第二節　倍角公式

在傳統課本中，二倍角公式是由和角公式及平方和的恆等式$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$所推導而來，首先利用$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$，當$\alpha=\beta=\theta$時可得$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$，再利用$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$可得$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$；同理利用$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$，當$\alpha=\beta=\theta$時可得$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$；利用$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$，當$\alpha=\beta=\theta$時可得$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$。至於三倍角的公式則利用和角公式及二倍角公式來推導，其過程如下：

$$\begin{aligned}\cos 3\theta&=\cos(\theta+2\theta)=\cos\theta\cos 2\theta-\sin\theta\sin 2\theta\\&=\cos\theta\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)-\sin\theta(2\sin\theta\cos\theta)\\&=\cos^3\theta-\sin^2\theta\cos\theta-2\sin^2\theta\cos\theta=\cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos\theta\\&=\cos^3\theta-3\left(1-\cos^2\theta\right)\cos\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta+3\cos^3\theta\\&=4\cos^3\theta-3\cos\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin 3\theta&=\sin(\theta+2\theta)=\sin\theta\cos 2\theta+\cos\theta\sin 2\theta\\&=\sin\theta\left(2\cos^2\theta-1\right)+\cos\theta(2\sin\theta\cos\theta)\\&=4\cos^2\theta\sin\theta-\sin\theta=4\left(1-\sin^2\theta\right)\sin\theta-\sin\theta\\&=4\sin\theta-4\sin^3\theta-\sin\theta\\&=3\sin\theta-4\sin^3\theta\end{aligned}$$

本節將利用圓形、三角形、矩形等基本幾何圖形來呈現、介紹正、餘弦函數之倍角公式的動態圖說證明，在此共設計了八個例子，分別如下：

一、$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

本例是利用矩形兩對角線的夾角及對角線與矩形邊的夾角之間恒為二倍的關係，加上面積相等的關係來證明：$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$，本例是 Proofs Without Words Ⅱ一書中第 48 頁的例子，作者為 Yihnan David Gau。在 PowerPoint 中的呈現方式如下列各圖所示(圖 5-2-1-1～圖 5-2-1-15)。

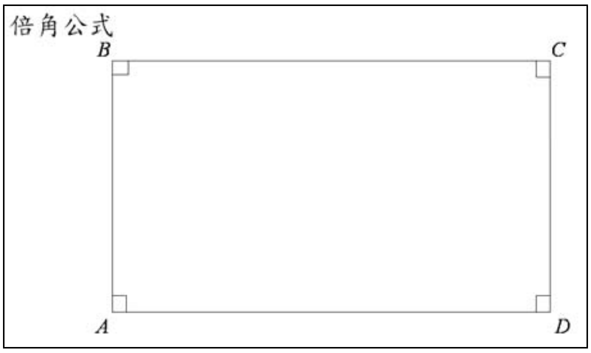

圖 5-2-1-1：任一矩形 *ABCD*。

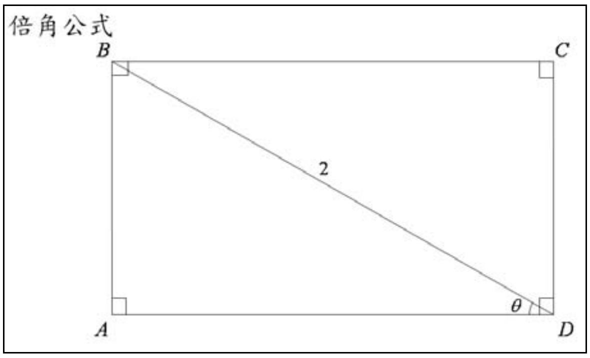

圖 5-2-1-2：做對角線 $\overline{BD}$ ，令長爲 2，與底邊夾角爲 θ 。

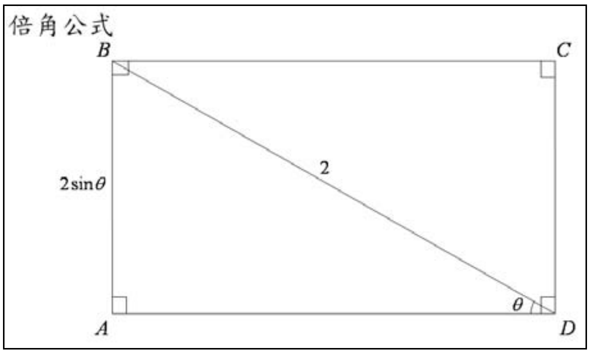

圖 5-2-1-3：得矩形一邊 $\overline{AB} = 2\sin\theta$ 。

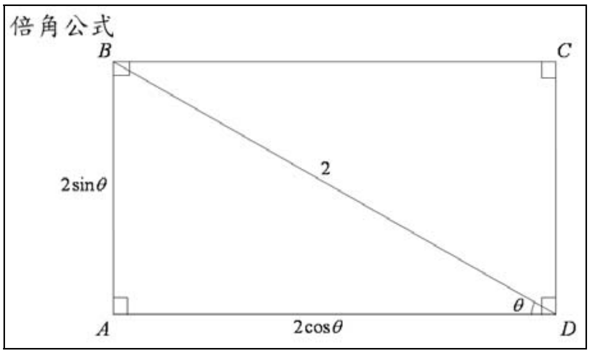

圖 5-2-1-4：得矩形另一邊 $\overline{AD} = 2\cos\theta$ 。

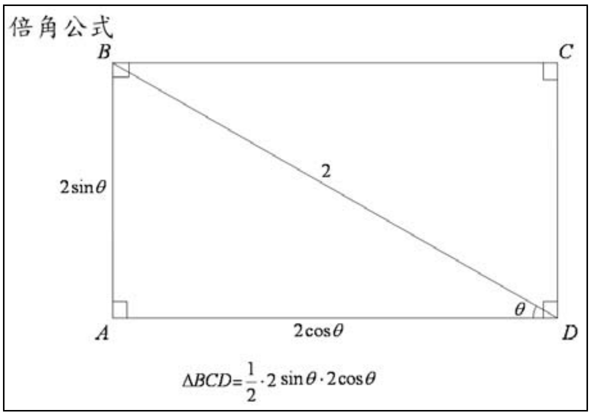

圖 5-2-1-5：得 $\Delta ABD = \Delta BCD$ 的面積爲 $\frac{1}{2}\cdot 2\sin\theta\cdot 2\cos\theta$ 。

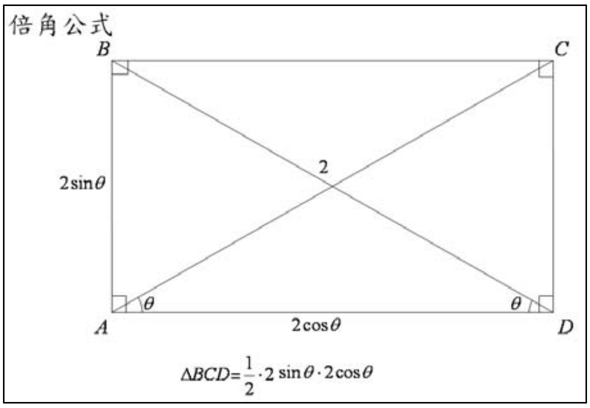

圖 5-2-1-6：再連另一對角線 $\overline{AC}$ ，同理與底邊夾角爲 θ 。

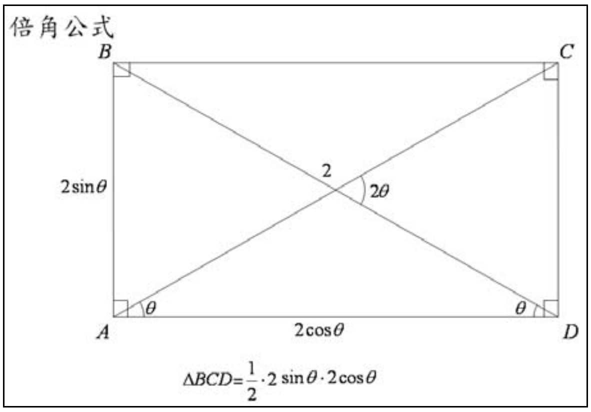

圖 5-2-1-7：得兩對角線夾角爲 2θ 。

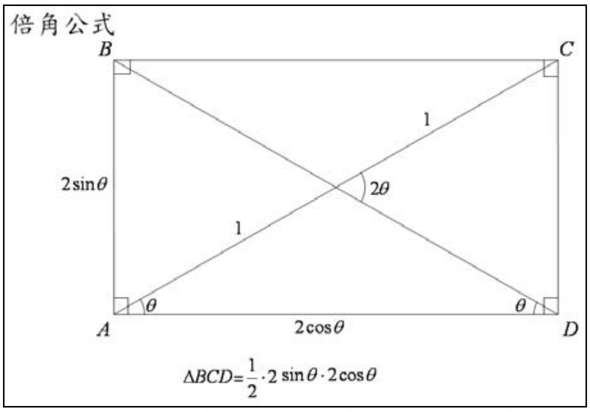

圖 5-2-1-8：將對角線長 2 改爲兩段長分別爲 1。

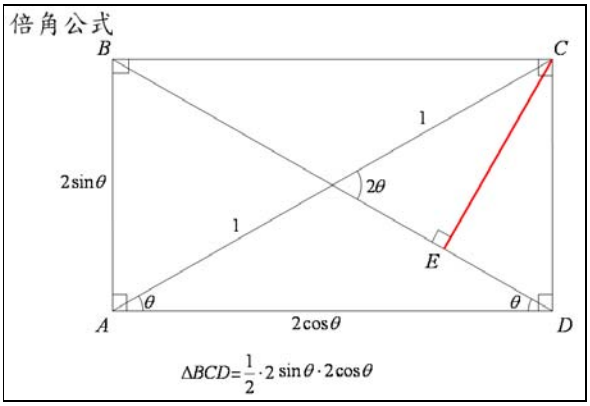

圖 5-2-1-9：從頂點 C 做一垂直線段 $\overline{CE} \perp \overline{BD}$ 於 E 。

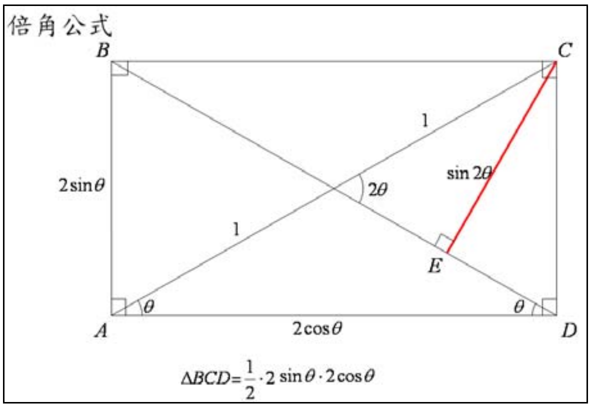

圖 5-2-1-10：得線段 $\overline{CE}$ 長爲 $\sin 2\theta$ 。

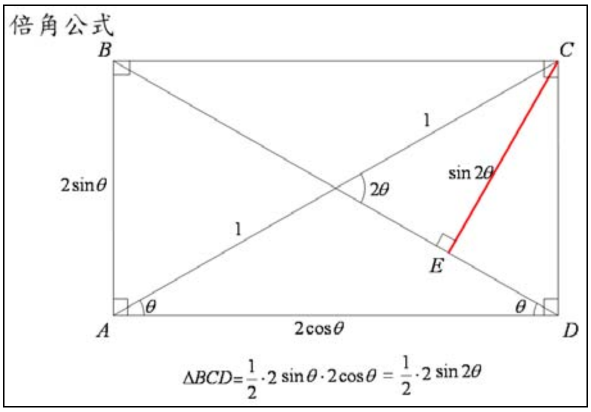

圖 5-2-1-11：再得 ΔBCD 面積爲 $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin 2\theta$ 。

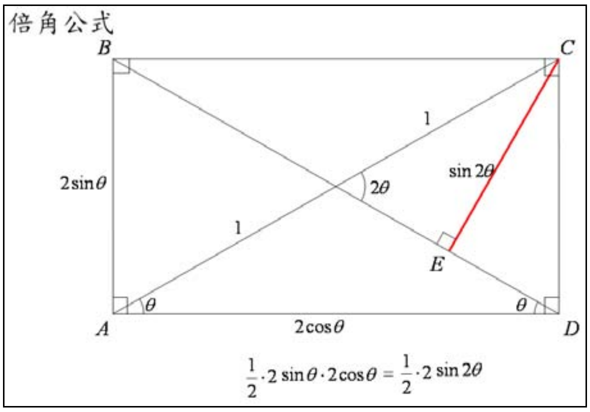

圖 5-2-1-12：將文字「 $\Delta BCD =$ 」消失。

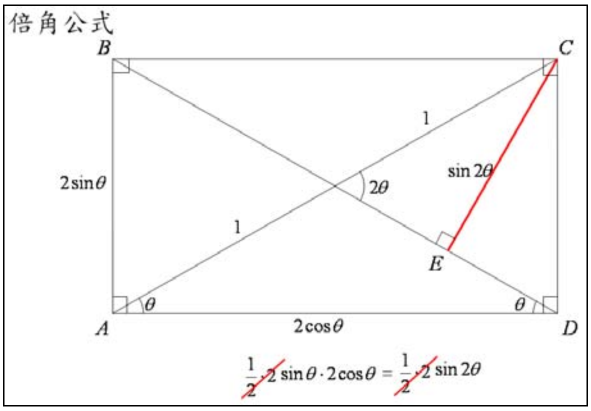

圖 5-2-1-13：出現斜線將等號兩邊$\frac{1}{2}\cdot 2$約去。

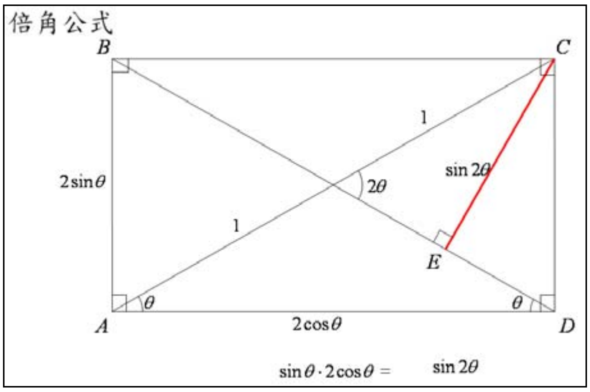

圖 5-2-1-14：將等號兩邊$\frac{1}{2}\cdot 2$與斜線消失。

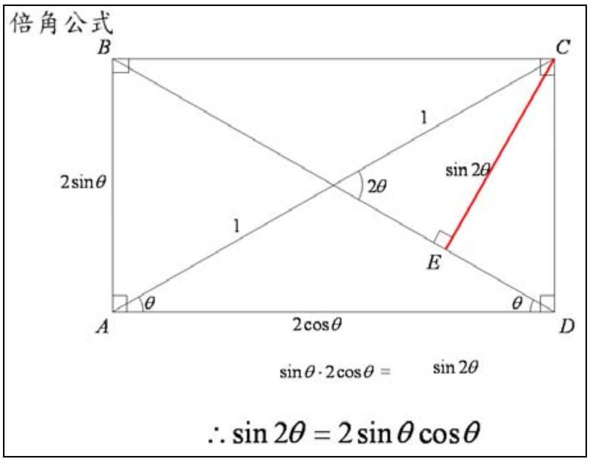

圖 5-2-1-15：得$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$。

二、$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$與$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$

本例是利用圓心角恒爲圓周角的二倍的關係，及相似的直角三角形邊長成比例的關係來證明：$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$及$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$，本例是 Proofs Without Words 一書中第 34 頁的例子，作者爲 R. B. Nelsen(1993)。在 PowerPoint 中的呈現方式如下列各圖所示(圖 5-2-2-1 到圖 5-2-2-20)。

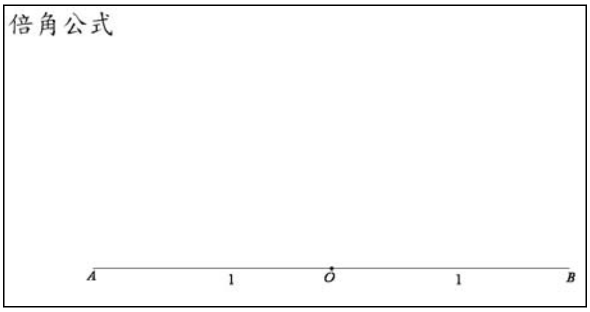

圖 5-2-2-1：$\overline{AB}$ 中點為 O，且 $\overline{AO}=\overline{BO}=1$。

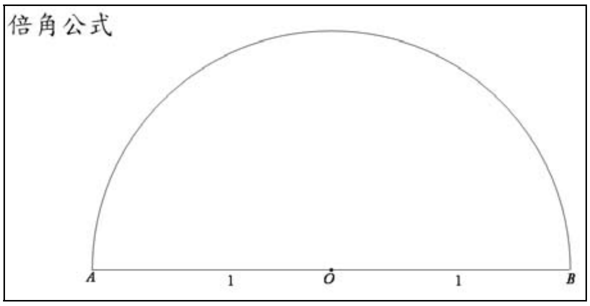

圖 5-2-2-2：以 O 為圓心，$\overline{OA}$ 為半徑做半圓。

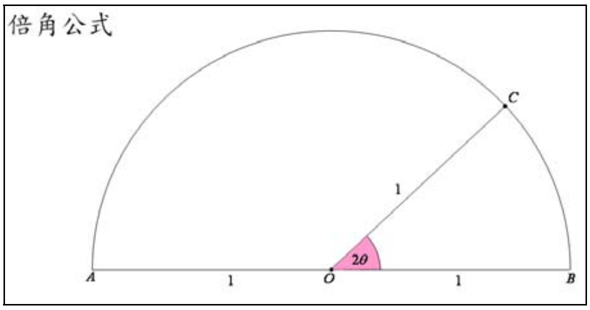

圖 5-2-2-3：做圓半徑 $\overline{OC}$，令圓心角為 2θ

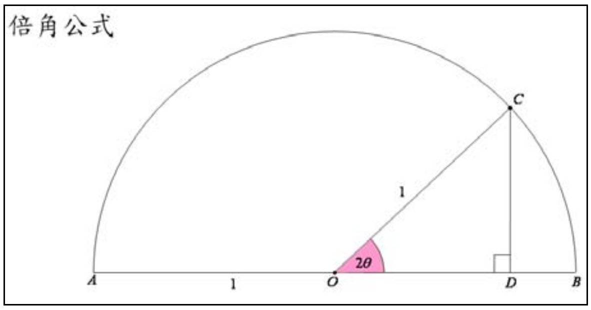

圖 5-2-2-4：由 C 點向直徑 $\overline{AB}$ 做垂線 $\overline{CD}$。

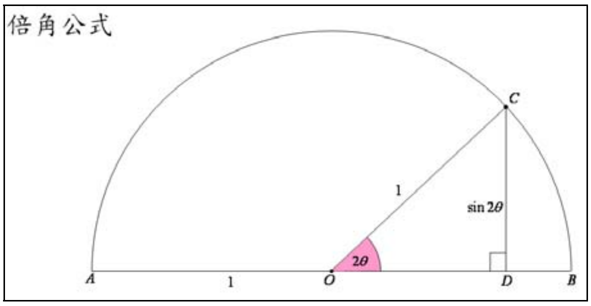

圖 5-2-2-5：得線段長 $\overline{CD}=\sin 2\theta$。

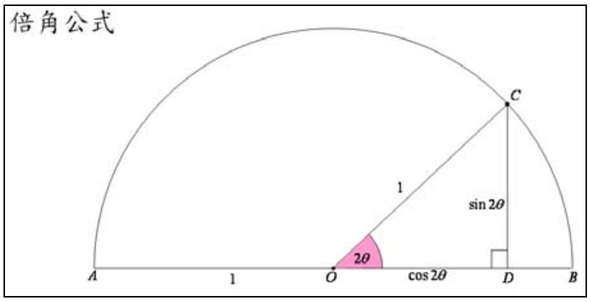

圖 5-2-2-6：再得線段長 $\overline{OD}=\cos 2\theta$。

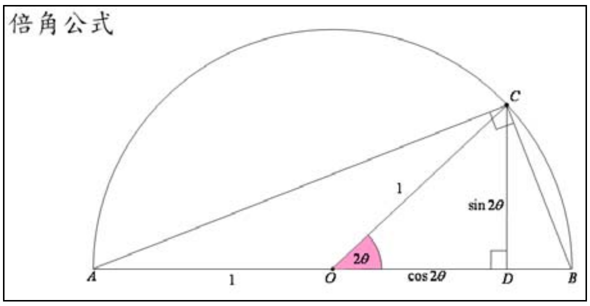

圖 5-2-2-7：連兩弦 $\overline{AC}$、$\overline{BC}$，得 $\angle C$ 為直角。

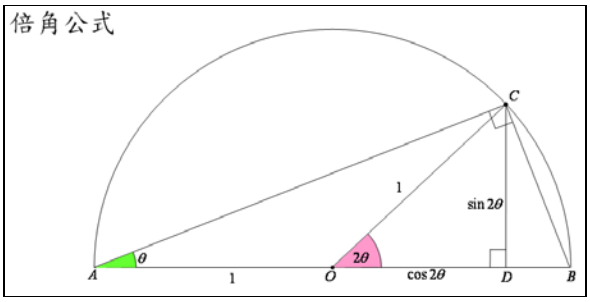

圖 5-2-2-8：得 $\angle CAB=\theta$。

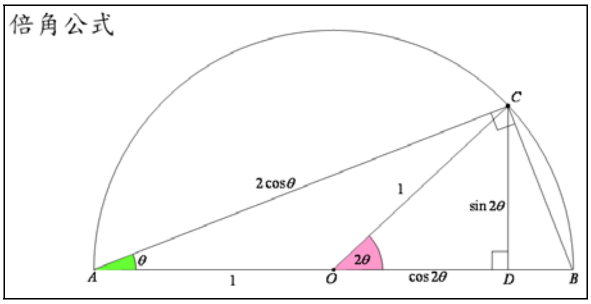

圖 5-2-2-9：得 $\overline{AC} = 2\cos\theta$ 。

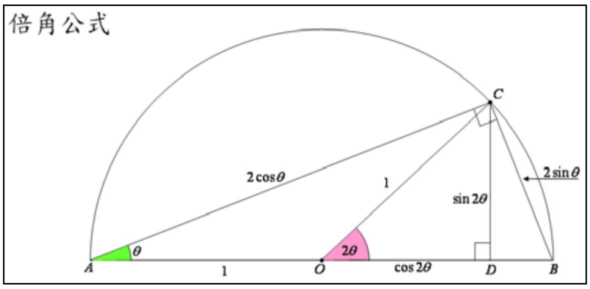

圖 5-2-2-10：再 $\overline{BC} = 2\sin\theta$ 。

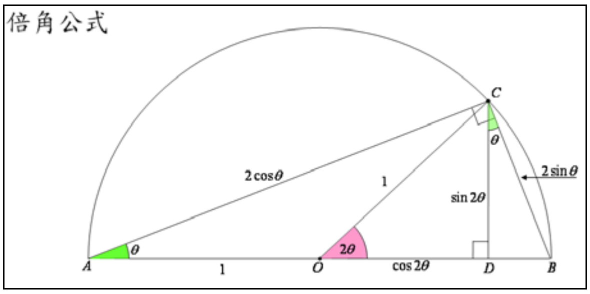

圖 5-2-2-11：得 $\angle DCB = \theta$ 。

註：$\Delta BCD \sim \Delta BAD$ 。

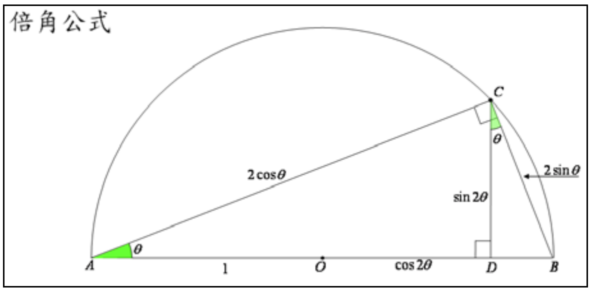

圖 5-2-2-12：將 $\overline{OC}$ 及 2θ 消失。

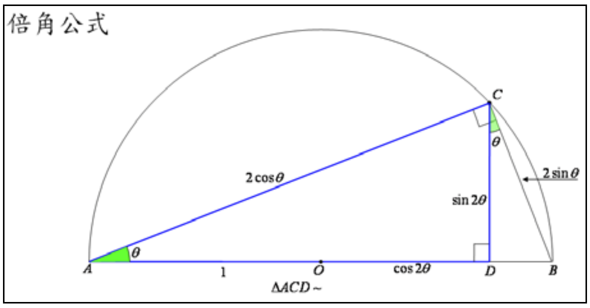

圖 5-2-2-13：標示 ΔACD 並顯示 $\Delta ACD \sim$ 。

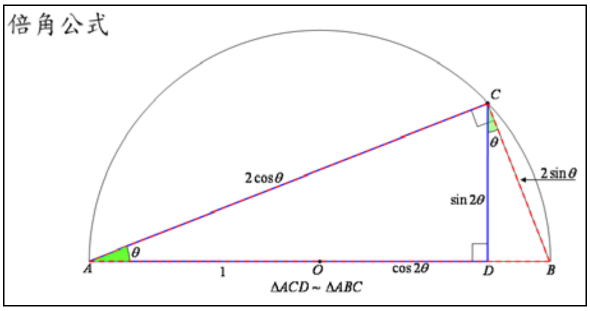

圖 5-2-2-14：再標示 ΔABC 並顯示 ΔABC 。

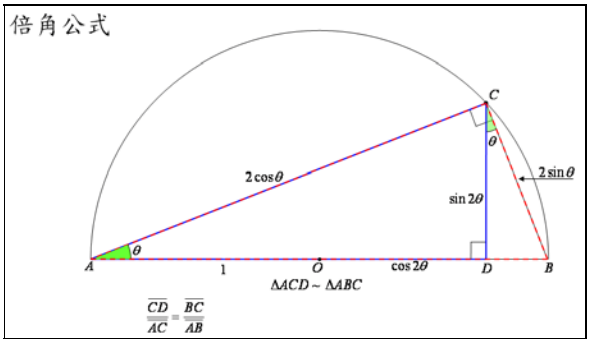

圖 5-2-2-15：由相似三角形得 $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ 。

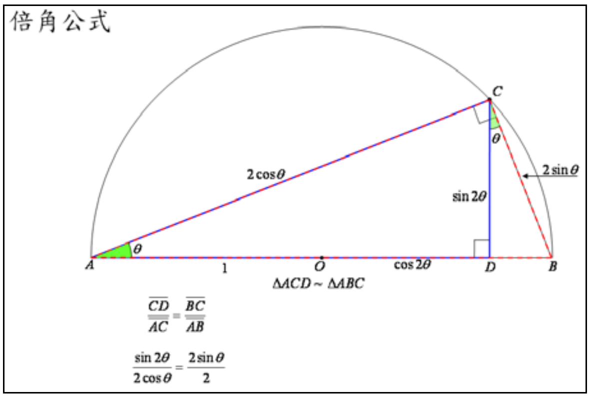

圖 5-2-2-16：得 $\dfrac{\sin 2\theta}{2\cos\theta} = \dfrac{2\sin\theta}{2}$ 。

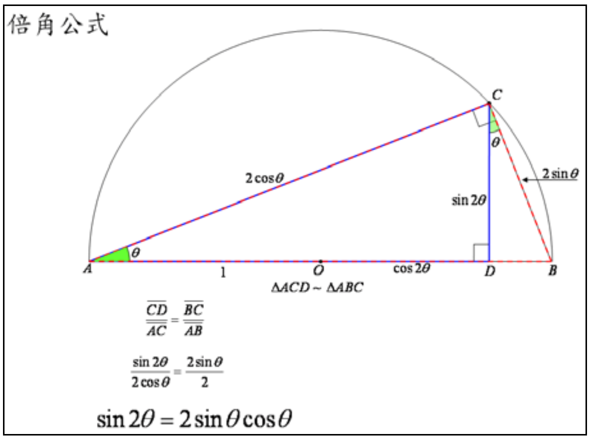

圖 5-2-2-17：得 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ 。

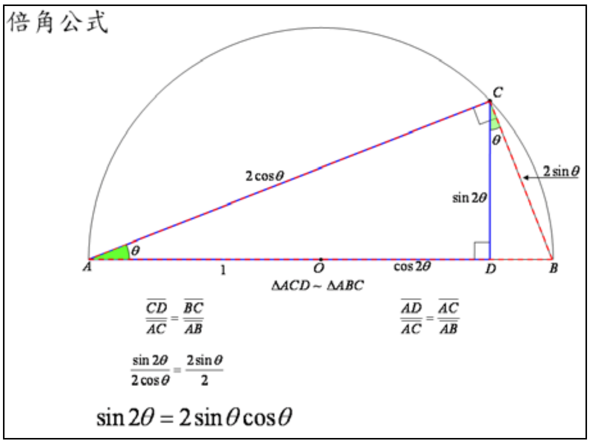

圖 5-2-2-18：再得 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ 。

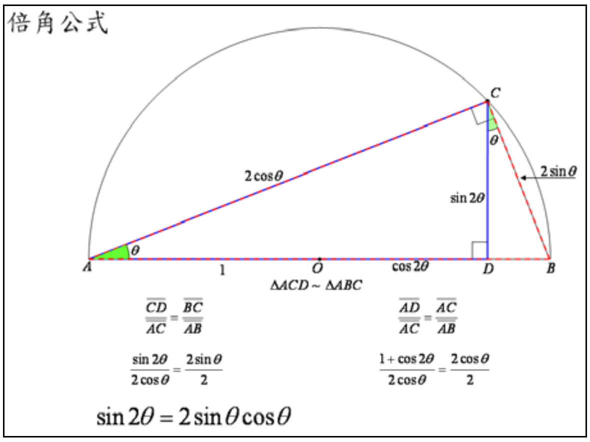

圖 5-2-2-19：得 $\dfrac{1+\cos 2\theta}{2\cos\theta} = \dfrac{2\cos\theta}{2}$ 。

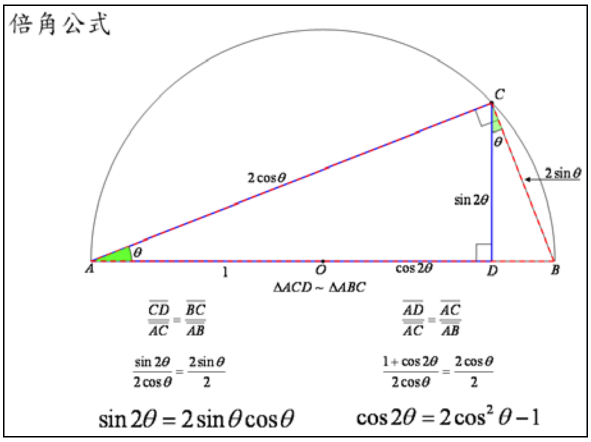

圖 5-2-2-20：得 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ 。

三、 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

本例是利用單位圓上任一弦及過圓心垂直弦的線段平分其圓心角，再利用面積的不同表達方式來證明：$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$。本例爲李政豐等(2001)等發表於數學傳播，在 PowerPoint 中的呈現方式如下列各圖所示(圖 5-2-3-1 到圖 5-2-3-11)。

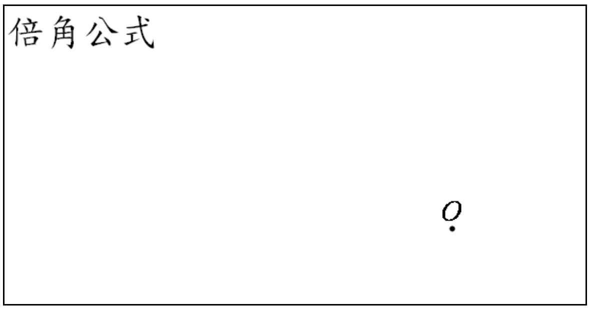

圖 5-2-3-1：平面上一點O。

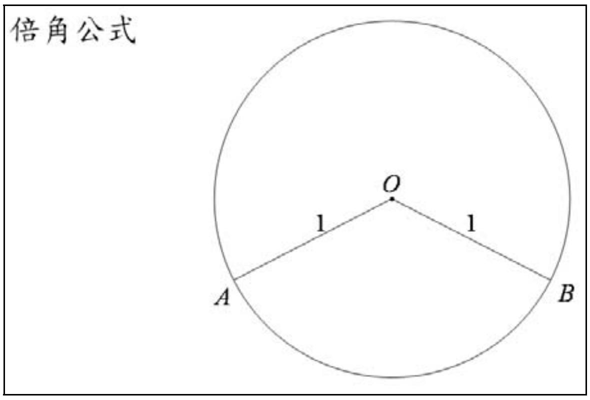

圖 5-2-3-1：以O為圓心做單位圓，並顯示兩半徑 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$。

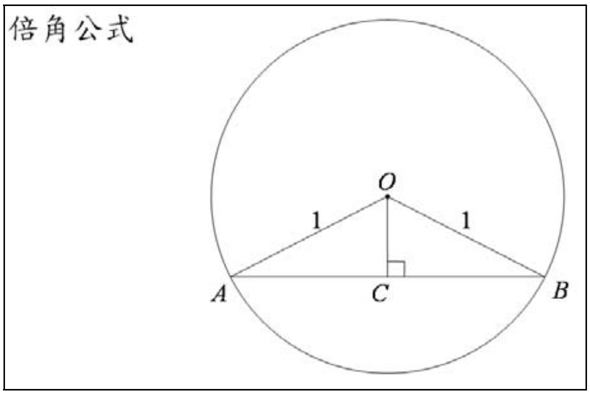

圖 5-2-3-3：做弦$\overline{AB}$，再做$\overline{OC} \perp \overline{AB}$於$C$。

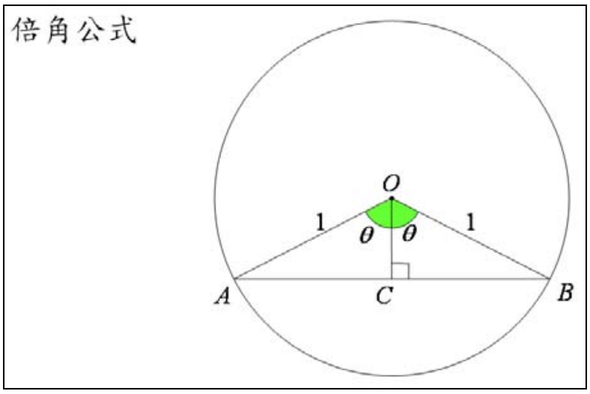

圖 5-2-3-4：令兩圓心角皆為θ。

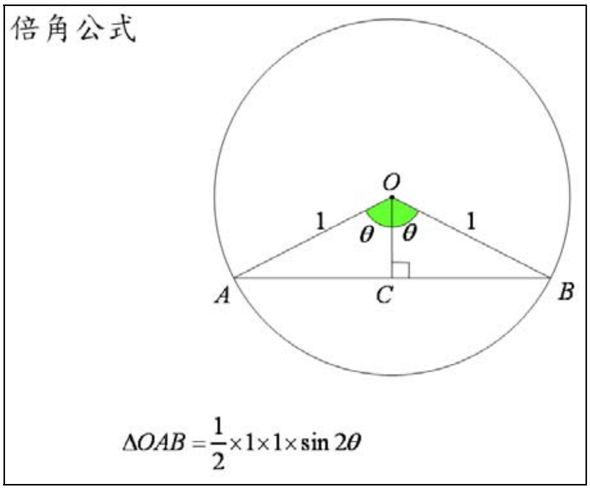

圖 5-2-3-5：得$\Delta OAB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 2\theta$。

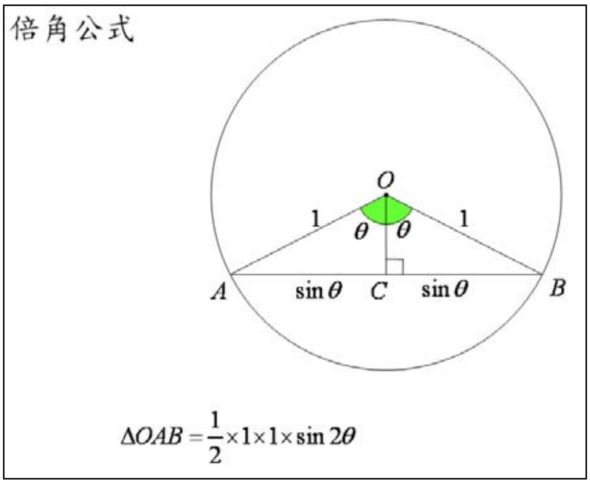

圖 5-2-3-6：得$\overline{AC}$、$\overline{BC}$皆為$\sin\theta$。

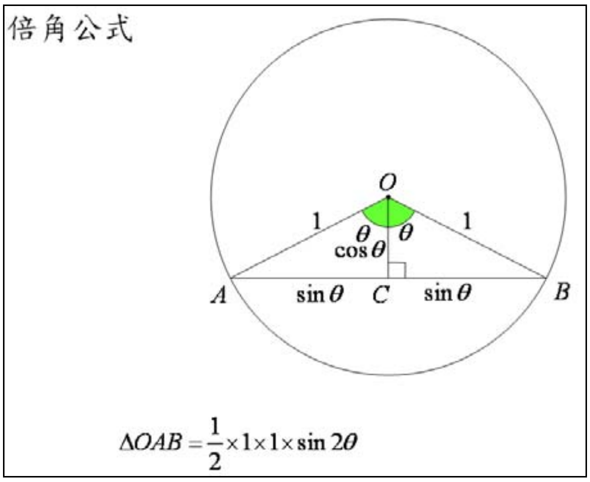

圖 5-2-3-7：得 $\overline{OC}$ 爲 $\cos\theta$ 。

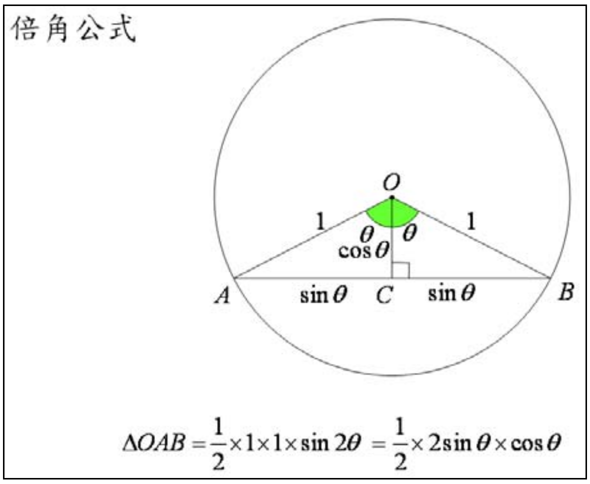

圖 5-2-3-8：得面積 $\frac{1}{2} \cdot 2\sin\theta \cdot \cos\theta$ 。

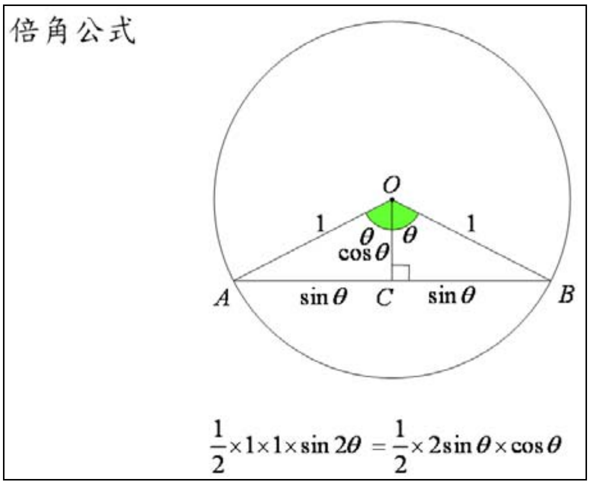

圖 5-2-3-9：將 $\Delta OAB =$ 消失。

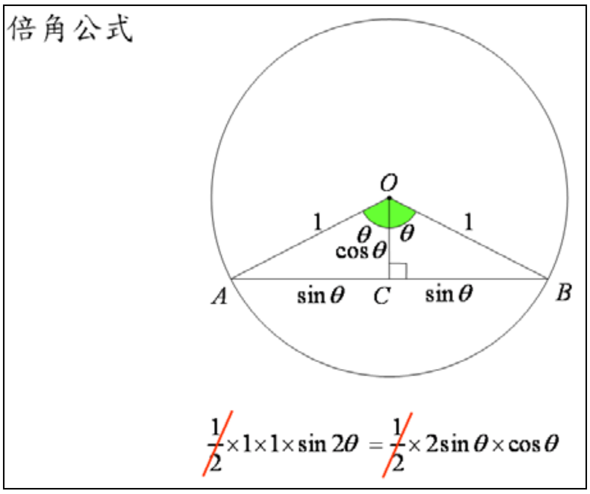

圖 5-2-3-10：等號二邊 $\frac{1}{2}$ 約去。

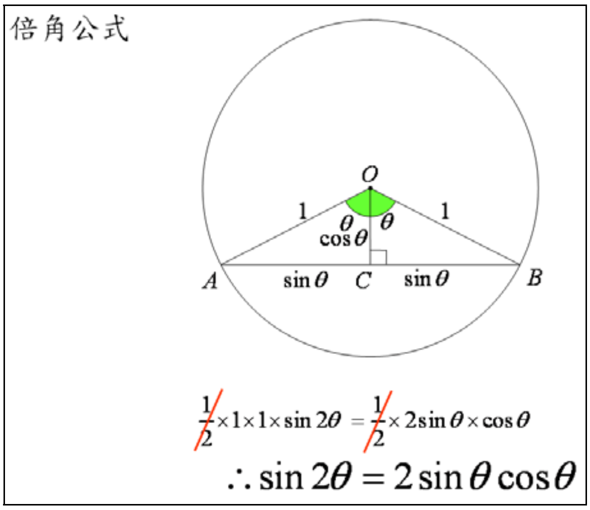

圖 5-2-3-11：得 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ 。

四、 $\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ 與 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

本例是利用單位圓上任一弦及過圓心垂直弦的線段平分其圓心角，再利用面積的不同表達方式來證明：$\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ 及 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$，本例爲李政豐等(2001)發表於數學傳播，本例原作者只呈現 $\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ 的部分，研究者在動態化的過程中發現可以再加入 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ 的結果。在 PowerPoint 中的呈現方式如下列各圖所示(圖 5-2-4-1～圖 5-2-4-17)。

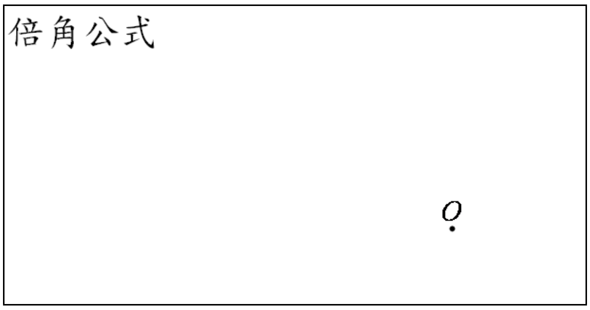

圖 5-2-4-1：平面上一點 O。

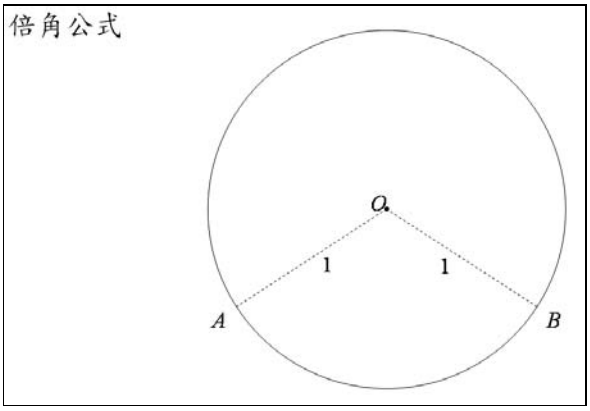

圖 5-2-4-2：以 O 爲圓心做單位圓，並顯示兩半徑 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$。

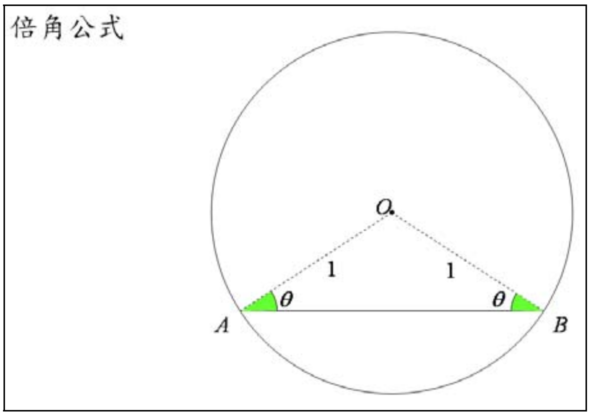

圖 5-2-4-3：連弦 $\overline{AB}$ 得等腰 ΔOAB、令兩底角爲 θ。

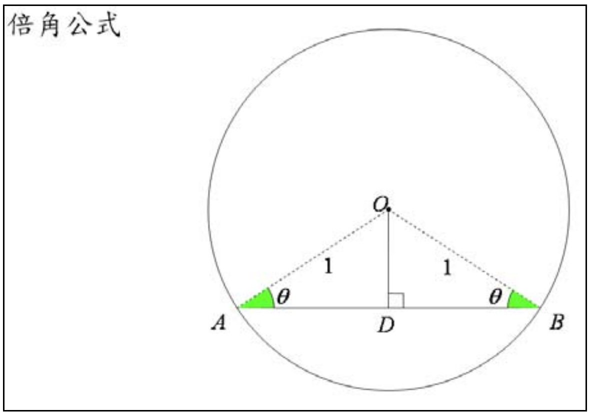

圖 5-2-4-4：做 $\overline{OD} \perp \overline{AB}$ 於 D 點。

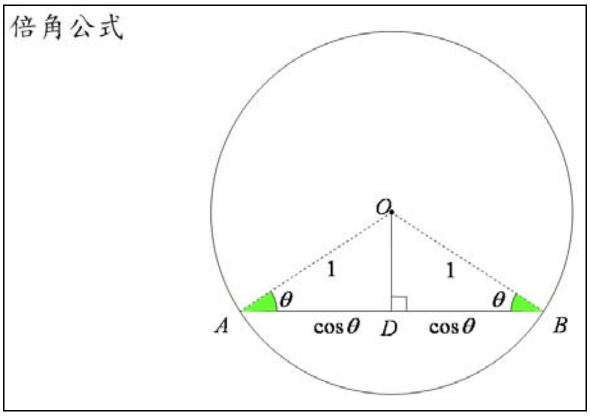

圖 5-2-4-5：得 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BD}$ 皆爲 $\cos\theta$ 。

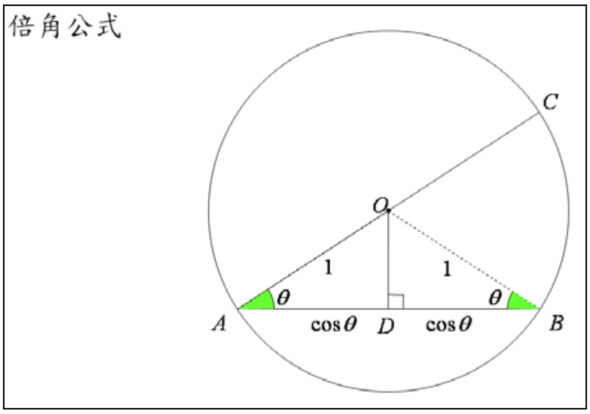

圖 5-2-4-6：做直徑 $\overline{AC}$ 。

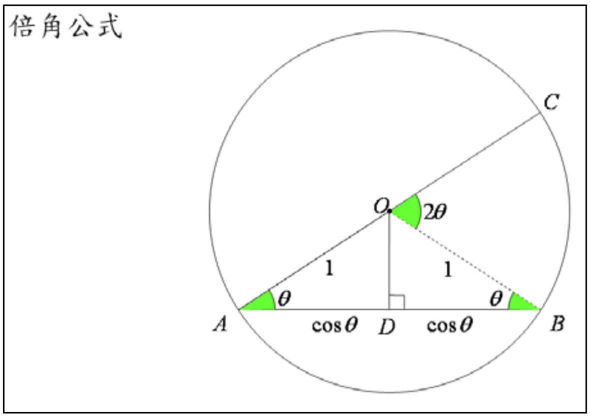

圖 5-2-4-7：得 $\angle BOC$ 爲 2θ 。

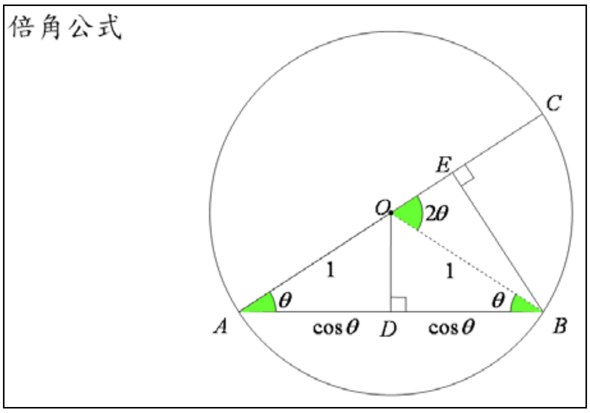

圖 5-2-4-8：做 $\overline{BE} \perp \overline{OC}$ 於 E 點。

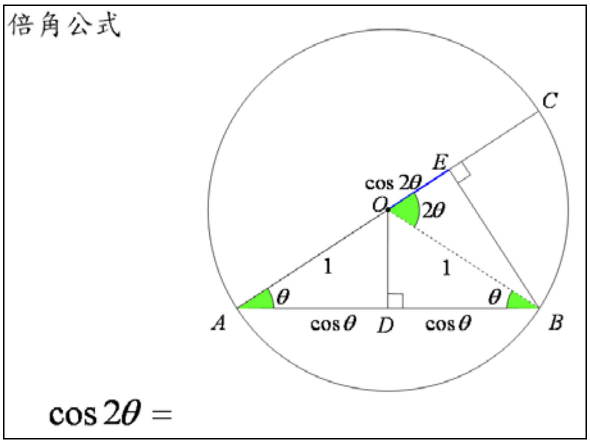

圖 5-2-4-9：由直角 ΔOBE 得 $\overline{OE} = \cos 2\theta$，並顯示 $\cos 2\theta =$ 。

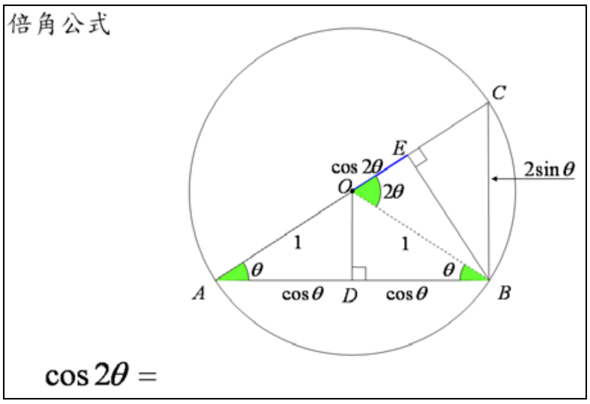

圖 5-2-4-10：連 $\overline{BC}$ ，由直角 ΔABC 得長度爲 $2\sin\theta$ 。

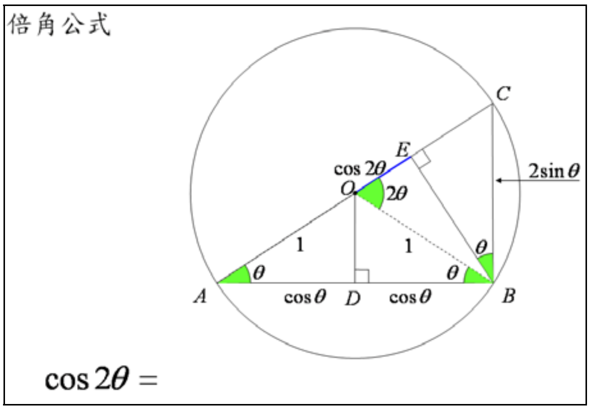

圖 5-2-4-11：顯示 $\angle CBE$ 爲 θ 。

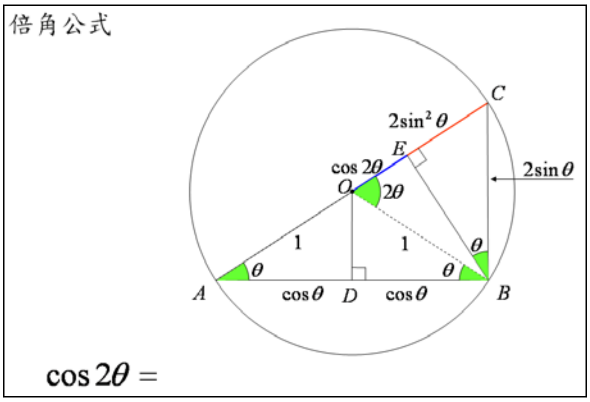

圖 5-2-4-12：標示 $\overline{CE}$ ，並由直角 ΔBCE 得 $\overline{CE}=2\sin^2\theta$ 。

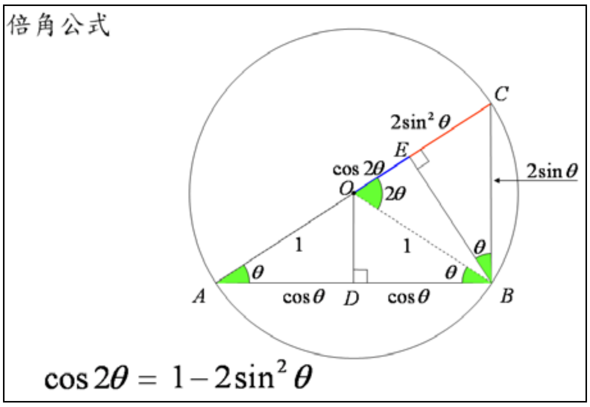

圖 5-2-4-13：得 $\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta$ 。

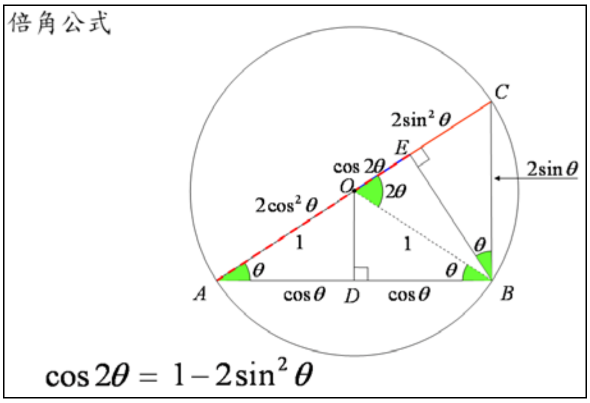

圖 5-2-4-14：標示 $\overline{AE}$ ，並由直角 ΔABE 得 $\overline{AE}=2\cos^2\theta$ 。

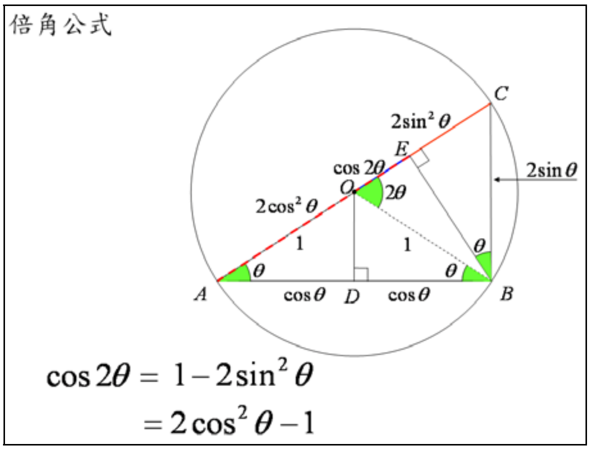

圖 5-2-4-15：得 $\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta$ 。

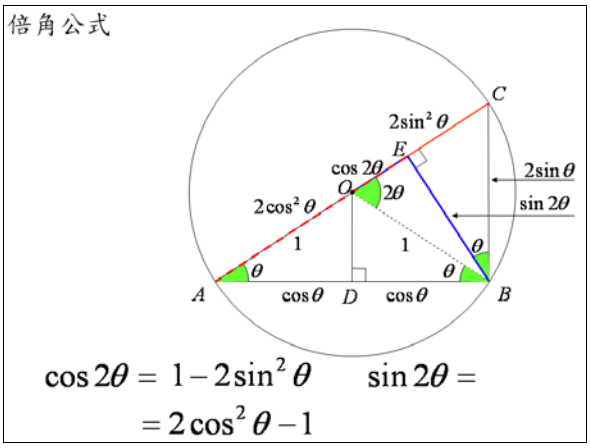

圖 5-2-4-16：標示 $\overline{BE}$ ，並由直角 ΔOBE 得 $\overline{BE}=\sin 2\theta$ ，顯示 $\sin 2\theta =$ 。

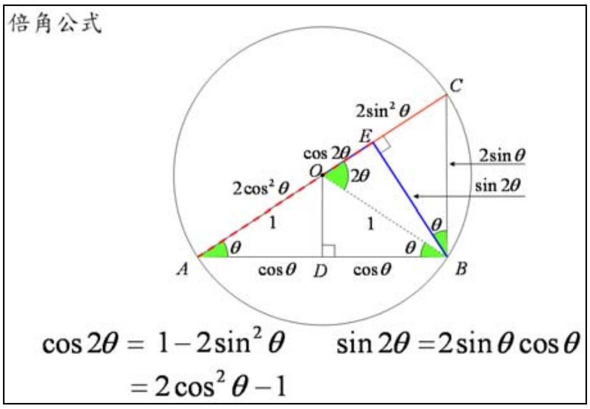

圖 5-2-4-17：由直角 ΔBCE 得 $2\sin\theta\cos\theta$；或由直角 ΔABE 得 $2\sin\theta\cos\theta$。

五、$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ 與 $\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta$

本例是利用腰長為 1 的等腰三角形製造直角三角形，再利用三角函數的定義證得 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ 及 $\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta$。本例為李政豐(2000)發表於科學教育月刊第 235 期的作品，原作者只呈現 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ 的部分，研究者在動態化的過程中發現可以再加入 $\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta$ 的結果。在 PowerPoint 中的呈現方式如下列各圖所示(圖 5-2-5-1～圖 5-2-5-15)。

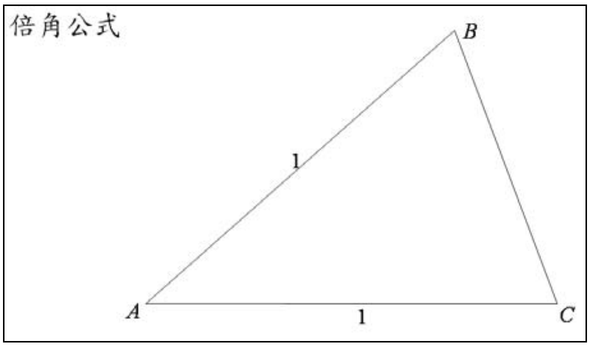

圖 5-2-5-1：任一等腰三角形 ABC，令兩腰長為 1。

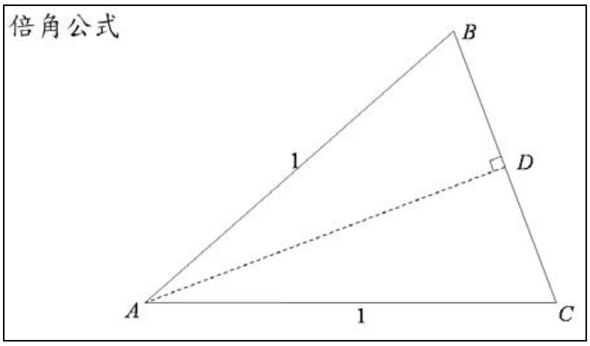

圖 5-2-5-2：做 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 於 D。

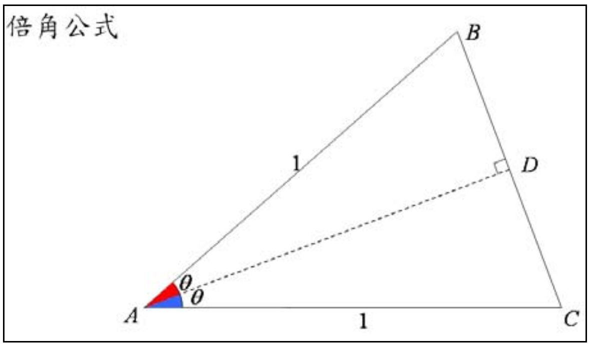

圖 5-2-5-3：令 $\angle BAD=\angle CAD=\theta$ 。

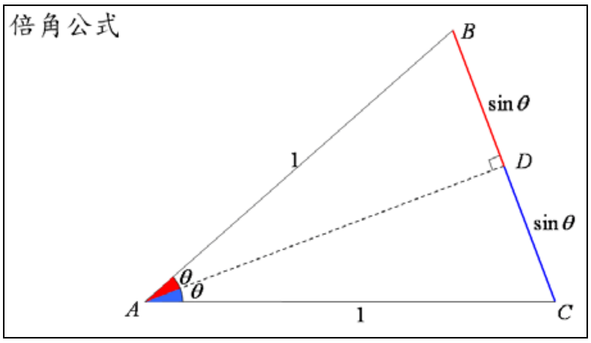

圖 5-2-5-4：得 $\overline{BD}=\overline{CD}=\sin\theta$ 。

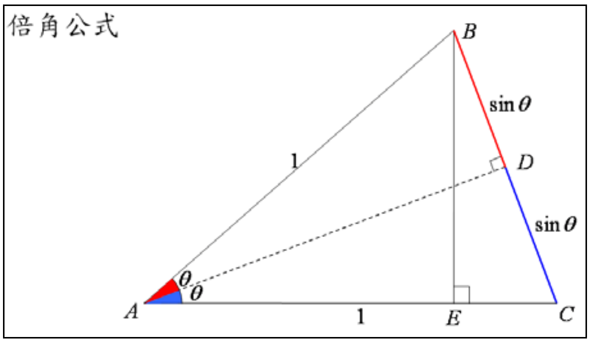

圖 5-2-5-5：做 $\overline{BE}\perp\overline{AC}$ 於 E。

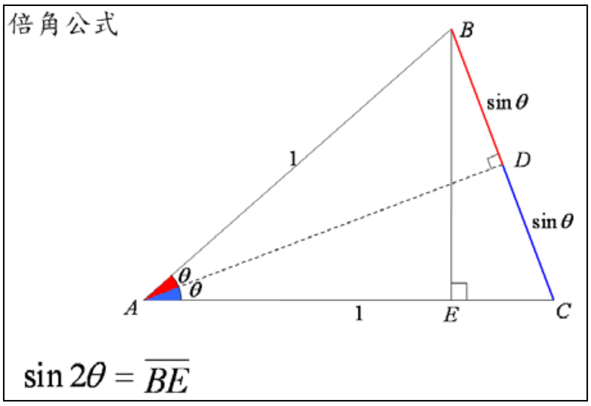

圖 5-2-5-6：顯示 $\sin 2\theta=\overline{BE}$ 。

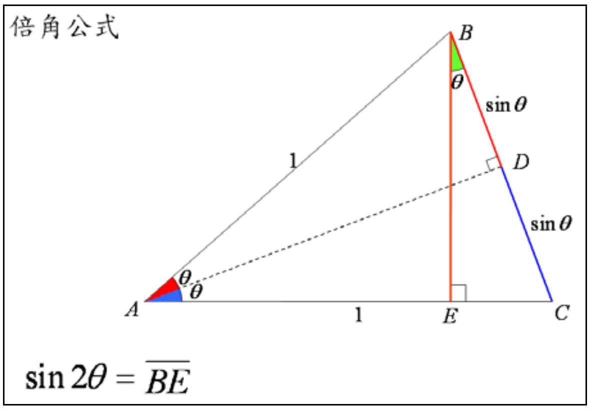

圖 5-2-5-7：標示 $\overline{BE}$ 及 $\angle CBE=\theta$ 。

註：$\Delta BCE\sim\Delta ACD$ 。

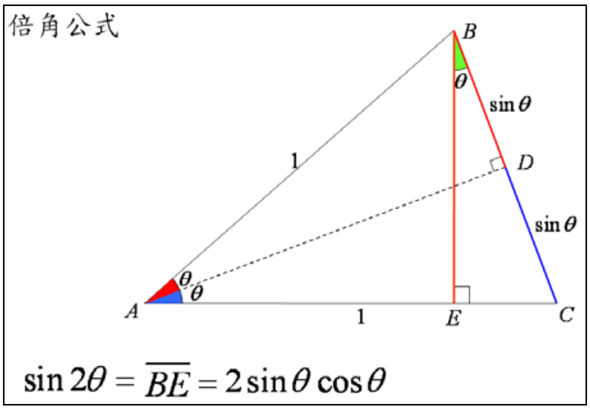

圖 5-2-5-8：由直角 ΔBCE 得 $2\sin\theta\cos\theta$ 。

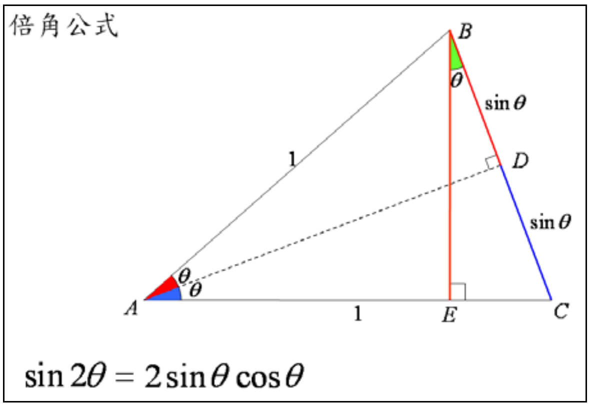

圖 5-2-5-9：將 $\overline{BE}$ = 消失，並將 $2\sin\theta\cos\theta$ 左移至 $\sin 2\theta$ 旁，得 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ 。

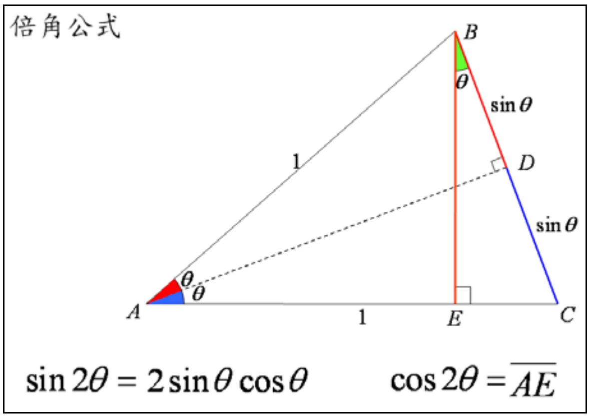

圖 5-2-5-10：顯示 $\cos 2\theta = \overline{AE}$ 。

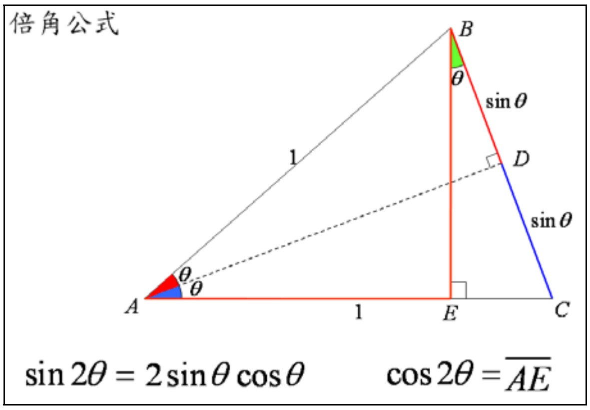

圖 5-2-5-11：標示 $\overline{AE}$ 。

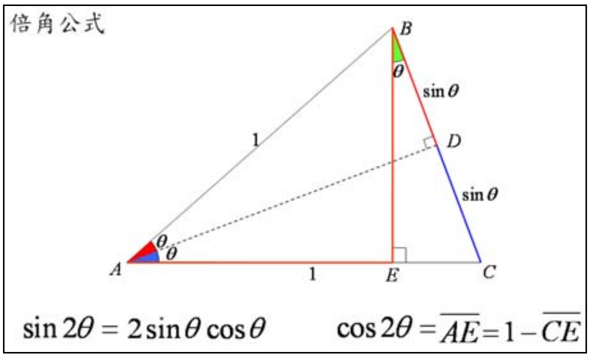

圖 5-2-5-12：顯示 $= 1 - \overline{CE}$ 。

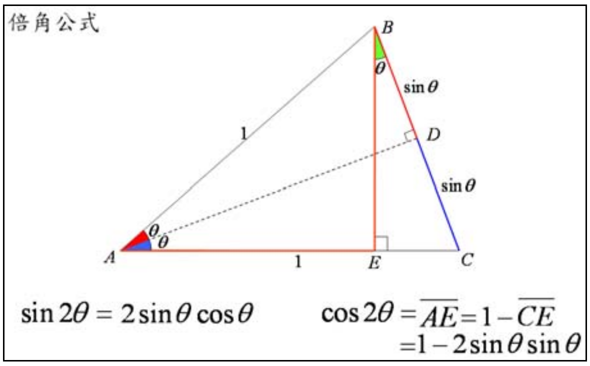

圖 5-2-5-13：得 $= 1 - 2\sin\theta\sin\theta$ 。

註：由直角 ΔBCE 得

$\overline{CE} = 2\sin\theta\sin\theta$ 。

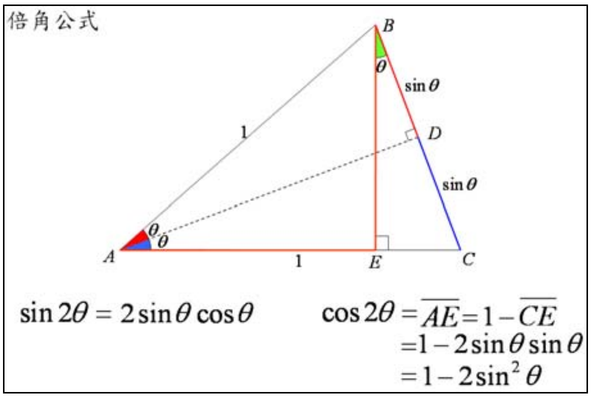

圖 5-2-5-14：再得 $= 1 - 2\sin^2\theta$ 。

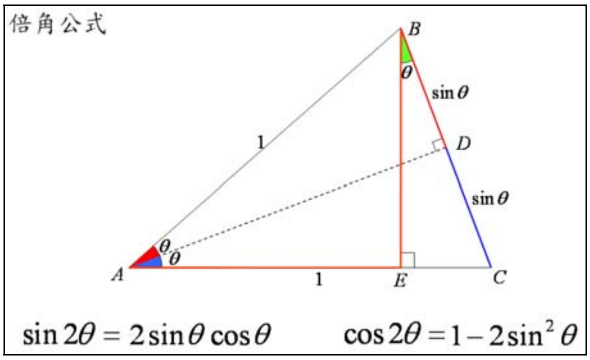

圖 5-2-5-15：將中間各項消失，並將$1-2\sin^2\theta$上移至$\cos 2\theta$旁，得$\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta$。

六、 $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1-2\sin^2\theta$與$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

本例是利用一斜邊為 1 的直角三角形，向外製造等腰三角形，來推導$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1-2\sin^2\theta$的公式，本例為李政豐(2000)發表於科學教育月刊第 235 期的作品，本例原作者只呈現$\cos 2\theta$的部分，研究者在動態化的過程中發現可以再加入$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$的結果。在 PowerPoint 中的呈現方式如下列各圖所示(圖 5-2-6-1～圖 5-2-6-35)。

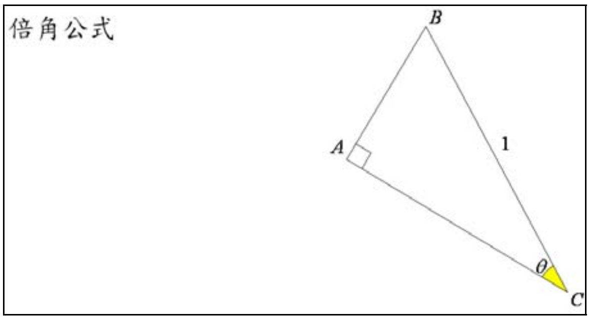

圖 5-2-6-1：直角ΔABC，$\angle C = \theta$，$\overline{BC} = 1$。

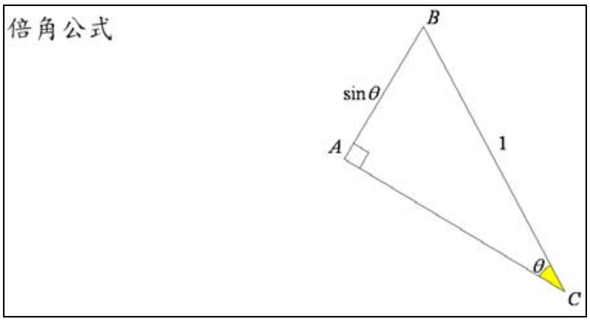

圖 5-2-6-2：得$\overline{AB} = \sin\theta$。

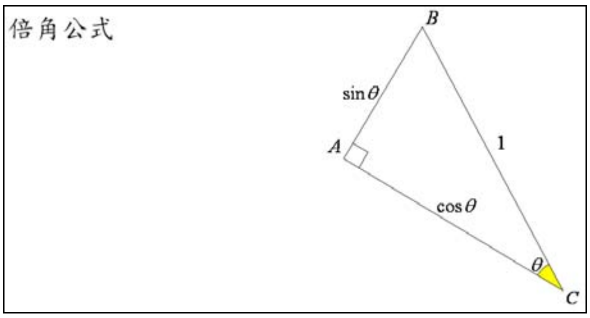

圖 5-2-6-3：得$\overline{AC} = \cos\theta$。

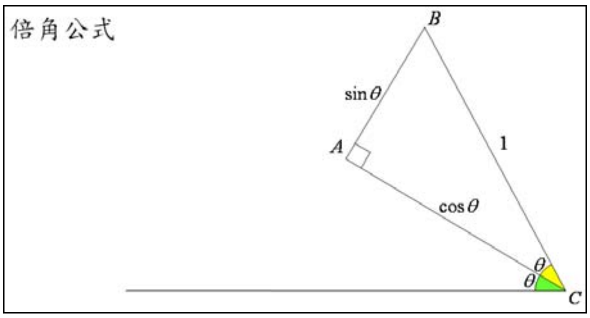

圖 5-2-6-4：由 C 點做一射線，與$\overline{CA}$夾角為θ，且與$\overline{BC}$異側。

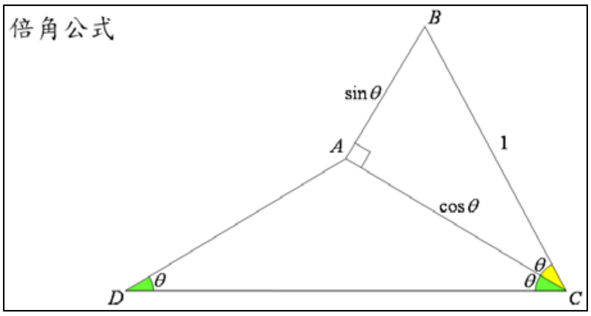

圖 5-2-6-5：做 $\overline{AD}$ ，使得 $\angle ADC = \theta$ 。

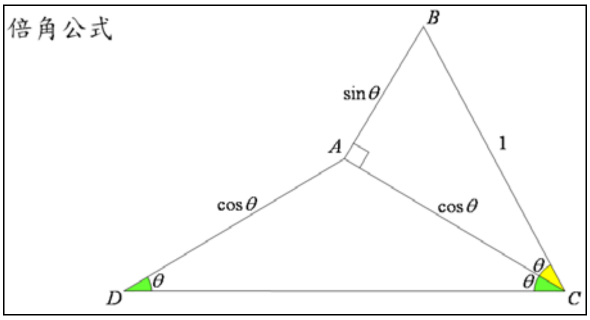

圖 5-2-6-6：得 $\overline{AD} = \cos\theta$ 。

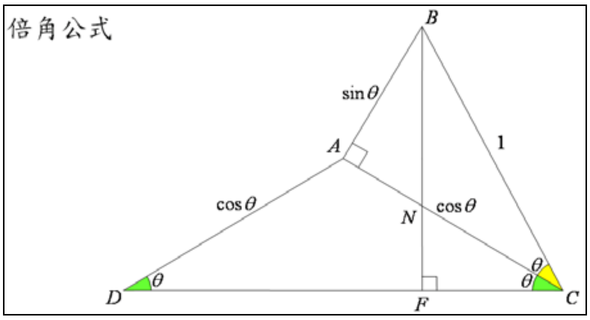

圖 5-2-6-7：做 $\overline{BF} \perp \overline{CD}$ 於 F，交 $\overline{AC}$ 於 N。

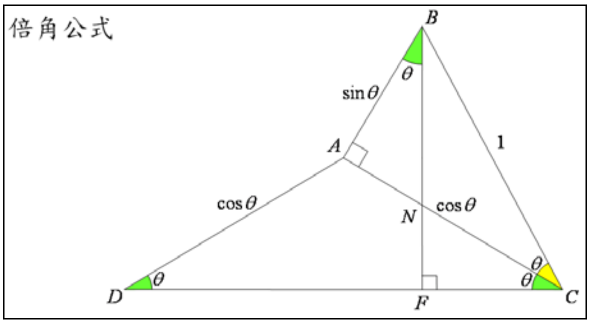

圖 5-2-6-8：則 $\angle ABF = \theta$ 。

註：$\Delta BAN \sim \Delta CFN$ 。

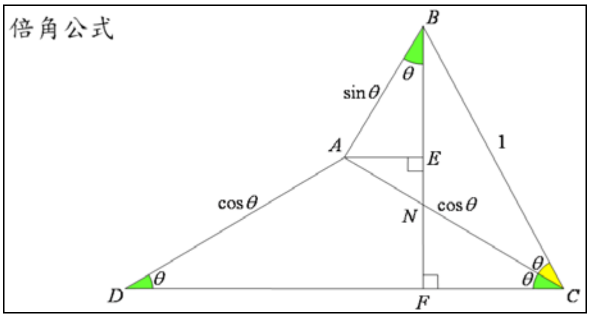

圖 5-2-6-9：做 $\overline{AE} \perp \overline{BF}$ 於 E。

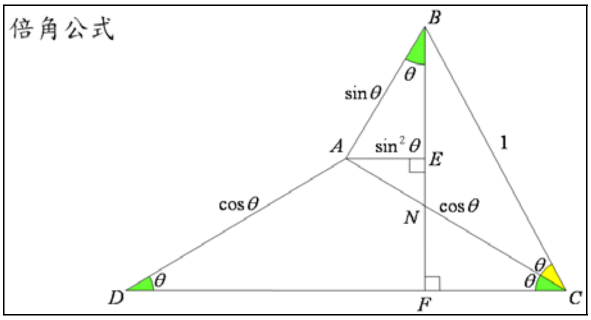

圖 5-2-6-10：由直角 ΔABE 得 $\overline{AE} = \sin^2\theta$ 。

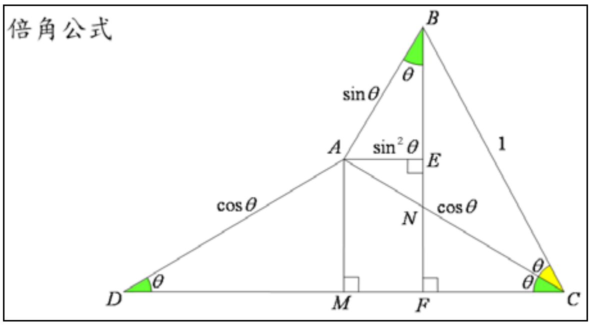

圖 5-2-6-11：做 $\overline{AM} \perp \overline{CD}$ 於 M。

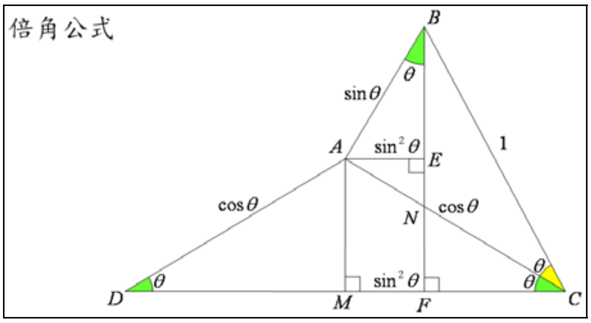

圖 5-2-6-12：由矩形 $AEFM$ 得 $\overline{MF} = \sin^2\theta$ 。

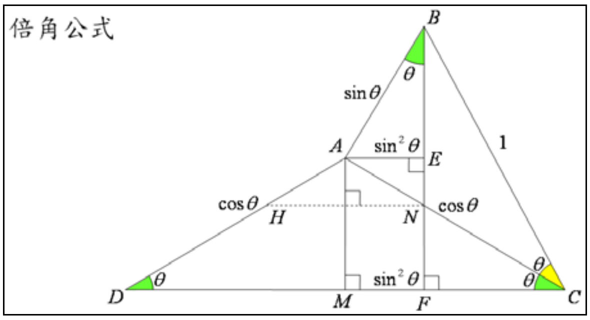

圖 5-2-6-13：做 $\overline{NH} \perp \overline{AM}$ 交 $\overline{AD}$ 於 H。

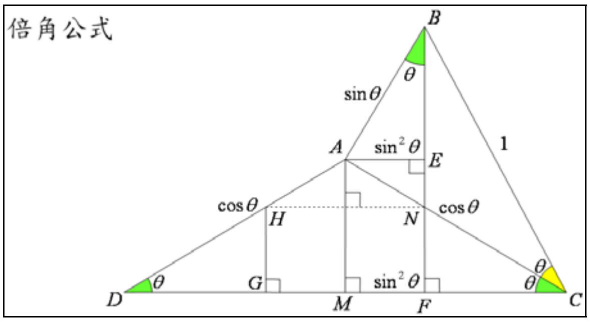

圖 5-2-6-14：做 $\overline{HG} \perp \overline{CD}$ 於 G。

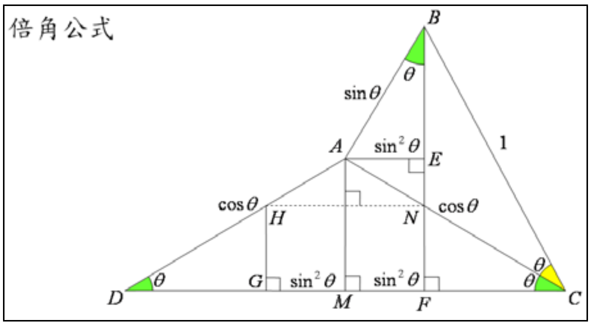

圖 5-2-6-15：由等腰 Δ 及對稱關係得 $\overline{GM} = \sin^2\theta$。

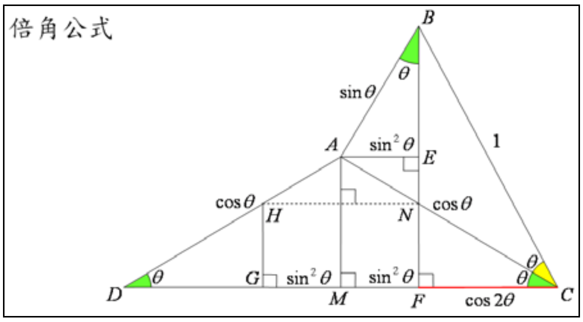

圖 5-2-6-16：由直角 ΔCBF 得得 $\overline{CF} = \cos 2\theta$。

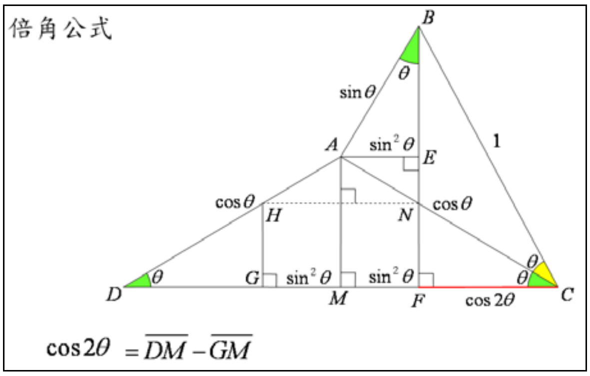

圖 5-2-6-17：由對稱關係得 $\cos 2\theta = \overline{DM} - \overline{GM}$。

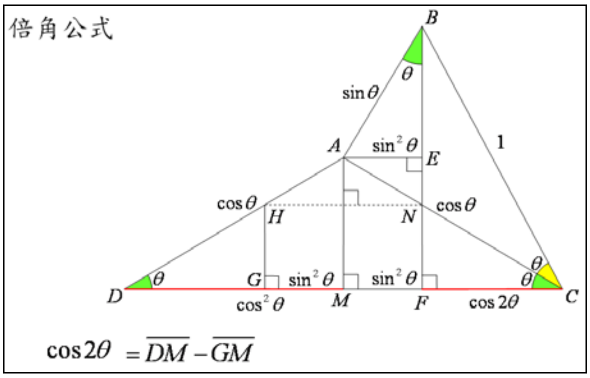

圖 5-2-6-18：標示 $\overline{DM}$ 線段，並得長爲 $\cos^2\theta$。

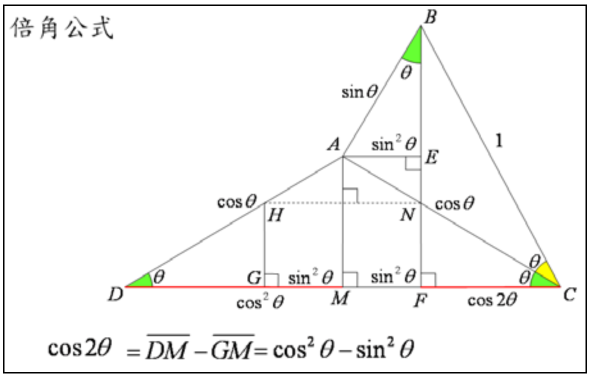

圖 5-2-6-19：得 $\cos^2\theta - \sin^2\theta$。

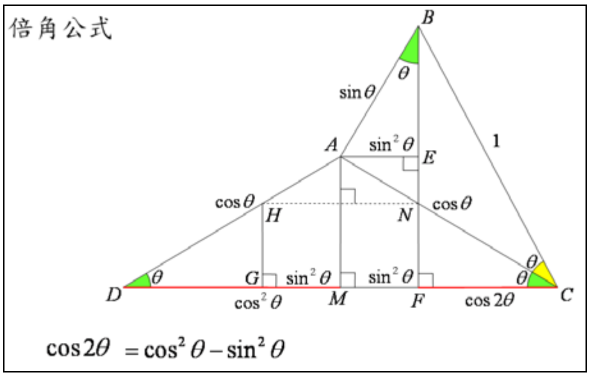

圖 5-2-6-20：消去 $\overline{DM} - \overline{GM}$，並將 $\cos^2\theta - \sin^2\theta$ 靠近，得 $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$。

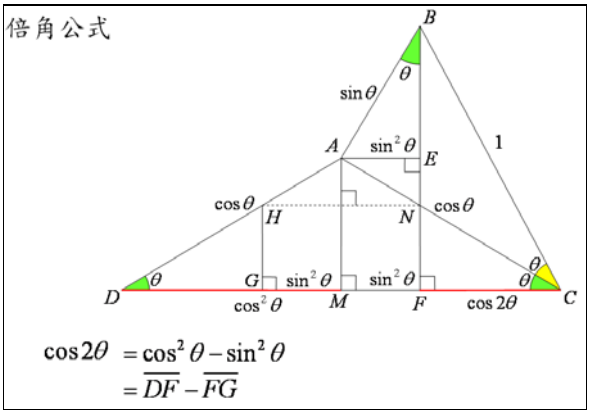

圖 5-2-6-21：顯示 $= \overline{DF} - \overline{FG}$ 。

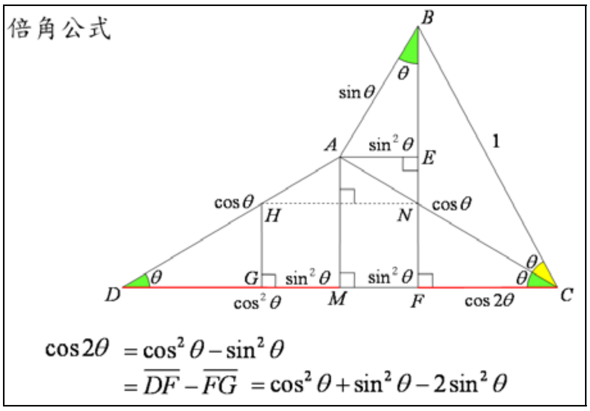

圖 5-2-6-22：得 $\cos^2\theta + \sin^2\theta - 2\sin^2\theta$ 。

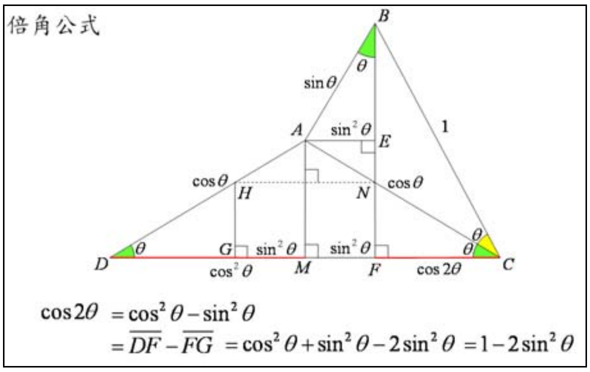

圖 5-2-6-23：由平方和公式 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$，
得 $1 - 2\sin^2\theta$ 。

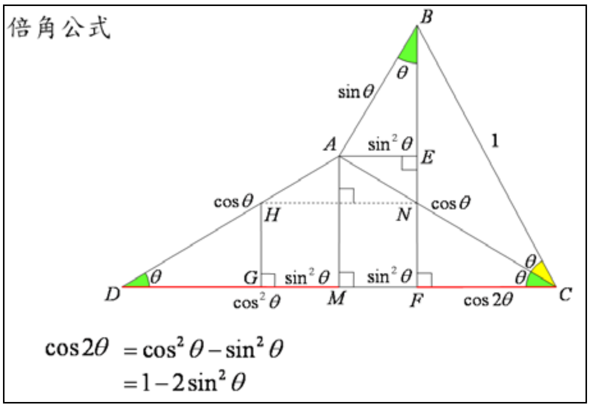

圖 5-2-6-24：消去中間部分，並將 $1 - 2\sin^2\theta$ 靠近。

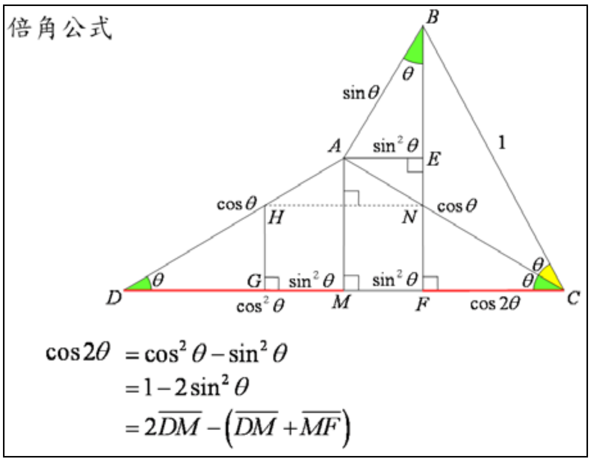

圖 5-2-6-25：顯示 $2\overline{DM} - \left(\overline{DM} + \overline{MF}\right)$ 。

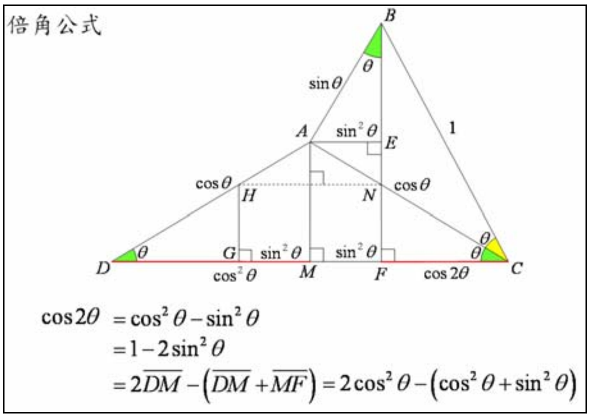

圖 5-2-6-26：得 $2\cos^2\theta - \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)$ 。

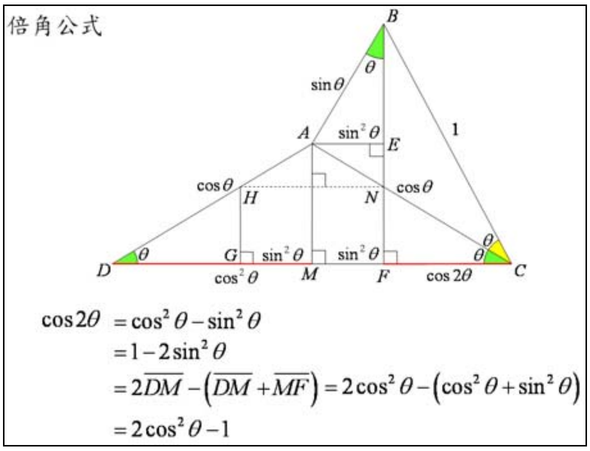

圖 5-2-6-27：得 $2\cos^2\theta - 1$ 。

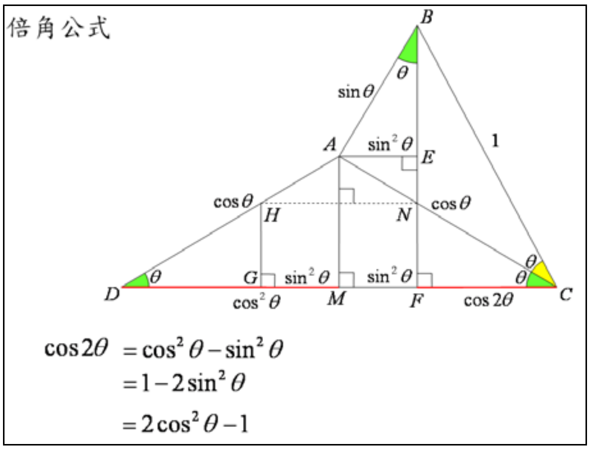

圖 5-2-6-28：消去中間部分，並將 $2\cos^2\theta - 1$ 靠近。

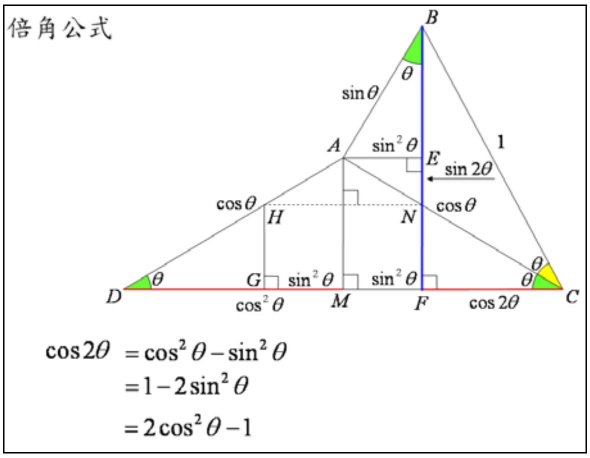

圖 5-2-6-29：標示 $\overline{BF}$ 。

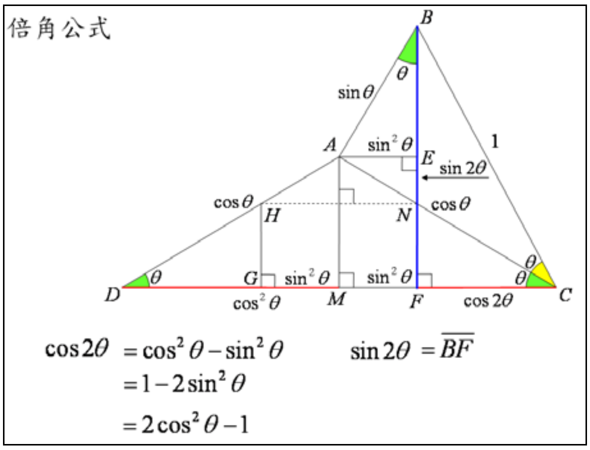

圖 5-2-6-30：由直角 ΔBCF 得 $\sin 2\theta = \overline{BF}$ 。

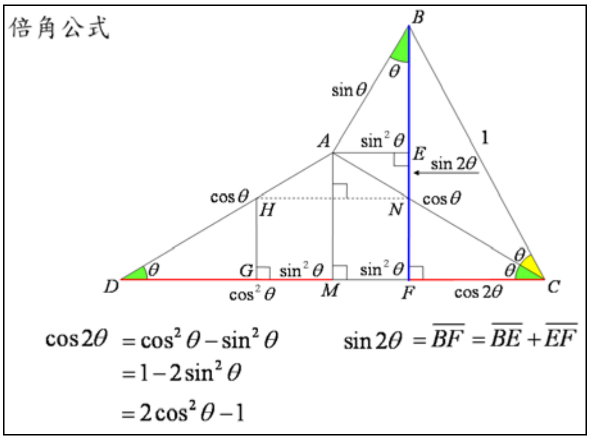

圖 5-2-6-31：得 $= \overline{BE} + \overline{EF}$ 。

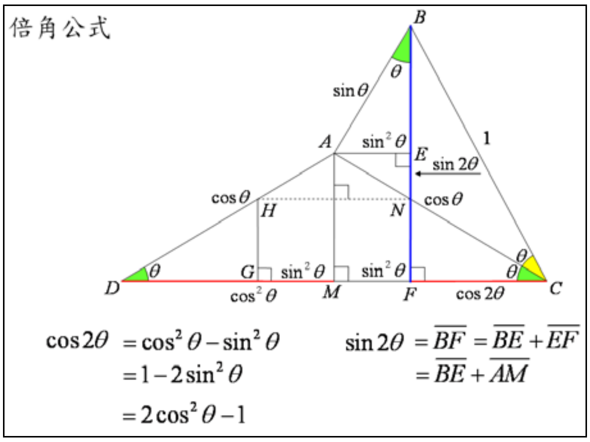

圖 5-2-6-32：由矩形 *AEFM* 得 $= \overline{BE} + \overline{AM}$ 。

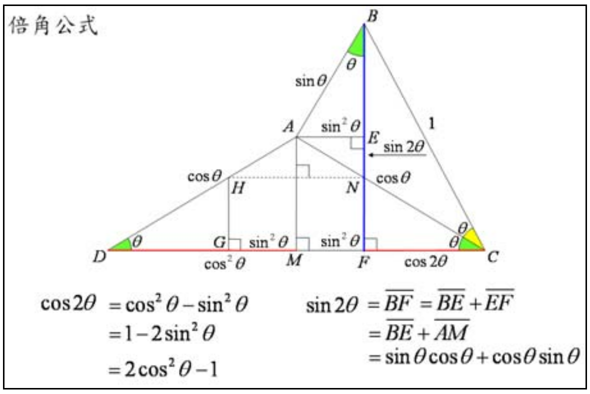

圖 5-2-6-33：由直角 ΔABE 得 $\overline{BE} = \sin\theta\cos\theta$ 、由直角 ΔCAM 得 $\overline{AM} = \cos\theta\sin\theta$ ，得 $\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta$ 。

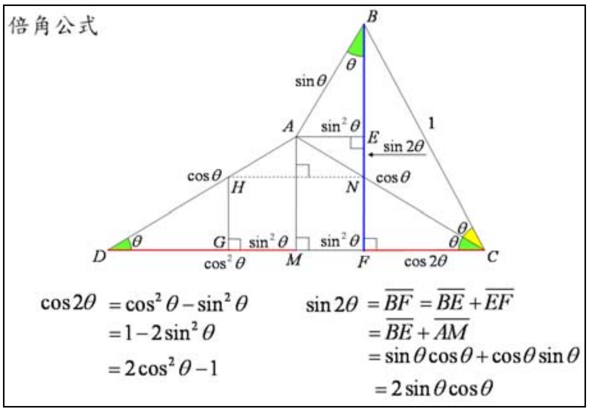

圖 5-2-6-34：整理得 $2\sin\theta\cos\theta$ 。

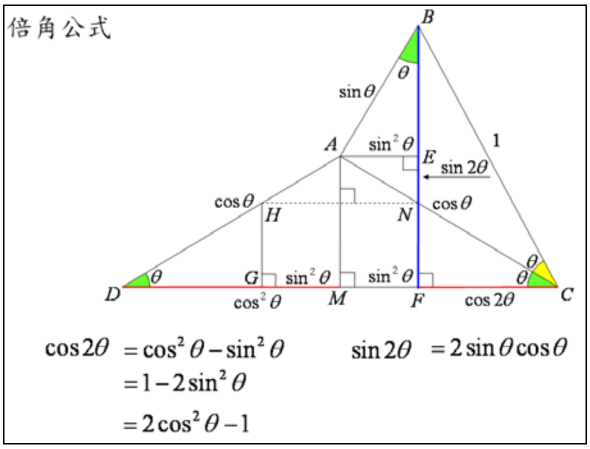

圖 5-2-6-35：消去中間部分，並將 $2\sin\theta\cos\theta$ 上移靠近，得 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ 。

七、 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ 、 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ 、 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ 與 $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

本例是利用半徑爲 1 的半圓及過圓心的圓周角來推導正弦函數的二倍角、三倍角及餘弦函數的二倍角、三倍角，本例爲李政豐等(2001)發表於數學傳播 25 卷第 3 期，在 PowerPoint 中的呈現方式如下列各圖所示(圖 5-2-7-1～圖 5-2-7-34)。

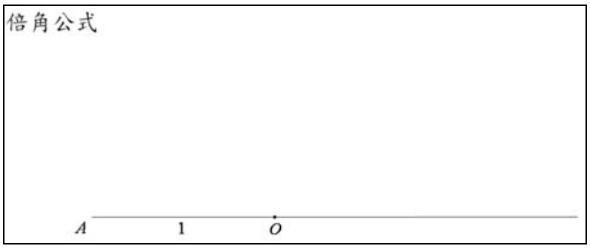

圖 5-2-7-1：射線 $\overrightarrow{AO}$ 上， $\overline{AO}=1$ 。

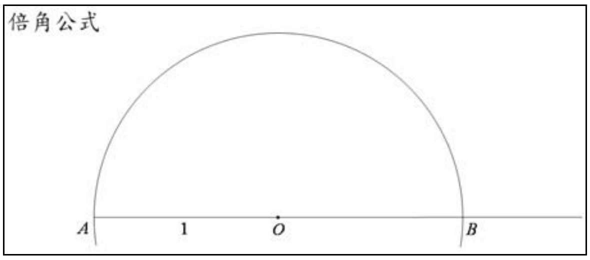

圖 5-2-7-2：以 O 圓心，半徑為 1 做半圓，直徑 $\overline{AB}$ 。

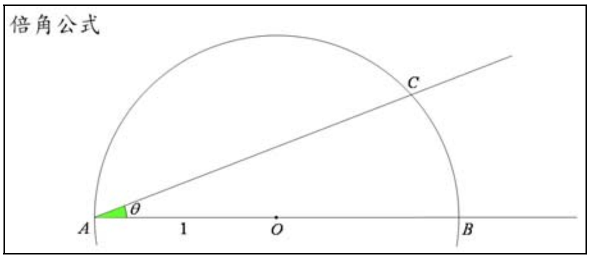

圖 5-2-7-3：做射線 $\overrightarrow{AC}$ ，交半圓於 C 點，設 $\angle A=\theta$ 。

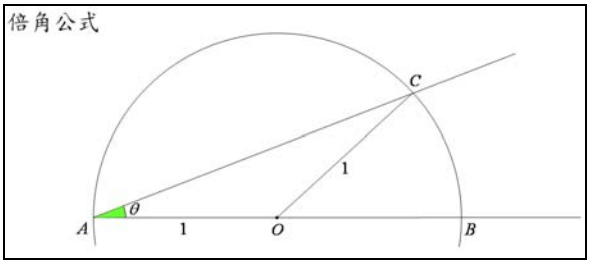

圖 5-2-7-4：做半徑 $\overline{OC}$ 。

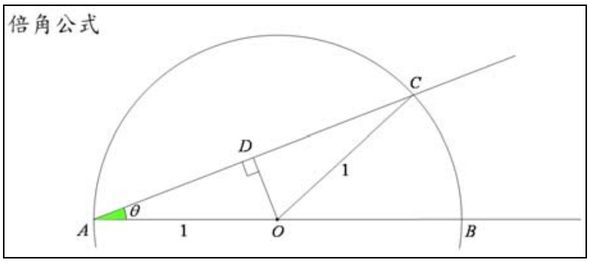

圖 5-2-7-5：做 $\overline{OD}\perp\overline{AC}$ 於 D 點。

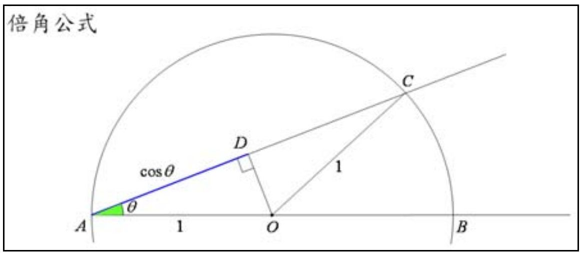

圖 5-2-7-6：得 $\overline{AD}=\cos\theta$ 。

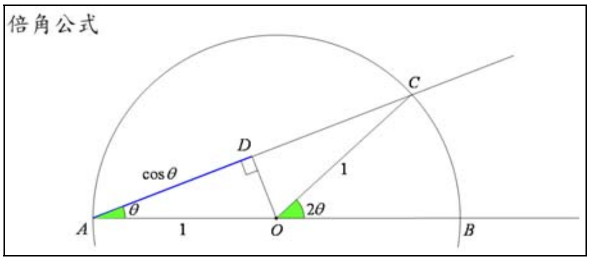

圖 5-2-7-7：由等腰 ΔAOC 外角可得 $\angle BOC=2\theta$ 。

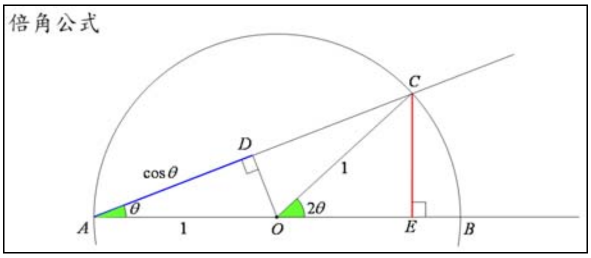

圖 5-2-7-8：做 $\overline{CE}\perp\overline{AB}$ 於 E。

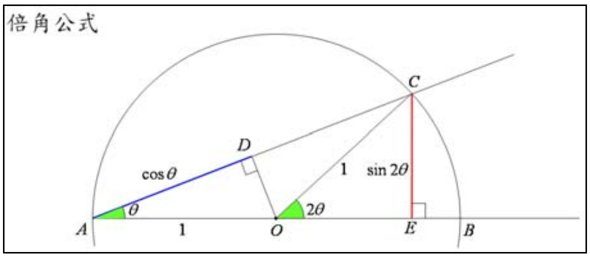

圖 5-2-7-9：由直角ΔCOE 得$\overline{CE}=\sin 2\theta$ 。

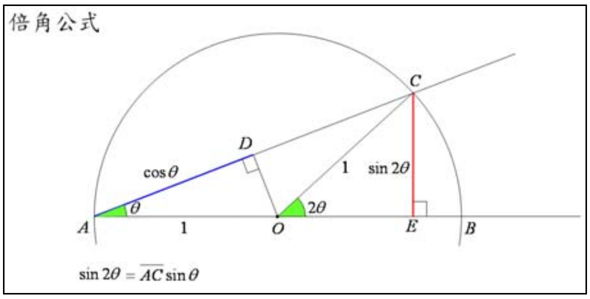

圖 5-2-7-10：顯示$\sin 2\theta=\overline{AC}\sin\theta$ 。

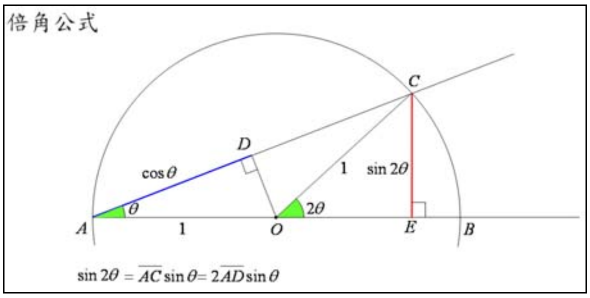

圖 5-2-7-11：再得$2\overline{AD}\sin\theta$ 。

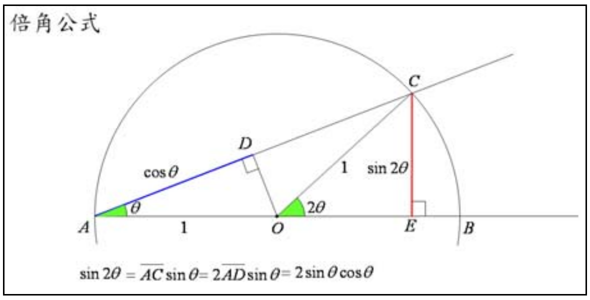

圖 5-2-7-12：得$2\sin\theta\cos\theta$ 。

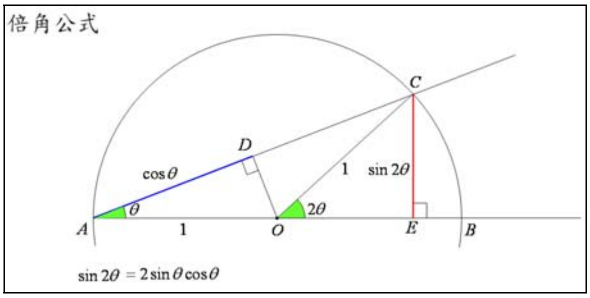

圖 5-2-7-13：消去中間兩項，將$2\sin\theta\cos\theta$移動靠近$\sin 2\theta$ ，得

$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ 。

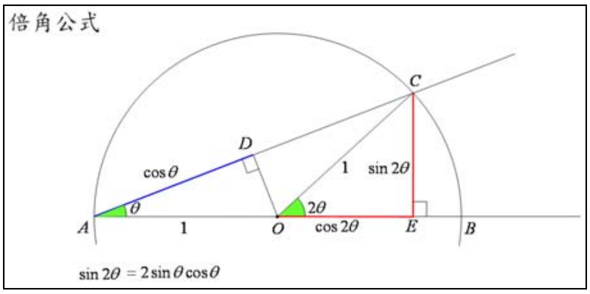

圖 5-2-7-14：由直角ΔCOE 得$\overline{OE}=\cos 2\theta$ 。

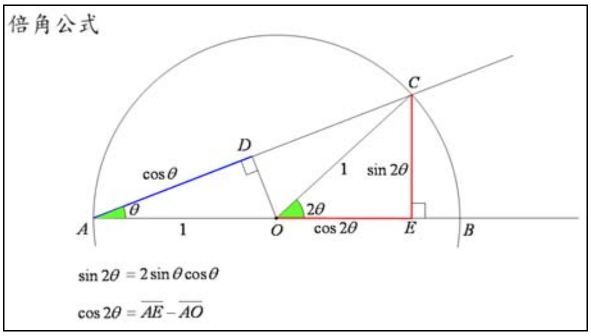

圖 5-2-7-15：顯示$\cos 2\theta=\overline{AE}-\overline{AO}$

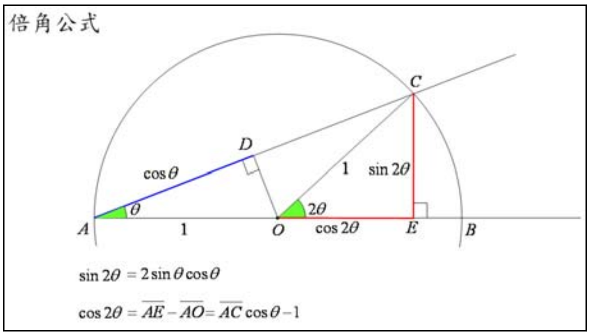

圖 5-2-7-16：由直角ΔACE 得$\overline{AC}\cos\theta-1$ 。

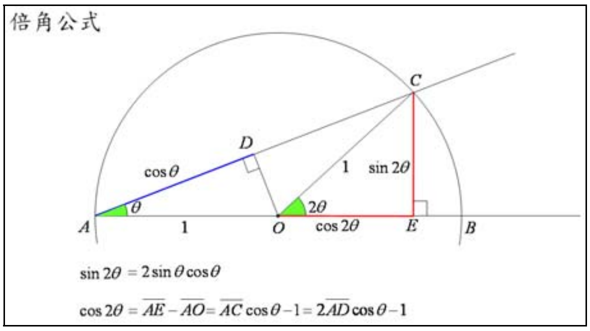

圖 5-2-17-13：化為$2\overline{AD}\cos\theta-1$。

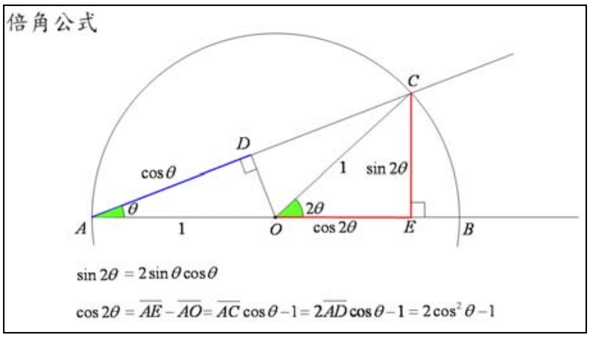

圖 5-2-7-18：得$2\cos^2\theta-1$。

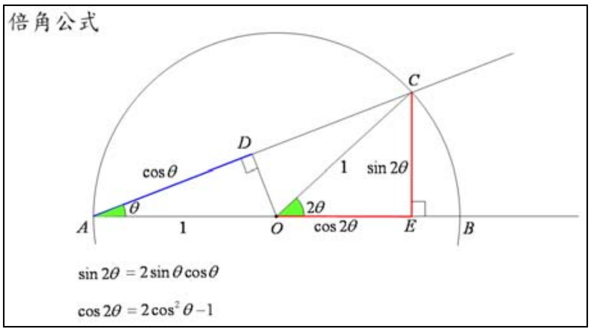

圖 5-2-7-19：消去中間項，將$2\cos^2\theta-1$移動靠近$\cos 2\theta$，得$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$。

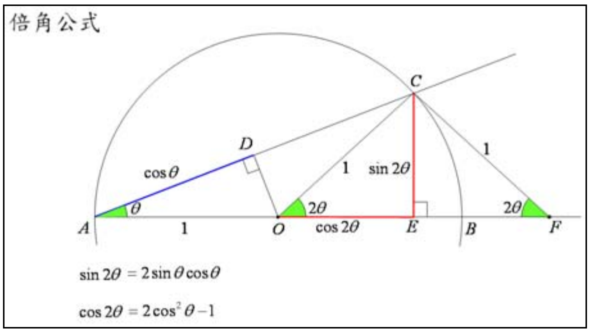

圖 5-2-7-20：做$\overline{CF}$交射線$\overrightarrow{AB}$於F，且$\overline{CF}=1$，得$\angle BFC=2\theta$。

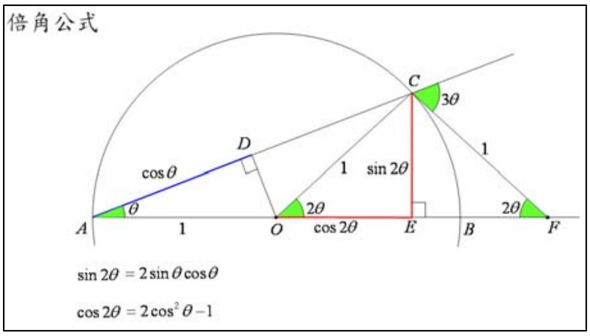

圖 5-2-7-21：得射線$\overrightarrow{AC}$與$\overline{CF}$夾角為3θ。
註：ΔACF的外角。

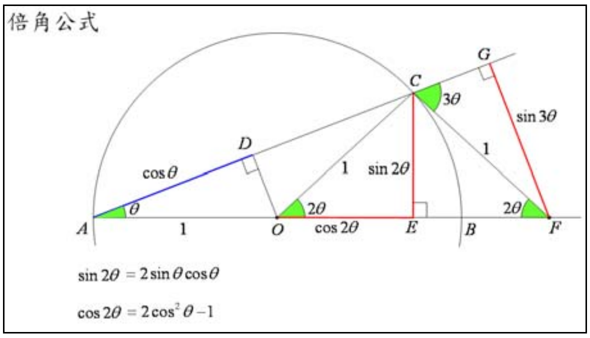

圖 5-2-7-22：做$\overline{FG}\perp\overrightarrow{AC}$於 G，由直角$\Delta CFG$得$\overline{FG}=\sin 3\theta$。

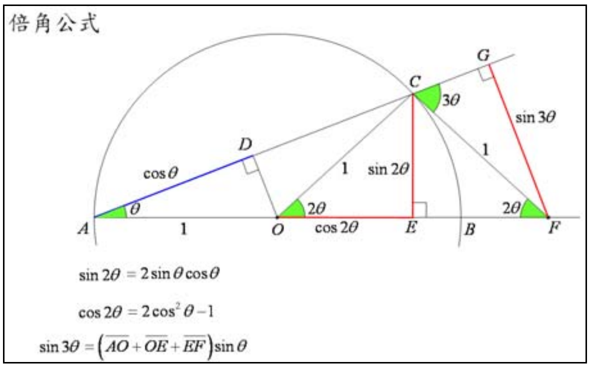

圖 5-2-7-23：由直角 ΔAFG 得

$$\sin 3\theta = \left(\overline{AO}+\overline{OE}+\overline{EF}\right)\sin\theta$$ 。

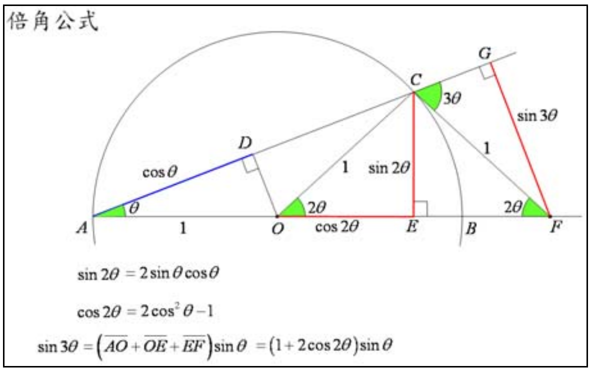

圖 5-2-7-24：化爲 $(1+2\cos 2\theta)\sin\theta$ 。

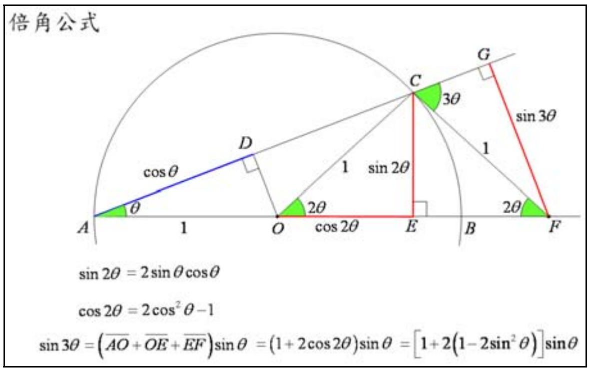

圖 5-2-7-25：化得 $\left[1+2\left(1-2\sin^2\theta\right)\right]\sin\theta$ 。

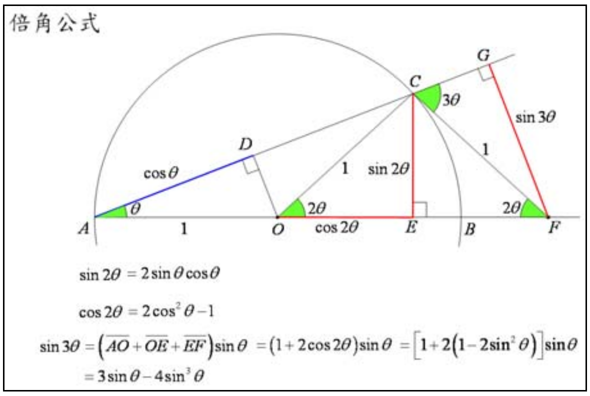

圖 5-2-7-26：整理得 $3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ 。

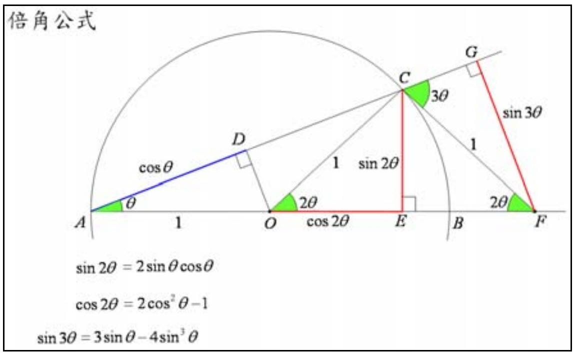

圖 5-2-7-27：將前三項消去，並將 $3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ 移動靠近 $\sin 3\theta$ ，得

。

圖 5-2-7-28：由直角 ΔCFG 得 $\overline{CG} = \cos 3\theta$ 。

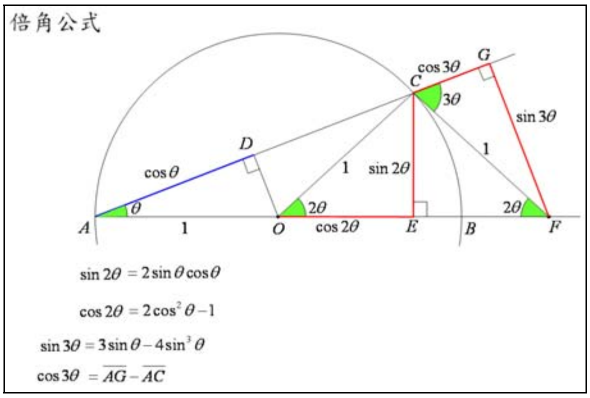

圖 5-2-7-29：顯示 $\cos 3\theta = \overline{AG} - \overline{AC}$ 。

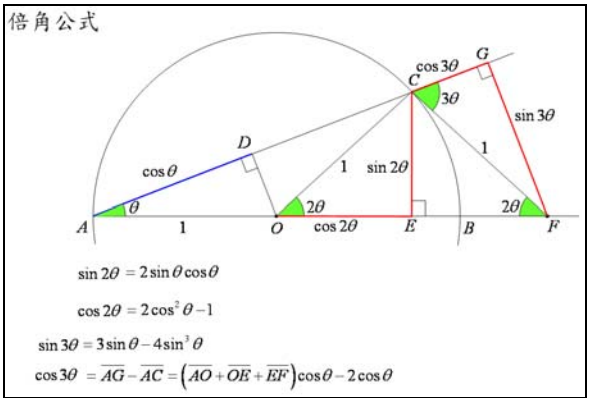

圖 5-2-7-30：由直角 ΔAFG 及 $\overline{AC} = 2\overline{AD}$ 得

$\left(\overline{AO} + \overline{OE} + \overline{EF}\right)\cos\theta - 2\cos\theta$ 。

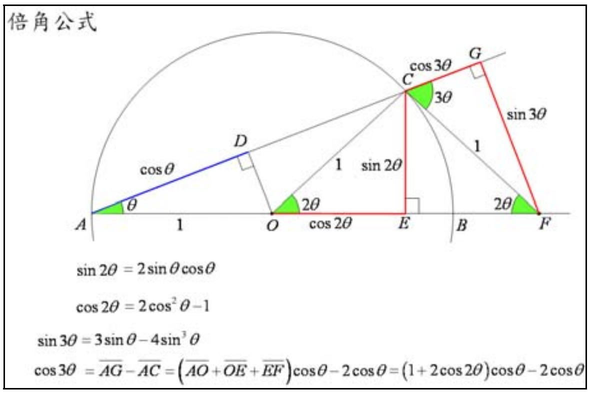

圖 5-2-7-31：化簡得

$\left(1 + 2\cos 2\theta\right)\cos\theta - 2\cos\theta$ 。

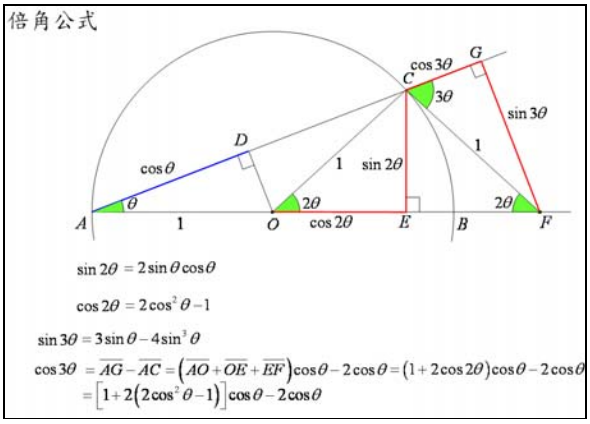

圖 5-2-7-32：再化得

$\left[1 + 2\left(2\cos^2\theta - 1\right)\right]\cos\theta - 2\cos\theta$ 。

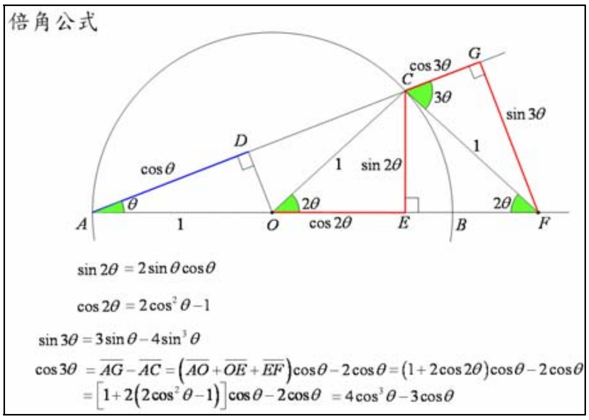

圖 5-2-7-33：整理得 $4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ 。

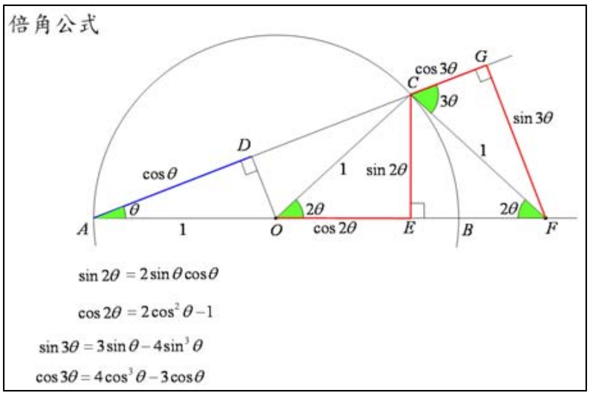

圖 5-2-7-34：消去中間各項，並將 $4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ 移動靠近 $\cos 3\theta$ ，得

$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ 。

八、$\sin 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$、$\cos 2\theta = \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$ 與 $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

本例是利用半圓及直角三角形來推導 $\sin 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$、$\cos 2\theta = \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$ 及 $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$，本例為李政豐等發表於科學教育月刊第 235 期的作品，在 PowerPoint 中的呈現方式如下列各圖所示(圖 5-2-8-1～圖 5-2-8-18)。

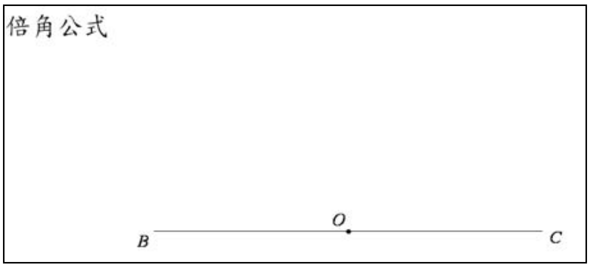

圖 5-2-8-1：$\overline{BC}$ 上，O 為中點。

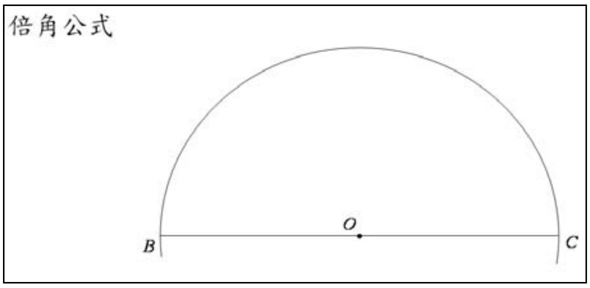

圖 5-2-8-2：以 O 為圓心，做半圓。

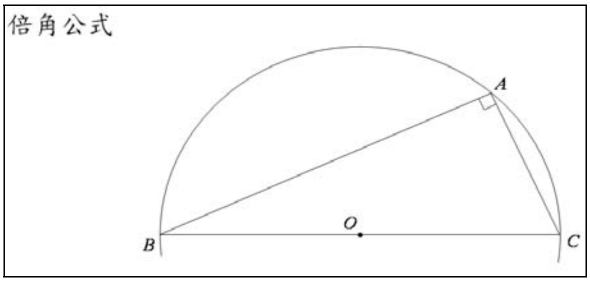

圖 5-2-8-3：半圓上一點 A，做二弦 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$，$\angle A$ 為直角。

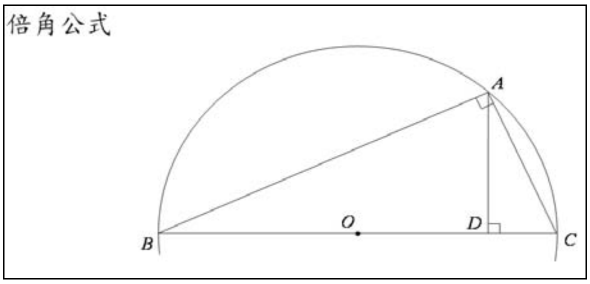

圖 5-2-8-4：做 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 於 D。

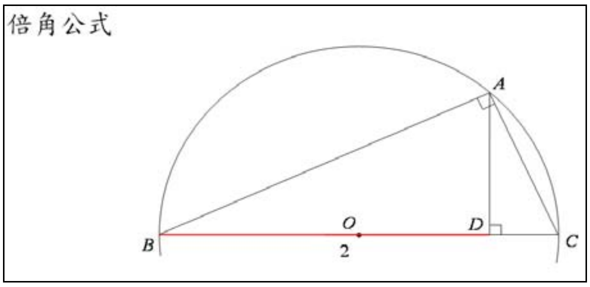

圖 5-2-8-5：令 $\overline{BD} = 2$。

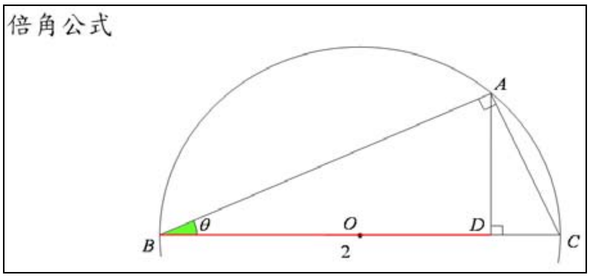

圖 5-2-8-6：設 $\angle ABD = \theta$。

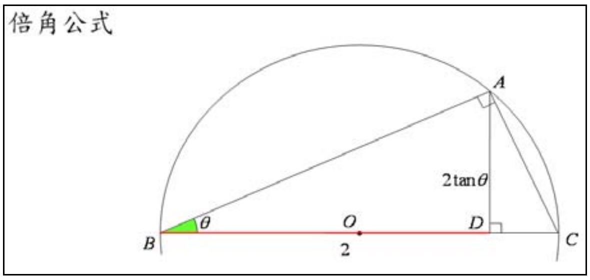

圖 5-2-8-7：得 $\overline{AD}=2\tan\theta$ 。

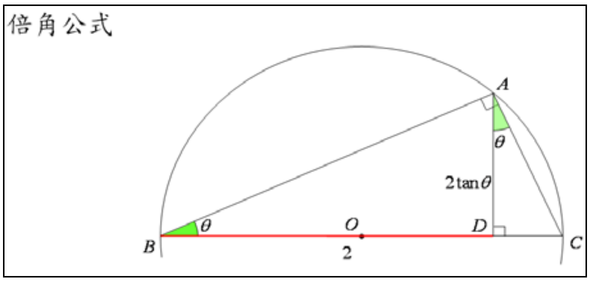

圖 5-2-8-8：由 $\Delta ACD \sim \Delta BCA$ 得 $\angle CAD=\theta$ 。

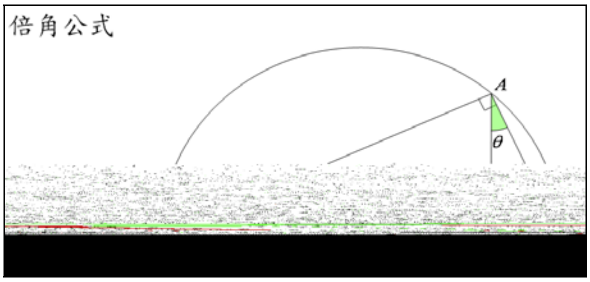

圖 5-2-8-10：得半徑 $\overline{BO}=1+\tan^2\theta$ 。

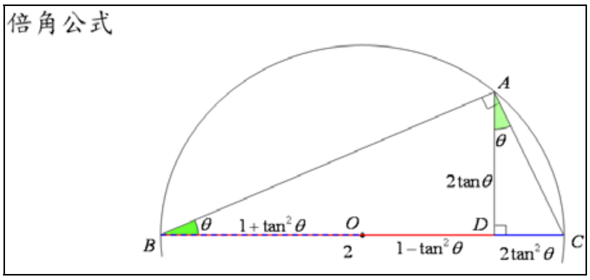

圖 5-2-8-11：得 $\overline{OD}=1-\tan^2\theta$ 。

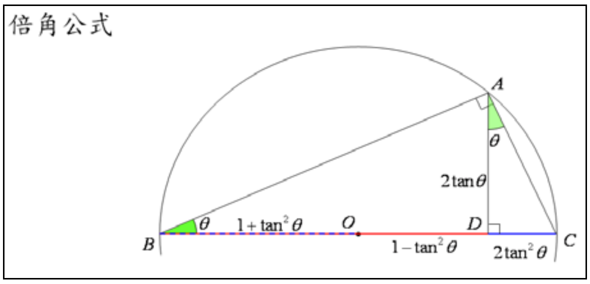

圖 5-2-8-12：將 $\overline{BD}$ 長為 2 消失。

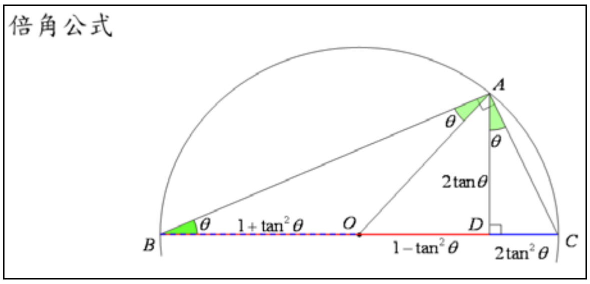

圖 5-2-8-13：做 $\overline{OA}$ ，得 $\angle BAO=\theta$ 。

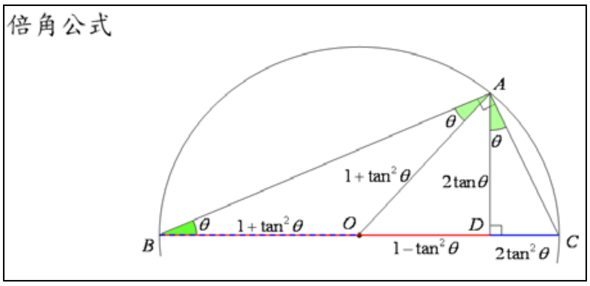

圖 5-2-8-14：半徑 $\overline{OA}=1+\tan^2\theta$ 。

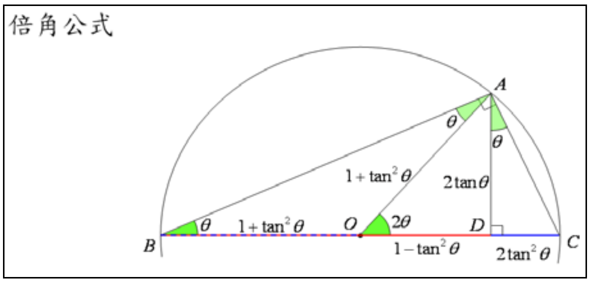

圖 5-2-8-15：由等腰 ΔAOB 外角得 $\angle AOD = 2\theta$ 。

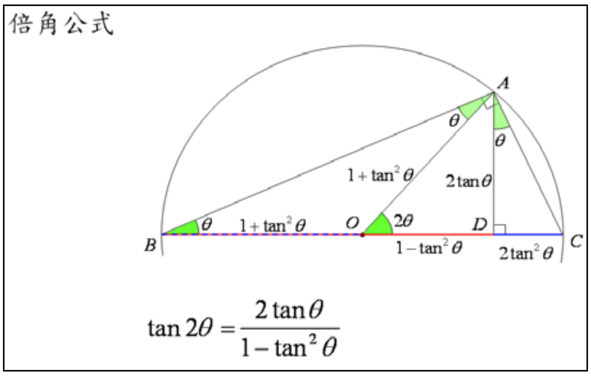

圖 5-2-8-16：由直角 ΔAOD 得

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \text{ 。}$$

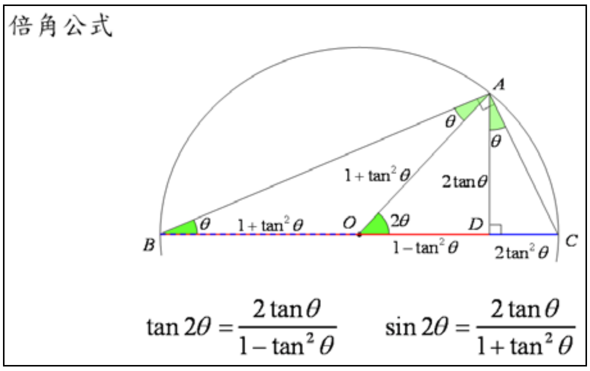

圖 5-2-8-17：得 $\sin 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$ 。

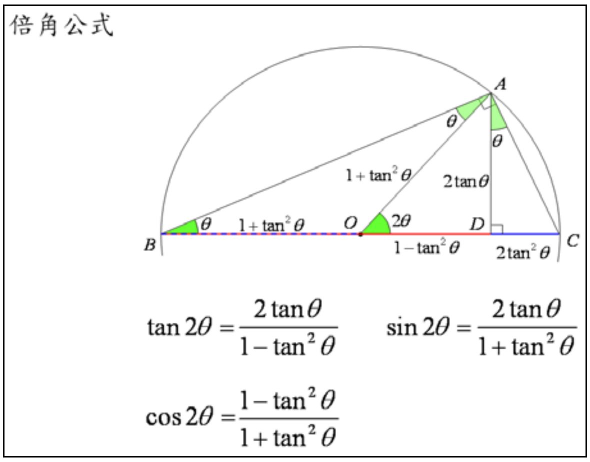

圖 5-2-8-18：再得 $\cos 2\theta = \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$ 。