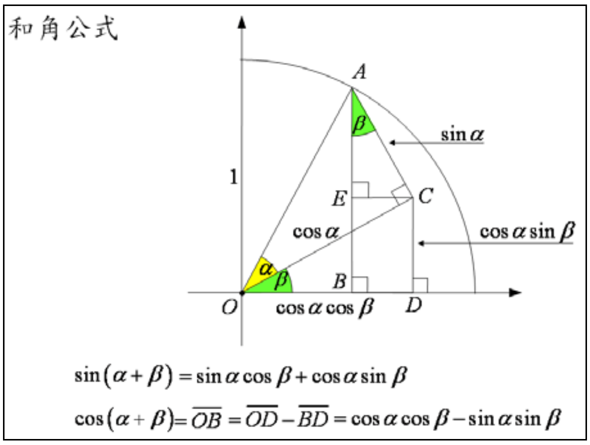

圖 4-2-4-21：得 $\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ 。
註：直角 ΔACE 中
$\overline{CE}=\overline{AC}\sin\beta$ 、$\overline{CE}=\overline{BD}$ 。

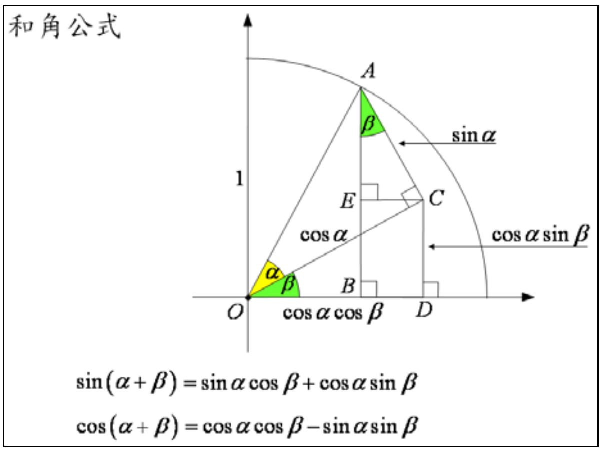

圖 4-2-4-22：將中間項消失，並將
$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ 靠近，得
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ 。

五、 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

本例是利用三角形面積相等的關係來推導 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ ，本例是 Proofs Without Words 一書中第 30 頁的例子，作者爲 Sidney H. kung(1993)，在 PowerPoint 中的呈現方式如下列各圖(圖 4-2-5-1～圖 4-2-5-20)。

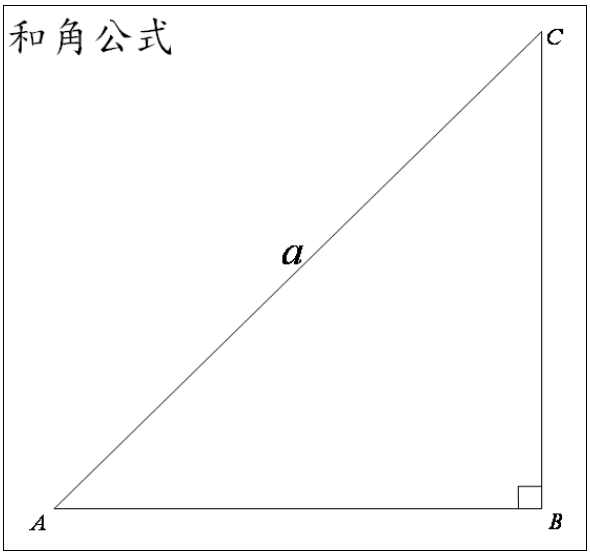

圖 4-2-5-1：任一直角 ΔABC ，斜邊 $\overline{AC}=a$ 。

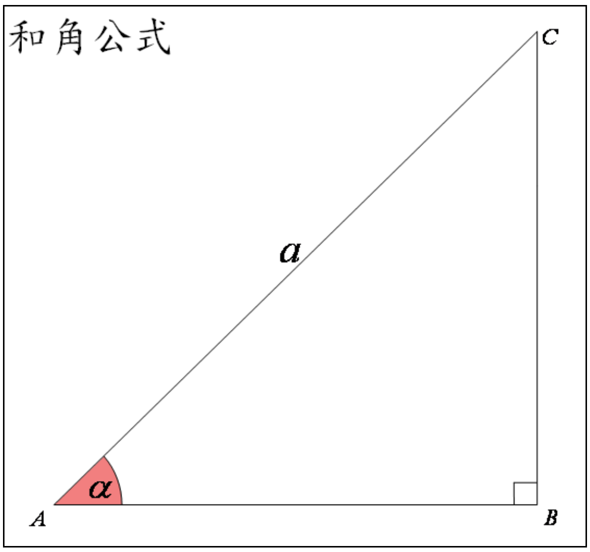

圖 4-2-5-2：設 $\angle A=\alpha$ 。

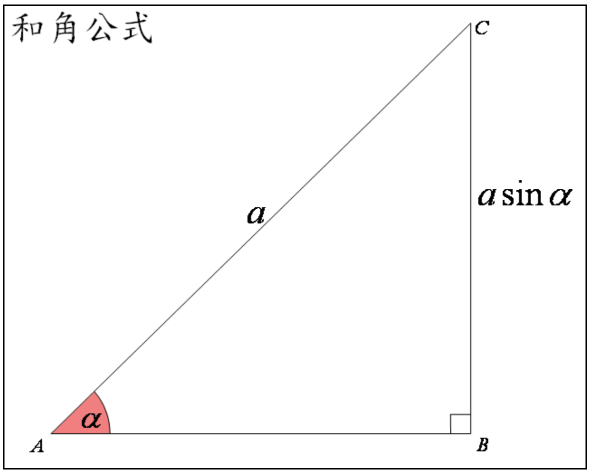

圖 4-2-5-3：得 $\overline{BC}=a\sin\alpha$ 。

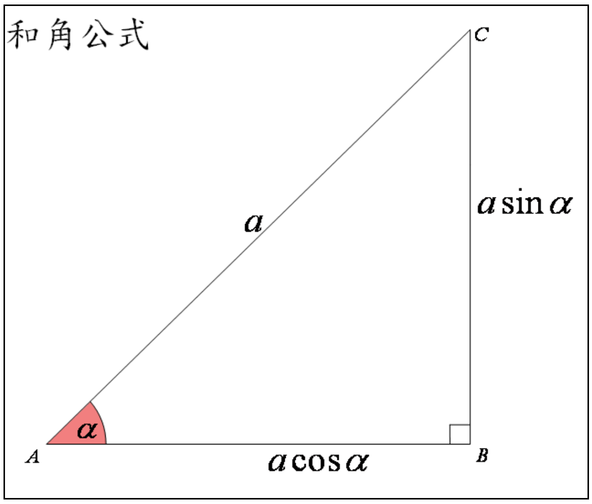

圖 4-2-5-4：得 $\overline{AB}=a\cos\alpha$ 。

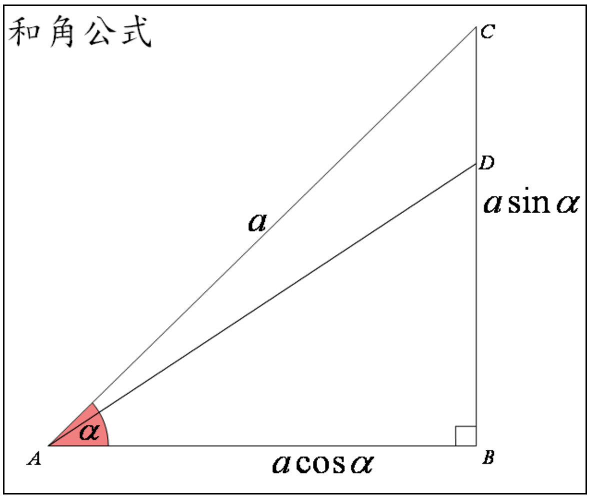

圖 4-2-5-5：做 $\overline{AD}$ 交 $\overline{BC}$ 於 D 。

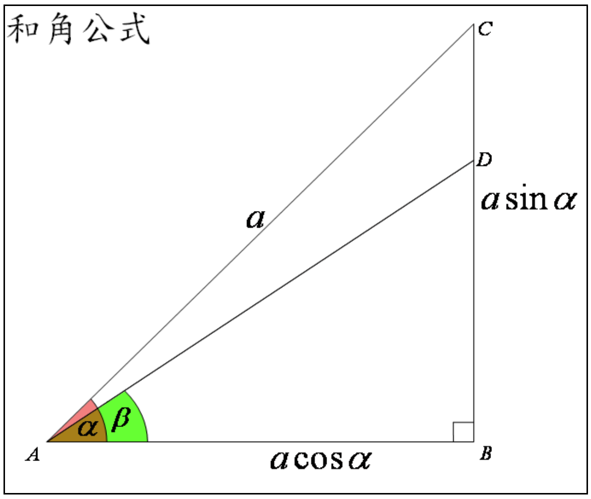

圖 4-2-5-6：設 $\angle DAB=\beta$ 。

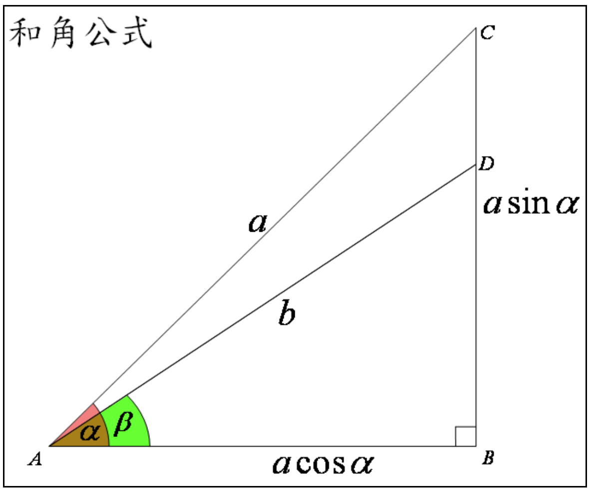

圖 4-2-5-7：設 $\overline{AD}=b$ 。

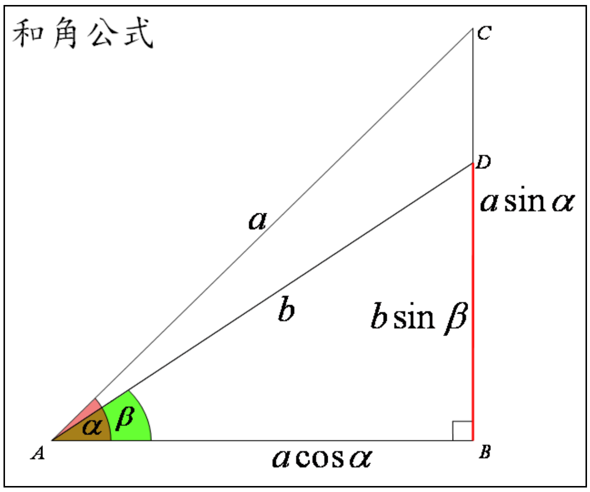

圖 4-2-5-8：標示 $\overline{BD}$ ，並得 $\overline{BD}=b\sin\beta$ 。

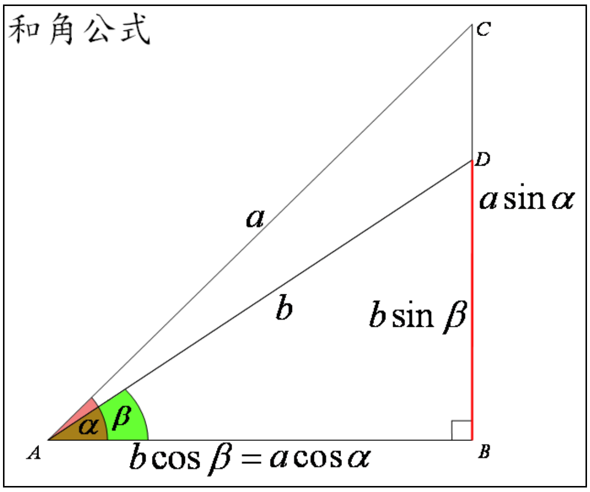

圖 4-2-5-9：得 $\overline{AB} = b\cos\beta$ 。

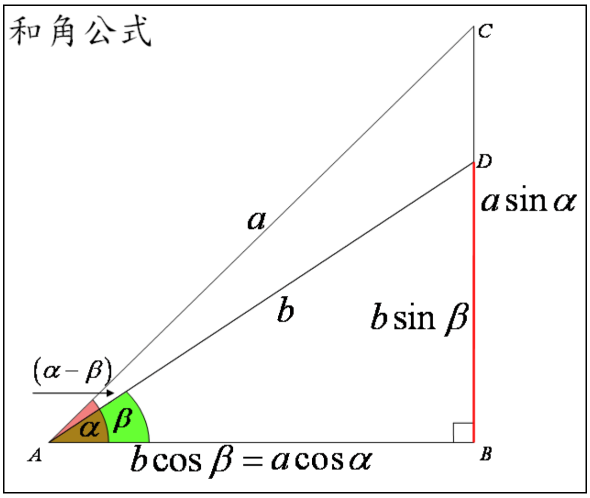

圖 4-2-5-10：得 $\angle CAD = \alpha - \beta$ 。

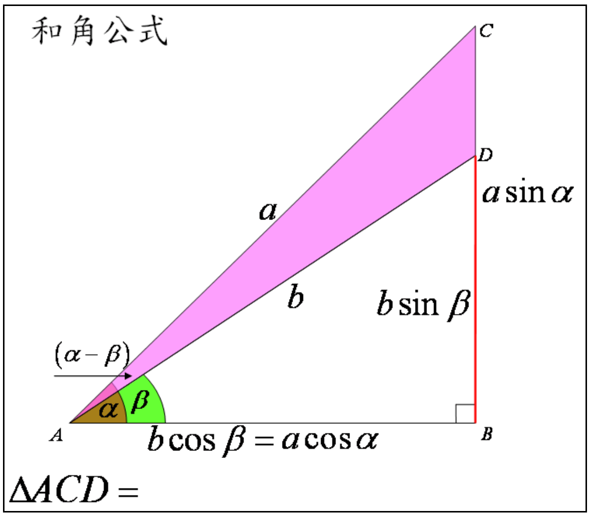

圖 4-2-5-11：標示 ΔACD 並顯示 $\Delta ACD =$ 。

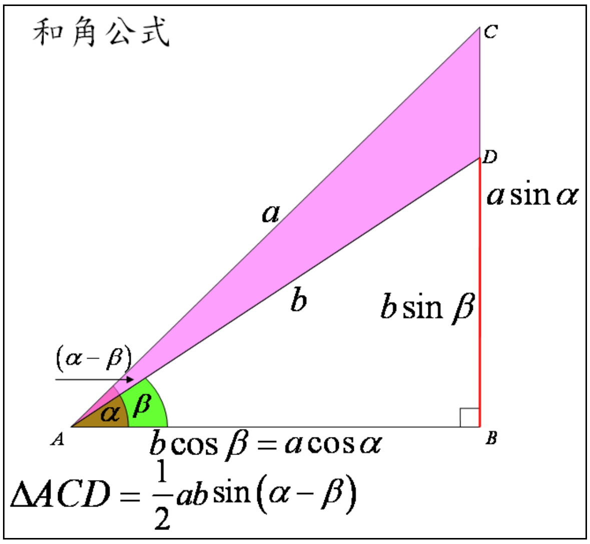

圖 4-2-5-12：得 ΔACD 面積爲 $\frac{1}{2}ab\sin(\alpha-\beta)$

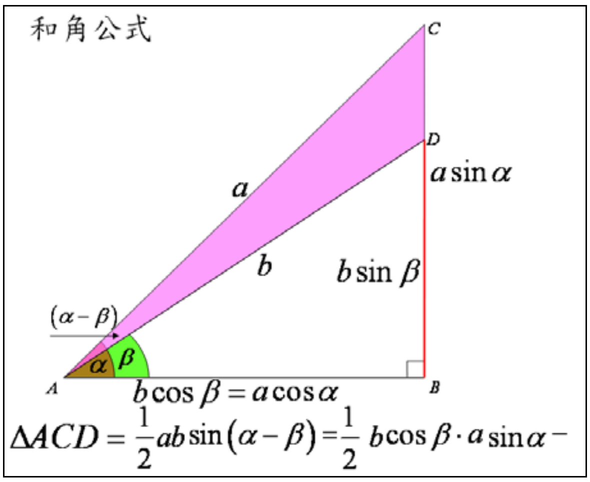

圖 4-2-5-13：得 ΔABC 面積爲 $\frac{1}{2}b\cos\beta\cdot a\sin\alpha$ 。

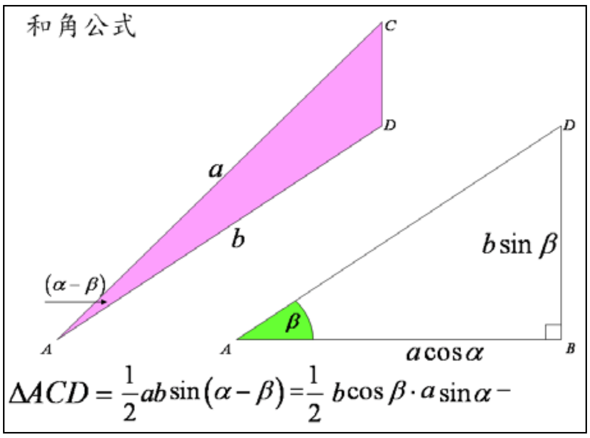

圖 4-2-5-14：將 ΔABD 分離、移動，並將 α 消失。

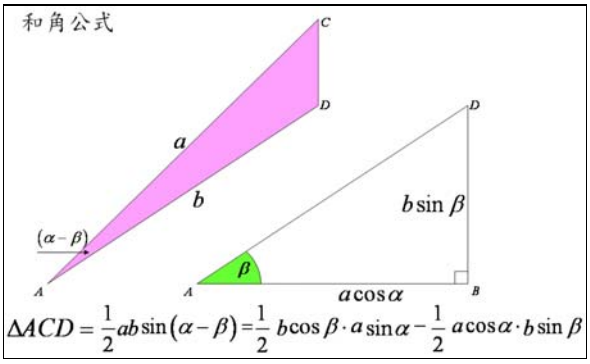

圖 4-2-5-15：顯示$-\frac{1}{2}a\cos\alpha\cdot b\sin\beta$ 。

註：ΔABD 面積爲$\frac{1}{2}a\cos\alpha\cdot b\sin\beta$ 。

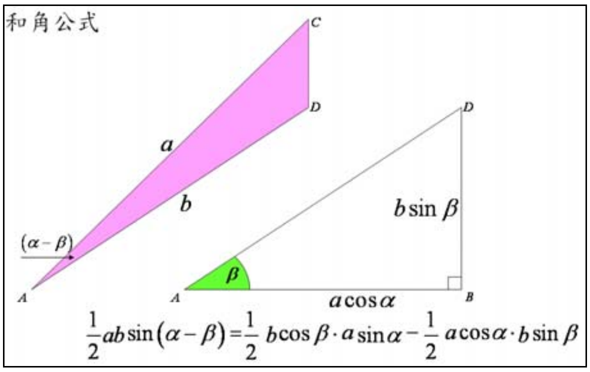

圖 4-2-5-16：將$\Delta ACD=$消失。

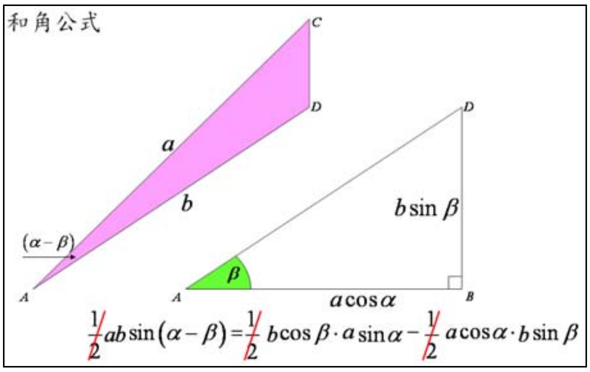

圖 4-2-5-17：顯示斜線，將$\frac{1}{2}$約去。

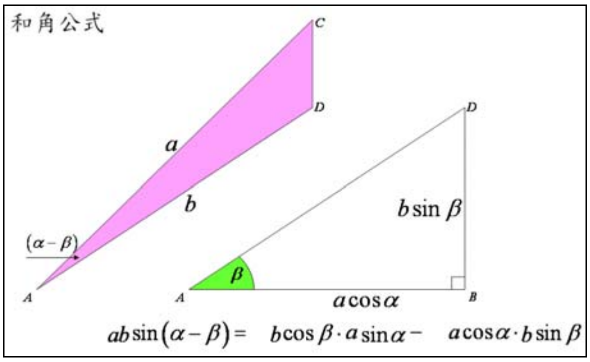

圖 4-2-5-17：將$\frac{1}{2}$及斜線消失。

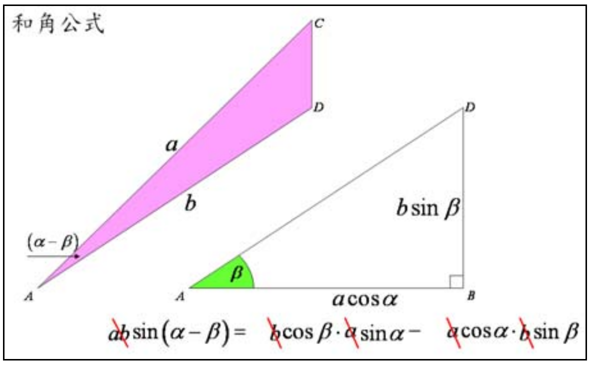

圖 4-2-5-19：顯示斜線，將a,b約去。

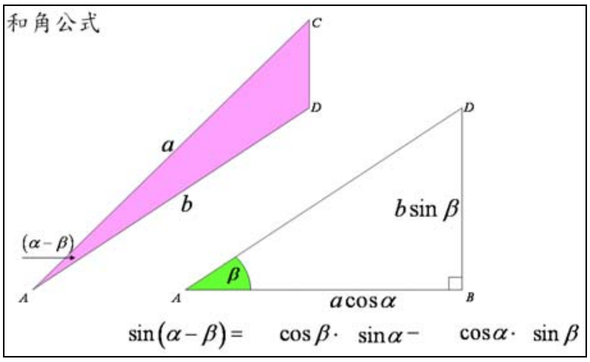

圖 4-2-5-20：將a,b及斜線消失。

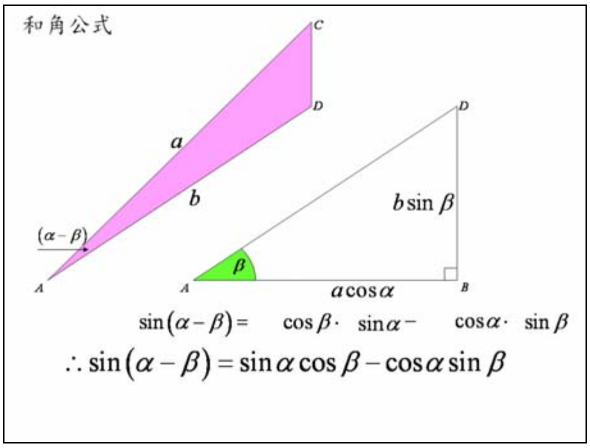

圖 4-2-5-20：整理得

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ 。

六、$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ 與 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

本例是利用矩形中的直角三角形，來推導 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ 與 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ 二公式，本例是 Proofs Without Words Ⅱ一書中第 46 頁的例子，作者為 R. B. Nelsen(2000)，在 PowerPoint 中的呈現方式如下列各圖(圖 4-2-6-1～圖 4-2-6-15)。

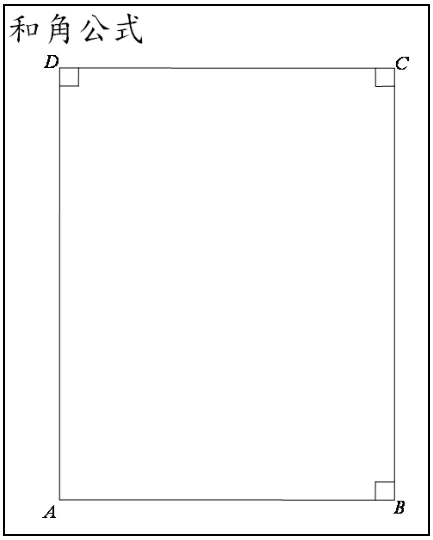

圖 4-2-6-1：任一矩形 $ABCD$。

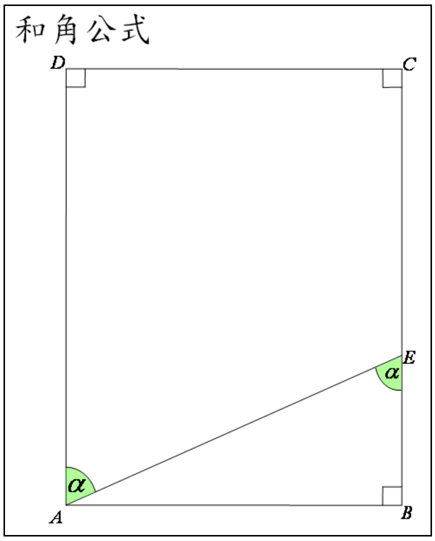

圖 4-2-6-2：做 $\overline{AE}$ 交 $\overline{BC}$ 於 E，設 $\angle DAE=\alpha$ 、 $\angle AEB=\alpha$ 。

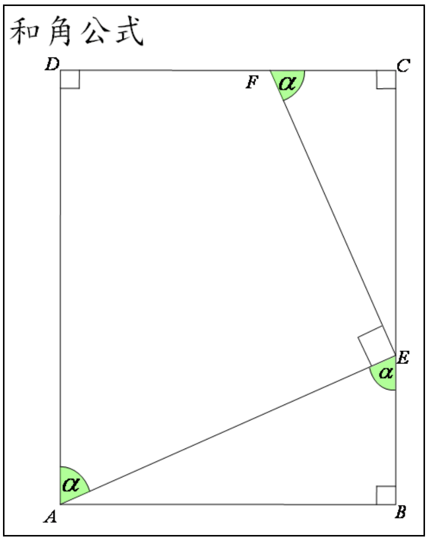

圖 4-2-6-3：做 $\overline{EF} \perp \overline{AE}$ 交 $\overline{CD}$ 於 F ，得 $\angle CFE = \alpha$ 。

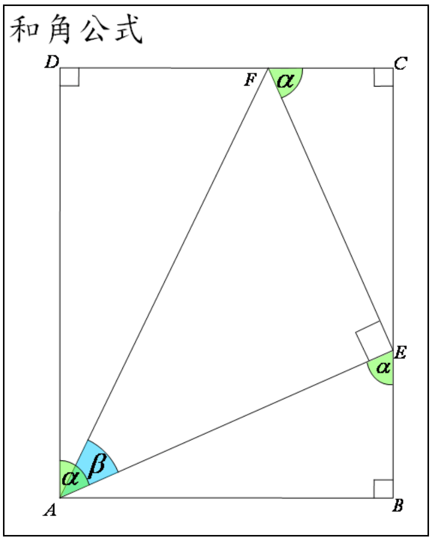

圖 4-2-6-4：做 $\overline{AF}$ ，設 $\angle EAF = \beta$ 。

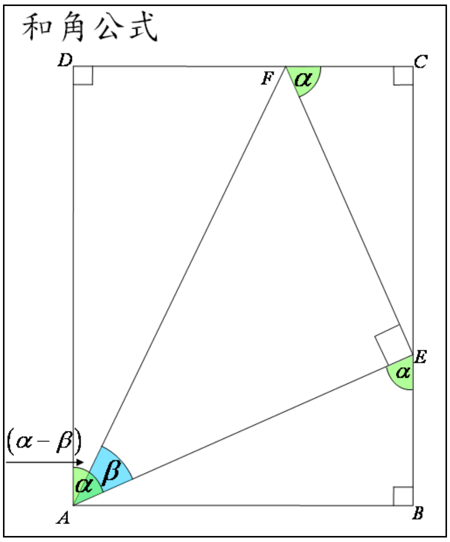

圖 4-2-6-5：得 $\angle DAF = \alpha - \beta$ 。

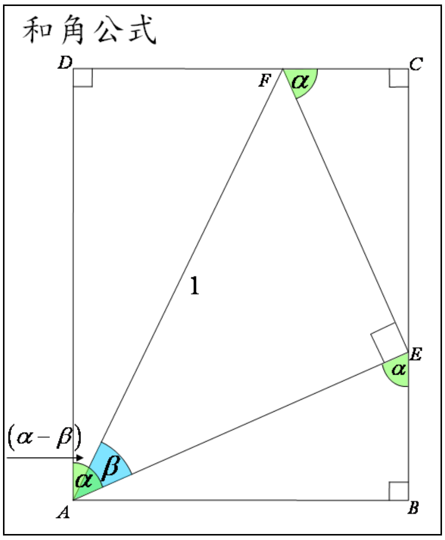

圖 4-2-6-6：令 $\overline{AF} = 1$ 。

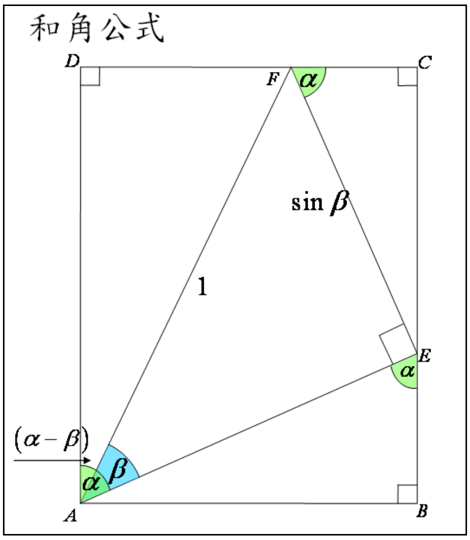

圖 4-2-6-7：由直角 ΔAEF 得 $\overline{FE}=\sin\beta$ 。

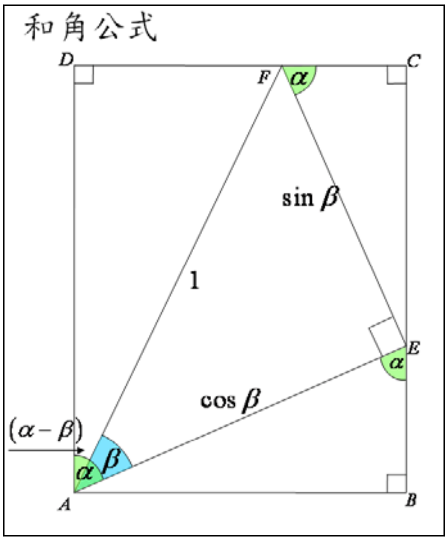

圖 4-2-6-8：再得 $\overline{AE}=\cos\beta$ 。

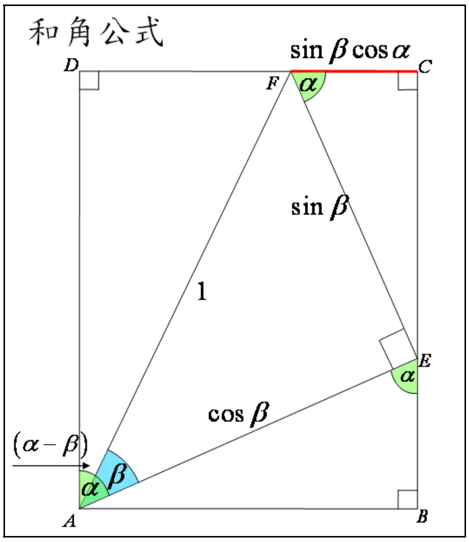

圖 4-2-6-9：由直角 ΔCEF 得 $\overline{FC}=\sin\beta\cos\alpha$ 。

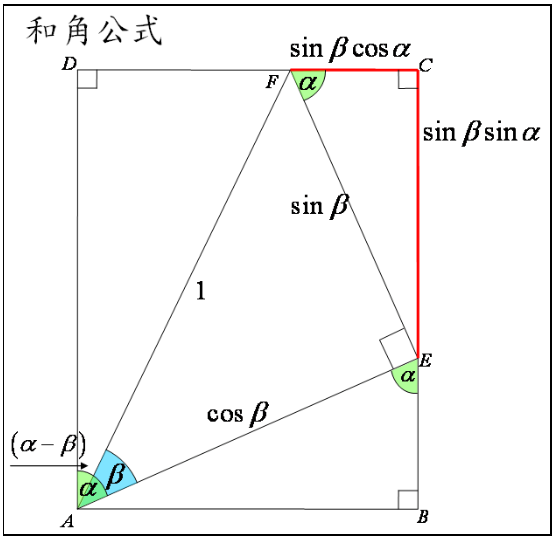

圖 4-2-6-10：得 $\overline{CE}=\sin\beta\sin\alpha$ 。

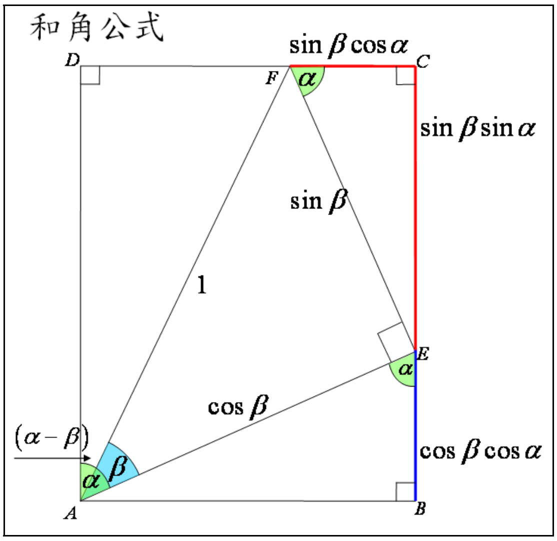

圖 4-2-6-11：由直角 ΔABE 得 $\overline{BE}=\cos\beta\cos\alpha$ 。

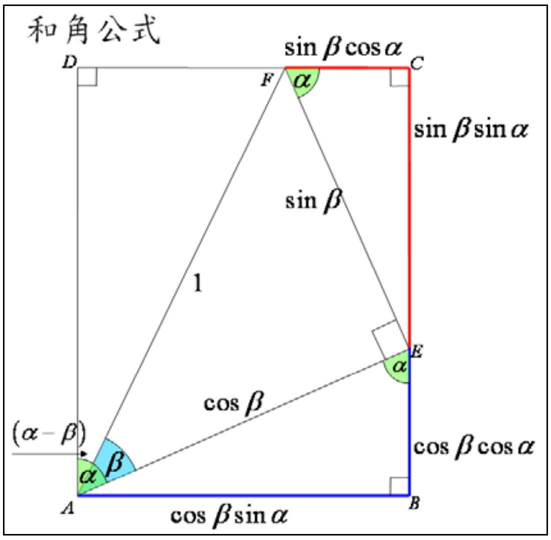

圖 4-2-6-12：得 $\overline{AB}=\cos\beta\sin\alpha$ 。

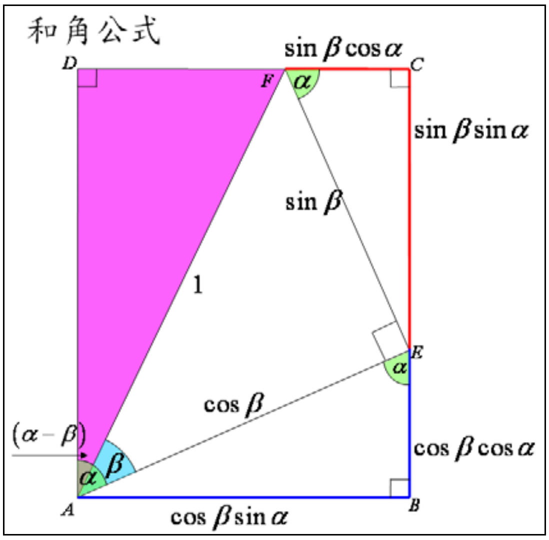

圖 4-2-6-13：標示直角 ΔADF 。

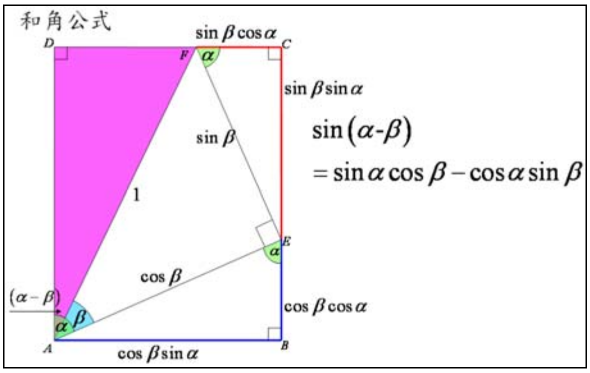

圖 4-2-6-14：得

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ 。

註： $\overline{DF}=\overline{AB}-\overline{CF}$ 。

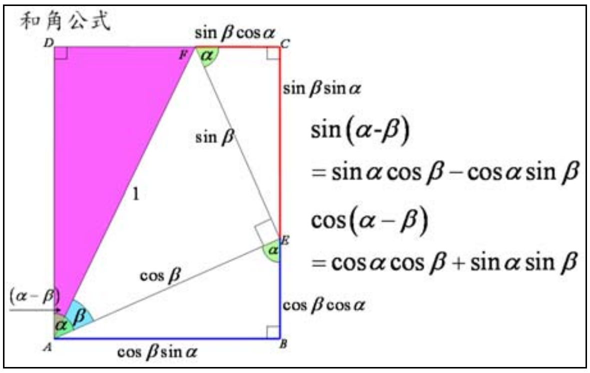

圖 4-2-6-15：再得

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ 。

註： $\overline{AD}=\overline{BE}+\overline{CE}$ 。

七、 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

本例是利用利用斜邊長為 1 的直角三角形，向外製造不同的直角三角形，來推導 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ 的公式，本例是 Proofs Without Words Ⅱ一書中第 42 頁的例子，作者為 Leonard M. Smiley(2000)，在 PowerPoint 中的呈現方式如下列各圖(圖 4-2-7-1～圖 4-2-7-14)。

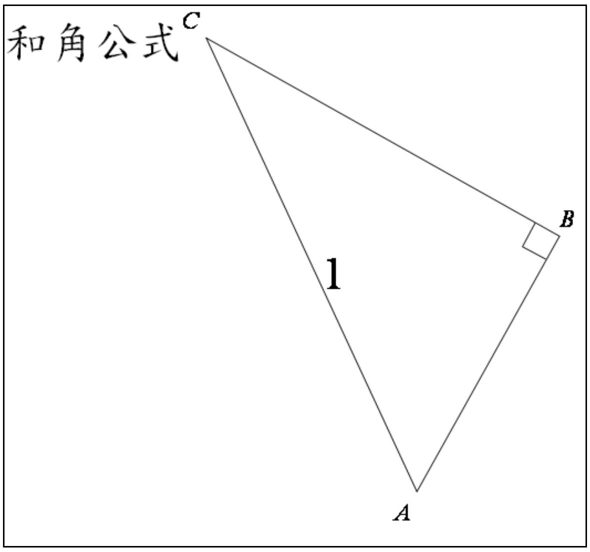

圖 4-2-7-1：直角 ΔABC 中 $\overline{AC}=1$, $\angle B$ 爲直角。

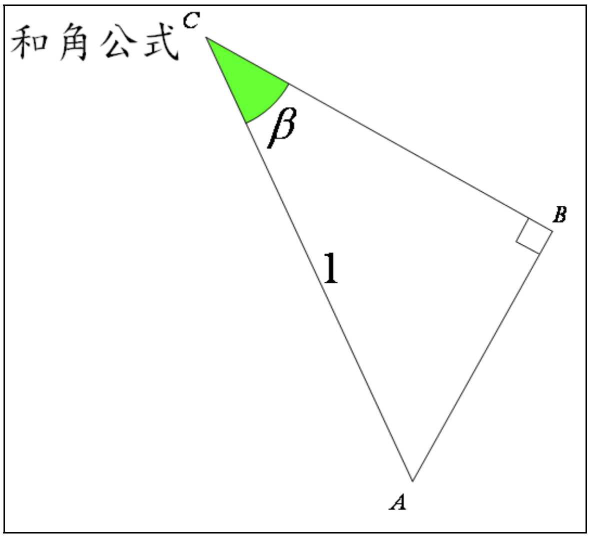

圖 4-2-7-2：設 $\angle C=\beta$ 。

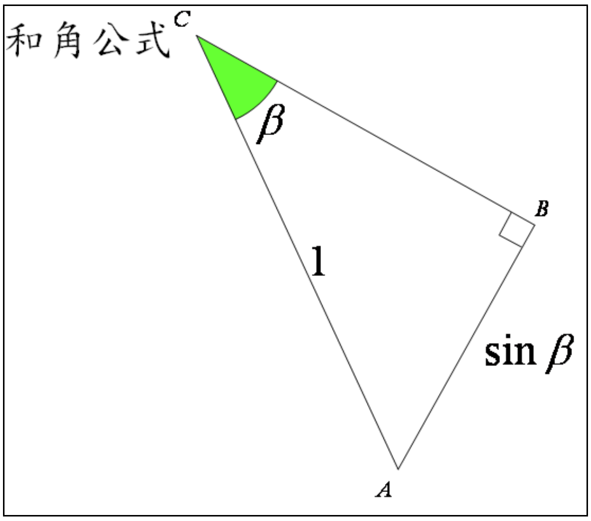

圖 4-2-7-3：得 $\overline{AB}=\sin\beta$ 。

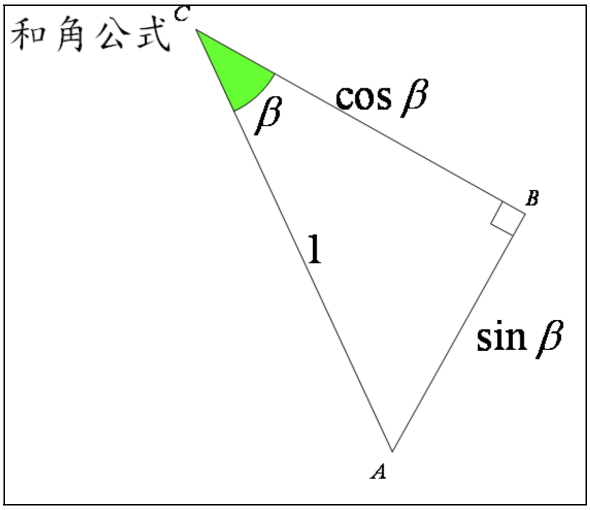

圖 4-2-7-4：得 $\overline{BC}=\cos\beta$ 。

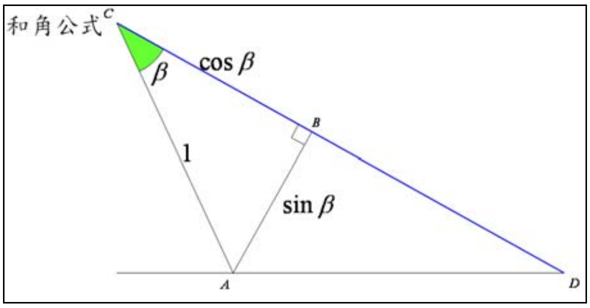

圖 4-2-7-5：將 $\overline{BC}$ 延長至 D ，並做 $\overrightarrow{DA}$ 射線。

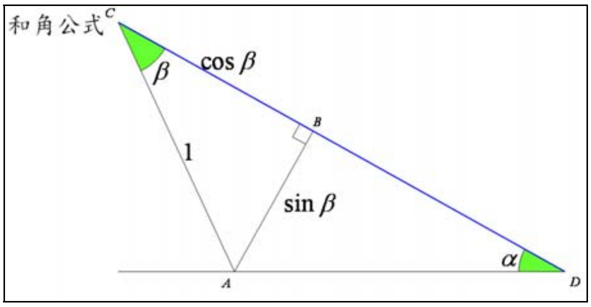

圖 4-2-7-6：設 $\angle D=\alpha$ 。

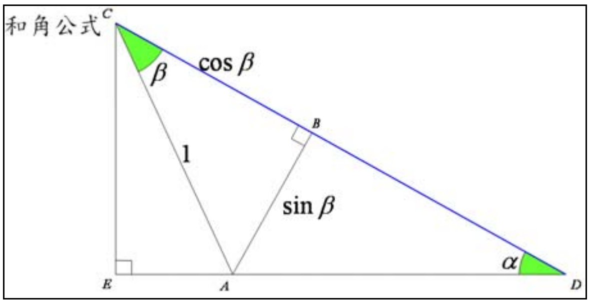

圖 4-2-7-7：做 $\overline{CE} \perp \overrightarrow{DA}$ 於 E 。

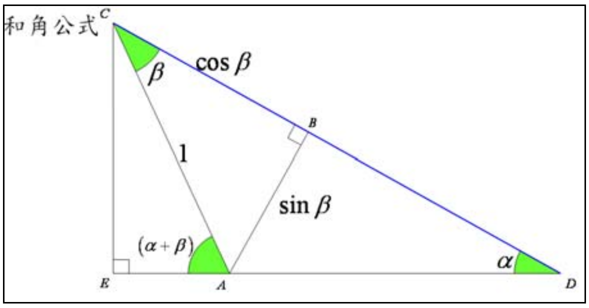

圖 4-2-7-8：得 $\angle CAE = \alpha + \beta$ 。

註： ΔACD 中 $\angle A$ 的外角。

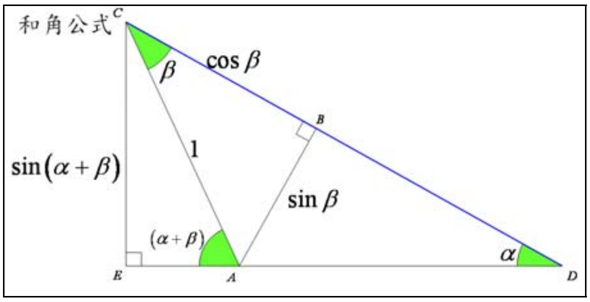

圖 4-2-7-9：由直角 ΔACE 得 $\overline{CE} = \sin(\alpha+\beta)$ 。

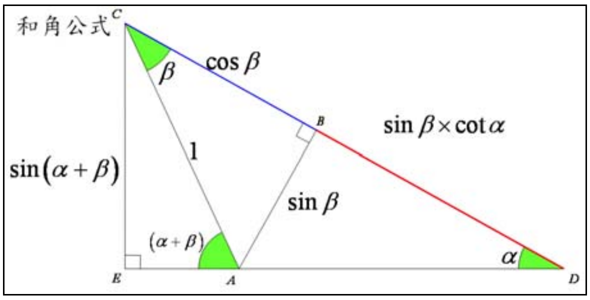

圖 4-2-7-10：標示 $\overline{BD}$ 線段，由直角 ΔABD 得 $\overline{BD} = \sin\beta \times \cot\alpha$ 。

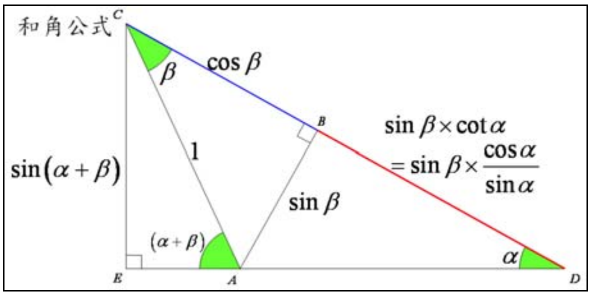

圖 4-2-7-11：得 $\sin\beta \times \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ 。

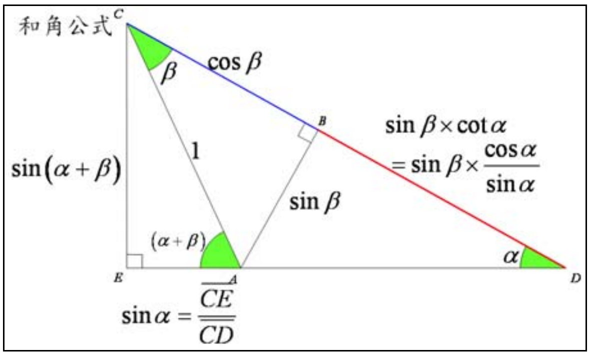

圖 4-2-7-12：顯示 $\sin\alpha = \dfrac{\overline{CE}}{\overline{CD}}$ 。

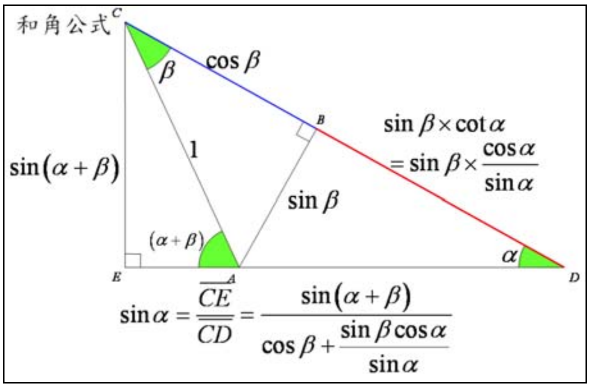

圖 4-2-7-13：由直角 ΔCDE 得

$$\sin\alpha = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta + \dfrac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$ 。

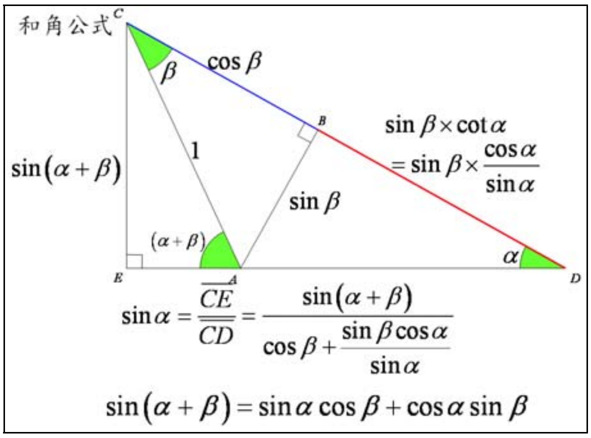

圖 4-2-7-14：乘開得

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ 。

八、 $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

本例是利用利用斜邊長爲 1 的直角三角形，向外製造不同的直角三角形，來推導 $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ 的公式，本例是 Proofs Without Words Ⅱ一書中第 42 頁的例子，作者爲 Leonard M. Smiley(2000)，在 PowerPoint 中的呈現方式如下列各圖(圖 4-2-8-1～圖 4-2-8-16)。

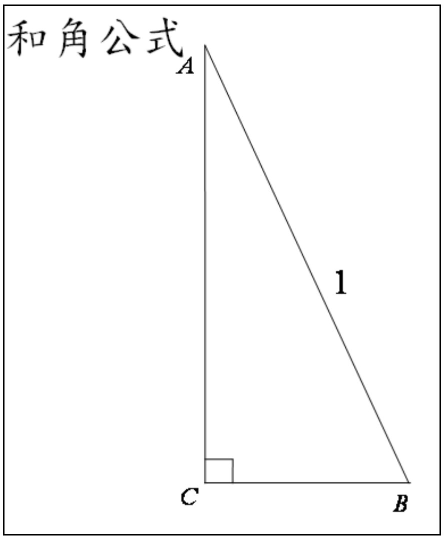

圖 4-2-8-1：任一直角 ΔABC 中，$\angle C$ 爲直角，斜邊 $\overline{AB} = 1$ 。

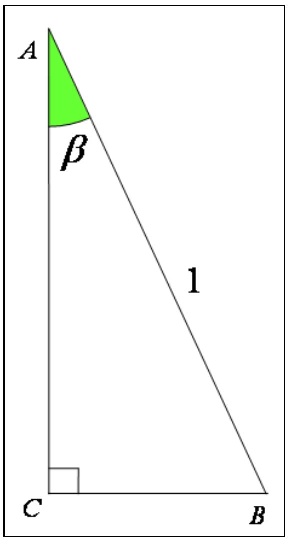

圖 4-2-8-2：設 $\angle A = \beta$ 。

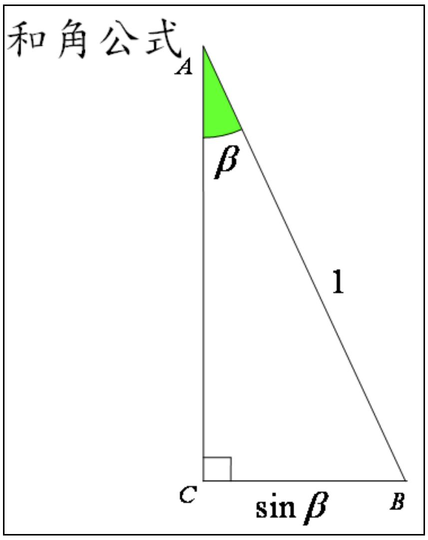

圖 4-2-8-3：得 $\overline{BC}=\sin\beta$ 。

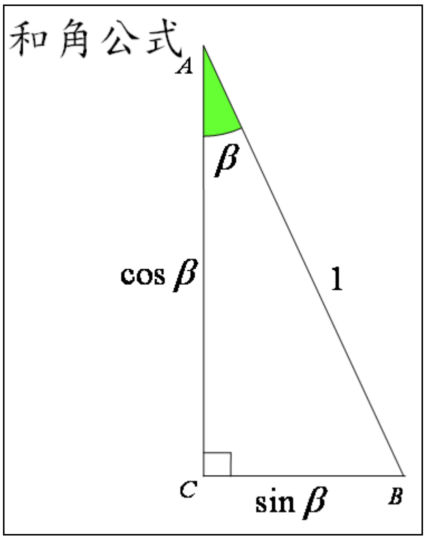

圖 4-2-8-4：再得 $\overline{AC}=\cos\beta$ 。

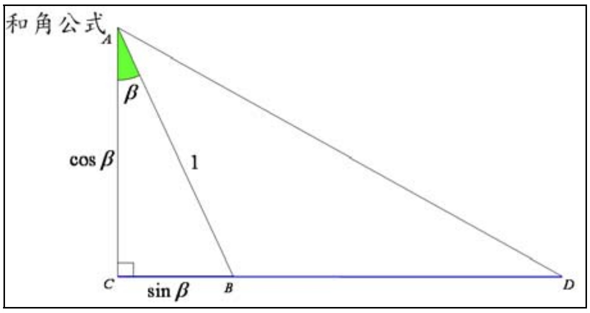

圖 4-2-8-5：延長 $\overline{BC}$ 至任意點 D ，並連 $\overline{AD}$ 。

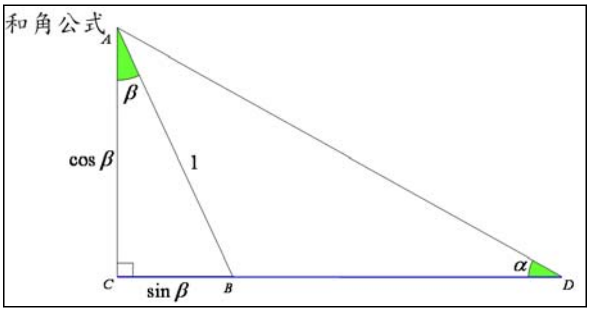

圖 4-2-8-6：設 $\angle CDA=\alpha$ 。

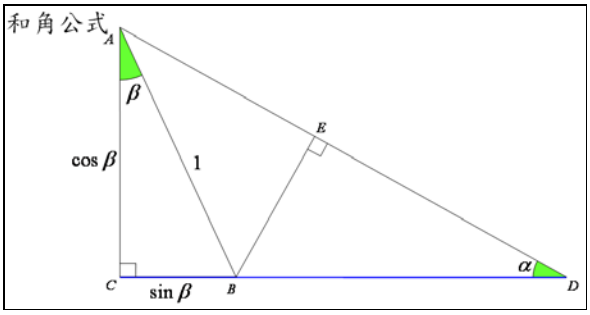

圖 4-2-8-7：做 $\overline{BE}\perp\overline{AD}$ 於 E 。

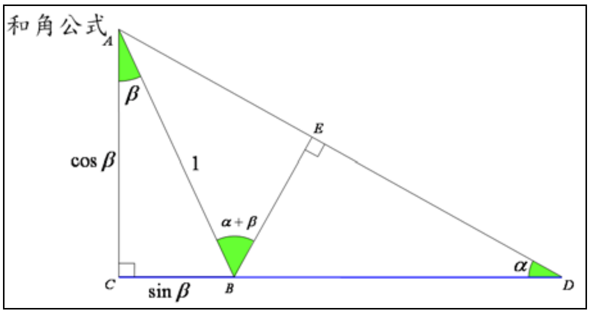

圖 4-2-8-8：得 $\angle ABE=\alpha+\beta$ 。

註：

$$\left(\angle CAB+\angle CBA\right)+\left(\angle EDB+\angle EBD\right)=180^{\circ},$$

$$\angle CBA+\angle ABE+\angle EBD=180^{\circ}$$

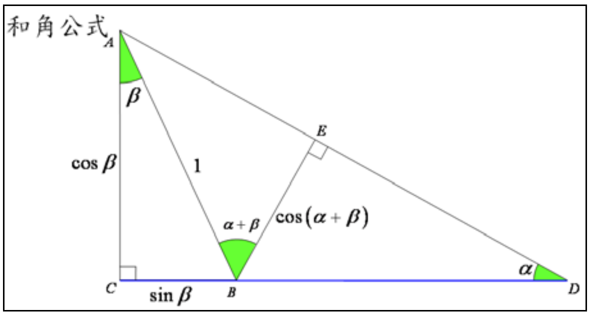

圖 4-2-8-9：由直角 ΔABE 得 $\overline{BE}=\cos(\alpha+\beta)$。

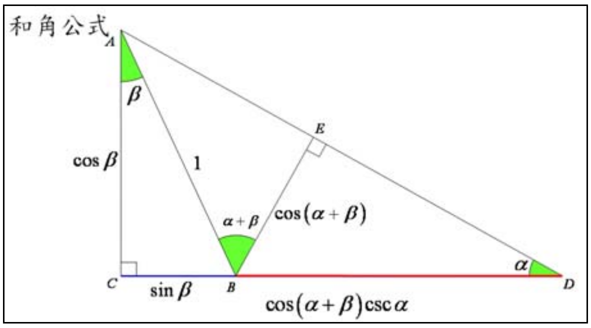

圖 4-2-8-10：標示 $\overline{BD}$，由直角 ΔBDE 得 $\overline{BD}=\cos(\alpha+\beta)\csc\alpha$。

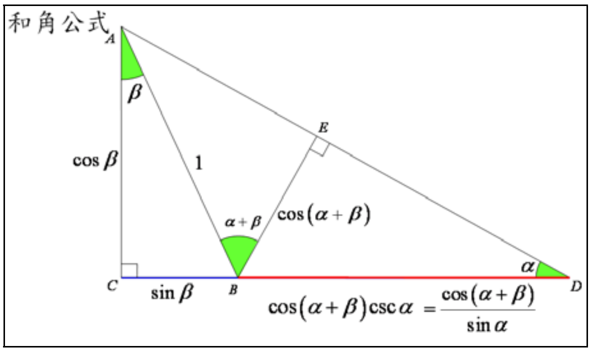

圖 4-2-8-11：化為 $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$。

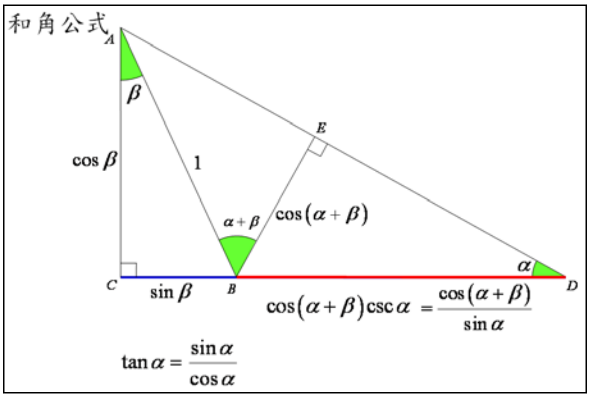

圖 4-2-8-12：顯示 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$。

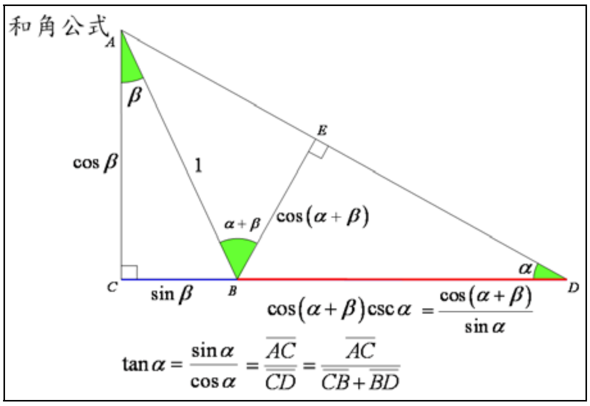

圖 4-2-8-13：由直角 ΔACD 得

$$=\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}+\overline{BD}}$$ 。

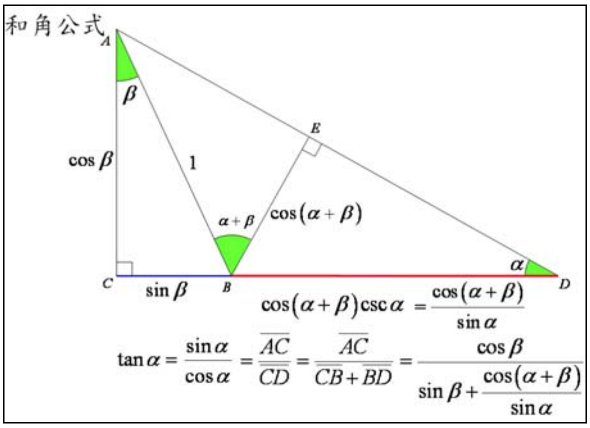

圖 4-2-8-14：得 $\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta+\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}}$。

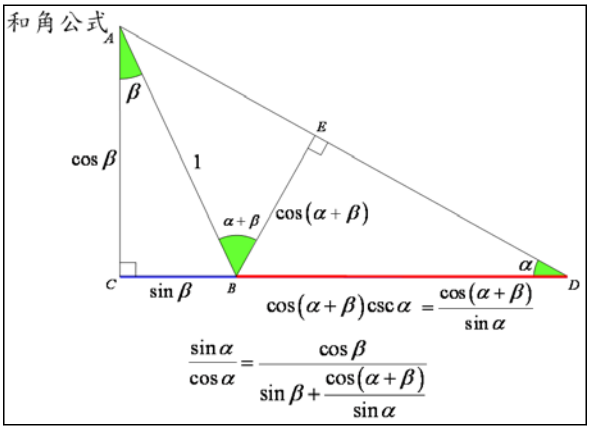

圖 4-2-8-15：將 $\tan\alpha$ 及中間項消失，並將 $\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta + \dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}}$ 靠近，得

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\beta}{\sin\beta + \dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}}\text{。}$$

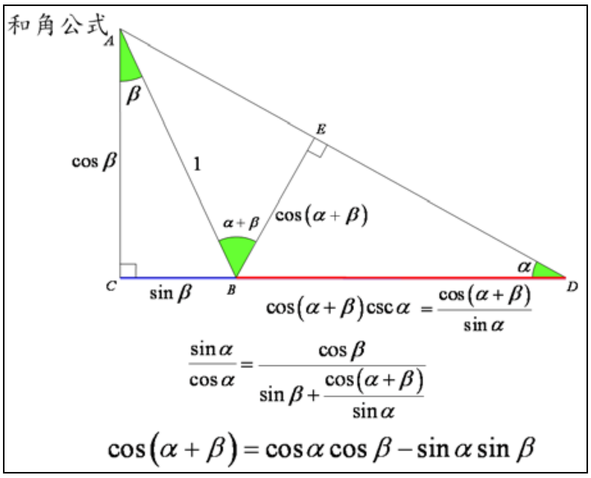

圖 4-2-8-16：交叉相乘，整理得 $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$。

九、 $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

本例是利用利用斜邊長為 1 的直角三角形，向內部製造不同的直角三角形，來推導 $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ 的公式，本例是 Proofs Without Words Ⅱ一書中第 43 頁的例子，作者為 Leonard M. Smiley(2000)，在 PowerPoint 中的呈現方式如下列各圖(圖 4-2-9-1～圖 4-2-9-20)。

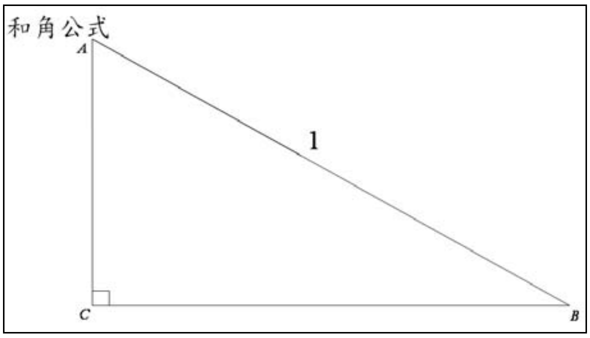

圖 4-2-9-1：直角 ΔABC 中，$\angle C$ 為直角，$\overline{AB} = 1$。

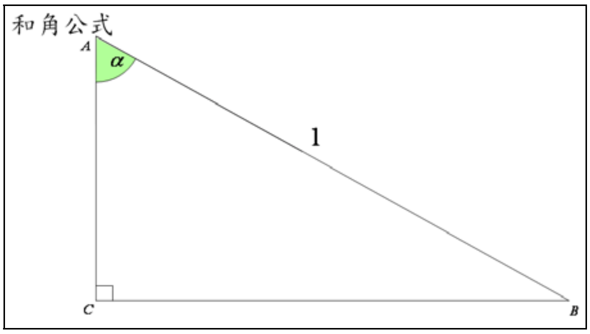

圖 4-2-9-2：設 $\angle A = \alpha$ 。

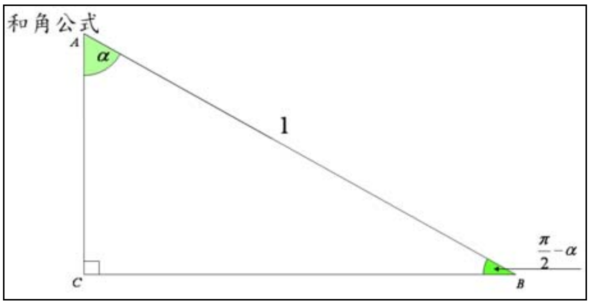

圖 4-2-9-3：得 $\angle B=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ 。

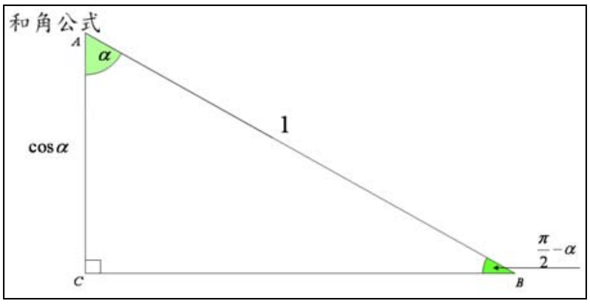

圖 4-2-9-4：得 $\overline{AC}=\cos\alpha$ 。

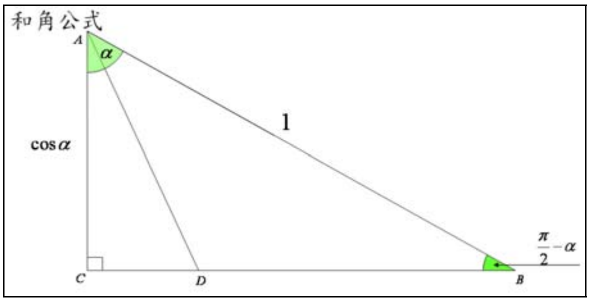

圖 4-2-9-5：做 $\overline{AD}$ 交 $\overline{BC}$ 於 D 。

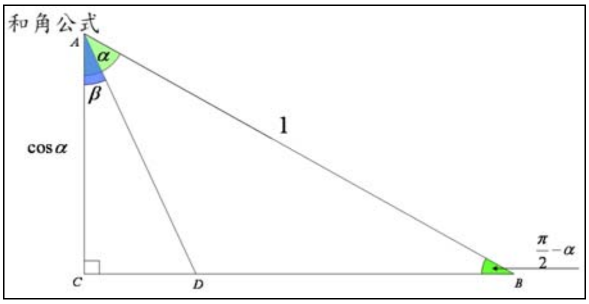

圖 4-2-9-6：設 $\angle CAD=\beta$ 。

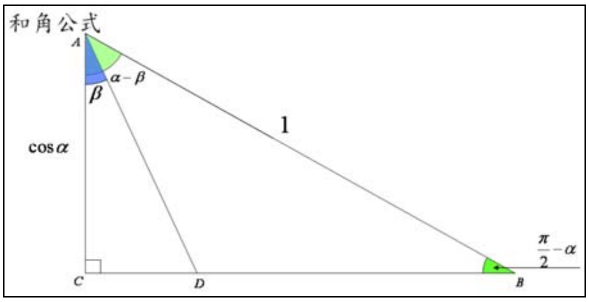

圖 4-2-9-7：得 $\angle DAB=\alpha-\beta$ 。

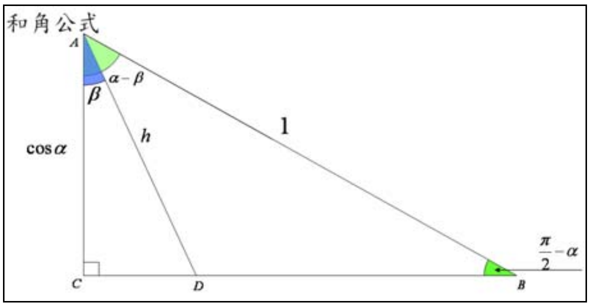

圖 4-2-9-8：設 $\overline{AD}=h$ 。

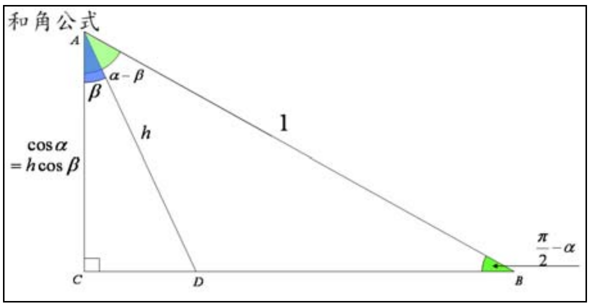

圖 4-2-9-9：得 $\overline{AC}=h\cos\beta$ 。

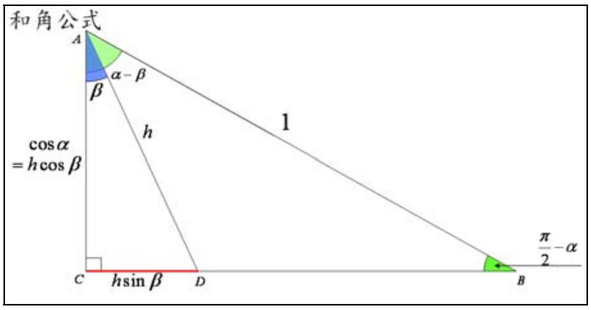

圖 4-2-9-10：得 $\overline{CD}=h\sin\beta$ 。

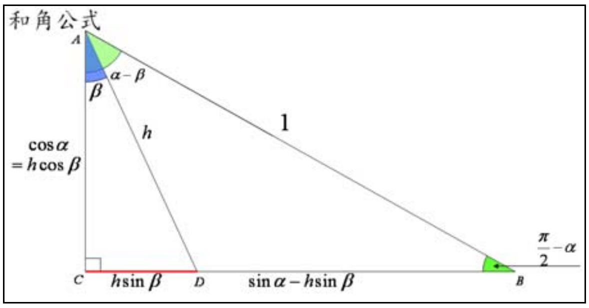

圖 4-2-9-11：得 $\overline{BD}=\sin\alpha-h\sin\beta$ 。

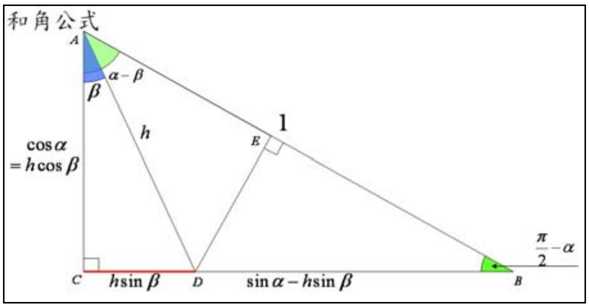

圖 4-2-9-12：做 $\overline{DE}\perp\overline{AB}$ 於 E 。

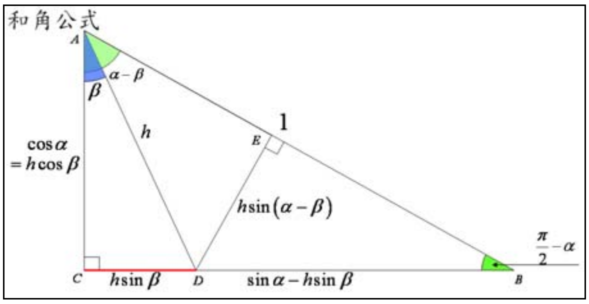

圖 4-2-9-13：由直角 ΔADE 得

$\overline{DE}=h\sin(\alpha-\beta)$ 。

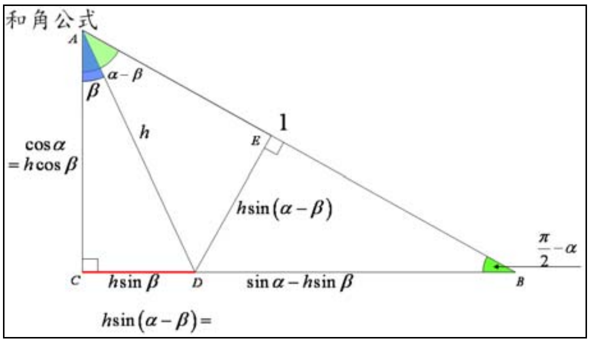

圖 4-2-9-14：顯示 $h\sin(\alpha-\beta)=$ 。

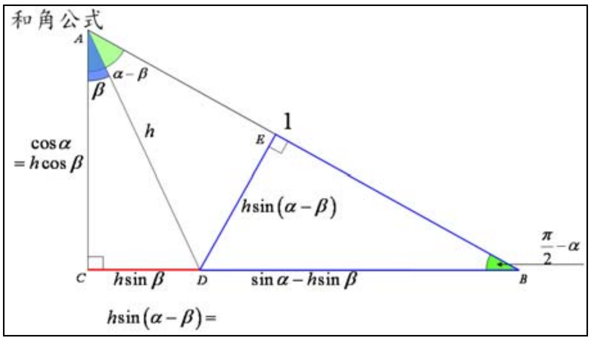

圖 4-2-9-15：標示直角 ΔBDE 。

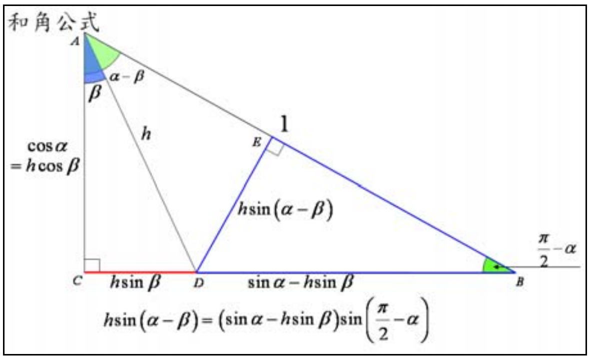

圖 4-2-9-16：由直角 ΔBDE 得

$(\sin\alpha-h\sin\beta)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$ 。

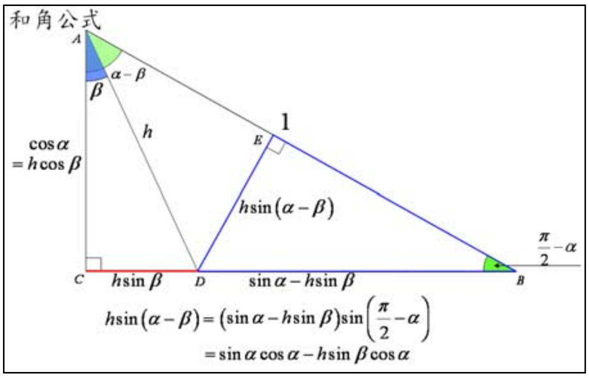

圖 4-2-9-17：得 $\sin\alpha\cos\alpha-h\sin\beta\cos\alpha$ 。

註：將 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$ 化為 $\cos\alpha$ 後乘開。

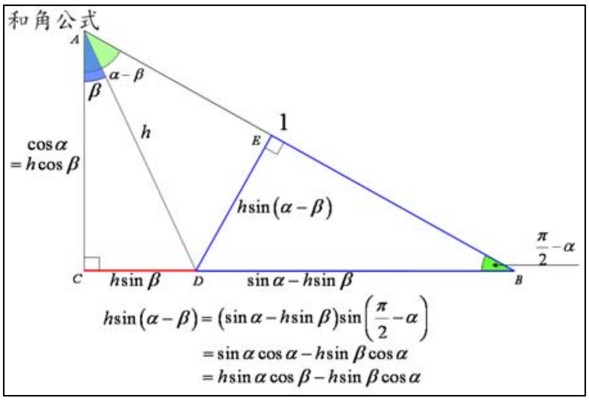

圖 4-2-9-18：得 $h\sin\alpha\cos\beta-h\sin\beta\cos\alpha$ 。

註：將上式前半之 $\cos\alpha$ 化為 $h\cos\beta$ 。

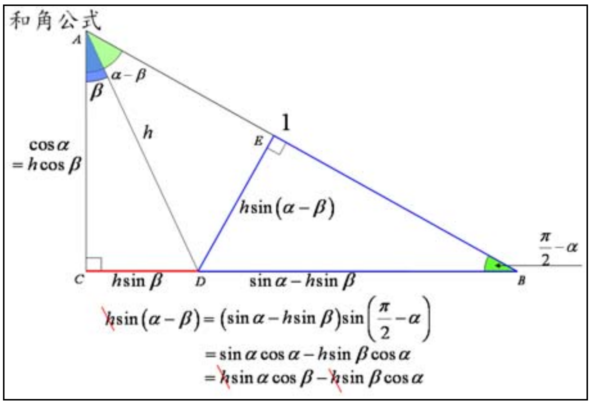

圖 4-2-9-19：出現斜線，將 h 約去。

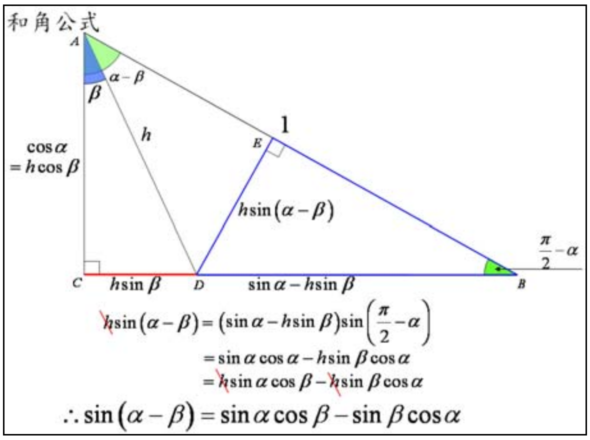

圖 4-2-9-20：得 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$ 。