

第五章 倍角公式與半角公式

本章將介紹三角函數中的倍角公式(含二倍角與三倍角)與半角公式,在第一節先利用 **GSP** 的動態設計與數據的呈現,期望學習者透過操作與觀察能了解倍角公式與半角公式;第二節的部分是介紹倍角公式的動態證明,雖然二倍角的公式可以使用前一章的和角公式來產生,但仍然可以用其它不同的方式來得到,在第二節中提供了不同的方法來呈現正弦、餘弦及正切的倍角公式,而在 **PowerPoint** 的動態圖說證明中,期望學習者了解倍角公式,進而熟悉公式;第三節將介紹半角公式,但又因兩倍角與半角公式實為一體兩面的公式,所以將只介紹一個正切函數化為正弦函數與餘弦函數的公式。

第一節 動態幾何(GSP)中的操作與觀察

首先研究者希望學習者能透過 **GSP** 的操作與觀察,來發現定理、公式的正確性,然後再用相同的幾何圖形做動態的圖說證明。研究者設計了幾個 **GSP** 的檔案,期望未來的研究者可以再深入探討其在教學上的應用成效。

一、教學物件一：倍角公式

程式名稱：倍角公式 1.gsp, 如下圖 5-1-1。

目的：希望學習者透過簡單的幾何圖形,經由操作滑鼠、觀察數據,經過設計者所設計的步驟,能發現正弦函數之兩倍角公式。



The Geometer's Sketchpad - [倍角公式]

File Edit Display Construct Transform Measure Graph Window Help

$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$
by 黃國忠

註：可改變紅色點的位置。

1. 角度
 $\theta = 23.885^\circ$
 $\angle DEB = 2\theta = 47.7697^\circ$

2. 正餘弦函數值
 $\sin(\theta) = 0.4049$
 $\cos(\theta) = 0.9144$
 $\sin(2\theta) = 0.7404$
 $\sin(\theta) \cdot \cos(\theta) = 0.3702$

$\sin(2\theta)$	$\sin(\theta) \cdot \cos(\theta)$
0.7404	0.3702

3. 結論

圖 5-1-1：GSP 中倍角公式 1

操作與觀察

1. 在一矩形中做兩對角線，利用兩對角線的夾角為對角線與矩形邊的夾角的二倍來做觀察，學習者可自行改變矩形長寬大小，觀察角度大小變化。
2. 操作者可循設計者設計的按鈕、步驟操作、觀察直到結論為止。
3. 探索問題：
 - a. 移動改變矩形，使得頂點 A 與 C 重合時，有何狀況發生，為什麼？
 - b. 移動改變矩形，使得頂點 A 與 B 重合時，有何狀況發生，為什麼？
 - c. 移動頂點 B 與 C，使 $\theta = 45^\circ$ ，圖形有何特別之處？
4. 先備知識
 - a. 了解正弦函數、餘弦函數之基本定義。
 - b. 了解兩對角線的夾角為對角線與矩形邊的夾角的二倍關係。

5. 操作說明

- a. 操作者需先了解 GSP 環境及使用方式。
- b. 可任意移動紅點。

6. 注意事項

- a. 若操作過程中圖形太大並不影響結果。
- b. 操作過程當 A 與 B 重合時有「Undefined」的訊息產生，教師要能確時了解其意義。

二、教學物件二：倍角公式

程式名稱：倍角公式 2.gsp，如下圖 5-1-2。

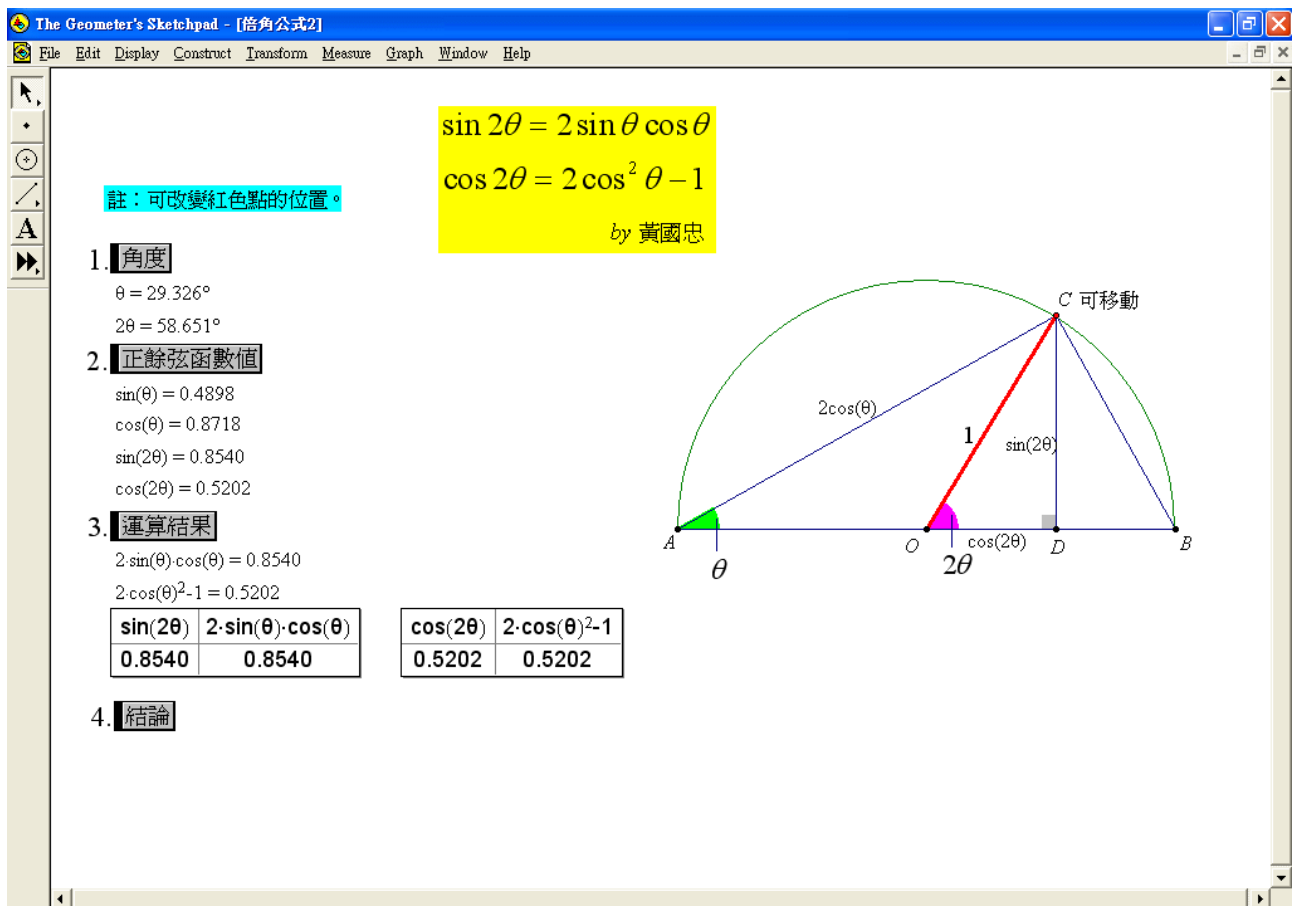


圖 5-1-2：GSP 中倍角公式 2

目的：希望學習者透過簡單的幾何圖形，經由操作滑鼠、觀察數據，經過設計者所設計的步驟，能發現正弦函數與餘弦函數之兩倍角公式。

操作與觀察

1. 在半徑為 1 的半圓中做直角 $\triangle ABC$ ，學習者可自行改變圓周上直角頂點位置，觀察圓周角與圓心角大小變化。
2. 操作者可循設計者設計的按鈕、步驟操作、觀察直到結論為止。
3. 探索問題：
 - a. 移動頂點，使得頂點 C 與 B 重合時，有何狀況發生，為什麼？
 - b. 移動頂點，使得 $\theta = 45^\circ$ ，此時圖形有何特別之處？
4. 先備知識
 - a. 了解正弦函數、餘弦函數及正切函數之基本定義。
 - b. 圓周角與圓心角關係。
5. 操作說明
 - a. 操作者需先了解 GSP 環境，及使用方式。
 - b. 可任意移動紅點。
6. 注意事項
 - a. 因為取半徑為 1 的半圓，所以圖形不能任意放大縮小。
 - b. 在 GSP 中三角函數的內定次方表示法為 $\sin(\theta)^2$ 和我們習慣的 $\sin^2(\theta)$ 不同，教師在授課時需小心。
 - c. 因考慮頂點 C 所形成的直角三角形，所以將 2θ 限制在 $0 \sim \frac{\pi}{2}$ 之間。



三、教學物件三：倍角公式

程式名稱：倍角公式 4.gsp，如下圖 5-1-3。

目的：希望學習者透過簡單的幾何圖形，經由操作滑鼠、觀察數據，經過設計者所設計的步驟，能發現正弦函數與餘弦函數之兩倍角公式。

The Geometer's Sketchpad - [倍角公式4]

File Edit Display Construct Transform Measure Graph Window Help

註：可改變紅色點的位置。

1. **角度**
 $\theta = 31.195^\circ$
 $2\theta = 62.389^\circ$

2. **函數值**
 $\sin(\theta) = 0.5179$
 $\cos(\theta) = 0.8554$
 $\sin(2\theta) = 0.8861$
 $\cos(2\theta) = 0.4635$

3. **運算結果**
 $2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) = 0.8861$
 $2 \cdot \cos^2(\theta) - 1 = 0.4635$
 $1 - 2 \cdot \sin^2(\theta) = 0.4635$

$\sin(2\theta)$	$2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta)$
0.8861	0.8861

$\cos(2\theta)$	$2 \cdot \cos^2(\theta) - 1$	$1 - 2 \cdot \sin^2(\theta)$
0.4635	0.4635	0.4635

4. **結論**

$\cos 2\theta = 1 - 2 \cdot \sin^2 \theta = 2 \cdot \cos^2 \theta - 1$
 $\sin 2\theta = 2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta$

by 黃國忠

圖 5-1-3：GSP 中倍角公式 4

操作與觀察

1. 在半徑為 1 的半圓中，以圓心做等腰三角形，其中二個底角為 θ ，延長一腰交於圓上，得圓周角為 2θ ，學習者可自行改變圓周上頂點 B 位置，觀察圓周角與圓心角大小變化。
2. 操作者可循設計者設計的按鈕、步驟操作、觀察直到結論為止。
3. 探索問題：
 - a. 移動頂點 B，使得頂點 B 與 A 重合時，有何狀況發生，為什麼？
 - b. 移動頂點 B，使得頂點 B 與 C 重合時，有何狀況發生，為什麼？
 - c. 由圖中各個直角三角形，如何可以得到 $\sin(2\theta)$ 。
 - d. 由圖中各個直角三角形，如何可以得到 $\cos(2\theta)$ 。
 - e. 移動頂點 B，使得點 E、O 重合，有何狀況發生，為什麼？繼續移動頂點 B，使得點 E 在 O 之左下方，有何狀況發生，為什麼？

4. 先備知識

- a. 了解正弦函數、餘弦函數及正切函數之基本定義。
- b. 圓周角與圓心角關係。

5. 操作說明

- a. 操作者需先了解 GSP 環境，及使用方式。
- b. 可任意移動紅點。

6. 注意事項

- a. 因為取半徑為 1 的半圓，所以圖形不能任意放大縮小。
- b. 在 GSP 中三角函數的內定次方表示法為 $\sin(\theta)^2$ 和我們習慣的 $\sin^2(\theta)$ 不同，教師在授課時需小心。
- c. 因考慮頂點 B 所形成的等腰三角形，所以將 θ 限制在 $0 \sim \frac{\pi}{2}$ 之間。
- d. 操作過程當 A 與 B 重合時有「Undefined」的訊息產生，教師要能確時了解其意義。



四、教學物件四：倍角公式

程式名稱：倍角公式 5.gsp，如下圖 5-1-4。

目的：希望學習者透過簡單的幾何圖形，經由操作滑鼠、觀察數據，經過設計者所設計的步驟，能發現正弦函數與餘弦函數之兩倍角公式。

The Geometer's Sketchpad - [倍角公式5]

File Edit Display Construct Transform Measure Graph Window Help

註：可改變紅色點的位置。

1. 角度
 $\theta = 29.817^\circ$
 $2\theta = 59.634^\circ$

2. 三角函數值
 $\sin(\theta) = 0.4972$
 $\cos(\theta) = 0.8676$
 $\sin(2\theta) = 0.8628$
 $\cos(2\theta) = 0.5055$

3. 運算結果
 $1 - 2 \cdot \sin(\theta)^2 = 0.5055$
 $2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) = 0.8628$

$\sin(2\theta)$	$2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta)$
0.8628	0.8628

$\cos(2\theta)$	$1 - 2 \cdot \sin(\theta)^2$
0.5055	0.5055

4. 結論

$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$
 $\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$
 by 黃國忠

圖 5-1-4：GSP 中倍角公式 5

操作與觀察

- 腰長為 1 的等腰三角形中，做頂點 A 的角平分線，其二個平分角為 θ ，學習者可自行改變頂點 B 位置，觀察頂點 A 的角度大小變化。
- 操作者可循設計者設計的按鈕、步驟操作、觀察直到結論為止。
- 探索問題：
 - 移動頂點 B，使得頂點 A 為直角時，有何狀況發生，為什麼？
 - 移動頂點 B，使得頂點 B 與 C 重合時，有何狀況發生，為什麼？
 - 為什麼 $\angle CBE = \theta$ ？
 - 由圖中各個直角三角形，如何得 $\sin(2\theta)$ 。
 - 由圖中各個直角三角形，如何得 $\cos(2\theta)$ 。

4. 先備知識

- a. 了解正弦函數、餘弦函數及正切函數之基本定義。
- b. 了解等腰三角形的性質。
- c. 了解相近三角形。

5. 操作說明

- a. 操作者需先了解 GSP 環境，及使用方式。
- b. 可任意移動紅點。

6. 注意事項

- a. 在 GSP 中三角函數的內定次方表示法為 $\sin(\theta)^2$ 和我們習慣的 $\sin^2(\theta)$ 不同，教師在授課時需小心。
- b. 因考慮頂點 $\angle A = 2\theta$ 所形成的等腰三角形，所以將 2θ 限制在 $0 \sim \frac{\pi}{2}$ 之間。
- c. 當點 B 與點 C 重合時，有部分計算值不見，是因 θ 是由 $\angle A = 2\theta$ 做平分而來，所以角平分線不存在時 θ 也不存在所產生，教師在使用時需了解。



五、教學物件五：半角公式

程式名稱：半角公式.gsp，如下圖 5-1-5。：

目的：希望學習者透過簡單的幾何圖形，經由操作滑鼠、觀察數據，經過設計者所設計的步驟，能發現正切函數之半角公式。

The Geometer's Sketchpad - [半角公式]

File Edit Display Construct Transform Measure Graph Window Help

註：可改變紅色點的位置。

1. **角度**

$\theta = 66.203^\circ$
 $\frac{\theta}{2} = 33.101^\circ$

2. **三角函數值**

$\sin(\theta) = 0.9150$
 $\cos(\theta) = 0.4035$
 $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0.6519$

3. **運算結果**

$\frac{\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)} = 0.6519$ $\frac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = 0.6519$

$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$	$\frac{\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)}$	$\frac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$
0.6519	0.6519	0.6519

4. **結論**

$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$
by 黃國忠

圖 5-1-4：GSP 中半角公式

操作與觀察

1. 在一半圓中做直角 $\triangle ABC$ ，學習者可自行改變圓周上直角頂點位置，觀察圓周角與圓心角大小變化。
2. 操作者可循設計者設計的按鈕、步驟操作、觀察直到結論為止。
3. 探索問題：
 - a. 移動頂點，使得頂點 C 與 B 重合時，有何狀況發生，為什麼？
 - b. 當 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 時有何狀況發生，為什麼？
 - c. 由圖中各個直角三角形，如何得 $\tan \frac{\theta}{2}$ 。
4. 先備知識
 - a. 了解正弦函數、餘弦函數及正切函數之基本定義。
 - b. 圓周角與圓心角關係。

5. 操作說明

a. 操作者需先了解 GSP 環境，及使用方式。

b. 可任意移動紅點。

6. 注意事項

a. 因為取半徑為 1 的半圓，所以圖形不能任意放大縮小。

b. 操作過程當 C 與 B 重合時有「Undefined」的訊息產生，教師要能確時了解其意義。

c. 因考慮頂點 C 所形成的直角三角形，所以將 θ 限制在 $0 \sim \frac{\pi}{2}$ 之間。

