

第四章 和角公式

本章將介紹三角函數中的和角公式。在第一節先利用 GSP 的動態設計與數據的呈現，期望學習者透過操作與觀察能了解一些和角公式；然後在第二節的部分，是介紹正弦函數與餘弦函數的和角、差角公式，在 PowerPoint 的動態圖說證明中，期望學習者了解正弦與餘弦函數的和角、差角公式；第三節則透過 PowerPoint 的動態圖說證明，介紹正切函數的和角與差角公式，期望學習者更容易了解熟悉這些公式的意義。

第一節 動態幾何(GSP)中的操作與觀察

首先研究者希望學習者能透過 GSP 的操作與觀察，來發現定理、公式的正確性，然後再用相同的幾何圖形做動態的圖說證明。研究者設計了三個教學物件，分述如下：

一、教學物件一：正弦函數的和角公式

程式名稱：和角公式 1.gsp，如下圖 4-1-1。

註：可改變紅色點的位置。

$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
by 黃國忠

1. 角度
 $\alpha = 44.566^\circ$
 $\beta = 45.827^\circ$
 $\alpha + \beta = 90.393^\circ$

2. 正餘弦函數值
 $\sin(\alpha) = 0.7017$
 $\cos(\alpha) = 0.7124$
 $\sin(\beta) = 0.7172$
 $\cos(\beta) = 0.6968$
 $\sin(\alpha + \beta) = 1.0000$

3. 函數乘積值
 $\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) = 0.4890$
 $\sin(\beta) \cdot \cos(\alpha) = 0.5110$

$\sin(\alpha + \beta)$	$\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta)$	$\sin(\beta) \cdot \cos(\alpha)$
1.0000	0.4890	0.5110

4. 結論

圖 4-1-1：和角公式

目的：希望學習者經由操作滑鼠、觀察數據，透過設計者所設計的步驟，發現正弦函數的和角公式。

操作與觀察：

1. 在一任意 $\triangle ABC$ 中，學習者可自行改變三頂點 A 、 B 、 C 位置，觀察邊長、角度的變化。
2. 操作者可循設計者設計的按鈕、步驟操作、觀察直到結論為止。
3. 探索問題：
 - a. 移動頂點 B ，當 B 、 D 重合時有什麼狀況，為什麼會如此？
 - b. $\triangle ABC$ 中 $\angle B$ 為銳角、鈍角時對公式有何影響？
4. 先備知識
了解正弦函數、餘弦函數之基本定義。
5. 操作說明
 - a. 操作者需先了解 GSP 環境，及使用方式。
 - b. 可任意移動紅點。
6. 注意事項
 - a. 若操作過程中圖形太大並不影響結果。
 - b. 因為採用矩形內直角三角形的方式做和角公式，故二角皆為銳角。
 - c. 操作過程當 B 與 D 重合時有「Undifined」的訊息產生，教師要能確時了解其意義，並讓同學了解。



二、教學物件二：正、餘弦函數的和角公式

程式名稱：和角公式 3.gsp，如下圖 4-1-2

The Geometer's Sketchpad - [和角公式]

File Edit Display Construct Transform Measure Graph Window Help

註：可改變紅色點的位置。

1. 角度

$\angle AEF = 90^\circ$
 $\alpha = 30.129^\circ$
 $\beta = 42.202^\circ$
 $\alpha + \beta = 72.332^\circ$

2. 三角函數值

$\sin(\beta) = 0.6717$
 $\sin(\alpha) = 0.5020$
 $\cos(\alpha) = 0.8649$
 $\cos(\beta) = 0.7408$
 $\sin(\alpha + \beta) = 0.9528$
 $\cos(\alpha + \beta) = 0.3035$

3. 函數乘積值

$\sin(\beta) \cdot \cos(\alpha) = 0.5810$ $\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = 0.6407$
 $\cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) = 0.3718$ $\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) = 0.3372$

$\sin(\alpha + \beta)$	$\sin(\beta) \cdot \cos(\alpha)$	$\cos(\beta) \cdot \sin(\alpha)$
0.9528	0.5810	0.3718

$\cos(\alpha + \beta)$	$\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)$	$\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$
0.3035	0.6407	0.3372

4. 結論

$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
 by 黃國忠

圖 4-1-2：和角公式

目的：希望學習者經由操作滑鼠、觀察數據，透過設計者所設計的步驟，發現正弦函數與餘弦函數的和角公式。

操作與觀察：

1. 在一任意矩形 $ABCD$ 中，學習者可自行改變二頂點 C 、 D 位置。
2. 矩形邊上一點 E ，使用者可改變其位置，觀察所形成的三角形之角度變化。
3. 操作者可循設計者設計的按鈕、步驟操作、觀察直到結論為止。
4. 探索問題
 - a. 移動頂點 B ，當 F 、 D 重合時有什麼狀況，為什麼會如此？
 - b. 移動頂點 D ，當 A 、 D 重合時有什麼狀況，為什麼會如此？
 - c. 移動點 E ，當 E 、 B 重合時有什麼狀況，為什麼會如此？
 - d. 移動點 E ，當 E 、 C 重合時有什麼狀況，為什麼會如此？
 - e. 移動頂點 B ，讓矩形為狹長形，再移動 E 點，會發生無法做內部直角三角形，為

什麼會如此？

5. 先備知識

了解正弦函數、餘弦函數之基本定義。

6. 操作說明

a. 操作者需先了解 GSP 環境，及使用方式。

b. 可任意移動紅點。

7. 注意事項

a. 若操作過程中圖形太大並不影響結果。

b. 因為採用矩形內部做直角三角形的方式做和角公式，故二角皆為銳角，有時無法形成三角形。

c. 操作過程當 B 與 D 重合時有「Undefined」的訊息產生，教師要能確實了解其意義，並讓同學了解。

d. 當矩形邊長比過大時，會產生無法做內部直角三角形的狀況。



三、教學物件三：正切函數的和角公式

程式名稱：和角公式 10.gsp，如下圖 4-1-3

The Geometer's Sketchpad - [和角公式10]

File Edit Display Construct Transform Measure Graph Window Help

註：可改變紅色點的位置。

1. 角度
 $\alpha = 43.685^\circ$
 $\beta = 23.032^\circ$

2. 各邊長
 $\tan(\alpha) = 0.9551$
 $\tan(\beta) = 0.4251$
 $\sec(\alpha) = 1.3828$
 $\sec(\alpha)\tan(\beta) = 0.5879$
 $\tan(\alpha)\tan(\beta) = 0.4060$

3. 運算值
 $\tan(\alpha+\beta) = 2.3238$
 $\frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)} = 2.3238$

$\tan(\alpha+\beta)$	$\frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\tan(\beta)}$
2.3238	2.3238

4. 結論

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

 by 黃國忠

圖 4-1-3：和角公式

目的：希望學習者經由操作滑鼠、觀察數據，透過設計者所設計的步驟，發現正切函數的和角公式。

操作與觀察：

1. 在一矩形 $ABCD$ 中 $\overline{AB} = 1$ ，學習者可自行改變另一邊長。
2. 矩形邊上一點 E ，使用者可改變其位置，觀察所形成的直角三角形之角度變化。
3. 操作者可循設計者設計的按鈕、步驟操作、觀察直到結論為止。
4. 探索問題
 - a. 移動頂點 D ，當 A 、 D 重合時有什麼狀況，為什麼會如此？
 - b. 移動點 E ，當 E 、 B 重合時有什麼狀況，為什麼會如此？
 - c. 移動點 E ，當 E 、 C 重合時有什麼狀況，為什麼會如此？
 - d. 移動頂點 D ，讓矩形為狹長形 ($\overline{AD} > \overline{AB}$)，再移動 E 點，會發生無法做內部直角三

角形，為什麼會如此？

e. 移動頂點 D ，讓矩形為狹長形 ($\overline{AD} < \overline{AB}$)，再移動 E 點，並不會發生上述狀況，為什麼會如此？

5. 先備知識

了解正切函數、正割函數之基本定義。

6. 操作說明

a. 操作者需先了解 GSP 環境，及使用方式。

b. 可任意移動紅點。

7. 注意事項

a. 若操作過程中圖形太大並不影響結果。

b. 因為採用矩形內部做直角三角形的方式做和角公式，故二角皆為銳角，且有時無法形成三角形。

c. 當矩形邊長比過大時 ($\overline{AD} > \overline{AB}$)，會產生無法做內部直角三角形的狀況。

