

## 二、文獻探討

學生在解題時最大的困難點，在於不了解題目或不知要如何擬定解題策略而無從下手，於是在對於數學產生了恐懼感而漸漸不再喜歡數學。本研究主要是透過線上家教對國中生數學解題能力及學習態度影響的研究，因此研究者針對線上家教、合作學習、解題能力、學習態度、行動研究及本研究所教授的幾何部分做必要的文獻探討，以求本研究的完善。

### 2.1 線上家教

傳統的教學方式侷限於教師與學生在同一時間、同一地點面對面的講授課程，多數的時間是教師講授課程內容，或學生提問、教師回答，但提問題的學生則又是比較敢發言，不怕問錯問題的學生，如此一來，不擅發言的學生更是不願發言。進行小組合作學習時，則容易受時間限制的壓力，進而壓縮到學生討論的時間。線上家教的功能正可彌補上述傳統教學的缺憾，它注重每位學生的想法，無論任何成就的學生所提的想法，透過視訊，每位參與者，包括教師都能清楚的了解並給予回饋。線上家教時間的彈性正可解決學校課堂一節課 45 分鐘的壓力，現就網路特性、線上家教所採用的系統模式及線上家教教學理論分述如下。

#### 2.1.1 網路特性

當人們進入到網路，即進入一個虛擬的世界。在這虛擬世界中，人們可以變換各種身分悠遊其中，這是為什麼上網人數激增的原因。就網路和真實生活的差異，可歸納下列三點：

1. 超越空間的隔閡。網路超越了實質空間，而具有跨越時空的特性（Wellman et, all, 1996〔18〕；Strate, Jacobson, & Gibson, 1996；王家茗，民 90），使得全球各地的人們可不受時間、空間的限制，在網路中自由來去。
2. 身分的匿名。在網路空間中毋需將真實身分曝光，亦即具有匿名的特性（Scott, 1999；Kim, 2003），而其溝通的匿名性能幫助個人更放得開，以投入在互動的情境中（黃厚銘，民 88）〔19〕。
3. 參與平行。網路的匿名特性，使得在其中的活動，較不受真實世界的身分及地位所影響，因此在發言上較能暢所欲言。而在實證研究中亦發現，透過網路的溝通，參與者參與溝通的頻率增加了，所有參與者的發言地位更加的平等（Walther & Burgoon, 1992；吳齊般，民 87〔20〕）。

#### 2.1.2 線上家教的意涵 (On\_line\_tutoring)

遠距教學起源於 1833 年瑞士的郵寄函授，國內則在民 66 年和 75 年分別設立空中專科進修補校及國立空中大學為開端（李怡慧，民 89）〔21〕。所謂「遠距教學」的教學方式，即是透過錄音帶、錄影帶、Video on Diamond (VOD)、廣播電臺、有線或無線電視等傳播科技的方式來達到教育目的地，而據教師授課與學生學習的時機則又可以分為同步與非同步二種。自從民國 88 年 4 月起教育部開放大專以上學校開辦非同步網路遠距教學（李怡慧，民 89），在各大專院校透過網際網路為平台的遠距教學，如中正大學則以 Linux/FreeBSD 為系統平台進行遠距教學、中山大學的「網路大學」、高雄科技大學的「WATIE」系統、暨南大學的「WSML」系統（黃仁竑、許政穆、尹惠瑛、宋怡昆，民 90）〔22〕及交通大學傳播研究所所開設的「多媒體視覺傳播」視訊會議系統（黃含綿，民 86）〔23〕，更涵蓋了台灣大學、清華大學、文化大學、元智工學院、大華工專等學生的修課，這些都讓靜態的文字資料與聲音及影像同步地進行，以達最佳的互動性教學。

遠距教學根據教師與學生的溝通方向，又可分為單向與雙向二種。單向教學通常是教師的影音訊號學生可看得到、聽得到，但教師卻無法看、亦聽不到，師生之間不能即時互動，例如發問、討論等，當然教師亦無法得知學生在另一端的行為。若是非同步教學，則多是進行單向溝通，因此學生所在的地點多為集中式。同步教學，則多為雙向溝通，學生所在的地點也會採分散式。

雙向互動式教學則是教師與學生的視訊、音訊、圖案及文字皆可以互相傳送，因此可以即時互動。上述這些大專院校在遠距教學上雖然有的屬於雙向教學，但在整個教學過程，則有的是事先錄製的資料，在由學生不受空間、時間的從資料庫取用，然後在某一段時間同時上線，由教授或助教為學生解答疑惑。有的則是教授在一間教室，經由攝影機同步傳送到其他上課地點，學生需在同一時間、可在不同地點上課，也就是跨校修課方式。上述兩種方式在課程後的討論，雖是雙向溝通，但無法如同紙筆般你一筆我一畫的討論方式，使得較偏向視覺型的學生無法有效學習。針對這點，本研究著重在課後討論的互動性，希望在經由網際網路的討論中，不失紙筆般的模式，

線上家教則是結合語言 (Audio)、視訊 (Video)、電腦 (Computer) 及網際網路 (WWW) 所形成的雙向互動式視訊會議 (Two-Way Interaction Videoconferencing)。

### 2.1.3 線上家教教學理論

線上家教的教學著重在學生的認知發展，透過教師與學生、學生與學生彼此間的討論，教師適時的介入引導，將有效的協助學生學習。就本研究而言，線上家教最主要的教學理論有「網路教學」、「鷹架理論」

與「合作學習」。

### 1. 網路教學

傳統的教學方式大多是教師講述、教師提問學生回答、或者學生提問教師講解，屬單向式，較少有互動的機會，除非是進行小組討論。但小組討論卻又礙於時間的因素，因此只能擷取各小組的重點，忽略了少部分學生的意見，往往只能看到各小組最後的結果。其中的討論過程、教師的介入引導，只有該小組知道，無法分享給其他小組。

線上家教所進行的網路教學，師生間的溝通方式除了語言，更是利用文字來表達。文字的表達得經過思索才能完整呈現，不但可以讓學習者有更長的時間思考，並且可以訓練自己的表達能力（陳麗春，民 92）〔24〕。其中學生在討論的過程中所產生內容失焦的現象則需參與的師生共同努力才能使網路教學更臻完善。

### 2. 鷹架理論 (scaffolding)

此理論是由 Wood、Bruner、Ross 在 1976 年所提出的一種教學理論，其基本概念是源自於 Vygotsky 的近側發展區 (Zone of Proximal Development; ZPD) 理論啟發所發展的教學理論，他主張教育學生最重要的事是觀察學生在他人協助下的表現與學習潛力。ZPD 是一段距離，介於學習者獨立解決問題的實際層次，與學習者在教學者協助或成就較高的同儕合作去解決問題的潛在發展層次之間（谷瑞勉譯，民 88）〔25〕。

而知識的轉換期間，學習者的意識和控制是由教學者代理，直到學習者對於新的概念系統獲得控制力量，將之當作一種工具使用，這轉換期間，教學者正扮演著鷹架的功能（張新仁，民 92）〔26〕。因此 ZPD 會隨著學生獲得更高的思考與知識，而改變其自我表現的能力與需教學者或同儕的協助將不斷的改變，層次亦不斷提升。（如圖 2）

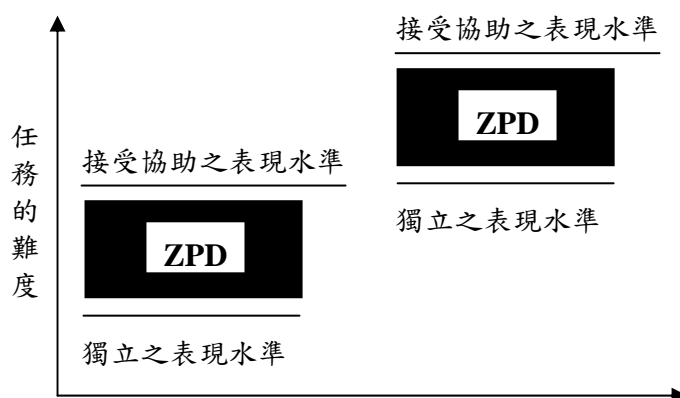


圖 2 近側發展區(ZPD)的動態本質

資料來源：Bodrova, E. (1996), *Tools of the Mind*. P.37

摘自張新仁，民 92

鷹架理論，強調人類高層次的心理活動在社會互動過程中，起初是透過他人的調整（other-regulation），而漸漸內化（internalization）為自我調整（self-regulation）的過程（張菟珍，民 86〔27〕；楊振嘉，民 89〔28〕）。也就是說，教師在指導學生學習較高層次（對學生本身而言）的任務（task）時，教師扮演著如同建築中鷹架的角色，在學生的學習過程中提供協助，並隨著學生的學習成長，慢慢的移走鷹架，以達學習遷移的效果。

### 3. 學習遷移（learning transfer）

學習遷移又稱訓練遷移（transfer of learning）。是指學習結果的擴展或類化的現象（張春興，民 78）〔29〕。Perkins & Salomon（1988）認為遷移是一種教學，此種教學被設計於教導學生如何應用所學的知識與技能到另一情境（引自蔡芳遠，民 91）〔30〕。

學習遷移的類型有：正遷移（positive transfer）與負遷移（near transfer）；水平遷移（lateral transfer）與垂直遷移（vertical transfer）；近遷移（near transfer）與遠遷移（far transfer）；一般遷移（general transfer）與特定遷移（specific transfer）；高路徑遷移（high road transfer）與低路徑遷移（low road transfer）。

近遷移是指學習者將所學的知識技能，應用於情境相似的能力。遠遷移則是指將所學的知識技能，在與先前不同的學習環境下，能解決不同類型問題的能力。亦即學習者須具有抽離情境脈絡（decontextualize）學習的能力（施郁芬、陳如綉，民 85）〔31〕。

### 4. 鷹架理論教學策略

張菟珍（民 86）歸納 Wood、Bruner、Ross、Brophy & Alleman 及 Debra 等多位學者，將鷹架理論應用在教學上的作法指出，藉由師生間「互惠式教學」、「教學控制的協商」和「透過學習責任的轉移」三種教學策略，可達成應用鷹架理論教學的目的。

- (1) 互惠式教學。教師角色不僅是支持，亦是監控學生的學習並給予適當的回饋。
- (2) 教學控制的協商。減少教師的控制，教師角色只是提供支持以增進學生的理解，並鼓勵學生能運用小團體的合作學習，得到較好的學習責任轉移效果。
- (3) 透過學習責任的轉移。教師的引導逐漸退出後，學生仍能有主動學習的態度，學習成效逐漸增加。

經過上述三種教學策略，可促進學習責任的遷移，增進學生對學習內容的了解，將是達成鷹架理論中學習遷移能力的最佳方式。

## 5. 合作學習 (collaborative learning)

合作學習指的是兩人以上為一組同時參與完成同一任務，組內的成員必須經過協調與溝通，以達成任務。就小組合作學習的數學學習目標之一就是將數學教室變成一個數學判斷的社群。

小組成員間合作式互動，他們以自己的語言對別人解釋，適時提出問題，並提供時間讓同儕回答問題，學生可在互動中激起認知重組的反應，進而提升認知層次（桂慶中、施頂清，民 89）〔32〕。

Leikin 和 Zaslavsky (1999)〔33〕則根據 Newman (1990) 和 Sutton (1992) 的文獻建議合作學習的具體方式是(引自曾政清，民 91)〔34〕：

- (1) 學生以 2 至 6 人為一組進行學習。
- (2) 需要在學生互動及相互依賴下，將整個學習工作視為一個整體來進行。
- (3) 學習環境提供所有成員公平的學習機會，並可以選擇不同的方式來與別人交流。
- (4) 每一個成員都必須對團體的工作負起責任，並提出貢獻。

## 2.2 解題能力

### 2.2.1 問題解決歷程

Dewey (1910)〔35〕在其「我們如何思維 (How We Think)」一書中，將問題解決的歷程分為五個階段：

1. 遭遇問題：對事物的情境產生認知上的疑問或困難的現象。
2. 界定問題所在：從疑難的情境中找出問題關鍵，澄清與定義問題。
3. 提出可能的解決方法：根據呈現的問題情境，使用先備經驗，嘗試提出解決問題的可能方法。
4. 考慮可能的結果：檢驗解決方法的可行性。
5. 決定解決方法：在有效的解決方案中，選擇最佳者並應用到實際的情境中。

Polya (1945) 在「How to solve it」一書中，則將問題解決分為下列四個步驟：(1)了解問題 (Understand the problem)；(2)擬定計畫 (Devising a plan)；(3)執行計畫 (Carrying out the plan)；(4)回顧 (Looking back)。楊麗華 (民 90)〔36〕則將該書的四個步驟翻譯並整理如下(表 1)：

表 1 Polya 解題模式與相關捷思策略

階段	重點	解題思考及策略	對學生的意義
理解	了解問題	*條件、已知、未知為何？	*提供的事實是

		<ul style="list-style-type: none"> <li>* 已知資料 (data) 是否能滿足條件？</li> <li>* 畫圖、引入適當符號</li> <li>* 把條件的各個部分分開，能否把它們寫下來？</li> </ul>	<p>什麼</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>* 條件是什麼</li> <li>* 目標是什麼</li> </ul>
計畫	<p>擬定解題計畫</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>* 找出資料和未知的關聯</li> <li>* 如果找不出直接的關聯，需考慮輔助問題。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* 以前見過嗎？是否見過相同的問題而形式稍有不同？</li> <li>* 是否知道與此有關的問題？知道可能用上的定理嗎？</li> <li>* 看著未知數，試想出一個具有相同或相似未知數的熟悉問題？</li> <li>* 仔細看未知，試著想類似未知的熟悉問題，你以前曾想過的相關問題，你能利用嗎？為了用它，是否需要引入某些輔助元素？</li> <li>* 你能重述問題嗎？你能用不同的方法重述它嗎？回到定義上，如果不能解決，先試解類似問題，想得出相關問題嗎？一般性的？特定性的？類似的？</li> <li>* 先注意一部分條件，看未知有何不同？能從資料得到什麼？能否想出用來確定未知的其他資料？能否改變未知或資料？使兩者的關聯接近？</li> <li>* 你用所有資料嗎？用所有條件嗎？是否考慮問題中所有基本的概念？</li> </ul>	<p>計畫可能的策略</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>* 考慮相關問題</li> <li>* 如何運用已學過的知識</li> <li>* 能用符號 <math>\square</math> 來代表具體的數值，並把數量的大小寫出一般式的算式</li> <li>* 解問題之前是否先簡化問題</li> <li>* 是否列表，尋求規律</li> <li>* 是否逆向思考</li> <li>* 是否能發現更多方法</li> </ul>
執行	實行計畫	<ul style="list-style-type: none"> <li>* 執行解題計畫，檢查每一步驟</li> <li>* 你是否了解每一步驟都正確？</li> </ul>	<p>列表、畫圖、找規律、執行解題計畫步驟</p>

驗證	回顧	* 你能否檢驗這個論證？ * 你能否用別的方法導出這個結果？你能不能一下子看出它來？ * 能不能把這結果或方法用於其他問題？	* 寫下答案 * 答案合理嗎？ * 這個問題能一般化嗎 * 解釋各算式的意義
----	----	--	---

資料來源：楊麗華，民 90

劉錫麟（民 82）〔37〕曾參酌 Ploya（1945）的數學解題模式，將詢問重點修改為「了解問題」、「計畫程序」、「檢查驗算」及「回顧檢討」等四個部分，由教師或擔任協助者角色的學生不斷向解題者提出詢問，藉以監控解題歷程並建構解題歷程的知識。

表 2 相互詢問的主要問題

詢問重點	詢問內容
了解問題	已知是什麼？ 未知是什麼？ 是否畫圖看看？
計畫程序	有沒有熟悉的類似問題？ 是否簡化問題？ 是否列表看看？ 找一找有無規律？
檢查驗算	驗算了嗎？
回顧檢討	是否回頭檢查每一個步驟？ 可不可以用其他的方法？ 用什麼方法比較好？ 做對或做錯的原因是什麼？

資料來源：劉錫麟，民 82

Schoenfeld（1985）〔38〕經多年對解題的研究，在其所著的 *Mathematical problem solving* 一書中，認為影響數學解題是否成功的四個變項：

- (1) 資源 (resources)。與解題相關的知識。例如數學的命題及程序上的知識。
- (2) 啟發式的解題策略 (heuristics)。解決問題的策略和技巧，例如：簡化問題或畫圖等方式。
- (3) 控制力 (control)。決定何時使用何種資源及策略。而解題時執行的決定—策畫 (panning)；評估 (evaluating)；監控 (monitoring)；

校正 (regulating)。

(4)信念 (belief)。個人對數學的全面性觀點 (world view) 決定如何接近問題的核心。

Schoenfeld 對問題解決提出五種解題策略：(1)儘可能畫圖；(2)尋找歸納法式論證；(3)利用矛盾法、對換法論證；(4)考慮變數較少的類似問題；(5)試著建立次目標。將解題歷程分為：(1)讀題 (reading)；(2)分析 (analysis)；(3)探索 (exploration)；(4)計畫－執行 (planning－implementation)；(5)驗證 (verification)；(6)轉移 (transition) 等六階段。

Glass & Holyoak (1986) 將問題解決的過程分為四個步驟，且強調這四個步驟是可以循環的。圖 3 為其流程圖，並說明如下：(1)形成初步的問題表徵：以自己的理解方式，形成不同的問題表徵方式，例如將問題中所呈現的訊息條例出來或畫出簡要圖形。(2)計畫可能的解決方法：應用一些有關的定理、原則或公式以建構能產生解答的一系列步驟。(3)重新界定問題：如果初期的問題表徵無法滿足解題需求，則須以另一種方法重新陳述或表徵問題，若不能成功地重新表徵問題，解題者可能會陷入膠著狀態，此時最好稍作休息，再回到問題情境。(4)實行計畫及檢討結果：執行所形成的解題計畫，如果失敗，則加以檢討原因，是否放棄、修改或重新擬定新的解題計畫。

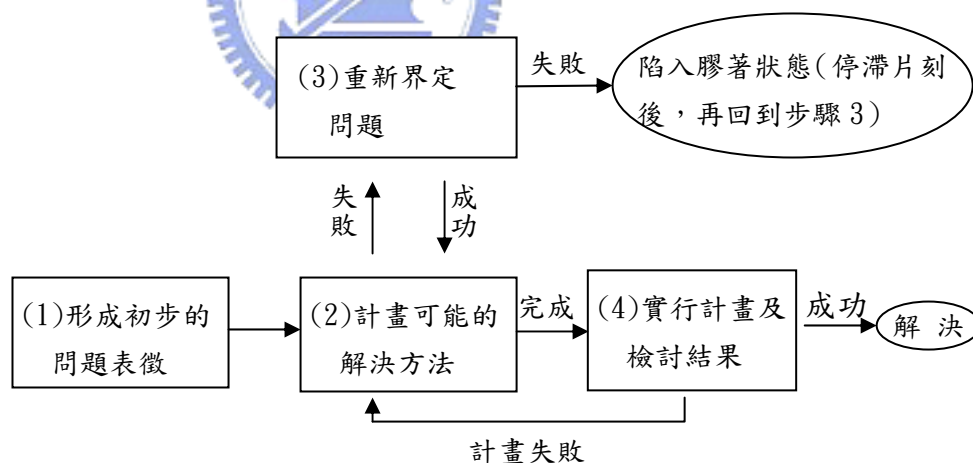


圖 3 Glass & Holyoak 的問題解決流程圖

資料來源：Glass & Holyoak, 1986, 引自黃明瑩, 民 89 [39]

本研究的線上家教解題教學策略是以 Polya 的四個解題步驟階段以及 Glass & Holyoak 的問題解決流程為主要教學步驟，並整理如下：

1. 了解問題。(1)將問題中有意義的部分分離；(2)簡化問題，以了解已知資料及所求目標。
2. 擬定計畫。(1)找出主要目標；(2)建立次目標 (例如畫圖、輔助問題…



- 等)。
3. 執行計畫。(1)執行解題計畫，將計畫中的各目標進行連結；(2)於解題中持續檢查解題步驟；(3)遇瓶頸，思考或再回「擬定計畫」中尋找其他次目標，甚至改變主目標。
  4. 檢核與發展。(1)最後則對整個問題及解題過程作回顧，自行陳述解題的整個步驟，並回想為何會利用該方法以檢驗所寫所證；(2)可否有更好的方法或不同的解題方法；(3)解題的方法或結果是否可以運用至其他的問題。
  5. 回顧。回顧並不是核對答案，而是回顧整個解題過程，想想看是不是有更好的方法，或不同的解題方法，解題的方法或結果是否可以運用至其他的問題等。

## 2.2.2 解題能力

黃敏晃(民89)〔40〕認為學習數學最好的方法，就是培養解題能力。譚寧君(民81)〔41〕認為解題能力應包括下列七種能力：(1)思考技巧；(2)具有選擇與應用策略的能力；(3)對解題應具有樂觀的態度與信念；(4)解題時能監控與評量其思考過程；(5)能夠運用相關的知識；(6)在團體合作學習情境中能去解決問題；(7)對不同類型的問題有能找到正確答案的能力(黃明瑩，民89)。

National Assessment of Educational Progress [NAEP] (引自楊榮祥，民81)〔42〕在1990年所提出的數學科評量架構中，則列出了學生在數學方面的解題能力應包括下列各項能力：(1)推理(reasoning)能力與分析(analytic)能力；(2)指認並形成問題的能力；(3)判辨數據的充分性(sufficiency)與均質性(consistency)；(4)運用策略、數據模型；(5)產生、修訂、充實過程；(6)空間推理、歸納推理、演譯推理、統計推理、比例推理等能力；(7)判斷問題答案或方法的正確性。

胡炳生(民83)〔43〕認為影響數學解題的相關因素如圖4所列，並將其因素做了以下的解釋：

1. 數學知識：數學知識是解題的基礎，而數學知識包括中學數學課本中的概念系統、定理系統和符號系統三大系統的基本知識，和數學競賽中所涉及到的有關初等數學或介於初、高等數學之間較高層次的數學知識。
2. 數學解題方法：數學解題方法是解題的基本手段，分三個層次。第一層次為解題的具體方法和技巧，例如：配方法、公式解、幾何中添加輔助線等。第二層次為數學解題的一些通法，例如：演譯法和歸納法、直接證法和反證法、座標法和解析法。第三層次為數學解題中的思考原則和策略。

3. 數學思維：數學思維是解題的原則和策略，它是指我們在解題的思維過程中所應遵循的總原則和總策略。總原則是熟悉化原則、簡單化原則和多途化原則。總策略是化歸，把要解的數學題化歸為基本的、標準的數學題。
4. 解題經驗：是指某些數學知識，某種數學解題方法和題中某些條件的有順序組合、成功的經驗，這種有序組合是有效的。
5. 邏輯：解數學題是一種思維活動，要想思維活動進行得有成效，就必須符合思維的規律—邏輯。數學推理中主要是應遵循形式邏輯，但在探索性思維活動中，還要有辯證邏輯的幫助。
6. 興趣：一個人的思維品質和對數學的興趣，無疑對解數學題有顯著影響，一個見了數學就厭煩的學生，是解不好題的。相反的，一個對數學有濃厚興趣的學生，能埋頭幾個小時做題，以解題為樂。
7. 語文知識、社會生活知識以及其他學科知識：對數學解題都有關係，因為數學題都是用文字來表述的，解題最後結果也要用文字來表述出來。

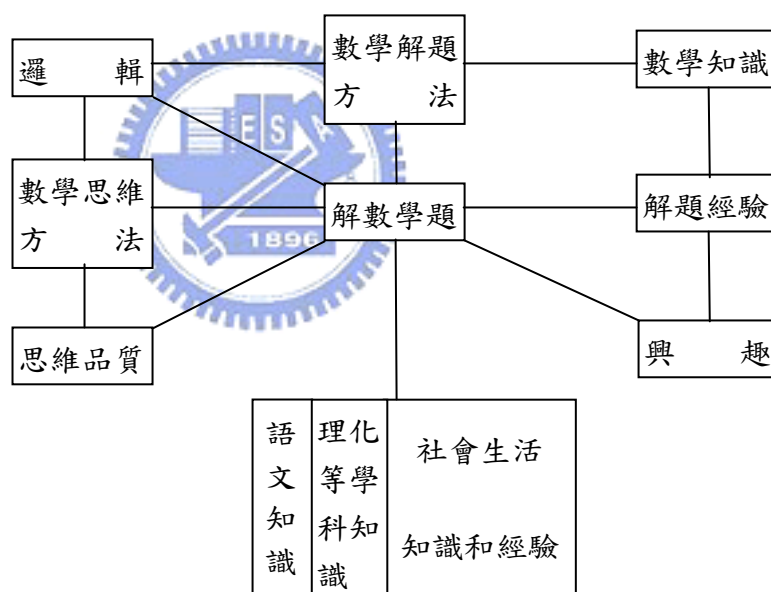


圖 4 影響數學解題的相關因素

資料來源：胡炳生，民 83

### 2.2.3 解題能力評量模式

解題的評量是在根據解題歷程及解題能力的分析下，對解題應有的能力作有效的考核，以了解解題過程中的恰當性，並且能由評量過程中深入了解學生在學習時的不足之處，以下就一些學者所提出的評量方式作分析，並將本研究的評量方式整理如后。

Charles 和 Lester (1982) [44] 的評分方式是將學生的解題過程分為三個階段（了解問題、擬定計畫及求得答案）來給分，每個階段的總分各為 2 分。其整個解題過程的評分方式如下：

表 3 Charles 和 Lester (1982) 的解題評量表

解題過程	得分與學生的解題表現
了解問題	0—完全無法解釋問題 1—對於問題的一部分無法解釋 2—完全了解題意
擬定計畫	0—完全無法安排適當的計畫 1—問題中只有一部分能正確的規畫 2—計畫能執行，據此並獲得正確的答案
求得答案	0—由於不適當的計畫而無法求出正確的答案 1—計畫錯誤或抄錯 2—求得正確的答案

資料來源：Charles 和 Lester (1982)

Charles 和 Lester 所分的三個層面是彼此互相關連，很難分開評量了解問題和實際解決問題的分數，因為學生所擬定的解題計畫是直接受到其是否了解問題的影響 (Schoen1982；引自林碧珍，民 78 [45])。Mcaloon 和 Robinson (1987) [46] 則根據學生的整體表現來評分。

表 4 Mcaloon 和 Robinson (1987) 的解題評量表

得分	學生的解題表現
0	<ul style="list-style-type: none"> <li>●空白</li> <li>●沒有正確解答</li> </ul>
1	<ul style="list-style-type: none"> <li>●一開始就用不適當的策略</li> <li>●沒有嘗試再用別的方法</li> </ul>
2	<ul style="list-style-type: none"> <li>●不適當的策略，但顯示對問題有一些了解</li> <li>●雖然使用適當的策略，但不能繼續做下去</li> </ul>
3	<ul style="list-style-type: none"> <li>●有適當的策略，但忽略問題的第一個條件或思考的過程不清楚</li> </ul>
4	<ul style="list-style-type: none"> <li>●有適當的策略，但有計算上的錯誤</li> </ul>
5	<ul style="list-style-type: none"> <li>●有適當的策略</li> <li>●對問題完全了解</li> <li>●答案完全正確</li> </ul>

資料來源：Mcaloon 和 Robinson (1987)

Schoenfeld (1985) 提出多重計分方式，除評量學生的解題過程之外，尚考量學生所使用的解題方法之個數及其解法所達到的程度。將解題過程分為三方面來評分，每一個層面則依據學生是否使用而給予 1 或 0 分。此種評分方式的優點是可以既快速而且容易地記錄學生的表現，並且可以鼓勵學生去尋找更多的解題方法，但對研究者則不太恰當（黃明瑩，民 89）。

表 5 Schoenfeld (1985) 的多重計分方式

解題層次		學生解題特徵
顯示證據		學生是否有任何證據顯示其對於問題已意識到一特殊解法。
尋求方法		學生是否有尋求出這個方法？或者只意識到，但沒有去尋求。
進展	沒解出	沒有進一步求答
	有一些解出	學生的處理方式很合理，但無法求出答案
	幾乎解出	很接近答案了，但計算上有一些錯誤
	解出答案	完整的解答

資料來源：Schoenfeld (1985)

同年 Schoenfeld 再提出最佳方式評分表，在一個解題特徵範圍中給予 5 分的評量空間。

表 6 Schoenfeld (1985) 最佳方式評分表

得分	解題特徵
0	沒有尋求任何方法
1~5	有尋求方法之下，但答案幾乎與正確答案不相符
6~10	有尋求方法之下，且解出的答案與正確答案有些符合
11~15	有尋求方法之下，且解出幾乎是正確的答案
16~20	有尋求方法之下，且解出完全正確的答案

資料來源：Schoenfeld (1985)

林碧珍 (民 78) 與譚寧君 (民 81) 的研究指出，很多數學解題評量工具的設計是以 Ploya (1945) 的四個解題階段，作為數學解題能力評量的重點 (包括了解題意、擬定計畫、執行計畫、檢討與回顧) 分階段計分，同時參考 Mcaloon & Robinson (1987) 所採用的計分方式依據學生解答的特徵，分別給予 0、1、2、3、4、5 分。該研究之解題能力是以受試者在薛麗卿 (民 87) [47] 所編製的「怎樣解題成就測驗」施測所得之結果解釋其整體性的解題能力；得分越高，代表數學解題能力越好。

表 7 「解題能力測驗」的計分方式

得分	評分標準
5	列出正確且合乎邏輯（適當的策略）的算式，且能計算出正確答案
4	列出正確式子且合乎邏輯（適當的策略）的算式，但因筆誤或計算有誤，以致得到錯誤的答案
3	列出式子不完全或過程交代不清，但最後推出正確的答案
2	列出不正確的式子，未能解出答案，但有一些有意義的思考過程
1	未列出式子，未能解出答案，但有一些簡單的計算過程或僅出現答案
0	試卷上空白，或僅出現答案，但答案是錯的

資料來源：楊麗華，民 90

本研究是屬質性研究，研究對象有五名，探究學生在線上家教中對解題能力的影響，因此並不太適合以分數作界定。所以本研究的解題能力評量是以 Polya(1945)的四個解題步驟階段及 Glass & Holyoak(1986)的問題解決流程作為數學解題能力評量的重點，再參考了 Mcaloon & Robinson(1987)的解題評量表及國內學者（林碧珍，民 78；譚寧君，民 81）的計分方式，自行設計解題能力評量表（表 8），但不採用計分而是以等級方式呈現，將各項評量標準分為 0~十等級，其中等級九分兩部分，主要是學生在解題策略及產生新的問題上，並沒有那一等級在那一等級之上，而當此兩項皆達成，將之歸於第十級，以期能將學生的解題過程做更有效的分析，茲敘述如下。

表 8 解題能力評量表

等級	評分標準	細部說明
0	完全無法了解題意	完全不會
一	未完全了解題意	對題目無法正確釐清條件、資料及所求為何
二	了解題意，但使用策略不適當	題目了解，但未能進一步列出式子（輔助），或列出式子（輔助）錯誤
三	了解題意，發現使用策略不適當後，有再做其他策略嘗試	發現列出式子（輔助）錯誤後，有再做其他有意義的嘗試列式子（輔

		助)
四	了解題意，適當的解題策略，但執行計畫失敗	策略陳述雖正確，但無法繼續做下去
五	了解題意，適當的解題策略，執行過程有瑕疵	有正確的解題策略，但在執行過程中遇有瓶頸，而以直覺判斷給予結果，再繼續解完題
六	了解題意，適當的解題策略，執行未完全	解題過程有小錯誤，未修正
七	了解題意，適當的解題策略，執行過程正確	題意、策略、計算或證明過程正確、答案正確
八	了解題意，適當的解題策略，執行過程正確，能重新評估解題過程、驗算	題意、策略、計算或證明過程正確、答案正確，且對題目作驗算
九_1	了解題意，有適當的解題策略，執行過程正確，能重新評估解題過程、驗算，並能提出不同解題策略	對題目能有不同的解題策略
九_2	了解題意，有適當的解題策略，執行過程正確，能重新評估解題過程、驗算，能產生新的且有意義的問題	在對題目的驗算過後，能提出不同觀點的且有意義的題目
十	九_1 及九_2：提出不同的解題策略，並有新的且有意義的問題	

## 2.3 學習態度

### 2.3.1 態度的意義

態度 (attitude) 是個人基於過去的經驗，面對某一特定事物或情境，所持有理性的認知、情感的好惡與行動的傾向，是具有相當的一致性與穩定性的一種心理特質 (高石城，民 88)。態度對個人具有各種不同的功能與價值，態度雖然具有相當一致性與穩定性，但仍具有某種程度的可改變性。Kelman (1961) [48] 認為態度的形成或改變，一般經由「順從—認同—內化」等三個階段逐漸完成。

態度是積極或消極的去反應某種客體、情境、機構或人員的一種學得的傾向 (learned predisposition)。它含有三種成分：認知 (知識或理性)、情感 (情結和動機)、作業 (行為或行動) (Aiken, 1970) [49]。

態度是由過去的經驗所組織而成，影響個人對於某一事物、情境的反應傾向或行為趨勢的一種心理和神經的準備狀態 (Allport, 1935)

〔50〕。

態度是指個體對人對事所持有的一種具有持久性和一致性的行為傾向。態度具有下列四個性質：1. 態度只是一種行為傾向，而非指行為的本身；2. 態度一定具有對象；3. 態度是有一致性和持久性的；4. 態度是具有組織的。（張春興，民 65）〔51〕。

研究者將態度整理，認為態度並無對、錯之分，而是積極、消極與正向、負向的傾向。更進一步而言，也就是個人對一特定對象（人、事物或情境）所持有的一致與穩定性，但仍會隨外在環境影響而產生改變。

### 2.3.2 數學學習態度

數學態度是個體在後天的學習環境中逐漸形成的，絕非與生俱來的行為傾向（張春興，民 65）。王文清與李添全（民 80）〔52〕對數學態度的看法如下：1. 數學態度是個體在後天的學習環境中逐漸形成的，非天生的，具有持久性，但並非不可改變。2. 個體的數學態度對其數學的學習，必有某種程度的影響。3. 數學態度主要包括認知性的、情感性的以及行為性的三種成份。認知性的成份是指個體對於數學的思想（見解、信念、評價與知識）；情感性的成份是指個體對於數學的情感（喜好、厭惡或沒感覺）；行為性的成份則是指個體對於數學相關領域所持有的一種行為傾向（趨近或逃避、選擇或放棄與數學相關的活動及職業等）。

學生對數學的態度，不但影響數學的學習，當面臨問題時，更是直接影響學生運用所學數學知識解決問題的表現。因此，學生對數學興趣、自信等正面態度的培養，是數學教育重要的目的之一。

Fennema & Sherman (1976)〔53〕將學生的數學學習態度細分六項 1. 數學的有用性；2. 重要他人對學生數學學習的態度；3. 數學成功的態度；4. 學習數學的自信心；5. 數學動機；6. 數學焦慮。

Pintrich & DeGroot(1990)〔54〕則提出的動機信念模式(social cognitive model of motivation)，認為動機的強弱會引發一個人在學習策略上的態度，進而影響學業成績。Pintrich & DeGroot 將動機信念分為三個層次：價值 (Value)、期望 (expectancy) 及情感 (affect)。

1. 價值：個人認為學習某一科目的重要性，而價值可以再細分為學科特有的價值，內在 (intrinsic goal) 或外在目標 (extrinsic goal)。內在目標是指學生以學習某科目的內容為終極目標；外在目標則是學生學習某科目的內容時，希望以此學習成果為工具，達成其他目的（例如考試、升學）。
2. 期望：個人對自己能力的信念，亦即自我效能 (self-efficacy) 及控制信念 (control belief)。自我效能意指個人評估自己是否能學得會科學的某一個概念，假使一個人認為自己在某一學科

上是有能力的，這種信念會支持個人用較高級的認知策略去學習這個科目。控制信念指的是學習的結果是不是自己所需負的責任、是自己所能控制的。

3. 情感因素：指的是測試焦慮 (test anxiety)。適當的測試焦慮可能促使學生更專注於學習，但過於焦慮則常導致無法專心，認知負載過重。

謝豐瑞 (民 92) [55] 則將數學態度分成數學學習態度與學生對數學的態度兩面向來看。

#### 1. 數學學習態度：

(1) 學生願意解決數學問題之正面學習態度 (目前許多學生只為了考試成績而解題，看到較難的數學題目即放棄)。(2) 學生願意以數學方法解決生活中的問題 (數學為探索自然與社會環境中，各種數與形規律的科學)。(3) 學生主動探索數學的態度 (前兩點主要圍繞在應用數學方法解決問題的態度上，應用學過的方法解決問題，在思維上偏向演繹的方法)。然而從終身學習的角度來看，演繹是不夠的，因其較具封閉性；而數學的實驗探究可補不足，因其歷程中較能開發學生開放性的歸納思維。因此謝豐瑞認為在數學學習態度上應養成學生具有「主動探究數學」及「願意利用數學方法解決問題」的態度。

#### 2. 學生對數學的態度：

(1) 相信數學是描述生活中共通現象或規律的利器；(2) 相信數學規律有其道理；(3) 相信學習數學有助於立足社會；(4) 相信解決數學問題的意義在於自我解題的過程；(5) 相信數學是推進人類文明的要素。

研究者將數學學習態度整理，認為數學學習態度是後天環境所形成的。一旦形成，便具有持久性，但仍會因環境的改變而改變，而影響學生數學學習態度主要是「學生對數學的價值觀」、「自我能力的判斷」及「耐壓性」。

學生對數學的價值觀即是對數學的有用性及個人學習該科目的意願或願意用數學的方式解決生活上的問題。自我能力的判斷則是自我效能的肯定，也就是學生對學習數學這方面的動機及自我的信心，而家人及教師的態度亦會左右學生的自我能力。耐壓性即數學焦慮，適當的壓力會使人更覺挑戰性，但當無法承受時，將無法專心、害怕、厭惡，逃避而不願再學習。

## 2.4 幾何的學習

人類在很早以前就會使用或創造視覺可以看到的幾何圖形。當文明



漸漸發達後，人類也開始思考一些較抽象的幾何圖形。中國古代最早探討幾何的一般性應算是周髀算經和墨經；而將幾何抽象的性質做全面的研究整理出書，則是古希臘數學家歐基里德，他於西元前三百年左右作了Elements（幾何原本）這本書，也正因為這本書使得幾何成為獨立探討的一門學科（國立編譯館，民 88）〔56〕。一般而言，幾何的教與學可以從三個不同的角度切入來看：

### 1. 程序計算的幾何：

強調的是解決幾何圖形中量的問題，譬如周長、面積、體積、等量的問題。呈現的方式往往是以實例引出結論，再利用這些結論進行運算，而後重點放在程序性的計算、

### 2. 推理證明的幾何：

自泰利斯以來，幾何漸漸走入推理、證明的階段，對於幾何的議題不再只是做，而是問為什麼，也慢慢孕育出幾何抽象性質的證明，一直到歐基里德的Elements時，邏輯推理的數學達最高峰，而我國的幾何發展亦受到歐基里德的影響。

### 3. 探索實驗的幾何：

在以往多數中學生的經驗中，幾何只是一些已知性質的介紹與證明。近幾年來，一些數學教育家已經開始推動幾何探索的教學，將幾何的探索與實驗帶入教室。再搭配電腦與相關軟體的發展，藉由電腦的高度重複性，使得抽象的觀念，得以較實際的圖形進行觀察。

國內亦有相關幾何探索教學的論文，主要是以動態幾何（GSP:The Geometer's Sketchpad）為實驗軟體。本研究針對國中部分的論文，其研究目的與其結果列表如下：

表 9 國內有關國中幾何探索教學論文

研究者	研究對象	論文名稱	研究結果
梁勇能 89年 〔57〕	大台北地區 國二生 222位	動態幾何環境下，國二學生空間能力學習之研究	動態幾何軟體 GSP 有助於學生培養空間能力，也顯示在幾何的學習、甚至於學習證明上都有幫助。
林星秀 90年 〔58〕	高雄市 國二生 56位	高雄市國二函數課程 GSP 輔助教學成效之研究	實驗組學生對於採用電腦輔助教學持正向的態度。高分群學生認為可從動態教學環境中思考、推測、而獲得正確的概念。
黃哲男	台北市	於動態幾何環境下國	GSP 的引入，使學生產生與一般

91 年 〔 59 〕	國二生 63 位	中生動態心像建構與 幾何推理之研究	視覺化不同的動態視覺化。亦有 不同的推理方式，改變個體的數 學思維。
李偵生 91 年 〔 60 〕	高雄市 國二生 77 位	發展數學科 GSP 教學 模組之行動研究—以 商高定理為例	透過 GSP 圖形的可變異性和動態 連續變化的特質，能促進學生思 考能力。

資料來源：研究者自行整理

## 2.5 行動研究

### 2.5.1 行動研究的理念

「行動研究」一詞是 Lurt Lewin 於 1940 年代提出。

MacMillan(1996)〔61〕從教育情境的角度，認為行動研究是由教師所主導的研究。著眼於教師自身的問題，目的在解決教案、學校或教育場域中的某一問題。

Elliott(1991)〔62〕則認為教育的行動研究可以作為縮小理論與實務的差距，反應一實務的形式且可成為文化的革新。

歐用生(民 88)〔63〕認為行動研究是實際工作者採取質疑、研究和批判的態度，在行動中反省，以改進實際、增進對實際的了解，並改革實際所在的環境。

林素卿(民 91)〔64〕分析行動研究對教育工作者而言，其理念為：  
1. 教師即研究者；2. 對自然情境與實務的洞察；3. 質的研究技術是主要蒐集資料的方法、

### 2.5.2 行動研究的模式與實施步驟

每個行動研究有其本身的特色，並沒有統一的模式。但其研究的特徵則是連續的、反覆性的一種自我反省及批判。

McKernan(1991)〔65〕則將行動研究分成三種主要模式：

1. 科學—技術觀點之問題解決 (scientific-technical view of problem-solving) 模式，強調研究需要以某些步驟進行。
2. 實務—審議行動研究 (practical-deliberative action research) 模式，強調詮釋、溝通及過程的探究。
3. 批判—解放行動研究 (critical-emancipatory action research) 模式，強調將批判哲學的意識融入研究之中。

Carr 和 Kemmis(1986)〔66〕將行動研究分為計畫(planning)、行動(acting)、觀察(observing)及反省(reflecting)四個步驟。其活動與活動之間則是呈現一螺旋式的循環。Kemmis 和 McTaggart(1988)〔67〕更

進一步說明此四步驟與行動研究螺旋式(action research spiral)的關係。指前四個步驟可構成一個循環的週期和形式，由第一次循環進入另一個循環前，再修正計畫與行動。

綜合國內外學者對行動研究實施步驟的看法，大多為：計畫、行動、觀察、反省及修正，並藉由螺旋式的步驟而循環，如圖5。

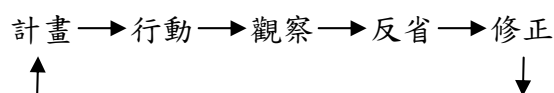


圖5 行動研究實施步驟

### 2.5.3 行動研究對教育工作者的重要性

McNiff(1988)〔68〕表示行動研究不僅是教學，它亦應是抱持著批判和注意去看待教學，並採取自我批判態度來面對研究過程中的改變及實務的改進。

郭重吉、江武雄和張文華(民86)〔69〕則引用 Berlin & White (1992)〔70〕的論點，指出行動研究對教師的重要性：

1. 可利用不同觀點以及專家帶來的好處。
2. 研究結果可作為相關教學實務的參考。
3. 教師的直接參與研究，可打破傳統上教師對研究者的敵意。
4. 提供教師學習與成長的機會。
5. 能由教學現場的人自行解決所面臨的問題。