第六章　和積化差

本章將介紹三角函數中的和差化積公式，第一節將介紹和化積的公式，第二節介紹差化積的公式，雖然和差化積的公式是由和角公式推導而得，但其過程並不是很容易，而且不容易記住，本文期望學習者透過圖形的幫助與了解，不僅對和差化積的公式能有所了解，也能進而熟悉公式。

第一節　和化積公式的動態圖說證明

在高中課本中是利用和角公式，先介紹積化和差公式，再利用積化和差公式推導和差化積公式，其過程如下：

由 $\begin{cases} \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\cdots\cdots(1) \\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\cdots\cdots(2) \\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\cdots\cdots(3) \\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cdots\cdots(4) \end{cases}$ 四個和角公式中

$(1)+(2)$ 得：$2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\cdots\cdots\cdots(一)$
$(1)-(2)$ 得：$2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\cdots\cdots\cdots(二)$
$(3)+(4)$ 得：$2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\cdots\cdots\cdots(三)$
$(4)-(3)$ 得：$2\sin\alpha\sin\beta=-\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\cdots\cdots\cdots(四)$ ；

再令 $\alpha+\beta=x$；$\alpha-\beta=y\Rightarrow\dfrac{x+y}{2}=\alpha$；$\dfrac{x-y}{2}=\beta$ 代入上列四個式子可得

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$
$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$
。

雖然公式的推導過程不是很困難，可是根據研究者多年經驗，學習者對這二組八個公式有相當程度的畏懼，而且推導過程對學習者而言似乎有很大的障礙，尤其是對想要記公式的同學而言，它們很相似很難記住。

本節將介紹正餘弦函數的和化積公式，在此設計了二個例子，未來的研究者可以深入探討、比較，與傳統教學上的差異、優劣。

一、$\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}=\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 與 $\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{2}=\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

本例是利用平面直角坐標系上的單位圓，利用圓上二點與原點的連線，應用坐標與長度的關係再加上所形成的直角三角形，得到正弦的和化積公式：$\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}=\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 與餘弦的和化積公式：$\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{2}=\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$。本例是 Proof Without Words Ⅱ中第 50 頁的例子，作者爲 Sidney H. Kung(2000)，在 PowerPoint 中的呈現方式如下列各圖所示(圖 6-1-1-1～圖 6-1-1-23)。

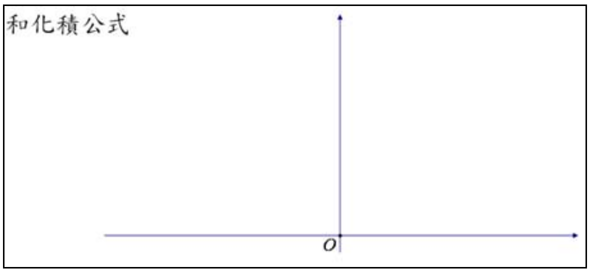

圖 6-1-1-1：直角座標中。

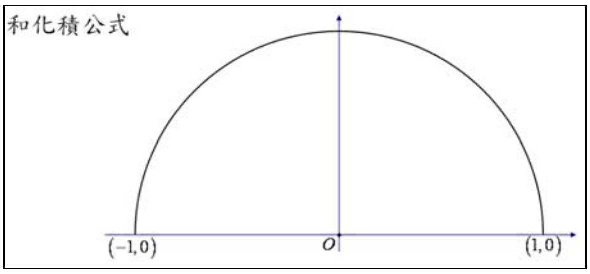

圖 6-1-1-2：以原點爲圓心，1 爲半徑做一半圓。

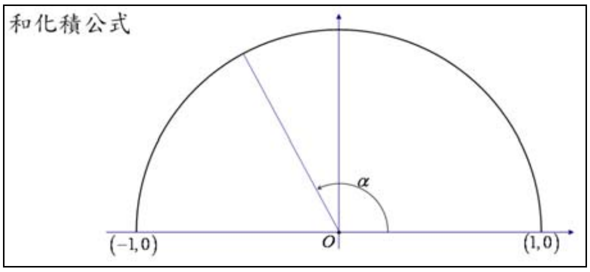

圖 6-1-1-3：做一有向角 α 。

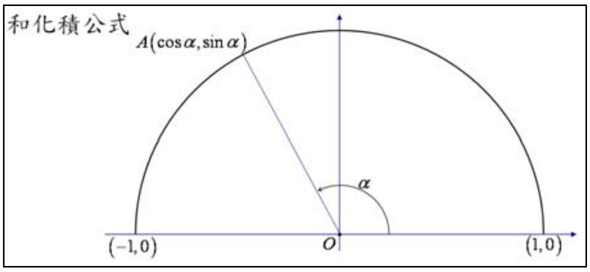

圖 6-1-1-4：交圓於 $A(\cos\alpha,\sin\alpha)$。

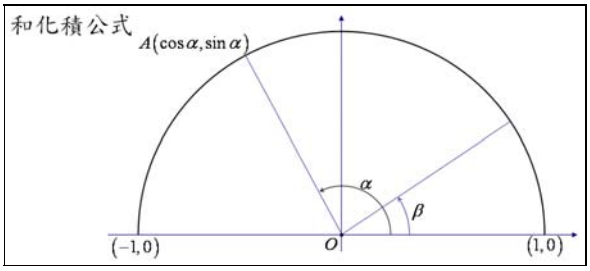

圖 6-1-1-5：再做另一有向角 β 。

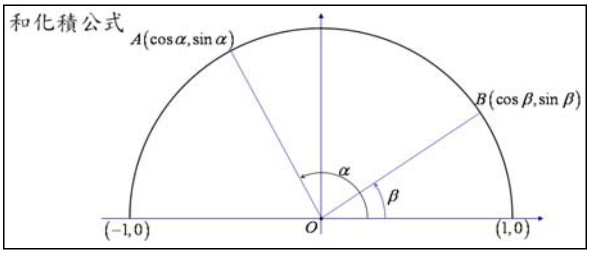

圖 6-1-1-6：交圓於 $B(\cos\beta,\sin\beta)$。

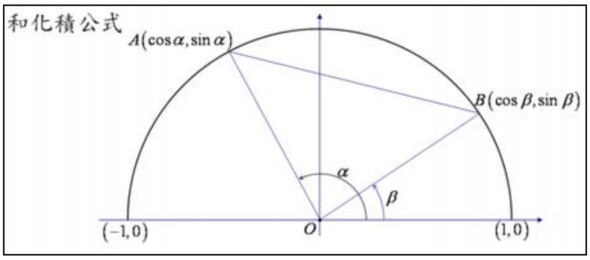

圖 6-1-1-7：連弦 $\overline{AB}$ 。

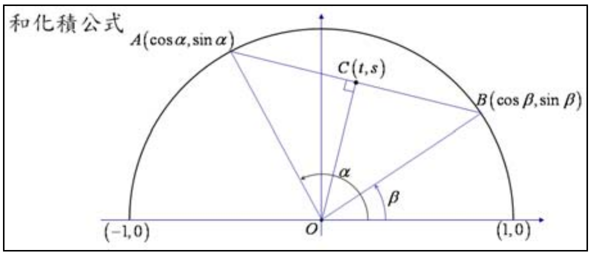

圖 6-1-1-8：做 $\overline{OC}\perp\overline{AB}$ 於 $C(s,t)$。

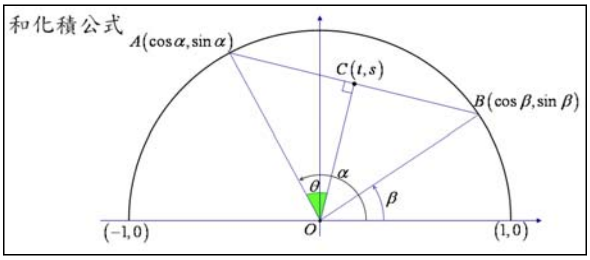

圖 6-1-1-9：標示 $\angle AOC=\theta$ 。

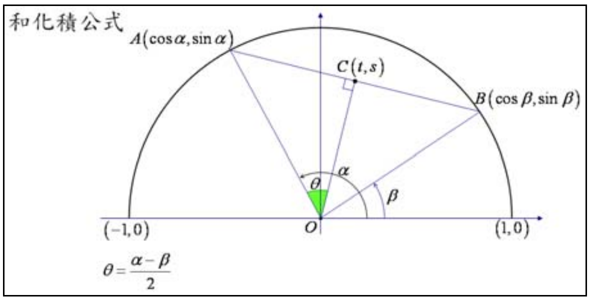

圖 6-1-1-10：得 $\theta=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ 。。

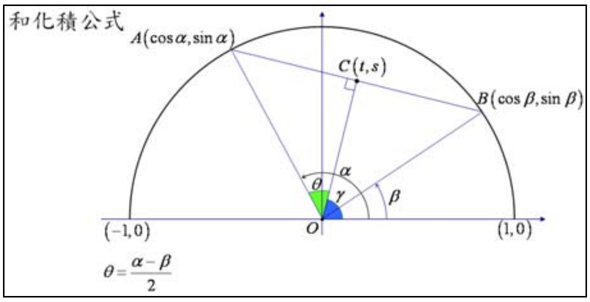

圖 6-1-1-11：再標示角 γ 。

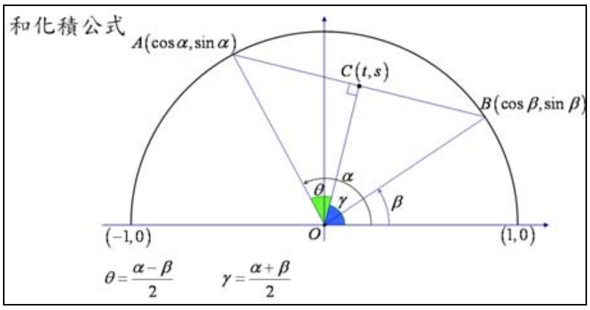

圖 6-1-1-12：得 $\gamma=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 。

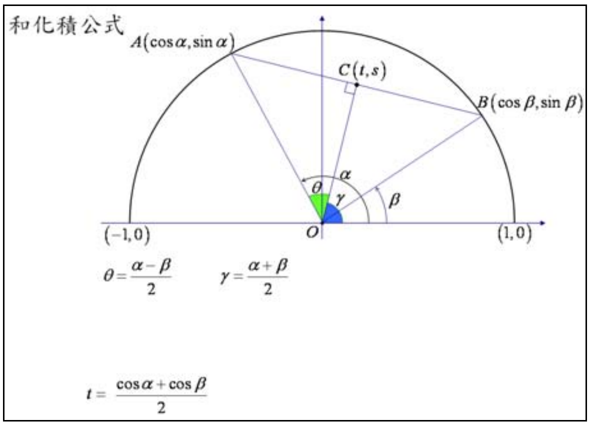

圖 6-1-1-13：得 $t=\dfrac{\cos\alpha+\cos\beta}{2}$ 。

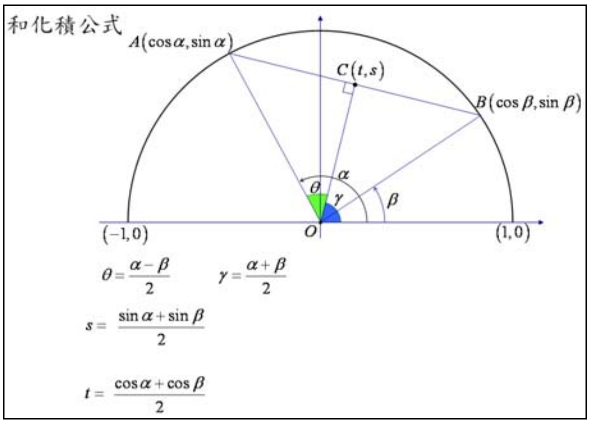

圖 6-1-1-14：再得 $s=\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}$

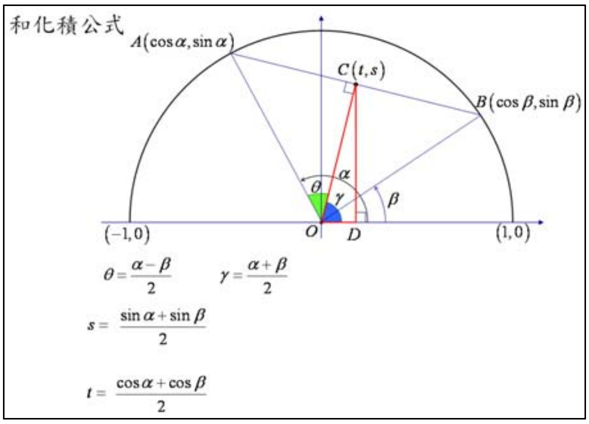

圖 6-1-1-15：標示直角 ΔOCD 。

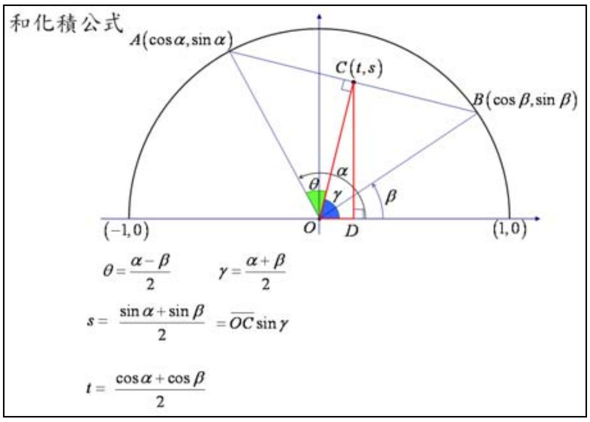

圖 6-1-1-16：得 $s=\overline{OC}\sin\gamma$ 。

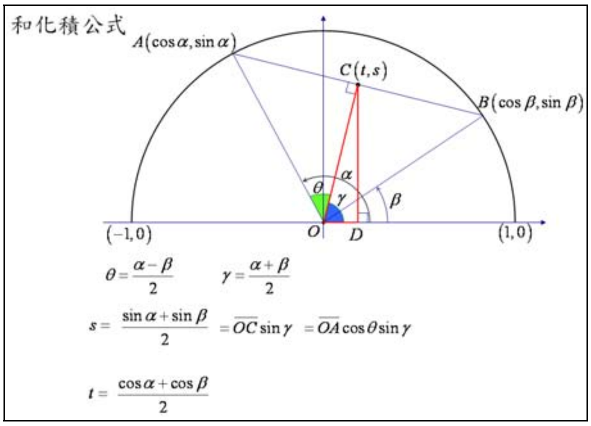

圖 6-1-1-17：得 $=\overline{OA}\cos\theta\sin\gamma$ 。

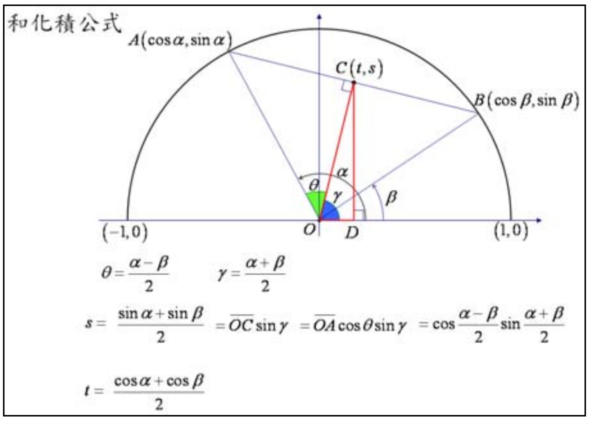

圖 6-1-1-18：得 $=\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 。

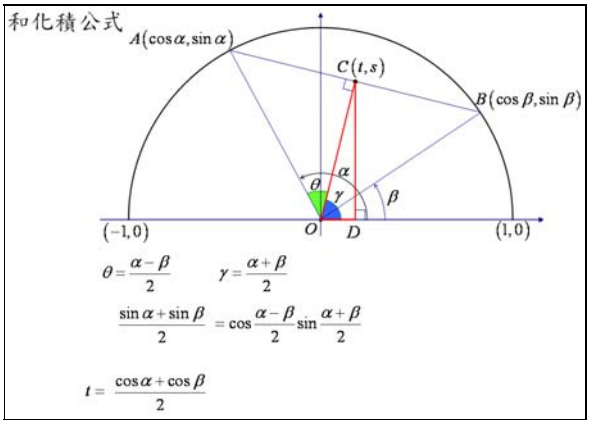

圖 6-1-1-19：將中間項消失，並將

$=\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 靠近。

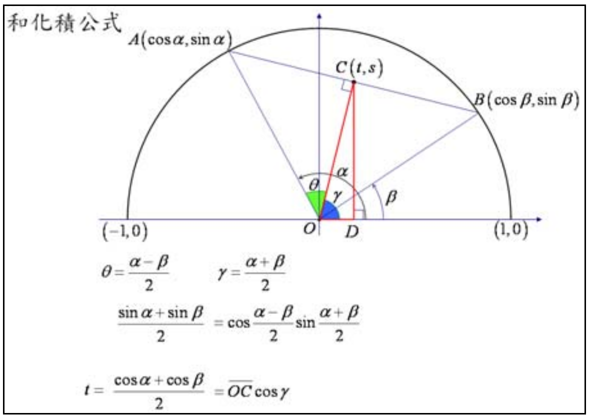

圖 6-1-1-20：得 $t=\overline{OC}\cos\gamma$ 。

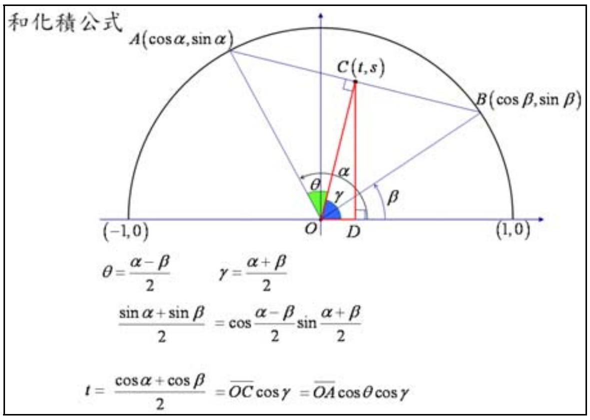

圖 6-1-1-21：得 $=\overline{OA}\cos\theta\cos\gamma$ 。

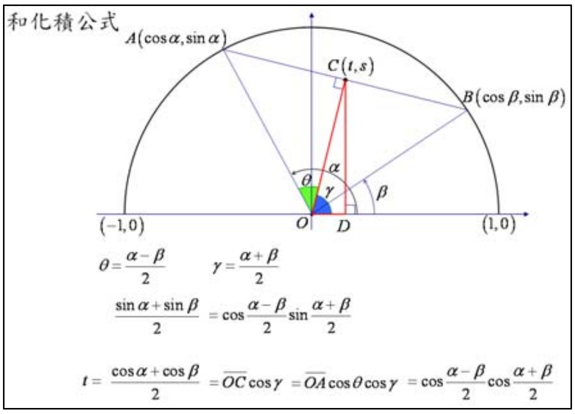

圖 6-1-1-22：得 $=\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 。

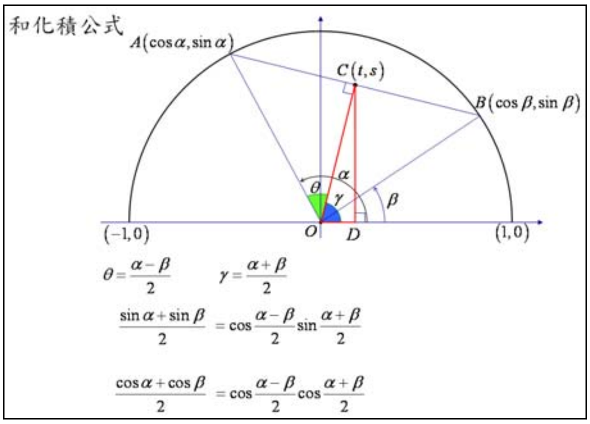

圖 6-1-1-23：將中間項消失，並將 $=\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 靠近。

二、 $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 與 $\sin\alpha+\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

本例是由二個斜邊爲 1 的直角三角形，構成一個大的直角三角形所推導而得餘弦的和化積公式： $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 與正弦的和化積公式： $\sin\alpha+\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 。本例是 Proof Without Words Ⅱ中第 51 頁的例子，作者爲 Yokio Kobayashi(2000)，在 PowerPoint 中的呈現方式如下列各圖所示(圖 6-1-2-1～圖 6-1-2-25)。

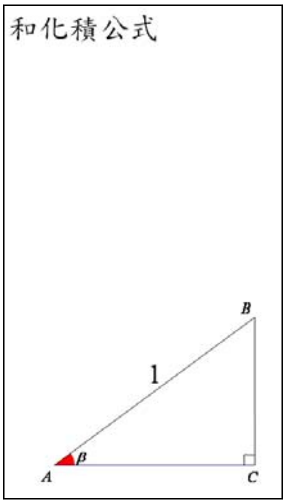

圖 6-1-2-1：任一直角 ΔABC 中 $\overline{AB}=1$、$\angle A=\beta$。

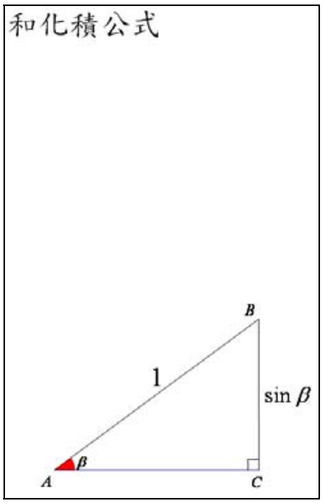

圖 6-1-2-2：得 $\overline{BC}=\sin\beta$ 。

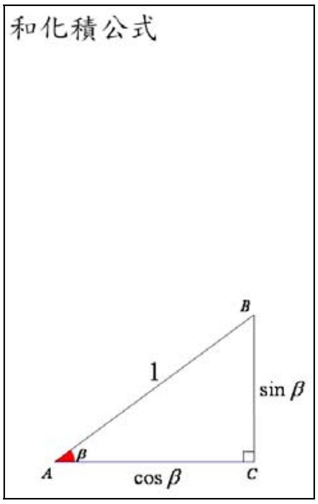

圖 6-1-2-3：再得 $\overline{AC}=\cos\beta$ 。。

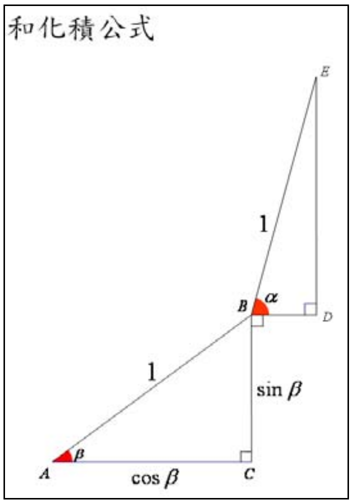

圖 6-1-2-4：作直角 ΔBDE ，斜邊 $\overline{BE}=1$、$\angle B=\alpha$ ，且 $\overline{BC}\perp\overline{BD}$ 。

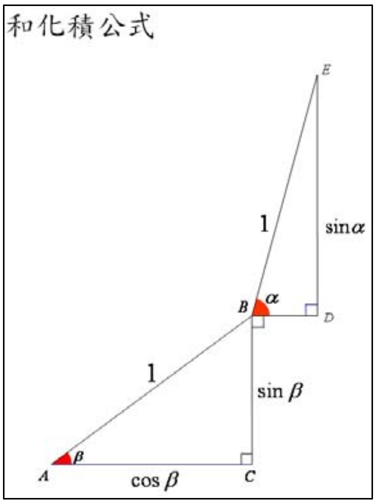

圖 6-1-2-5：得 $\overline{ED}=\sin\alpha$ 。

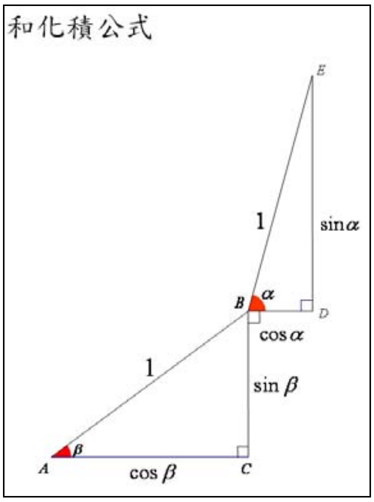

圖 6-1-2-6：再得 $\overline{BD}=\cos\alpha$ 。

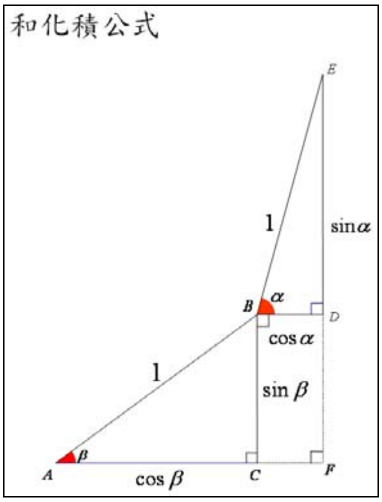

圖 6-1-2-7：延長 $\overline{AC}$, $\overline{ED}$ 交於 F ，得矩形 $BCFD$。

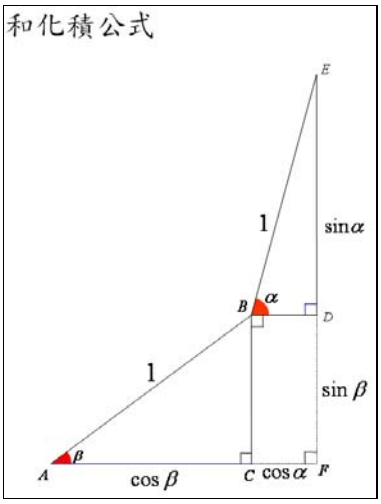

圖 6-1-2-8：得 $\overline{CF}=\cos\alpha$ 、 $\overline{DF}=\sin\beta$ 。

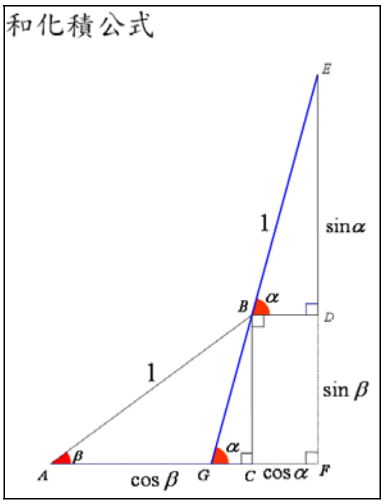

圖 6-1-2-9：延長 $\overline{EB}$ 交 $\overline{AF}$ 於 G ，得

$\angle BGC=\alpha$ 。

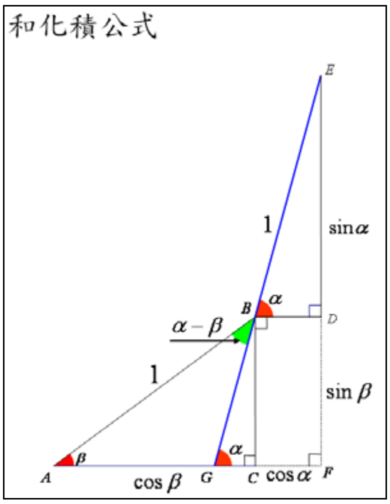

圖 6-1-2-10：得 $\angle ABG=\alpha-\beta$ 。

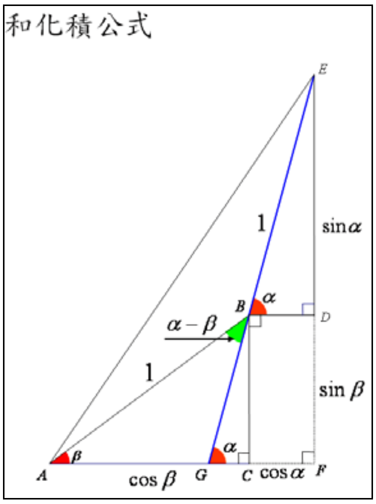

圖 6-1-2-11：連 $\overline{AE}$ 。

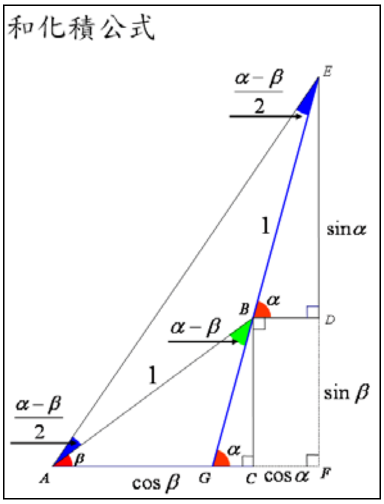

圖 6-1-2-12：得 $\angle AEB = \angle EAB = \dfrac{\alpha-\beta}{2}$ 。

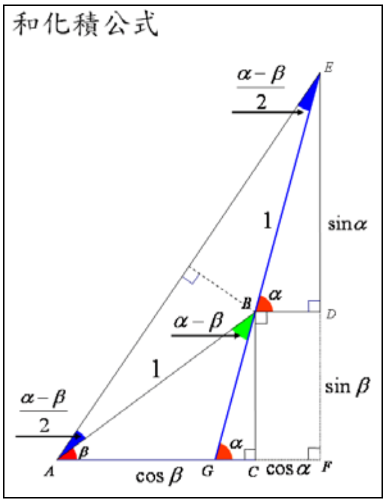

圖 6-1-2-13：做 $\overline{AE}$ 中垂線，得二直角Δ 。

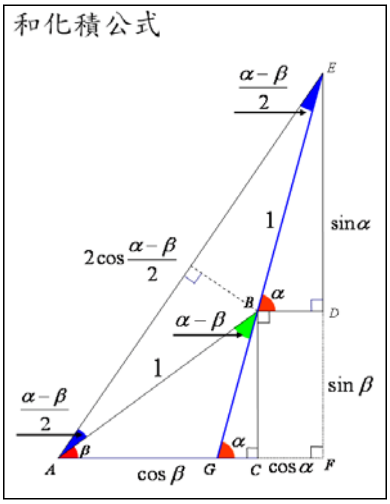

圖 6-1-2-14：得 $\overline{AE} = 2\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ 。

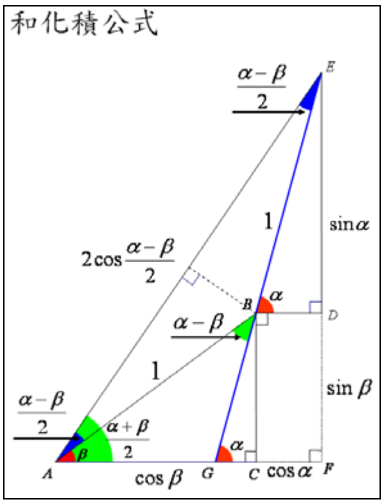

圖 6-1-2-15：得 $\angle EAF = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 。

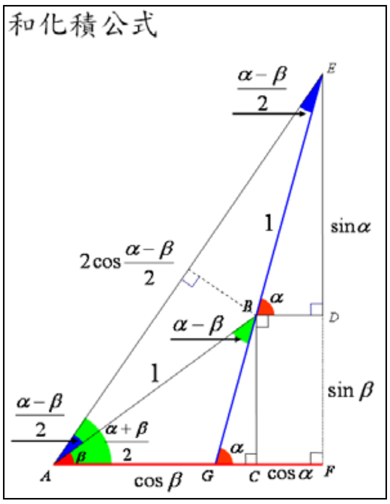

圖 6-1-2-16：標示 $\overline{AF}$ 。

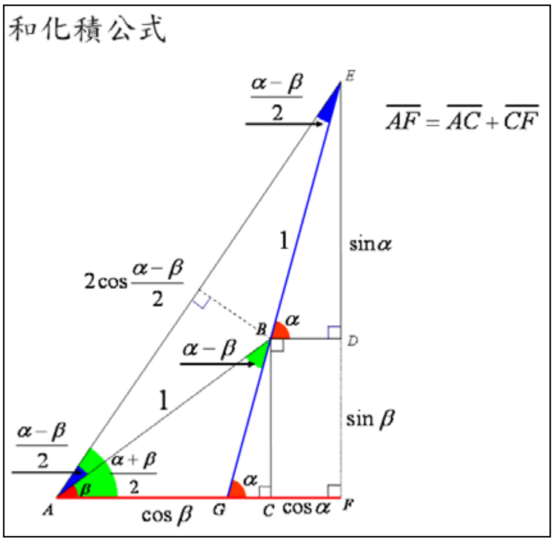

圖 6-1-2-17：顯示 $\overline{AF}=\overline{AC}+\overline{CF}$ 。

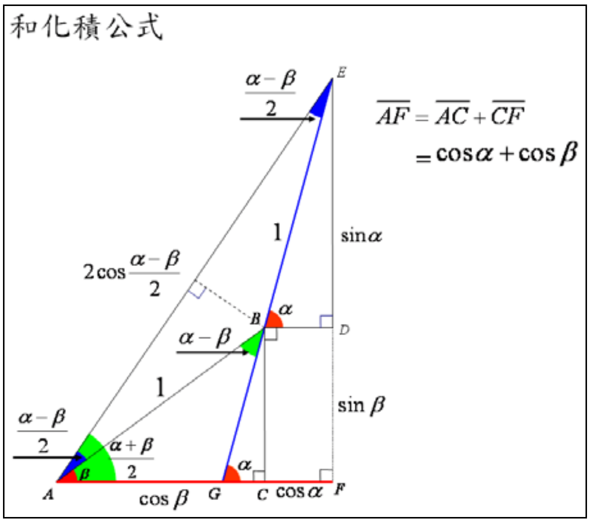

圖 6-1-2-18：顯示$=\cos\alpha+\cos\beta$ 。

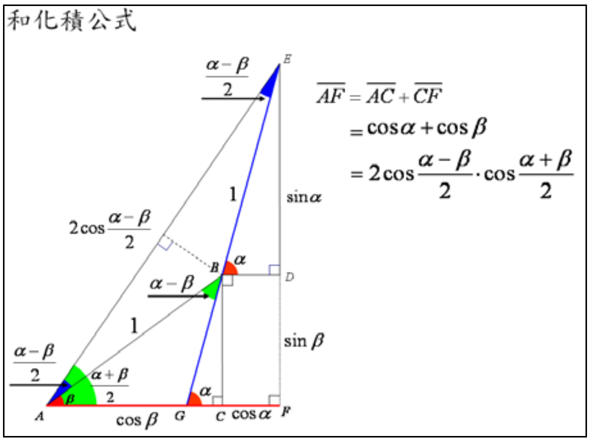

圖 6-1-2-19：得$=2\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 。

註：$\overline{AF}=\overline{AE}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 。

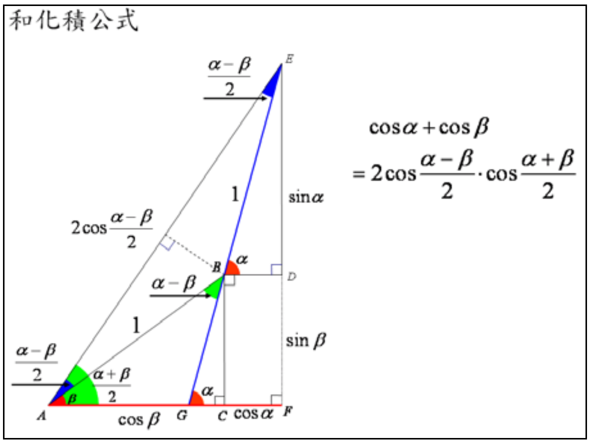

圖 6-1-2-20：將 $\overline{AF}=\overline{AC}+\overline{CF}$ 消失。。

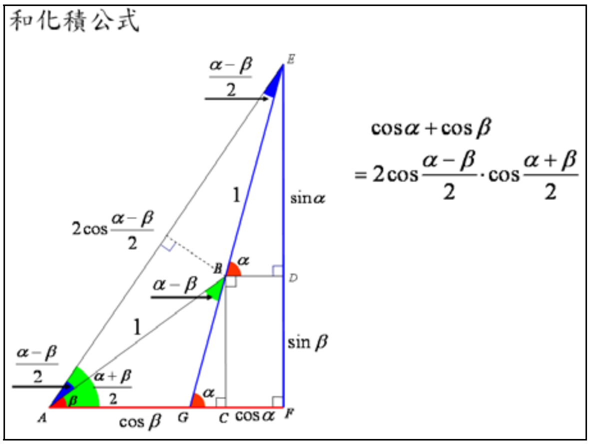

圖 6-1-2-21：標示 $\overline{EF}$ 。

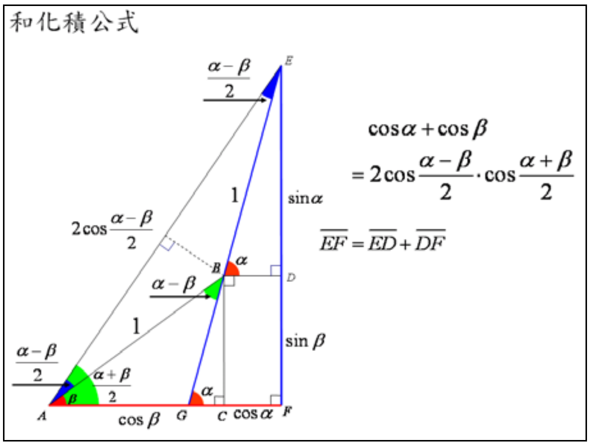

圖 6-1-2-22：顯示 $\overline{EF}=\overline{ED}+\overline{DF}$ 。

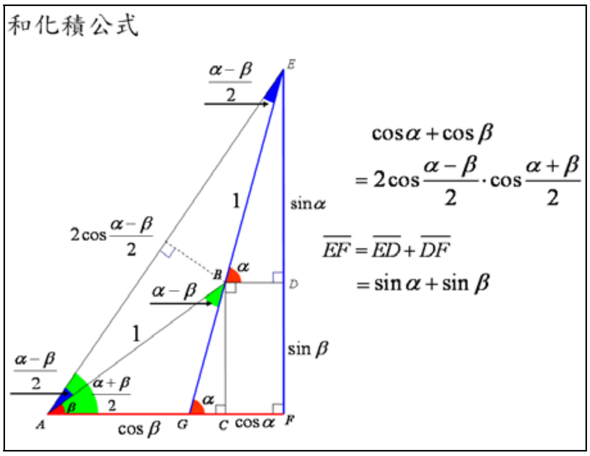

圖 6-1-2-23：顯示$=\sin\alpha+\sin\beta$ 。

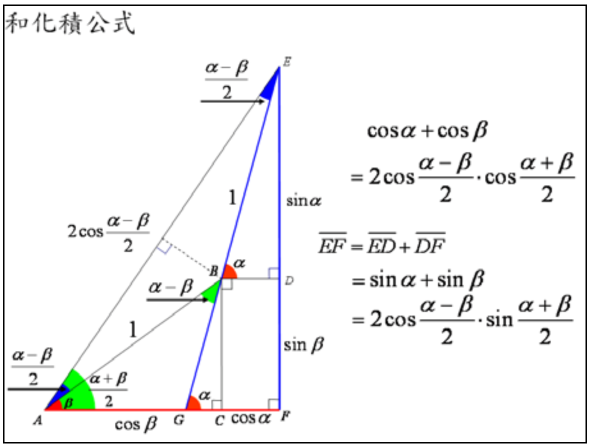

圖 6-1-2-24：得$=2\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 。

註：$\overline{EF}=\overline{AE}\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 。

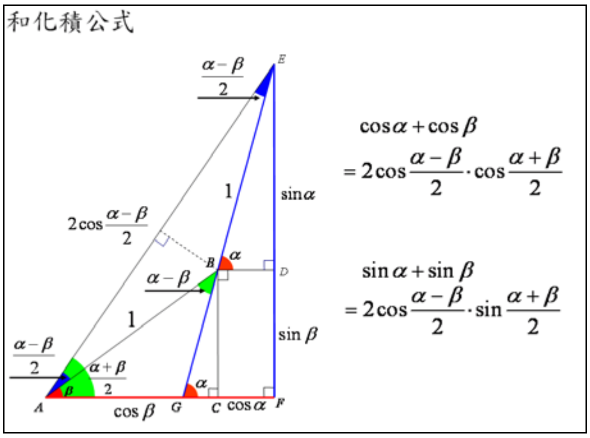

圖 6-1-2-25：將$\overline{EF}=\overline{ED}+\overline{DF}$ 消失。

第二節　差化積公式的動態圖說證明

本節將介紹正餘弦函數的差化積公式，在此同樣設計了二個例子，未來的研究者可以探討、比較，與傳統教學上的差異、優劣。

一、$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$與$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$

本例是利用平面直角坐標系上的單位圓，利用圓上二點與原點的連線，應用坐標與長度的關係再加上所形成的直角三角形，得到正弦的差化積公式：

$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$與餘弦的差化積公式：$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$。

本例是 Proof Without Words Ⅱ中第 52 頁的例子，作者為 Sidney H. Kung(2000)，在 PowerPoint 中的呈現方式如下列各圖(圖 6-2-1-1 到圖 6-2-1-28)。

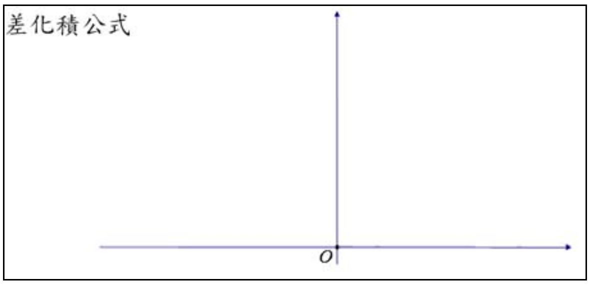

圖 6-2-1-1：直角座標中。

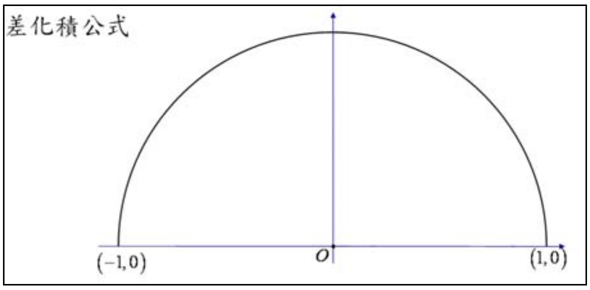

圖 6-2-1-2：以原點為圓心，1 為半徑做一半圓。

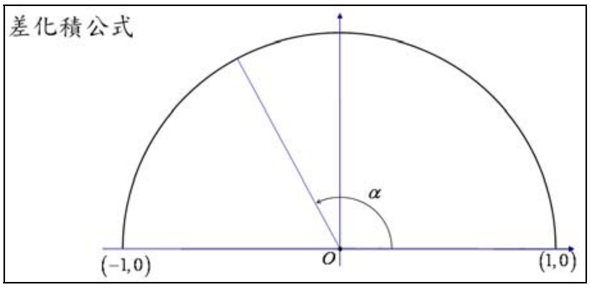

圖 6-2-1-3：做一有向角α。

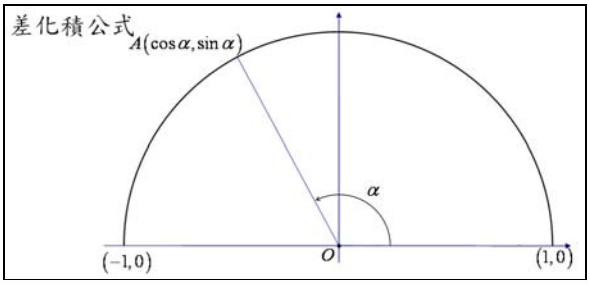

圖 6-2-1-4：交圓於$A(\cos\alpha,\sin\alpha)$。

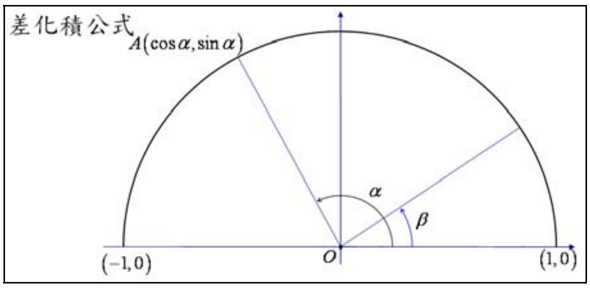

圖 6-2-1-5：再做另一有向角β。

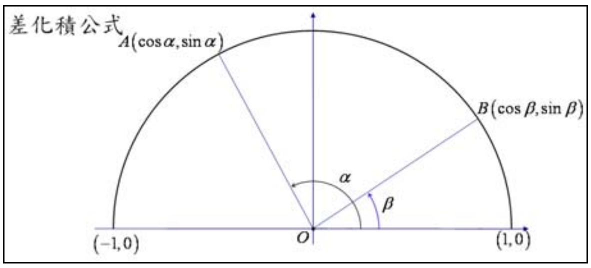

圖 6-2-1-6：交圓於$B(\cos\beta,\sin\beta)$。

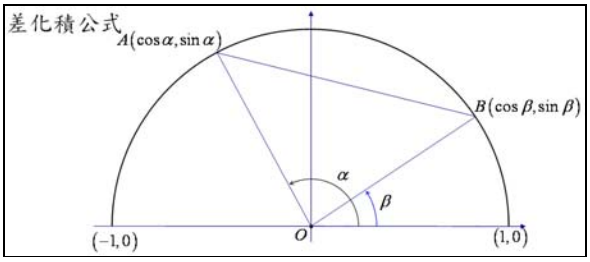

圖 6-2-1-7：連弦 $\overline{AB}$ 。

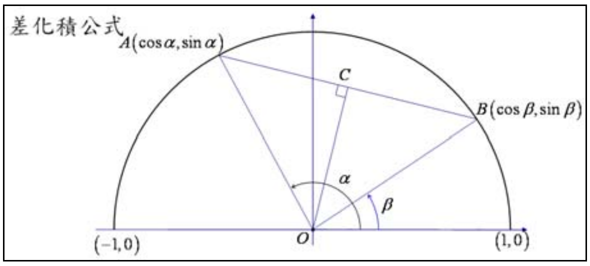

圖 6-2-1-8：做 $\overline{OC}\perp\overline{AB}$ 於 C。

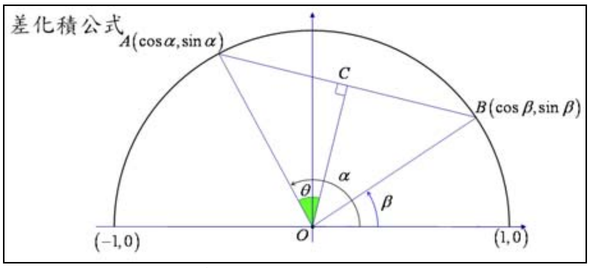

圖 6-2-1-9：標示角 θ。

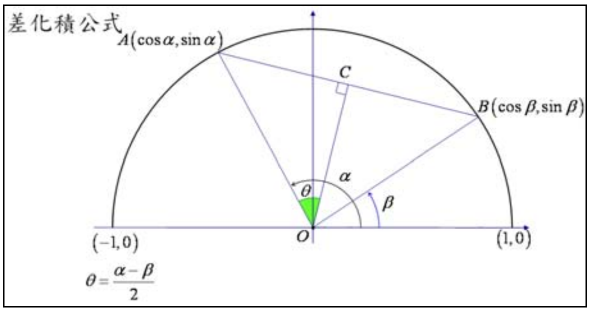

圖 6-2-1-10：得 $\theta=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ 。

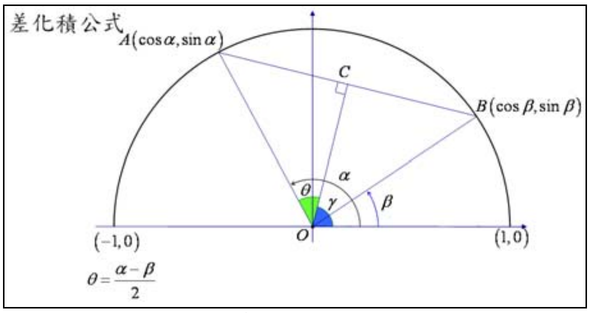

圖 6-2-1-11：再標示角 γ 。

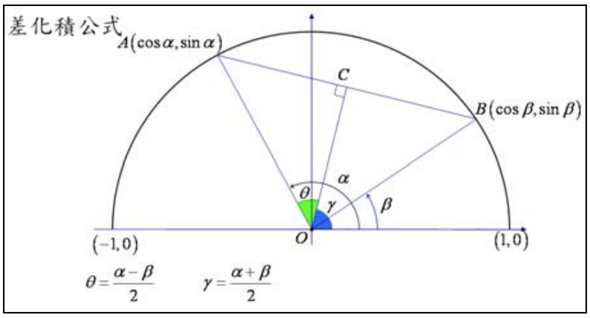

圖 6-2-1-12：得 $\gamma=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 。

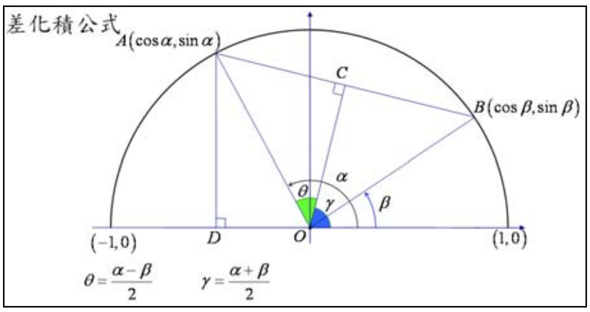

圖 6-2-1-13：做 $\overline{AD}$ 垂直直徑於 D。

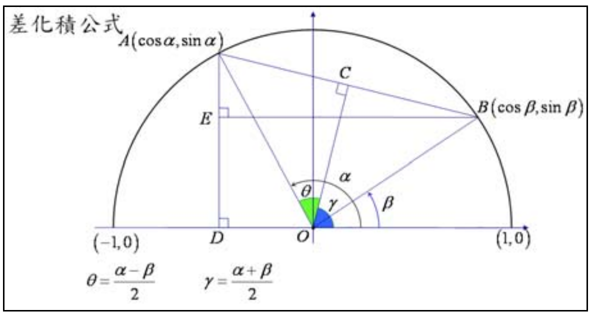

圖 6-2-1-14：做 $\overline{BE}\perp\overline{AD}$ 於 D。

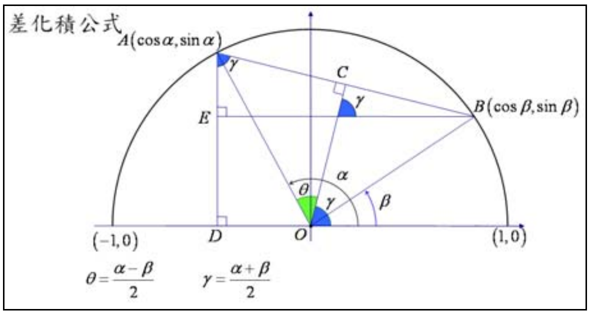

圖 6-2-1-15：標示兩角皆爲γ 。

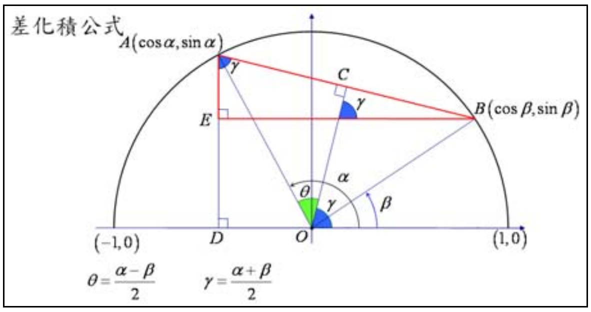

圖 6-2-1-16：標示直角ΔABE 。

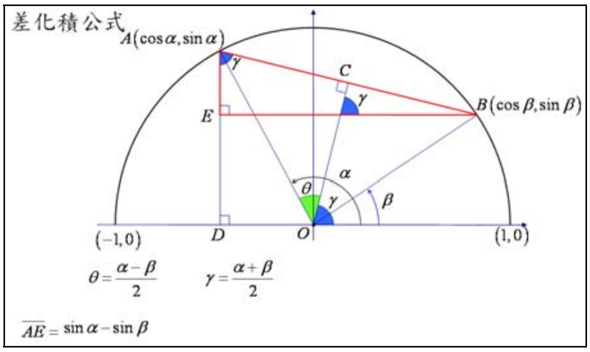

圖 6-2-1-17：得 $\overline{AE}=\sin\alpha-\sin\beta$ 。

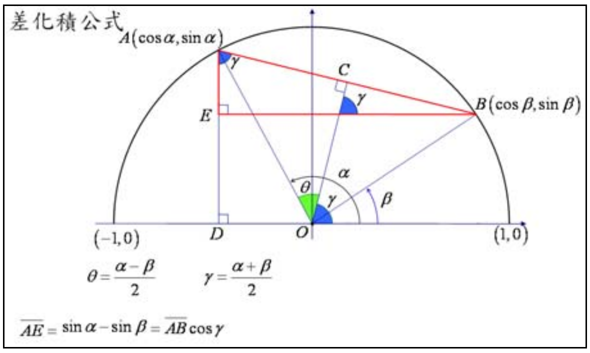

圖 6-2-1-18：得$=\overline{AB}\cos\gamma$ 。

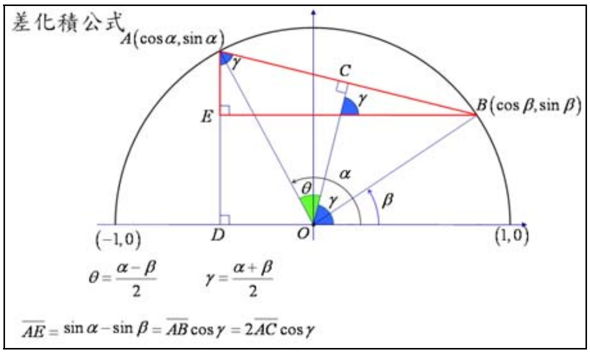

圖 6-2-1-19：得$=2\overline{AC}\cos\gamma$ 。

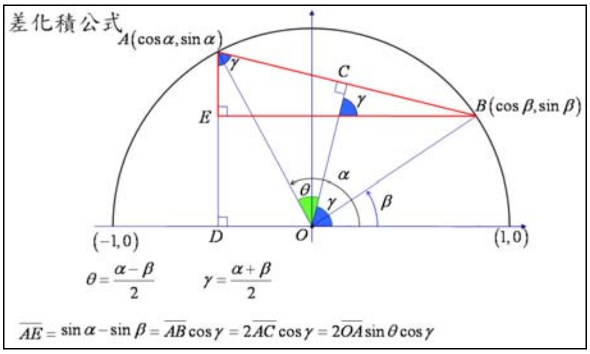

圖 6-2-1-20：得$=2\overline{OA}\sin\theta\cos\gamma$ 。

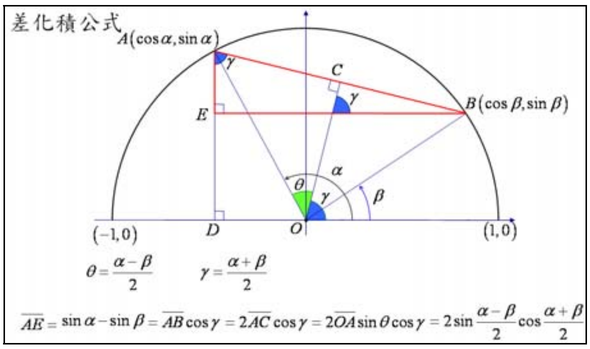

圖 6-2-1-21：得$=2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 。

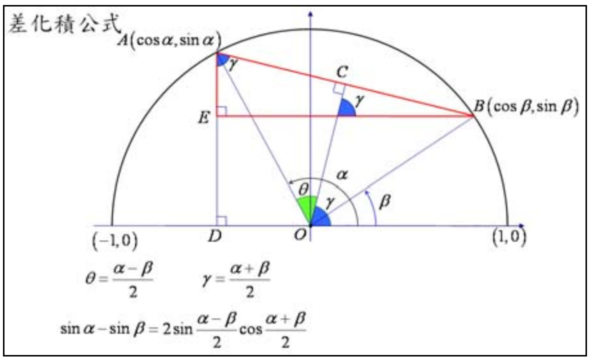

圖 6-2-1-22：將 $\overline{AE}=$及中間項消失，並將 $=2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$靠近。

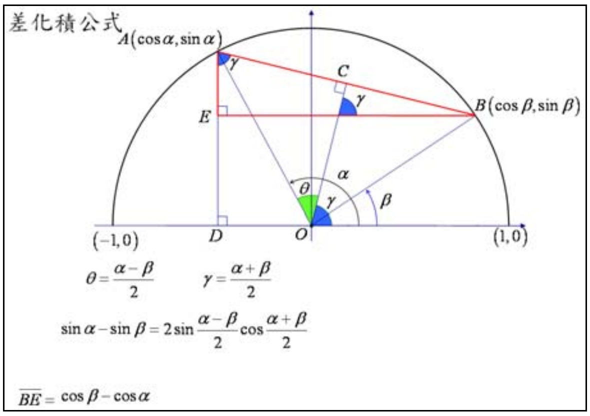

圖 6-2-1-23：得 $\overline{BE}=\cos\beta-\cos\alpha$ 。

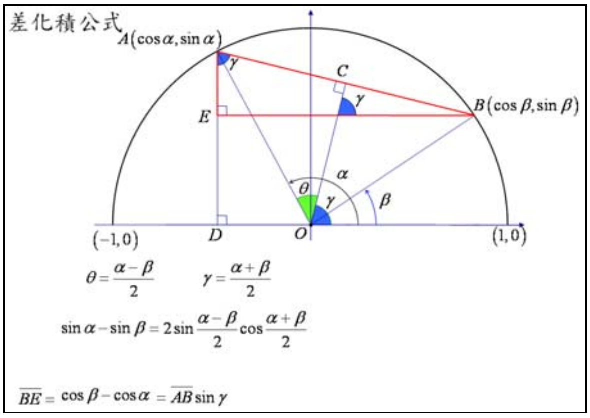

圖 6-2-1-24：得 $=\overline{AB}\sin\gamma$ 。

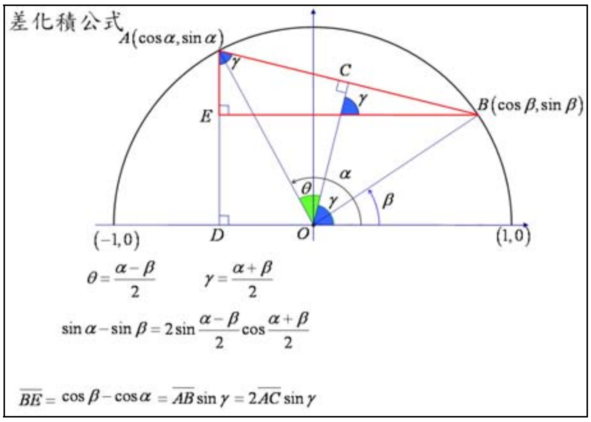

圖 6-2-1-25：得 $=2\overline{AC}\sin\gamma$ 。

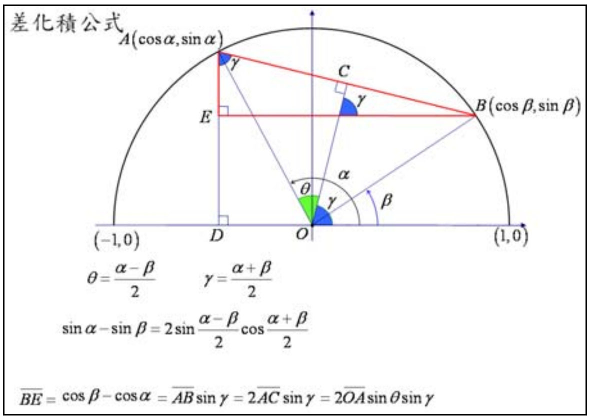

圖 6-2-1-26：得 $=2\overline{OA}\sin\theta\sin\gamma$ 。

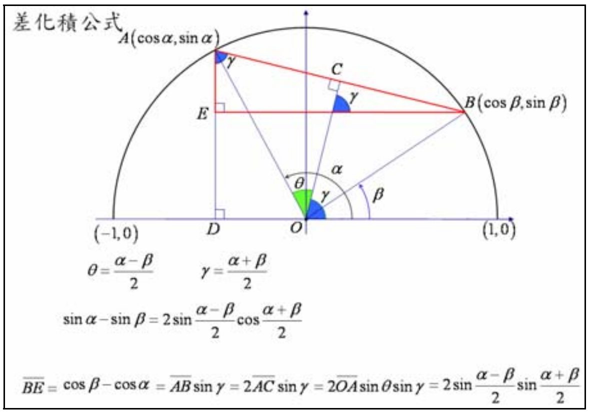

圖 6-2-1-27：得 $=2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 。

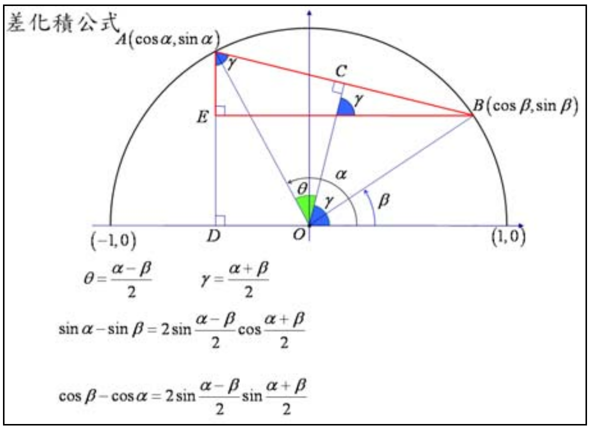

圖 6-2-1-28：將 $\overline{BE}=$ 及中間項消失，並將 $=2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 靠近。

二、 $\cos\beta-\cos\alpha=2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 與 $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

本例是由二個斜邊爲 1 的直角三角形，得到一個較小的直角三角形所推導而得餘弦的差

化積公式： $\cos\beta-\cos\alpha=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ 與正弦的差化積公式：

$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ 。本例是 Proof Without Words Ⅱ中第 53 頁的例子，作者爲 Yokio Kobayashi(2000)，在 PowerPoint 中的呈現方式如下列各圖(圖 6-2-2-1 到圖 6-2-2-23)。

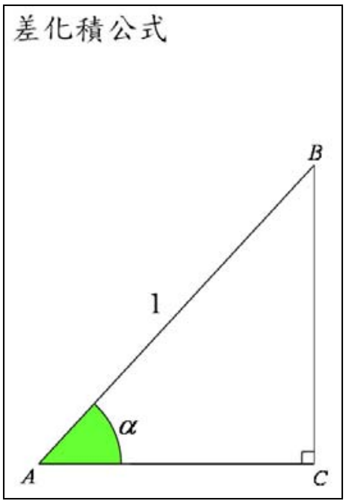

圖 6-2-2-1：任一直角 ΔABC 中斜邊 $\overline{AB}=1$、$\angle A=\alpha$ 。

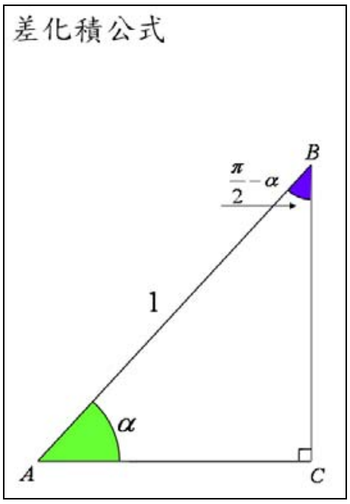

圖 6-2-2-2： $\angle B=\frac{\pi}{2}-\alpha$ 。

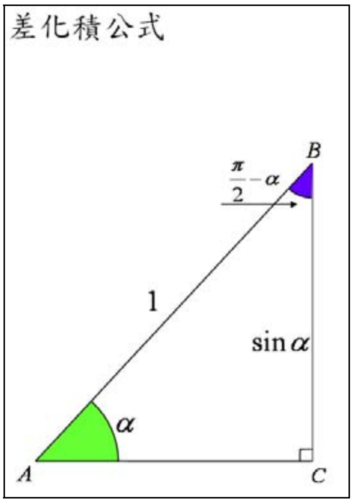

圖 6-2-2-3：得 $\overline{BC}=\sin\alpha$ 。

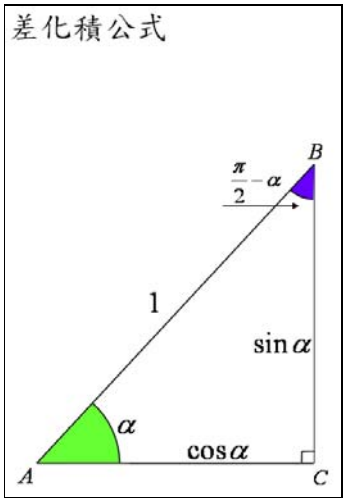

圖 6-2-2-4：得 $\overline{AC}=\cos\alpha$ 。

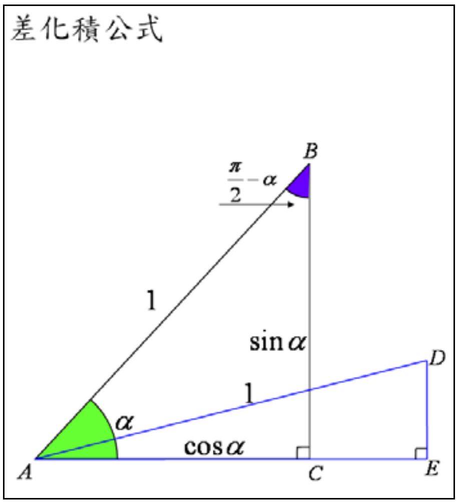

圖 6-2-2-5：做直角 ΔADE ，斜邊 $\overline{AD}=1$ 且 A,C,E 三點共線。

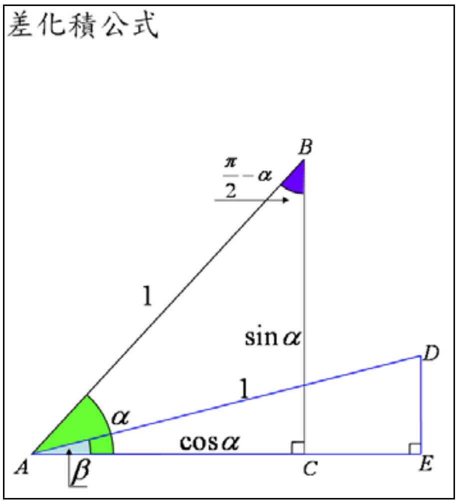

圖 6-2-2-6：令 $\angle DAE=\beta$ 。

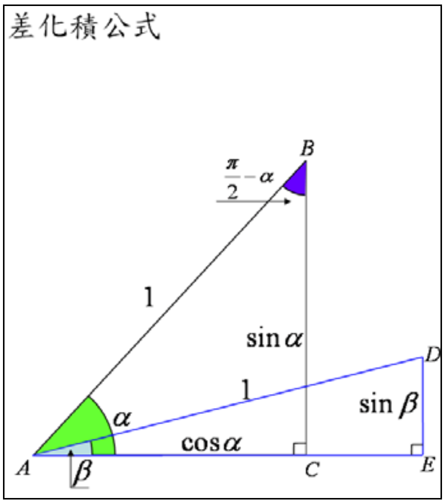

圖 6-2-2-7：得 $\overline{DE}=\sin\beta$ 。

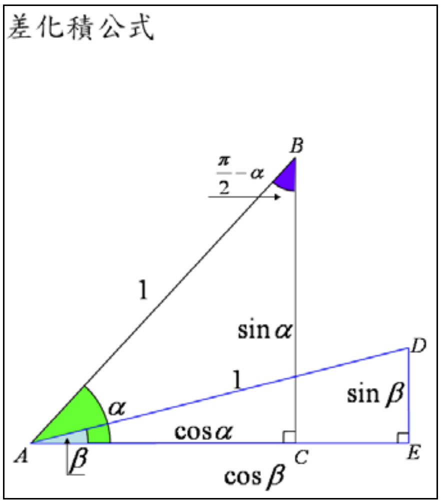

圖 6-2-2-8：得 $\overline{AE}=\cos\beta$ 。

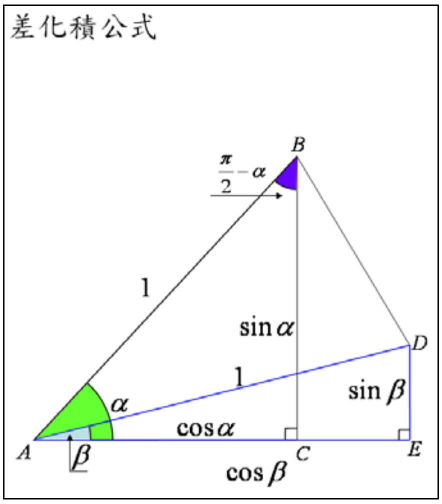

圖 6-2-2-9：連線段 $\overline{BD}$ 。

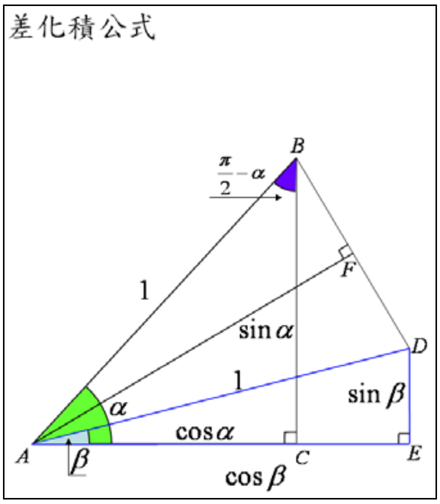

圖 6-2-2-10：做 $\overline{AF}\perp\overline{BD}$ 於 F 。

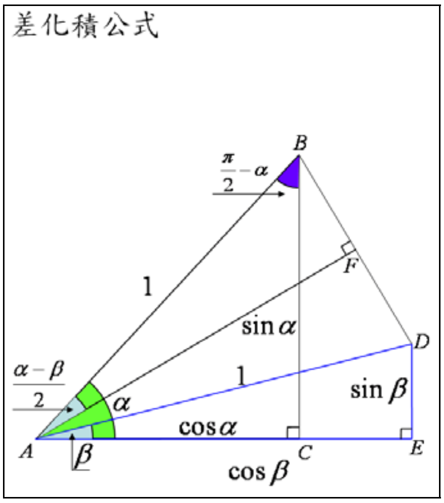

圖 6-2-2-11：得 $\angle BAF=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ 。

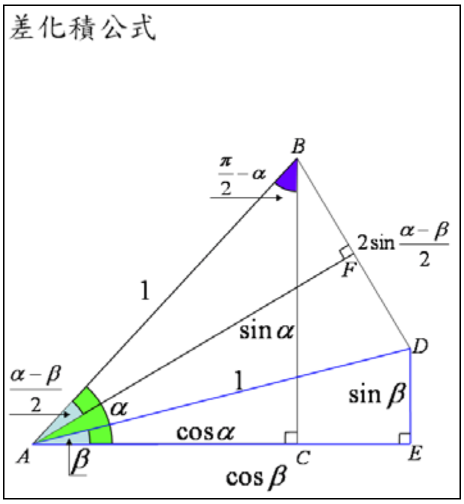

圖 6-2-2-12：得 $\overline{BD}=2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ 。

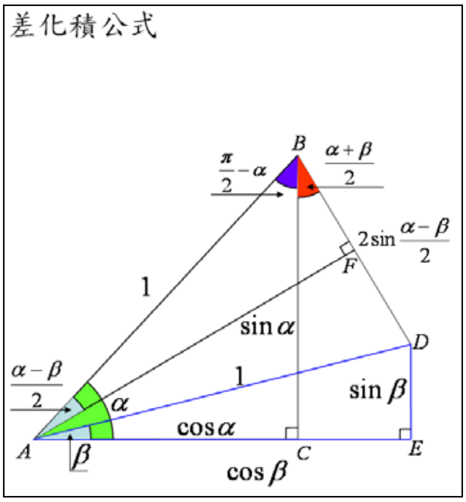

圖 6-2-2-13：標示 $\angle CBD$，得 $\angle CBD=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 。。

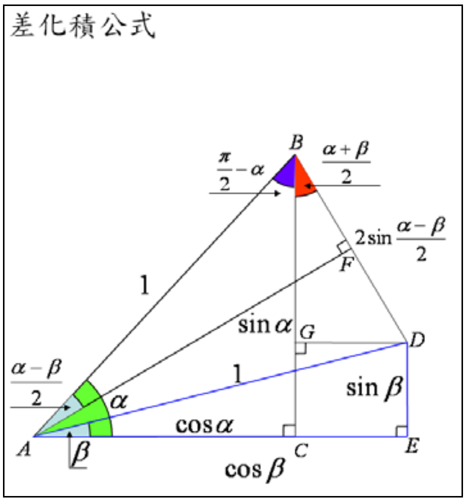

圖 6-2-2-14：做 $\overline{DG}\perp\overline{BC}$ 於 G 。

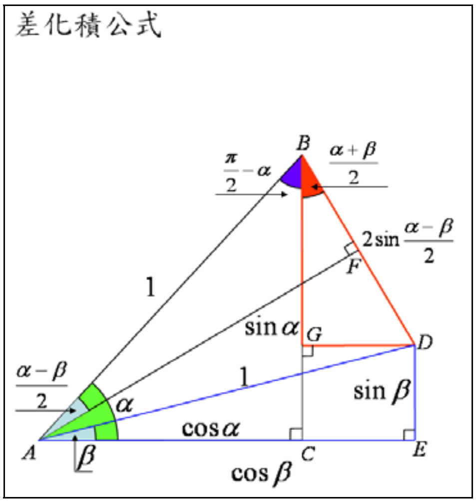

圖 6-2-2-15：標示直角 ΔBDG 。

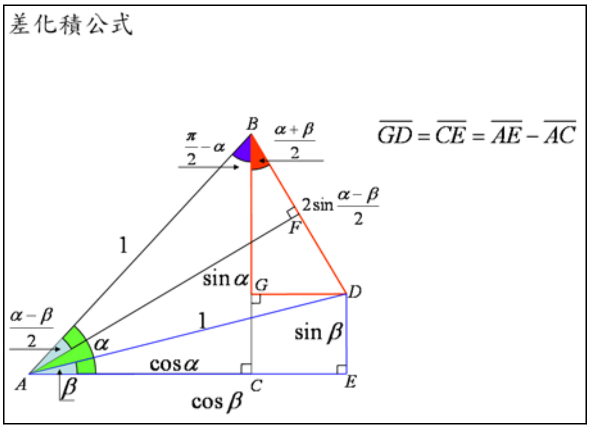

圖 6-2-2-16：得 $\overline{GD}=\overline{CE}=\overline{AE}-\overline{AC}$ 。

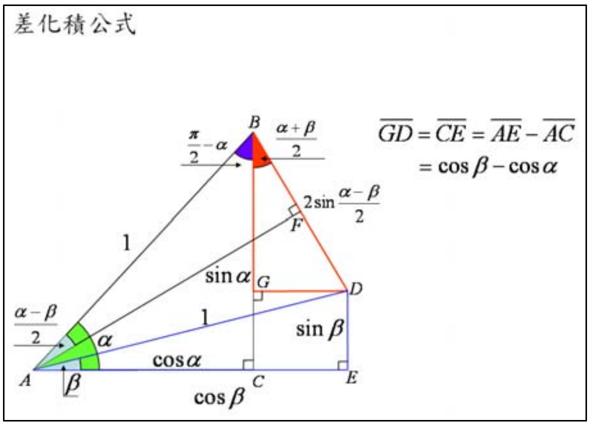

圖 6-2-2-17：得$=\cos\beta-\cos\alpha$ 。

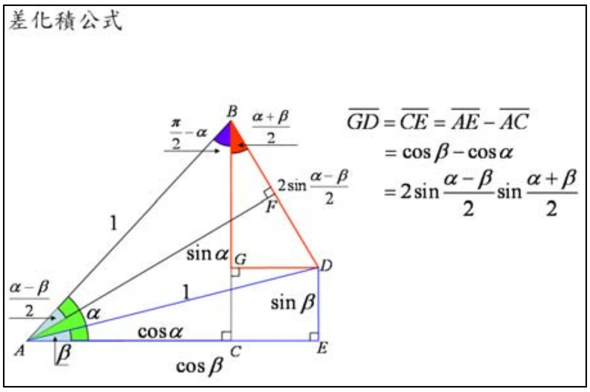

圖 6-2-2-18：得$=2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 。

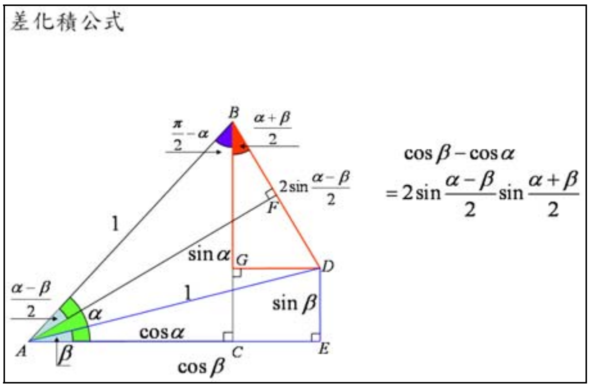

圖 6-2-2-19：將$\overline{GD}=\overline{CE}=\overline{AE}-\overline{AC}$ 消失。

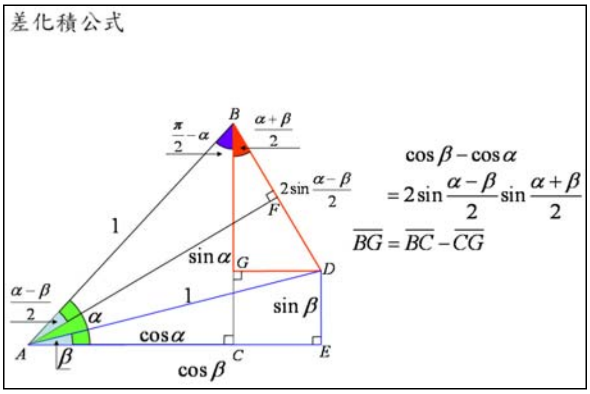

圖 6-2-2-20：得$\overline{BG}=\overline{BC}-\overline{CG}$ 。

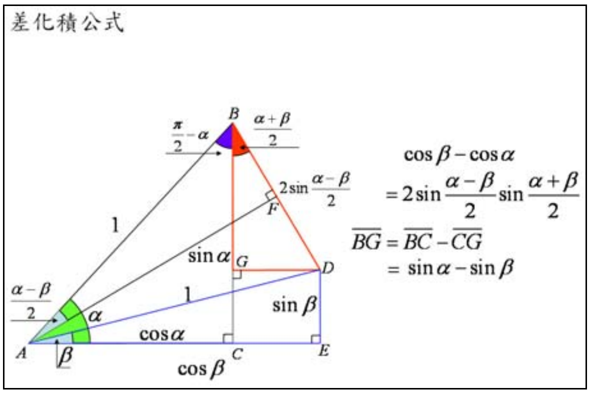

圖 6-2-2-21：得$=\sin\alpha-\sin\beta$ 。

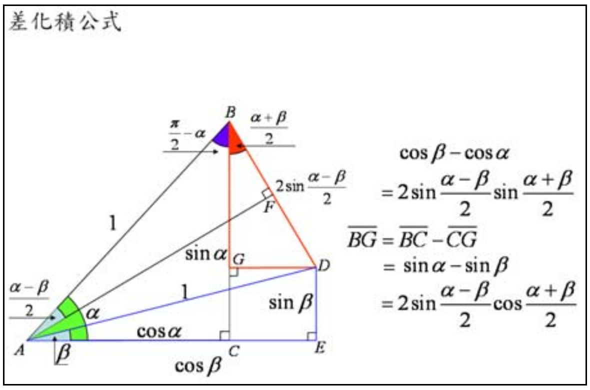

圖 6-2-2-22：得$=2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 。

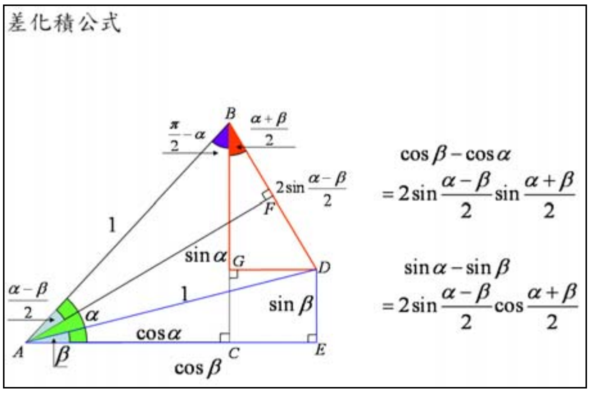

圖 6-2-2-23：將 $\overline{BG}=\overline{BC}-\overline{CG}$ 消失。