第三章　正弦定理與餘弦定理

本章將介紹三角函數中二個相當重要的定理——正弦定理與餘弦定理，在第一節將先利用軟體——動態幾何(The Geometer's Sketchpad 簡稱 GSP)的動態設計與數據的呈現，讓學習者透過操作與觀察了解正弦定理與餘弦定理，然後在第二、三節設計說明 PowerPoint 的動態圖說證明，讓學習者明白正弦定理與餘弦定理。

第一節　動態幾何(GSP)中的操作與觀察

首先研究者希望學習者能透過GSP的操作與觀察，來發現定理、公式的正確性，然後再用相同的幾何圖形做動態的圖說證明。研究者設計的GSP檔案，期望未來的研究人員可以再深入探討其教學成效。另在使用本檔時需先行安裝軟體——動態幾何(GSP)，使用者可在 http://www.keypress.com/sketchpad/sketchdemo.html 下載試用。

一、教學物件一【正弦定理】

程式名稱：正弦定理.gsp，如下圖 3-1-1。

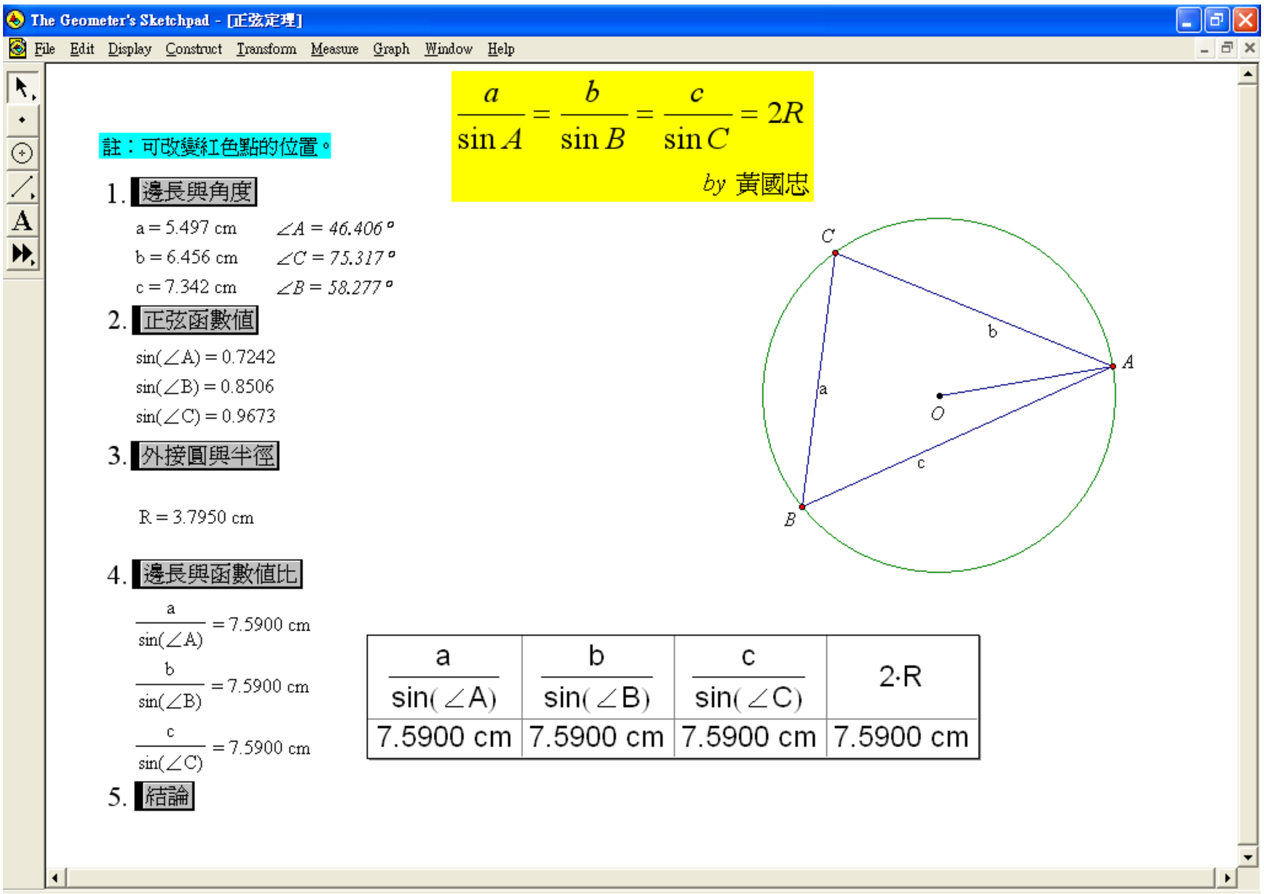

圖 3-1-1：GSP 中正弦定理。

目的：希望學習者經由操作滑鼠、觀察數據，透過設計者所設計的步驟，發現正弦定理。

操作與觀察：

1. 在任意 ΔABC 中，學習者可自行改變三頂點位置，觀察其邊長、角度的變化。
2. 操作者可用滑鼠點選設計者所設計的按鈕(灰色部分)，顯示相關資訊及下一個步驟的按鈕；操作、觀察直到結論爲止。
3. 探索問題：
   a. 移動任一頂點，使得角 A 爲直角時「圓與三角形有何關係？」
   b. ΔABC 爲銳角三角形、鈍角三角形時，圖形有何差異？
   c. ΔABC 爲鈍角三角形時，其正弦函數值爲何皆爲正數？
4. 先備知識
   a. 了解正弦函數之基本定義。
   b. 三角形外接圓性質。
5. 操作說明
   a. 操作者需先了解 GSP 環境，及使用方式。
   b. 可任意移動紅點。
6. 注意事項
   a. 若操作過程中圖形太大並不影響結果。
   b. 操作過程當三頂點有重合時有「Undifined」的訊息產生，教師要能確實了解其意義，並讓同學了解。
   c. 操作過程中若有三點共線，但三點不重合時，會有∞符號出現，教師要能確實了解其意義，並讓同學了解。

二、教學物件二【餘弦定理 2.gsp】

程式名稱：餘弦定理.gsp，如下圖 3-1-2。

目的：希望學習者經由操作滑鼠、觀察數據，透過設計者所設計的步驟，發現餘弦定理。

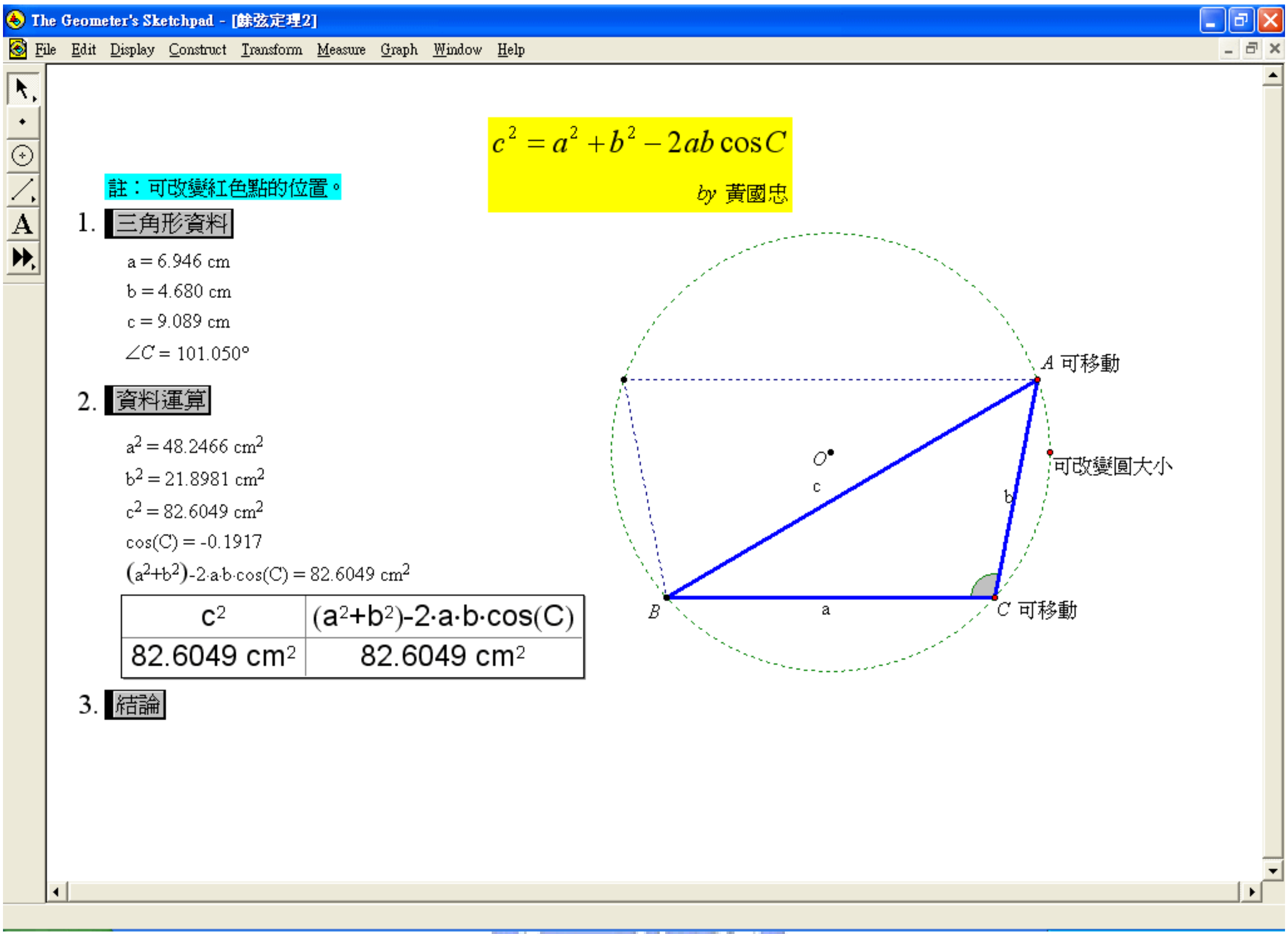

圖 3-1-2：GSP 中餘弦定理。

操作與觀察

1. 在任意一圓上內接 ΔABC 中，學習者可自行改變其中二頂點 A、C 的位置，觀察邊長、角度的變化。
2. 操作者可用滑鼠點選設計者所設計的按鈕(灰色部分)，顯示相關資訊及下一個步驟的按鈕；操作、觀察直到結論爲止。
3. 探索問題：

   a. 移動頂點 A 或 C，當角 C 爲直角時「圓與三角形有何關係？」

   b. C 爲銳角、鈍角時圖形有何差異？

   c. 當 C 與 A 重合時發生什麼狀況，爲何有此狀況？

   d. 當 C 與 B 重合時發生什麼狀況，爲何有此狀況？
4. 先備知識

a. 了解餘弦函數之基本定義。

b. 三角形外接圓性質。

5. 操作說明

a. 操作者需先了解 GSP 環境，及使用方式。

b. 可任意移動紅點。

6. 注意事項

a. 若操作過程中圖形太大並不影響結果。

b. 操作過程當 C 與 A 或 B 重合時有「Undifined」的訊息產生，教師要能確實了解其意義，並讓同學了解。

第二節　正弦定理之動態圖說證明

在傳統的課本中，欲證明正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$都是分二部分來談，首先利用三角形面積公式，即$\Delta ABC=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ca\sin B$，得$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$；再利用三角形外接圓其圓周角相等的方式製造直角$\Delta A'BC$，再得$\sin A=\sin A'=\dfrac{a}{2R}$(其中$R$為$\Delta ABC$之外接圓半徑)，然後合併證得正弦定理，課本中為求方便通常後半段只做銳角三角形的部分，而將鈍角三角形部分省略。

研究者是直接利用三角形做外接圓，將前半段利用三角形面積公式的部分略去，再利用圓周角相等的方式製造直角三角形，直接使用正弦函數的基本定義得到$\sin A=\sin A'=\dfrac{a}{2R}$，推得$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$。在 PowerPoint 中的呈現方式如下列各圖之說明(圖 3-2-1～圖 3-2-13)。

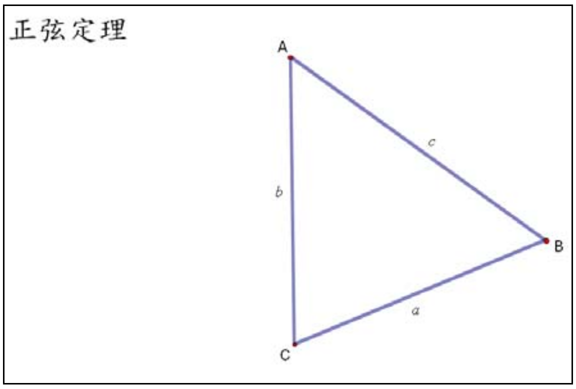

圖 3-2-1：任意ΔABC，其對邊應長分別為a、b、c。

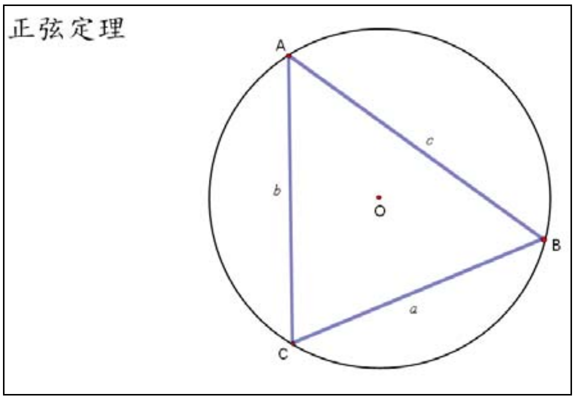

圖 3-2-2：做外接圓，其圓心為O。

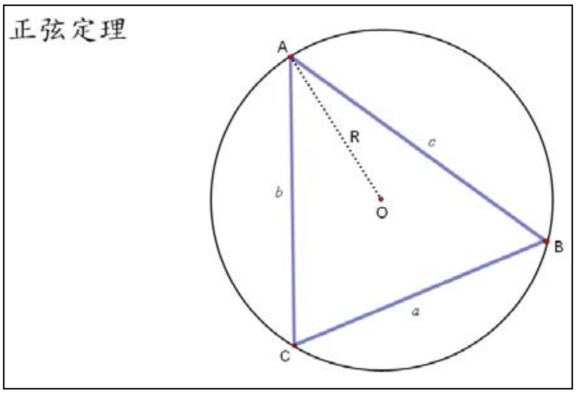

圖 3-2-3：得半徑$\overline{OA}=R$。

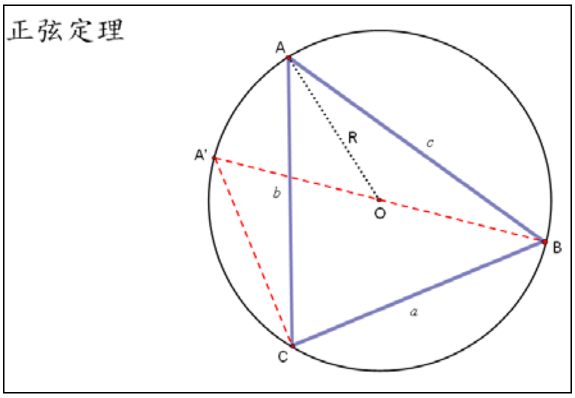

圖 3-2-4：以B為端點做直徑$\overline{A'B}$，再連$\overline{A'C}$。

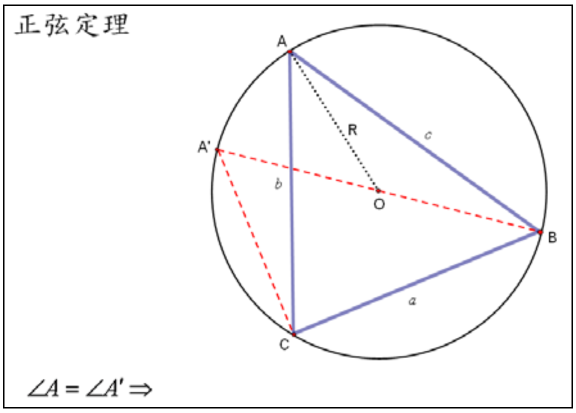

圖 3-2-5：得 $\angle A = \angle A'$ 。註：圓周角相等，且 $\angle A'CB = 90^{\circ}$ 。

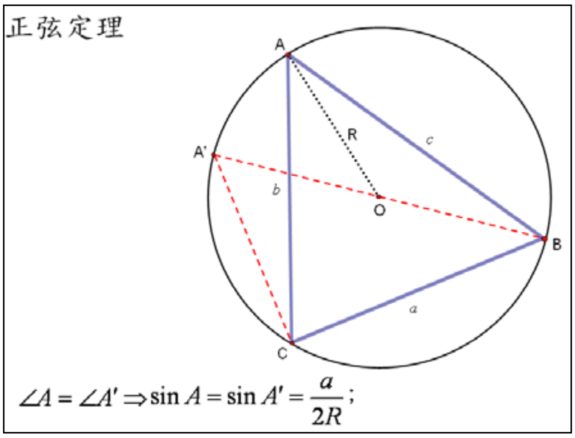

圖 3-2-6：得 $\sin A = \sin A' = \dfrac{a}{2R}$ 。

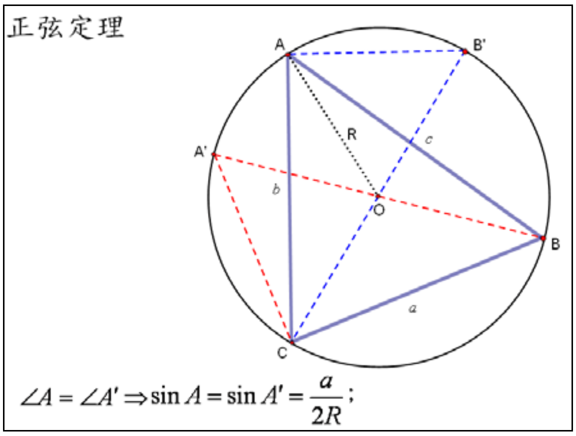

圖 3-2-7：以 C 爲端點做直徑 $\overline{B'C}$ ，再連 $\overline{B'A}$ 。

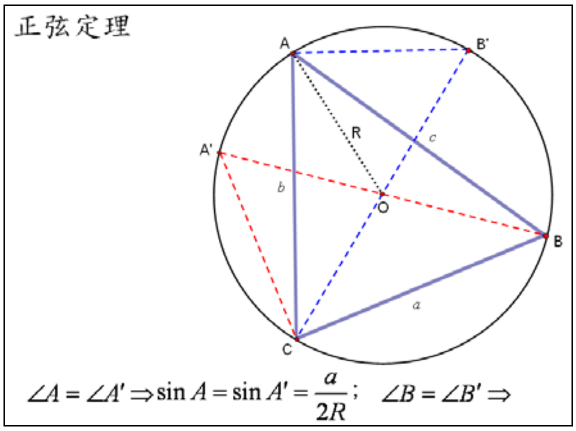

圖 3-2-8：得 $\angle B = \angle B'$ 。註：圓周角相等，且 $\angle B'AC = 90^{\circ}$ 。

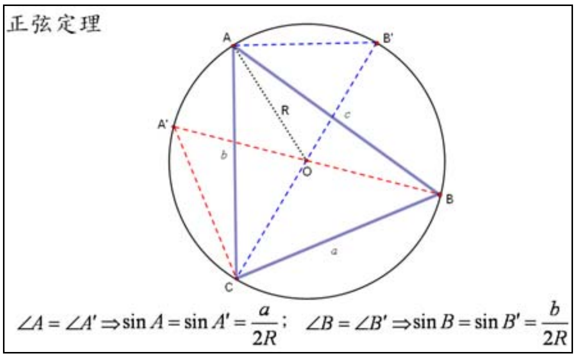

圖 3-2-9：得 $\sin B = \sin B' = \dfrac{b}{2R}$ 。

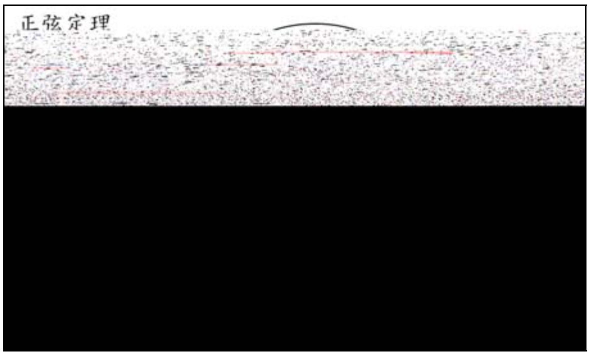

圖 3-2-10：以 A 爲端點做直徑 $\overline{AC'}$ ，再連 $\overline{BC'}$ 。

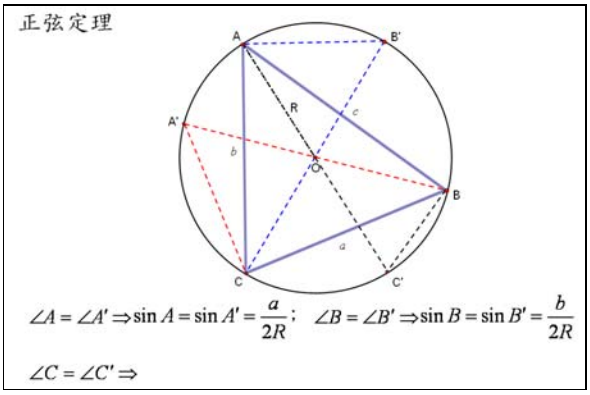

圖 3-2-11：得 $\angle C = \angle C'$ 。註：圓周角相等，且 $\angle C'BA = 90^\circ$ 。

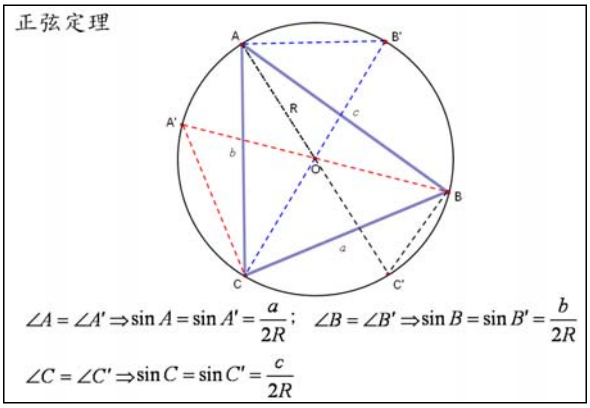

圖 3-2-12：得 $\sin C = \sin C' = \frac{c}{2R}$ 。

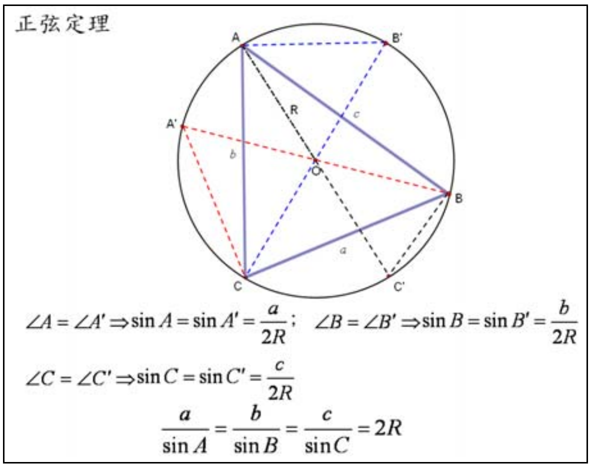

圖 3-2-13：得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ 。

第三節　餘弦定理之動態圖說證明

在傳統的課本中，欲證明餘弦定理：$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ 都是分三種狀況討論，即 ΔABC 爲直角三角形、銳角三角形和鈍角三角形時分別討論。以 $\angle C$ 爲討論對象

(1) $\angle C$ 爲直角時：

利用畢氏定理 $c^2 = a^2 + b^2$ 和 $\cos C = \cos 90^\circ = 0$ ，所以得 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

(2) $\angle C$ 爲銳角時：

自 A 點作 $\overline{BC}$ 的垂線垂足爲 D，再利用兩次畢氏定理即可證得，證法如下，可參考下圖 3-3。

$$\begin{aligned}
c^2 &= \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \left(b^2 - \overline{CD}^2\right) + \left(a - \overline{CD}\right)^2 = \left(b^2 - (b\cos C)^2\right) + \left(a - (b\cos C)\right)^2 \\
&= b^2 - (b\cos C)^2 + a^2 - 2ab\cos C + (b\cos C)^2 \\
&= a^2 + b^2 - 2ab\cos C
\end{aligned}$$

(3) $\angle C$ 爲鈍角時：

同樣可由 A 點作 $\overline{BC}$ 的垂線垂足爲 D，再利用兩次畢氏定理即可證得，但在此需注意其中的 $\overline{CD} = b\cos\left(180^\circ - \angle C\right) = -b\cos C$ ，證法如下，可參考下圖 3-3。

$$\begin{aligned}
c^2 &= \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \left(b^2 - \overline{CD}^2\right) + \left(a + \overline{CD}\right)^2 = \left(b^2 - \left(b\cos\left(180^\circ - C\right)\right)^2\right) + \left(a + \left(b\cos\left(180^\circ - C\right)\right)\right)^2 \\
&= b^2 - (-b\cos C)^2 + \left(a + (-b\cos C)\right)^2 = b^2 - (b\cos C)^2 + (a - b\cos C)^2 \\
&= b^2 - (b\cos C)^2 + a^2 - 2ab\cos C + (b\cos C)^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C
\end{aligned}$$

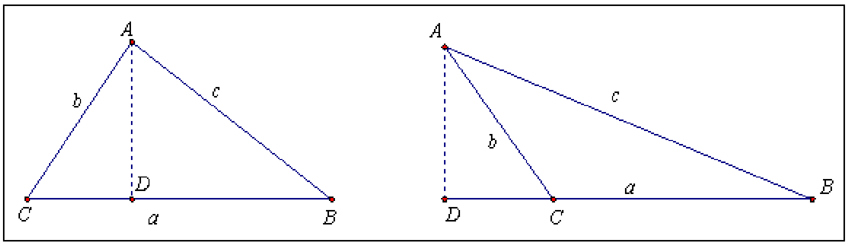

圖 3-3

本節將用二種方式來做餘弦定理的動態圖說證明。

一、利用圓內接直角三角形與另一直徑製造兩相似三角形，再應用相似三角形對應邊成比例的關係來證明餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ 。本例是參考 Proofs Without Words 一書中第 32 頁的例子製作而成，作者爲 Sidney H. Kung(1993)，在 PowerPoint 中的呈現方式如下

列各圖之說明(圖 3-3-1-1～圖 3-3-1-13)。

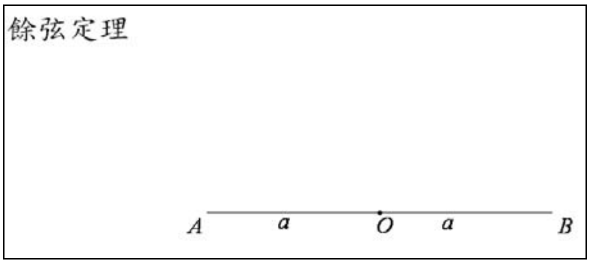

圖 3-3-1-1：平面上線段 $\overline{AB}$ ，中點 O，
$\overline{OA}=\overline{OB}=a$ 。

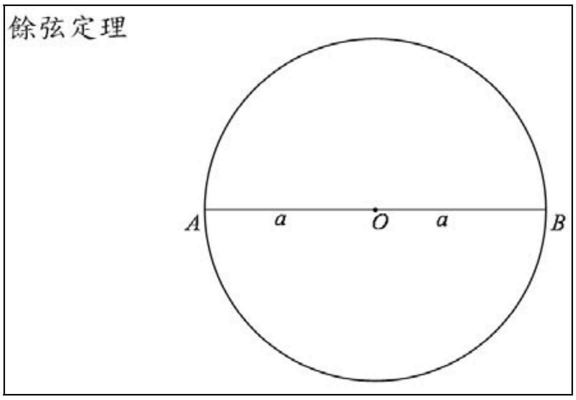

圖 3-3-1-2：以 O 爲圓心，半徑爲 a 做圓 O。

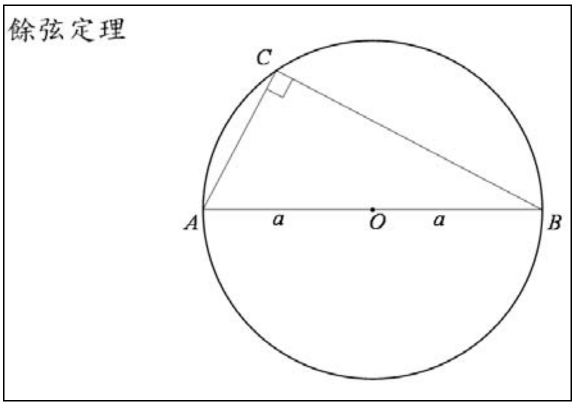

圖 3-3-1-3：圓上一點 C，做二弦 $\overline{AC},\overline{BC}$ ，$\angle C$ 爲直角。

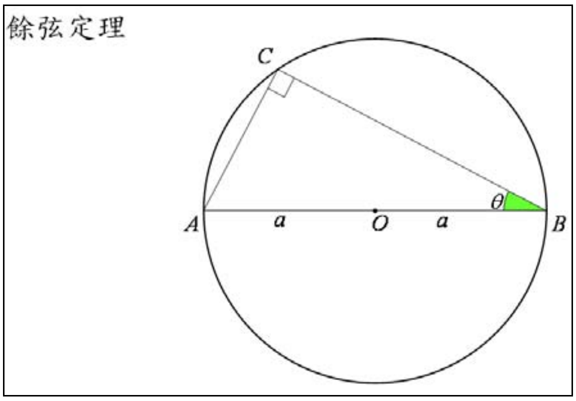

圖 3-3-1-4：設 $\angle B=\theta$ 。

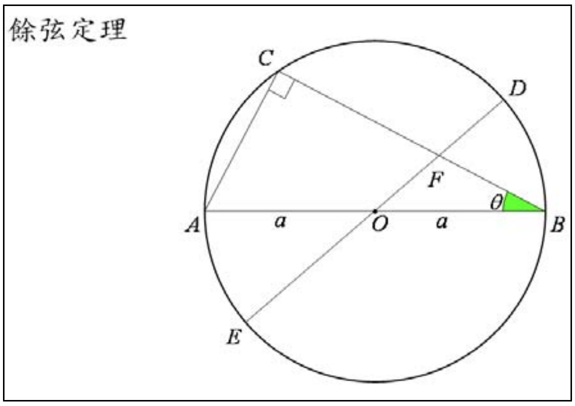

圖 3-3-1-5：做直徑 $\overline{ED}$ ，交 $\overline{BC}$ 於 F。

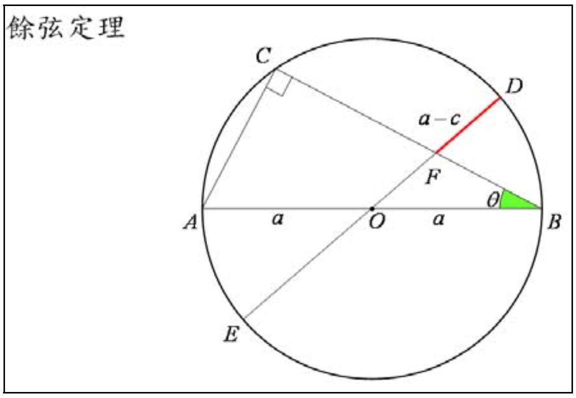

圖 3-3-1-6：顯示 $\overline{DF}=a-c$ 。註：即 $\overline{OF}=c$ 。

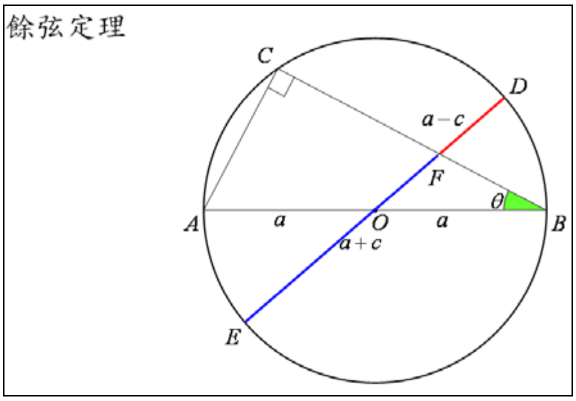

圖 3-3-1-7：顯示 $\overline{EF} = a + c$ 。

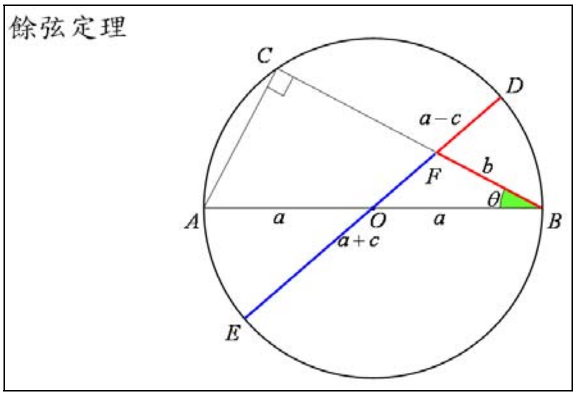

圖 3-3-1-8：顯示 $\overline{BF} = b$ 。

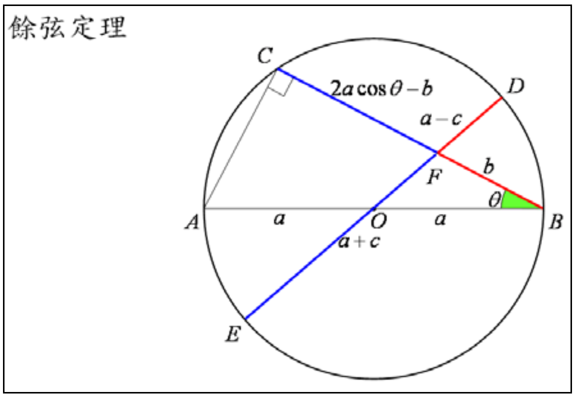

圖 3-3-1-9：顯示 $\overline{CF} = 2a\cos\theta - b$ 。

註：$\because \overline{BC} = 2a\cos\theta$ 。

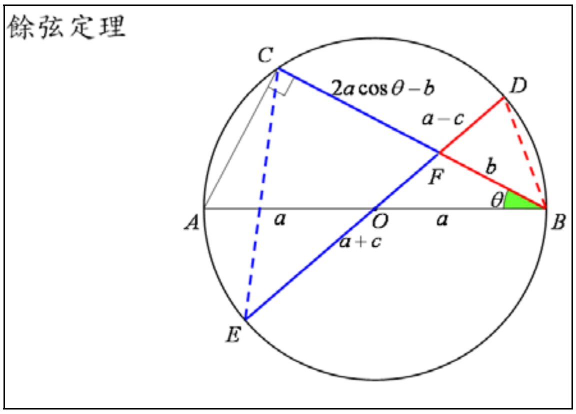

圖 3-3-1-10：連二弦 $\overline{DB}, \overline{CE}$ 。

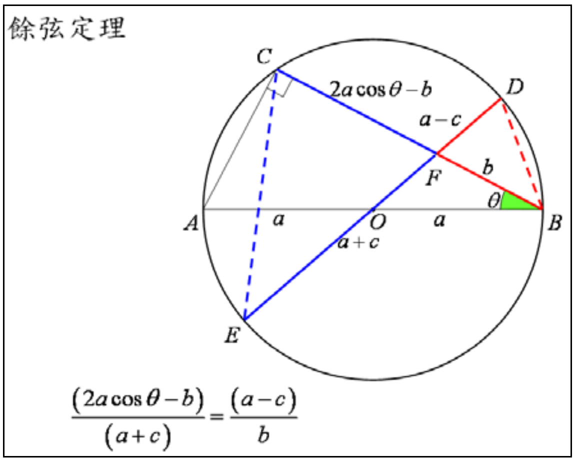

圖 3-3-1-11：由相似三角形$(\Delta CEF \sim \Delta DBF)$得

$$\frac{(2a\cos\theta - b)}{(a+c)} = \frac{(a-c)}{b}\text{ 。}$$

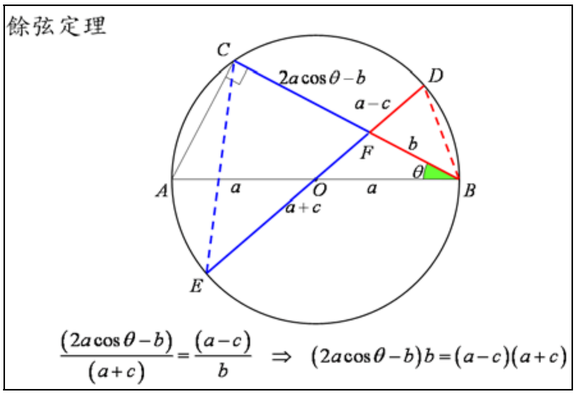

圖 3-3-1-12：兩邊交叉相乘得：

$$(2a\cos\theta - b)b = (a-c)(a+c)\text{ 。}$$

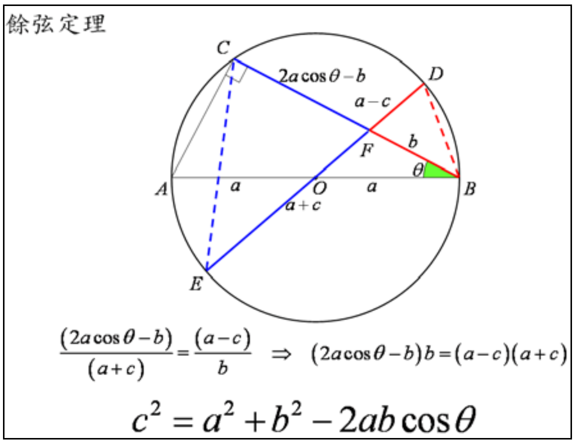

圖 3-3-1-13：整理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$ 。

二、利用托勒密定理(Ptolemy's Theorem)——「圓內接四邊形其對角線長的乘積等於二對的對應邊長的乘積和，即圓內接四邊形 $ABCD$，則 $\overline{AB}\times\overline{CD}+\overline{AD}\times\overline{BC}=\overline{AC}\times\overline{BD}$ 」；然後做圓內接等腰梯形，證明餘弦定理： $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ 。本例是 Proofs Without Words 一書中第 33 頁的例子，作者為 Sidney H. Kung(1993)，但原作者未圖示證明托勒密定理(Ptolemy's Theorem)，故研究者再自行開發其動態圖說證明，在 PowerPoint 中的呈現方式如下列各圖之說明(圖 3-3-2-1～圖 3-3-2-22 為托勒密定理的說明，圖 3-3-2-23～圖 3-3-2-30 為餘弦定理的說明)。

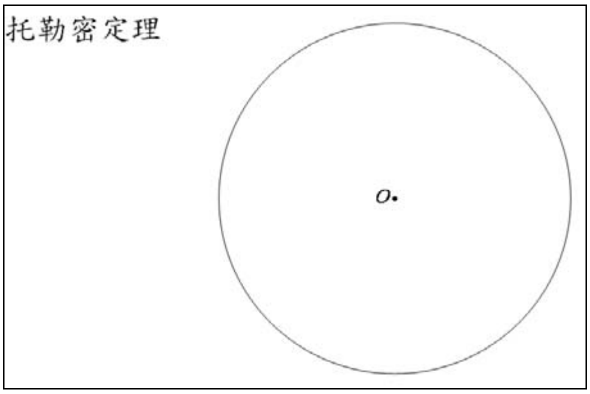

圖 3-3-2-1：平面上任一圓 O。

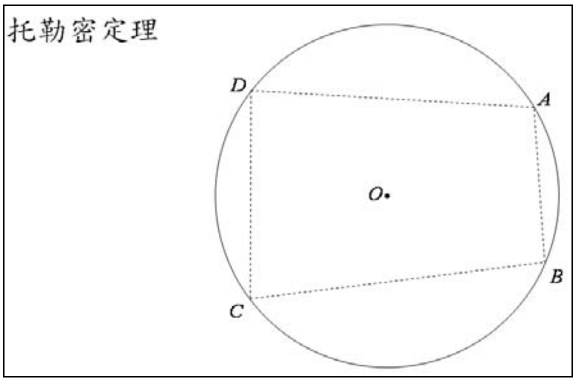

圖 3-3-2-2：做圓內接任意四邊形 $ABCD$。

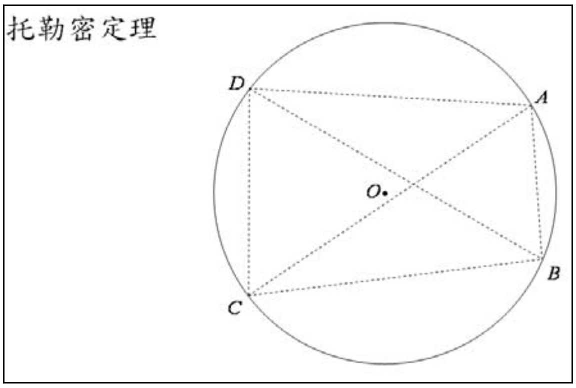

圖 3-3-2-3：連對角線 $\overline{AC},\overline{BD}$ 。

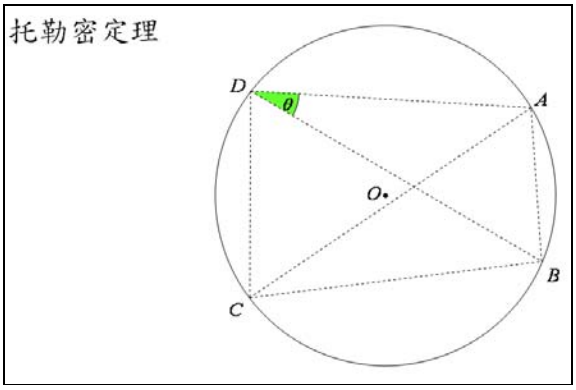

圖 3-3-2-4：設 $\angle ADB=\theta$ 。

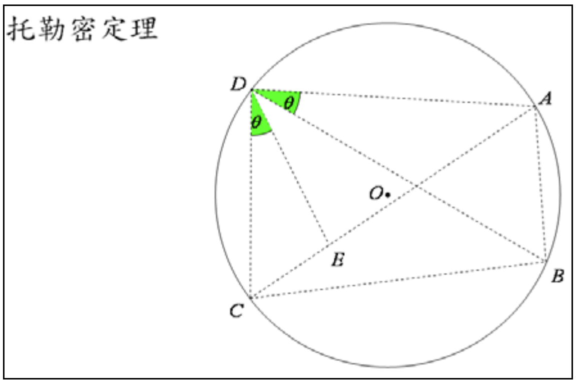

圖 3-3-2-5：做 $\overline{DE}$ 交 $\overline{AC}$ 於 E，使得 $\angle CDE=\theta$ 。

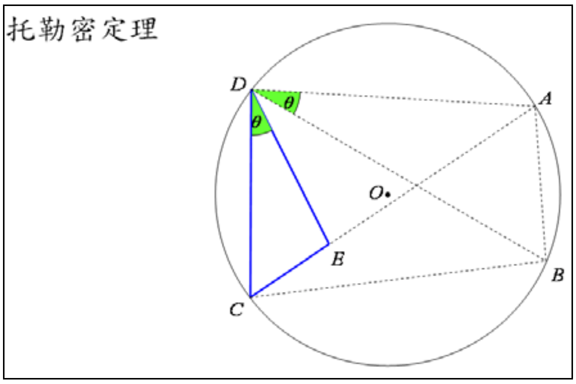

圖 3-3-2-6：標示 ΔCDE 。

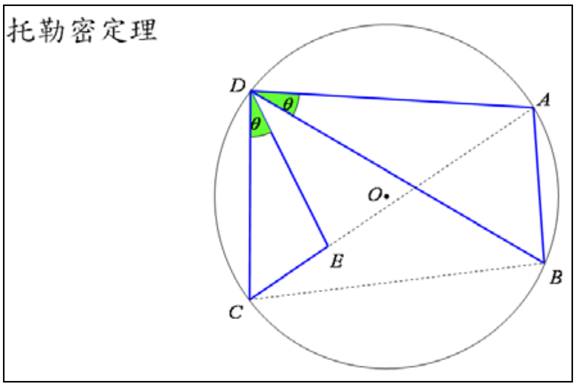

圖 3-3-2-7：再標示 ΔBDA 。

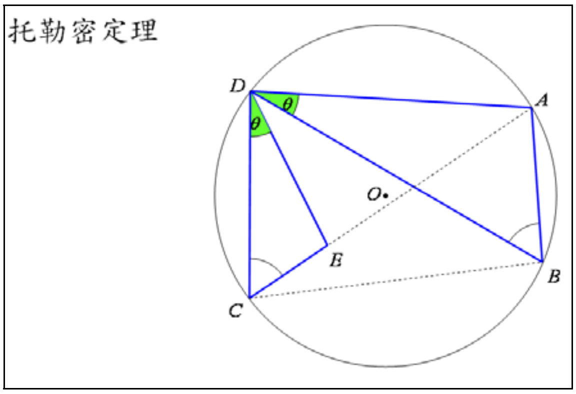

圖 3-3-2-8：標示 $\angle B,\angle C$ 。註：二角對應相同的弧 $\overset{\frown}{AD}$ 。

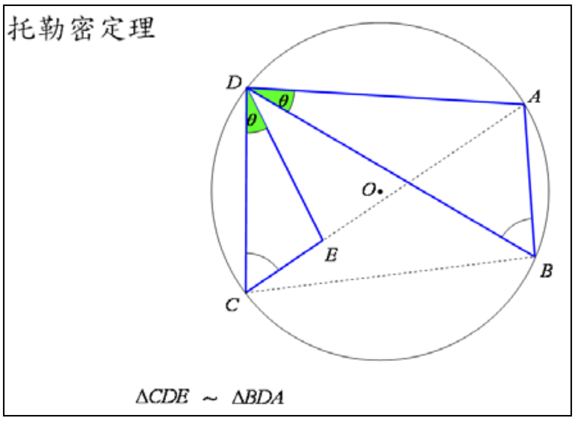

圖 3-3-2-9：得 $\Delta CDE \sim \Delta BDA$ 。

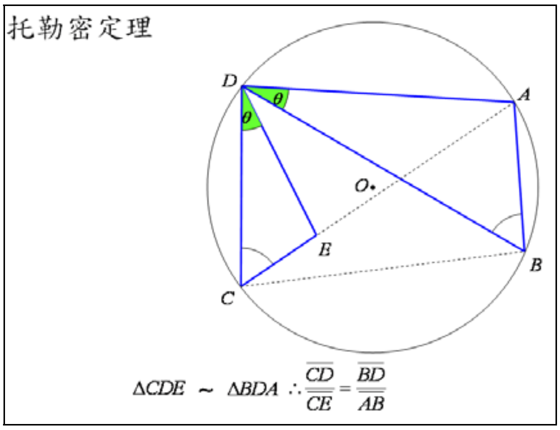

圖 3-3-2-10：得 $\frac{\overline{CD}}{\overline{CE}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}}$ 。

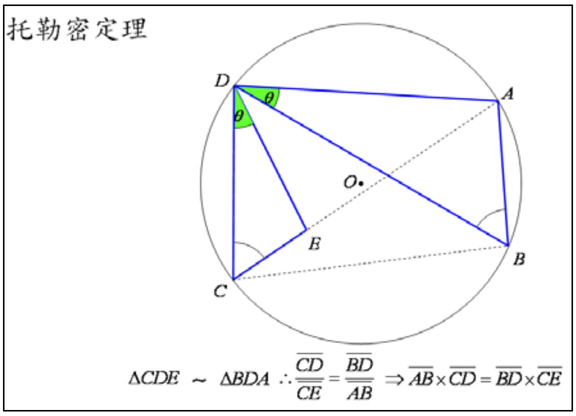

圖 3-3-2-11：交叉相乘得 $\overline{AB}\times\overline{CD}=\overline{BD}\times\overline{CE}$ 。

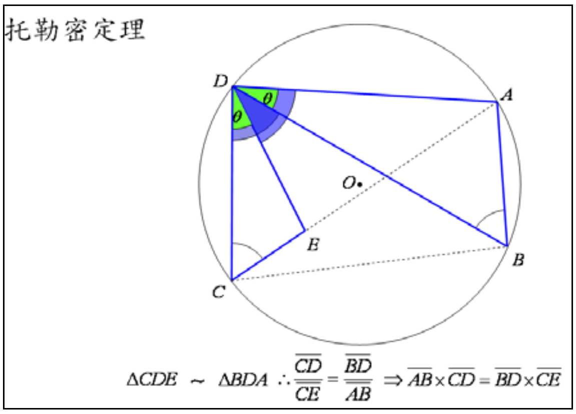

圖 3-3-2-12：標示 $\angle CDB, \angle ADE$ 。

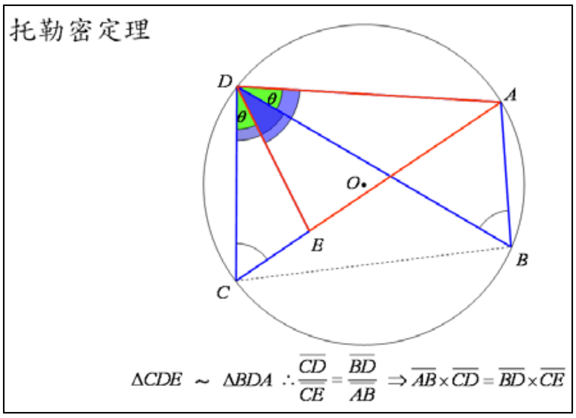

圖 3-3-2-13：標示 ΔADE 。

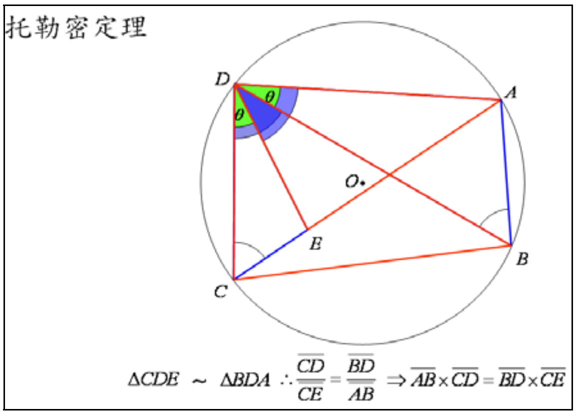

圖 3-3-2-14：再標示 ΔBDC 。

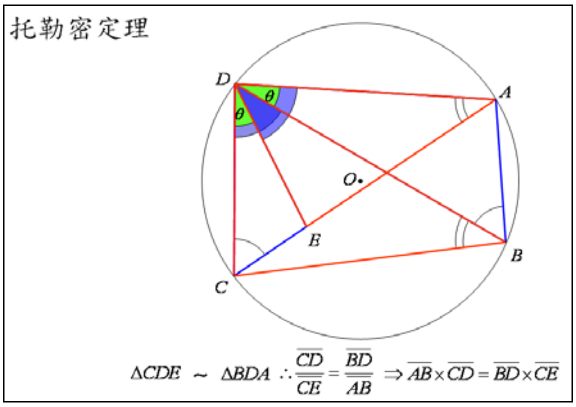

圖 3-3-2-15：標示 $\angle A, \angle B$ 。註：二角對應相同的弧 $\overset{\frown}{CD}$ 。

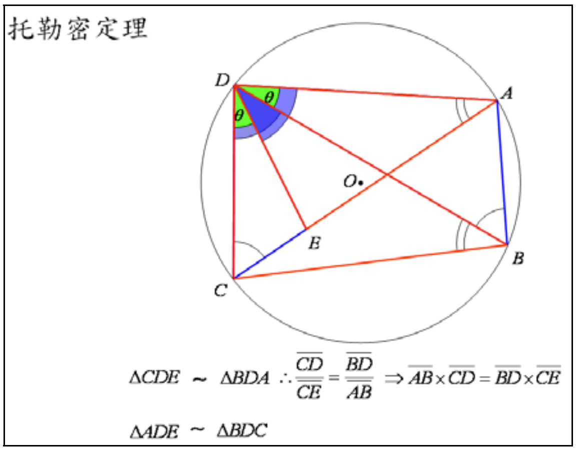

圖 3-3-2-16：得 $\Delta ADE \sim \Delta BDC$ 。

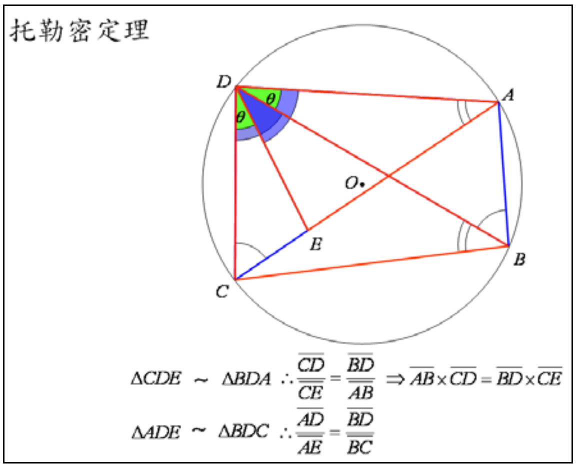

圖 3-3-2-17：得 $\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$ 。

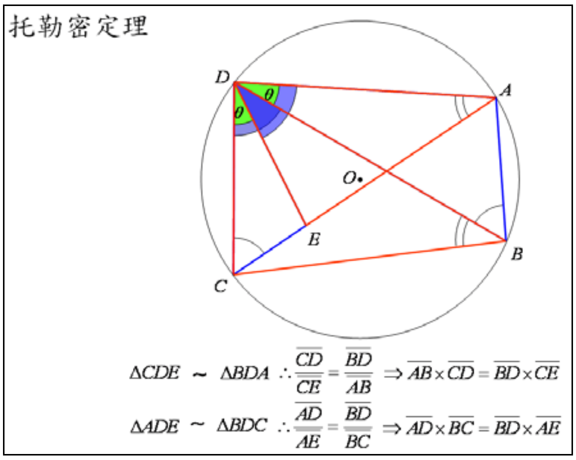

圖 3-3-2-18：交叉相乘得 $\overline{AD}\times\overline{BC}=\overline{BD}\times\overline{AE}$ 。

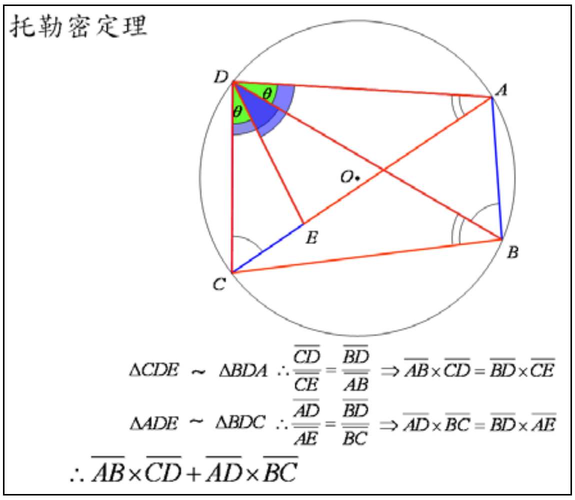

圖 3-3-2-19：顯示 $\overline{AB}\times\overline{CD}+\overline{AD}\times\overline{BC}$ 。

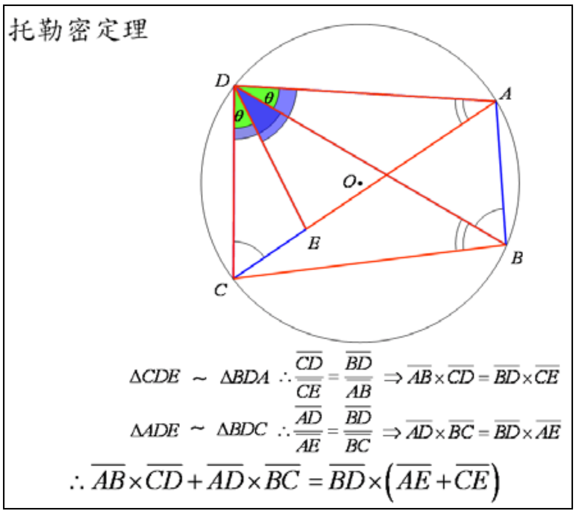

圖 3-3-2-20：得 $=\overline{BD}\times\left(\overline{AE}+\overline{CE}\right)$ 。

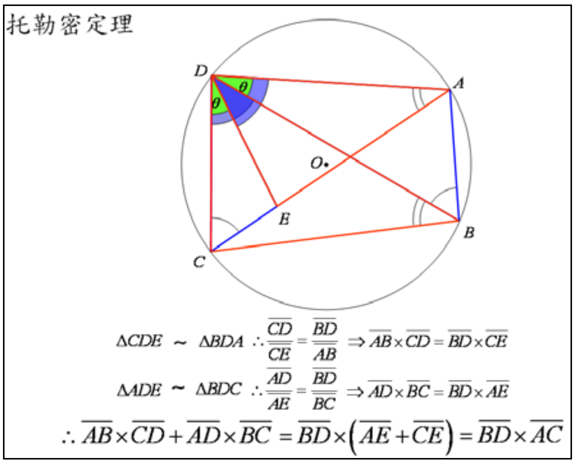

圖 3-3-2-21：得＝ $\overline{BD}\times\overline{AC}$ 。

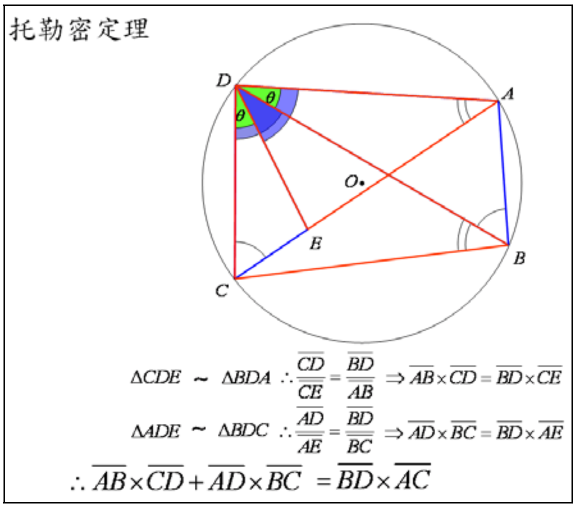

圖 3-3-2-22：將中間項消失，並將＝ $\overline{BD}\times\overline{AC}$ 移動靠近，得

$\overline{AB}\times\overline{CD}+\overline{AD}\times\overline{BC}=\overline{BD}\times\overline{AC}$ 。

註：托勒密定理部分完成。

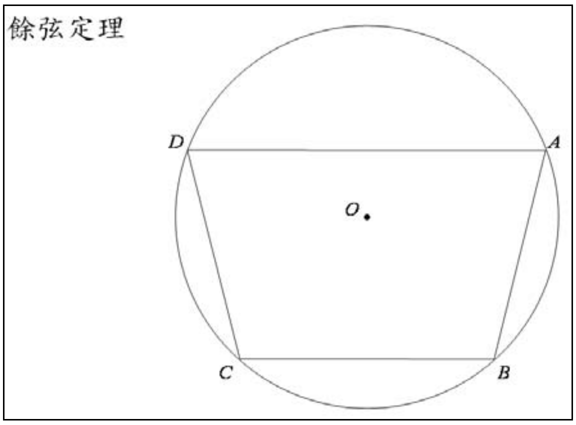

圖 3-3-2-23：圓內接等腰梯形 *ABCD*。

註：餘式定理部分開始。

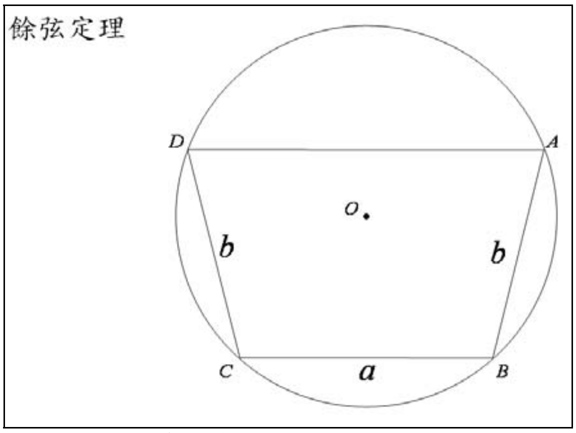

圖 3-3-2-24：令下底爲 a，另二等腰長爲 b。

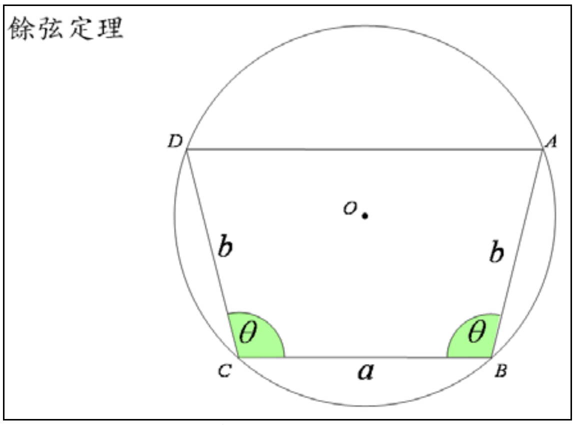

圖 3-3-2-25：設二底角爲 θ 。

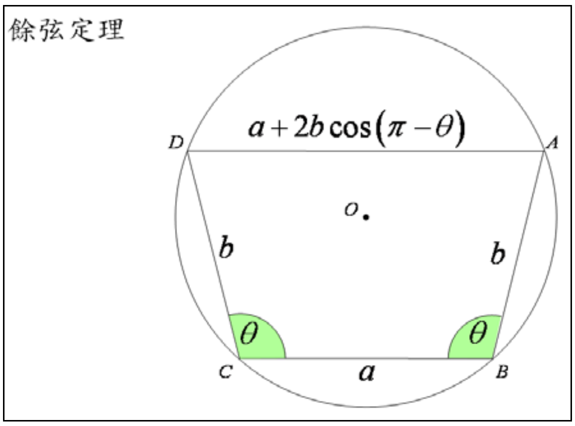

圖 3-3-2-26：得上底 $\overline{AD}$ 爲 $a+2b\cos\left(\pi-\theta\right)$ 。

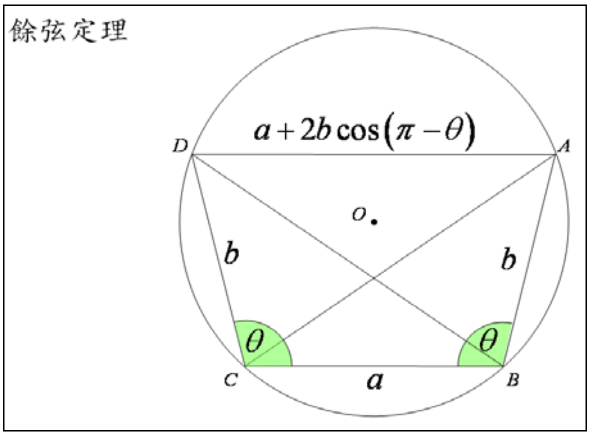

圖 3-3-2-27：連二對角線 $\overline{AC}, \overline{BD}$ 。

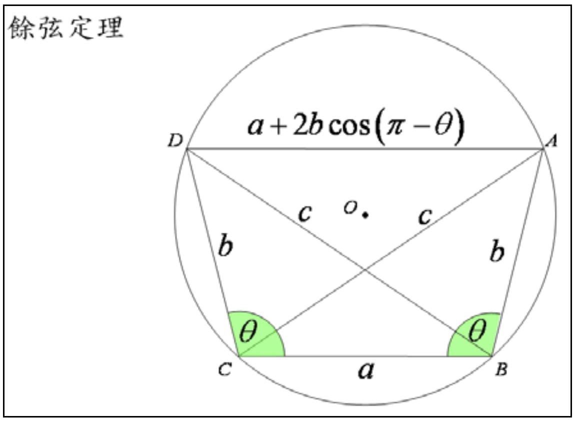

圖 3-3-2-28：令對角線 $\overline{AC}, \overline{BD}$ 長爲 c。

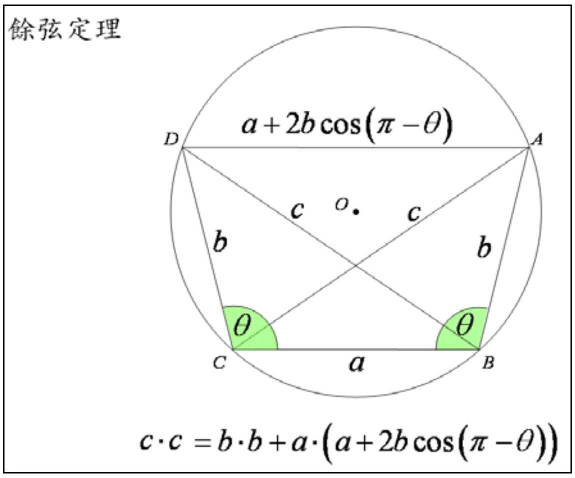

圖 3-3-2-28：由托勒密定理得

$c\cdot c=b\cdot b+a\cdot\left(a+2b\cos\left(\pi-\theta\right)\right)$ 。

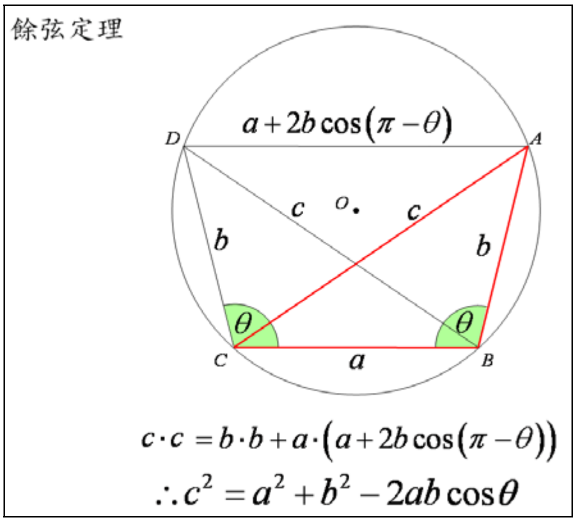

圖 3-3-2-29：整理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$ 。

同時標示 ΔABC