

## 第二章 文獻探討

理想的教學設計以學習者的需要為依歸，重視學生的個別差異，按照學生的學習型態及興趣，設計適合的學習活動方式(柳賢，1990)。本研究的目的在運用 PowerPoint 開發三角函數中「動態圖說證明」，部分並利用 GSP(The Geometer's Sketchpad 簡稱 GSP)設計適當的學習活動模組輔助教學。本章第一節將探討 GSP 之相關理論，第二節討論有關圖說證明的相關依據，第三節敘述三角函數的課題，最後第四節將從視覺思考下手，為何善用圖像輔助教學，能吸引學習者的注意，進而提升學習成效。

### 第一節 GSP 之學習環境

GSP 軟體是由美國 Swarthmore College 及 Key Curriculum Press 公司在產官學合作之下所發展出版的動態幾何繪圖軟體，是一套架構在視窗環境下，可讓操作者自由建構及改變幾何圖形的幾何繪圖軟體。在中學幾何的學習上，深受中學教師與學生的喜愛(左台益，1999)。

函數概念受限於過去工具的功能，其呈現方式是靜態的抽象符號式，少有直觀的(intuitive)、數值的(numerical)動態想法(謝哲仁，2001)。而資訊科技世代中，電腦提供強大的計算與繪圖能力，讓使用者可以使用真實數據進行模擬或建模(modeling)的活動，並且可以直接操弄數學物件之間的關係，連結真實經驗與數學形式(Balacheff & Kaput, 1996)。GSP 是一個允許使用者建構、操作幾何基本圖形的視窗環境工具(全任重，1996；林保平 1997)，加上度量、計算器及函數運算的功能，隨著 GSP 軟體工具和教學觀念的發展，幾何和代數的教學可以從較直觀的、動態的圖形著手(林保平，2000)。

以下 GSP 軟體的功能與特質是本研究開發的重要參考依據：

#### 一、圖形可操作，具有幾何變換功能

幾何作圖及圖形可操作及變換的功能，是動態幾何軟體能成為臆測、探索幾何性質工具的原因之一(林保平，1997；Rahim，2000)。GSP 有超強的繪圖功能，是一個動態幾何建構工具，圖形可以藉由拖曳的動作，做動態模擬的變換，而幾何關係保持不變。線段、

面積、周長、角度都可以測量出，並且加以計算，而這些測量值與計算所得的數量，也會跟著圖形變換的改變而改變(蔡志仁，2000)。

## 二、提供解析幾何的坐標系統

GSP 軟體提供直角坐標與極坐標平面，可給定點坐標後描點，或利用度量工具，求得任意點的坐標、量測距離、斜率等，並擁有畫多項式、三角函數、指數函數、對數函數……等圖形的功能。給定特定參數，可觀察函數圖形與對應係數的關係；量測數值精確，適合解析幾何教學(Rahim，2000)。

## 三、動態連變化及不變性

在 GSP 環境下，圖形及數值可以做連續的變動，當圖形或其某一構成元素改變位置、形狀變換時，其改變的過程是漸進及連續的。不只圖形的最終狀態呈現出來，其位置改變過程中的圖形也連續呈現出來，使用者看到的是一個連續的變化過程。使學生能觀察圖形的連續變換，並由度量工具，如：量角度、長度、面積、周長、弧長……。顯示點的坐標、直線斜率……等之輔助來發現幾何的不變性質(林保平，1997)。

## 四、同時具有手動操作及自動化功能

GSP 軟體具有拉曳及動態模擬功能，經由適當設計後，程式會呈現動態過程，可隨時停止、繼續，十分方便；也可以手動操作，控制速度，方便觀察、比較、臆測。使用者可於恰當的時刻暫停程式之自動運作，思考情境問題，或重複畫面上的動態過程，以進一步觀察數學性質。在手動操作不易精準(如：重合或壘合兩圖形)，可透過設計動作按鈕(action button)使電腦自動操作，增加準確度(林保平，1995)。

## 五、特殊即一般

通常我們為了證明一個數學問題，而畫的是一個「特殊」的幾何圖形，但證明的過程中我們總是將它當成「一般」的圖形，證明完成後，我們也認定所證明的是具有已知條件的「任意圖形」。許多學生對於此一特殊圖形所代表的一般性的性質並不了解，若將圖形改變，可能就認為它們是不同的問題(Balacheff，1988)。在 GSP 中所做的幾何圖形，

使用者可以「任意移動」此圖形的構成元素，而改變圖形，因其幾何結構不變，所以我們所呈現的是「任意圖形」，而非「特殊」的幾何圖形。

傳統的教材是靜態的文字與圖形，不容易陳述或引導出要探索的問題，當然也不容易吸引學生的主動學習。而 GSP 軟體的功能與特質不僅能配合學習理論、教學理論，而且能讓學生透過圖形，來探索與驗證三角函數中公式內容，發現數學結果的不變性，是值得我們應用的。



## 第二節 圖說證明

圖，在人類思維發展史上不僅扮演過啓蒙者的角色，還在新現象的發現和解釋、新思想的誕生和發展中起過巨大的作用(王溢然、王亮，2001)。相傳古希臘的畢達哥拉斯(Pythagoras)，喜歡在海邊沙灘上畫圖，有一次以 $a+b$ 為邊作兩個正方形，並且做如下圖 2-1 的分割，而得 $c^2 = a^2 + b^2$ 的結果。因此畢氏堪稱「圖說證明(Proofs Without Words)」的開山始祖(蔡聰明，2000)。

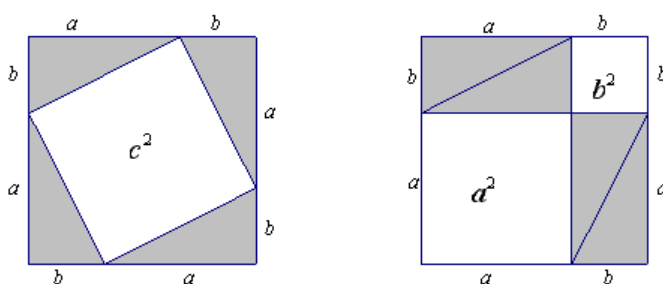


圖 2-1：畢氏定理的圖說證明。

在數學中，一個公式或定理的證明有許多方式，其中的「無言的證明」(proof without word)，具有直觀、輕巧、雅緻之趣(蔡聰明，2000)。數學上幾何圖形具有直觀、易懂的優點，俗話說「一圖勝千言」，正是圖說證明(proof without word)的最佳寫照。由美國數學協會(The Mathematical Association of America, 簡稱 MAA)，所出刊的「Mathematics Magazine」期刊，於 1975 年推出「Proofs Without Words」(圖說證明)專欄，三十餘年來深受各方歡迎，Nelsen 教授兩度集結成單行本，由 MAA 出版發行，可見「圖說證明」有其獨特的魅力。

中學數學一直是許多學生心中的痛，尤其是高中數學的抽象度更高，常常是學生放棄的第一個學科，而高中數學學習的困難，有一部分原因是數學公式比較抽象，而難以直觀的理解(李政豐，2000)。傳統的公式證明，嚴謹而周全，是數學教育中最重要基礎。用圖說證明，由於條件有所限制，無法呈現所有的圖形，這當然是它的缺點，但是簡明易懂，藉著視覺化的感受及簡單的數學概念，常能讓學生留下深刻的印象，對於數學公式的具體化，有很大的幫助(李政豐、顏貽隆、陳蘭香、王淑霞、陳明峰，2001)。

然而並非每一個靜態的圖形都能讓大部分的學生「一看就懂」，如今的資訊科技發達，若能化靜態的圖形為動態方式呈現，一個步驟接一個步驟的出現在學習者的眼前，不僅能達到學習的效果，也能讓學生有深刻的印象。

今天的個人電腦可以說相當的普及，而 PowerPoint 的簡報系統幾乎是個人電腦的基本軟體，本研究利用 PowerPoint 開發動態圖說證明，不僅方便教師的教學，也能滿足學習者的學習，同時也能提高 MAA 出版發行圖說證明的美意。



### 第三節 高中三角函數的學習研究

三角函數是現代數學的重要課題之一，其發展是奠基於一些分析的概念。三角研究開始於對天文與地理問題的反應，數學家針對需求發展這方面的工具，終於成為數學分支，稱為「三角學」。而三角學真正顯著的發展發生於希臘時代，希伯諸斯(Hipparchus of Nicaea, c. 150 B.C.)和托勒密(Claudius Ptolemy, c. 85~165 A. D.)被公認為三角學的奠基者(戴久永，1994)。十六世紀末期，三角學已成為一個內容清晰可辨的數學體系，一連串的改進一直延續至今，三角實質上已廣泛地應用於天文、地理、航海、物理、建築、工程、航空和音樂，因此三角是實際與具應用性的數學分支之一(戴久永，1994)。

我國中學數學課程歷經數次變革，其中國民中學部分最近一次是民國八十六年修訂，三角函數的部分由原先的必修教材改為選修，所以不是基測的範圍，因此幾乎目前高一的同學都未曾學習過此一單元。高中數學部分，最近一次的修訂是在民國八十四年修正公布之高級中學數學科課程標準，其中高一數學課程從邏輯、集合的基本概念談起，一直到三角函數的部分止。其中三角函數部分從銳角三角函數的定義出發，介紹一般的方向角，利用標準位置角定出一般的三角函數；將三角函數的定義域適當的限制，使成為一對一且映成函數，可推得反三角函數。

三角函數的重要課題是探討三角形的邊角關係式，以南一書局出版的教科書為例，其教材中最第一個介紹的定理是正弦定理與餘弦定理；在三角函數的性質與應用中，是以和角公式為中心，推出和角公式、倍角公式、半角公式，也推出積化和差與和差化積的公式；進而利用和角關係導入正弦函數與餘弦函數的疊合；最後進入反三角函數與複數的極式。民 84 年修訂課程標準的同時，也將授課時數由原先的每週 6 小時縮減為 4 小時，我們可以發現高中同學的先備知識減少，但其學習單元內容的廣度卻增加，而授課時數減少，教師如何協助學生有效學習、提高教學成效，應該是數學教師們要努力的重要課題。

一般而言，國內的教科書對銳角的三角函數其定義是利用直角三角形的斜邊、對邊、鄰邊兩兩比值來定義，同學們在學習時是較容易接受，其原因為較為具體及有圖形可供輔助(張美珠，2003)。而廣義的三角函數則利用直角坐標系中有向角的終邊上一點來下定義，其定義

如下：

1. 將任意有向角  $\theta$  置於標準位置(頂點為原點  $O$ ，其始邊為  $x$  軸正向)；
2. 在終邊上取一點  $P(x, y)$ ；
3.  $\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2} = r$ ；
4.  $\sin \theta = \frac{y}{r}$ 、 $\cos \theta = \frac{x}{r}$ 、 $\tan \theta = \frac{y}{x}$ 、 $\cot \theta = \frac{x}{y}$ 、 $\sec \theta = \frac{r}{x}$ 、 $\csc \theta = \frac{r}{y}$ 。

六個三角函數值完全取決於坐標平面上  $x$ 、 $y$ 、 $r$  三個數的比值，此時抽象的數學意義很容易使學生產生迷思概念，黃純杏(2001)研究高中學生廣義三角函數運算的錯誤類型，發現學生在三角函數學習概念及運算錯誤原因主要有六個部分：

- (一)因概念不清產生的錯誤：包含有(1)對廣義角定義不瞭解；(2)廣義角與三角函數值定義混淆，相似概念混淆產生錯誤；(3)三角函數基本定義產生錯誤；(4)三角函數值與角度產生錯誤；(5)三角函數關係式誤解用法；(6)不明瞭三角函數符號。
- (二)對圖形的錯覺：學生會將題目所附的圖形以自己的方式去分析。
- (三)受題目數字影響：學生從題目所給的數字中用自己認為合理的運算找出答案。
- (四)受先前學習過的知識或單元學習經驗的影響做錯誤的推論：學生會因舊經驗學習不夠熟晰容易遺忘或過度的依賴舊有經驗，而將其做不當或過度的推論。
- (五)誤解語文：學生將數學題目原文轉譯成數學語言時所產生之錯誤。
- (六)其他錯誤：如粗心計算錯誤、拼湊答案。

整體而言，學生在學習三角函數的過程中很容易產生許多錯誤，本研究利用 GSP 軟體的功能與特質，開發、設計三角函數中許多重要的公式、定理及視覺化的動態圖說證明，以具體的圖像方式，輔助學生學習三角函數中較為抽象的定理、公式，希望能避免或減少學生產生錯誤的學習內容。

#### 第四節 視覺思考(Visual Thinking)

對於外界的訊息，人類吸收儲存的方式有三種：聲碼(acoustic code)、文字碼(verbal code)與視覺碼(visual code)(Paivio, 1990)。而傳統的教科書提供了文字碼(verbal code)與視覺碼(visual code)的部分，但教科書對於較為抽象的數學有相當大的限制，尤其是無法以外在動態表徵(dynamic external representation)的方式來詮釋抽象的概念，然而在學習的過程中，如何使學生對抽象概念具知覺的能力是非常重要的。

視覺思考(Visual Thinking)是一種普遍性的人類行為，不論是抽象的理論，或是具體的實物，我們每天的生活都需要使用視覺式思考(Robert H. Mckim, 蔡子瑋譯, 2002)。藉由電腦的學習環境，可提供機會學習概念、培養觀察與思考的能力(Noss, Healy, Hoyles, 1997)。透過視覺可以擴大個人的知覺經驗，對學習者的學習有以下三點益處(鄭晉昌, 1997)：

- (1) 視覺經驗較為具體，尤其是動態的視覺經驗可以讓人瞭解整個事件發生的歷程，協助學習者進一步瞭解文字訊息的內容。
- (2) 視覺思考可以讓學習者在學習的過程中，容許有更多短期記憶的空間進行資訊處理。
- (3) 視覺經驗較具可探索性，讓學習者更具想像空間，擴展學習的深度。

學生的學習過程是由具體而抽象、循序漸進。根據 Hart 與 Sinkinson(1987)證實，許多兒童在具體的活動經驗與數學形式化之間的連結會有許多的困難，而他們建議用搭橋的方式，例如以圖形表徵作為中介，以解決此問題。陳明印(1998)認為圖、表在教材中具有下列五項功能：

- (1) 扮演影響的角色：具促進興趣動機的功能。
- (2) 扮演注意的角色：具吸引注意、充當指引的功能。
- (3) 扮演易教的角色：具加強易教、易懂效果，特別是在單由文字傳達較難懂的內容。
- (4) 扮演支持的角色：具協助能力較低的學習者的學習功能。
- (5) 扮演保存的角色：具加強長期記憶的功能。



Larkin and Simon(1987)指出一個圖表或圖形(diagram)有時可以勝過千言萬語，這說明了人類視覺思考的重要性。圖示(包括示意圖)和圖像是一種形象的語言，它往往能有飛越冗長的文字長河，給人以直觀、鮮明的形象(王溢然、王亮，2001)。圖示和圖像能夠成爲人們思考問題、分析問題和解決問題的好幫手，能夠作爲一種重要的思維方法，這是與它自身所具有的思維特點分不開，其特點有：(1)形與數的統一；(2)動與靜的結合；(3)抽象與形象的聯繫(王溢然、王亮，2001)。

文字與圖形被視爲傳送知識的兩個不同媒介。圖像思維強調視覺的整體綜合能力，它並不排斥文字和直覺在學習中的功能，而且它改善了文字的幾個缺點：(1)書寫文字的冗長；(2)口語文字的不明確；(3)概念連結的鬆散性(黃學誠，2000)。

林麗娟(2000)認爲，視覺圖像在電腦輔助教材上提供以下幾個功能：

- (1)具提示的作用，引導學習者將注意力集中帶重要概念。
- (2)提供刺激來源，增進自我探索與自我學習之樂趣。
- (3)提供多重意念之表達方式，以鼓勵學習者以不同層面與角度觀察問題。
- (4)釐清概念，解說比照。
- (5)依學習所需，提供整體性概念或分項解說重點。
- (6)營造情境引發思考動機。
- (7)滿足學習者視覺上與認知上的好奇心，幫助空間概念的學習。

黃子明(1998)認爲視覺傳播的時代已經來臨，讀者喜歡閱讀影像、圖片已是一種必然的趨勢。因此教學時若能善用圖像輔助教學，必能吸引學習者的注意，進而提升學習成效。利用視覺思考的理論來協助學習者學習三角函數的公式概念，透過電腦傳達視覺經驗，使學習者易於吸收較爲抽象複雜的數學概念，是本研究努力的方向。