第二節　正餘弦函數的和角公式之動態圖說證明

在傳統課本中，總是先求$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$，然後利用此一公式及課程中先行介紹的「廣義角的三角函數」內一小單元「化任意角爲銳角的三角函數」，來推論後續的$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$、$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$及$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$，但在推導的過程中學生常對「化任意角爲銳角的三角函數」中的正負關係不清楚而有錯誤的結果。而推導$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$的公式時是應用：以原點$O$爲圓心的單位圓上二點$A(\cos\alpha,\sin\alpha)$、$B(\cos\beta,\sin\beta)$其中$\alpha,\beta$爲有向角且$\alpha>\beta$，利用距離公式求$\overline{AB}$，再加上餘弦定理$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\overline{OA}\,\overline{OB}\cos(\alpha-\beta)$，而得到$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$，其過程如下，圖形請參考下圖 4-2：

由二點距離公式得

$$\overline{AB}=\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2}=\sqrt{2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)}$$

$$\Rightarrow \overline{AB}^2=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$$

又由餘弦定理得

$$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\overline{OA}\,\overline{OB}\cos(\alpha-\beta)=1+1-2\cos(\alpha-\beta)$$
$$=2-2\cos(\alpha-\beta)$$

所以$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$。

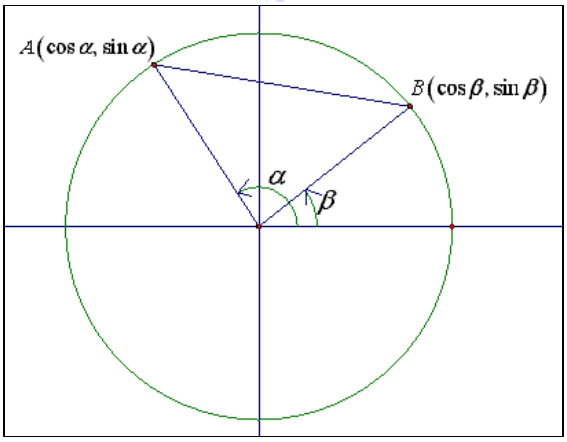

圖 4-2

但根據筆者教學經驗，在此有幾個問題常被學生提出來：(1)距離公式忘了；(2)單位圓是什麼？(註：高中課程中圓爲第三冊範圍)(3)若$\alpha-\beta$不是銳角或鈍角時是否仍成立？(4)爲什麼A、B兩點的坐標分別爲$(\cos\alpha,\sin\alpha)$、$(\cos\beta,\sin\beta)$？

本節是利用基本的幾何圖形如直角三角形、矩形或圓形，透過 PowerPoint 的動態呈現來

介紹正餘弦函數之和角公式的動態圖說證明，在此共設計了九個例子，未來的研究者可以選擇其中幾個例子做爲教學上的實驗研究，以了解其對學生學習之影響。

一、$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

本例是利用三角形面積相等的關係來推導$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$，本例是 Proofs Without Words Ⅱ一書中第 39 頁的例子，作者爲 Christopher Brueningsen(2000)，在 PowerPoint 中的呈現方式如下列各圖(圖 4-2-1-1～圖 4-2-1-16)。

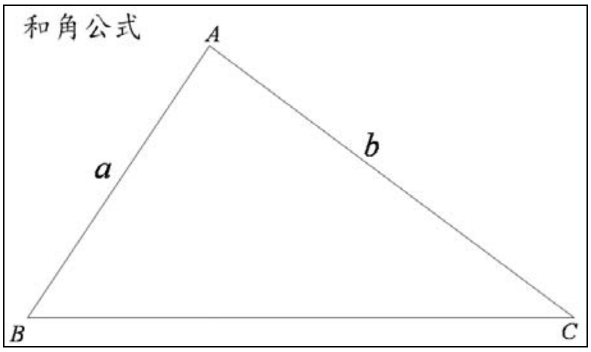

圖 4-2-1-1：任一ΔABC中，$\overline{AB}=a$, $\overline{AC}=b$。

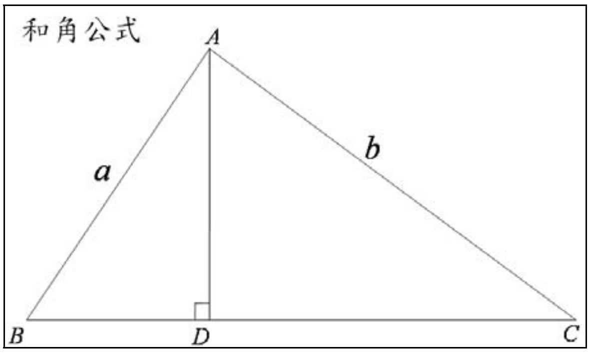

圖 4-2-1-2：做$\overline{AD}\perp\overline{BC}$於 D。

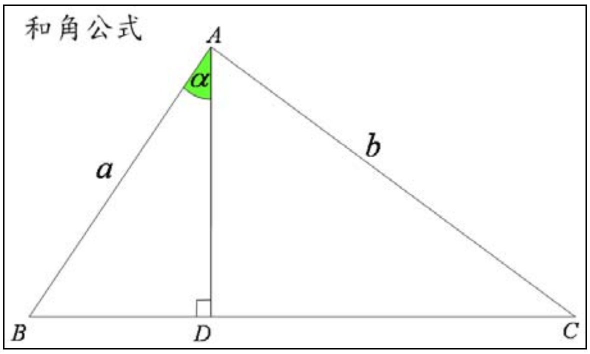

圖 4-2-1-3：標示$\angle BAD$爲α。

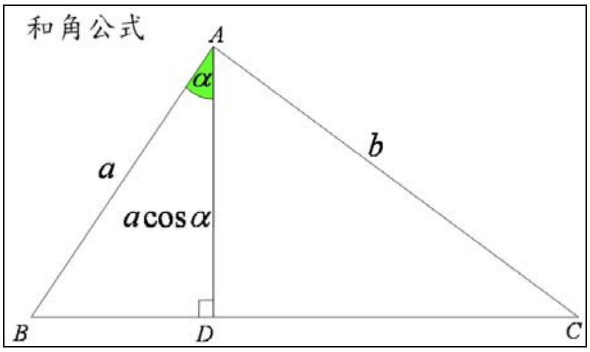

圖 4-2-1-4：得$\overline{AD}=a\cos\alpha$。

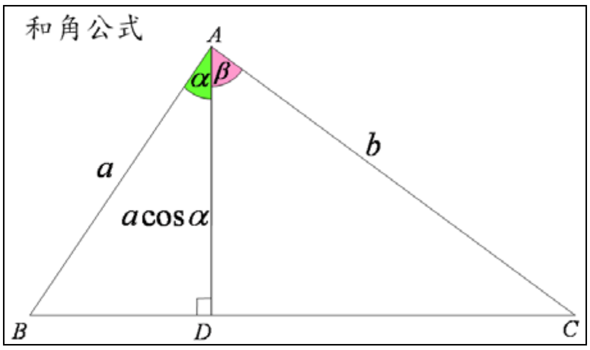

圖 4-2-1-5：標示$\angle CAD$爲β。

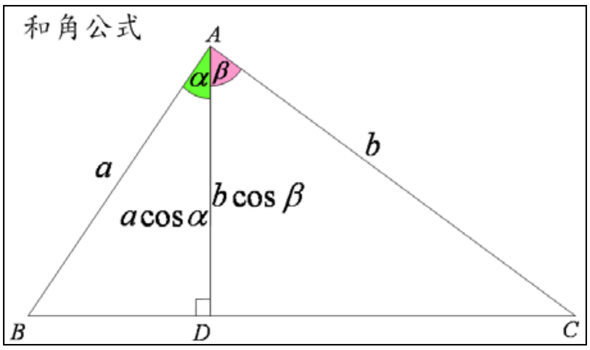

圖 4-2-1-6：得$\overline{AD}=b\cos\beta$。

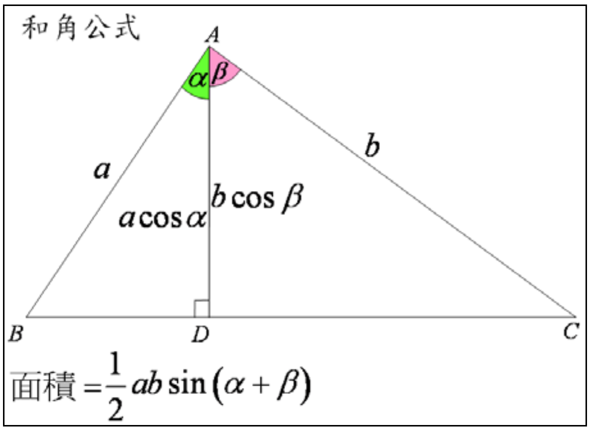

圖 4-2-1-7：得 ΔABC 的面積 $=\dfrac{1}{2}ab\sin\left(\alpha+\beta\right)$。

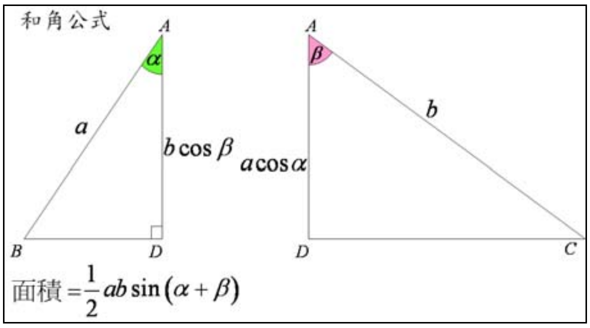

圖 4-2-1-8：移動 ΔACD。

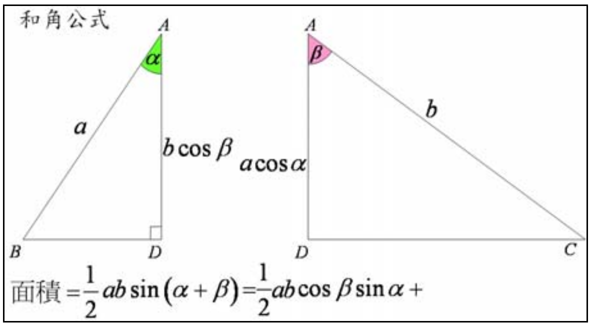

圖 4-2-1-9：得 $=\dfrac{1}{2}ab\cos\beta\sin\alpha+$。

註：左邊直角三角形 ΔABD 面積。

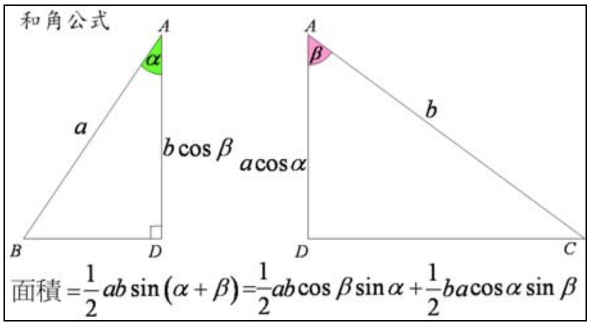

圖 4-2-1-10：再得 $\dfrac{1}{2}ba\cos\alpha\sin\beta$。

註：右邊直角三角形 ΔACD 面積。

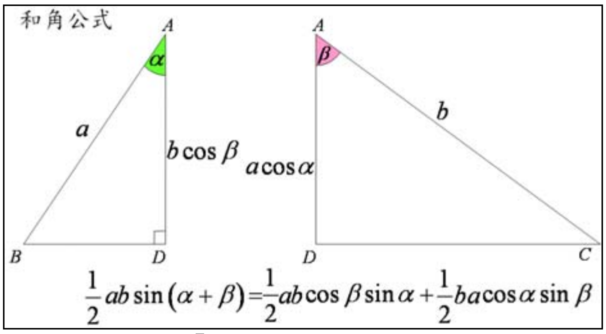

圖 4-2-1-11：將「面積=」消去。

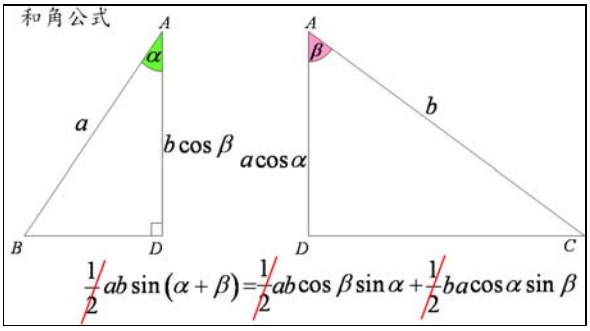

圖 4-2-1-12：出現斜線，將 $\dfrac{1}{2}$ 約去。

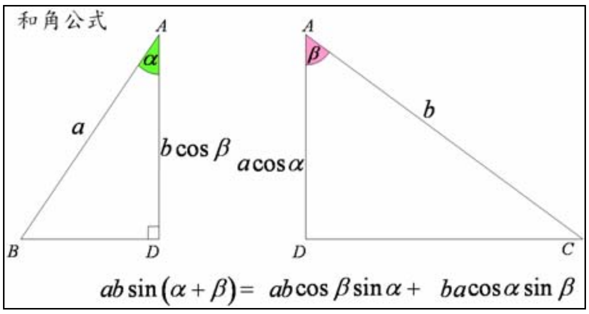

圖 4-2-1-13：將 $\dfrac{1}{2}$ 及斜線消失。

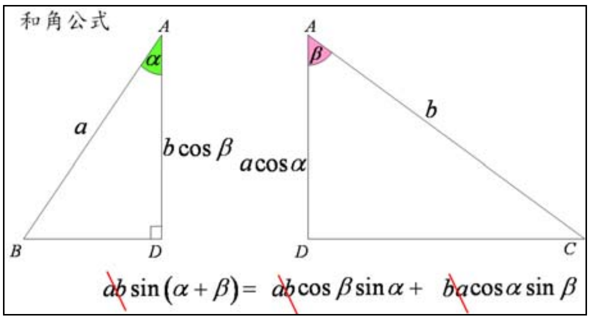

圖 4-2-1-14：出現斜線，將 ab 約去。

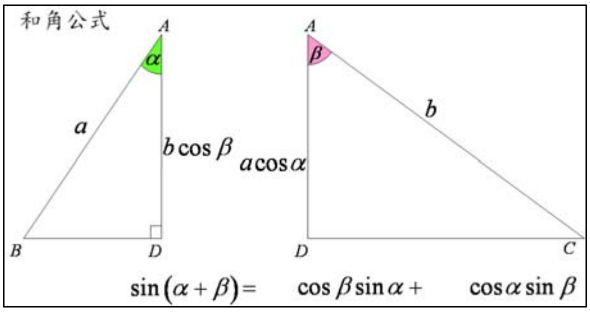

圖 4-2-1-15：將 ab 及斜線消失。

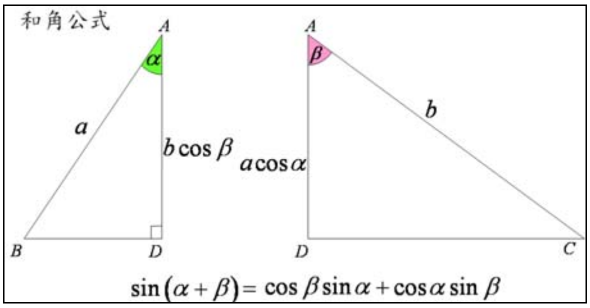

圖 4-2-1-16：移動調整得 $\sin(\alpha+\beta)=\cos\beta\sin\alpha+\cos\alpha\sin\beta$ 。

二、$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

本例也是利用三角形面積相等的關係來推導 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ ，本例是 Proofs Without Words Ⅱ一書中第 41 頁的例子，作者爲 Sidney H. Kung(2000)，在 PowerPoint 中的呈現方式如下列各圖(圖 4-2-2-1～圖 4-2-2-20)。

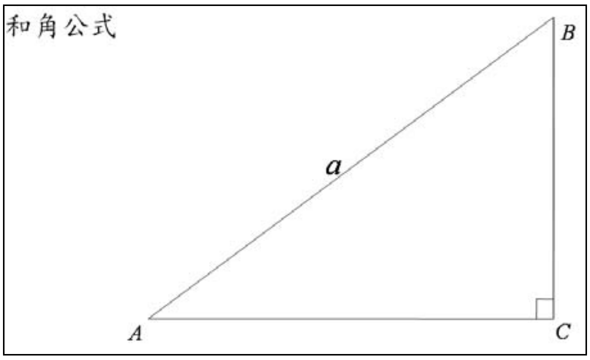

圖 4-2-2-1：任一直角 ΔABC ，$\overline{AB}=a$ 。

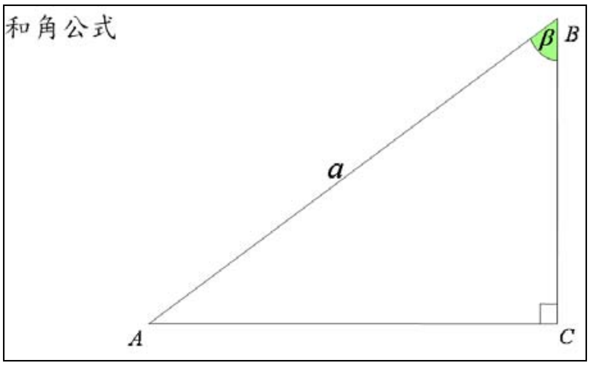

圖 4-2-2-2：標示 $\angle B$ 爲 β 。

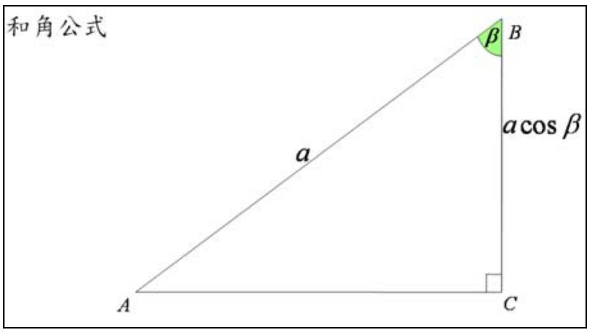

圖 4-2-2-3：得 $\overline{BC}=a\cos\beta$ 。

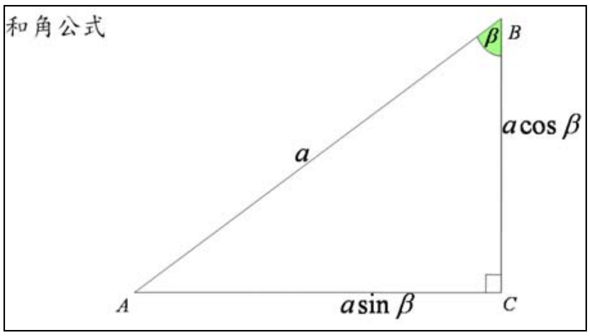

圖 4-2-2-4：得 $\overline{AC}=a\sin\beta$ 。

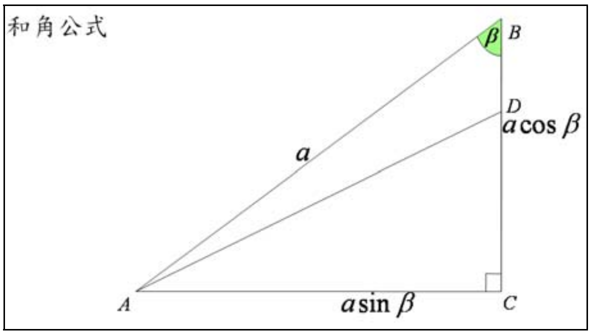

圖 4-2-2-5：做 $\overline{AD}$ 交 $\overline{BC}$ 於 D。

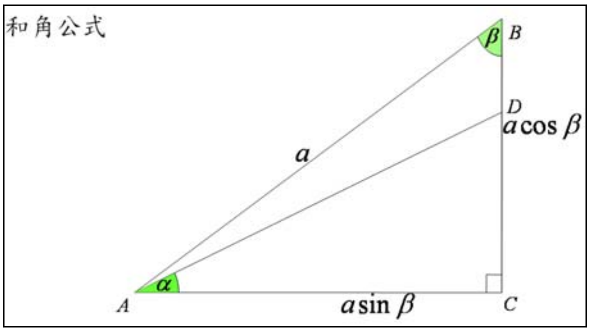

圖 4-2-2-6：設 $\angle CAD=\alpha$ 。

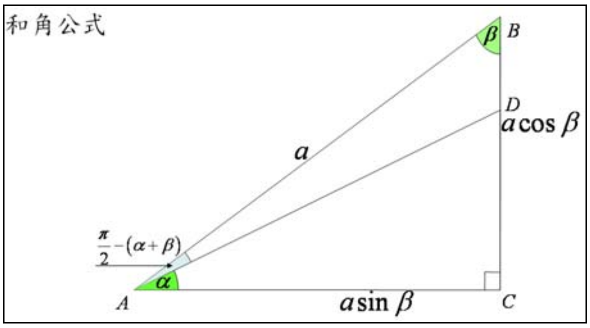

圖 4-2-2-7：得 $\angle BAD=\frac{\pi}{2}-\left(\alpha+\beta\right)$ 。

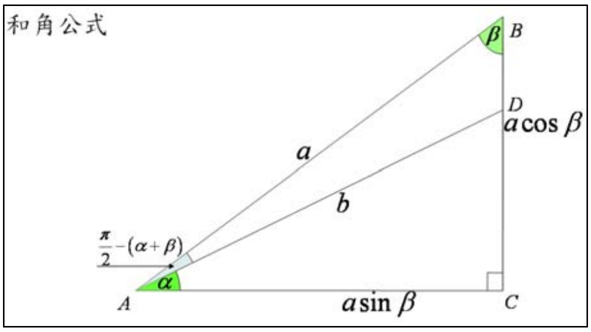

圖 4-2-2-8：設 $\overline{AD}=b$ 。

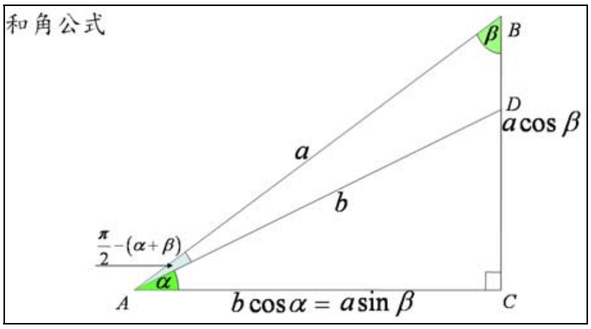

圖 4-2-2-9：得 $\overline{AC}=b\cos\alpha$ 。

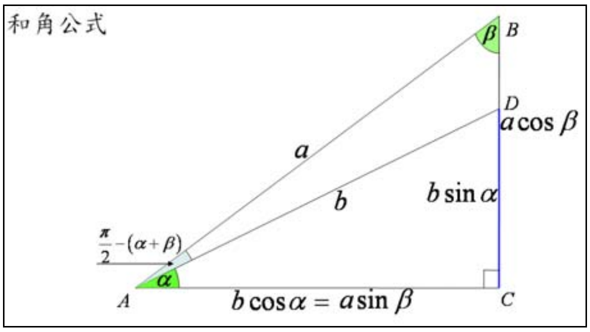

圖 4-2-2-10：標示 $\overline{CD}$，並得 $\overline{CD}=b\sin\alpha$ 。

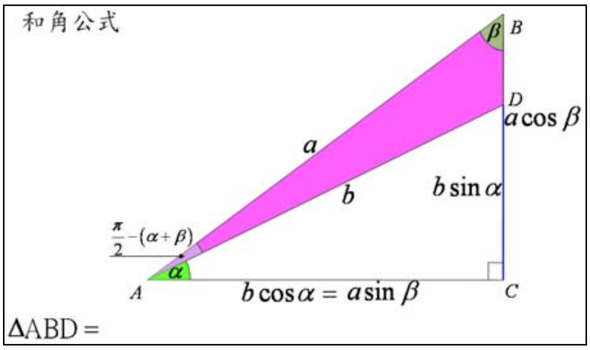

圖 4-2-2-11：標示 ΔABD 。

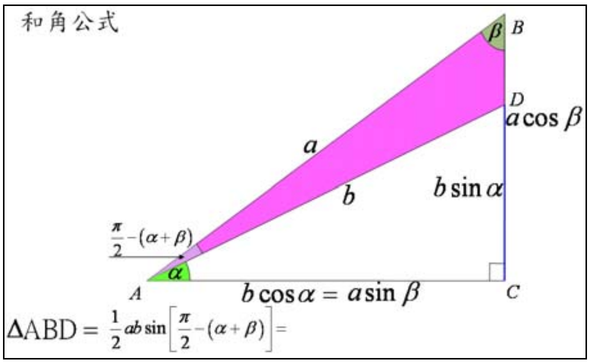

圖 4-2-2-12：得 ΔABD 面積為

$$\frac{1}{2}ab\sin\left[\frac{\pi}{2}-\left(\alpha+\beta\right)\right]$$ 。

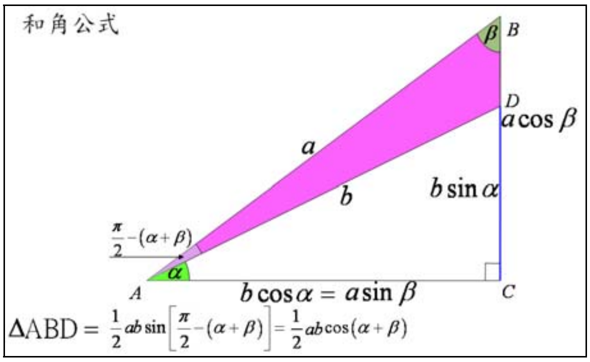

圖 4-2-2-13：化簡得 $\dfrac{1}{2}ab\cos\left(\alpha+\beta\right)$ 。

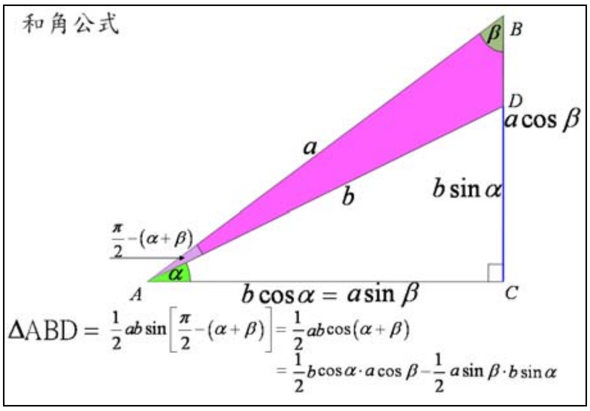

圖 4-2-2-14：利用二面積相減得

$\dfrac{1}{2}b\cos\alpha a\cdot\cos\beta-\dfrac{1}{2}a\sin\beta\cdot b\sin\alpha$ 。

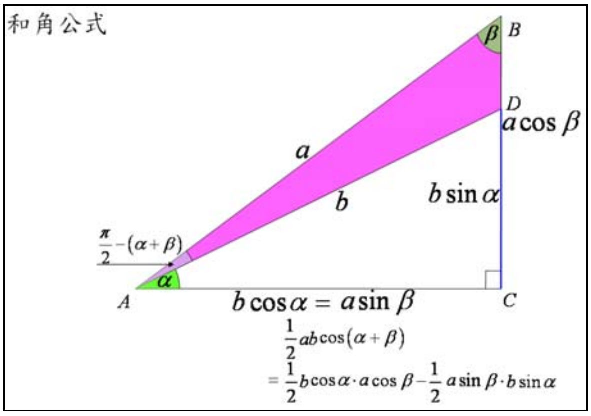

圖 4-2-2-15：將 $\Delta ABD=\dfrac{1}{2}ab\sin\left[\dfrac{\pi}{2}-\left(\alpha+\beta\right)\right]$

消失。

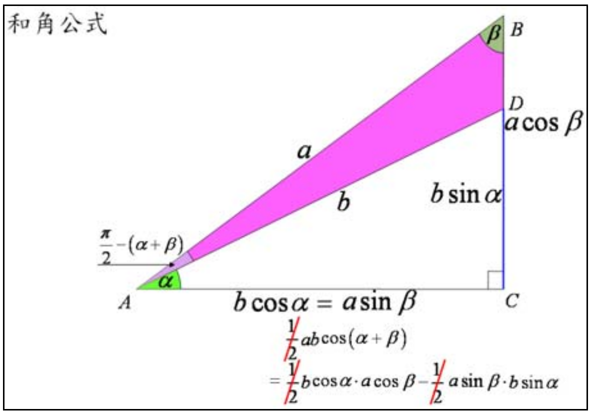

圖 4-2-2-16：出現斜線，將 $\dfrac{1}{2}$ 約去。

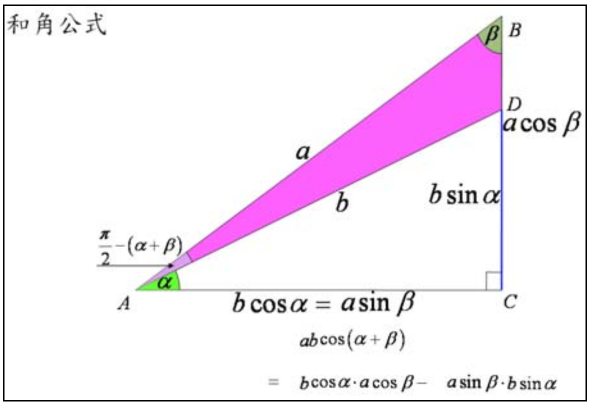

圖 4-2-2-17：將 $\dfrac{1}{2}$ 及斜線消失。

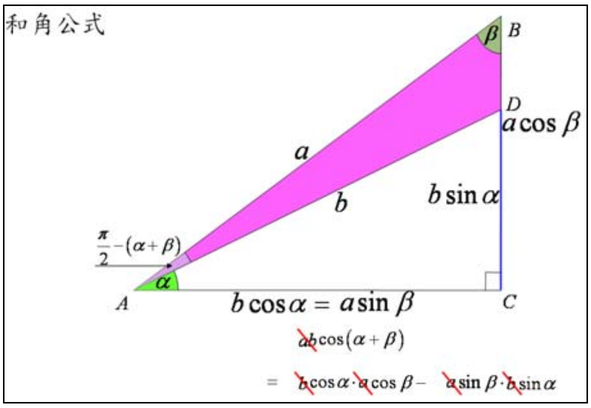

圖 4-2-2-18：出現斜線，將 ab 約去。

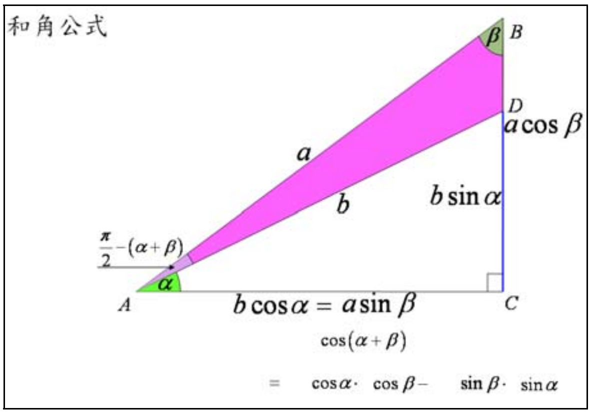

圖 4-2-2-19：將 ab 及斜線消失。

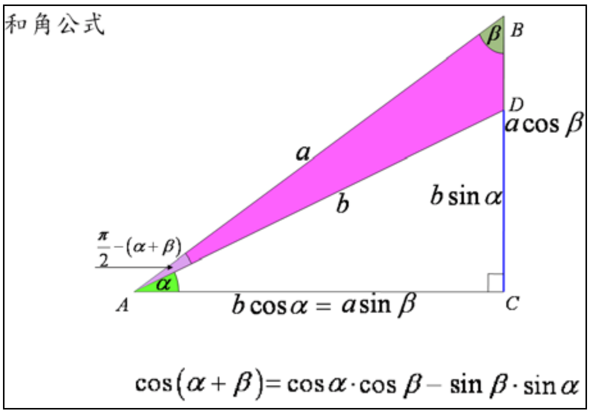

圖 4-2-2-20：移動調整得 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\beta\cdot\sin\alpha$。

三、$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ 與 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

本例是利用矩形中的直角三角形，來推導 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ 與 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ 二公式，本例是 Proofs Without Words Ⅱ一書中第 46 頁的例子，作者為 R. B. Nelsen(2000)，在 PowerPoint 中的呈現方式如下列各圖(圖 4-2-3-1～圖 4-2-3-15)。

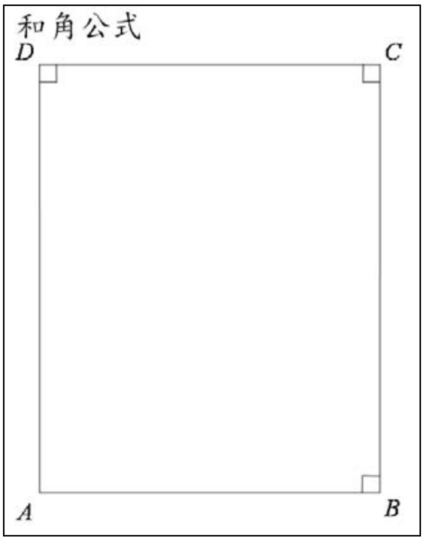

圖 4-2-3-1：任一矩形 $ABCD$。

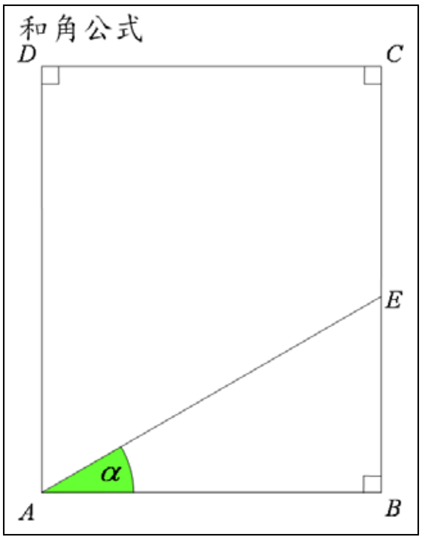

圖 4-2-3-2：做 $\overline{AE}$ 交 $\overline{BC}$ 於 E，且 $\angle BAE=\alpha$。

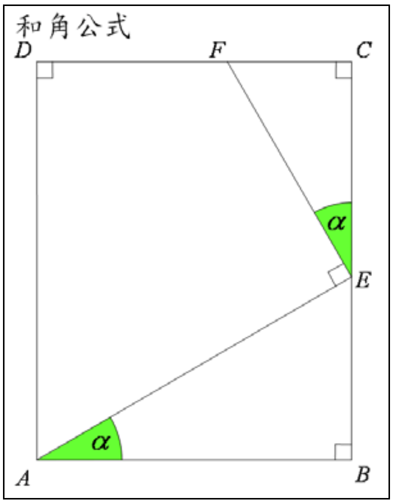

圖 4-2-3-3：做 $\overline{EF} \perp \overline{AE}$ 交 $\overline{CD}$ 於 F ，得 $\angle CEF = \alpha$ 。

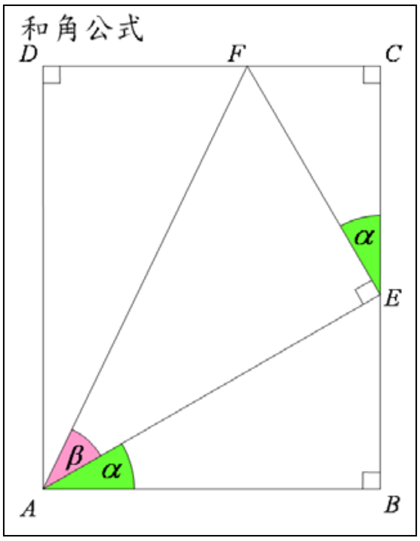

圖 4-2-3-4：做 $\overline{AF}$ ，設 $\angle EAF = \beta$ 。

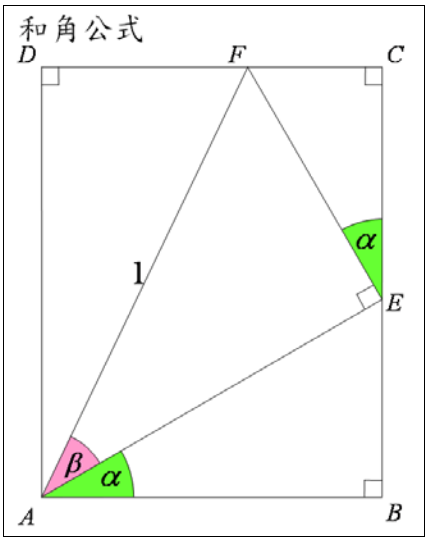

圖 4-2-3-5：令 $\overline{AF} = 1$ 。

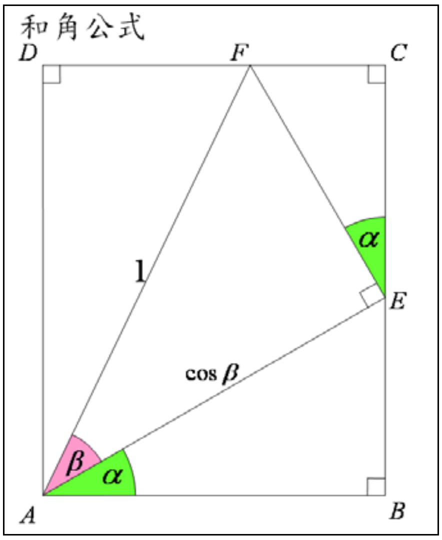

圖 4-2-3-6：由直角 ΔAEF 得 $\overline{AE} = \cos\beta$ 。

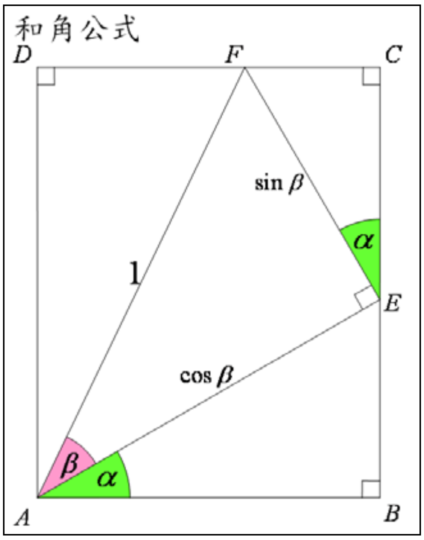

圖 4-2-3-7：得 $\overline{EF} = \sin\beta$ 。

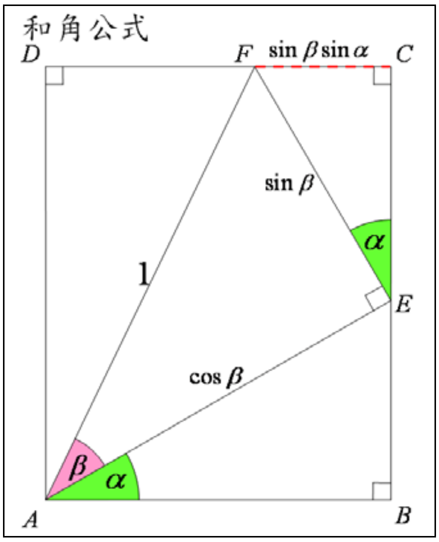

圖 4-2-3-8：由直角 ΔEFC 得 $\overline{CF} = \sin\beta\sin\alpha$ 。

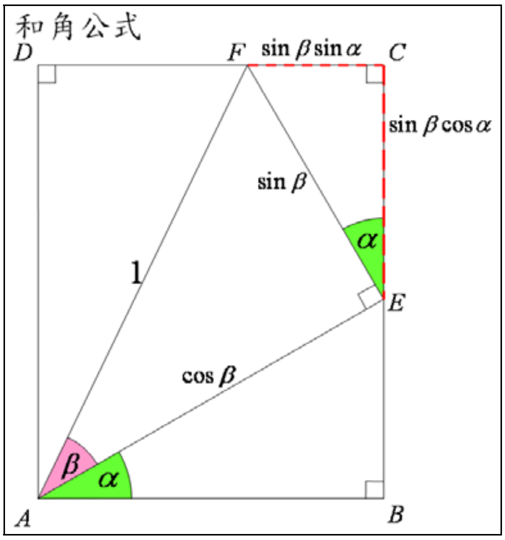

圖 4-2-3-9：得 $\overline{CE}=\sin\beta\cos\alpha$ 。

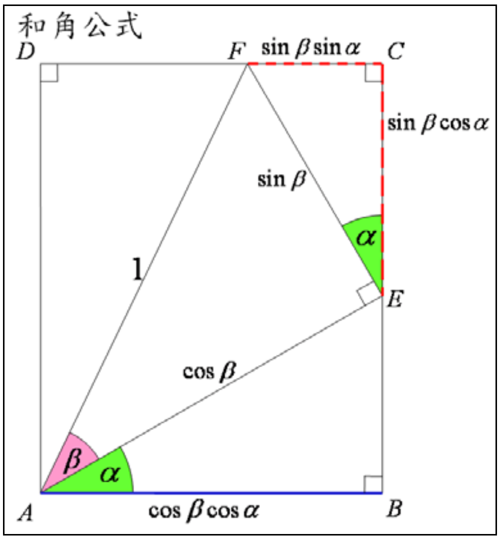

圖 4-2-3-10：由直角 ΔABE 得 $\overline{AB}=\cos\beta\cos\alpha$ 。

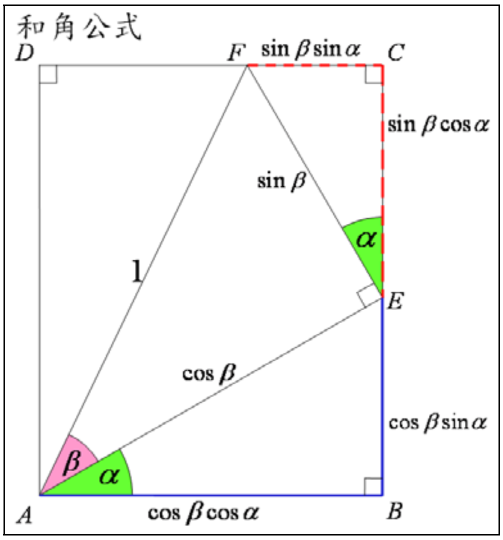

圖 4-2-3-11：得 $\overline{BE}=\cos\beta\sin\alpha$ 。

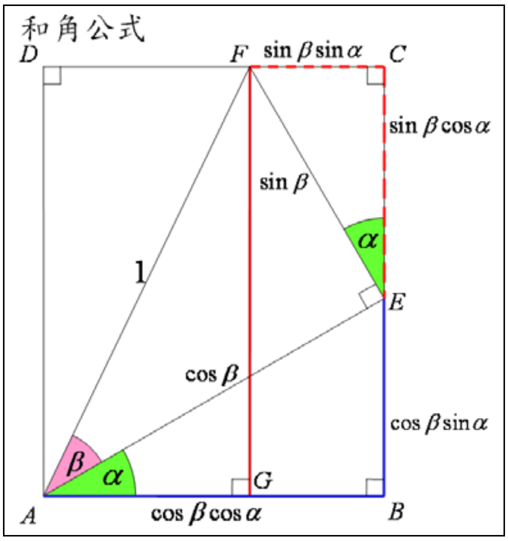

圖 4-2-3-12：做 $\overline{FG}\perp\overline{AB}$ 於 G 。

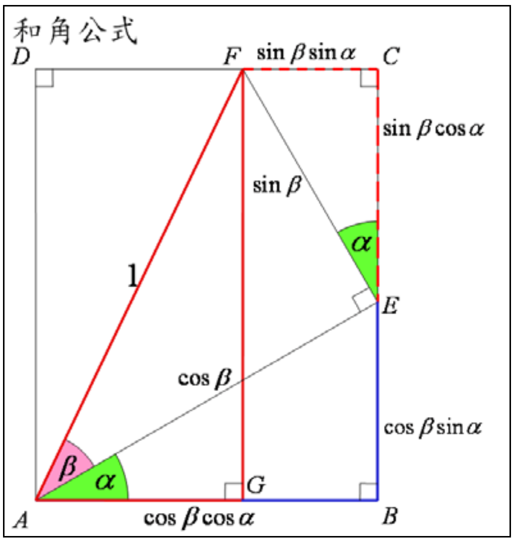

圖 4-2-3-13：標示直角 ΔAFG 。

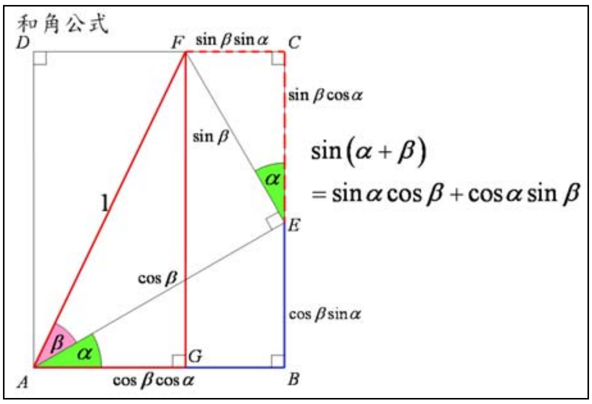

圖 4-2-3-14：得 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ 。

註：$\overline{FG}=\overline{CB}=\overline{CE}+\overline{EB}$ 。

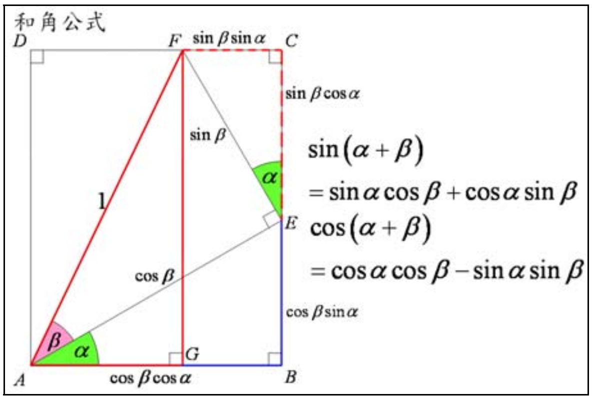

圖 4-2-3-15：再得 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$。

註：$\overline{AG}=\overline{AB}-\overline{BG}=\overline{AB}-\overline{FC}$。

四、$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ 與 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

本例是利用圓形中的直角三角形，來推導 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ 與 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ 二公式，本例是李政豐、顏貽隆、陳蘭香、王淑霞、陳明峰等(2001)發表於數學傳播的例子，在 PowerPoint 中的呈現方式如下列各圖(圖 4-2-4-1～圖 4-2-4-22)。

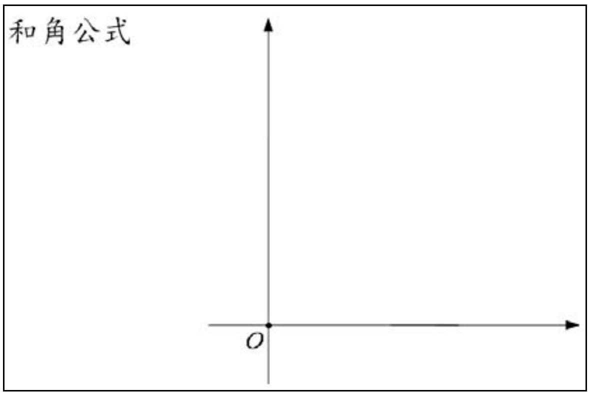

圖 4-2-4-1：在直角坐標平面上。

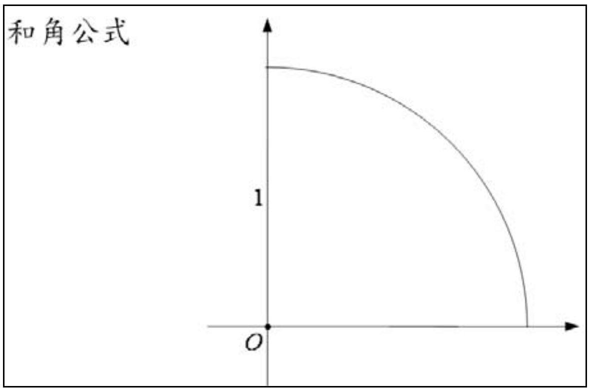

圖 4-2-4-2：以原點爲圓心，在第一象限做半徑爲 1 的 $\frac{1}{4}$ 圓。

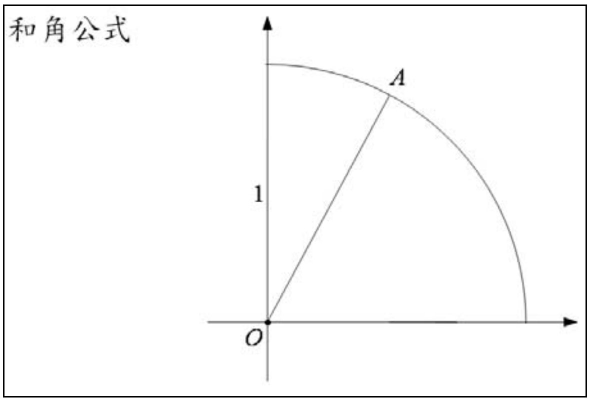

圖 4-2-4-3：做半徑 $\overline{OA}$ 。

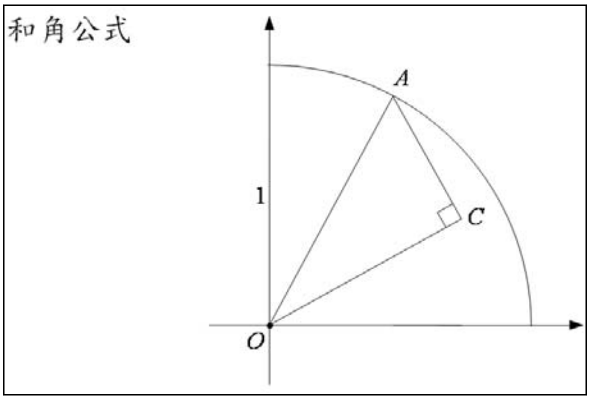

圖 4-2-4-4：以 $\overline{OA}$ 為斜邊做直角 ΔOAC ，$\angle C$ 為直角。

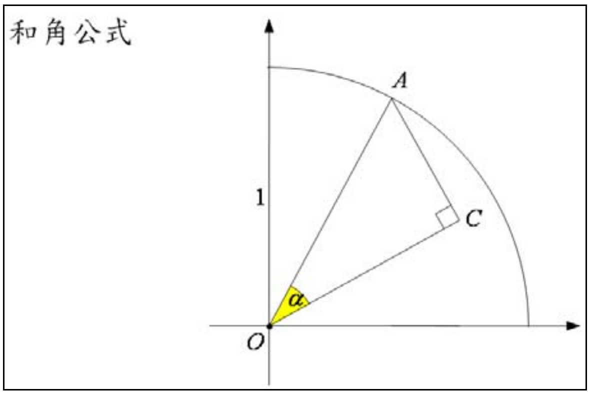

圖 4-2-4-5：令 $\angle AOC = \alpha$ 。

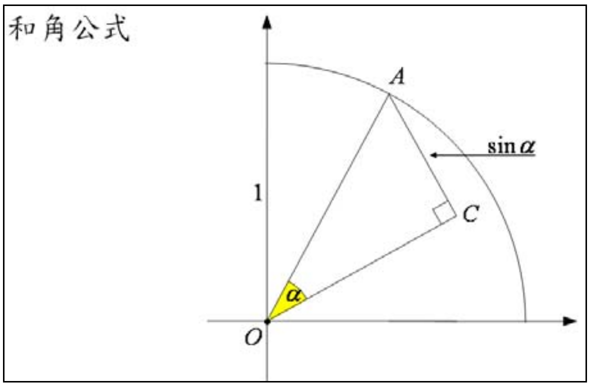

圖 4-2-4-6：由直角 ΔAOC 得 $\overline{AC} = \sin\alpha$ 。

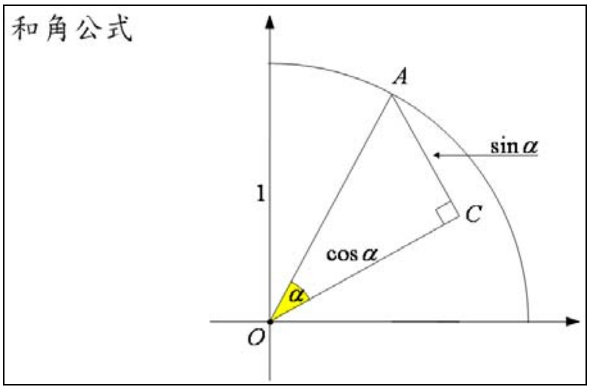

圖 4-2-4-7：得 $\overline{OC} = \cos\alpha$ 。

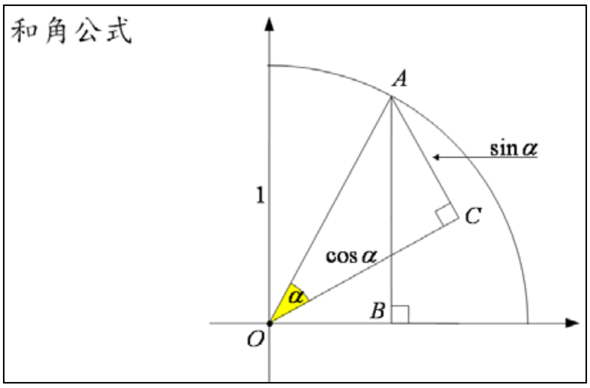

圖 4-2-4-8：做 $\overline{AB} \perp$ X 軸於 B 。

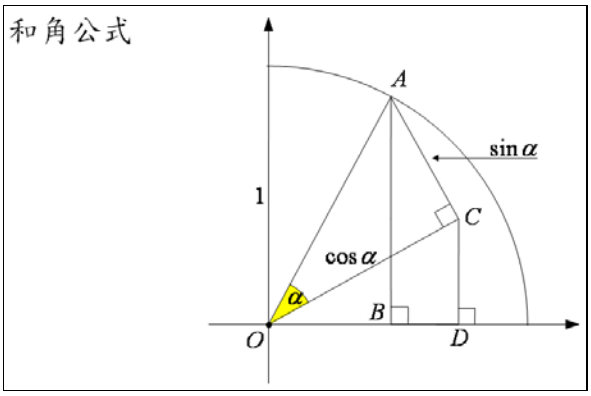

圖 4-2-4-9：做 $\overline{CD} \perp$ X 軸於 D 。

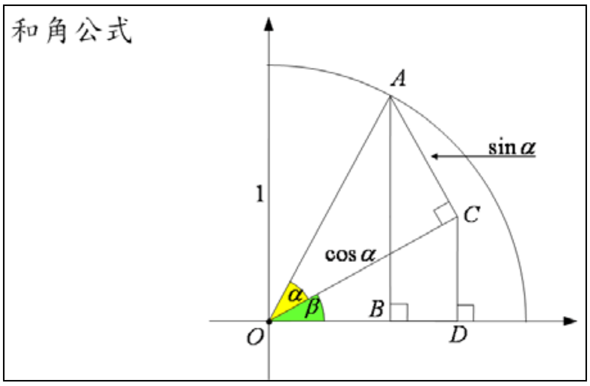

圖 4-2-4-10：令 $\angle COD = \beta$ 。

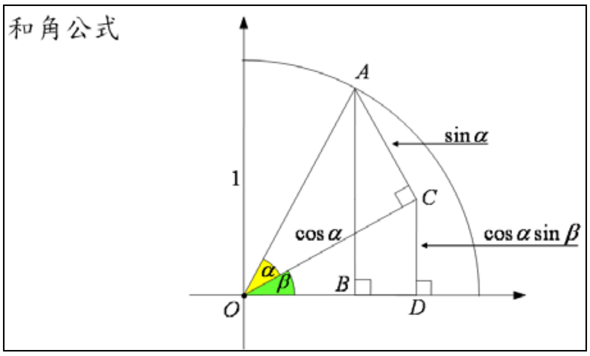

圖 4-2-4-11：由直角 ΔOCD 得 $\overline{CD} = \cos\alpha \sin\beta$。

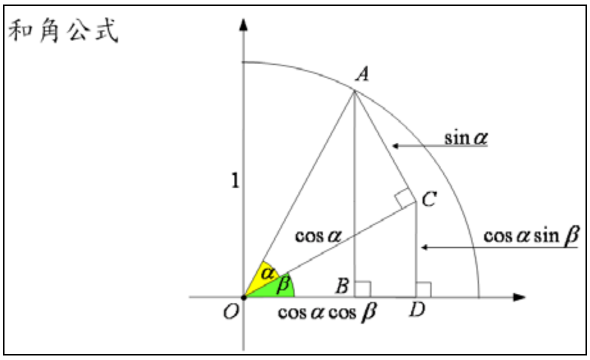

圖 4-2-4-12：得 $\overline{OD} = \cos\alpha \cos\beta$ 。

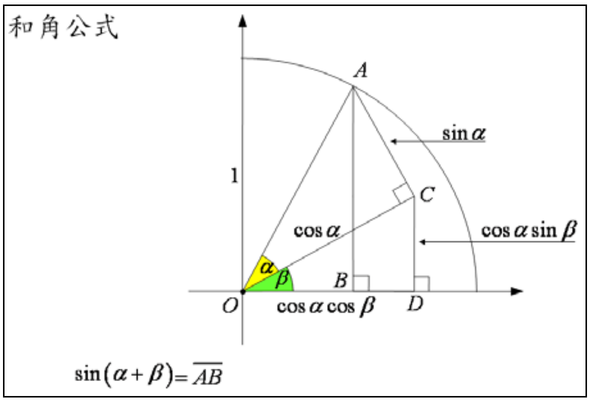

圖 4-2-4-13：顯示 $\sin(\alpha+\beta) = \overline{AB}$ 。

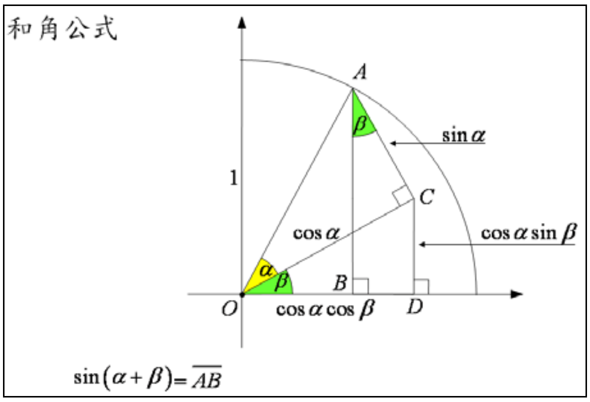

圖 4-2-4-14：又 $\angle CAB = \beta$ 。

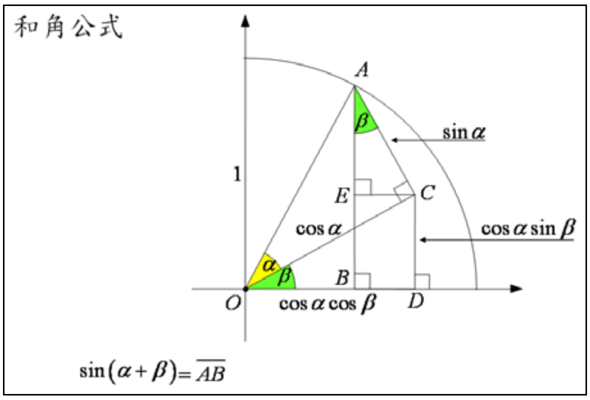

圖 4-2-4-15：做 $\overline{CE}\perp\overline{AB}$ 於 E 。

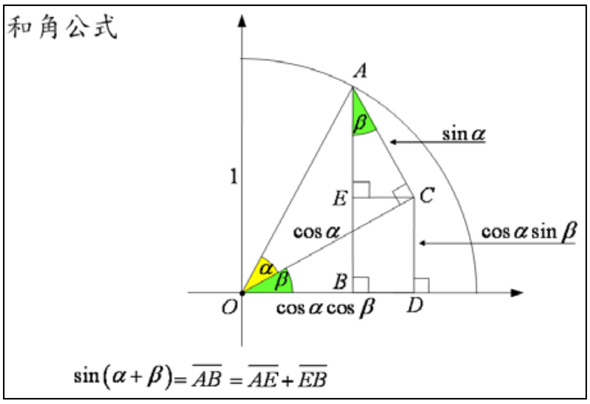

圖 4-2-4-16：得 $\overline{AB}=\overline{AE}+\overline{EB}$ 。

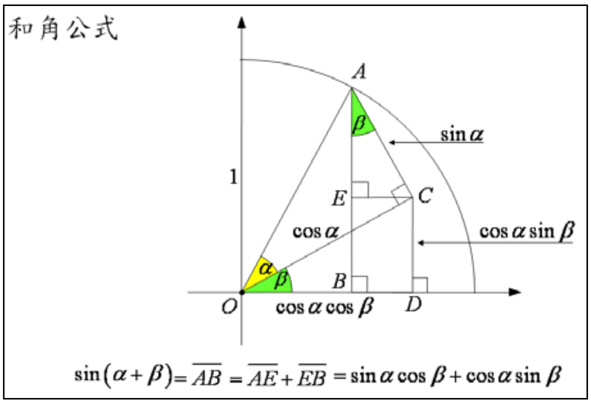

圖 4-2-4-17：得 $\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ 。

註：直角 ΔACE 中

$\overline{AE}=\overline{AC}\cos\beta$ 、 $\overline{EB}=\overline{CD}$ 。

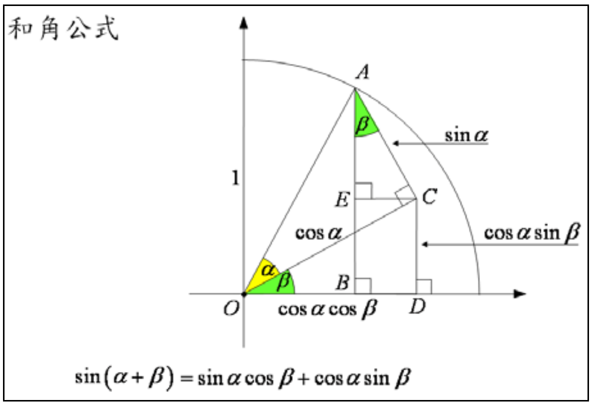

圖 4-2-4-18：將中間項消失，並將

$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ 靠近，得

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ 。

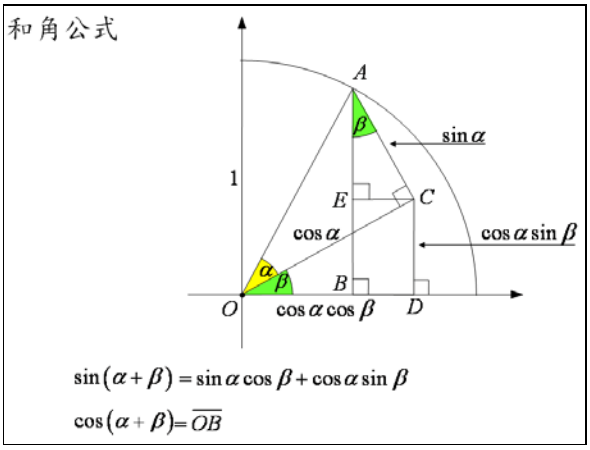

圖 4-2-4-19：顯示 $\cos(\alpha+\beta)=\overline{OB}$ 。

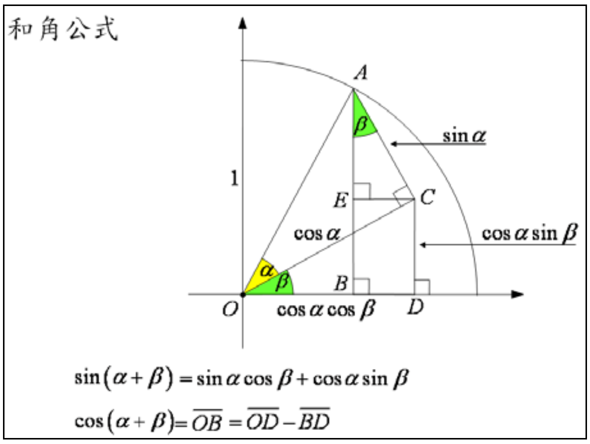

圖 4-2-4-20：又 $\overline{OB}=\overline{OD}-\overline{BD}$ 。