

國立交通大學
運輸科技與管理學系碩士班

碩士論文

以電路模擬演算法決定
非線性成本之交通指派問題

The logo of Tsinghua University is a circular emblem with a gear-like border. Inside the circle, there is a stylized building and a banner with the year '1896'.

Determining the Traffic Assignment Problem
with Non-linear Cost Functions
by Circuit Simulation Algorithm

研究生：鄭兆哲

指導教授：黃寬丞 博士

中華民國九十八年七月

以電路模擬演算法決定
非線性成本之交通指派問題

**Determining the Traffic Assignment Problem
with Non-linear Cost Functions
by Circuit Simulation Algorithm**

研究生：鄭兆哲

Student: Chao-Che, Cheng

指導教授：黃寬丞

Advisor: Dr. Kuan-Cheng, Huang



A Thesis

Submitted to Department of Transportation Technology and Management
College of Management
National Chiao Tung University
in partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master
in
Transportation Technology and Management

July 2009

HsinChu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十八年七月

以電路模擬演算法決定 非線性成本之交通指派問題

學生：鄭兆哲

指導教授：黃寬丞 博士

國立交通大學

運輸科技與管理學系 碩士班

摘要

交通指派問題是運輸規劃的一項重要工作，其決定各起訖點旅行者的路徑選擇以及交通路網系統的流量。在使用者均衡的條件下，任何一起訖點對所使用路徑的旅行成本皆相同。使用者均衡流量與一般電路有許多相似的特性，像是電流值可視為交通流量，而電壓值則可被比擬為旅行成本。基於「讓電子來模擬旅行者」的構想，本研究藉由純電阻電路問題的遞回運算來求解交通指派問題。然而路段的成本函數多為非線性，而純電阻所適用的歐姆定律則是線性，這兩者之間的關係則為本研究之重點之一。本研究以三個路網為測試例題，結果顯示就遞回次數與目標值電路模擬演算法的結果都較優於 Frank-Wolfe 演算法。因此電路模擬演算法應可作為一個基礎來達成本研究終極的目標—在積體電路內構建一系統來模擬實際的大型交通路網。

關鍵字：交通指派問題、使用者均衡、電路模擬

**Determining the Traffic Assignment Problem
with Non-linear Cost Functions
by Circuit Simulation Algorithm**

Student: Chao-Che, Cheng

Advisor: Dr. Kuan-Cheng, Huang

Department of Transportation Technology and Management
National Chiao Tung University

Abstract

As a key process for urban transportation planning, the traffic assignment problem (TAP) determines the route choice of the travelers for each origin-destination pair and the traffic flow of the network system. Under the user equilibrium condition, the travel costs of the chosen routes are identical for each origin-destination pair. The resulted user equilibrium flow bears significant resemblance to an electronic circuit. In particular, if electrical current is viewed as traffic volume, voltage drop can be thought as travel cost. Based on the basic idea “let the electrons simulate the travelers,” this study establishes a solution algorithm for TAP by iteratively solving the associated pure-resistance circuit problem. However, most of link cost functions are non-linear, but Ohm’s law applicable to pure-resistance components, is a linear relation between current and voltage. How to correlate this two is a key question of this study. The results in the numerical experiment with test networks show that the developed algorithm is better than Frank-Wolfe Algorithm in terms of the number of iterations and the objective function value. Thus, the circuit-simulation approach can be used as a building block to achieve the ultimate goal, building a system in an integrated circuit to simulate the actual large-scale traffic networks.

Keywords: traffic assignment problem, user equilibrium, circuit simulation

誌謝

「要謝的人太多了，不如就謝天吧。」本來想寫這樣交代完誌謝，但內心突然一股感慨，在交大五年來，想做的事情太多，想說的事情太多，未完成的也太多，如果僅以一句謝天來帶過，可能不足以表達我內心的感受，於是，就寫吧。

這篇論文得以完成，除了感謝我的恩師黃寬丞老師以外，亦要感謝負責口試的黃家耀老師與許巧鷹老師。而撰寫論文的過程中，更要感謝黃寬丞老師、黃家耀老師以及卓訓榮老師的諄諄教誨，讓我得以更加了解研究問題的本質以及研究的方向，更重要的是讓我更加了解做人處事的道理。

同時也要感謝實驗室的學長展宗，實驗室同學智翔、景堯、郁英，以及學弟丞博，另外像是蕭仔、強翰、老總、阿尼機…等其他實驗室太多太多的好友們(舉都舉不完啦)，感謝你們豐富了我在研究以外的生活，讓我的研究所生活真的可以用「笑到流淚哭到趴」來形容，這是我從來都沒想過的。

同時我也要感謝在高雄、屏東、新竹支持我的家人們，感謝你們精神上的支持，亦要感謝老哥與室友們在程式語言與課業上的大力相助，雖然不甘心，但真覺得你們有夠強的。還有我的國中高中大學朋友們，以及轉聯會的朋友、學長姐、學弟妹們也都陪我度過許多歡笑的時光，感謝你們！也祝福你們都能完成自己的夢想。

同時也要感謝許多讓我受到挫折的人們，有你們的無理與偏見，才能讓我更看清這個社會，更看清楚做人的道理。雖然我可能無法親自讓你們知道我內心的感受，但也許有那麼一天，你們將會改變你們的想法而認同我。

想想我只是一位名不經傳的轉學生來到這個新的環境，在這個環境一待就是五年的歲月，如今我終將離開這環境，並到另一個新環境重新開始。這一路上帶領我成長、陪同我一起度過關卡的人實在太多太多了，除了對他們感到深深感激外，而翻閱到這裡的你，我想也是我要感謝的一個人吧。

鄭兆哲 謹誌於

交通大學運輸科技與管理學系 KC-LAB

2009年7月20日

目錄

中文摘要.....	iii
英文摘要.....	iv
誌謝.....	v
目錄.....	I
表目錄.....	II
圖目錄.....	III
一、 緒論.....	1
1.1 研究動機與目的.....	1
1.2 研究主題與架構.....	2
二、 問題模式與相關研究.....	4
2.1 使用者均衡.....	4
2.2 路段成本函數與歐姆定律.....	5
2.3 交通指派問題與電路的相關性.....	7
2.4 交通指派問題的數學模式.....	8
2.5 交通指派問題的演算法回顧.....	9
2.6 電路模擬交通指派問題之文獻回顧.....	11
三、 電路模擬演算法.....	13
3.1 FRANK-WOLFE 演算法.....	13
3.2 電路模擬求解使用者均衡.....	14
3.2.1 子路網系統之電路模擬演算法.....	15
3.2.2 CSA-Sub 逼近與收斂-以一個簡單路網說明.....	18
3.3 路網系統之電路模擬演算法.....	22
四、 數值測試.....	25
4.1 小型田字路網的數值測試.....	25
4.2 中型路網的數值測試.....	27
4.3 大型路網的數值測試.....	31
4.4 誤差分析.....	34
五、 結論.....	35
參考文獻.....	37
附錄一、SIOUX-FALLS NETWORK 路網結構.....	39

表目錄

表 2-1 路網問題與電路的相關特性	8
表 3-1 單一起訖對路網的電路模擬演算法計算結果	20
表 3-2 FWA 與 CSA-SYS 之比較	24
表 4-1 田字型測試路網的起訖點對需求矩陣	26
表 4-2 田字型測試路網的路段成本函數	26
表 4-3 田字型測試路網遞回次數與目標函數收斂情形	27
表 4-4 中型測試路網的路段成本函數	28
表 4-5 中型測試路網遞回次數與目標函數收斂情形	29
表 4-6 中型測試路網 29 條路段的流量與時間成本	29
表 4-7 中型測試路網起訖對 2 到 3 的使用路徑成本比較	30
表 4-8 中型測試路網 FWA 與 CSA-SYS 遞回過程的 k 收斂條件值	30
表 4-9 SIOUX-FALLS NETWORK 的遞迴次數與目標函數收斂情形	31
表 4-10 SIOUX-FALLS NETWORK 的路段流量與時間成本	32
表 4-11 更變 SIOUX-FALLS NETWORK 擁擠情境之比較	33
表 4-12 達到均衡解時 CSA-SYS 與 FWA 的路段流量(部分)	34

圖目錄

圖1-1 研究流程圖	3
圖2-1 單一起訖點對雙路段路網示意圖	5
圖2-2 單一起訖點對雙路段路網成本函數關係圖	5
圖2-3 美國道路局的路段成本函數(BPR Function)	6
圖2-4 利用電子元件分段線性逼近為非線性之成本函數	12
圖3-1 子路網系統示意圖	15
圖3-2 雙曲線逼近成本函數示意圖	18
圖3-3 單一起訖對雙條路段的路網	19
圖3-4 以電路模擬單一起訖對路網示意圖	19
圖3-5 CSA-Sub遞回過程逼近成本函數交點示意圖	21
圖3-6 電阻收斂行為示意圖	21
圖4-1 多重起訖點且擁有雙向路段的田字型測試路網	25
圖4-2 田字型測試路網模擬成電路時的結構	26
圖4-3 多重起訖點的電路模擬演算法中型測試路網	28

一、緒論

1.1 研究動機與目的

近年來由於都會區發展與交通建設的持續進行，運輸網路也相對越來越複雜，相關的運輸規劃(Transportation Planning)問題因而受到高度的重視，而其中最為人所知便是都市運輸模式系統(UTMS)。都市運輸模式系統可用於預測工作旅次和非工作旅次的產生、進行旅行時所選擇的運具以及在運輸路網中選擇的路徑，其最終目的在估計路網中各路段上的流量。都市運輸模式系統可以利用以下四個步驟來說明：

1. 旅次產生(Trip Generation)，是指將整個路網分成許多個區塊，並且由這些區塊作為產生旅次的起點或是作為旅次的訖點。
2. 旅次分配(Trip Distribution)，是指各區塊間形成一對起訖對(origin-destination pair, 簡稱 O-D)間之運量。例如，由區塊 i 出發往區塊 j 的流量可以 Q_{ij} 表示。
3. 運具選擇(Mode Choice)，考慮每一對起訖點在運輸活動可以選擇使用的運輸模式，例如使用運具 m ，其對應流量可以 Q_{ijm} 表示。
4. 交通指派(Traffic Assignment)，考量各起訖點與各運具之路徑(path)來分配旅次的計劃過程。其核心問題在於探討旅行者在某一路網中，會如何從起點選擇適合的路徑到達目的地。若以 k 來代表到達訖點的路徑之一，其對應流量可以 Q_{ijmk} 表示。

由於現在的交通路網非常複雜，對於旅行者來說，如何以最少的花費由出發地到達目的地就變成很重要的課題。同時，就政府而言，瞭解因旅行者行為以及其所造成的路網系統狀態，也是一個非常重要的課題。例如，若某條道路因施工即將要被封閉起來，對整個交通路網的衝擊將如何？決策者將如何預測並因應所導致的車輛流量變動？甚或，道路興建或拓寬的工程應該如何規劃，才能有效地運用有限的預算？上述問題的解決都與交通指派問題有密切的關係。

以目前的分類來說，交通指派問題可分為靜態規劃與動態規劃；需求產生也可分為固定需求和隨機需求兩種。靜態規劃大多利用在長遠長期的規劃上，蒐集當下與歷史的資料來預測未來的需求，設計適合未來都市成長的道路網或道路容量；動態規劃大多利用在即時系統，像是 ITS 等，用於給予使用者即時的資訊了解道路狀況。

在眾多旅行者路徑選擇與交通路網流量的模式中，使用者均衡(User Equilibrium, UE)與系統最佳化(System Optimization, SO)是最基礎的靜態交通路網指派模式。在使用者均衡條件下，旅行者選擇對自身而言成本最低的路徑，而在所形成的均衡路網中，任何一起訖點對所使用路徑的旅行成本皆相同；而在系統最佳化中，旅行者選擇對整體路網而言成本最低的路徑，而在所形成的路網中，整個路網的總合成本將會是最低的，一般而言系統最佳化用於政府管制交通流量，來使整個路網的社會成本降到最低。

其實我們不難發現路網中的交通流量與自然中一些物理現象相似，像是水流、電流等，無論是渠道中的水流或是電路中的電流，它們都遵守著流量守恆，也都有起點與訖點之分。讓我們有興趣的是，這些自然現象真的可以應用到我們的交通路網指派問題中嗎？很幸運的，我們發現了一般電路與使用者均衡有許多相似之處，最直接的就是電路中電流會依照壓降來選擇路線，而不管電流選擇電路中哪條路徑它們的壓降一定都會相同，這個行為與使用者均衡極為相似。

因此本研究著重在使用者均衡和一般電路的特性，但我們知道電路中主要以線性的歐姆定律來決定電流與電壓，這和交通路網中的道路容量有很大的差異。因為道路的流量會受到容量的影響而擁擠，且成本與流量的關係通常不是線性的。過去曾有學者使用積體電路和二極體來製作出非線性的流量與電壓之關係，但它已經失去了純電阻電路的精神，並不是我們所想要的。因此如何將線性的歐姆定律反映到非線性的路段成本函數上也是本研究的議題之一。

1.2 研究主題與架構

本研究以交通路網指派問題中的使用者均衡為基礎，並參考過去利用電路模擬交通路網的問題，發展電路與交通路網之求解方法。首先蒐集目前交通路網指派之相關研究與電路應用於交通指派之研究，瞭解本研究之架構；接著根據問題的特性發展本研究演算法以及子問題之演算法；最後利用數值測試來試算演算法的效用。本研究之研究流程如下(圖 1-1)：

(一) 問題定義

瞭解使用者均衡的特性與電路之間的關係，並從中找尋異同處。本研究試著利用最簡單的電路來找尋電路與路網的關係，充分利用電阻、電流與電壓來表示交通路網中的參數。

(二) 文獻回顧

探討過去經典的交通路網指派問題演算法，並試著追溯靜態交通路網指派問題之研究發展。另外我們對過去曾經使用電路的概念模擬交通路網的主題加以回顧，以進一步瞭解電路是如何用於交通路網指派問題上。

(三) 模式建構

本研究欲發展一類似於過去用來交通指派問題之經典演算法，並將電路的特性加入演算法中。試著以量測電路的角度來求解問題。

(四) 數值測試

我們提供三種不同的交通路網來測試我們的演算法，證明其模式之正確性。同時我們也設計了一些情境來使演算法更加可靠。

(五) 結論與建議

將研究結果作歸納以及分析，並提供研究後續可行方向之建議。

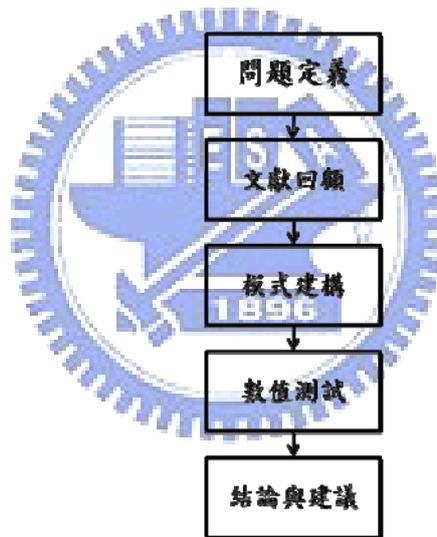


圖 1-1 研究流程圖

二、問題模式與相關研究

本章分成兩部分，首先就使用者均衡的問題模式加以說明，並對路網成本函數與電路的關係以及路網結構與電路的關係做進一步的說明；接著介紹路網問題的數學模式與其文獻回顧，最後回顧使用電路求解應用於交通路網問題的研究。

2.1 使用者均衡

在一個路網中，每個旅行者都有自己的起點與訖點，而每對起點與訖點間都可能存在多條路徑可以選擇。假設旅行者在選擇路徑有完全資訊時，自然會選擇對自己耗費的時間(或成本)較少的路徑。若從道路的觀點來看，一般來說路段上的旅行時間都是和路段的使用者數量成正比的，倘若越多使用者選擇某條特定的路徑，那麼該路徑的所有路段便會發生塞車的現象，也就是越多人選擇這條路徑，這條路徑的旅行成本將會越來越高，最後導致使用者選擇其他旅行成本較低的路徑。

使用者均衡的定義為：對路網中任一對起訖對，在使用者均衡的狀態下時，起訖對使用任意一條路徑的旅行時間都要相同，且旅行時間都要比該起訖對任一未使用的路徑都還要低(或是相同)。

這定義表示在使用者均衡的狀態下，路徑的使用者可以分成兩類，一種是若此路徑有被使用，則所有有使用的路徑的旅行時間都要相同；另一種是若此路徑沒有被使用，那這條未使用的路徑的旅行時間一定比有使用的路徑長(或相同)。

使用者均衡的概念被廣泛地應用在運輸規劃上，規劃者可將道路使用者的行為假設為使用者均衡，如此一來便可大致地了解道路使用者在現有路網中旅次將會如何分配，或是未來旅次產生增加時對現有道路帶來的衝擊；更普遍地是規劃者能夠知道路網中若增加新的道路或是將現有道路擴寬，對系統中所有道路使用者將會如何改變分配。

以圖 2-1 一個起訖對(O-D pair)二個路段之路網為例，若以 t_1 與 t_2 分別代表路段 1 和路段 2 的旅行時間， x_1 與 x_2 代表該路段上之交通流量， q 為該起訖點的總流量，則關係式 $q = x_1 + x_2$ 且 $t_1 = t_2$ 必須滿足。一般而言，各個路段可以用一成本函數來描述流量與旅行時間的關係(成本函數我們將在 2.2 有更進一步的說明)。例如，圖 2-2(a)繪製出了路段 1 與路段 2 的旅行成本函數的曲線，顯示路段 1 與路段 2 的流量分別為 x_1 及 x_2 時，並顯示在均衡條件下其起訖對間的旅行時間皆為一特定時間 t 。另外，圖 2-2(b)繪製出合併考量路段 1 與路段 2 的旅行成

本函數。由其中可以發現，當起訖點流量小於 q' 時，僅有路段 2 會被使用；然而，當起訖點流量大於 q' 時，則二個路段均會被使用，且不同路徑（在此例恰好即為路段）的旅行時間皆相同，這個現象也就是著名的 Wardrop Principle (Wardrop, 1952)。

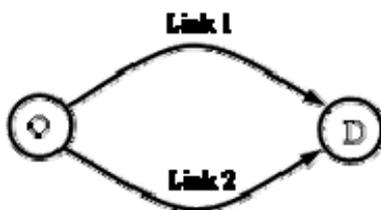


圖 2-1 單一起訖點對雙路段路網示意圖

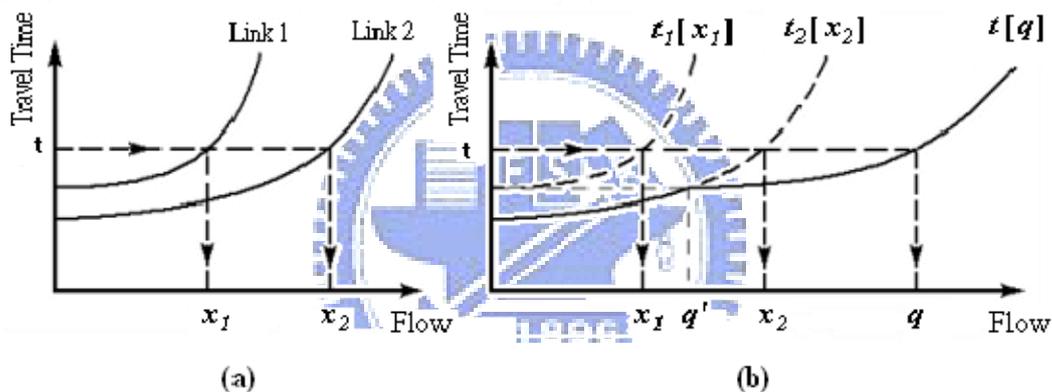


圖 2-2 單一起訖點對雙路段路網成本函數關係圖

上圖 2-2(a) 可以輕易地看出兩條不同的路段成本函數，以及他們合併後的系統成本函數(2-2(b))，藉此可以看出在使用者均衡下使用者選擇路徑所花費的旅行成本。但是使用繪製圖的方式卻無法求解大型的路網，在這些大型路網中，起訖對的路徑數量都相當龐大，以至於難以去計算所有路徑的合併成本或是繪製成本函數圖，更是難以去計算出路網中其他起訖對的影響 (Sheffi, 1985)。

2.2 路段成本函數與歐姆定律

路段的成本函數，通常表示為一種旅行的”抗阻”(impedance)，或是表示成服務等級，其中可能包含了許多因素，像是旅行時間、旅行安全性、旅行花費、舒適度...等，一般來說，旅行時間是路段最主要的抗阻，因此路段的成本函數通常是表示路段的旅行時間。旅行時間的長短通常與路段上的流量有關，我們便會將

成本函數表示為 $t_a(\omega)$ 或 $t_a(x)$ ，其中 t 為旅行時間，下標 a 表示某 a 路段，而 ω 或 x 則是指在 a 路段上的流量。在路段上完全沒有流量時，我們會以一個自由車流速率所花費的時間來表示該路段的固定成本；倘若流量增大，旅行的時間會相對的比較長，因此旅行時間和流量是一個正相關的關係，應為一個嚴格遞增函數；又因為道路有一定的容量，只要流量達到道路容量，那麼路段上的旅行成本都將會爆增，甚至是幾乎無法動彈。

成本函數的表示方式通常是滿足以上三種特性而發展出許多不同的類型，其中又以美國道路局(U.S. Bureau of Public Roads) 所發展的的路段成本函數(簡稱 BPR Function)：

$$t_a(x_a) = T_a \times \left(1 + 0.15 \times \left(\frac{x_a}{C_a}\right)^4\right) \quad (1)$$

最廣被使用，如下圖 2-3 所示，本式中 T 表示路段的固定成本， C 表示路段的容量。當流量 x 小於容量 C 時，路段的成本會隨著流量的增加而漸增；只要流量 x 超過容量 C 時，路段的旅行成本便會以接近 4 次方的速度急遽成長，造成旅行成本開始劇烈遞增加；若流量遠大於容量，則旅行時間將劇烈地被放大，造成幾乎動彈不得的成本(Sheffi, 1985)。

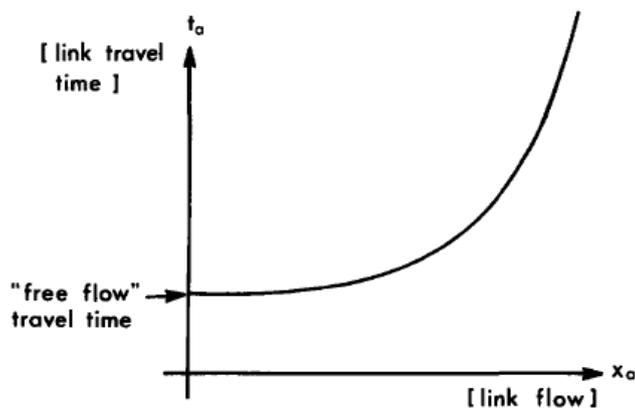


圖 2-3 美國道路局的路段成本函數(BPR Function)

BPR Function 我們可以將其簡化成一個簡單的四次方式： $a + bx^4$ ，其中 $a = T$ 表示路段的固定成本， b 表示一個與道路容量和固定成本有關的參數(2)若道路容量越大則此參數 b 將會越小。這只是簡單的參數轉換技巧，而我們在後來的範例中也將會使用這種技巧來簡化 BPR Function 的型式。

$$b = \left(\frac{0.15 \times T}{C^4}\right) \quad (2)$$

然而在電路中也有類似”抗阻”的概念。電路中的電阻在電壓固定時，電阻越大所流經的電流將越小，這就表示電阻的值如同電流的”抗阻”般，影響電流所選擇的”路段”。舉例來說，在相同電壓降的一組電路，電流若有兩條不同電阻可選擇流過，那麼電阻大的必將流過較少的電流，反之電阻小的必將流過較大的電流。如此”抗阻”的特性與路段成本大的路段將有較少流量經過，路段成本小的路段將有較多的流量經過相似。而電子元件之電阻特性中，最簡單也最常被使用的便是歐姆定律，該定律表示電阻(R)為電壓(V)除以電流(I)的比值($R=V/I$)，對電流和電壓而言是一條線性的函數。

但根據上述的特性，我們可發現路段成本函數大多是一個非線性的函數，且函數不會通過原點；歐姆定律則不同，它必為一個線性的函數，且函數一定會經過原點，因此成本函數與歐姆定律依然存在著差異性，成本函數與歐姆定律的關係也是本篇論文的重點之一。

2.3 交通指派問題與電路的相關性

從上述抗阻的觀念中我們可以發現交通路網與電路原本就有許多結構上的相似性，路網與電路網中都有節點與節線，路網流量與電路也都必須遵守流量守恆的限制。除此之外，前述交通指派問題的使用者均衡性質與電路還有其他更重要的相關性，說明如下：

1. 在簡單的並聯的電路中，電流分配於各個分支電路，而兩端的電壓相同，與圖 2-1 所示的使用者均衡條件類似。
2. 在一般的串並聯混合電路中，除了各個節點滿足流量守恆外，總電壓降為各端點壓降之加總，即類似路徑總旅行時間為所經過路段旅行時間之加總；起訖點間不同路徑之電壓降的總合，均等於起訖點電壓與訖點電壓之差值，類似交通路網在使用者均衡條件下，各路徑的旅行時間必須相同。

基於上述相關性，本研究以一基本構想「讓電子來模擬旅行者」發展了一演算法，並採用純電阻電路，將流量視為電流、旅行時間視為電壓、路段視為電阻，藉由相關電路問題的遞回運算來求解交通指派問題。為了讓讀者有先一步的概念，以下我們將路網與電路相關的類似特性整理成下表 2-1。

當然，電子與旅行者間、交通網路與電路間仍存在著相當多的差異性，若欲以電路模擬來求解交通路網的問題依然存在許多困難需要克服，這也是本研究主要之核心議題。

表 2-1 路網問題與電路的相關特性

路網	電路
可以節點、節線製圖 並遵守流量守恆	可以節點、節線製圖 並遵守流量守恆
路段	電阻
路段的使用者流量	電阻上的電流
路段的旅行成本	電阻兩端的電壓差
路段的成本函數*	電阻上的電阻值
起點、訖點	直流電流源、接地線
起訖點需求	直流電流源大小
起訖點旅行時間	系統總電壓
遵守使用者均衡	遵守總電壓相同

*註：電阻相似於成本函數不表示電阻就是代表成本函數，

只表示電阻可以有相同的特性可以因為改變大小而讓電流跟著改變大小

2.4 交通指派問題的數學模式

交通路網指派問題主要是要找尋在給定的路網、起訖對流量以及路段成本函數中，求解出路網內各路段的流量。自從 Wardrop 提出使用者均衡後，交通路網指派問題就被簡化為求解使用者均衡流量的問題，從第一章的第二節裡我們可以藉由繪圖的方式找出使用者均衡流量，但卻不能求解大型路網(多個節點、節點與起訖對)的使用者均衡流量，直到後來 Beckmann et al.(1956)對使用者均衡建立了第一套數學模式之後，接著也有發展許多不同類型的數學模式來表示使用者均衡。我們採用 Beckmann et al.所建立的模式，將前述交通指派問題的使用者均衡流量用以下的數學規劃模式來表示(Sheffi, 1985)。

$$\min z(\mathbf{x}) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega) d\omega \quad (3)$$

$$\sum_k f_k^{rs} = q_{rs} \quad \forall r, s \quad (4)$$

$$x_a = \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs} \delta_{a,k}^{rs} \quad \forall a \quad (5)$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall k, r, s \quad (6)$$

其中：

a ：路段編號，路網中不同的路段給予不同的編號，若兩節點間連結兩條方向不同的路段則給予不同的路段編號。

x_a ：路段 a 上的流量(\mathbf{x} 為所有路段流量所形成的向量)

$t_a(\omega)$ ：路段 a 在流量為 ω 時所需的旅行成本(如時間)

q_{rs} ：O-D 起點 r 至訖點 s 的流量

f_k^{rs} ：O-D 起點 r 至訖點 s 在路徑 k 上的流量

$\delta_{a,k}^{rs}$ ：二元參數，1 代表起點 r 至訖點 s 的路徑 k 包含路段 a ，否則為 0。

目標式(3)為各個路段流量下成本函數的積分式總合，該式並無經濟上的直接意涵，但在極小化的目標下，滿足限制式(4)到(6)的流量，即為使用者均衡流量。限制式(4)為起訖點流量守恆限制，即每對起訖點流量為分配在各路徑上流量之總合。基於目標式(3)係以路段流量來表示，代表流量守恆(或者需求滿足)的限制式(4)係以路徑流量來表示，限制式(5)適當將二者加以連結，確保各個路段流量為所有起訖點流經該路段之路徑流量的總合。限制式(6)確保規劃式結果符合物理意義，即流量不為負值。值得注意的是，雖然模式使用各條路徑的流量做為變數，但實際上對於大型之網路，並無法窮舉出所有路徑，因此許多演算法(包含後述本研究所發展之電路模擬演算法)並不直接對路徑流量求解，主要的決策變數仍為路段流量。

2.5 交通指派問題的演算法回顧

電路中遵守電壓的相同的特性與路網之使用者均衡相似，而到目前為止，對使用者均衡的解題研究主要可大致分為三類：以路段為基礎的解法(Link-based)、以路徑為基礎的解法(Route-based)與以起訖點為基礎的解法(Origin-based)等三種(Bar-Gera, 2002)。

利用路段流量來求解交通指派問題之使用者均衡流量是最早期發展，也是最廣泛被使用的方法，其中利用拆解得子問題並修改成本函數來求解為最簡單易懂的作法。這類型的模式在早期發展出許多的求解方式，像是容量限制法(Capacity Restraint)、漸增法(Incremental Assignment)以及後來最廣被使用的 Frank-Wolfe

演算法(Frank-Wolfe Algorithm, 以下簡稱為 FWA)等。但無論是上述何種演算法, 因為都必須將主問題拆解成子問題, 而在子問題的過程中都必須求解最短路徑問題(Shortest path problem)。

儘管Frank-Wolfe演算法所需要的記憶體很少, 起始的收斂速度也很快, 但它收斂的特性並不好, 因此在1960年後許多人開始發展一些啟發式解法來修正Frank-Wolfe演算法的收斂性。例如Fukushima (1984) 找尋凸性組合(Convex Combination)之當前解; LeBlanc et al. (1985) 利用PARTAN的技巧與一些啟發式的方法改變FWA之收斂特性, 這些方法從FWA中方向搜尋的部分來改善, 皆不需要增加太多的記憶體空間便可大幅地改善FWA的初始收斂效果。Weintraub et al. (1984) 提出一啟發式解法來改善搜尋步幅, 以彌補改善收斂方向之不足。而近年來Gao et al. (2004)從全域收斂的方向著手, 提供一非單調的線性搜尋演算法來求解均衡指派問題。這些修正法基本上都是以FWA為架構, 因此都必須在子問題中找尋最短的路徑。

以路徑為基礎的研究通常求解效果會比以路段為基礎的求解效果還要好, 收斂速度也相對地快很多, Larsson and Patriksson (1992)提出以路徑為基礎的解法, 利用變數產生法(Column Generation)對路徑求解均衡流量。雖然這個方法相對於FWA快速也收斂也較好, 但是路網中路徑實在太多, 導致演算法所需的記憶體相當龐大, 這也是以路徑為基礎的演算法最令人詬病的部分。後來由於電腦技術的進步, 記憶體空間增大, 以路徑為基礎的求解方式逐漸受到重視, 也開始有改良的方式, Jayakrishnan et al. (1994)便提供了新的資料結構來處理路徑儲存的問題, 並建立一快速完成路徑為基礎問題的演算法; 近年來Dial (2006)繼承路徑為基礎之演算法的優勢, 發展利用演算法B(Algorithm B)來求解路徑為基礎的使用者均衡問題, 並証實它能夠比Jayakrishnan et al.使用較少的記憶體容量, 且計算速度亦較快。

而近年來最大的突破是由Bar-Gera (2002)結合路段為基礎與路徑為基礎之解法的優點, 提出以起訖點為基礎之解法。它利用路網在均衡流量下特定一起點的子路網其路段流量不會產生迴圈(acyclic)的性質, 並試著組合出一個正確的無迴圈的路網, 並利用半牛頓演算法(Quasi-Newton algorithm)來轉移與消除路段中多餘的流量, 不僅計算路段上的流量, 同時也記錄流量所經過的節點。以起訖點為基礎之解法對許多標竿路網例題的數值測試是FWA到當年以來最好的, 它甚至對許多大型的路網都能夠快速地得到精確的解答。

後來Xu et al. (2008)改善以起訖點為基礎的演算法來解決CDA (Combined Distribution and Assignment)問題，改良原始演算法中更新流量的部分，得到較原始之演算法收斂效率更好且更快的結果。

若要更加了解交通指派問題的模式與求解方法，可參考Patriksson (1994)及Bell and Iida (1997)等人之著作以及Patriksson (2004) 或是Boyce (2007)等都有一系列詳盡的介紹。

近年來研究大多偏向以路徑為基礎以及以起訖點為基礎的研究。本研究試圖跳脫傳統的解題方法，利用電路以及量測的概念來解使用者均衡問題，本質上雖然屬於路段為基礎的演算法類型，但融合了許多電路固有的特性以利未來實作於電路上。因此本演算法不僅繼承了FWA概念簡單與紀錄路段流量的優點，同時也擁有電路本質上的優點。

2.6 電路模擬交通指派問題之文獻回顧

根據文獻已有數位學者利用電路的觀念來求解交通指派問題。例如早期，Sasaki and Inouye (1974)根據「電流—交通流量」與「電壓—旅行時間」的類比關係，並將通過節點的時間(node passing time)納入考量，利用電路學的歐姆定律(Ohm's Law)，求解交通指派問題，然而，其求解方法僅適用於單一起訖點之問題，且路段流量與成本之間的關係必須是線性；近代Wang and Zhang (2005)根據克希赫夫定律(Kirchhoff Law)建立一套非線性的系統來計算 TAP 中的使用者均衡，而這個非線性的最適問題是由數學軟體 MATLAB 來求解，並與漸增法(Incremental assignment)比較結果，由於該研究是依賴數學軟體來解題，並沒有強調其演算法對於解 TAP 的效用，因此是否能夠合適地解大路網問題依然未知。

之後，Cho et al. (2006)利用電子元件（直流電壓源、二極體、電阻等）的組合，以分段線性逼近(piece-wise linear)的方式，也就是將某路段非線性的成本函數利用電阻與二極體來分成數條線性的成本函數，將線性的歐姆定律以數段的方式結合成非線性的成本函數(如圖 2-4)，利用此電子元件所組成之電路，直接模擬計算電流與電壓，將結果視為成本函數中流量與時間的關係，以求解較為一般性的交通指派問題。雖然他們使用了電路模擬的概念來解決交通路網指派問題，但在面臨大型路網或真實路網仍舊有許多障礙，首先是對非線性函數作分段線性逼近的考量，再者二極體在現實世界中必須有 0.5~0.6 伏特的啟動電壓，若要組成大型路網則會有相當大的負荷。

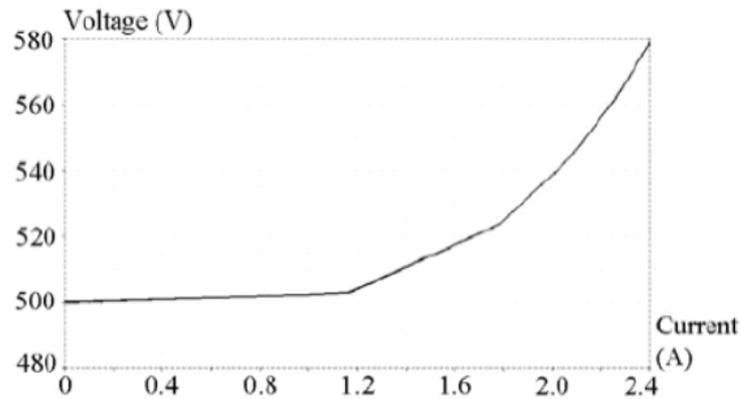


圖 2-4 利用電子元件分段線性逼近為非線性之成本函數

後來Huang et al. (2007) 延續上述研究成果的基本精神，但選擇僅以純電阻 (pure-resistance) 電路進行模擬以及發展類似於FWA之架構。雖然滿足歐姆定律的純電阻電路理論上僅適合線性的成本函數，但透過遞回修正電阻值的方式，可以用來逼近非線性的成本函數。他們不以電子元件直接近似成本函數的原因主要在於該方式需要使用許多大型積體電路元件，這些元件組合起大型路網通常會超過電路的電壓負荷，在未來發展大型模擬電路時的困難度較高。

但Huang et al. (2007)的演算法仍有許多限制。透過數值的測試，我們可發現該演算法在路段流量大於路段容量好幾倍的時候，電路解的流量會造成震盪而不收斂；倘若要將演算法應用到多起點對單訖點一樣也會造成震盪不收斂的情形，故可能無法求解大型的路網。因此若要採用實體電路來進行測量時，也可能會發生許多潛在的問題。為了避免這些不收斂所會發生的問題，如何利用線性的歐姆定律去逼近非線性的成本函數並找一大型路網驗證也是本研究的重要議題。

三、 電路模擬演算法

根據前述電路與路網的特性，我們可發現電流類似於流量，電壓類似於旅行時間，而路段本身就如同一組可變的電阻，若將路段的成本函數影響反應在電阻上，便可控制該節線的電流。本研究將歐姆定律與使用者均衡的特性加以整理之後，根據“讓電子模擬旅行者的想法”，以傳統最廣被使用的Frank-Wolfe演算法為架構，初步發展了一套電路模擬使用者均衡的演算法。本章首先介紹Frank-Wolfe演算法之結構，再介紹利用電路模擬求解使用者均衡的子路網系統與電路之特性，根據子路網系統作為本演算法之子問題，並以一簡單的例題說明利用電路模擬演算法求解子路網系統的過程和收斂行為；最後根據Frank-Wolfe演算法之結構與電路模擬演算法求解子路網系統作為核心，發展一套使用於多重起訖點路網，也就是完整路網系統的電路模擬演算法。

3.1 Frank-Wolfe演算法

Beckmann et al.對使用者均衡建立了數學模式之後，Frank-Wolfe 演算法(FWA)成為最廣被使用的求解方法。比起先前所提的容量限制法、漸增法等演算法，Frank-Wolfe 演算法雖然較為複雜，但卻能夠計算出路網的最佳解。在該演算法中，路網問題被拆解成子路網問題，並對所有起訖點對(OD pairs)求解最短路徑問題，本研究處理多重起訖點之交通指派問題時，亦參考該演算法之結構，但子問題的求解完全不同於最短路徑問題。Frank-Wolfe 演算法(亦作 Convex Combinations Algorithm, 凸性組合演算法)步驟如下(Sheffi, 1985)：

Step 0: 初始化，在各路段流量為零的情況下(即 $t_a = t_a(0), \forall a$)，使用全有或全

無(all-or-nothing)指派法求得路段初始流量 x_a^0 ，並設遞迴次數 $n=1$ 。

Step 1: 更新，依流量更新每個路段的成本為一個固定值， $t_a^n = t_a(x_a^n), \forall a$ 。

Step 2: 方向搜尋，求解各起訖點最短路徑問題(Shortest Path Problem)，找出最短路徑，並以 all-or-nothing 方法進行指派後，將各路段的流量加總計算整個系統內的路段流量 $y_a^n, \forall a$ 。

Step 3: 步幅搜尋，依據 x_a^n 及 y_a^n ，就目標式作線性搜尋(line search)求出最佳步

$$\text{幅 } \alpha_n \circ \min_{0 \leq \alpha \leq 1} \sum_a \int_0^{x_a^n + \alpha(y_a^n - x_a^n)} t_a(\omega) d\omega$$

Step 4: 更新流量，依 α_n 值計算各個路段新流量 $x_a^{n+1} = x_a^n + \alpha_n(y_a^n - x_a^n), \forall a$ 。

Step 5: 收斂測試，若已達要求，則 \mathbf{x}^n 為問題之流量解並停止，若未達要求則令遞迴次數 $n = n + 1$ 重複上述 Step 1。

在上述演算法步驟中，由於必須求解最短路徑問題，所以當路網變大時，該演算法之效率就明顯變差，據估計有超過 90% 的運算負荷都在處理最短路徑問題與全有全無指派(Patriksson, 1994, p.100)。因此，本研究利用電路的特性，以量測的角度來取得相關電壓與電流資料，用以換算交通流量與旅行時間。如此，求解的過程中即無需處理最短路徑問題，同時因為量測所需的時間不似問題求解時間會隨問題規模增大而急劇增加，因此將更適合用來求解大型路網問題。

3.2 電路模擬求解使用者均衡

利用電路模擬首先要處理的是在同一電路中擁有多個起點與多個訖點，因為電流完全是由壓降決定其移動方向，若同一電路中同時擁有多個起點與訖點，則電流將無法正確地分配到它的需求點，因此利用電路模擬的方法一定要先將路網系統(System)拆解成電流分配起訖點時不發生衝突的子路網系統(Sub-system)。

本研究亦遵循上述原則來發展，將路網拆子路網系統的方式求解，因此本研究的主要架構會分為兩個部分：(1)子路網系統之演算法與(2)路網系統之演算法。其中子路網系統是由路網系統拆解而來，而路網系統之演算法必須不斷重複執行子路網系統之演算法並加以組合才能求解，但當路網本身為子路網系統之形式時，子路網系統之演算法依然可以獨自求解。這兩個演算法我們將分別在 3.2.1 與 3.3 節中說明。

根據電路的特性，若要將路網系統拆解成電流分配起訖點時不發生衝突的子路網系統，除了將每一對起訖點都拆解成子路網系統外，我們也可以將電路拆成個別的單節點對多節點(如下圖 3-1)的子問題，並將這組單起點多訖點(圖 3-1a)或是多起點單訖點(圖 3-1b)的路網設計成電路。理論上這兩種拆解子路網的方式都是可行的，但本研究採用單起點對多訖點的子路網系統作為子問題的基礎，因為這種子路網系統的形式較類似於最短路徑問題之子路網型式。

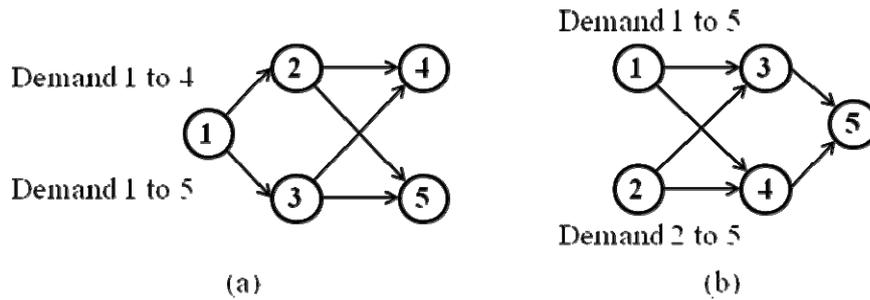


圖 3-1 子路網系統示意圖

從上述概論中我們可發現電路模擬演算法的結構與 Frank-Wolfe 演算法相似，都是利用遞回的方式，將問題拆解成子系統問題，並利用所有子系統問題所組合成原始問題後，修正成本函數來求解；但與 Frank-Wolfe 演算法不同的是，電路模擬演算法將電子視為旅行者，讓電子去找尋自己的路徑到訖點，因此省去了 Frank-Wolfe 演算法中”找尋最短路徑”的步驟。

3.2.1 子路網系統之電路模擬演算法

本節介紹電路模擬演算法中的子路網系統之演算法(Circuit Simulation Algorithm for Sub-system, CSA-Sub)。本演算法是以 Huang et al. (2007)的演算法為基礎加以改良，改變初始化的結構以及將歐姆定律逼近非線性成本函數的步驟。我們將原始演算法的缺點以及我們欲改良的方法整理為以下三點：

1. 因為 Huang et al. (2007)的演算法在初始化過程中將路網以每一對起訖點為單位拆成的子路網系統來使用電路模擬，這方法在大型路網中將會產生過多的子路網系統，計算大型路網時會顯得相當沒效率。因此我們希望將路網拆解為類似最短路徑的子問題，以單起點對多訖點的形式當作子路網系統。
2. 該演算法中將歐姆定律逼近到非線性成本函數的過程，由於非線性成本函數在流量超過容量時成本會急遽上升，導致該演算法之逼近過程無法處理而產生無法收斂的情形。因此我們將逼近這一步驟特別獨立出來，並探討逼近如何改善以及逼近對演算法的影響，希望能夠找到一更佳的逼近方式來取代原本演算法之逼近過程。
3. 該演算法採用每對起訖點拆解成子路網系統的方式來求解，不用處理同一子路網系統出現雙向路段都有流量的問題；本研究打算將路網拆解成樹狀結構的子系統，因此可能產生同一節線同時擁有來回流量的問題，因此我們將利用記錄使用路段與選取對應電阻的觀念來修正這個問題。

我們沿用第二章的符號定義並再定義一些新的符號，而 CSA-Sub 演算法的運算步驟如下：

q_r ：所有從起點 r 出發的旅次產生量，對一子路網系統 $q_r = \sum q_{rs}$

π ：子路網系統之編號，由一個 $q_r > 0$ 的單起點(r)對多訖點($\forall q_{rs} > 0$)組成，類似於圖 3-1(a)之子路網系統

b ：電路節線編號，根據不同的電路節線給予不同的編號，兩節點間只可能存在一條電路節線

$t_a(x_a)$ ：路段 a 的成本函數

c_a ：路段 a 的成本

R_a ：路段 a 所對應電阻的電阻值

R_b ：電路節線 b 的電阻值

i_b ：電路節線 b 的電流值

v_b ：電路節線 b 的電壓值

n ：演算法遞迴之次數

Step 0：初始化，將子路網系統 π 之單一起點模擬成接地點，所有訖點模擬成直流電流源，電流值設為該訖點的需求流量(q_{rs})，末端直接接地，即為所有訖點的電流源都流向的接地端，若相連的節點間擁有雙向路段，便擇一當作電路節線之方向。將初始值電阻值 $R_a^0, \forall a$ 設為 1，並將對應的電路節線電阻值 $R_b^0, \forall b$ 也設為 1。

Step 1：啟動電路，將電阻 R_b^n 放入電路中，取得各條節線在電阻為 R_b^n 時的電流值 i_b^n 與電壓值 v_b^n 。

Step 2：逼近，根據已測得的 i_b^n 與 v_b^n 逼近到對應的成本函數 $t_a(x_a)$ 上，藉以得到流量 x_a^n 與旅行時間 c_a^n 。

Step 3：更新電阻，利用歐姆定律計算新電阻值，對所有路段 a 若流量 x_a^n 與旅行時間 c_a^n 有更新則 $R_a^{n+1} = c_a^n / x_a^n$ ，並將這些有更新的電阻值設定到所對應的 R_b^{n+1} 。

Step 4：測試收斂，將流量代回目標式(1)中，若前後兩次目標值的變化量在要求範圍以內，就視同收斂並停止計算(例如，前後兩次的變化率低於 10^{-4})；若不是，則回到 Step 1 繼續計算。

上述電路模擬演算法的主要精神在於透過遞迴修正電阻值，因為根據前述電路的特性，只要能夠適當地調整電阻，一定能夠找到一組電路流量使其等於路網中使用者均衡的流量。本演算法的遞迴過程主要是在找尋電路中最適的電阻，使

滿足線性歐姆定律的純電阻電路在收斂時可以得到一組電壓與電流（成本與流量），而這組電壓與電流也將滿足原始路網系統下使用者均衡的成本與流量。

在CSA-Sub中，Step 0主要是用來初始化電路藉以獲得路網的起始解。由於我們將電路上各個訖點都設置一大小為 q_{rs} 之電流源，由於電路為一迴圈的關係，電路接地線端(起點)便會產生所有電流源加總的流量($q_r = \sum q_{rs}$)，若反應到路網上即表示起點端產生一大小為 q_r 之流量，各訖點分別接收 q_{rs} 之需求。

在電路中我們可以很輕易地獲得各電阻為1的電流，此時的電流會根據電阻串併聯的大小均勻地分配到電路網中，當然也會符合流量守恆定律。因此我們使用這組電流作為計算的起始解，而這組起始解的值與路段的成本函數是無關的。

在演算法中我們並不能將有雙向路段的路都模擬成電阻，我們只能夠在有連接的兩節點中選擇一條路段來當成電阻，因此便產生了路段與電路節線必須相對應的過程。

上述演算法我們可發現 x_a 、 $t_a(x_a)$ 與 c_a 都能夠有雙向路段的值，而 i_b 及 v_b 在兩連接的節點卻只能夠有一組值。雖然 i_b 無法呈現來回的兩路段，但在給定的 R_b 中， i_b 將可能出現正值與負值兩種可能，因此我們將電路的方向固定為初始設定的方向，若 i_b 產生正值所得的流量方向便與我們所設定的方向相同，若產生負值則是與我們設定的方向相反，藉著這些正負的符號我們便能夠將現在電路中電流的方向正確地反應到雙向路段的方向中，並更新 x_a 、 c_a 與 R_a 。

而在CSA-Sub中，主要是靠Step 2逼近的過程將線性的歐姆定律轉換到非線性的成本函數上。對任意一組給定的測量點(量測得到的 i_a^n 與 v_a^n ，並已經假設它會對應到正確的電流與電壓，故下標採用 a)，都有好幾種方式可以將測量點的值逼近到成本函數上。本研究嘗試使用三種逼近的方式來套入Step 2的過程中，並探討他們之間的差異：

- 固定電壓來逼近旅行流量：繪製一條水平線，並將旅行時間等於所量測到的電壓($c_a^n = v_a^n$)，再利用成本函數的反函數 $x_a^n = t_a^{-1}(c_a^n)$ 來計算出路段上的流量。
- 固定電流來逼近旅行時間：繪製一條垂直線，並將旅行流量等於所量測到的電流($x_a^n = i_a^n$)，再利用成本函數 $c_a^n = t_a(x_a^n)$ 來計算出路段上的旅行成本。
- 固定功率來逼近成本函數：將電流與電壓的乘積($i_a^n \times v_a^n = P$)定為一雙曲線，再利用求解此雙曲線與成本函數的交點 ($i_a^n \times v_a^n = P$ ，令 $x_a^n \times c_a^n = P$ 且 $t_a(x_a^n) = c_a^n$)來得到路段上的流量與旅行成本。

上述三種逼近方式經過數值測試後，我們發現若以固定電壓來逼近，則會在電壓低的時候因為電壓低於自由速率時間，而發生繪製的水平線對應不到成本函數的問題(即反函數不存在)；若以固定電流來逼近，則會在電流高的時候因為所繪製的垂直線與成本函數交點太遠，而使得電阻值在Step 3中產生劇烈的變化，導致電阻震盪不收斂的現象，這也是Huang et al. (2007)造成需求量大時不收斂的主要原因；因此以雙曲線來逼近成本函數是目前最穩定的方式，我們之後的演算法也將利用雙曲線的方式來進行逼近。

下圖3-2為雙曲線逼近成本函數的示意圖，當成本函數上的解為A點時，可計算出其電阻 $R^{(n)}$ ，經過啟動電路的步驟後，量測到電路均衡解B點(i_a^n 與 v_a^n)，計算B點電流與電壓的乘積可得到一條雙曲線，根據這條雙曲線將答案逼近到成本函數上可得到新的解C點(x_a^n 與 c_a^n)，再算出C點的電阻 $R^{(n+1)}$ ，如此不停反覆逼近與求解。

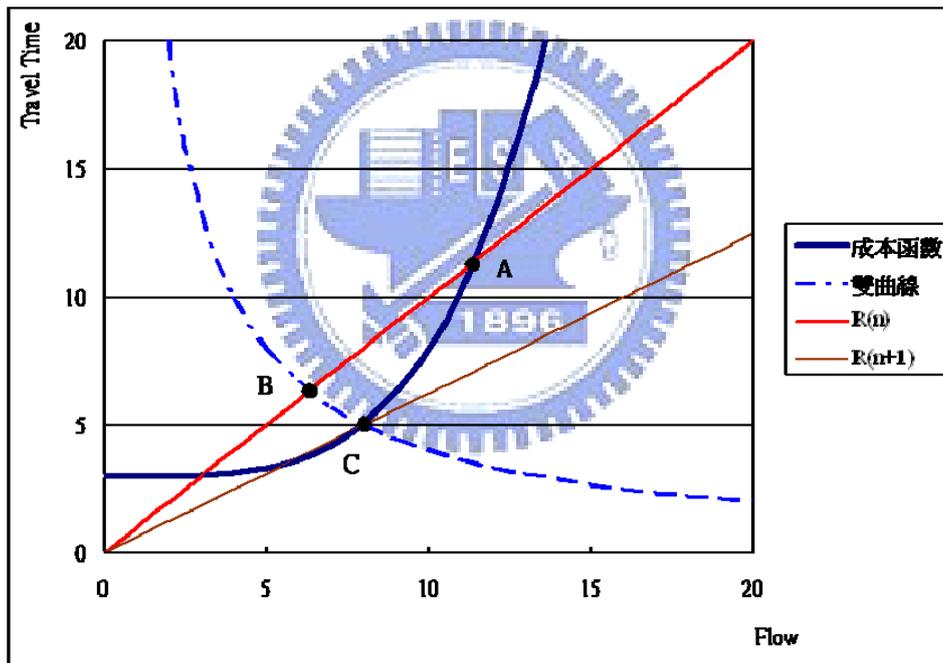


圖3-2 雙曲線逼近成本函數示意圖

3.2.2 CSA-Sub逼近與收斂-以一個簡單路網說明

為了測試並說明CSA-Sub的求解過程，下圖3-3是類似於之前圖1-1的一個單一起訖點兩條路段的簡單路網，我們使用CSA-Sub的求解過程一步步實作並呈現出答案，並從這簡單的路網中我們可以容易地明白CSA-Sub的逼近行為與收斂行為。這個簡單路網不考慮雙向路段，也只有單一旅次產生起點與單一旅次需求訖

點，它是前述子路網系統的一種最簡單的型式。路網資料方面路段的成本函數是符合美國道路局(U.S. Bureau of Public Roads) 的路段成本函數，並已經標示在下圖3-3中，同時路網的需求流量也標示在圖中：

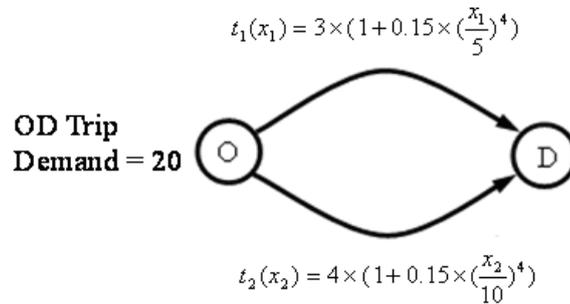


圖3-3 單一起訖對雙條路段的路網

路段1的成本函數表示該路段的自由速率時間為3單位，道路容量為5單位；路段2的成本函數表示該路段的自由速率時間為4單位，道路容量為10單位。在起訖點流量為20單位的時候，本研究根據電路軟體P-SPICE將起始的電路製作成下圖3-4的電路圖，再根據上述的CSA-Sub可得到計算結果，如下表3-1所示：

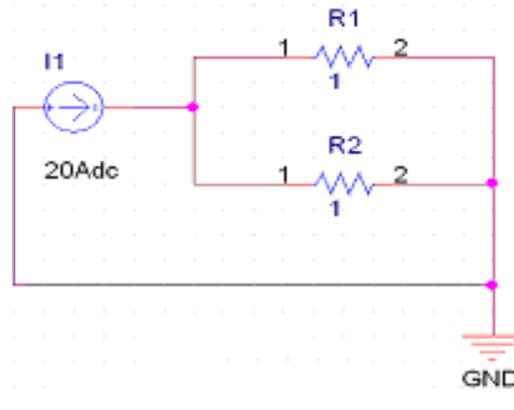


圖3-4 以電路模擬單一起訖對路網示意圖

下表3-1顯示三個欄位：電流值、電壓值與電阻值以及一遞回次數的欄位，每欄中又分別有路段1(Link 1)與路段2(Link 2)的資料值。一開始資料初始化時我們將電阻值設為(1,1)，這時電流會如同流經一簡單的並聯電路而進行”均勻”的分配，也就是兩條路的流量各為10，這時的流量和路段成本函數是沒有任何關係的。當得到電阻值與電流值後，我們便利用固定功率逼近的過程來更新電阻值，也就是第一次遞迴的電阻值 $(R_1, R_2) = (1.010, 0.463)$ ，有了這組電阻值之後，便可

重新啟動電路得到新的電流。因為這次的電流從新的電阻而來，新的電阻又是從逼近成本函數而來，因此這次的電流與成本函數之間便有了相關性，不再是均勻地分配到兩條路段。

表3-1 單一起訖對路網的電路模擬演算法計算結果

Iterations	電阻值		電流值		電壓值	
	link 1	link 2	link 1	link 2	link 1	link 2
0	1.000	1.000	10.00	10.00	10.052	6.802
1	1.010	0.463	6.28	13.72	5.303	6.254
2	0.705	0.449	7.78	12.22	5.542	5.413
3	0.719	0.437	7.56	12.44	5.405	5.436
4	0.711	0.437	7.61	12.39	5.416	5.413
5	0.711	0.437	7.61	12.39	5.415	5.414

經過CSA-Sub 5次的遞回之後，所得的電流值 $(i_1, i_2) = (7.61, 12.39)$ ，和使用者均衡解 $x_1=7.61, x_2=12.39$ 相同；而兩路段的電壓 $(v_1, v_2) = (5.415, 5.414)$ 也和使用者均衡下的成本5.414接近；這表示了電路網的電阻值在 $R_1=0.711$ 與 $R_2=0.437$ 時所產生的電流與電壓會和原始路網得到相同的均衡結果。

下圖3-5表示兩條成本函數與電路解之間的關係，由於本例題是一個簡單的單一起訖點兩條路徑之路網，我們可以利用2.1節所討論的繪圖法，在同一張圖上將路段1的成本函數繪於左垂直軸，路段2的成本函數繪於右垂直軸，並使用同一水平軸表示兩路段流量。由於需求固定為20的關係，水平軸由左至右表示路段1的流量，由右至左表示路段2的流量(為20減去水平軸值)，便可輕易地知道兩條成本函數的交點即為本路網的使用者均衡解，對應到垂直軸便為使用者均衡解下的路段成本，對應到水平軸則為兩路段在使用者均衡下的流量。

CSA-Sub的初始解為電阻為1的值，若我們利用相同的繪圖方式將兩條電阻為1的電阻值畫到圖上，並將電阻的交點標示出來，便可知道電路均衡點的解位於何處。我們將初始解的交點標示為第1點，根據逼近後得到新的電阻值 $R_1=1.010$ 與 $R_2=0.463$ ，繼續將這兩電阻的交點畫到圖上，標為第2點，以此類推。我們便可從圖3-5中可以發現，電路均衡點會一直往兩成本函數的交點(使用者均衡點)逼近，當遞回次數夠多之後電路均衡點與使用者均衡點會達到同一點而收斂。

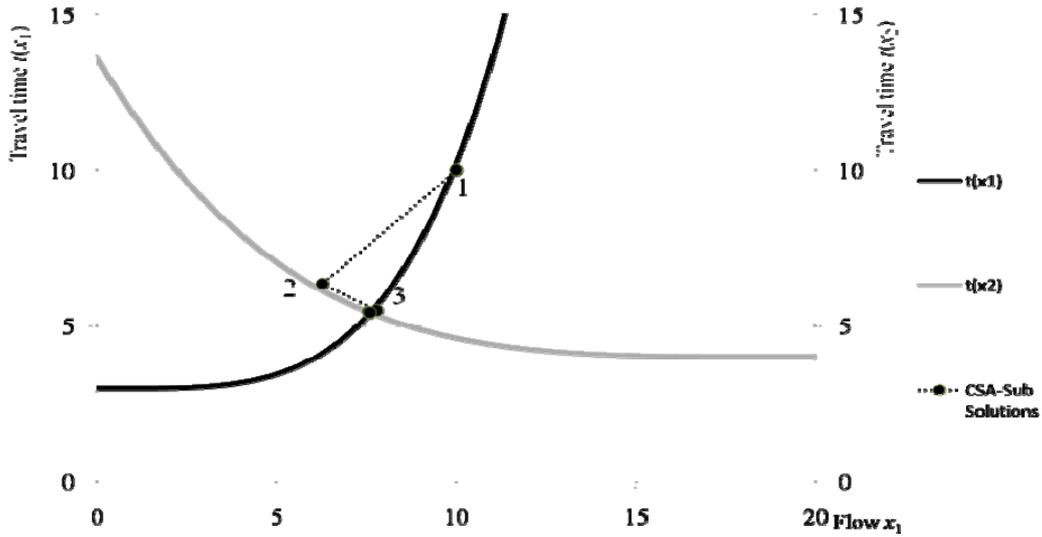


圖3-5 CSA-Sub遞回過程逼近成本函數交點示意圖

為了更加清楚CSA-Sub之收斂的行為以及電阻交點是如何往使用者均衡點移動，我們繼續延續這個本題路網的結構與參數，假設路段2的電阻值已經達到使用者均衡解的狀態，並且已經不會再更新移動。接著利用CSA-Sub只更新移動路段1的電阻，觀察電阻如何以逼近的方式往使用者均衡點移動。我們將前3次遞回的结果繪製於下圖3-6。

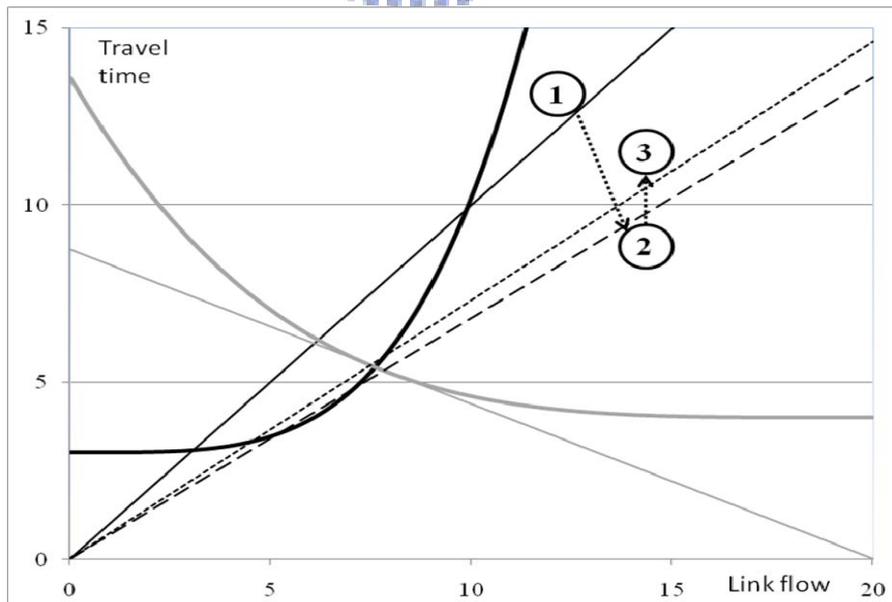


圖3-6 電阻收斂行為示意圖

我們將 $R_1=1$ 作為本測試的初始解，其電阻在上圖3-6標示為①，經過”逼近”後所得到的新電阻標示為②，可發現兩電阻的交點(電路均衡解)往兩成本函數的交點(路網使用者均衡解)逼近，再經過一次逼近的過程後，我們將得到的電阻標示為③，這時電阻的交點已經十分接近成本函數的交點。

從上述的過程我們可推論，若電路均衡點已經落在使用者均衡點時，逼近的過程會由於電路均衡點已經完全貼於成本函數上而無法再更新電阻值；若電路均衡點未落在使用者均衡點時，”逼近”的過程會將電路均衡點一步步往使用者均衡點拉近。也就是演算法中”逼近”的過程將會在每次遞迴時將線性的歐姆定律往非線性的成本函數貼近，直到電路均衡點與使用者均衡點重疊為止。

另外值得注意的是，CSA-Sub中無法將路段流量收斂至0，因為在電路中倘若電流為0，電阻的值($R=V/I$)將會無意義，因此當演算過程中電流持續收斂至一趨近於0的數字時，我們便可將其視為0，同等於流量為0。此狀態在本演算法中是不可避免的。

從這個簡單的小例題中我們可發現非線性的成本函數可以成功地被線性的歐姆定律近似，收斂條件也可以控制在誤差相當小的範圍而收斂。本小節用這個簡單的例子說明了CSA-Sub的逼近與收斂行為，然而必須要在此再次強調，雖然CSA-Sub有遞回搜尋的結構，但它只是主要演算法中的求解其中一個子路網系統過程，因此實際操作時並不需要為了這個子問題而花費龐大的計算量與計算時間來精求完全收斂。一般而言，收斂過程可以使用一些標準較低的收斂條件，像是收斂率 10^{-4} 甚至是 10^{-3} 等，這些標準可再依照主問題的結構與規模再調整。

3.3 路網系統之電路模擬演算法

雖然上一節所提出的CSA-Sub可以量測計算出子路網系統的均衡流量，但路網的問題主要還是以求解多重起訖對為主。在「讓電子來模擬旅行者」的基本構想下，不難發現多起訖對的車流和電流行為不完全相同，路網與電路的特性也不一樣，例如路網中可以有雙向的道路，但在電路中由於電壓決定了電流方向，因此無法依照路網情形直接以電路模擬；另外在多重起訖點的路網中，使用者會依照旅次分配分辨自己的起點訖點，但在電路中電流卻無法正確分辨自己的起訖點。基於以上兩點，本研究基於Huang et al. (2007)提出的方法，改良其初始化的步驟，換成使用單一起點對多訖點之子路網系統，同時參考FWA的結構，將多重起訖對的路網拆成許多的子路網問題，並使用CSA-Sub來計算子路網系統的均

衡流量。決定路網系統之電路模擬演算法(Circuit Simulation Algorithm for System, CSA-Sys)如下：

Step 0：初始化，對各個子路網系統將 O-D 之起點模擬成接地點，所有訖點模擬成直流電流源，電流值設為該訖點的需求流量(q_{rs})，末端直接接地。每個路段都個別模擬成電阻，並將初始值電阻值 R_b^0 設為後便啟動電路。最後將所子路網系統得到的流量合併成為解集合 $x_a^0, \forall a$ (亦為 \mathbf{x}^0)，當作初始解。

Step 1：轉換道路成本，針對每個子路網 π ，將成本函數設定為

$$u_a(\omega) = \max(t_a(0), t_a(x_a^n) + t_a'(x_a^n)(\omega - x_{a,\pi}^n))$$

其中 $x_{a,\pi}^n$ 為子路網系統 π 經過路段 a 之流量。

Step 2：找尋方向，根據新的成本函數 $u_a(\omega)$ ，對各個子路網系統執行 CSA-Sub，以合併所有 CSA-Sub 的解當作搜尋方向 $y_a^n, \forall a$ 。

Step 3：線性搜尋，利用 $\min_{0 \leq \alpha \leq 1} \sum_a \int_0^{x_a^n + \alpha(y_a^n - x_a^n)} t_a(\omega) d\omega$ 找出最適步幅 α^n 。

Step 4：找尋新解，設定新解為 $x_a^{n+1} = x_a^n + \alpha^n(y_a^n - x_a^n), \forall a$ 。

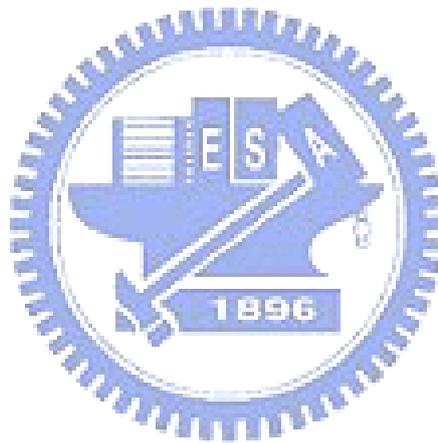
Step 5：測試收斂，若滿足所設定的收斂條件，就視同收斂並停止計算(例如，目標式的前後兩次的變化率低於 10^{-4})；若不是，則回到 Step 1 繼續計算。

從上述方法中可發現 FWA 和 CSA-Sys 主要的差別在於 Step 0、Step 1 與 Step 2。CSA-Sys 在 Step 0 中不採取如同 FWA 的全有全無(All-or-Nothing)指派一來是因為電路可以輕易獲得當所有電阻值是 1 的”均勻”電流，二來是因為倘若仿效 FWA 指派全部或零的流量，那麼反應到電路上便會使某些節線上的電流為 0，造成電阻無法計算。CSA-Sys 將起始電阻設定為 1，通常可以得到一個較好的起始解，對未來的收斂也不會有影響。

在 Step 1 和 Step 2 中，FWA 主要是利用前次流量所得的成本做為一常數，根據此常數來進行全有全無指派，也就是利用最短路徑問題來找尋解的方向；而 CSA-Sys 將成本函數轉換成一階近似導函數，根據新的成本函數和前次流量所得的成本利用 CSA-Sub 進行指派，這種利用非線性成本函數取代線性成本函數找最短路徑的解法類似於 Regularized Frank-Wolfe Algorithm (Migdalas, 1984)，主要用來避免 FWA 找尋可行解方向時都會找到邊界解(boundary solutions)的缺點。下表 3-2 是 FWA 與 CSA-Sys 主要不同點之比較。

表3-2 FWA與CSA-Sys之比較

	FWA	CSA-Sys
獲得起始解	全有全無指派	電阻為 1 的流量均勻解
路段成本之近似	常數	一階微分導函數
子問題類型	最短路徑問題	使用者均衡 (利用 CSA-Sub 求解)
子問題目標式	線性 (固定路段成本)	非線性 (成本函數的總和, UE 的形式)
找尋解的特性	邊界解	可能較趨近於最佳解



四、數值測試

前章說明了電路模擬演算法的主問題系統與子路網系統，分別以 CSA-Sys 與 CSA-Sub 來求解，也利用一小型的路網來說明 CSA-Sub 之演算法過程，從例題中也說明了逼近與收斂的行為。我們曾在 2.3 節說明 TAP 與電路在構造上的異同，為了測試電路模擬演算法來求解 TAP 的可行性與效用，我們將針對電路與路網可能產生的差異，提供 3 種不同的路網例題來測試電路模擬演算法，並在最後一個路網例題中我們再提供數種不同的道路擁擠程度來測試演算法的效用。

4.1 小型田字路網的數值測試

我們想知道的是延續 3.3 節的 CSA-Sys 是否能夠確實地應用到需求為多起訖點對的路網中，且當多重起訖點路網的使用者均衡解在雙向路段皆有流量的情形下，或是產生可逆的路徑，CSA-Sys 是否能繼續運作？另外我們也可以從例題中觀察在 3.2 節所提的 CSA-Sub 面對有雙向路段的路網是如何選取電阻的。因此我們第一個測試路網將會具有：(1)多重起訖點、(2)擁有雙向路段以及(3)使用者均衡下所有路段皆被使用等特性。

我們設計了一個 24 對起訖對、9 個節點、24 條節線的田字型路網當作測試雙向流量的例題，利用 3.3 節所提的 CSA-Sys 進行計算，並使用電路軟體 P-SPICE 來進行演算法中 Step2 的子路網系統之電路模擬過程(CSA-Sub 的模擬過程)，解出電流量與電壓。所測試的路網如下圖 4-1 所示，而路網資料如下表 4-1、4-2 所示：

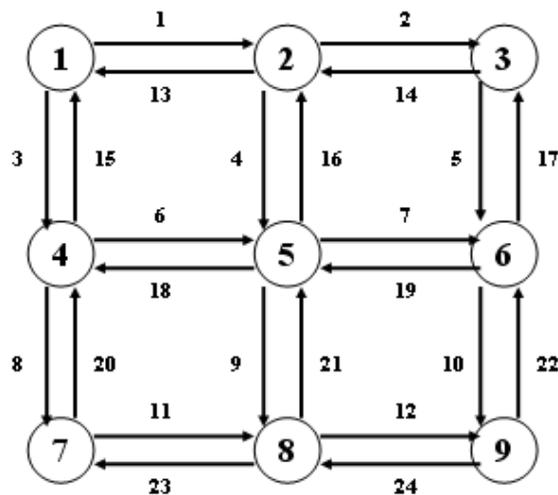


圖 4-1 多重起訖點且擁有雙向路段的田字型測試路網

表 4-1 田字型測試路網的起訖點對需求矩陣

OD	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	10	20	10	20	10	20	10	20
3	17	16	0	15	14	13	12	11	10
7	10	20	10	20	10	20	0	10	20
9	20	19	18	17	16	15	14	13	0

表 4-2 田字型測試路網的路段成本函數

Link a	T_a	C_a	Link a	T_a	C_a	Link a	T_a	C_a
1	3	25	9	1	25.23	17	3	10
2	4	30	10	1	25	18	3	10
3	2	10	11	1	42.73	19	3	10
4	5	25	12	4	20	20	9	12.25
5	3	10	13	3	25	21	1	25.23
6	3	10	14	4	30	22	1	25
7	3	10	15	2	10	23	1	42.73
8	9	12.25	16	5	25	24	4	20

我們假設旅次是從田字型路網的四個角落點(Node 1,Node 3,Node 7,Node 9)產生，並且在除了本身以外的點都有需求量，如同上表 4-1 所示，因此它總共有 4 個子路網系統、24 對起訖點對，從路網結構上看使用者均衡解應該會使用包含雙向的所有路段。

根據 CSA-Sub 所述，當路網擁有雙向路段時，我們模擬成電路必須要先設定好電路的方向，再選取對應的電阻套入電阻值中，其餘沒使用的電阻會先紀錄下來，等到出現反向流量時才會抽換電阻加入電路中，因此我們所設定的電路的方向與路段 1~12 一樣，執行電路軟體 P-SPICE 時也只會輸入這 12 條節線，其電阻分別為前次遞迴有流量產生的那些電阻。電路結構與所設定的方向如下圖 4-2 所示：

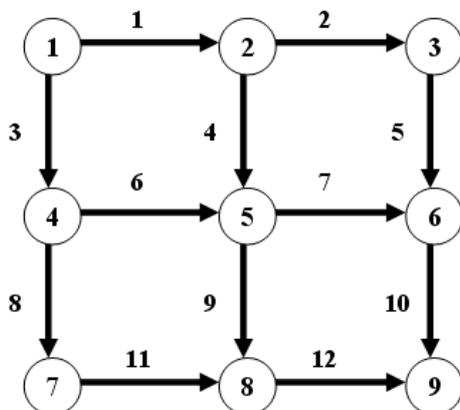


圖 4-2 田字型測試路網模擬成電路時的結構

我們可以從第 4 個子路網系統，也就是從節點 9 產生旅次往各節點的子路網來看，我們可以輕易知道在初始化過程中，從節點 9 產生的流量進入電路結構所得到的電流一定會與我們所設定的電流方向相反，因此我們在記錄電阻時並不會記錄在 $R_1 \sim R_{12}$ ，而是記錄在當流量的方向相反時的電阻 $R_{13} \sim R_{24}$ ，這也表示在選取電阻的步驟裡，我們將會選擇電阻 $R_{13} \sim R_{24}$ 來代入演算法中計算。

我們將 CSA-Sys 與 FWA 每次遞迴的目標式整理於下表 4-3 中。根據表 4-3，我們可發現 CSA-Sys 擁有較好的起始解，這是由於 CSA-Sys 沒有使用全有全無當作起始解，而是使用電阻直皆設為 1 的均勻電流解作為起始解。而 FWA 遞迴 1000 次時的目標值大約是 CSA-Sys 遞迴第 17 次的目標值。

表 4-3 田字型測試路網遞迴次數與目標函數收斂情形

FWA				CSA-Sys			
遞回次數	目標值	遞回次數	目標值	遞回次數	目標值	遞回次數	目標值
0	19222.47			0	50900.66		
1	20403.24	60	11145.93	1	11575.85	16	10828.77
2	15689.91	70	11100.60	2	11117.62	17	10826.37
3	14752.34	80	11054.22	3	11008.19	18	10823.85
4	13959.89	90	11022.71	4	10960.70	19	10822.00
5	13634.58	100	11003.25	5	10930.40	20	10820.32
6	13258.10	200	10901.53	6	10907.90	21	10818.62
7	12972.63	300	10871.38	7	10890.92	22	10817.18
8	12679.31	400	10855.86	8	10877.42	23	10816.22
9	12581.32	500	10846.33	9	10867.17	24	10815.19
10	12471.60	600	10840.18	10	10858.18	25	10814.12
20	11739.56	700	10835.57	11	10851.25	26	10813.34
30	11460.35	800	10832.18	12	10844.91	27	10813.06
40	11340.96	900	10829.54	13	10839.97	28	10812.27
50	11214.20	1000	10827.43	14	10836.09	29	10811.63
				15	10832.15	30	10811.42

4.2 中型路網的數值測試

經過田字型路網的測試後，我們發現 CSA-Sys 在使用者均衡解為雙向路段都有時是可以求解的。為了更加確定我們所得到的解為使用者均衡解，我們將路網加大，放寬原本雙向的限制，縮減子路網系統的數量，並希望能夠窮舉出起訖點之間所有路徑的旅行時間，觀察它們是否相同。

我們採用了一個 4 對起訖對、14 個節點、29 條節線的中型路網當作測試例題(Florian, 1984, pp.273-274)，利用 3.3 節所提的 CSA-Sys 進行計算，同樣使用電路軟體 P-SPICE 來進行演算法中 Step2 的子路網系統之電路模擬過程(CSA-Sub 的模擬過程)，解出電流量與電壓。所測試的路網如下圖 4-3 所示，而路網資料如下表 4-4 所示：

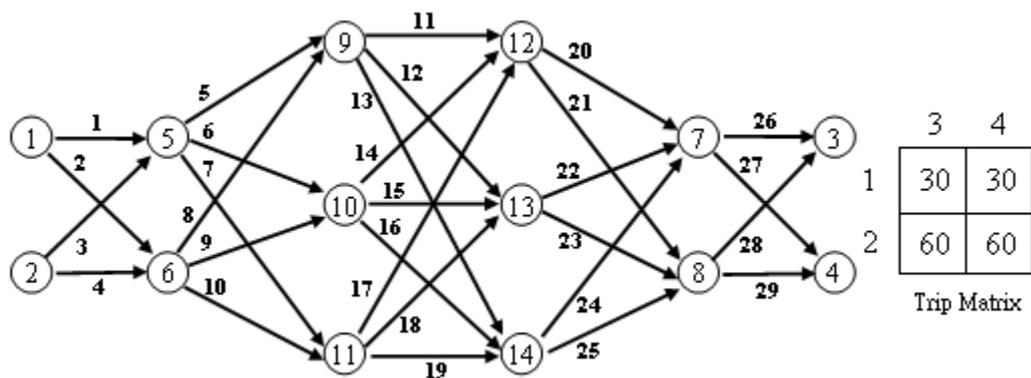


圖 4-3 多重起訖點的電路模擬演算法中型測試路網

表4-4 中型測試路網的路段成本函數

Link a	T_a	C_a	Link a	T_a	C_a	Link a	T_a	C_a
1	3	25	11	5	10	21	6	10
2	4	30	12	5	10	22	6	10
3	2	10	13	5	10	23	6	10
4	5	25	14	5	10	24	6	10
5	3	10	15	5	10	25	6	10
6	3	10	16	5	10	26	2	30
7	3	10	17	5	10	27	1	25
8	4	10	18	5	10	28	3	10
9	4	10	19	5	10	29	4	20
10	4	10	20	6	10			

註：上表的成本函數參數皆為美國道路局(U.S. Bureau of Public Roads)的路段成本函數參數

同樣的我們將 CSA-Sys 與 FWA 的收斂次數與每次遞迴的目標式整理於下表 4-5 中，由於路網出處已經有 FWA 目標值資料，因此我們直接參考該文獻的結果。在中型路網的目標值結果中，CSA-Sys 同樣有較好的起始解，經過 4 次遞迴之後，CSA-Sys 的結果已經相對於 FWA 遞迴 50 次的結果還要好。表中也顯示 CSA-Sys 在 10 次遞迴後收斂至一個接近最佳解的結果。

表4-5 中型測試路網遞回次數與目標函數收斂情形

FWA		CSA-Sys		
遞回次數	目標式	遞回次數	目標式	改變率
0	8089534	0	60628	-
1	523931	1	11734	80.65%
2	85180	2	11291	3.78%
3	24985	3	11078	1.89%
4	14423	4	11026	0.47%
5	12977	5	11008	0.16%
10	11316	6	11004	0.04%
20	11110	7	11003	0.01%
30	11076	8	11003	0.00%
40	11063	9	11003	0.00%
50	11046	10	11003	0.00%

為了詳細了解電路模擬演算法的結果，我們將演算法的答案結果列於下表 4-6 中；同時為了測試演算法的解所帶來的時間成本是否如符合使用者均衡的結果，我們也抽取從起點 2 到訖點 3 經過 CSA-Sys 10 次遞回計算後的數條路徑，來檢測是否該路徑的成本相同，並將結果整理於下表 4-7。

表4-6 中型測試路網29條路段的流量與時間成本

a	x_a	t_a	a	x_a	t_a
1	50.63	10.57	16	20.00	16.99
2	9.36	4.01	17	20.00	16.99
3	41.03	87.00	18	20.00	16.99
4	78.96	79.65	19	20.00	16.99
5	30.56	42.26	20	31.79	97.93
6	30.56	42.26	21	28.21	62.99
7	30.56	42.26	22	31.79	97.93
8	29.44	49.09	23	28.21	62.99
9	29.44	49.09	24	31.79	97.93
10	29.44	49.09	25	28.21	62.99
11	20.00	16.99	26	59.61	6.68
12	20.00	16.99	27	35.76	1.63
13	20.00	16.99	28	30.39	41.36
14	20.00	16.99	29	54.24	36.46
15	20.00	16.99	Objective Function = 11003		

表4-7 中型測試路網起訖對2到3的使用路徑成本比較

Path with Link Included	Travel Time	Path with Link Included	Travel Time
3-5-11-20-26	250.85	4-8-11-20-26	250.34
3-6-14-20-26	250.85	4-9-14-20-26	250.34
3-7-17-20-26	250.85	4-10-17-20-26	250.34
3-5-11-21-28	250.61	4-8-11-21-28	250.09
3-6-15-23-28	250.61	4-9-15-23-28	250.09
3-7-19-25-28	250.61	4-10-19-25-28	250.09

根據結果顯示，該起訖對的 12 條路徑成本都相當接近，表示結果已經相當接近使用者均衡條件。我們也另一參考收斂條件(Sheffi, 1985, p.119)來測試 CSA-Sys 的收斂性，該收斂條件表示遞迴前後流量改變的差異，倘若前後差異比某一 k 值還要小時則演算法終止，其數學式如下：

$$k \geq \frac{\sqrt{\sum_a (x_a^{n+1} - x_a^n)^2}}{\sum_a x_a^n} \quad (7)$$

若收斂條件(右式)小於 k 則演算法終止，此測試法可量出演算法在前後次遞迴時流量變化的差異，可以更精確地說明演算法在遞迴過程中改善路網的效率。我們將 FWA 與 CSA-Sys 的收斂條件值作成下表 4-8，用以比較對照兩種演算法在改善道路容量時的收斂效率。

表 4-8 中型測試路網 FWA 與 CSA-Sys 遞迴過程的 k 收斂條件值

FWA		CSA-Sys	
iterations	收斂條件值	iterations	收斂條件值
1	0.28270	1	0.04487
2	0.15174	2	0.02096
3	0.11865	3	0.01601
4	0.06072	4	0.00708
5	0.02442	5	0.00438
10	0.00770	6	0.00201
20	0.00186	7	0.00129
30	0.00094	8	0.00005
40	0.00102	9	0.00042
50	0.00062	10	0.00000

4.3 大型路網的數值測試

在測試完田字型路網以及中型路網後，我們可發現 CSA-Sys 已經克服了先前所討論電路模擬交通路網時可能會產生的問題。最後為了測試在大型路網 CSA-Sys 是否可行，以及是否會在路網高擁擠或不擁擠時出現狀況，我們從運輸路網測試問題網站(Bar-Gera, 2007)採用一個 24 對起訖對、24 個節點、76 條節線的大型路網-Sioux-Falls Network 當作測試例題(Lablanc, 1975, pp.194-196)，所測試的路網結構與路網資料附錄一所示。

值得注意的是附錄一裡路段成本參數的 a 、 b 參數是由 2.2 節所推論的 BPR Function 轉換型式 $a + bx^4$ 而來，且利用簡單的移向運算我們便可以得到路段的容量：

$$C = 4 \sqrt[4]{\frac{0.15a}{b}} \quad (8)$$

在 Sioux-Falls Network 中我們假設 FWA 遞迴計算 5000 次的解為最佳解，藉以拿來當作是否其解過程會逼近使用者均衡解的參考。我們可發現 CSA-Sys 經過 10 次遞迴計算後，目標值已經接近 FWA-5000 次的解。下表 4-9 為 CSA-Sys 的在各遞回次數時的目標值，表 4-10 則是各路段的流量與旅行時間：

表 4-9 Sioux-Falls Network 的遞迴次數與目標函數收斂情形

CSA-Sys	
遞回次數	目標式
0	59706.18
1	47958.94
2	45258.23
3	44056.90
4	43379.04
5	43003.67
6	42716.39
7	42557.46
8	42521.08
9	42405.37
10	42378.15
FWA-5000	42313.57

表 4-10 Sioux-Falls Network 的路段流量與時間成本

a	x_a	t_a	a	x_a	t_a	a	x_a	t_a
1	44.45	6.00	27	184.83	9.18	53	221.33	5.88
2	81.08	4.01	28	113.22	8.59	54	178.43	12.60
3	61.41	6.77	29	148.43	3.15	55	235.05	14.24
4	138.10	4.25	30	98.46	7.21	56	111.50	20.70
5	97.86	4.02	31	191.26	4.27	57	81.00	16.31
6	176.94	2.29	32	90.61	10.46	58	84.96	14.08
7	57.56	7.70	33	62.68	8.12	59	100.22	14.70
8	87.58	9.89	34	71.90	8.02	60	124.85	3.02
9	156.97	9.55	35	88.62	4.47	61	111.32	17.71
10	124.58	14.55	36	102.95	11.88	62	91.80	12.71
11	117.78	5.29	37	97.59	12.71	63	85.40	9.42
12	154.87	2.06	38	78.69	3.73	64	195.55	4.46
13	64.48	13.99	39	44.52	6.00	65	185.77	9.31
14	83.87	10.73	40	81.01	4.01	66	112.63	8.45
15	214.70	5.55	41	61.48	6.77	67	146.30	3.14
16	177.17	12.39	42	136.35	4.24	68	97.86	7.08
17	230.67	13.64	43	99.53	4.02	69	185.46	4.24
18	111.50	20.69	44	177.11	2.30	70	93.13	11.21
19	81.01	16.31	45	56.66	7.60	71	60.23	7.81
20	84.90	14.05	46	86.40	9.58	72	70.07	7.72
21	98.93	14.16	47	158.32	9.71	73	88.14	4.42
22	122.11	3.02	48	123.46	14.10	74	100.97	11.21
23	109.58	16.88	49	120.46	5.51	75	96.23	12.23
24	91.11	12.48	50	152.18	2.05	76	77.94	3.66
25	84.79	9.27	51	68.77	15.16	Objective Function = 42378		
26	192.44	4.37	52	81.16	10.02			

確認 CSA-Sys 往最佳解收斂之後，我們接著定義道路流量除以道路流量大於 1.5 時表示該路段擁擠，因為這表示在道路符合 BPR Function 下，行駛該路段的時間約為以自由速率行駛的時間 1.76 倍左右，這在現實世界中已經是非常擁擠的狀態了。若將表 4-10 的路段流量對照附錄一裡的路段容量，我們可以發現流量除以容量大於 1.5 的路段有 46 條，這表示系統中擁擠的道路有 46 條。

為了確保 CSA-Sys 在各種擁擠情境底下皆能正常運作，我們利用 Sioux-Falls Network 的結構與路網的原始道路資料作為標準參考，改變其參數創造出系統擁擠與系統不擁擠的情境。由於路段成本函數的型式為 $a + bx^4$ ，我們從 2.2 節與方

成式(2)中得知參數 b 為一個與容量成反比的值，我們對每路段分別設計了 b 值為原本的 $\{10, 3.3, 0.3, 0.1\}$ 倍等情境，反應到路網容量表示該情境為原本容量的 $\{0.56, 0.75, 1.33, 1.78\}$ 倍。在這些情境中，我們可發現 CSA-Sys 的目標值都能往 FWA-5000 次的目標值逼近，表示不論路網是否擁擠，CSA-Sys 都能夠正確地往使用者均衡解逼近。

表 4-11 更變 Sioux-Falls Network 擁擠情境之比較

路網擁擠狀況	非常擁擠	較擁擠	參考標準	較不擁擠	不擁擠
參數 b 的倍數	10	3.3	1	0.3	0.1
對應容量倍數	0.56	0.75	1	1.33	1.78
擁擠路段數	66	58	46	18	6
CSA-Sys 遞回次數	18	20	10	9	6
CSA-Sys 目標值	108205.96	58622.66	42378.15	36555.35	34516.64
FWA-5000 目標值	108102.87	58588.87	42313.57	36355.77	33994.36

從目標值來看 CSA-Sys 的結果似乎與 FWA 差不多，但仔細檢查均衡解的每條路段時我們將發現路網中 CSA-Sys 收斂時的路段流量與 FWA-5000 次的路段流量仍有差距，而這個差距會在路網不擁擠與較不擁擠時會更加明顯。我們選取不擁擠與較不擁擠的情境與標準情境來做比較，並取前 10 條路段的流量來看，將結果整理於下表 4-12：

表 4-12 達到均衡解時 CSA-Sys 與 FWA 的路段流量(部分)

不擁擠			較不擁擠			參考標準		
Link a	CSA-Sys	FWA	Link a	CSA-Sys	FWA	Link a	CSA-Sys	FWA
1	50.40	35.00	1	42.10	39.97	1	44.45	45.00
2	65.31	63.00	2	72.81	67.99	2	81.08	81.30
3	75.11	63.00	3	62.00	58.01	3	61.41	59.65
4	93.32	117.60	4	116.77	123.79	4	138.10	140.33
5	66.07	80.88	5	79.60	81.86	5	97.86	100.49
6	105.24	174.60	6	156.85	163.72	6	176.94	180.33
7	93.11	59.00	7	59.28	52.22	7	57.56	52.19
8	94.34	112.67	8	94.68	99.91	8	87.58	87.89
9	77.53	130.89	9	130.92	132.75	9	156.97	157.98
10	143.08	142.22	10	131.18	132.05	10	124.58	124.88

既然目標值已經接近了，為什麼不擁擠與較不擁擠的路網中仍有一些路段流量與 FWA 之解有這麼大的差距呢？這個差距源自於找尋解方向的特性，FWA 是利用全有全無指派找尋邊界解，將全部的流量指派到一成本最低的路徑上，倘若整個路網不擁擠，它可挑選的最短路徑可能有很多條，這時全有全無指派會將全部的流量指派到某一條路徑上，又因為路網不擁擠的關係，路徑的旅行成本仍

接近自由速率時間，沒有明顯變化，因此每次遞回的解可能永遠是將全部的流量指派到某一特定的路徑。

反觀 CSA-Sys 求解時並沒有找尋邊界解，若路網不擁擠、可選擇的路段較多時，它會從電流均勻分配的狀態開始分配而找到均衡解，因此答案會與 FWA 些許不同。雖然路段流量有差異，但我們仍可以從兩種方法的目標值相近而推論出兩者都找到接近使用者均衡之解。

4.4 誤差分析

經過以上的數值測試後，CSA-Sys 在各種路網以及擁擠程度下均能正常運作，雖然在有些路網下可能無法完全收斂至與使用者均衡一致的答案，但就整體上來說已經相當接近。我們歸納分析 CSA-Sys 可能出現誤差的因素為以下三點：

- 在 CSA-Sys 中我們使用 CSA-Sub 的程序來決定子路網系統之均衡解，而 CSA-Sub 是利用遞迴計算而收斂的，因此 CSA-Sub 收斂的程度可能會影響到 CSA-Sys 的搜尋方向，我們認為 CSA-Sys 結果若要更加精確則 CSA-Sub 的收斂也應該更精確。
- 我們在找尋電路之均衡解時是使用 P-SPICE 軟體來進行模擬，P-SPICE 輸出模擬的電壓時小數點位數只能到小數點第三位，從演算法來看電壓值與旅行時間相關，因此小數點的精確度的確可能影響收斂的結果。
- 雖然 CSA-Sys 是參考 FWA 之架構而來，但與 FWA 有著本質上的不同。像是找尋方向的方式或是改變成本函數的方式等，最明顯的例子便是 4.3 節裡使用 CSA-Sys 與 FWA 在不擁擠路網的下，儘管目標值已經接近，路段流量依然有明顯的差異。而在改變成本函數為一階近似導函數的部分，CSA-Sys 也可能因為近似的關係造成些許的誤差。

五、結論

交通指派問題中使用者均衡是最廣為大家所接受的模式，在使用者均衡下，路網中的所有使用者都會選擇自己旅行時間最短的路徑來使用，進而達到路網中沒有使用者能夠藉由改變所選擇的路徑而降低自己的旅行時間。

使用者均衡的概念相當類似於電路裡將電流視為交通流量、電壓視為時間成本的狀態，秉著讓電子來模擬使用者的精神，本研究對使用者均衡的解法提出一套新的演算法(CSA)，希望能將問題轉換成電路的型式來解題。

由於路網中路段的成本函數要考慮擁擠的效應，造成旅行成本與流量的關係為非線性的函數關係；但在電路中電流與電壓為一線性的歐姆定律關係。這線性與非線性的關係如何利用 CSA-Sub 中逼近的過程來計算亦為本研究的重點之一，同時這也是能夠用電路來計算路網使用者均衡的重要過程之一。

在小型、中型路網的測試例題中，本研究所提的演算法與傳統的 FWA 法相比，收斂速度及效率都有較好結果。雖然多重起訖點的電路模擬演算法結構與 FWA 相似，但 CSA-Sys 卻有以下的優點：

- 不用計算最短路徑問題，而是將子問題利用單一起訖點的電路演算法來求解；找到的解也非邊界解，而是利用一階近似導函數來求解，每次搜尋答案的方向將更靠近均衡解；
- 儘管 FWA 中已經有相當多好的方法來解最短路徑或改善演算法的效率，但在求解的過程中仍是會相當花費時間的，但若能採用實體電路和可變電阻來模擬，將來便可直接以電路”量測”的方式來找到均衡的電流值或電壓值，計算的時間將不會受到問題規模的影響，這將可以省去許多計算的過程。

本研究亦透過一大型路網-Sioux-Falls Network 來測試 CSA-Sys 之效用與收斂，同時也測試了 CSA-Sys 在路段為任何擁擠的情況下都能正常執行。這表示 CSA-Sys 已經利用電路的性質克服了路網中雙向路段、任何擁擠情形、單起點對多訖點以及多個需求產生點之問題。

CSA-Sys 計算過程中會由於模擬軟體或是 CSA-Sub 的誤差而造成收斂結果的誤差，雖然誤差的範圍可能不大，未來仍有許多方式可以改善演算法的過程。像是可以藉著一些啟發式解法來對演算法停止時進行修正，嘗試重新找尋一新的方向再開始求解；或是改良 CSA-Sub 的過程，使用更好的逼近方法或是起始步驟；也可以利用啟發式解法加速收斂的過程並更精確地找尋收斂方向等。

另外本研究在計算 CSA-Sub 時是採用 P-SPICE 套裝軟體，P-SPICE 在模擬電路時的功能相當大，但這卻造成了計算上的延遲。本研究只有使用純電阻電路，理論上只需要純電阻電路只需遵守克希赫夫定律(Kirchhoff's law, KCL)便能計算出流量與電壓，利用 P-SPICE 軟體計算 CSA-Sub 並無法了解 CSA-Sub 的運算所耗的時間，因此無法知道此問題的求解速度。本研究屬於將問題的形式轉換成電路的形式來解，運算時間也許能夠有相當大的突破，而為了瞭解本演算法的運算時間，若有一套 C/C++程式語言的克希赫夫定律運算式(KCL Solver)，來與傳統的 FWA 或其改良型的演算法進行比較，則可以更了解本演算法的演算時間。倘若運算時間優於 FWA 或改良型的演算法，則可確定此轉換問題的形式將優於許多未轉換問題的傳統演算法，那麼電路轉換問題的步驟將可以被廣泛地使用在許多其他問題上。

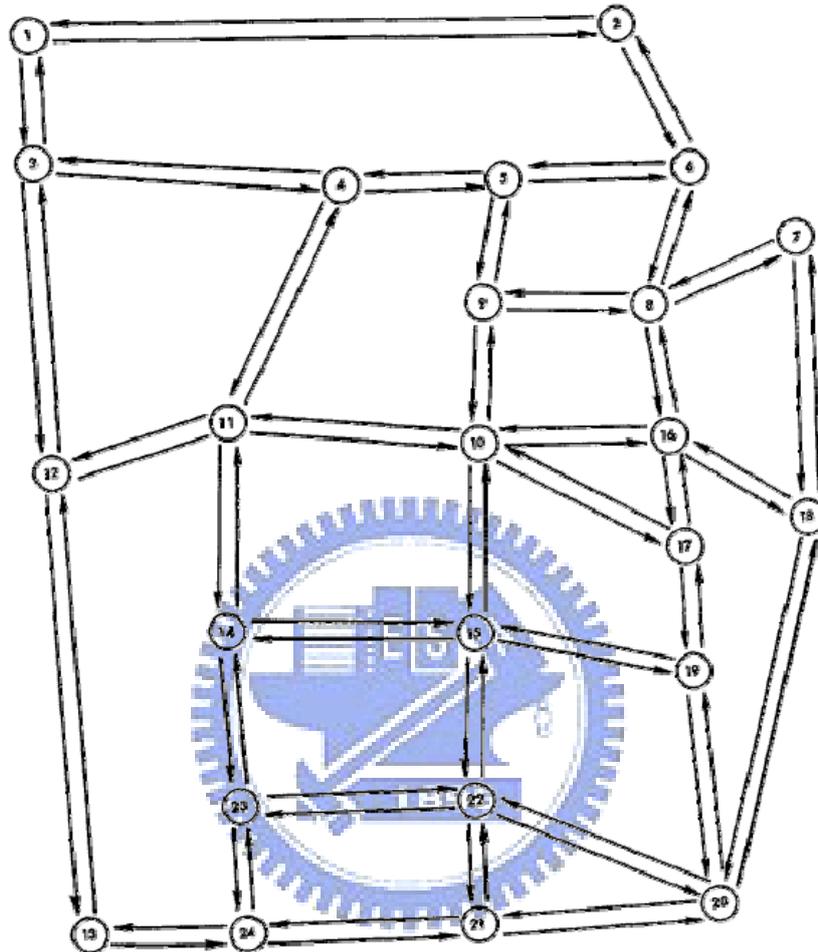


參考文獻

- Bar-Gera, H. (2002) Origin-based algorithm for the traffic assignment problem, *Transportation Science*, 36, pp. 398-417.
- Bar-Gera, H. (2007) Website: Transportation Network Test Problems. Available: <http://www.bgu.ac.il/~bargera/tntp/>.
- Beckmann, M., McGuire, C. B. and Winston, C. B. (1956) *Studies in the economics of transportation*, Yale University Press, New Haven, CT.
- Bell, M. G. H. and Iida, Y. (1997) *Transportation Network Analysis* (New York, the U.S.A.: John Wiley and Sons).
- Boyce, D. (2007) Future research on urban transportation network modeling, *Regional Science and Urban Economics*, 37, pp. 472-481.
- Cho, H., Hwang, M., Huang, H. and Chen, W. (2006) A nonlinear cost function formulation for electrical circuit simulation of traffic assignment, *WSEAS Transactions on Electronics*.
- Dial, R. B. (2006) A path-based user-equilibrium traffic assignment algorithm that obviates path storage and enumeration, *Transportation Research Part B*, 40, pp. 917-936.
- Florian, M. (1984) *Transportation Planning Models* (New York, the U.S.A.: North-Holland).
- Fukushima, M. (1984) A modified Frank-Wolfe algorithm for solving the traffic assignment problem, *Transportation Research Part B*, Vol. 18, No. 2, pp. 169-177.
- Gao, z., Lam, W.H.K., Wong, S.C. and Yang, H. (2004) The convergence of equilibriums with non-monotone line search technique, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 148 , pp. 1-13.
- Huang, K., Cheng, C. and Chuang, T. (2007) Determining the user equilibrium flow of the traffic assignment problem by circuit simulation, *Proceedings of the 2nd International Conference on Transportation Logistics*, Shenzhen, China.
- Leblanc, L.J. (1975) An algorithm for the discrete network design problem, *Transportation Science*, Vol. 9, No. 3, pp. 183-199.
- Leblanc, L.J., Helgason, R.V. and Boyce, D. (1985) Improved efficiency of the Frank-Wolfe algorithm for convex network programs, *Transportation Science*, Vol.

- 19, No. 4, November 1985, pp. 445-462.
- Larsson, T. and Patriksson, M. (1992) Simplicial decomposition with disaggregated representation for the traffic assignment problem. *Transportation Science*, Vol. 26, pp. 4-17.
- Jayakrishnan, R., Tsai, W., Prashker, J. and Rajadhyaksha, S. (1994) A faster path-based algorithm for traffic assignment. *Transportation Research Record*, Vol. 1443, pp. 75-83.
- Migdalas, A. (1993) A regularization of the Frank-Wolfe method and unification of certain nonlinear programming method, *Mathematical Programming*, Vol. 65, pp. 311-345.
- Patriksson, M. (1994) *The traffic assignment problem models and methods* (Utrecht, the Netherlands:VSP).
- Patriksson, M. (2004) Algorithms for computing traffic equilibria, *Networks and Spatial Economics*, 4, pp. 23-38.
- Sheffi, Y. (1985) *Urban transportation networks* (Englewood Cliffs, New Jersey, the U.S.A.: Prentice Hall).
- Sasaki, T. and Inouye, H. (1974) Traffic assignment by analogy to electric circuit, *Proceeding of the 6th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, pp. 495-515.
- Waller, S. T., Mouskos, K. C. and Kamaryiannis D. (2006) A linear model for the continuous network design problem, *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 21, pp. 334-345.
- Wang, D. H. and Zhang, H. X. (2005) New traffic assignment method on circuit theory for urban planning, *Journal of urban planning and development*, 131, pp.30-38.
- Wardrop, J. G. (1952) Some theoretical aspects of road traffic research, *Proceedings of the Institute of the Civil Engineers*, Part II, pp. 325-378.
- Weintraub, A., Ortiz, C. and Gonzalez, J. (1985) Accelerating convergence of the Frank-Wolfe algorithm, *Transportation Research Part B*, 19 (2) 113-122.
- Xu, M., Chen, A. and Gao, Z. (2008) An improved origin-based algorithm for solving the combined distribution and assignment problem, *European Journal of Operational Research*, 188, 354-369.

附錄一、Sioux-Falls Network 路網結構



Sioux-Falls Network 旅次分配矩陣

O/D	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	0	1	1	5	2	3	5	8	5	13	5	2	5	3	5	5	4	1	3	3	1	4	3	1
2	1	0	1	2	1	4	2	4	2	6	2	1	3	1	1	4	2	0	1	1	0	1	0	0
3	1	1	0	2	1	3	1	2	1	3	3	2	1	1	1	2	1	0	0	0	0	1	1	0
4	5	2	2	0	5	4	4	7	7	12	14	6	6	5	5	8	5	1	2	3	2	4	5	2
5	2	1	1	5	0	2	2	5	8	10	5	2	2	1	2	5	2	0	1	1	1	2	1	0
6	3	4	3	4	2	0	4	8	4	8	4	2	2	1	2	9	5	1	2	3	1	2	1	1
7	5	2	1	4	2	4	0	10	6	19	5	7	4	2	5	14	10	2	4	5	2	5	2	1
8	8	4	2	7	5	8	10	0	8	16	8	6	6	4	6	22	14	3	7	9	4	5	3	2
9	5	2	1	7	8	4	6	8	0	28	14	6	6	6	9	14	9	2	4	6	3	7	5	2
10	13	6	3	12	10	8	19	16	28	0	40	20	19	21	40	44	39	7	18	25	12	26	18	8
11	5	2	3	15	5	4	5	8	14	39	0	14	10	16	14	14	10	1	4	6	4	11	13	6
12	2	1	2	6	2	2	7	6	6	20	14	0	13	7	7	7	6	2	3	4	3	7	7	5
13	5	3	1	6	2	2	4	6	6	19	10	13	0	6	7	6	5	1	3	6	6	13	8	8
14	3	1	1	5	1	1	2	4	6	21	16	7	6	0	13	7	7	1	3	5	4	12	11	4
15	5	1	1	5	2	2	5	6	10	40	14	7	7	13	0	12	15	2	8	11	8	26	10	4
16	5	4	2	8	5	9	14	22	14	44	14	7	6	7	12	0	28	5	13	16	6	12	5	3
17	4	2	1	5	2	5	10	14	9	39	10	6	5	7	15	28	0	6	17	17	6	17	6	3
18	1	0	0	1	0	1	2	3	2	7	2	2	1	1	2	5	6	0	3	4	1	3	1	0
19	3	1	0	2	1	2	4	7	4	18	4	3	3	3	8	13	17	3	0	12	4	12	3	1
20	3	1	0	3	1	3	5	9	6	25	6	5	6	5	11	16	17	4	12	0	12	24	7	4
21	1	0	0	2	1	1	2	4	3	12	4	3	6	4	8	6	6	1	4	12	0	18	7	5
22	4	1	1	4	2	2	5	5	7	26	11	7	13	12	26	12	17	3	12	24	18	0	21	11
23	3	0	1	5	1	1	2	3	5	18	13	7	8	11	10	5	6	1	3	7	7	21	0	7
24	1	0	0	2	0	1	1	2	2	8	6	5	7	4	4	3	3	0	1	4	5	11	7	0

Sioux-Falls Network之路段成本參數

Link	起點	訖點	a	b	容量C	Link	起點	訖點	a	b	容量C
1	1	2	6	2	259.00	39	2	1	6	2	259.00
2	1	3	4	2	234.03	40	3	1	4	2	234.03
3	2	6	5	1241	49.58	41	6	2	5	1241	49.58
4	3	4	4	7	171.11	42	4	3	4	7	171.11
5	3	12	4	2	234.03	43	12	3	4	2	234.03
6	4	5	2	3	177.83	44	5	4	2	3	177.83
7	4	11	6	1550	49.09	45	11	4	6	1550	49.09
8	5	6	4	1001	49.48	46	6	5	4	1001	49.48
9	5	9	5	75	100.00	47	9	5	5	75	100.00
10	6	8	2	521	48.99	48	8	6	2	521	48.99
11	7	8	3	119	78.42	49	8	7	3	119	78.42
12	7	18	2	1	234.03	50	18	7	2	1	234.03
13	8	9	10	2306	50.50	51	9	8	10	2306	50.50
14	8	16	5	1157	50.46	52	16	8	5	1157	50.46
15	9	10	3	12	139.16	53	10	9	3	12	139.16
16	10	11	5	75	100.00	54	11	10	5	75	100.00
17	10	15	6	27	135.12	55	15	10	6	27	135.12
18	10	16	4	1080	48.55	56	16	10	4	1080	48.55
19	10	17	8	1930	49.94	57	17	10	8	1930	49.94
20	11	12	6	1550	49.09	58	12	11	6	1550	49.09
21	11	14	4	1061	48.77	59	14	11	4	1061	48.77
22	12	13	3	1	259.00	60	13	12	3	1	259.00
23	13	24	4	893	50.91	61	24	13	4	893	50.91
24	14	15	5	1085	51.28	62	15	14	5	1085	51.28
25	14	23	4	1020	49.25	63	23	14	4	1020	49.25
26	15	19	3	10	145.65	64	19	15	3	10	145.65
27	15	22	3	53	95.99	65	22	15	3	53	95.99
28	16	17	2	401	52.30	66	17	16	2	401	52.30
29	16	18	3	3	196.80	67	18	16	3	3	196.80
30	17	19	2	554	48.24	68	19	17	2	554	48.24
31	18	20	4	2	234.03	69	20	18	4	2	234.03
32	19	20	4	958	50.03	70	20	19	4	958	50.03
33	20	21	6	1373	50.60	71	21	20	6	1373	50.60
34	20	22	5	1130	50.76	72	22	20	5	1130	50.76
35	21	22	2	401	52.30	73	22	21	2	401	52.30
36	21	24	3	790	48.85	74	24	21	3	790	48.85
37	22	23	4	960	50.00	75	23	22	4	960	50.00
38	23	24	2	451	50.79	76	24	23	2	451	50.79

上表的成本函數參數皆為轉換型式路段成本函數： $t(x)=a+(10^{-10}b)x^4$