

## 四、研究結果

線上家教在整體的進行過程中雖有解題策略，但並沒有固定的教學模式。以學生學習為中心，依學生當時不同的表現作適當的調整，可說是建構主義的最佳表現。線上討論記錄、數學解題能力及訪談記錄是本研究主要的研究方法。整個教學以學生為主體，教師擔任鷹架的支撐者，線上家教進行的過程中，教師介入引導、學生彼此間的合作學習、學生學習態度的表現。

本章依據研究問題，分四方面說明：1. 架構線上家教系統，所產生的問題及其因應方式（研究問題 1）。2. 學生數學解題能力及合作學習的表現（研究問題 2）。3. 學生的數學學習態度（研究問題 3）。4. 值得分享的教學實務經驗（研究問題 4）。

### 4.1 架構線上家教系統，所產生的問題及其解決策略

線上家教主要是藉由網路的聯繫，讓教師與學生在不同空間亦能進行教學。因此本節將依研究期間，在教學設備及網路連線所遭遇的問題，分析後提出其解決策略。

#### 4.1.1 軟硬體設備

##### 1. 學生家中電腦。

【問題】原本研究者的計畫是四位學生，初期的硬體測試，36 號家中電腦無法安裝 JoinNet。

【解決策略】恰好有機會和 31 號學生在即時通中對談。在對談中該生透露有興趣參加的意願，因此研究者即表示歡迎，並打算將 36 號換成 31 號。

【問題】隔日 36 號學生竟表示將可使用母親的筆記型電腦。

【解決策略】雖然與原先的計畫不同，但站在教育上鼓勵的立場，研究者將原本的四人改為五人。

【教師省思】本研究的學生是就讀於台北市的國中，因此幾乎家家都有一台電腦，而該生發生電腦無法安裝的原因，則是家中電腦無法負荷軟體所需的規格。也由於該生的母親本身即是電腦工程師，因此願意將自己上班所使用的筆記型電腦借給該生。

多一位學生的加入，是研究者未料到，但同是研就者的學生，自無拒絕的道理，相信會有不同的感受。

##### 2. 伺服器。

【問題】原先構想是將所有資料放置於同一台伺服器，也就是一般網路

上所提供免費的網頁空間，但因空間有限。

**【解決策略】**因此將視訊錄製的資料放置於學校的伺服器，而將主要的網頁放置於免費的空間中。

**【問題】**六月底因原研究者學校網路中毒，原伺服器需修復。

**【解決策略】**為免影響研究進度，研究者立刻連繫他校，開放適當的空間以放置資料，讓實驗不至中斷得以持續進行。所使用的留言板是免費申請的，因此並不需要自己再寫程式，讓硬體方面更簡化了許多。

**【教師省思】**線上家教最怕網路斷訊，而斷訊可能性很多。研究者正好認識多所學校的資訊組長，因此當發生斷訊的第一時間立即請託他人，讓研究進度順利進行，多認識人果然有好處。使用的留言板雖是免費的，但廣告很多，且是不太好的廣告。原本想再換一個留言板、或自行架設。但後來在學校和參與實驗的學生聊時，學生則對廣告表示那是騙人的，因此研究者乾脆將留言板的密碼給學生，讓他們擁有刪除廣告的權利，這正是一次漂亮的機會教育。

### 3. 聲音傳遞問題。

**【問題】**聽不到聲音。

**【解決策略】**可能的原因是麥克風的插頭接錯孔，或在音量控制中未將「麥克風音量」調整，最糟的情況則是音效卡壞掉。

**【問題】**聲音品質不良。

**【解決策略】**可能是嘴巴與麥克風的距離關係，(1) 嘴巴最好離麥克風 2~3 公分，並且嘴巴不要直接對著麥克風，如此容易讓呼吸聲成為會議中極大的噪音，也就是避免將麥克風放置在嘴巴正前方到下巴之間。(2) 也有可能是頻寬不足或網路擁塞所造成，解決辦法則是關閉視訊的部份。(3) 另一種原因則是電腦效能太低，尤其當學生喜歡上網玩電玩，電腦中容易堆積不必要的資源造成電腦效能降低，解決方式除了可以清理“資源回收筒”外，亦可將 IE 中暫存資料一併清除，處理方式是在 IE 功能鍵中選擇「網際網路選項」內的「一般」，點選“刪除 Cookie”、“刪除檔案”及“清除記錄”該三個按鍵。

**【問題】**產生回音。

**【解決策略】**當外部喇叭所傳出被麥克風接受到時，回音就產生了。解決的方式是使用耳機或指向性麥克風，指向性麥克風是麥克風對那一方向能有感度的意思，一般可分四種：無指向性；單一指向性；雙指向性；超心型指向性。但指向性麥克風價格並不便宜，有些使用研究者提供的耳機式麥克風，有的則是外部喇叭及麥克

風，在不多花錢購置指向性麥克風及不要求音質之下，教導學生將外部喇叭的方向調整到不面對麥克風，及耳機式麥克風的位置，可以解決上述的問題，教師所使用平板雙用筆記型電腦的麥克風則是內建的。

**【教師省思】**線上家教除了討論板的書寫，另一項非常重要的溝通管道就是聲音了。常常學生、教師寫的和說的是不一致，或則寫的無法讓他人明白，因此麥克風變得相當重要。幸好現在的麥克風都滿便宜，只要小心注意，一枝麥克風，可讓空間距離縮短的。

#### 4. 手寫板的重要性。

在 JoinNet 討論板上書寫文字、繪圖，是傳遞訊息的最佳方式。但用什麼書寫呢？最佳的方式就是研究者使用的平板雙用筆記型電腦，專用筆在螢幕上書寫如同在紙上書寫一樣的方便。其次則是手寫板，手寫板的技術雖然越來越好，但畢竟在書寫的過程中，手寫板上是看不到任何文字或圖畫的，因此視野必需在螢幕及手寫板上來回穿梭，若熟悉的話就還可以書寫得宜。最不方便的則是滑鼠，滑鼠雖然也可以書寫文字及繪圖，但在操控上需一直按住滑鼠的左鍵才能在畫面上顯示所要表達的部份。

**【問題】**在進行該研究前，平板雙用筆記型電腦問世且價格已降至可接受的範圍，因此研究者順勢買了一台，而參與研究的學生家中則有桌上型電腦，但沒有手寫板。

**【解決策略】**起初研究者將自己所擁有的三組手寫板給其中三位學生，另兩位學生則使用滑鼠。進行線上家教不久時，使用滑鼠的那兩位學生即表示不方便，雖然滑鼠所指的位置正是螢幕上的位置，但在書寫過程中需一直按住左鍵，很容易發生中斷的現象，因此研究者在下回進行前提供兩組手寫板給那兩位學生，讓實驗進行更加順利。

**【教師省思】**手寫板可說是研究者最大的投資，一組要價上千元。若買太小，雖然比較便宜，但學生書寫起來相當不方便，看到學生在討論板上書寫的樣子，確定這投資是值得的。

#### 5. 資料上傳的方式。

**【問題】**透過討論板的上載圖片，可以將任何想傳達給與會者的資料以圖片的方式呈現在討論板上。有哪些方式呢？

**【解決策略】**經研究者分析，討論板的上載圖片方式有以下三種：

①上載圖片檔。這是最直接的方式，但只適用圖片檔，其上載方式請參看附錄二。

②利用 JoinNet 所附予「JoinNet Interactive Board」印表機的

方式，將非圖檔經由該功能列印成圖檔，再上傳至討論板。可在討論板上利用上傳圖片的方式，將所欲呈現的資料列印上傳，亦在 JoinNet 上線的狀態下直接開啟檔案，再利用列印選擇「JoinNet Interactive Board」印表機的方式上傳圖片，其上傳方式請參看附錄二。

③無論第一種或第二種的方式，都是透過圖片的方式上傳，而將原本非圖片的檔案（如文字檔、簡報檔或動態幾何檔…等）除了利用第二種列印的方式完成，尚有其他方式。如遇到文字檔，可利用「複製」、「貼上」的方式將開啟的文字檔內文字或圖片複製於討論板上，但效果相當不理想，且數學中最常運用「方程式編輯器」的部分全數無法顯示在討論板上。而另一種常用的製圖方式是位於鍵盤右上角 **PrtSc** 鍵，按此鍵可將螢幕上的畫面做擷取的動作，回到討論板上再按 **Ctrl**+**V** 則可將所擷取的畫面貼在討論板上，但如同第二種方式，上傳後的圖片會因討論板的大小而將文字、圖片壓縮，使文字過小，且將不必要的部份皆上傳。因此，當遇到須將非圖檔的資料轉換成圖檔時，研究者是使用另一套免費的小軟體－「Camera4」，該軟體的特色是可隨意選擇您要的畫面大小，其製作方式請參看附錄二。

**【教師省思】**討論板上除手寫外，最常使用就是將資料擺上。研究者因教學，所以會將題目先以文書方式處理，但接下來呢？經過使用上述的各種方式，覺得利用「Camera4」免費的軟體最適當。用 JoinNet 所附予「JoinNet Interactive Board」印表機的方式，則會耗費較久的時間。

#### 4.1.2 網路連線

JoinNet 本身也有提供即時通的功能，但研究者卻沒有使用，原因有二，一是就學生習慣的立場，學生習慣利用網路上一般入口網站所提供的即時通，如 Kimo 或 MSN 等。二是就分散風險的立場，因為所利用的伺服器並不是自己所架設的（網頁及資料架設在兩所國中學校、即時通是利用入口網站、留言板是免費申請的、JoinNet 架設在交大共五台伺服器），若所有的都在同一台伺服器中，一旦架設 JoinNet 的伺服器發生狀況，網路無法連線勢必造成聯繫上的困難。因此研究者將即時通與 JoinNet 分開不同的伺服器使用，一旦無法進入 JoinNet，利用即時通亦可完成預定的行程，學生的問題也可立即性、有效性的解決。

**【問題】**JoinNet 無法連線時。

**【解決策略】**

1. 無須替代，仍可繼續進行

一次線上家教教學進行時，該生作說明解題過程中，教師端（主持人）的網路發生中斷現象，但學生並未發覺，仍可在討論板上書寫與說明，而教師再度連上線與學生繼續進行線上家教教學。（參考 0622for38 [Video](#)）

第一次線上測驗時，採取個別與不同日期進行線上測驗，因此花了近一星期的時間。但在第一次、第二次期間，研究者發現教師在線上教學時，其他同學進入 JoinNet 被拒絕後，系統會自動轉入留言的模式，也就是線上家教持續進行中，而其餘同學則可進行測驗或繳交作業。因此第二次線上測驗除了 36 號因家中電腦問題，其餘四位同學都是在同一天同時進行測驗。

暑假期間，教師人在南部，學生在北部，若是以往沒有網路的情形，不是中斷教學，否則就得利用電話聯繫。而現在的網路，正打破空間的阻礙，在第一次線上測驗後的教學，正是遇到上述狀況，利用網路的連線輕鬆解決問題。

## 2. 以即時通替代 JoinNet

下面第一個例子就是一回在星期六（6/19）JoinNet 不經意的當機，因此便藉由 MSN Messenger 與學生聯繫，並利用 MSN6.0 版以上具手寫功能來進行教學，將預定要教的作業順利完成。但利用即時通作數學線上討論會有兩項缺點，第一是彼此的對談無法即時錄製且 MSN 手寫部分不會自動儲存於電腦中，需事後立即將對談資料複製下來，如圖 10。第二則是每次利用手寫的部分在傳送後須再重寫一次，造成書寫上的困難，如圖 11。



圖 10 利用即時通教學情形一

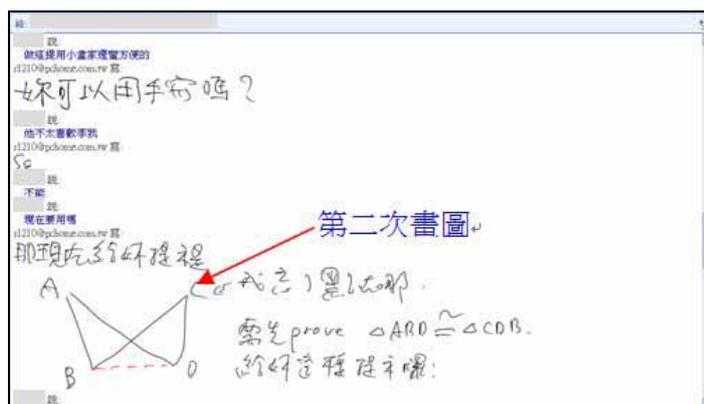


圖 11 利用即時通教學情形二

第二個例子是 0617forall，因當時上線人數包含主持人只能五位，而 01 號是最慢上線，因此被拒絕登入。這是研究者未事先查證清楚，因此採取緊急措施，以 MSN 與該生聯繫，並將預定進度的題目利用 MSN 傳輸功能，傳送給該生，如圖 12。

| 2004 年 6 月 17 日 小強 vs 01 |  
 [PM 08:05] 小強: 上線  
 [PM 08:17] 小強: 再進來一次,妳進不來嗎?  
 [PM 08:18] 01: 不能  
 [PM 08:21] 小強: 但我仍有一個題目要妳思考  
 [PM 08:22] 01: 嗯嗯  
 [PM 08:24] "01.doc" 的傳輸已完成。  
 [PM 08:25] 小強: 看看今天睡前要先留話給我妳的想法  
 [PM 08:44] 01: 那個點是 A 那個點是 B 哪個點是 C 哪個點是 D  
 [PM 08:45] 小強: 從題目中想像囉!  
 [PM 09:02] 01: 我是要證明嗎  
 [PM 09:03] 小強: 是的, 加油

圖 12 人數上限，第五位學生無法上線時的處理狀況

【問題】視訊、音訊同時啟動，頻寬無法負荷。

【解決策略】將視訊部份關閉，如此可提高音訊的清晰度。

【教師省思】視訊的最大優點，是可以觀察學生的表情反應，藉此可從另一角度了解學生對問題的解決能力與態度。可惜的是目前教師與學生使用的頻寬有限，因此在不得已的情況之下，只好關閉視訊的功能，為這研究留下那麼點遺憾。

【問題】須在討論板上呈現動態圖案，頻寬無法負荷時。

【解決策略】利用即時通傳送所需檔案。

一次與 38 號上線時，發現該生受幾何圖形影響，提出錯誤的直觀看法。原本是要利用 JoinNet 中「桌面共享」的功能，開啟教師電腦中利用動態幾何 (GSP 軟體) 製作的圖形操作與該生討論。但因

頻寬仍嫌不足，造成 lag 相當嚴重，無法在學生端的電腦上呈現動態的效果。因此教師改變策略，將該檔案利用 MSN 傳輸功能傳送給該生，由教師講解學生操作的方式進行討論，如圖 13、圖 14。

2004 年 6 月 22 日 小強 vs 38 |  
[PM 11:04] "q01.gsp" 的傳輸已完成。  
[PM 11:04] 38: 這是.....  
[PM 11:06] 小強: 參考用的---GSP 打開  
[PM 11:06] 38: 嗯 研究中

圖 13 無法利用桌面共享的處理方式一

2004 年 8 月 11 日 小強 vs 38 |  
[PM 09:04] 小強: 第七題需修改如下  
第一段的 ADGC 改成 ADEC,後面的 AB//CD 及 AB=CD 都去掉  
[PM 09:15] 38: 教師 t7 的題目 gc 線段要連接嗎  
[PM 09:15] 小強: 一樣是第七題  
[PM 09:16] 小強: 請你自己再將 CG 連線囉!  
[PM 09:31] 38: 教師你確定 t7 的第二個問題是正確的嗎  
[PM 09:31] 小強 yes  
[PM 09:32] 38: 可是那兩條線只有相等而已,怎麼會垂直呢  
[PM 09:33] 小強: 你將 CG 延長與 BD 產生交點,看看即可知道  
[PM 09:33] 38: 恩  
[PM 09:35] "12.gsp" 的傳輸已完成。

圖 14 無法利用桌面共享的處理方式二

#### 【教師省思】

1. 即時通是時下聊天最常使用的溝通管道，雖已發展可以手寫，但每回傳送給學生時，圖就得重畫，相當不方便，雖有語音可對談，卻無法錄影、錄音，但這已經是在 JoinNet 當機時可溝通的最佳方式。研究者曾協助一位學生解決數學問題，但因為對方家中電腦送修，所以無法利用線上家教方式，只能利用電話，光是題目的確認就得花上一段時間，尤其是有圖案的題目。
2. 利用即時通將動態幾何(GSP 軟體)製作的圖形操作，傳送給學生。教師的說明如同上面利用電話方式一樣，操作起來並不理想，但因頻寬的不足，若直接在討論板上操作，則會出現停格狀態，達不到預定的效果，這方面也只好等頻寬的再提升。

## 4.2 學生數學解題能力及合作學習的表現

線上家教的教學理論是屬認知理論，著重在近側發展區間 (ZPD) 為奠基的鷹架理論，由教師擔任鷹架的支撐者。當學生積極探索，嘗試不同的可能而發生學習困難時，教師適時介入引導，幫助學生擴展其能力和知識以達成任務。隨學生的學習成長，教師的引導漸減而達成學習遷

移的效果，合作學習更在鷹架理論中不可缺席。

因此在第二階段的行動研究實施過程，著重在學生解題能力、合作學習的表現。分析的過程中，研究者更藉由線上家教發現了動態的解題表現。

#### 4.2.1 學生解題能力的表現情形

##### 1. 兩次線上測驗學生解題能力的改變

82 年版本教科書，對學生已不再要求驗算。現今九年一貫的推動，雖然課程總綱指出應培養學生獨立思考與解決問題的能力，且目標是提供 80% 以上的學生都有學習能力。但在授課時數有限的情況之下，除了概念描述、題目講解外，已沒有多少時間可在教室讓學生驗算、思考不同的解題策略及發展不同且具有意義的問題。線上家教正可解決這些重要問題，研究者安排兩次的線上測驗，以評估學生在線上家教的教學環境下解題能力的改善情形。

依據研究者自行設計的解題能力評量表（表 8）進行評估，第一次線上測驗學生最佳的表現僅止於完成證明，未有檢驗甚至進一步提出不同的解題策略或產生新的且有意義的問題。雖然這已是課堂教學的目標，但相較於解題能力評量表而言，卻只達到等級七。等級八至十，由於學校課堂時數有限，並無法進行教學，因此研究者於第一次線上測驗後的教學著重於等級八以上的解題能力培養，期望學生在第二次線上測驗時有更佳的解題表現。

經過三回幾何證明演練題，整體而言，學生在解題能力方面皆可培養出獨立完成幾何證明的能力，甚至有學生能達到提出不同解法及發展有意義新問題的最高等級能力。

以下是研究者針對每位學生第一次線上測驗所產生的問題，透過行動研究的方法，提出研究者的解決策略。歷經三回的幾何證明演練，再於第二次線上測驗，提出學生的解題能力表現的代表性案例。兩次線上測驗完整文字結果分析請見附錄四。

##### (1) 學生 01 號

【問題】該生第一次線上測驗表現最佳的 T3 題，雖然解題策略正確，但僅止於證明，未有更高層次的解題能力表現。

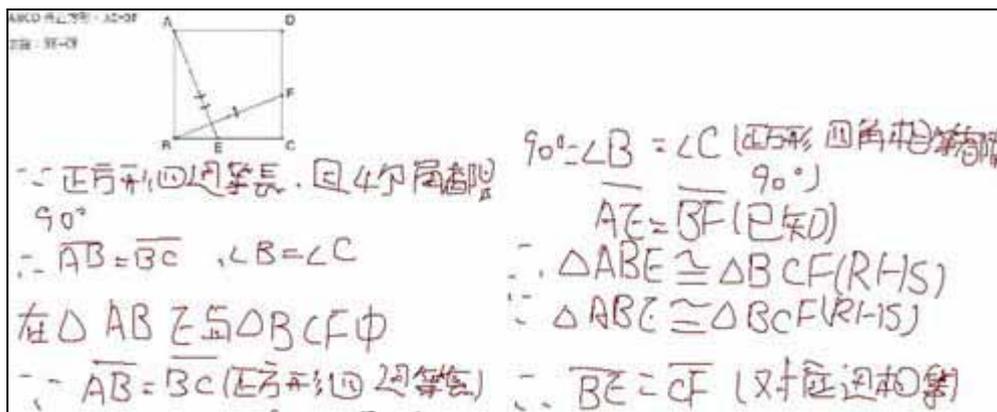


圖 15 01 號第一次線上測驗 T3 題的證明

【解決策略】利用中三回幾何證明演練，引導該生對問題不但能證明，亦能有高層次解題能力的表現。並於第二次線上測驗結果，分析其解題能力的表現情形。

【進行過程】

①在第七回的 E1-2 題中，首先引導學生畫出第一個解題策略的輔助線後，教師教導學生如何證明、檢驗並回顧。（參考[Video](#)）

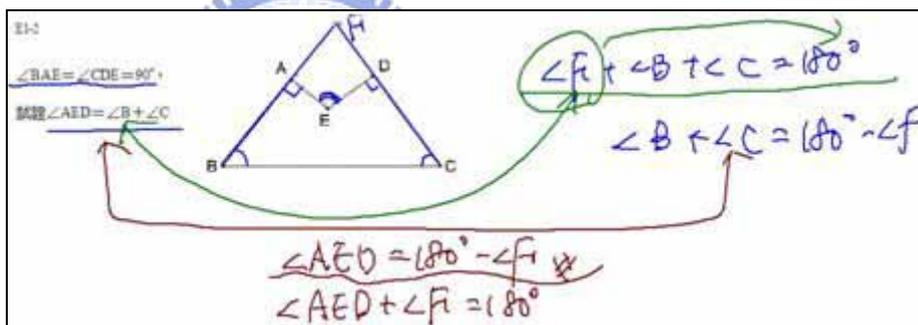


圖 16 教師教導 E1-2 題的初步構想

期間詢問為什麼「 $\angle AED + \angle F = 180^\circ$ 」。該生利用四邊形 FAED 的內角和  $360^\circ$  及其中有兩角為直角的理由，所以另兩角的和為  $180^\circ$ ，做了正確的解釋。（參考[Video](#)）

因為這邊（ $\angle EAB$ ）不是  $90$  度嗎，那這邊（ $\angle EAF$ ）不就也是  $90$  度。

因為這邊（ $\angle CDE$ ）是  $90$  度，所以這邊（ $\angle EDF$ ）也是  $90$  度。這個四邊形（FAED）內角和  $360$ ，這邊  $90$ 、這邊  $90$ ，已經  $180$  度啦！

所以這個（ $\angle F$ ）加上這個（ $\angle AED$ ）就是  $180$  度。

老師接著再示範此題的完整證明。

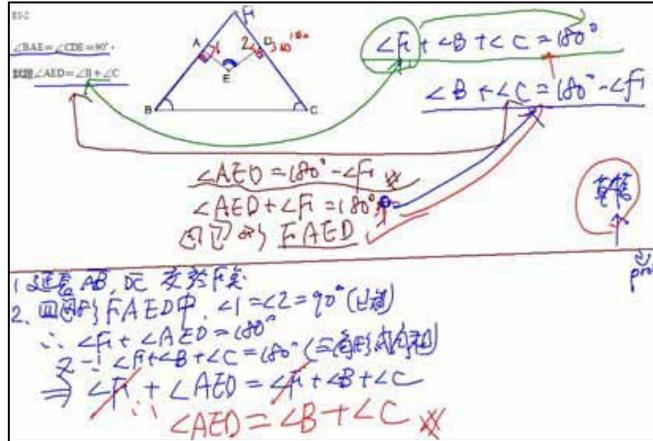


圖 17 教師教導 E1-2 題完整證明

②完成證明後，教師提問是否還有其他的解法。該生思考後，畫出了另一證法的輔助線。（參考[Video](#)）

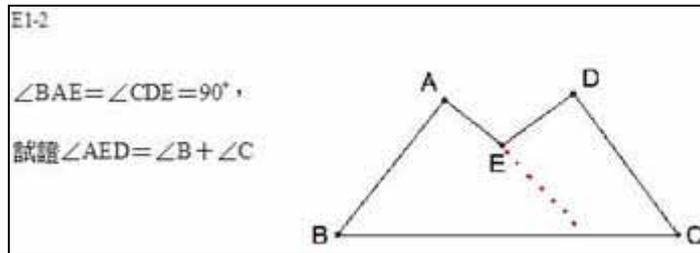


圖 18 01 號在 E1-2 題畫的另一證法輔助線

③透過繳交作業的情形，可了解該生已能獨立解說解題策略，並完成證明。（參考 0724E1-1E1-2from01 [Video](#)）

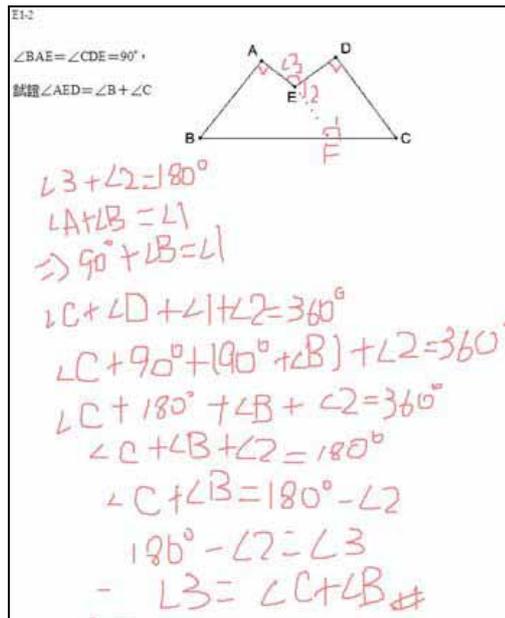


圖 19 01 號自行上線繳交 E1-2 題作業

【第二次線上測驗檢驗】T8 題中，不但分析題意找到正確的解題策略，完成證明，亦能自行設計題目完成證明，而有高層次的解題能力表現。

$AB = AD = BC = DC$   
 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = 90^\circ$   
 $AD \parallel BC$   $AB \parallel DC$   
 在正方形 ABCD 的邊上取一點 G  
 在 GC 上向外作正方形 GCEF  
 OCEF，且 BG 的延長線交 DE 於 H  
 證明 (1)  $DE = BG$   
 (2)  $DE \perp BH$

$\triangle GBC$  與  $\triangle EDC$  中  
 $\overline{GC} = \overline{CE}$  (正方形四邊相等) ✓  
 $\overline{DC} = \overline{BC}$  (同上)  
 $\angle 3 = \angle 6$  (正方形，四角均為  $90^\circ$ ) ✓  
 $\triangle GBC \cong \triangle EDC$  (SAS) ✓  
 則  $\overline{BG} = \overline{DE}$  (對應邊相等)  
 ① 對角條件? 次可推出  
 ① 正方形 ABCD,  $\angle 9 = \angle 10$  (對角) ✓  
 在  $\triangle GBC$  與  $\triangle EDC$  中  
 $\angle 9 = \angle 10$  (對角) ✓  
 $\overline{BC} = \overline{DC}$  (正方形四邊相等) ✓  
 $\angle 3 + \angle 6 = 180^\circ$  ✓  
 $90^\circ + \angle 6 = 180^\circ$  ✓  
 $\angle 6 = 90^\circ$  ✓  
 $\angle 3 = \angle 6$  (正方形四角均為  $90^\circ$ ) ✓  
 $\triangle GBC \cong \triangle EDC$  (ASA) ✓

圖 20 01 號第二次線上測驗 T8 題的證明

【教師省思】該生屬中成就，第一次線上測驗的表現雖然僅止於完成證明，然而三回演練過程，經教師適時引導，該生已有一題多解的高層次解題能力表現。在第二次線上測驗，除能獨立完成證明，更有高層次的解題能力表現。這給研究者一個提醒，教師的協助，學生的能力可有更好的表現。

(2) 學生 04 號

【問題】該生第一次線上測驗表現最佳的 T1 題，雖然解題策略正確，但

僅止於證明，未有更高層次的解題能力表現。

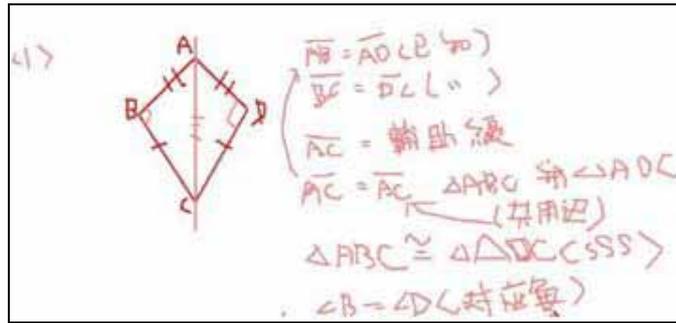


圖 21 04 號第一次線上測驗 T1 題的證明

【解決策略】利用中三回幾何證明演練，引導該生對問題不但能證明，亦能有高層次解題能力的表現。並於第二次線上測驗結果，分析其解題能力的表現情形。

【進行過程】

①在第七回的 E1-2 題中，教師引導該生自己畫出解題策略的輔助線後，再教導學生如何證明、檢驗並作回顧，如圖 17。（參考 0720E1-1E1-2for0104 [Video](#)）

②完成上述證明後，教師提問是否有其他的解法時，（參考[Video](#)）由 01 號畫出第二種證法的輔助線，該生則接著將 01 號所畫的輔助線提出解題策略。（參考[Video](#)）

04 號： $\angle AED + \angle DEG = 180$ ，

然後 180 減掉這個嘛（ $\angle DEG$ ）就會等於角 AED，  
如果 180 減掉角 DEG 會等於角 B 加角 C 的話，  
那角 AED 就會等於角 B 加角 C。

教師：問題就在於角 B 加角 C，

180 減掉括號角 B 加角 C 是否等於角 AED？

04 號：180 減掉角 DEG 會等於角 AED，

如果角 B 加角 C 加角 DEG 等於 180 的話，  
那角 B 加角 C 就會等於角 AED。

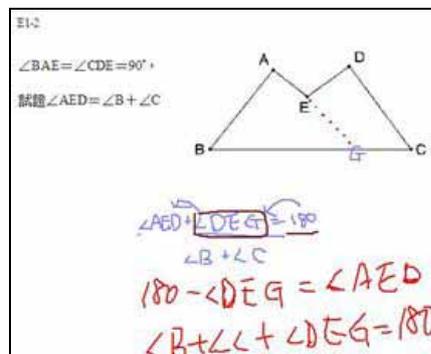


圖 22 04 號針對 E1-2 題提出另一解題策略

最後，由教師作後續的分析說明。（參考[Video](#)）

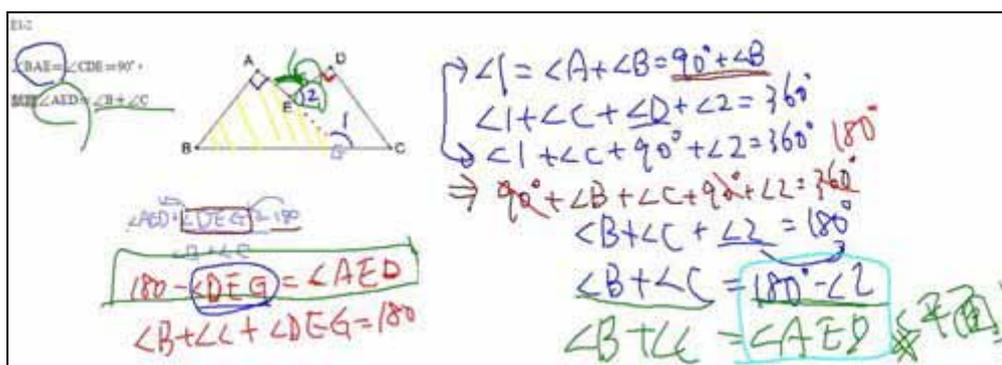


圖 23 教師對 E1-2 題另一證法的詳細說明

【第二次線上測驗檢驗】T6 題，該生分析題意，並以正確的解題策略完成證明。且能再自行設計一道題目，完成證明。（參考[Video](#)）

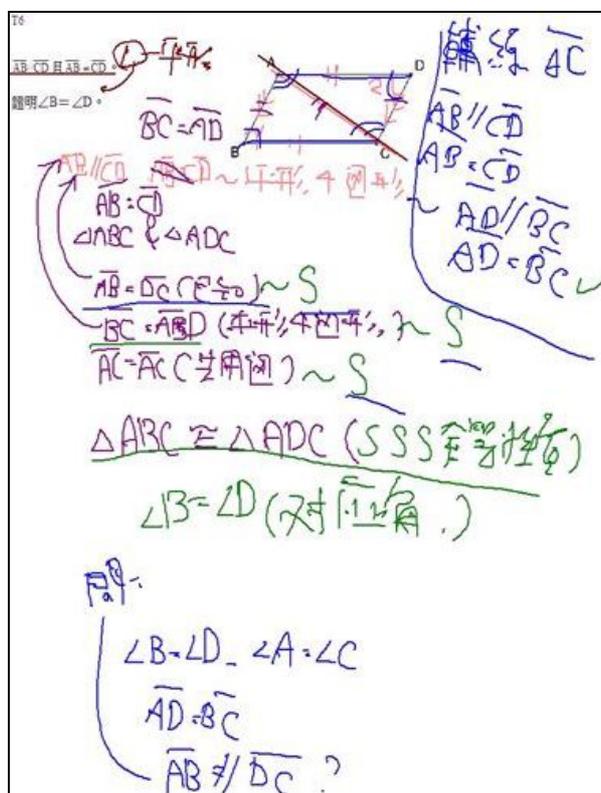


圖 24 04 號第二次線上測驗 T6 題的證明

【教師省思】該生屬中成就，第一次線上測驗的表現雖然僅止於完成證明，然而三回演練過程中，經教師引導，該生已能有高層次的解題能力表現。在第二次線上測驗，除能獨立完成證明，更有高層次的解題能力表現。

該生在解題能力上的表現如同 01 號一樣的進步，但透過評量表看不到的是她的自信心。與該生對談中，時常可聽該生的回答語氣

中帶有不確定，研究者認為這會使該生在解題過程中不太敢做較大的假設，間接影響到該生的解題。如何協助自信心較弱的學生，這對研究者是相當大的挑戰。

(3) 學生 31 號

【問題】第一次線上測驗 T3 題雖然解題正確，但有部份錯誤未檢驗。

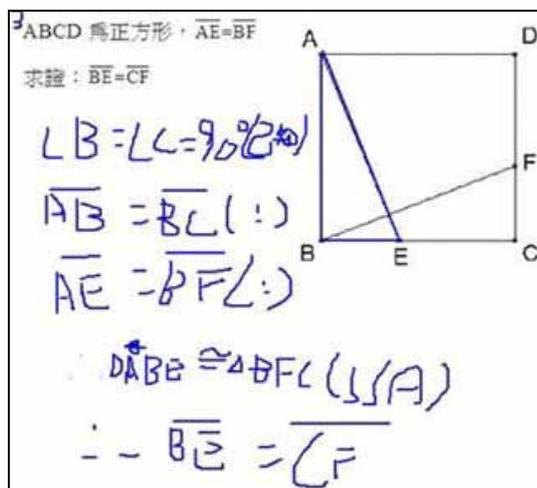


圖 25 31 號第一次線上測驗 T3 題的證明

【解決策略】利用中三回幾何證明演練，引導該生對問題不但能證明，也能有高層次解題能力的表現。並於第二次線上測驗結果，分析其解題能力的表現情形。

【進行過程】

① 在 E1-2 題中，該生嘗試多種輔助線的解題策略，皆無提出證明的想法。因此教師利用該生畫的第一種輔助線作修正，引導學生如何思考、書寫及檢驗。(參考 0721E1-1E1-2for31 [Video](#))

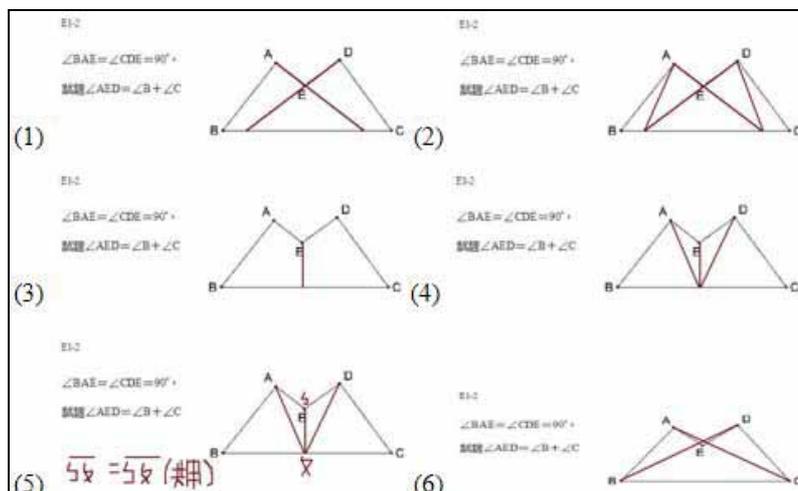


圖 26 31 號在 E1-2 題嘗試多種的輔助線

② 針對上述題目該生已能獨立完成證明。(參考 0722E1-2from31 Video)

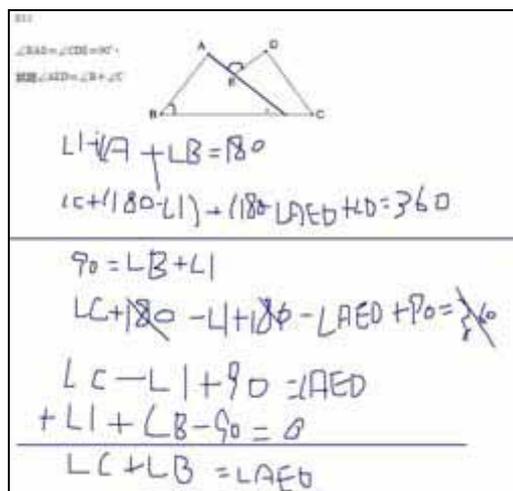


圖 27 31 號獨立完成 E1-2 題證明

【第二次線上測驗檢驗】在 T8 題中，該生獨立完成第 1 小題的證明。而且能自己設計題目及證明，可惜多給一條條件 ( $\overline{DE} = \overline{BG}$ )

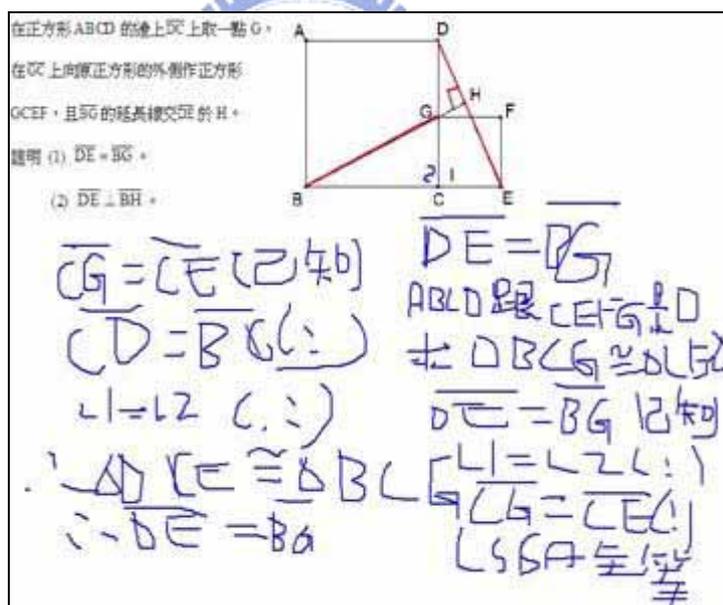


圖 28 31 號第二次線上測驗 T8 題的證明

【教師省思】

1. 該生在 E1-2 題中嘗試了六種輔助線，只有第一種被教師修正進行教學，其餘五種沒有一種被教師採用。但在研究者事後第五次的分析時，卻發現其中一種是可以證明的（第 3 種畫法）。研究者想著，如果我是學生，遇到這麼多嘗試卻都被否定，可能已經沒有勇氣再思考下去了。如果當時，教師能根據該生的輔助線進行分析，一一過濾掉不可行的，第三種證明方法就會是在這低成

就學生的身上發現，相信對這位學生將是一大鼓勵。

- 即使低成就的學生也能在教師的協助引導下，也能有高層次的解題能力表現，所以學生的潛能不是教師可以輕忽的。而教師角色扮演，是傳統的直述式，亦或鷹架中協助者的角色，值得教師們深思。

(4) 學生 36 號

【問題】該生第一次線上測驗表現最佳的 T3 題僅止於解題策略正確，完成證明。但沒有更高層次的解題能力表現。

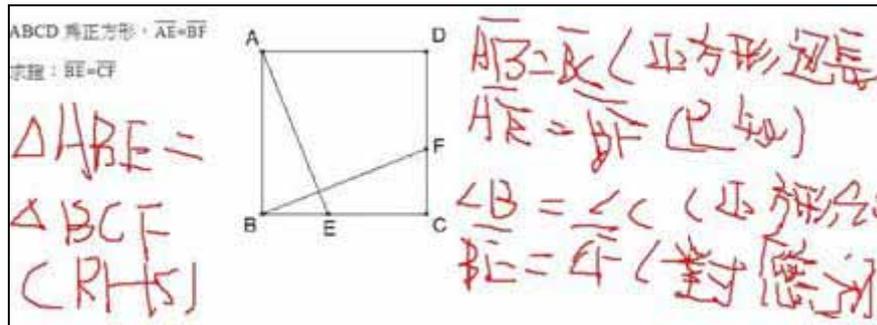


圖 29 36 號第一次線上測驗 T3 題的證明

【解決策略】利用中三回幾何證明演練，引導該生對問題不但能證明，也能有高層次解題能力的表現。並於第二次線上測驗結果，分析其解題能力的表現情形。

【進行過程】

①38 號畫出輔助線後卻不知該如何證明，經過幾分鐘後，教師給予三個提示，38 號則提出其困難點。（參考 0724E1-3for313638）

•38 號畫出輔助線

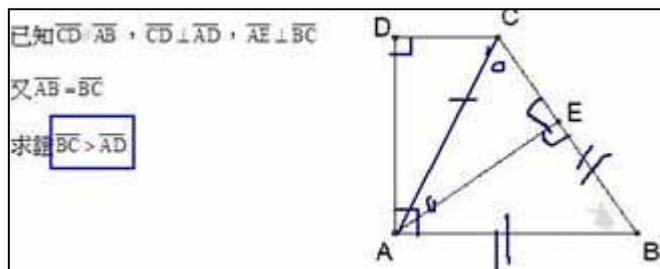


圖 30 38 號在 E1-3 題畫第一種證法的輔助線

•教師給予三個提示（參考[Video](#)）

圖中畫出 AC 輔助線是對的；

你說明的 BC 線段大於 AD 線段，相信看到這個會想到大邊對大角；

直角三角形，斜邊最大。

•38 號表示 (參考[Video](#))

畫完輔助線，原本想利用全等三角形證明，但怎麼都少一個條件。

②36 號提出證明的想法 (參考[Video](#))

36 號：延長 DC 及 AC，所以這個角 ( $\angle CAB$ ) 等於這個角 ( $\angle DCA$ )。

教師：爲什麼？

36 號：因爲這個 ( $\overline{CD}$ ) 平行這個 ( $\overline{AB}$ )，內錯角相等。

36 號：然後 AAS 性質。

③教師開始進行解題策略的教學 (參考[Video](#))。在說明完兩三角形全等的第二條件時，38 號表示找到了第三條件。(參考[Video](#))

CD 平行 AB，所以就有內錯角相等 ( $\angle DCA = \angle CAB$ )，  
又 AB 線段等於 CB 線段，所以這兩個角度相等 ( $\angle CAB = \angle BCA$ )。

一開始就是內錯角，所以這兩個角度就會相等 ( $\angle DCA = \angle BCA$ )  
那就 AAS 全等性質。

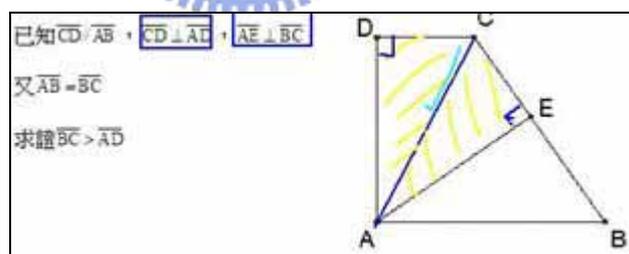


圖 31 教師進行 E1-3 題的解題教學

④透過作業的表現，想了解該生對上述題目是否真正了解。但該生正確證明出  $\triangle DCA \cong \triangle ECA$  後，在證明  $\triangle CAE \cong \triangle BAE$  時則出現錯誤，並且此題並不需要證明至此。(參考 0724E1-3from36 [Video](#))

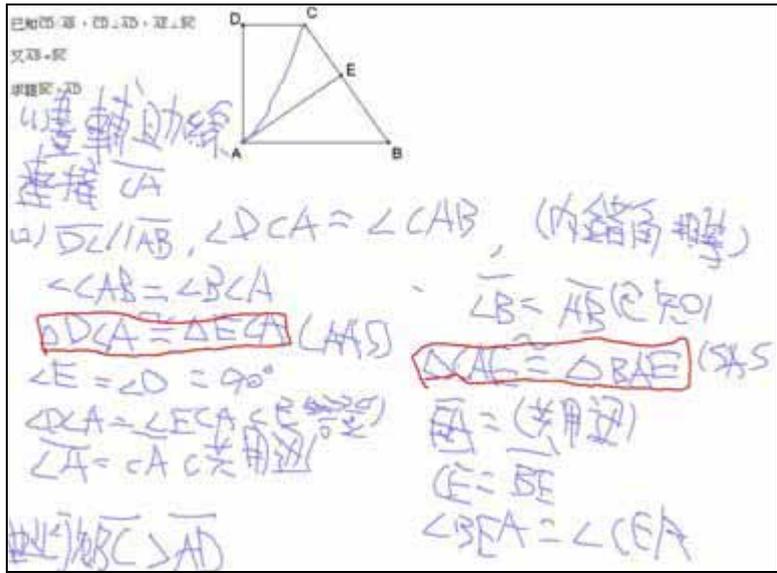


圖 32 36 號自行上線繳交作業 E1-3 題

- ⑤ 因此教師原定與 31 號的討論，再加入 36 號。再一次透過線上家教，讓該生自己檢驗自己錯誤的地方。該生在重新檢視自己所寫的過程，發現到錯誤，但修正仍有錯誤。(參考 0729E1-3for3136 [Video](#))
- ⑥ 教師再次引導學生 (參考 0806E2-1E3-1for36 [Video](#)) 最後，該生自己獨立完成證明。

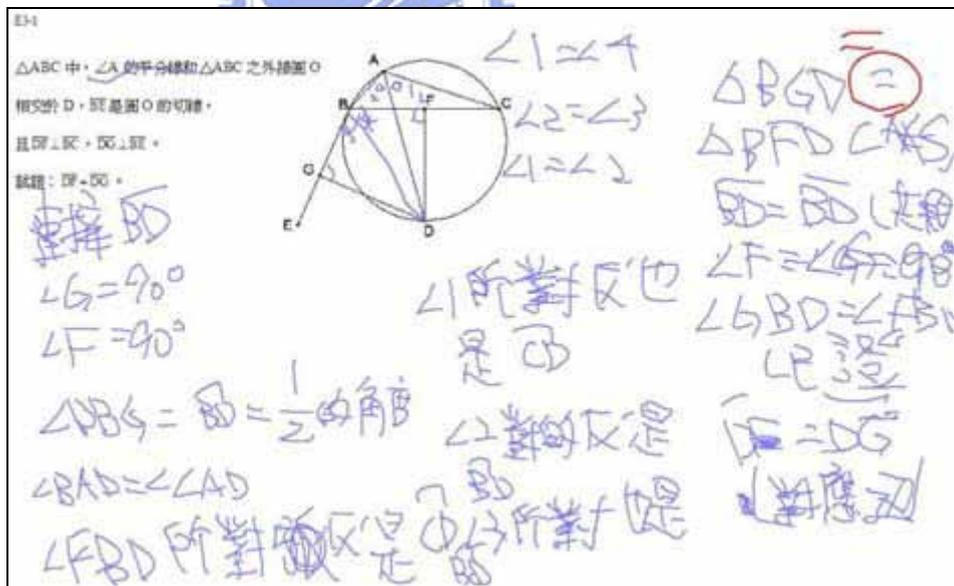


圖 33 36 號獨立完成 E3-1 題證明

【第二次線上測驗檢驗】第二次線上測驗 T8 中，不但分析題意找到正確的解題策略。並且在檢驗後，設計另一題目，完成證明。

在正方形ABCD的邊上取一點G，  
 在BC上取一點E，以BE為邊向外作正方形BEGF，  
 且EG與DF的延長線交於H。

證明 (1)  $BE = BG$ 。  
 (2)  $DE \perp BE$ 。

證明

$\triangle BGC \cong \triangle DFE$   
 $BC = DE$  (正方形)  
 $GC = FE$  (正方形)  
 $\angle BCG = \angle DFE$  (正方形)  
 $\triangle BGC \cong \triangle DFE$  (SAS)  
 $BG = DE$  (對應邊)

$\triangle BGC \cong \triangle DFE$   
 $\angle BGC = \angle DFE$   
 $\angle BGC = \angle DFE$   
 $\triangle BGC \cong \triangle DFE$   
 $\angle BGC = \angle DFE$   
 $\triangle BGC \cong \triangle DFE$   
 $\angle BGC = \angle DFE$

圖 34 36 號第二次線上測驗 T8 題的證明

【教師省思】該生在線上家教進行的過程中，有時語氣上的回答總是不那麼肯定，這也是一般學生學習數學過程的問題。因此這方面，如何使學生回答的更有自信，教師的引導與適時的鼓勵更加重要了。

(5) 學生 38 號

【問題】第一次線上測驗 T2 題在證明過程中，除對第三條件有疑慮而檢驗外，並未對整題做檢驗，亦沒有更高層次的解題能力表現。

$\triangle ABC$  與  $\triangle PCE$  均為正三角形  
 求證： $AP = BE$

$\triangle PCA \cong \triangle ECB$  (SAS)  
 $AP = BE$  (對應邊相等)

在  $\triangle PCA$  與  $\triangle ECB$   
 $\because AC = BC$  (正三角形)  
 $CE = PC$  (正三角形)  
 $\angle ACB = \angle ECP = 60^\circ$   
 $\angle ACB - \angle BCP = \angle ECP - \angle BCP$   
 $\angle ECB = \angle PCA$  (已證)

圖 35 38 號第一次線上測驗 T2 題的證明

【解決策略】利用中三回幾何證明演練，引導該生對問題希望不但能證明，亦能有高層次解題能力的表現。並於第二次線上測驗結果，分析其解題能力的表現情形。

【進行過程】

- ①第一次線上測驗結束後，該生急欲知曉自己的成績。經由非正式的教學，教師告訴該生解題能力所應有的表現，還有哪些是他所欠缺的。因此教師將原本要線上家教才進行的題目（E1-1）先給該生，由該生自己先試著解題。
- ②學生經過這樣的說明後，在此題有相當漂亮的表現。分析題意、證明，不但對此題提出兩種證明方法，更能產生新且有意義的問題。（參考表 11 [Video](#)）
- ③特別的是在第九回，甚至能針對 04 號聽完教師的說明仍不明瞭的原因提出建議。顯示該生不只達解題能力最高等級，亦能成為教師得力的助手。（參考 0803E2-1E3-1for0438 [Video](#)）

教師：（詢問 04 號）你剛剛畫的那個弦切角（ $\angle DBG$ ），請問這個弦切角所對的是哪個弧？

04 號：沒有弧啊！

38 號：老師，我知道。

教師：38 號，你先等一下，我相信你大概已經看出來了。我先問 04 號，至少那個弦切角所對的弧要知道。

教師：04 號，弦切角是這個（ $\angle DBG$ ）嗎？也就是這條線（ $\overline{BE}$ ）跟這條線（ $\overline{BD}$ ）所夾的角度。請問所對的弧是哪一個？

04 號：沒有吧！

38 號：老師，可能是你剛剛那個優弧、劣弧沒講清楚。

【第二次線上測驗檢驗】第二次線上測驗 T7 中，不但能完成證明、檢驗，並提出對幾何證明的看法。最後則提出不同的新題目，完成證明。

【第二次線上後測檢驗】第二次線上後測 T7 中，不但能完成證明、檢驗，並提出對幾何證明的看法。最後則提出不同的新題目，完成證明。

在  $\triangle ADB$  與  $\triangle ACG$  中  
 $\therefore \overline{AD} = \overline{AC}$  (正方形)  
 $\angle DAB = \angle CAG$  (正方形)  
 $\therefore \triangle ADB \cong \triangle ACG$  (SAS)  
 則  $\overline{BD} = \overline{CG}$  (對應邊)

證明 (1)  $\angle ABD = \angle ACG$   
 (2)  $\overline{BD} = \overline{CG}$

①  $\begin{cases} \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ & \text{(正方形)} \\ \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ & \text{(正方形)} \\ \angle 1 + \angle 2 = \angle 2 + \angle 3 \\ \therefore \angle 1 = \angle 3 \end{cases}$

圖 36 38 號第二次線上測驗 T7 題的證明

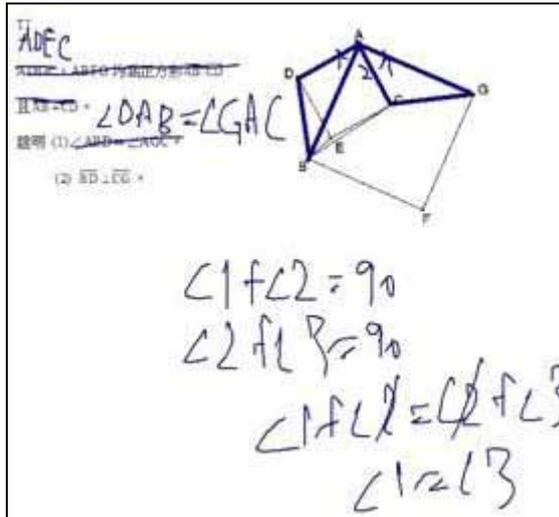


圖 37 38 號對 T7 題提出另一問題並證明

【教師省思】該生雖在第一次線上測驗，沒有高層次的解題能力表現，但在測驗後非正式教學的對談中，該生即能領悟要點，而完全的了解並有效的解題。這說明有些觀念只是學生不明白而已，稍加提示，很快就學會了

研究者認為線上家教可以為高成就的學生，對加深加廣的學習提供一個更佳的學習管道。

## 2. 透過線上家教學生的動態解題能力表現

前述的解題能力是依據評量表，視學生的解題結果表現分等級，所分析的解題能力屬於靜態的。除此之外，透過線上家教，研究者更觀察到解題能力評量表所無法直接評斷的解題能力表現，研究者將之稱為「動態的解題能力」。分兩類說明。

(1) 教師為協助立場，學生的解題表現。

觀察 1 在個別線上家教中，當題目的問題出現否定時，學生皆能立即舉反例。

① 檔案：0611for36 [Video](#)

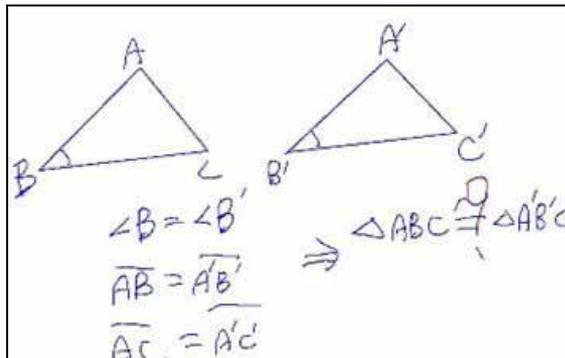


圖 38 36 號對教師的問題提出反例

教師：兩三角形，其中角 B 等於角 B'，AB 線段等於 A'B' 線段，AC 線段等於 A'C' 線段。此兩三角形會全等嗎？

36 號：SSA 是較大邊的對應，  
所以角 B 不是對應較大一邊，角 A 才是對應較大一邊，  
所以不算。

②檔案：0614from38\_2 [Video](#)

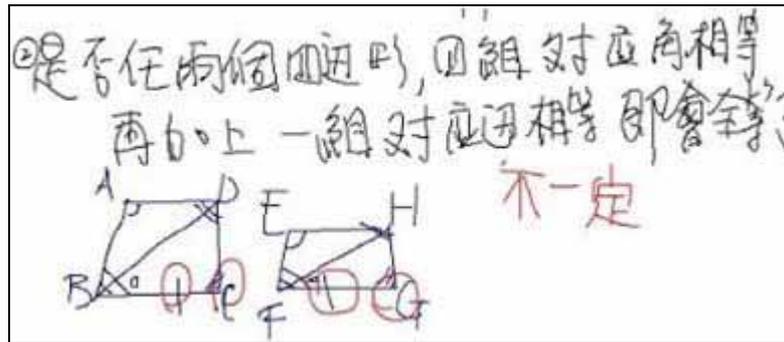


圖 39 38 號對問題提出反例

問題：是否任兩個四邊形四組對應角相等，再加上一組對應角相等，即會全等？

38 號：這題的話，我們一樣也是畫個圖，因為比較好明瞭，比較容易看出來。我們可以畫，它說四組對應角相等。

(畫完第一個四邊形)

然後再畫一條跟底線等線段的，角度都要一樣。

(畫完第二個四邊形)

其實這兩個圖就可以看出兩個不會相等 (全等) 的，因為 BC 線段等於 FG 線段，然後它四個角相等嘛！

(四組對應角做標記)

雖然它們的角度是一樣，我們可以畫一條對角線來看。

(畫上  $\overline{BD}$ 、 $\overline{FH}$ )

我們直接看 DBC 與 HFG，

因為我們並不知道這兩個三角形有沒有全等，

所以它分的角度不一定一樣。

這裡 ( $\angle DBC$ ) 不一定等於這裡 ( $\angle HFG$ )，

所以我們也不能說它是 ASA。

能確定的只有兩項而已，所以我們並不能確定說這是一個全等的三角形。

所以我覺得這題應該是「不會的」，應該說「不一定」。

③檔案：0615for04 [Video](#)

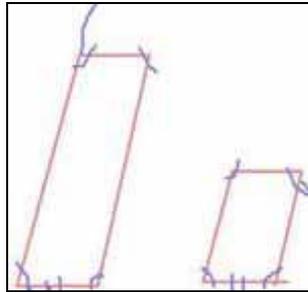


圖 40 04 號對問題提出反例

教師：是否任兩個四邊形四組對應角相等，再加上一組對應角相等，即會全等？

回答：不一定。

教師：可以舉一個例子嗎？

回答：一樣的線段（底邊），

（畫完兩個平行四邊形）

這個等長（底邊），這個角也等於那個角，…（即四個對應角相等）。

只有這邊有限制（底邊），另這邊沒有限制（左側邊長），所以它可以很長很長。

④檔案：0615for31 [Video](#)

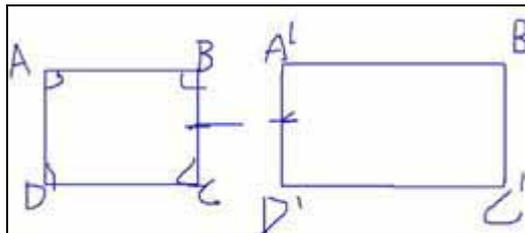


圖 41 31 號對問題提出反例

教師：是否任兩個四邊形四組對應角相等，再加上一組對應角相等，即會全等？

回答：不一定。

教師：好，不一定，那你現在舉一個例子來說明它是錯的。

（畫完兩個四邊形）

回答：四個角一樣是 90 度，一個邊相等（對應邊相等）。可是一個是正方形，一個是長方形。

觀察 2 當學生以直觀的方式提出想法、策略時，有時是正確，但卻也會有錯誤的情況，教師適時引導幫助學生。

檔案：0722E1-2for3638 [Video](#)

38 號：怎麼看資料都給太少，我確定這一題一定要畫輔助線。

教師：這是第一個方向，你已經確定了。

38 號：我一直覺得資料太少。

教師：這題的問題出在你著重題目的圖形上，你一直會看這個部份原圖，而也會一直看這個部份（題目已知），卻忘了看這部分（題目求證）。

38 號：我都有看啊！

教師：好，請問你，從這個（題目求證），你看到什麼？

38 號：就是  $\angle B + \angle C$  會等於  $\angle AED$ ，如果往上移的話，就可以併起來。

教師：好，我再把範圍縮小，「 $\angle B + \angle C$ 」你想到什麼？

38 號：如果延長 BA 線段和 DC 線段，這會是三角形的兩腰。

（延長線畫出）

教師：在我還沒和你溝通前，你有想到這個方法嗎？

38 號：有啊！

教師：現在你畫出來的，想想看你能不能證明出來？

38 號：不行啊！怎麼看都只有直角（條件）。

教師：你現在畫出來的是什麼形狀？

38 號：三角形。

教師：三角形有什麼特色？

38 號：內角和 180 度。

教師：這是第一個線索，再來第二個線索。在這三角形內，還有哪一個常見的形狀？

38 號：看起來像箏形、鳶形。

教師：是四邊形，它有什麼特性？

38 號：\，我好像有點想到了。

（學生接著完成說明）

觀察 3 當學生在解題過程中發生錯誤而不自知時，教師適時介入協助。

（參考 0621for38 [Video](#)）

38 號：啊，我想到了！

我剛剛畫的輔助線（ $\overline{BC}$ ），就先不要看對頂角（ $\angle AEC$  與  $\angle DEB$ ），先看這個共用邊（ $\overline{BC}$ ）。題目說  $\overline{AB} = \overline{CD}$ ，

所以就可以說  $\triangle ACB \cong \triangle CBD$ 。

38 號：然後這個面積共用的（ $\triangle CEB$ ），所以這塊面積減掉這塊之後（ $\triangle ACB$  面積 -  $\triangle CEB$  面積），就可以證明是全等的。

38 號：等一下喔，證明到這裡就有問題了，不可以減面積嗎？

教師：面積相等，並不代表邊長會相等喔！

38 號：嗯，沒錯！

（教師為該生分析前面所敘述正確的部份

輔助線  $\rightarrow \overline{BC}$  原要證明  $\triangle ACE \cong \triangle DBE$

後先證明  $\triangle ACB \cong \triangle DBC$

教師給予肯定）

教師：你先告訴我，要證明  $\triangle ACB \cong \triangle DBC$ ，是根據什麼全等？

（沉默一會兒）

38 號：啊！老師，我想到了！

教師：你確定你已經想到了？

38 號：對。

38 號：剛剛已經證明  $\triangle ACB \cong \triangle DBC$ ，所以這個地方等於這個地方（ $\angle ECB = \angle EBC$ ），因為是對頂角相等。

所以這是一個等腰三角形（ $\triangle ECB$ ），

兩腰會相等（ $\overline{EC} = \overline{EB}$ ）， $\overline{AB} = \overline{CD}$

所以  $\overline{AB} - \overline{EB} = \overline{CD} - \overline{EC}$ ，

所以  $\overline{AE} = \overline{DE}$ 。

（之後，教師為該生做整體性回顧）

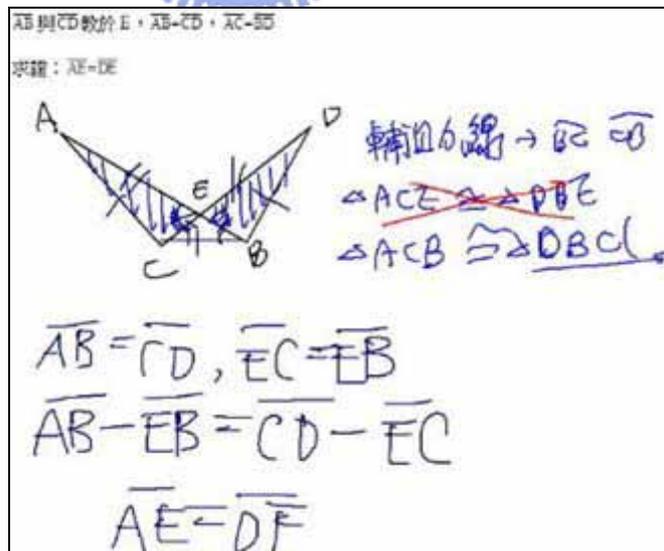


圖 42 38 號在解題過程中發生的錯誤

觀察 4 教師的鼓勵亦可協助學生提高思考的層次。

（參考 0722E1-2for3638 [Video](#)、0722E1-2from38\_1 [Video](#)及

0723E1-2from38\_2 Video)

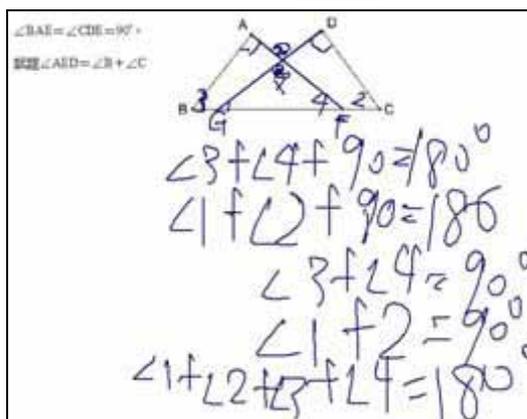


圖 43 38 解 E1-2 題解到一半

38 號：不行，我放棄了！

教師：這跟上一題的提示其實是一樣的

38 號：內角和啊？

教師：對，內角和。

(教師寫下  $\angle GEF + \angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$ )

教師：那  $\angle GEF$  與  $\angle AED$  是不是相等？

38 號：對啊，對頂角。

教師：所以將  $\angle GEF$  改成  $\angle AED$

(教師寫下  $\angle AED + \angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$ )

看出來了嗎？

38 號：還是看不出來！

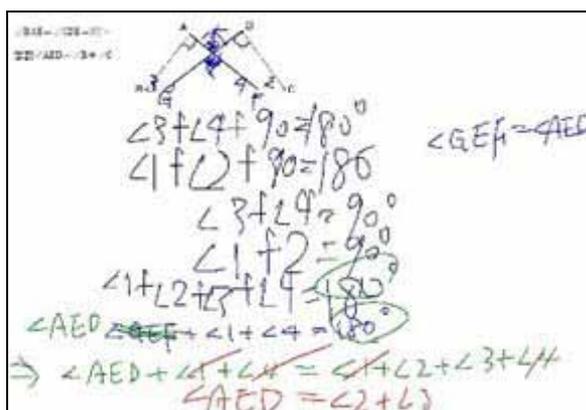


圖 44 教師進行 E1-2 題後半部的講解

教師：這兩個不都是 180 嗎？

38 號：啊！把它換過來，然後削掉變成  $\angle 2 + \angle 3 = \angle AED$

(該生激動的表達上述)

(教師帶領該生完成證明及分析，並給予該生第三種證法的輔助線，該生於當天及隔天完成證明)

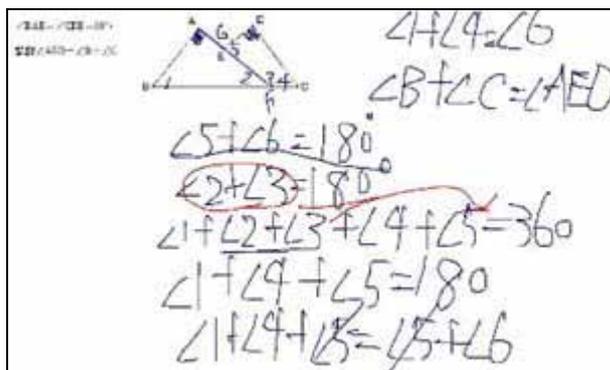


圖 45 38 號自行上線完成 E1-2 題第三種證法

【教師省思】講述式的教學到學生獨立完成任務，中間的過程，學生常會遭遇挫折。教師的角色扮演相當重要，如何引導學生，但又不是完全主導學生的思維，考驗著教師個人的智慧與能力。

(2)學生在沒有教師引導下的表現。

①38 號在第四回中證明兩三角形全等之後，欲再說明另兩三角形全等時，發現前面所言似乎多了一個條件，因此將一組對邊捨棄，再證得另兩三角形全等。這只有短短的四分鐘，可看出極高自我反思的能力。(參考 0614from38\_3 [Video](#))

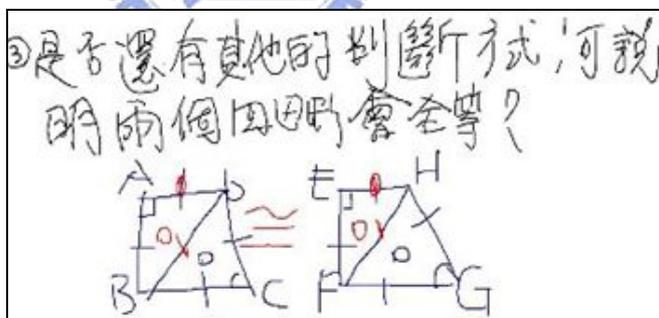


圖 46 38 解題時反思的題目

我回答第三題。我覺得有點不太確定。

第一種解法就像老師說的四組對應邊相等，一組對角相等就全等。剛剛已經證明了。(參考 0614from38\_1 [Video](#))

現在我延伸，四組對應邊相等，然後一個角是 90 度，另外再給一組角度是相等。

(圖形畫完)

然後畫一條對角線，

這裡我們可以用 SAS 全等來證明 ( $\triangle DBC$  與  $\triangle HFG$ )，

接著我們看這個部份 ( $\triangle ABD$  與  $\triangle EFH$ )，

啊！我說錯了。

其實這裡 ( $\triangle ABD$  與  $\triangle EFH$ )，只要給一組對應邊相等就好了。

給一組對應邊相等，兩組對應角相等就可以了。

你看喔，這裡  $\triangle ABD$  與  $\triangle EFH$  我們可以用 RHS 來證明全等的，這樣如此一來就可以證明四邊形全等

②一次 38 號以”作圖式操作”的錯誤方式作幾何證明 (參考 0617from38\_1 [Video](#))

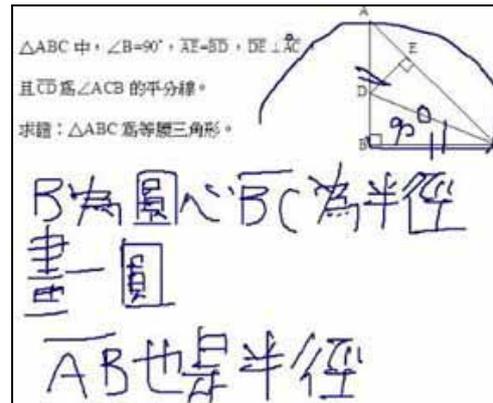


圖 47 38 號作圖式操作的錯誤證明

.....

我用作圖的方式來回答。

首先我們以 B 點為圓心，BC 線段為半徑，畫一個圓。

然後可以發現一件事，

如果以 BC 當半徑畫圓，發現它畫的弧會剛好交在 A 點上。

這樣證明了 AB 線段也是半徑，既然 BC 線段和 AB 線段都是半徑，半徑有一個性質，就是等長。

而且這裡夾角 ( $\overline{AB}$  與  $\overline{BC}$  夾角) 又是 90 度，

所以證明這是等腰三角形。

但隔天該生自己再上線時，已能完整的證明。(參考 0618from38 [Video](#))

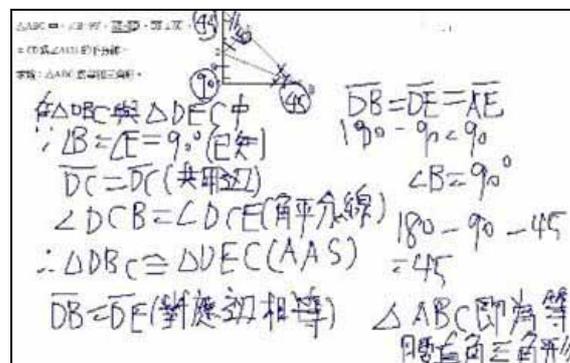


圖 48 38 號修改錯誤證明後的證明

- ③在一次線上家教中，38 號畫出第一種證法的輔助線，如圖 30。快結束前，又表示有另一種證法，並完成證明。(參考 0724E1-3for313638 Video)

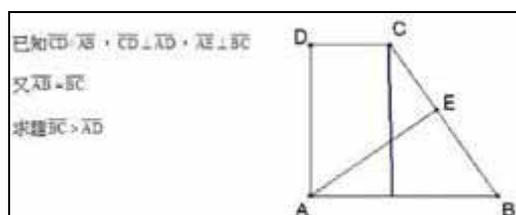


圖 49 38 號在 E1-3 題畫第二種證法的輔助線

### 【教師省思】

1. 在研究者學習數學的過程，最怕就是遇到「…，如果這敘述是正確的，證明；如果是錯誤的，請舉出反例。」。須先分析，然後才能做有效的判斷，因此反例常常是用背的。在線上家教中，研究者嘗試拋出這樣的題目，學生都能正確的判斷，舉出反例。若給予評分，似乎每個人都會得到一樣的分數，但仔細衡量，高成就的學生不但能提出反例，更能明確且完整的分析自己所提的想法。這樣的檔案正可以成為絕佳的教材。
2. 第二部份看出是高成就學生的再次表現。該生將條件提出後，在證明過程中即發現有條件是多餘的。不但如此，相隔一天，能將自己原先的證明推翻，這對一位國中生是相當不容易的。上述兩部份，研究者認為可經由線上家教的環境，以鷹架理論的教學策略，協助非高成就的學生學習更高的認知層次。
3. 上述高成就的學生，能相隔一天推翻自己原先證明，理應相當高興。然而研究者卻思考著既然高成就的學生都出現這樣以作圖的方式試圖證明，相信多數的學生也曾如此證明。如何幫助學生跳脫錯誤的作圖式證明，這將是一大挑戰。

## 4.2.2 學生合作學習的表現情形

合作學習的認知發展觀點是以 Vygotsky 的理論為基礎（張新仁，民 92）。其所提的「近側發展區(ZPD)」，是介於學習者獨立解決問題的實際層次，與學習者在教學者協助或成就較高的同儕合作去解決問題的潛在發展層次之間。經由同儕對彼此所提的想法經由批判、質疑，漸而認同、合作，將可使學生在互動中進行認知重組，提升認知層次。

本研究在合作學習方面，小組人數並不固定，少則二人，多則五人。如同傳統課堂上教師的表現，對學生是會產生影響，線上家教亦不例外，教師的質疑，對學生的合作學習過程中產生遷移的作用。以下先就教師

在學生學習中的示範、引導作說明，再分析學生合作學習的表現。

### 1. 教師示範、引導

- ①例如在第四回中，36 號雖回答問題，但仍有錯誤，教師未立即點出錯誤之處，而是提出疑問。在第二次的調查時即有學生表示了解，並由 04、38 號分別正確的說明。(參考 0617forall [Video](#))

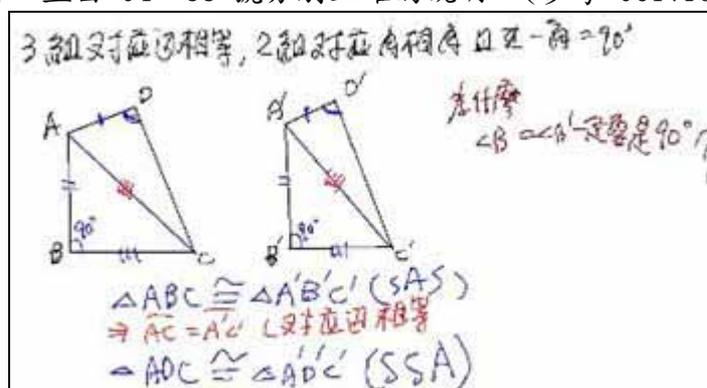


圖 50 教師針對 36 號所持的想法提出疑問

問題：「是否還有其他的判斷方式，可說明兩個四邊形會全等」

36 號：「三組對應邊和二組對應角相等，其中一角 90 度」

(36 號的說明有錯誤教師並未立刻提出，而是在了解所有的想法後，提出質疑，以讓學生對前所述產生衝突、反思。)

(在參與的同學都同意 36 號的說明下，教師提出問題)

教師：如果 36 號的說明是正確的，為什麼  $\angle B = \angle B'$  一定要 90 度呢？

36 號的說明過程中是否有用到 90 度？如果沒有，為什麼要 90 度？

(其中 04 號認為不一定需要 90 度)

04 號：由  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$  是由 SAS 中，“A” 不一定要 90 度，所以  $\angle B = \angle B'$ ，但不需要 90 度。

(38 號則針對說明的最後一行)

38 號： $\triangle ADC \cong \triangle A'D'C'$  是 SSA 全等，而 90 度變成斜邊一定是最長的。而 SSA 有一重要的是它不一定要全等，當它(角)對應邊小的時候就會有變動，所以它要 90 度是為了讓斜邊最長，以符合 SSA。

教師：38 號，既然妳這樣說明，是不是一定有一個角一定要 90 度？

38 號：是，我覺得是這樣。

(教師最後則提出了 36 號的敘述是正確可行的，但直角位

置放錯了。)

②在「奇偶問題」中，原本時間已經告一段落，但學生未放棄，仍互相詢問與解說，最後由 38 號提出正確的答案。(參考 [0617forall Video](#))。

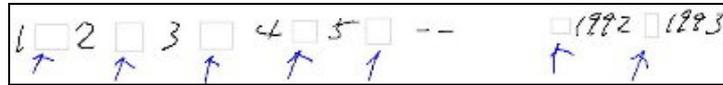


圖 51 奇偶問題的教學

教師：如果沒問題就可以下線了。

04 號：你是說 2 的好幾百次方喔？

教師：對啊！

04 號：是 2 的 364 次方嗎？

教師：不對。

38 號：3 的 1993 次方？

教師：不對。

36 號：2 的 1993。

36 號問 38 號：應該是 2 的 1993。

38 號：我不確定，半猜半算。

36 號：不是只要加前面 2 個數字嗎，就跟 2 的乘法是一樣的。

*(教師發現學生仍在討論，因此給予意見)*

教師：36 號提了 2 的 1993 次方，想的方向正確，但不是這答案。

38 號：反正是 2 的 X 次方囉。

教師：但少考慮一點。

04 號：2 的 1592。

教師：不是。

38 號：是不是 2 的 1992 次方。

*(教師沒作回應，採取先引導方式)*

教師：這框框中只能填什麼？

04 號：正、負。

教師：那總共有幾個框框？

36 號：五個。

04 號：不是吧。

36、38 號同時回答：1992。

38 號：我想那題是不是 2 的 1992 次方，因為重新確認次方的時候，發現了規律。

## 2. 學生間的質疑

①批判質疑不是高成就學生所獨有的，在 0624forall(Video) 中，中、低成就學生即對高成就學生所寫持懷疑的態度。

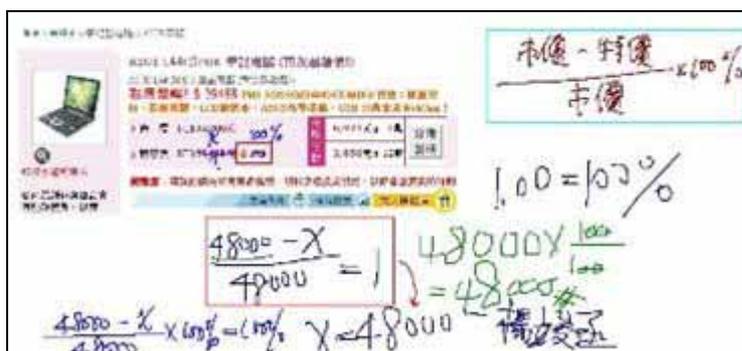


圖 52 高成就學生錯誤解題

(在學生寫出解法後，教師先對此題的節省比率通式做說明)

教師：38 號寫的哪裡有錯誤？

31 號：48000-48000=0，分母沒有東西可以除。

36 號：我跟 31 號的想法一樣。

38 號：我知道，我寫太快了！

②另一次由 38 號擔任主持人，38 號原先表示那就需先證明  $\triangle ABO \cong \triangle DCO$ ，在 04 號認為不需要而提出質疑後，38 號亦表認同。(參考 0803E2-1E3-1for0438 Video)

38 號：so，你要證明這兩個三角形 ( $\triangle ABO$  與  $\triangle DOC$ ) 全等囉！

04 號：可是證明它們兩個全等，也不能證明它們 45 度 ( $\angle ACB$  與  $\angle DOC$ ) 吧！

38 號：為什麼不能，...，喔，對啊！

### 3. 合作的表現

上述是 38 號說明看法後，04 號提出質疑。同一檔案後半部份，則是為解決問題，兩人合作的精采表現，雖然多數時間是 38 號作說明，但中間則有 38 號指導 04 號並要求 04 號作說明。(參考 0803E2-1E3-1for0438 Video)

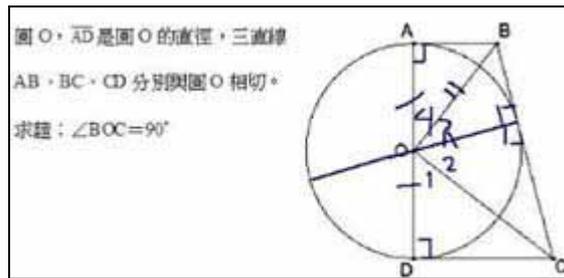


圖 53 38 號對 E2-1 題畫輔助線，並在圖上作的記號

38 號：喔，我懂了！我懂了！我懂了！

喔，我會證了！我會證了！

38 號：喂，04 號，你從我的畫可以看出什麼嗎？

04 號：你寫這什麼東西？

38 號：從這裡可以找到兩個三角形的全等性質。然後全等性質中，利用角度的性質可以證出 90 度。

04 號：你是說這個和這個嗎？（右上兩全等三角形）

38 號：嗯，還有一組。

（04 號再畫出右下兩個全等三角形）

38 號：沒錯，這個三角形剛好三個性質都有了，妳有沒有發現，看一下吧！本人是已經發現了！我先寫過程了

（寫下作法，與兩三角形，04 號表示看著 38 號寫著）

38 號：不然妳幫我找三個全等性質好了。

（04 號寫下  $\angle BAO = \angle BWO$  及  $\overline{BO} = \overline{BO}$ ）

38 號：第三個哩，最重要那個，妳有沒有看出來？

（04 號將  $\widehat{AW}$  對  $\overline{BO}$  分成兩弧）

04 號：我在想啊！

（04 號思考後）

04 號：不一定吧！

38 號：對啊！個人是看不出來它會相等。不過我不知道你會怎麼證，所以我也知道它會不會相等。

38 號：但我的證法不是這樣。妳可以看看題目上的  $\overline{AD}$  是圓 O 的直徑，還有我做的圖為什麼要過 O 點。

04 號：你的是直徑。

38 號：對啊，那它的圖哩！它們都過 O 點，所以  $\overline{AO}$  跟  $\overline{WO}$  是什麼關係？

04 號： $\overline{AO}$  跟  $\overline{WO}$  一樣長啊！ $\overline{AO} = \overline{WO}$

38 號：為什麼？

04 號：因為從圓點到圓周的距離都一樣啊！

38 號：那就講半徑等長就好啦！那這樣三個條件就找到了。

(38 號繼續寫下  $\therefore \triangle AOB \cong \triangle WOB$ ，然後問 04 號是什麼全等性質)

04 號：嗯，SAS。

38 號：SAS？妳太厲害了。畫畫看是什麼性質，妳確定是 SAS，不改答案，這裡是直角喔！（ $\angle BWO$ ）

04 號：等一下，SSA 吧。

38 號：那是 RHS 嘛！它是直角啊！

(最後兩人在對談中，完成證明)

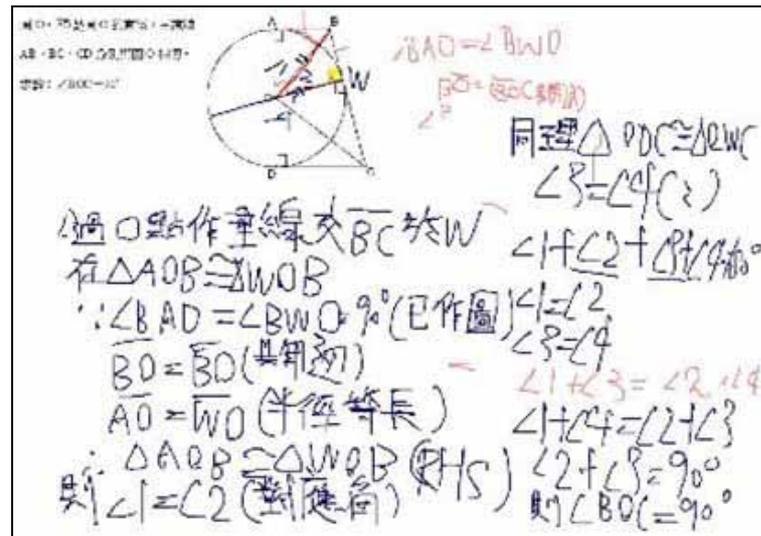


圖 54 04、38 號共同完成 E2-1 題的證明

【教師省思】研究者發現在合作學習中，主持人（小組長）的訓練是非常重要的。主持人（小組長）的身分如同教師須能捉住同學發言的重點做引導與結論，同時也要能給低成就的同學適當的協助。因為當人數超過三人，若沒有小組長適時的引導，是不容易將別人的話語聽入耳中作判斷，因此就有人言論被犧牲掉，特別是低成就的學生。

因此在本研究中，超過三人的合作學習表現是沒有的。研究者從所蒐集相關合作學習的文獻中，發現對小組長的訓練並沒有比較深入的探究。

#### 4.2.3 線上家教環境對學習遷移的影響

線上家教著重在近側發展區為奠基的鷹架理論，因此教師適時的介入引導，能幫助學生擴展能力和知識。當學生的想法是正確，卻無法判斷是否為題目中的關鍵時，教師適時的引導有助於學生信心的增加，學習亦可更上層次。然而當教師所扮演建築中鷹架的角色漸漸移開，學生

是否能在相似的情境，甚至不同的情境中獨立完成任務，更值得研究。因此在第三階段的行動研究實施過程，著重於觀察線上家教環境對學習遷移的影響。

本研究為了解線上家教對學習遷移的影響，在第二次線上測驗 T7 及 T8 兩題各有解題策略相似的第 2 小題。藉此了解此兩小題在測驗中是否能解出，若無法解出，是否能在教師提示其中一題後，能獨立完成另一小題的證明。第二次線上測驗時，該兩小題五位同學都未證明。

研究結果 01、36 (0922test2for36 [Video](#))、38 (0915test2for38 [Video](#)) 號三位學生在 T7 第 2 小題協助引導後，能獨立完成 T8 第 2 小題的證明。04 (0920test2for04 [Video](#)) 及 31 號雖其中一小題也在教師的協助引導下完成證明，但另一小題則仍需教師協助才能完成。研究者各舉一例子說明。

#### 1. 失敗例子：學生 31 號。

該生無法解出類似的 T7、T8 第 2 小題。教師先協助該生分析 T8 的第 2 小題，進入 T7 的第 2 小題時，該生雖能找到兩相似三角形的其中一個，但另一個三角形則仍需教師給予支持與協助下找到。

(參考 0916test2for31 [Video](#))

(教師先協助該生分析 T8 的第 2 小題，進入 T7 的第 2 小題)

教師：要證明的是  $BD \perp CG$ ，

這和剛剛那一題 (T8) 有點類似。

這時你要找兩個三角形相似的，你會找哪兩個，而且跟你畫的直角會有直接關係的三角形？

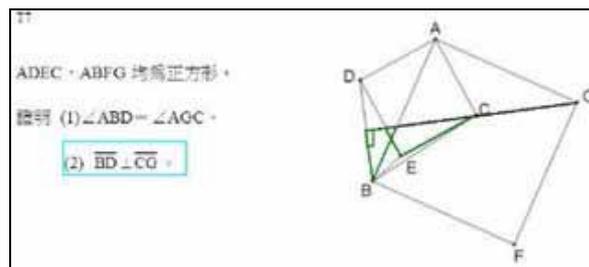


圖 55 31 畫 T7 題解題策略其中一個三角形

(該生畫出一個三角形，但第二個則畫錯)

教師：你畫的三角形 (第二個) 有沒有 90 度的？ (第二次)

31 號：好像沒有。

教師：所以你應該要往外擴展一點點。

(第三次畫錯)

教師：你這樣畫會出現一個奇怪的三角形，雖然你有畫出一個

直角了。

(第四次畫錯)

教師：那個是直角嗎？現在要跟你提示的是要以這一點出發 ( $\overline{AB}$  與  $\overline{GC}$  的交點) 畫出一個三角形，而且這個三角形是有直角的。

31 號：找不到。

教師：你剛剛不是有畫了一個形狀 ( $\triangle AC$  第三點是  $\overline{AB}$  與  $\overline{GC}$  的交點)，有一條是對的 ( $A$  與  $\overline{AB}$ 、 $\overline{GC}$  交點的連線)。另外，還有兩條構成三角形，那裡有直角，你應該看得到。

(該生畫出第二個三角形)

教師：嗯，對，這就是啊！

哪一個是直角？你把它畫出來。

(該生標示出直角)

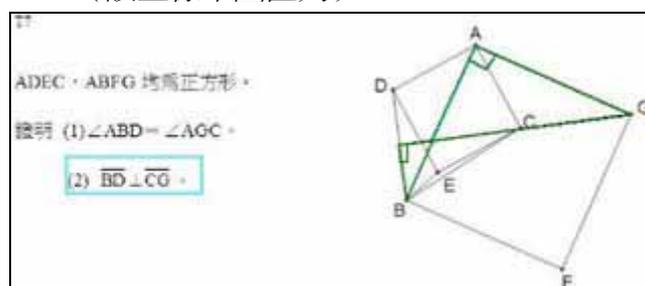


圖 56 教師引導下 31 號畫出的第二個三角形

教師：嗯，沒錯，好。

(之後，教師要該生說明哪兩個角度相等，該生則完成)

教師：那這樣，你會了嗎？

31 號：會了。

教師：其實你可以發現，我只要給一點點提示，你會做了。

## 2. 成功例子：學生 01 號。

教師先給 T7 第 1 小題的部分作提示。該生經過兩次的提示，已經明瞭並完成證明。在完成 T7 第 2 小題的證明後，立即給予 T8 的第 2 小題，不需任何提示，該生即可證明出來。(參考 0921test2for01 [Video](#))

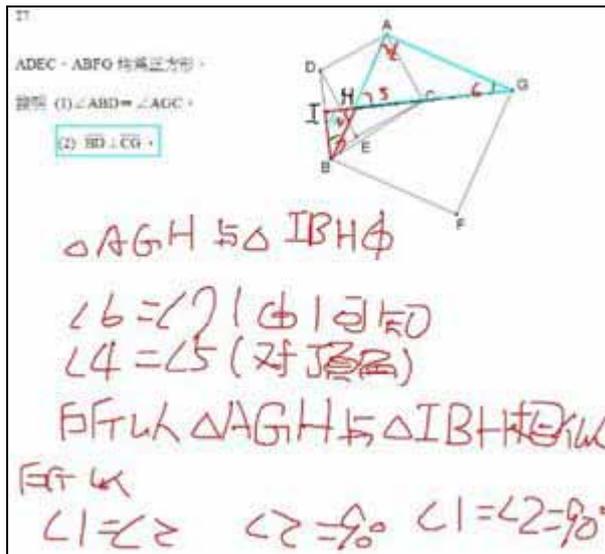


圖 57 教師引導下 01 號完成 T7 題第 2 小題的證明

(在引導 T7 的第 2 小題，T8 第 1 小題分析後)

教師：剛剛呢，我們在前面  $\overline{DE} = \overline{BG}$  是利用兩三角形全等，利用這個三角形 ( $\triangle BCG$ ) 和這個三角形 ( $\triangle DCE$ ) 全等得到的。現在妳應該可以很快的寫出來囉！

(在教師未將話說完，該生已經畫出  $\triangle DGH$ ，並在教師說明完後畫出兩三角形，而且獨立完成證明)

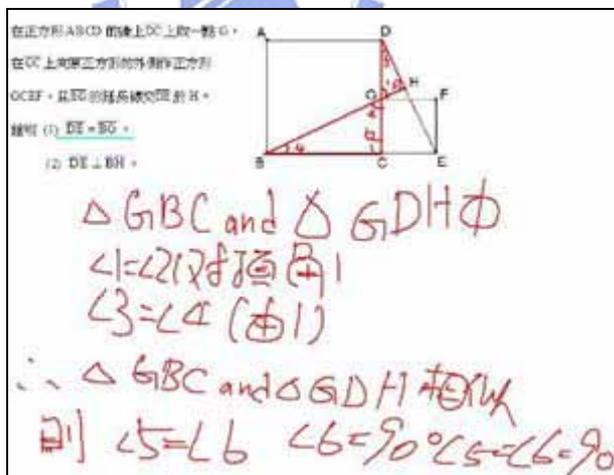


圖 58 01 號獨立完成 T8 題第 2 小題的證明

**【教師省思】**雖然低成就學生的近遷移沒有成功，但仍能在教師的引導協助下完成任務。然而當回溯第二次線上測驗之前 31 號的表現，研究者以兩方面的角度進行觀察。

1. 線上作業繳交情況。在 0622from31\_1 ([Video](#)) 中，該生雖然有繳交作業，但是利用小畫家書寫後再貼上，無任何語音說明。然而當天晚上進行討論後，教師再度要求該生做此題作

業，該生已有語音說明，但仍是藉由小畫家書寫。(參考 0624 from31 [Video](#))

教師不放棄，在一次機會中再次引導學生完成一題的證明(參考 0721E1-1E1-2for31 [Video](#))，並要求該生自行再次獨立上線繳交作業。這次該生的表現不但利用討論板書寫，亦能在書寫過程中做必要的說明。(參考 0722E1-2from31 [Video](#))

2. 兩次線上測驗的最佳表現。第一次線上測驗，該生最佳的表現雖有完成證明，但書寫過程有瑕疵，未有語音說明。

經過一段時間的線上家教後，到了第二次線上測驗，該生的最佳表現已能正確的完成證明，並在解題過程中加入語音的說明，以強化自己解題的正確性。不但如此，還嘗試設計一道題目，雖然設計的題目，其實用性不高，但明顯的是該生已在解題能力上向前邁進一步。

由上述兩方面的觀察分析，研究者認為如果能在相似的情境中，多幾次的練習。也就是教師為協助者立場的時間延長，即時低成就的學生亦能透過線上家教的環境產生近遷移的影響。研究者僅以一題做學習遷移影響的分析，在量方面顯然是不足的，但也由此題的分析，看出線上家教環境對學習遷移是存在著影響的。

#### 4.2.4 學生對不同題材的解題表現

原先在第二次線上測驗結束後，本研究的實驗即告一段落。然而參與學生仍想繼續線上家教，因此安排不同於幾何證明的數型關係題材，藉此更進一步觀察學生在不同題材中的解題表現。研究者整理後以「完成解題並說明正確」、「自我檢驗能力」及「解法多元」三項高層次解題能力作為分析依據。

##### 1. 完成解題並說明正確

(1)由 01 號擔任主持人，開始時開放同學自行決定解題的題目。待完成後，主持人請解題者針對自己所寫的題目作解釋。(參考 0817 pattern2forall [Video](#))

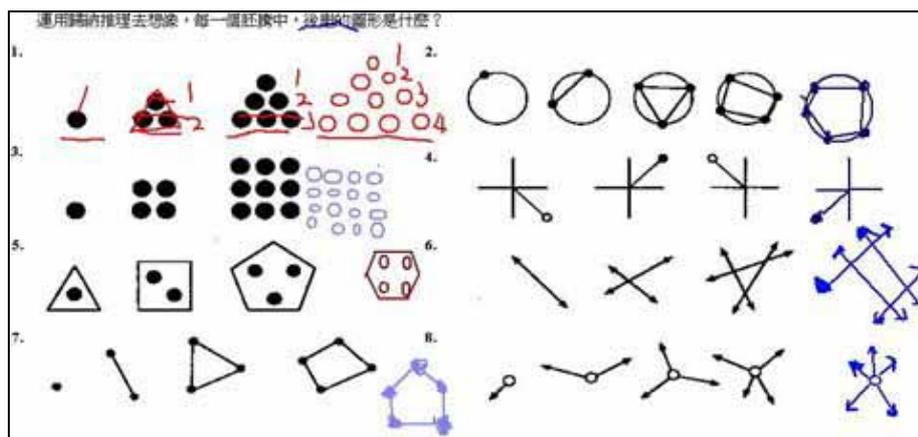


圖 59 01 號擔任主持人，學生個別書寫的答案

主持人：38 號回答第 2 題。

38 號：1 到 4 都有 1 個圓圈圈，裡面一開始就 1 個點，2 個點，……，  
所以就有 5 個點，連起來就是一個五邊形。

主持人：那點可以亂動囉？

38 號：對，妳要點那就點那。

主持人：再來就是 36 號，第 3 題。

36 號：第一個邊長各 1 個，第二個邊長各 2 個，第三個邊長各  
3 個，第四個邊長各 4 個。

主持人：好，再來就是第 4 題啦！

38 號：這一題完全是憑直觀。先看圓圈圈，一開始是白，第 2  
個是黑，第 3 個又是白，所以第 4 個一定又是黑。第 2  
個和第 3 個是顛倒過來（指線段），所以第 4 個是第 1  
個顛倒過來的。

主持人：再來就是第 5 題。一看就知道，第一個，1 個圓圈圈、  
3 個邊，然後第二個就 4 個邊、2 個圓圈圈，第三個就  
5 個邊、3 個圓圈圈，第四個就 6 個邊、4 個圓圈圈。

主持人：31 號。（第 6 題）

31 號：妳看每進一個就多一條，然後會交在一起，所以最後一  
個就是這樣。

(2)每位學生皆能解題並作正確的分析。(參考 0825pattern3for  
013638 [Video](#))

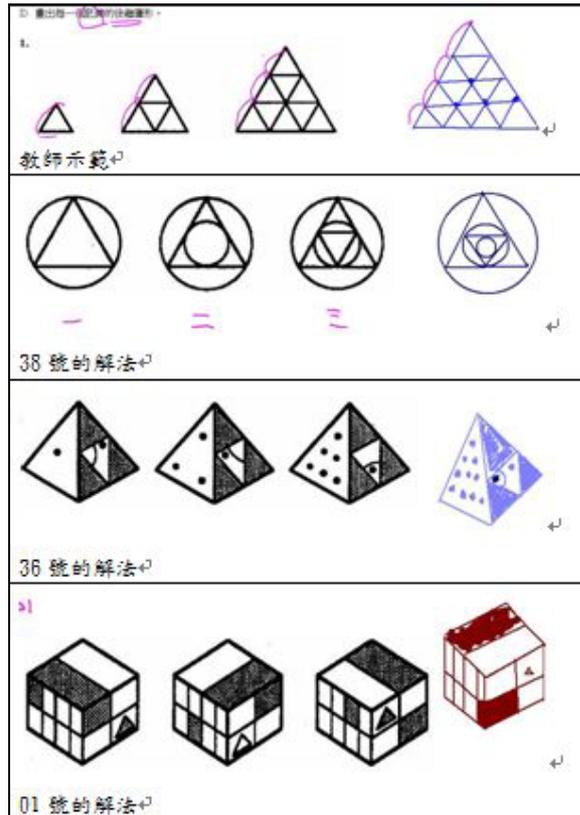


圖 60 教師示範及學生各題的解法

## 2. 自我檢驗能力

- (1) 01 號在解題時，將原本提出的答案經自我檢驗後，更正為正確答案，並作說明。(參考 0825pattern3for013638 [Video](#))

教師：第一題你知道怎麼算了？

01 號： $2n-1$  啊！

教師：妳確定是  $2n-1$  嗎？

01 號：確定，… 嗯，不對，不對！

嗯，…

教師：妳看第 6 個就跑掉啦。

01 號：啊！沒有，那個是  $n$  的 2 次方減 1 ( $n^2 - 1$ )。

教師：為什麼？

01 號：因為，你看嘛，2 的 2 次方就是 4，4 減 1 不就等於 3。

然後 3 也是啊，3 的 2 次方就是 9，9 減 1 不就等於 8。

教師：好。

項	1	2	3	4	5	6	……	$n$
值	0	3	8	15	24	35	48	……

Handwritten notes in red ink below the table:  $5 \sqrt{7}$ ,  $2 \sqrt{9}$ ,  $n+1$ ,  $\sqrt{13}$ , and  $20 \div 1$  with  $n^2-1$  written vertically on the right.

圖 61 01 號在 n 項的解法

(2)38 號則於寫出規則後發現錯誤，在找到自己的問題後做修正。(參考 0830pattern5forall [Video](#))

(前面分析斜線的切割解法，接著教師詢問是否還有第三種解法，38 號以矩形的方式提出另一種解法)

教師：如果根據這樣的話，你把整個格式寫出來。

38 號：什麼叫格式？

教師：就是剛剛  $1+2+3+\dots$ 。

(該生寫出  $4+12+20$ )

教師：你要不要說明一下。

38 號：等一下，我還沒寫完，...因為我數的很辛苦。

教師：那你為什麼不從剛剛出來的三個去推呢？

(該生寫出  $4+12+20+28$ )

38 號：因為我還沒推到。

啊！我推到了。

(該生寫出  $4+12+20+28+36+44=$ )

38 號：\，算起來好怪喔。

教師：我也覺得好怪喔，哪裡怪呢？

38 號：啊！我知道了。

(該生修正為  $4+12+20+28+36=100$ )

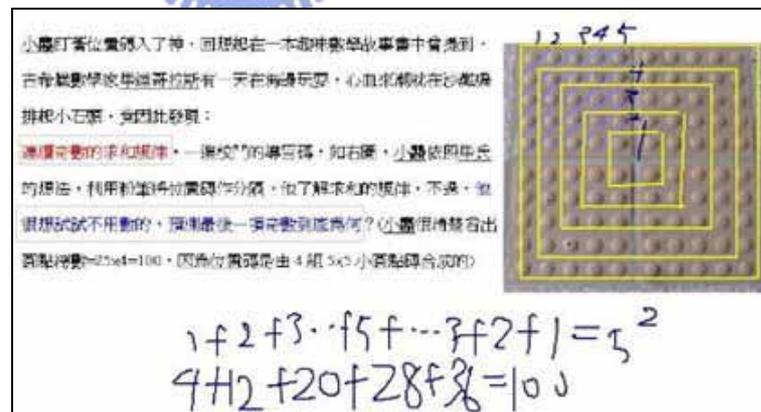


圖 62 38 號的第二種解法

### 3. 解法多元

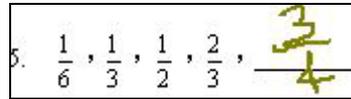
(1)04 號先前已寫出答案並回答理由，之後又提出第二種解法。(參考 0814pattern1forall [Video](#))

教師：04 號，為什麼是  $\frac{3}{4}$  ？

04 號：因為  $\frac{1}{6} \div \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ ，然後  $\frac{1}{3} \div \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ 。

教師：所以最後一個就是  $\frac{1}{2} \div \frac{2}{3}$ ？

04 號：嗯。



5.  $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$

圖 63 04 號對第 5 小題的第一種解答

教師：你的答案是對的，還有沒有不同的答案？大家想一下。

教師：只要說的通就是對的，我們只是找規律而已。

教師：還沒有人想到？

04 號：喂！我在想哩。

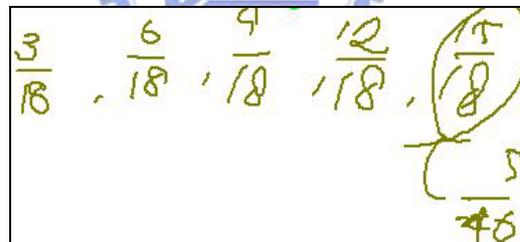
(該生開始寫)

教師：為什麼是  $\frac{3}{18}$ ？

04 號：等一下。

.....

(該生第二種解法，是利用通分得到  $\frac{15}{18}$ )



$\frac{3}{18}, \frac{6}{18}, \frac{9}{18}, \frac{12}{18}, \frac{15}{18}$

$\frac{5}{48}$

圖 64 04 號對第 5 小題的第二種解答

(2) 教師回到第四關第一圖，說明先前的分法，而 36、38 號提出第二種分法，並由 38 號正確解釋。(參考 0830pattern5forall [Video](#))

(教師分析先前的解法，詢問是否還有其他的解法)

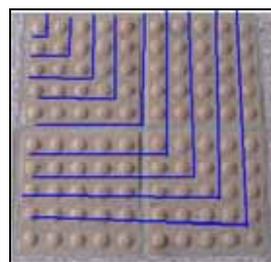


圖 65 教師提出第一種解法

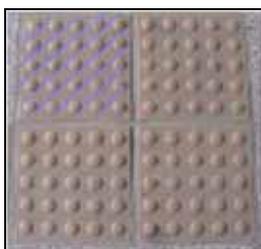


圖 66 36 號提出第二種解法

教師：36 號是針對其中一個。沒錯，我們只要針對一個就好了。

38 號：老師，我可不可以跟他一樣，可是我是畫全部的。

教師：一個跟全部不是一樣的嗎？

38 號：是一樣啊！

教師：大家再稍微想一下，36 號畫出來，但還沒解釋。等會兒由 38 號來說明。

(38 號利用每斜行提出  $1+2+3+\cdots+5+\cdots+3+2+1=5^2$ )

(3) 教師再次提出第四關第一圖，詢問是否還有其他解法，而 38 號即再提出第三種解法，如前述自我檢驗能力的第二個例子。

【教師省思】第一次線上測驗，學生在幾何證明最佳的表現是完成證明，未有更高層次的解題能力表現。經過三個月的線上家教，第二次的線上測驗，學生已能有更高層次的解題能力表現。

而在第四個月，研究者更以數型關係題型再次檢驗學生的解題能力，發現不但完成解題，在自我檢驗及解法多元都有不錯的表現，也說明了解題中的高層次能力，學生不止在幾何證明上有所表現，在其他單元，學生亦能有相同的思維。

可惜的是數型關係題目，是在第二次線上測驗後應學生的要求，才加入線上家教的題材，因此並沒有前測的依據標準，若想分析對遠遷移的影響則有失研究的嚴謹度。但研究者仍認為此部分是值得提出分享的，甚至能不能也能遷移到其他學科都值得深入探究。

#### 4.3 學生的數學學習態度

本研究主要目的是透過線上家教新的環境，評估並改善學生的解題能力，同時也希望能夠觀察學生學習態度的改變情形。

在時間不足、研究者本身能力有限之下，因此對學習態度的觀察以兩向度分析：一是「時間向度」，以線上家教為時間軸來觀察學生的表

現，探討其學習態度的改變。另一則是「社會向度」，由問卷及訪談方式了解學生的學習態度，將問卷分為兩主軸—「重要他人對其態度」及「學生本身的認知」進行探討，以求研究的嚴謹度。

#### 4.3.1 低成就學生的學習態度

##### 31 號

原本研究者的計畫是四位學生，而在與學生初期（93年5月）進行硬體的相關測試時，36號學生因家中電腦問題，正當不知如何突破之際，恰好有機會和31號學生在即時通中對談。該生透露有興趣參加的意願，因此研究者表示歡迎。但由該生在教室參與度的表現，讓研究者擔心其學習態度。而實驗結果，該生的成長卻讓研究者相當感動，以下就時間及社會兩向度觀察該生的學習態度。

##### 1. 時間向度

初期該生利用討論板時不發一語，直接書寫（參考 0604from31 Video）。當個別教學時，該生在教師的引導下比較會發言回答（參考 0615for31 Video）。而在一次與其他同學線上家教時，該生透過即時通詢問問題（圖 67）。

```
| 2004年6月15日 小強 vs 31 |
[PM 09:40] 31: 突然忘記問題ㄉ@@ 老師你可ㄉ可以再講一次?
[PM 09:40] 31: 一直在想 1993 那提其ㄉ 2 提望ㄉ ==
[PM 09:41] 小強: 是李中的第三題
[PM 09:42] 31: 那一ㄩ記得還有 1 ㄩ望ㄉ ==
[PM 09:43] 小強: 而 1993 有 2 題
[PM 09:43] 31: 有 1 ㄩ奇偶ㄉ
[PM 09:43] 31: 還有 1 ㄩ什麼ㄉ?
[PM 09:45] 小強: 就是原題目
[PM 09:45] 31: 喔喔
[PM 09:45] 小強: 也就是針對原題目,你的進度
[PM 09:46] 31: 喔喔
[PM 09:47] 31:我想出來ㄉ是ㄉ是 1·2·3 這樣有 4 種組合是偶 1·2·3·4·5 這樣有 6 種是奇 1·2·3·4·5·6·7 這樣有 8 種是偶以此類推這樣ㄉㄉ對?
[PM 09:52] 小強: 不太正確,現在還在和蔡瑜暄討論
[PM 10:06] 31: 恩 我先留言
```

圖 67 教師與學生即時通的對談

之後該生在將答案書寫後，即很想知道對錯，因此在線上家教之前，該生即與教師在 MSN 上連繫，並做簡短的討論，如圖 68。

```
| 2004年6月22日 小強 vs 31 |
[PM 07:58] 小強: 已經看完了
[PM 07:59] 31: 恩
[PM 07:59] 31: 有寫對ㄉ?
[PM 07:59] 小強: 但你沒有做任何說明,我實在不知你是從哪裡開始的
[PM 07:59] 小強: 所以進來 JoinNet 囉!
[PM 08:00] 31: 喔,教師謝謝ㄉ ≥ 0 ≤
```

圖 68 線上家教前，學生利用 MSN 問問題

因此進入線上家教後，該生越來越敢發言（參考 0622for0431）。甚至能對高成就學生的答案提出質疑。（參考 0624forall [Video](#)）

但在第一次線上測驗時，該生卻在作答時未發言（參考 0708test1from31）。原本有些擔心，但之後的線上家教該生已能發言表示意見，第二次線上測驗時，該生已經完全自在的發言說明其解法。（參考 0811test2from31）

## 2. 社會向度

### 【重要他人對其態度】

在學習態度的問卷中，該生表示家人認為藉由線上家教在數學方面可以學得更好，而且很多。並且表示家人希望教師能繼續透過線上家教，協助即將進入國中的妹妹在數學方面的學習。

### 【學生本身的認知】

在學習態度的問卷中，該生對學習數學感到緊張、害怕。原因是因為覺得線上家教速度很快。經研究者深入訪談後發現，若是個別的線上家教，該生此問題即解決。（因此該生得先從其自信心建立，所以教師在講解結束時，要求該生自行再書寫一次。讓該生在完整的證明中建立起自信，例如 0721E1-1E1-2for31 的教學及 0722E1-2from31 該生的書寫）

因此在線上家教前後，該生表示對自己最大的改變是數學進步很多。圖 69 是在一次台北畫刊四月份（民 94）〔77〕的訪問中 31 號的回答，當時本研究實驗已經結束，但由訪談的內容不難看出 31 號學習的進步。

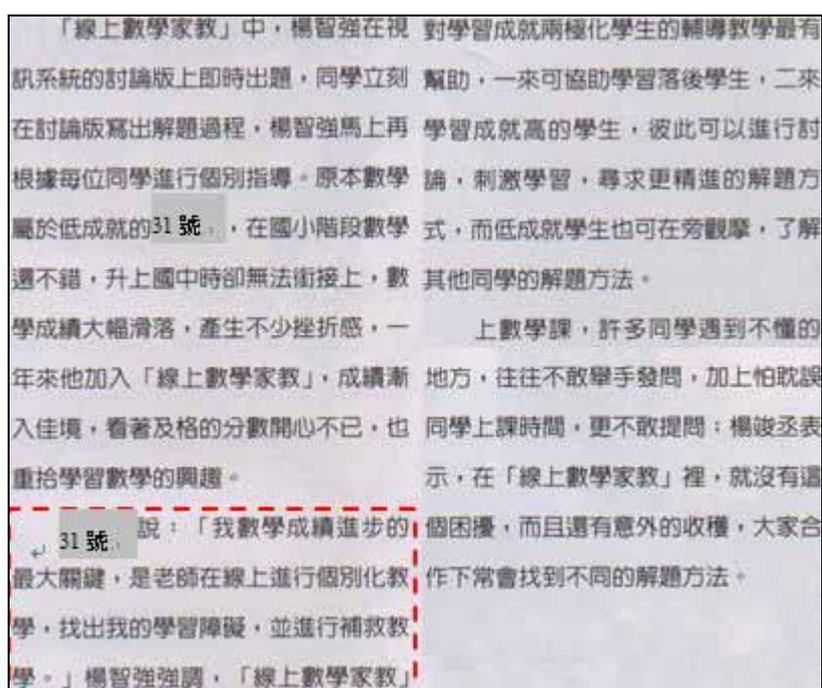


圖 69 台北畫刊訪談內容

資料來源：台北畫刊四月份(民 94)

### 4.3.2 中成就學生的學習態度

01 號

#### 1. 時間向度

在實驗進行初，該生還會在線上家教時和其他人利用即時通聊天。  
(參考 0605for01)

而當教師請該生發言，該生才做說明，但在言語中則為猜測的語氣。  
(參考 0603forall [Video](#))

該生有時會藉家中有事未上線，或較慢上線，並且會邊上線上家教邊吃晚餐。(參考 0610forall、0617forall 未上線；0720E1-1E1-2for0104 21'21 才上線)

之後的回家作業，該生已能完整證明。(參考 0724E1-1E1-2from01 [Video](#))

當教師將主持權交給學生時，該生與主持人時而思考、時而質疑、時而聊天，但最後的證明卻也在這樣的情況下完成。該生的表現亦在合作學習下漸漸專心起來。(參考 0726E2-2E2-3for0138)

到了第九回以後，該生真正的專注於線上家教。不但準時上線，更在解題上有不錯的表現。(參考 0804E2-1E3-1for01 認真態度；0921test2 for01 T7、T8 的討論)

第十一回，在數型關係的教學中，更會因突然間發現問題所在或想到解決方法，而有非常興奮的表現。(參考 0814patternlforall [Video](#))

在一次 JoinNet 端的伺服器發生當機無法上線時，研究者在預定的時間利用即時通告知學生情況，而就其原本的作業作簡單的對談。雖無法進入線上家教系統，但也利用即時通作雙向互動的討論。而礙於上述情況想放棄時，學生卻告知想要做題目，因此研究者立刻以手邊早已編輯完成的題目，透過即時通傳送給學生。



圖 70 JoinNet 當機，學生透過 MSN 表達學習意願

## 2. 社會向度

### 【重要他人對其態度】

在學習態度的問卷中，該生表示家人認為藉由線上家教在數學方面可以學得更好。並且表示其姊姊相當有興趣，會在線上家教進行時，想知道在做什麼。

### 【學生本身的認知】

在學習態度的問卷中，該生表示當問題解決或理解一個概念後，相當快樂，尤其是同學解不出的題目，完成後會有種優越感。並表示數學相當有趣，有激發且是一種挑戰。（參考 0814pattern1forall [Video](#) 該生對想到解決方法的興奮）

該生對於數學表示不害怕，因為都在想題目，沒有時間去緊張害怕。並且對數學課上未解答的題目，課後會去思考其解答。

而對於線上家教前後的改變，該生則認為自己比較懂得做題目，大家的合作會比一個人的努力來得快。

## 04 號

## 1. 時間向度

該生對別人所提解題策略，當認為有疑問時，會提出質疑。（參考 0603forall [Video](#)）

該生以教師未發現的直線及矩形的畫圖模式做說明，該生表示因需要畫正方形的圖，才思考而找到這項功能。（參考 0603from04）

該生在與教師的個別線上家教時，比較不敢發言。因此在書寫答案及說明理由時，總是不敢立刻確認，而教師則以引導方式進行教導（參考 0608for04）。之後在教師的不斷鼓勵下，該生已能勇於發言並作說明。（參考 0727E2-2E2-3for04）

該生在多人線上家教中，則表現出較積極的學習態度。不但主動請求發言，對其他同學的看法會提出質疑。（參考 0610forall [Video](#)；0617forall [Video](#)；0622for0431；0814pattern1forall）

該生更能在其他同學提出第二證法輔助線後，提出其解法，其專心程度不言而喻。（參考 0720E1-1E1-2for0104 [Video](#)）

## 2. 社會向度

### 【重要他人對其態度】

在學習態度問卷中，家人對其線上家教甚感興趣，尤其該生的姊姊更想參與解題。

### 【學生本身的認知】

該生認為如果能解到一題別人都還沒想到或不會做的題目，心中會

覺得開心，而且更有興趣做下一個題目。

認為自己的數學不好，理由則是覺得有些題目不會，即使理解了，下次似乎還會做錯。

但在線上家教中，該生並不感到緊張、害怕。理由是因為有充分的時間讓自己想題目，而且大家一起討論，發表每個人不同的看法，也可以充分表達自己的想法。

該生則認為線上家教前後，對自己的改變是學會做題目、多方面思考、多角度想，用不同方法解題。

### 36 號

#### 1. 時間向度

該生繳交作業時，雖已開啟 JoinNet，但卻是在旁利用小畫家寫完後才上傳至討論板，其行為如同傳統繳交回家作業。（參考 0623from36）

隔天與同學共同上線時，其中一題，教師由該生解題，雖有小瑕疵，但該生已經敢利用語音進行說明。（參考 0624forall [Video](#)）

當天的作業，該生隔天上線書寫，已能利用語音輔以說明解題過程。（參考 0624from36 [Video](#)）

教師將該生的作業在一次的線上家教中提出討論，該生自己找到了錯誤的地方。原先提出修正的方向，思考後立即反駁自己的想法再修正。由此可看出該生在線上家教中專心於問題的解決。（參考 0729E1-3for3136）

在數型關係題型中，教師嘗試讓該生擔任主持人。該生與 38 號的合作，並對 38 號的解法提出質疑，由此可在看出該生積極的學習態度。（參考 0825pattern3for013638 [Video](#)）

#### 2. 社會向度

##### 【重要他人對其態度】

在學習態度問卷中，該生表示家人對其上課情形並不感興趣，只擔心偷玩電腦。經教師深入訪談，了解是母親擔心，而其哥哥及雙胞胎弟弟則相當感興趣，並在一次線上家教結束前提出高中數學問題。

##### 【學生本身的認知】

對於當問題解決時，該生表示很有成就感，並認為無法立即解出的題目是種挑戰。

自己則認為數學不好，因為每次寫數學題目時，會容易想東想西，想得太複雜。

而在學習數學中會感到緊張、害怕。理由則是當一題解出後，會覺得明白又好像不明白，並認為要自己在上課後重新想通才知道問題所在。

認為線上家教與傳統的課堂上課，最大的不同是不會的問題可以問

清楚，而課堂上問太清楚會拖累到上課進度。

該生則認為線上家教前後，對自己的改變是很多觀念都變清楚了，有一些疑問也了解。

### 4.3.3 高成就學生的學習態度

38 號

#### 1. 時間向度

38 號在 31 號的書寫過程中，仍不忘思考，以致於在 31 號寫完後立即有不同的想法。（參考第五回 0624forall [Video](#)）

該生完成此作業期間，不難聽出有家人談話的聲音。因為該生家中電腦是放置在客廳，因此很容易會聽到其家人的聲音，但這似乎不影響到該生的情緒。（參考 0624from38 [Video](#)）

38 號雖只畫了一種，但卻有 4 種證明的嘗試。雖失敗，但隔天完成證明。（參考 0722E1-2from38\_1 [Video](#)；0723E1-2from38\_2 [Video](#)）

該生於 72'44 即畫出第一種證法的輔助線。在快結束前，再度表示有另一種證法，而其證法亦正確。（參考 0724E1-3for313638 [Video](#)）

在數型關係的教學中，常會有不同人因突然間發現問題所在或想到解決方法，而有非常興奮的表現。（參考 0825pattern3for013638 [Video](#)）

該生與 36 號共解一題目時，該兩名學生則不受對方書寫的干擾，雖分析的答案在表面上是不同（ $n(n+2)$ ， $n(n+1)+1$ ），但結果卻是一樣正確的。（參考 0825pattern3for013638 [Video](#)）

38、36 號同學更是將線上家教中的合作學習運用到課堂上，這可由 0717E1-1from38 中及課堂上的表現了解。雖然此題在線上家教中教過，38 號亦找出兩種解法，但當教師在課堂上再次提出此題目時，36、38 號在當天放學前合作寫出了第三種解法，連帶影響了班上另一位同學寫出第四種解法。

<p> <math>\triangle ABF \cong \triangle DCE</math>  <math>\angle B = \angle C = 90^\circ</math> (正方形)  <math>AB = DC</math>  <math>BF = CE</math>  <math>\therefore \triangle ABF \cong \triangle DCE</math> (SAS)         </p>	<p>           首先連結 <math>BE, AC</math>  <math>\triangle AFE \cong \triangle DEB</math> (SAS)  <math>AF = FE</math> (對應邊)  <math>BE = CE</math> (已知)  <math>\angle DBE = \angle ACF</math> (對角線)  <math>BE = CE</math> </p>
<p>07170717E1-1from38 解法一</p>	<p>07170717E1-1from38 解法二</p>

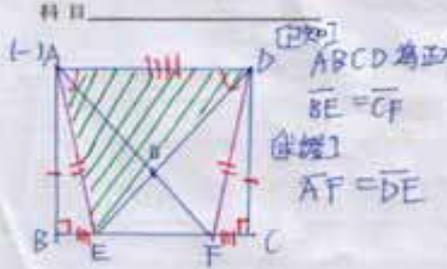
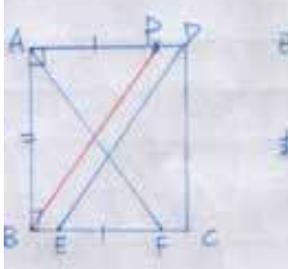
 <p> <math>ABCD</math> 為正方形  <math>BE = CF</math>          求證: <math>AF = DE</math> </p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. 連接 <math>AE, DF</math></li> <li>2. 在 <math>\triangle ABE</math> 與 <math>\triangle DCF</math> 中  <math>\because AB = DC</math> (正方形)  <math>BE = CF</math> (已知)  <math>\angle ABE = \angle DCF = 90^\circ</math> (正方形)  <math>\therefore \triangle ABE \cong \triangle DCF</math> (SAS)          則 <math>AE = DF</math> (對應邊相等)  <math>\angle BAE = \angle CDF</math> (對應角相等)</li> <li>3. <math>\angle BAD = \angle CDA</math> (正方形)  <math>\angle BAD - \angle BAE = \angle CDA - \angle CDF</math>  <math>\angle EAD = \angle FDA</math></li> <li>4. 在 <math>\triangle EAD</math> 與 <math>\triangle FDA</math> 中  <math>\because AE = DF</math> (已證)  <math>AD = AD</math> (共用邊)  <math>\angle EAD = \angle FDA</math> (已證)  <math>\therefore \triangle EAD \cong \triangle FDA</math> (SAS)          則 <math>AF = DE</math> (對應邊相等)</li> </ol>	 <p>         例: <math>ABCD</math> 為正方形  <math>BE = CF</math>          求證: <math>AF = DE</math> </p> <ol style="list-style-type: none"> <li>① 平移 <math>DE</math>, 使 <math>E</math> 落在 <math>B</math> 上, <math>D</math> 落在 <math>P</math> 上</li> <li>② <math>\because</math> 平移 <math>\therefore BE = PD</math>, 又 <math>BE = FC \Rightarrow BE = PD = FC</math></li> <li>③ <math>\because AD = BC \therefore AD - PD = BC - FC</math>          (SAS) <math>\Rightarrow AP = BF</math></li> <li>④ 在 <math>\triangle APB</math> 與 <math>\triangle BFA</math> 中  <math>\angle BAP = \angle ABF = 90^\circ</math>  <math>AB = AB</math> (共用邊)  <math>AP = BF</math> (由③)  <math>\therefore \triangle APB \cong \triangle BFA</math> (SAS)</li> <li>⑤ <math>\triangle APB \cong \triangle BFA</math>  <math>\therefore AF = DE</math> (對應邊相等)</li> </ol>
<p>課堂上 36、38 號的合作結果</p>	<p>課堂上 另一位同學的作品</p>

圖 71 學生對題目的一題多解

原本線上家教中所教的題目，教師在學校進行複習時，將 E2-3 提出，38 號再度想出另一種解法，並將感想書寫在家庭聯絡簿（這是該生主動書寫的）。由此可看出學生對線上家教的學習後，對於解題的反應是漸佳的，且能在心中立刻有解題策略的形成。亦可看出學生已經慢慢了解幾何證明所要持有的態度。

最近我發現一件事，關於數學的證明題有一種特性，那就是剛開始不知道要從何處下手，可是如果證明出來的話，就會發現其實題目很簡單，為什麼當初要想那麼久呢？所以我覺得證明題以填充式考法，並不恰當，因為證明題最難的部分就是「開始」的方向，如果一開始就告訴你方向，那就沒有意義了。

這些次數學上的單元是圓周角，圓心角，弦切角等題目，當然我自己也有買參考書去練習，不過我發現其實這單元要考也可以考得很困難，有時候還往往要用好幾種的角度的性質才能把答案算出來，而且你算的方法還不一定是最快的，可能還有更簡單的方法，只是你沒有發現，雖然有時候在一題二題花很多時間，但只要最後能三三兩兩出來，自己一定會覺得很有成就感。

我總覺得現在我回校當老師線上家教的題目越來越得心應手，以前碰到老師出的問題都來不及反應，但現在都可以馬上有意義，我想這大概是經過這幾次不斷思考的結果，我曾聽過一句話，人是三種思考的動物，雖然身體的各種器官會退化，但是只要大腦有常常思考，就不會退化，我相信這就是最重

昨天上課上家教的時，現在二元一次聯立方程別去翻一下參考書，如道解聯立方程式最主什麼，當然經過老師的講解，我想起來把一元第一優先，反而明確地對這些部分了解，比心而言，這道課對我來

表現優良：  
 遲到：  
 掃除不認真：  
 服裝儀容不整：  
 缺繳功課：  
 上課少聞：  
 親師交流：

表現優良：  
 遲到：  
 掃除不認真：  
 服裝儀容不整：  
 缺繳功課：  
 未帶上課：  
 上課少聞：  
 親師交流：

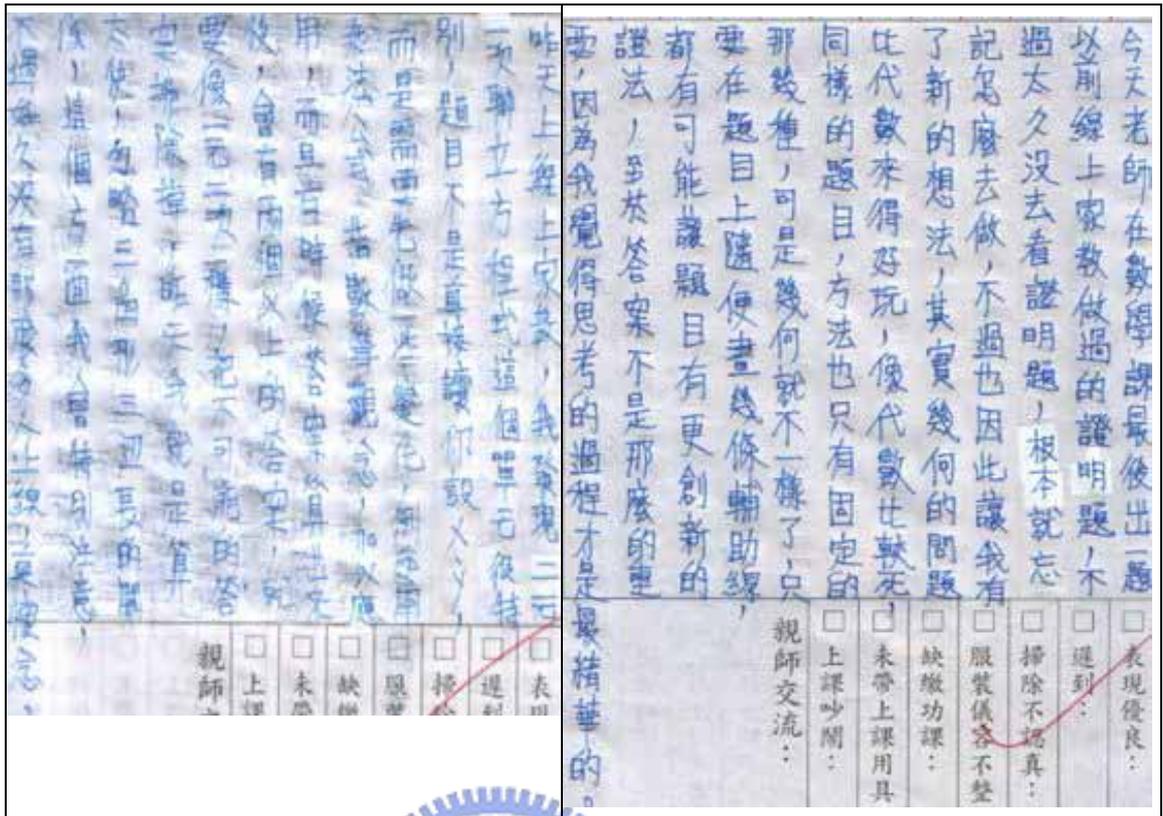


圖 72 學生主動在聯絡簿上的留言

## 2. 社會向度

### 【重要他人對其態度】

該生表示家人並未認為藉線上家教能在數學方面可以更好，但也認為若能培養出對數學的興趣更好。

### 【學生本身的認知】

該生表示若能將問題解決或理解一個概念後，當然很有成就感。並表示一個問題往往會有很多觀念，如果能解決這題就表示那些觀念都懂了。

該生更表示數學是有趣的，能讓其不斷的動腦筋、激盪腦力。對不能立即解出的題目，則認為是種挑戰，讓其有鬥志去算。

對學習數學並不感到緊張、害怕。認為可以激發腦力，也可以和同學一起解出問題。並表示自己有很多想法，每一種都想嘗試。

### 【教師省思】

線上家教對學生學習態度的改變，感受最強烈的就是教學者本身。當學生對數學的學習態度越正向、積極時，教師所得的回饋必然增加，不但對學生的學習有幫助，師生之間的互動也更加熱絡。

在五份問卷中，對於數學的有用性的議題都保持肯定的態度，生活上與購物、消費及身體健康等方面都有談論到(附錄七)。與臧俊維(民

89)〔78〕在數學學習態度量表中「我認為數學對我的日常生活沒有幫助」，分析結果是一般學生認為學習數學對於自己的日常生活沒有幫助是完全不同的。這有部分原因是與數學九年一貫的推動有關係，因強調生活的真實情境，因此學生常會碰觸此類的問題。至於工作上談論到貿易、商科類、統計、建築及程式設計等方面，則是教師無論在課堂上或課餘時間會與學生做此類的分享。譬如程式設計，教師會將自己曾設計的小軟體，讓學生觀察背後的程式，並做解釋，使其瞭解數學在其中所扮演的角色。

#### 4.4 研究者的省思

本實驗進行所使用的重要軟體「JoinNet」，在未與指導教授討論前不曾見過、使用。當與指導教授談論到線上家教這論點時，該軟體已被引進台灣，且在指導教授的說明後，研究者展開了線上家教的研究。本節將分成三部份來說明研究者在進行前的規畫、進行中的改變及進行後的感想，作為有意從事這方面研究或教學的參考資料。

##### 4.4.1 研究者進行前的規畫

###### 1. 工具。

在本實驗研究進行的上半年，研究者即對上一屆的學生進行試驗。然而當時的環境，撥接仍是主要傳輸的方式，因此聲音的傳遞常造成嚴重 lag，更遑論視訊的部份。平板雙用筆記型電腦仍屬高價位（六萬五千元新台幣左右），手寫板價位亦不便宜，因此學生與老師所使用的手寫板大小只有 1.5 吋x2 吋大小，造成書寫及適應上的困難。這兩項硬體設備對研究者所欲進行的研究無疑是重大打擊，所以研究者不得不在試驗中先熟悉操作的環境，等這兩方面硬體的改善。經過半年，寬頻（ADSL 為主）連線價格大幅降價，研究者任教班級的學生，家中裝設寬頻的人數更是達 93% 以上。平板雙用筆記型電腦及手寫板價格亦達到比較平穩的狀態，因此研究者便開始了該項實驗研究。

###### 2. 解題能力評量表。

在分析多位研究者所設計的解題能力評量表，都是以分數做為計分的主要方式。研究者原先也是如法炮製，設計了一份計分方式的解題能力評量表。但和參與實驗的學生及學校其他教師討論時，認為計分似乎太過沉重。尤其教師普遍認為若採計分時，無法將分數作有效區分，當只差 1、2 分時，是不易分辨其差異性的。因此研究者將之改為等級的方式，如此相差一等級，學生及教師都能清楚知道解題能力位於第幾級，

這正和九年一貫國中階段學期評量方式及線上遊戲的等級是一樣的。

### 3. 參與實驗學生人數。

本實驗進行前，原本設定是兩位高成就、兩位中成就的學生。用意是對兩位高成就一同上線上家教，兩位中成就一同上線上家教及交叉進行線上家教的表現情況作分析探討。但在起初的調查，其中一位高成就家中的電腦故障且是撥接連線，因此研究者另找一位中成就的學生。陰錯陽差又多加入一位低成就的學生（31 號），成了五位學生。實驗進行中，研究者對每個學生一對一或一對多的線上教學，讓研究者認為應對低成就但未放棄學習數學的學生多一些關心與幫助，這是原本規畫中未將低成就學生納入所看不到的結果。

### 4. 教材。

教學的規畫，原本全是幾何證明的部份，且當第二次線上測驗結束時實驗即告一段落。但學生表示願意繼續線上家教，正好研究者與鄰近一所學校的教師設計一份作品，因此順勢稍作修改，成為下一階段數型關係的教材。這部份是屬於非例行性的問題，題目上看似輕鬆的數學問題，卻更可看出學生合作學習與頓悟的喜悅，這是一開始未規畫的。

在起初的網頁設計中，研究者將留言板以外掛申請的方式。但在進行的過程中發現因留言板是免費的，因此許多廣告便不斷的張貼，這讓研究者有些擔心，也必須時時刻刻上網檢查並刪除。後來研究者轉而藉此與學生討論廣告內容，讓學生了解其廣告的真實性與不良，並直接給予學生留言板密碼，讓學生自己也可動手刪除不良廣告。

幾何證明最主要是平面幾何圖形，若能將設計完成的動態幾何圖形，透過線上家教，在網路上先由教師針對重點適時移動圖形中的點或線，使學生對圖形改變後，其部份關係跟著改變能有初步的了解，那麼在證明時就比較不易受靜態圖形的誤導。例如下圖，D 點並不一定在  $\overline{BC}$  上，但連高成就的學生都將該點視為是線段上而試圖進行證明。（參考 0624forall [Video](#)）

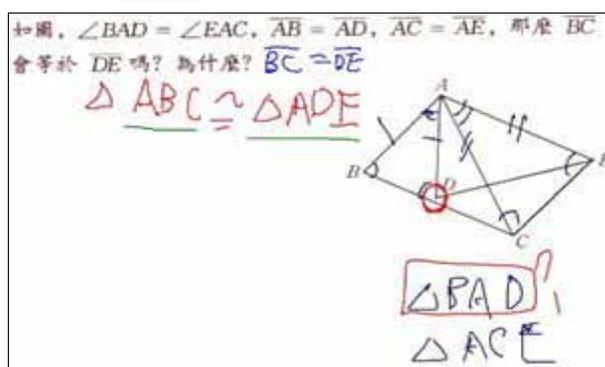


圖 73 學生對靜態圖形的錯誤判斷\_01

可惜的是當實驗研究時，欲利用「桌面共享」來操作動態幾何軟體時，因頻寬的問題，所以學生看到的仍是靜態的圖形。老師對圖形移動的一個動作，學生可能看到的是一張一張圖，如同簡報般的播放，如此是難以達到效果。但研究者曾在學校的兩台電腦上進行該部份的試驗，結果是正常的，主要是因為校內的區域網路，因此可以做到動態畫面的流暢，所以家中的頻寬除非有提昇，否則是很難做到的。

#### 4.4.2 研究者進行中的改變

##### 1. 由學生擔任主持人

原本一直是由教師擔任主持人，經過一段時間發現可以指派一人擔任主持人。因此在兩人以上的線上家教中，研究者即嘗試讓學生擔任主持人的角色。由不同成就的學生擔任主持人的角色過程中，研究者發現仍是高成就的學生比較適合擔任主持人的工作，但仍得受過一些訓練才適合擔任。這讓研究者想起在傳統教室中所進行的分組合作學習，一般都是以異質性來分組，若每一小組的組長未受過擔任組長的訓練，最後的結果往往是成就較高的學生完成任務，成就低的學生好則做做資料、打打字，較不被重視的學生則就呆坐在一旁。因此主持人的訓練如同小組長一樣重要，線上家教中當主持人有問題或教師認為需要協助，則立即介入引導。

##### 2. 教師思維被激發

在線上家教進行中，不但學生的解題能力、合作學習、學習態度都受了正面的影響，就連教師的思維都被激發了。下面三個就是明顯了例子。

(1)第四回 0611for36，「四邊形全等」。原本要將三角形全等性質作複習。一開始與 36 號進行線上家教時，發現學生對三角形全等的性質是了解之後，老師突然想到四邊形，因此提出四邊形全等的相關問題。對老師而言，線上家教與傳統上課有著很大的不同，線上家教老師得重視每個參與者的狀況，適時的介入與引導，不只對學生而言是一項挑戰，就連老師都是一項挑戰、激勵。

(2)第七回 0720E1-1E1-2for0104。該次線上家教與學生分析另一同學的作業時，學生提出一個「線段相等」的看法，老師在討論時立即說明其所提的看法是可以設計成另一道題目。並且由該次的討論，教師獲得一些想法，將題目實地回到課堂上進行教學。研究者更發現雖然參與的五名學生都已經學過，但其討論仍舊相當熱烈。且在老師說明可能還

有另外不同的證明方法時，當天下午放學前即有兩位同學證明出來，其中 38 號是與 36 號合作寫出的(該兩名學生是參與線上家教)，而 34 號則是獨立完成(該生平時即與 36、38 號常作討論、研究)。

(3)第十回 0915test2for38。在 T8 的第 2 小題討論後，再回到該題目討論時，該生又有了第二種證明方式。老師突然由題目中思考到 A、B、H、D 這四點似乎共圓，而向該生提出此疑問，這在原本的教學計畫中是沒有預設的，但和所教學的圓周角是有相關的，因此老師便在想到後即提出。

### 4.4.3 研究者進行後的感想

#### 1. 合作學習的疑慮

研究者之前曾在課堂上進行數次的合作學習，無論是例行性問題或非例行性問題的教學。採取的是男女混合且異質性的分組方式。結果發現高成就的學生無法有效協助低成就的學生，雖然教師所交代的任務達成，但大多是高成就或中成就的學生完成，低成就的學生則幫不上忙。在線上家教中，研究者嘗試讓不同成就的學生擔任主持人，讓高成就的學生說出自己解題的想法，解釋如何找出關鍵的部份，藉以讓中、低成就的學生也能了解高成就學生的思考模式。

#### 2. 線上家教檔案再製作

線上家教的進行主要是透過 JoinNet 軟體，該軟體可錄製上課進行中的一切。研究者曾將 0722E1-2from38\_1 中 38 號所嘗試的四種解題方式在課堂上播放，與學生進行討論，再將 0723E1-2from38\_2 該生的正確解法作結論。

#### 3. 檔案保存，回顧中意外的發現

線上家教的進行是即時、雙向互動的。對學生而言，因未實際與教師面對面，所以心中的負擔自然減少，比較敢於發言。但對教師則不盡然，學生的想法一拋出，教師必須立即思索並做出有助學生的判斷。如一次線上家教中，01 號所寫的答案，教師提出質疑，而該生做了部份說明，在當時是認為錯誤。但在事隔一年後，當教師再度觀察到此題檔案，才發現原來該生的答案是另一種解法。若非線上家教檔案的保存，研究者還不知有這解法呢。(參考 0814patternlforall [Video](#))

另一次則已描述在 4.2.1 學生解題能力的表現情形，針對 31 號的教師省思中，於此不再贅述。

#### 4. 直觀證明的擔憂

學習數學的過程中，學生常會用直觀解題，也就是猜測後的證明，有時正確、有時錯誤，這和林文恭(民91)〔79〕所做的研究是一樣的。例如代數中 $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$ 是正確的，但 $a \div (b+c) = a \div b + a \div c$ 則是錯誤，在破除迷思概念時，以舉例子是最容易的。但在幾何證明中，困難卻是重重，有些題目中中間過程單靠直觀判斷不加證明，亦可完成整題的證明，如圖74。(參考 0724E1-1E1-2from01 [Video](#))

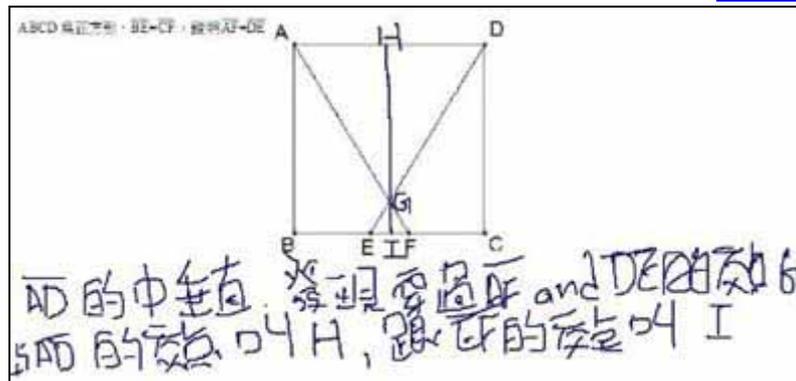


圖 74 學生對靜態圖形的錯誤判斷\_02

有些直觀的判斷，是須經由原題目求證後才會有的結果，如圖75、76。(參考 0617from38\_1 [Video](#) ; 0716test1from36 [Video](#))

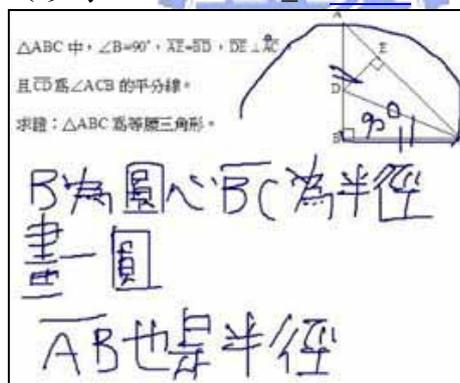


圖 75 學生對靜態圖形的錯誤判斷\_03

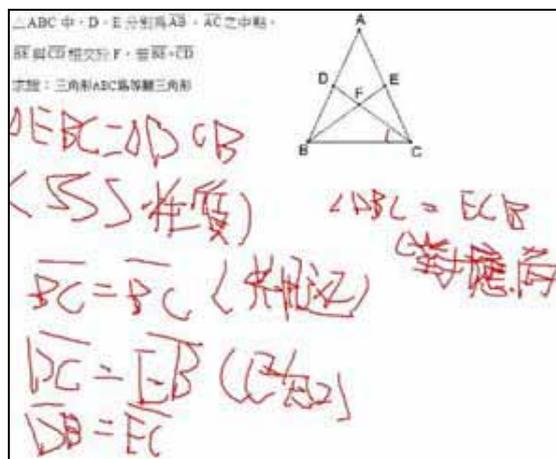


圖 76 學生對靜態圖形的錯誤判斷\_04

有些則是直觀上的誤判，導致證明過程是有錯誤的，如圖 73。（參考 0624forall [Video](#)）

因此，若進行教學時，透過線上家教，同時開啟設計完成的動態幾何進行輔助教學，研究者認為是可以協助學生改善學生錯誤的想法。只可惜研究者進行研究時，礙於頻寬，無法有效的使用。

