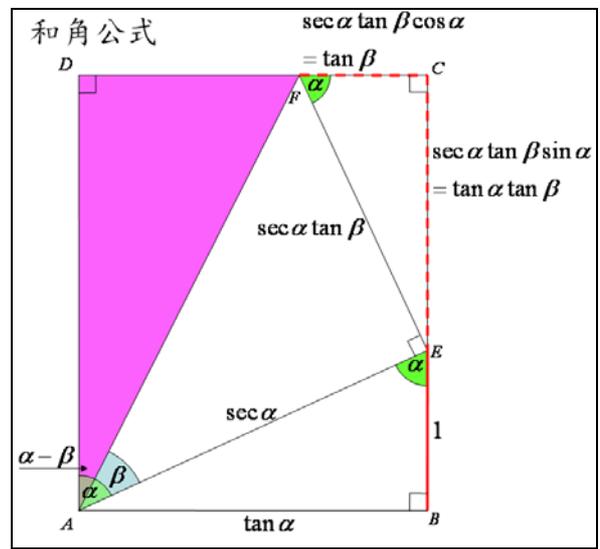


圖 4-3-2-12：標示直角 $\triangle ADF$ 。

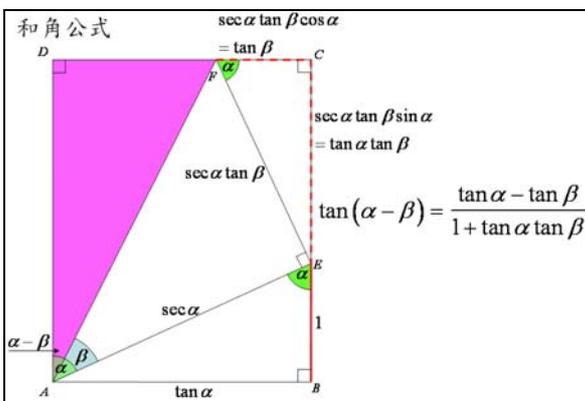


圖 4-3-2-13：得 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$ 。