第三節　半角公式

三角函數的半角公式與兩倍角公式其實是一體兩面的，其中$\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$、$\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$可由$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$公式所得，其過程如下：

$\because \cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$, 令$2\alpha=\theta\Rightarrow\alpha=\frac{\theta}{2}$

$\Rightarrow \cos\theta=1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\Rightarrow 2\sin^2\frac{\theta}{2}=1-\cos\theta$，其中的±由$\sin\frac{\theta}{2}$所決定；

$\Rightarrow \sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$

$\because \cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$, 令$2\alpha=\theta\Rightarrow\alpha=\frac{\theta}{2}$

$\Rightarrow \cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\Rightarrow 2\cos^2\frac{\theta}{2}=1+\cos\theta$，其中的±由$\cos\frac{\theta}{2}$所決定。

$\Rightarrow \cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$

而在課本中除了介紹前面兩個公式之外還會介紹當$\theta\neq n\pi$時$\tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$，而此一公式也是由基本定義式$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$得來，只是其中的「±」常會讓學生不知如何處理，然後經過適當的運算可得$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$兩種表達方式，其過程如下：

$$
\begin{aligned}
\tan\frac{\theta}{2}&=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\pm\frac{\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{1+\cos\theta}}\\
&=\pm\frac{\sqrt{1-\cos\theta}\sqrt{1+\cos\theta}}{\sqrt{1+\cos\theta}\sqrt{1+\cos\theta}}=\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\sqrt{(1+\cos\theta)^2}}=\pm\frac{\sqrt{\sin^2\theta}}{|1+\cos\theta|}=\pm\frac{|\sin\theta|}{1+\cos\theta}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}\\
&=\pm\frac{\sqrt{1-\cos\theta}\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{1+\cos\theta}\sqrt{1-\cos\theta}}=\pm\frac{\sqrt{(1-\cos\theta)^2}}{\sqrt{(1-\cos^2\theta)}}=\pm\frac{|1-\cos\theta|}{\sqrt{\sin^2\theta}}=\pm\frac{(1-\cos\theta)}{|\sin\theta|}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}
\end{aligned}
$$

此時$\tan\frac{\theta}{2}$與$\sin\theta$同號。

但在這此本文將利用半圓上的圓心角為θ，來推導正切函數的半角公式$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$，本例是利用圓內兩直角三角形來推導此半角公式，本例取材自

Proof Without Words 第 35 頁，作者 R. J. Walker(1993)，在 PowerPoint 中的呈現方式如下列各圖所示(圖 5-3-1～圖 5-3-15)。

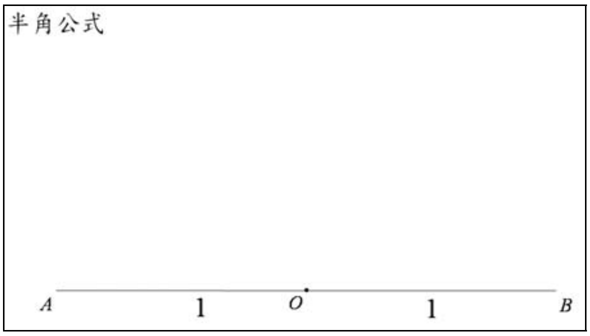

圖 5-3-1：平面上 $\overline{AB}$ 中點 O，滿足 $\overline{OA}=\overline{OB}=1$。

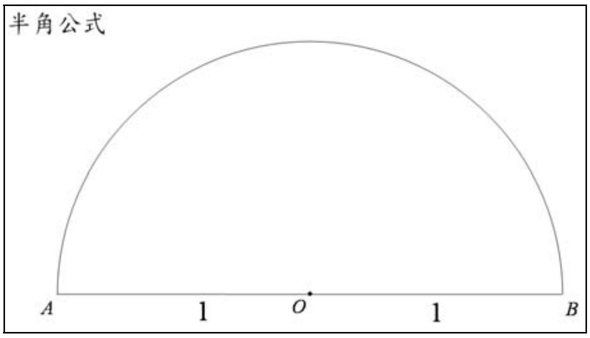

圖 5-3-2：以 O 為圓心，做半圓。

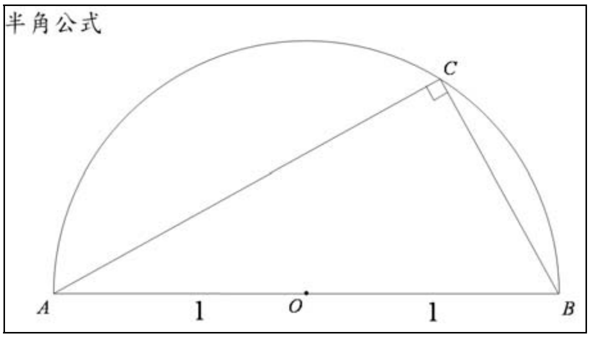

圖 5-3-3：半圓上任一點 C，連二弦 $\overline{AC}, \overline{BC}$，且 $\angle C = 90^\circ$。

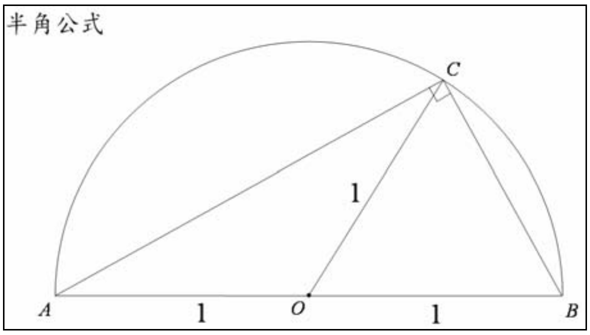

圖 5-3-4：連半徑 $\overline{OC}$。

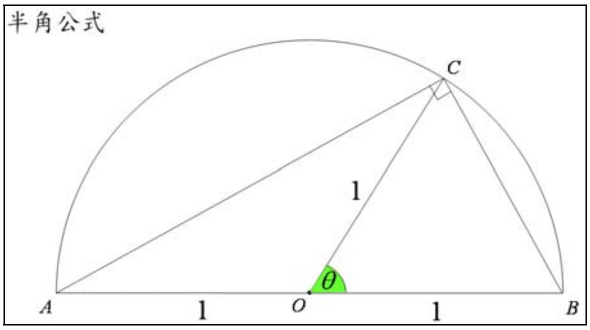

圖 5-3-5：設圓心角 $\angle BOC = \theta$。

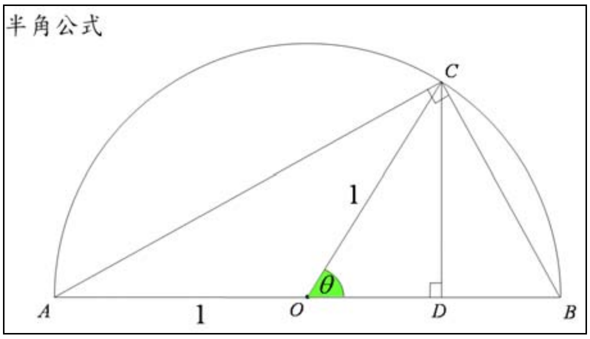

圖 5-3-6：做 $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ 交 $\overline{AB}$ 於 D。

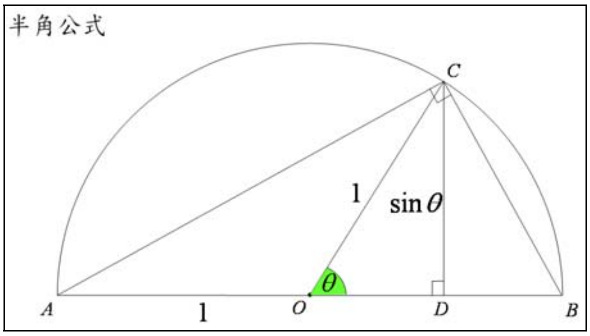

圖 5-3-7：由直角 ΔOCD 得 $\overline{CD}=\sin\theta$ 。

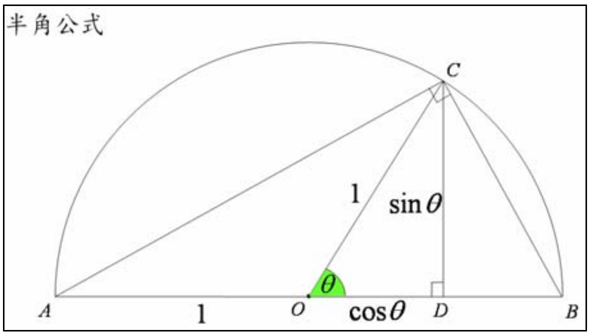

圖 5-3-8：得 $\overline{OD}=\cos\theta$ 。

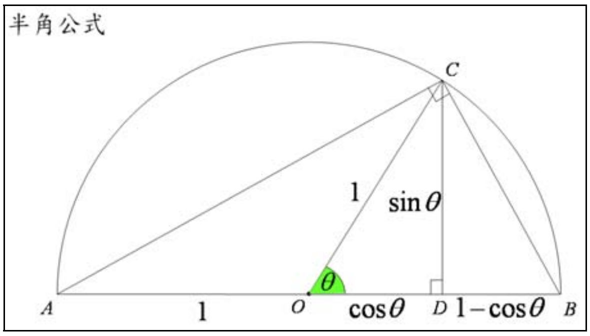

圖 5-3-9：得 $\overline{BD}=1-\cos\theta$ 。

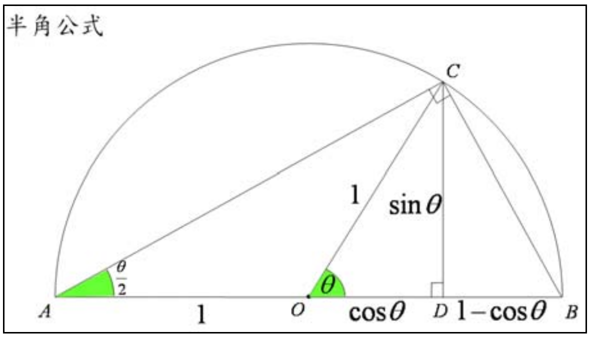

圖 5-3-10：由等腰 ΔOAC 中外角為 θ 得 $\angle BAC=\dfrac{\theta}{2}$ 。

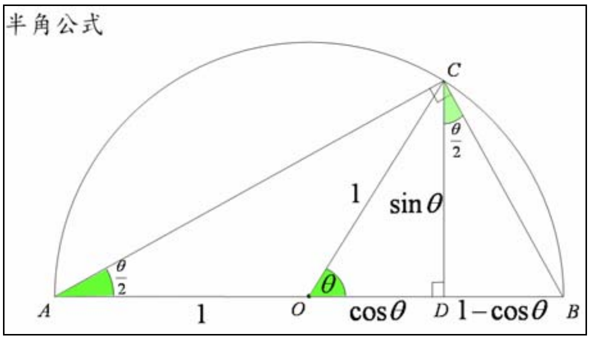

圖 5-3-11：$\because \Delta BCD\sim\Delta BAC$ 再得 $\angle BCD=\dfrac{\theta}{2}$ 。。

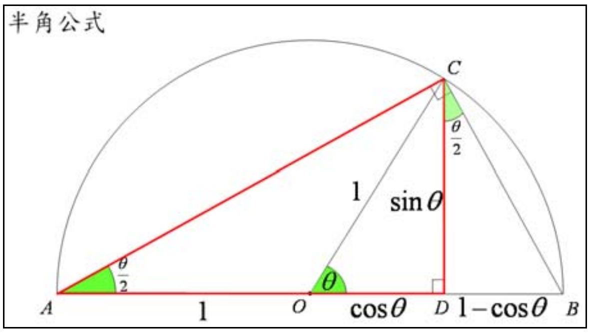

圖 5-3-12：標示 ΔACD 。

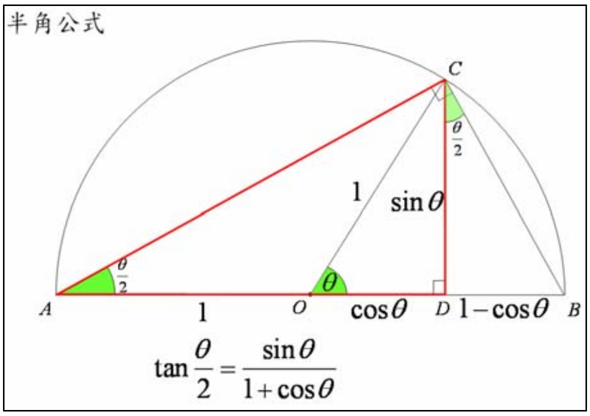

圖 5-3-13：得 $\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$ 。

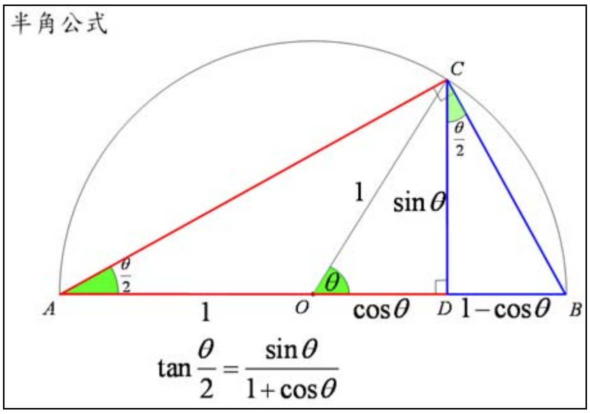

圖 5-3-14：標示 ΔBCD 。

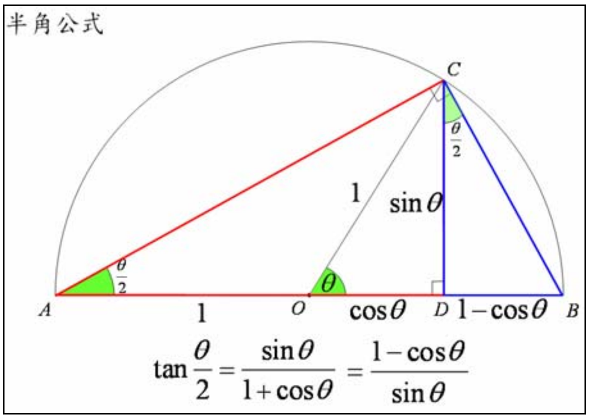

圖 5-3-15：得 $\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$ 。