國立交通大學

工業工程與管理學系

碩 士 論 文

群體對候選人投票排序時處理相同排名的方法

A procedure to discriminate candidates in tie of a group voting system

研 究 生：吳奇鴻

指導教授：劉復華 教授

中 華 民 國 九 十 八 年 十 一 月

群體對候選人投票排序時處理相同排名的方法

A procedure to discriminate candidates in tie of a group voting system

研 究 生：吳奇鴻　　Student：Chi-Hung Wu

指導教授：劉復華 教授　　Advisor：Fuh-Hwa F. Liu, Ph.D.

國 立 交 通 大 學

工 業 工 程 與 管 理 學 系

碩 士 論 文

A Thesis

Submitted to Department of Industrial Engineering and Management

College of Management

National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master of Engineering

in

Industrial Engineering and Management

November 2009

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中 華 民 國 九 十 八 年 十 一 月

群體對候選人投票排序時處理相同排名的方法

學生：吳奇鴻　　　　　　　　　　　　　　　　指導教授：劉復華 教授

國立交通大學工業工程與管理學系碩士班

摘　要

本研究之目的為分析一種普遍的投票結果。針對不可量化指標，由一群評審對若干候選人加以排序，每位評審先對候選人加以排序，彙總排序的結果，得知每位候選人在各項名次的得票次數。使用資料包絡分析法來處理投票後的資料，可求得各名次的權重，以這組權重來計算各候選人的得票加權總分，再以此總分做為排序。若有總分相同時，則為同排名。此現象在實務上造成困擾，本研究之目的乃處理同排名之問題及著重於區辨排名後該如何分配資源給該若干同排名者。以上述的排名模式為第一階段，本研究再增第二階段之處理程序，提出兩種方法來將因總分相同而排名相同的候選人加以排序。第一個是利用同排名之間總合分數最大差距(gap)的觀念；第二個是利用求取最小可將兩者總合分數區分差距，將相同排名的候選人分出高下。並且避免兩大缺點，即是 ε 設定的問題與非高效者的改變不會影響到高效者的排序。

關鍵字：資料包絡分析、共同權重、排序、投票系統

A procedure to discriminate candidates in tie of a group voting system

Student: Chi-Hung Wu Advisor: Fuh-Hwa F. Liu, Ph.D.

Department of Industrial Engineering and Management
National Chiao Tung University
Hsinchu, Taiwan, Republic of China

Abstract

This research is aimed to develop a procedure to analyze the voting result of a voting group. We focus on the indices that can not be quantified. Each voter of the group ranks several candidates in his/her preference order. The first phase of our procedure is employing previous developed model that determines a set of weights for the places in the order therefore the candidates could be ordered according to their aggregated scores. The model is unable to discriminate the candidates in tie with the aggregated score. In this research, we propose to append a decision process as the second phase that consists of a nonlinear mathematical programming model to discriminate candidates in tie. We propose two methods. In the first method, we maximize the gaps of aggregate scores among same ranking units; in the second method, we select the minimum gap that can distinguish same ranking units. And in order to avoid two drawbacks. The first drawback is how to establish Archimedean infinitesimal constant. The second drawback is the inefficient may change the order of efficient candidates.

Keywords: data envelopment analysis, common weights, ranking, voting

致　謝

在此，我要誠摯地感謝我的恩師劉復華老師，劉老師是我這輩子的貴人，在劉老師悉心的指導與訓練下，我覺得我離成功更接近了一大步。老師在學術上的專業與成就，讓學生們佩服的五體投地；以及老師在作研究上嚴謹與實事求是的精神，真的讓我深感敬佩；老師幽默風趣的談話，總是讓笑容點綴了我們的研究所生活。正所謂入寶山不能空手而回，我在劉老師的這座寶山中，很努力的挖走許多寶藏。老師教導我們寫文章要如何才能做到「信、達、雅」；口語報告要邏輯清晰與鞭辟入裡，這真的讓我們的報告能力增加非常多；以及投影片該如何製作才能讓報告的重點呈現出來，老師在這方面的功力真的非常深厚。老師不僅在學術上指導我們，更是我們在生活上與做人處事上的良師益友，老師淵博的學問，讓我們的視野更加寬廣，老師一切用心的付出，是希望我們未來出社會能贏在起跑點，這份苦心我將永遠感念在心。老師，您是成功的教育家，也是改變我一生的貴人，學生在此獻上十二萬分的感謝。

同時，也非常感謝給予我們寶貴意見的口試委員老師：交通大學資訊管理研究所林妙聰老師、交通大學運輸科技與管理學系姚銘忠老師。承蒙老師們在口試時，用心的給予指導與建議，讓這篇論文更臻完善，學生由衷的感謝。

也要感謝實驗室的正立學長與妗娟學姐，熱心提出想法與意見；還有我研究所的好同學：逸夫、俊宏、裕興，感謝有你們一路上的鼓勵與扶持；以及實驗室學弟：宗賢、晏生、種慶，感謝有你們這一年來的陪伴與支持；最後是對我無私支持與照顧的父母親，有這些幫助我的人，才能讓這篇論文順利完成。在研究的期間參與劉老師的國科會專題研究計劃 97-2221-E-009-103 及 96-2221-E-009-164，得到經費補助，特此表示謝意。本論文之智產權實為研究計劃之一部分。

學生吳奇鴻 謹誌於

交通大學工業工程與管理學系

中華民國九十八年十一月

目　錄

表目錄

圖目錄

符號表

DMU ：Decision-Making Unit, 決策單位

UOA ：Unit of Assessment, 受評單位

m ：DMU 或 UOA 的個數(候選人個數)

k ：產出項指標的個數(票選候選人的個數)

s ：投入項指標的個數

j ：第 j 項產出項指標(票選第 j 名得票)

r ：第 r 項投入項指標

i ：決策單位或受評單位(候選人單位)

o ：當主角的決策單位或受評單位

u_{oj} ：$DMU_o(UOA_o)$為主角時第 j 項產出項指標的權重

t_{or} ：$DMU_o(UOA_o)$為主角時第 r 項投入項指標的權重

u_{oj}^* ：$DMU_o(UOA_o)$為主角時第 j 項產出項指標的最佳解權重

t_{or}^* ：$DMU_o(UOA_o)$為主角時第 r 項投入項指標的最佳解權重

u_{ij} ：第 i 個 DMU (UOA)的第 j 項產出項指標的權重

t_{ir} ：第 i 個 DMU (UOA)的第 r 項投入項指標的權重

y_{oj} ：$DMU_o(UOA_o)$為主角時第 j 項產出項指標值

x_{or} ：$DMU_o(UOA_o)$為主角時第 r 項投入項指標值

y_{ij} ：第 i 個 DMU (UOA)的第 j 項產出項指標值

x_{ir} ：第 i 個 DMU (UOA)的第 r 項投入項指標值

E_o^* ：在投入導向分數規劃模式中，DMU_o 為主角時，所求得最佳績效值

η_o ：在投入導向乘數型線性規劃模式和對偶模式中，DMU_o 為主角時，所求得最佳績效值

μ_o ：投入導向對偶模式中，DMU_o 所有投入量等比率縮減之尺度

g_o^* ：在產出導向分數規劃模式中，DMU_o 為主角時，所求得最佳績效值

δ_o ：在產出導向乘數型線性規劃模式和對偶模式中，DMU_o 為主角時，所求得最佳績效值

φ_o ：產出導向對偶模式中，DMU_o所有產出量等比率增加之尺度

λ_i ：在 DEA 對偶模式中，DMU_o為主角時，所賦予 DMU_i的權重

λ_i^* ：在 DEA 對偶模式中，DMU_o為主角時，所賦予 DMU_i的最佳解權重

s_j^+ ：在 DEA 對偶模式中，第 j 項產出項指標的超額變數

s_r^- ：在 DEA 對偶模式中，第 r 項投入項指標的差額變數

s_j^{+*} ：在 DEA 對偶模式中，第 j 項產出項指標的最佳解超額變數

s_r^{-*} ：在 DEA 對偶模式中，第 r 項投入項指標的最佳解差額變數

ε_j^O ：第 j 項產出項指標的阿基米德常數

ε_r^I ：第 r 項投入項指標的阿基米德常數

Θ_i^* ：各 DMU_i的交叉效率值

θ_{io}^* ：DMU_o經過計算所求得一組最佳解權重，代入 DMU_i所求得之績效值

θ_i ：在共同權重下，使用 CCR 模式計算，各 UOA_i的績效值

T_r ：第 r 項投入項指標的共同權重

U_j ：第 j 項產出項指標的共同權重

v_{oj} ：DMU_o(UOA_o)為主角時在第 j 名名次所得的票數

v_{ij} ：DMU_i在第 j 名名次所得的票數

W_j ：第 j 名名次的權重

W_j^* ：第 j 名名次的最佳解權重

$\hat{W}_j$ ：第 j 名名次標準化後的權重

W ：所有權重的向量集合

$\hat{W}$ ：經過標準化後的權重向量集合

α ：標準化變數

Z_i ：各候選人的總合分數

ε ：阿基米德常數(區辨因子)

ε_1^* ：在第一階段投票模式下，所求得的最大區辨因子

ε_2 ：經過調整變數改變後的區辨因子

h　　：調整權重的變數

N　　：評審的總人數

C　　：同排名候選人的集合

a_i　　：第 i 個同排名候選人

a_l　　：第 l 個同排名候選人

l　　：相同排名者的單位

R　　：原始的候選人排序序列

d　　：寬放後的區辨因子

n　　：相同排名候選人集合中的個數

b　　：最小區辨差距的下限值

I　　：所有決策單位之集合

τ　　：寬放比例

1 簡介

我們以某一家公司在挑選供應商為例說明本研究之問題。假設有 20 家供應商參與角逐，該公司打算選取 5 家供應商來當作合作對象。該公司專業經理人或是專家(評審)研訂出兩類評選指標:可量化指標包含供應商的產品良率、交期延誤率、公司資本額和產品價格等；不可量化指標包含供應商的信用程度、公司管理制度和技術先進程度等。可量化指標可經由一般評量模式獲得分數，而不可量化的指標則可利用投票的方法來獲得分數，依照專業經理人訂定的可量化指標與不可量化指標的比例權重來計算各供應商的綜合加權分數，評選工作得以完成。

處理不可量化指標的方法如下：每位評審針對每一項不可量化之指標，對 20 家供應商進行投票，選取其前五名，分別給予一、二、三、四、五的名次。進行投票活動之後，可統計每家供應商的各名次票數。但是如何制訂一套此五個名次的權重? (Cook & Kress, 1990)針對此投票系統提出了一套評量模式，該模式是源自於資料包絡分析法(Data Envelopment Analysis, DEA)，權重由評量系統自行決定，獲得各名次的權重後，便可依據各供應商得票統計，求得其加權後之總合分數(aggregate score)，此分數即為該供應商在該項不可量化指標之得分。

(Cook & Kress, 1990)最早提出的評量投票系統模式，以及 (Liu & Tsai, 2009)所提出的權比非遞增模式，兩者皆採用共同權重，可以用來排序所有候選人，但是仍然會遇到若干個候選人總合分數相同，造成排名上無法分出高下的問題。我們提出兩個方法，第一個是利用同排名之間總合分數最大差距(gap)的觀念，來將相同排名的候選人予以差異化;第二個是利用求取最小可將兩者總合分數區分的差距，將相同排名的候選人分出高下。藉由總合成績來排序，可以解決相同排名的候選人之間無法排序的問題。

(Liu & Tsai, 2009)提出了算數模式(Arithmetic Progression, AP)和幾何模式(Geometric Progression, GP)，該 GP 模式新增具有權重比例非遞增的特性。其利用數學規劃模式來獲得一套各個名次的權重，以計算各候選人的總合分數。此種利用多人評選之決策方式，簡單易懂，解決了許多無法量化之決策評選問題。但是如同 (Cook & Kress, 1990)提出的模式，皆會遇到若干個候選人排名相同的困擾。在這種情況下，由於同排名候選人的總合分數相同，我們常理的認定(common sense)是哪位候選人得第一名票數越多者獲勝，若獲得第一名的票數皆相同時，則比較得第二名的票數，依此類推。在這種常理的認定之下，我們不光只是在乎區辨後的排名，我們更在乎的是區辨後的總合分數，因為本研究的重點在於區辨排名後該如何分配資源給該若干同排名者。利用本研究的兩個方法可以得到一組區辨同排名的共同權重，將這組權重代入計算後可得到新的總合分數，我們依照其總合分數的比例來分配資源。以分配獎金為例，假設有若干後選人同排名，在本研究的方法下可以區辨出同排名者的排序，但如果將獎金平均分配予該若干後選人，實屬不公平，故本研究依照區辨排名後的總合分數比例，來分發獎金，故區辨後較佳的候選人可以分配到較多的獎金，這樣方為合理且公平。

進行評選之投票問題，除了可應用於供應商之選擇的問題以外，於日常生活之決策相關問題常常應用。如常見之選舉投票活動等等，在許多公司或是民間團體票選幹部代表時，其投票制度是投票者選出心中的前幾名，按照排序給予投票。奧林匹克運動會中的國家排名，即是採用總金牌數來做排序，但是這種方法將會讓銀牌與銅牌的得獎失去意義。因此本研究採用的權比非遞增模式，不僅可以套用在選舉制度上，也可以套用在體育競賽中隊伍的排名。

2 文獻回顧

以下分為三個層面來做相關文獻探討，由廣入微的角度來分析，第一部分是DEA 的介紹與回顧；第二部分是有關排序的相關文獻探討；第三部分是關於投票模型的文獻回顧。

2.1 DEA 的介紹與回顧

DEA 最早的起源觀念來自於柏瑞圖(Pareto)最佳境界。在二十世紀初義大利經濟學家柏瑞圖提出非凌駕解(non-dominance solution)的觀念，現今稱之為柏瑞圖最佳境界，此觀念是對於受評者最有利的評比方式，學者一直努力由此觀念出發，嘗試發展評比方式。最早出現 DEA 這個名詞是由 (Charnes et al., 1978)提出，在建構生產函數之過程中，由於所有資料(data)均被包絡(envelope)於生產函數之下，因此將此種評比方法稱之為資料包絡分析法。DEA 就是採取柏瑞圖最佳境界的觀念，評估一群決策單位(Decision-making unit, DMU)的相對績效，所評估出來的績效值是在客觀環境下對 DMUs 最有利之結果，因此廣為一般所接受。(Charnes et al., 1978)提出 CCR 模式(P1)評比 m 個 DMU 的績效。CCR 模式將評量指標分為 s 個望小的投入項以及 k 個望大的產出項，而 x_{ir} 和 y_{ij} 分別代表 DMU_i 的第 r 項投入項指標與第 j 項產出項指標之已知常數值。分別讓每個 DMU 作主角，稱為 DMU_o，故 t_{or} 和 u_{oj} 分別代表 DMU_o 在對主角自己績效最高的狀況下，選取的的第 r 項投入項指標與第 j 項產出項指標之權重。主角 DMU_o 的績效值由計算後的權重代入所得。CCR 模式在固定規模報酬的假設下，將 DMUs 分成高效及非高效兩類，但這同時也是 DEA 有所不足的地方，因為績效值是相對的，所以並沒有一個客觀的準則去判別所有 DMUs 的優劣順序。而其數學規劃模式如下所示：

(P1) DEA-CCR-投入導向-分數規劃模式

$$E_o = \max \frac{\sum_{j=1}^{k} y_{oj} u_{oj}}{\sum_{r=1}^{s} x_{or} t_{or}} \tag{1}$$

$$s.t. \quad \frac{\sum_{j=1}^{k} y_{ij} u_{oj}}{\sum_{r=1}^{s} x_{ir} t_{or}} \le 1, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{1.1}$$

$$t_{or} \ge \varepsilon_r^I > 0, \quad r = 1, \ldots, s, \tag{1.2}$$

$$u_{oj} \ge \varepsilon_j^O > 0, \quad j = 1, \ldots, k. \tag{1.3}$$

其目標式之值 E_o 為 DMU_o 的績效值，即決定一組權重 t_{or} 和 u_{oj}，使績效值為最大。限制式(1.1)表示各決策單位 DMU_i 之績效值不超出 1。當績效值為 1 時，相對於其他決策單位為高效，當績效值小於 1 時，相對於其他決策單位為非高效。限制式(1.2)、(1.3)表示，投入指標的權重與產出指標的權重至少大於極小正值，ε_r^I、ε_j^O 皆為一極小之正值，稱之為阿基米德常數(positive Archimedean infinitesimal constant)。而我們探討投入與產出的因果關係，若投入項指標的值(x_{ir})越小對績效值越有利時，表示該指標具有望小特性，稱為望小指標。換言之，若產出項指標的值(y_{ij})越大對績效值越有利時，表示該指標具有望大特性，稱為望大指標。

由於模式(P1)的目標函數為分數規劃型式，求解不易，因此將模式經由固定分母的值轉換成線性規劃，將分母設限為 1，可將線性模式寫成模式(P2)。

(P2) DEA-CCR-投入導向-線性規劃模式

$$\eta_o = \max \sum_{j=1}^{k} y_{oj} u_{oj} \tag{2}$$

$$s.t. \quad \sum_{r=1}^{s} x_{or} t_{or} = 1, \tag{2.1}$$

$$\sum_{j=1}^{k} y_{ij} u_{oj} - \sum_{r=1}^{s} x_{ir} t_{or} \leq 0, \quad i = 1,\ldots,m, \tag{2.2}$$

$$t_{or} \geq \varepsilon_r^I > 0, \quad r = 1,\ldots,s, \tag{2.3}$$

$$u_{oj} \geq \varepsilon_j^O > 0, \quad j = 1,\ldots,k. \tag{2.4}$$

模式(P2)的最佳解與模式(P1)相同，除此之外任何一個線性規劃問題均有存在其對偶問題(dual problem)，如模式(P3)。轉換成對偶模式可以得知非高效者在投入與產出上需要改善的量：

(P3) DEA-CCR-投入導向-對偶模式

$$\eta_o = \min \ \mu_o - \left(\sum_{r=1}^{s} \varepsilon_r^I s_r^- + \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j^O s_j^+ \right) \tag{3}$$

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ir} \lambda_i + s_r^- = \mu_o x_{or}, \quad r = 1,\ldots,s, \tag{3.1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ij} \lambda_i - s_j^+ = y_{oj}, \quad j = 1,\ldots,k, \tag{3.2}$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 1,\ldots,m, \tag{3.3}$$

$$s_r^- \geq 0, \quad r = 1,\ldots,s, \tag{3.4}$$

$$s_j^+ \geq 0, \quad j = 1,\ldots,k, \tag{3.5}$$

$$\mu_o \ \textit{free in sign.} \tag{3.6}$$

在模式(P3)中 s_r^- 與 s_j^+ 分別為差額變數(slack variable)與超額變數(surplus variable)，此方法為線性規劃中，將不等式轉化為等式所常用的變數。而變數 μ_o 為對應模式(P2)的限制式(2.1)，根據對偶性質，此變數可為正值或負值，但實際上此變數所代表的是 DMU_o 的績效值，故其最佳解一定是正值。一個決策單位要為相對有效率時，充分且必要條件為 μ_o^*=1 且 $s_r^{-*}=s_j^{+*}$=0。符號 λ_i 為在評量 DMU_o 時所欲求之 DMU_i 的權重，若求出之解 λ_i^* 為正值，則 DMU_i 為高效。上述的績效值都是在相同的水準下，去比較投入資源的使用情形，都是從投入導向(input-oriented)的 CCR 模式來評估績效。此外，在相同投入水準之下，比較產出達成的狀況，可以從產出導向(output-oriented)的 CCR 模式來評估績效，其比率型式如模式(P4)所示：

(P4) DEA-CCR-產出導向-分數規劃模式

$$g_o = \min \frac{\sum_{r=1}^{s} x_{or} t_{or}}{\sum_{j=1}^{k} y_{oj} u_{oj}} \tag{4}$$

$$s.t. \quad \frac{\sum_{r=1}^{s} x_{ir} t_{or}}{\sum_{j=1}^{k} y_{ij} u_{oj}} \geq 1, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{4.1}$$

$$t_{or} \geq \varepsilon_r^I > 0, \quad r = 1, \ldots, s, \tag{4.2}$$

$$u_{oj} \geq \varepsilon_j^O > 0, \quad j = 1, \ldots, k. \tag{4.3}$$

在比較模式(P1)與(P4)之後，可以明顯看出投入導向之 CCR 模式所求得的目標函數績效值，恰為產出導向之 CCR 模式所求得的目標函數績效值之倒數，兩

者績效值實際上均為相等。對於產出導向之 CCR 模式之固定模式報酬情形的推導，其上述討論相同，不再贅述，如模式(P5)至模式(P6)所示：

(P5) DEA-CCR-產出導向-線性規劃模式

$$\delta_o = \min \sum_{r=1}^{s} x_{or} t_{or} \tag{5}$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{k} y_{oj} u_{oj} = 1, \tag{5.1}$$

$$\sum_{r=1}^{s} x_{ir} t_{or} - \sum_{j=1}^{k} y_{ij} u_{oj} \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{5.2}$$

$$t_{or} \geq \varepsilon_r^I > 0, \quad r = 1, \ldots, s, \tag{5.3}$$

$$u_{oj} \geq \varepsilon_j^O > 0, \quad j = 1, \ldots, k. \tag{5.4}$$

(P6) DEA-CCR-產出導向-對偶模式

$$\delta_o = \max \varphi_o + \left(\sum_{r=1}^{s} \varepsilon_r^I s_r^- + \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j^O s_j^+ \right) \tag{6}$$

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ir} \lambda_i + s_r^- = x_{or}, \quad r = 1, \ldots, s, \tag{6.1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} y_{ij} \lambda_i - s_j^+ = \varphi_o y_{oj}, \quad j = 1, \ldots, k, \tag{6.2}$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{6.3}$$

$$s_r^- \geq 0, \quad r = 1, \ldots, s, \tag{6.4}$$

$$s_j^+ \geq 0, \quad j = 1, \ldots, k, \tag{6.5}$$

$$\varphi_o \ \textit{free in sign}. \tag{6.6}$$

在 DEA 中，主要求解的觀念，可分為輪流當主角與共同權重。傳統的 CCR 即是輪流當主角的代表；而 (Roll et al., 1991)所提出的共同權重，是另外一種的求解觀念。輪流當主角的核心概念是，由各 DMUs 去找尋一組對自己最有利的權重來衡量績效，每個 DMU 可以盡力展現自己的個人特色，這種觀念適合用在不同部門或是領域之間的評比。共同權重的核心概念是，由主管或上司來決定一套評比標準，獲得一組共同的權重，來評量所有受評單位(Unit of Assessment, UOA)的表現，這種觀念適合用在上層決策者評量自己受評單位的表現情形。而輪流當主角的模式，只能區分出高效和非高效兩群，但高效之間無法比出高下。且非高效之間也無法排序，因為其計算所得的績效值為相對績效，所參考的高效對象都不一樣。共同權重計算所得的績效值為絕對績效，可以直接對所有 UOAs 作排序；但是仍然會存在若干個高效的績效值皆為 1，或是若干個非高效的績效值相等的問題。因此，如何解決 DEA 中的排序(ranking)問題，便是當前大課題。本研究主要是針對共同權重中的若干相同排名的問題，進行研討。

2.2 Ranking 相關文獻

(Adler et al., 2002)針對早期 DEA 排序研究作了回顧，分成六類來探討。第一類為利用交叉效率矩陣的評估方式，讓自我與同儕之間相互評比。第二類是有關超高效方法評比，藉以透過效率前緣的改變分析，以及線性規劃模式的運算排序，剔除效率前緣上的評估單位。第三類是根據標竿測量的方法，讓它被選為其他單位的目標來排序。第四類是利用多變量統計技巧，通常在 DEA 將評估單位區分為二後使用。第五類是研究相關低效的評估單位間排序。最後一類是透過彙集決策者與 DEA 方法，結合多準則方法求得優先信息的方式。

(Roll et al., 1991)最早提出共同權重的觀念，共同權重是指找到一組共同的權

重來評估所有的受評單位，大家都使用相同的權重，就可以避免傳統 DEA 中投影到包絡面參考不同高效值因而造成無法排序的困難，所以共同權重，是用來解決非高效之間無法排序最常見的方法。以 CCR 為例，該共同權重求解模式如下：

$$\text{(P7)}\quad \max \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\theta_i \tag{7}$$

$$s.t.\quad \theta_i = \frac{\sum_{j=1}^{k} y_{ij}U_j}{\sum_{r=1}^{s} x_{ir}T_r} \le 1, \quad i=1,\ldots,m, \tag{7.1}$$

$$T_r \ge \varepsilon_r^I > 0, \quad r=1,\ldots,s, \tag{7.2}$$

$$U_j \ge \varepsilon_j^O > 0, \quad j=1,\ldots,k. \tag{7.3}$$

模式(P7)是以 CCR 的投入導向為例，θ_i 代表在共同權重下，各 UOA_i 的績效值，T_r 和 U_j 分別代表第 r 項投入項指標與第 j 項產出項指標之共同權重。目標式為最大化所有 UOAs 的績效總平均。此模式的優點是各受評單位立足於同一基準點上接受評量，缺點則是抹煞了各受評單位應可自由發展其特殊性之考量。

(Andersen & Petersen, 1993)為了將效率前緣上高效之決策單位加以排序，提出了剔除資料的方法，將高效的決策單位，分別從資料集合中剔除，其餘的 DMUs 為基礎，並計算該被剔除的 DMU 到包絡面距離，跟 DMU 到原點距離的比例，以被剔除的 DMU 作為主角來計算績效值，但是計算出來的績效值會超過 1，故我們稱之為超高效。其模式如(P8)所示，I 為所有決策單位之集合，o 為主角。

$$\text{(P8)}\quad \min \mu_o \tag{8}$$

$$s.t.\quad -\sum_{i\in I-o}^{m} x_{ir}\lambda_i + \mu_o x_{or} \ge 0, \quad r=1,\ldots,s, \tag{8.1}$$

$$\sum_{i\in I-o}^{m} y_{ij}\lambda_i \geq y_{oj}, \quad j=1,\ldots,k, \tag{8.2}$$

$$\lambda_i \geq 0, \quad i\in I-o, \tag{8.3}$$

$$\mu_o \ free\ in\ sign. \tag{8.4}$$

模式(P8)採用 CCR 投入導向的對偶模式求解。此 AP 模式會因為樣本太小造成所有 DMUs 之績效值均為高效，以及原始資料規模的問題造成所算出來的績效值有偏差的狀況，在後續的研究發現在評估上可能遇到無可行解的問題。

(Doyle & Green, 1994)為了解決 DEA 多年來排序問題，提出了交叉效率評比(cross-efficiency)，其衡量方法是以模式(P2)中各個 DMU_o 輪流當主角的情況下所計算出來的權重，來評估其它 DMU_i 之績效值，將此績效值加總取其平均作為交叉效率值。下列為各個 DMU_i 交叉效率值的求解步驟：

1. 利用 CCR 模式，求得在每個 DMU_o 輪流當主角的情況下，選擇一組對主角自己最有利的權重。
2. 將步驟一所求得的主角 DMU_o 的權重代入其它 DMU_i，計算各個 DMU_i 之績效值，利用方程式(9)計算可得到各個 θ_{io}^*。
3. 將步驟二所得到的各個 DMU_i 在不同主角 DMU_o 下之評比所得到的績效值 θ_{io}^*，利用方程式(9.1)將所得到的績效值加總取其平均，稱為交叉效率值 Θ_i^*，以作為排序的基準。

$$\theta_{io}^* = \frac{\sum_{j=1}^{k} y_{ij}u_{oj}^*}{\sum_{r=1}^{s} x_{ir}t_{or}^*}, \quad o=1,\ldots,m, i=1,\ldots,m. \tag{9}$$

$$\Theta_i^* = \sum_{o=1}^{m} \theta_{io}^* / m, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{9.1}$$

由上述步驟得知，在每個 DMU_o 輪流當主角之情況下，會得到一組最佳解權重 u_{oj}^* 和 t_{or}^*，利用主角 DMU_o 所計算出來的這組最佳解權重，分別代入其它 DMU_i，並計算其績效值 θ_{io}^*，將每個 DMU_o 輪流當主角所評比的 DMU_i 之績效值加總取其平均，稱為交叉效率值 Θ_i^*。不同於 DEA 的 CCR 模式自我評估的觀念，交叉效率評比是依據同儕評估的觀念，對交叉效率直觀的瞭解且討論每個單位的相對價值。此優點是可以做全體 DMUs 的排序，但較有爭議的地方是，自己的績效值要用別人的權重來衡量，可能需要加以探討。

投票模式其實是只有產出項而沒有投入項的 DEA 模式，故投票系統中也會遇到相同排名的問題，這方面也有相關的文獻進行探討。(Green et al., 1996)進一步將交叉效率評比跟投票系統做結合，他們改善了當初交叉效率評比用其他 DMUs 的最佳權重來評比自己的績效時，是用加總平均的方法，這代表每個 DMUs 對自己的重要程度都是一樣的，故作者將方法改為每個 DMUs 計算出來最好的績效值，佔所有人最好的績效值總和的比例，就是該 DMU 的最佳權重對其他人的重要程度。但在此方法中仍有兩個缺點，第一個是作者將 ε 值設為 0，這有可能會造成最後一名得票的權重為 0，即是代表最後一名的得票數不具意義，這在實務上來說，是不合理的；再者也可能造成各名次得票的權重相等，這即是說明不同名次得票的重要性是相等，那就失去公平性了。第二個缺點是此方法在作全排序時，是所有 DMUs 一起進行計算，會產生非高效者的改變去影響到高效者排序的問題。在投票系統模式中指的高效即為總合分數為 1 者，非高效為總合分數小於 1 者。

(Hashimoto, 1997)參考 (Andersen & Petersen, 1993)所提出將生產效率前緣上高效決策單位加以排序的模式，利用將高效決策單位分別從資料集合中剔除，在其餘 DMUs 為基礎，計算被剔除的主角 DMU_o 總合分數，並加以排序。但是缺點還是其並未針對 ε 的問題作解決；加上此方法依然會產生非高效者的改變去影響到高效者排序的問題，因為當非高效者改變時，高效者輪流剔除時，所得到的包絡面已經改變，因此計算出來的總合分數會有所改變。

(Noguchi et al., 2002)認為 ε 的設定很重要，會影響權重可行解區域的改變，故 ε 設 0 並不是個好方法，因此作者提出弱排序(weak ordering)與強排序(strong ordering)法則。弱排序如方程式(10)：

$$W_j - W_{j+1} \geq \varepsilon, \quad j = 1, \ldots, k-1, \quad and \quad W_k \geq \varepsilon. \tag{10}$$

在投票者心目中的前面 k 名，分別給予 k 個候選人排序名次，每位候選人 i 可獲得票數 v_{ij} $(i = 1,\ldots,m)$，故 W_j 表示每張第 j 名得票的權重(j=1,…,k)。弱排序是認為每個名次得票數的權重不能相等，至少要有一點差距，而最後一名的權重也至少要是正數；強排序如方程式(11)：

$$W_1 \geq 2W_2 \geq 3W_3 \geq \ldots \geq kW_k, \quad and \quad W_k \geq \varepsilon = \frac{2}{Nk(k+1)}. \tag{11}$$

方程式(11)中的 N 是指所有評審的人數。強排序是強調每個名次得票的權重相減會呈現遞減情況，利用這種假設去推導出權重之間的關係，並且推導出計算 ε 的下界值的公式。加入強排序與弱排序的限制後，可以計算得到總合分數。但由於是輪流當主角的方式，故所得總合分數為相對分數，無法排序。故作者利用交叉效率評比的方法來獲得全排序，但這方法的缺點還是非高效者的改變會影響到高效者的排序。

(Obata & Ishii, 2003)也針對投票系統的排序問題提出方法，主要是解決高效間無法排序問題，其先將非高效的候選人剔除後，再利用標準化的權重去衡量高效群，因為作者認為既然要評比高效 DMUs 誰較強，就應該建構在相同大小(size)的權重之下，這樣的比較才有意義，利用此方法得到一組標準化分數(normalized preference scores)，藉此來做高效的排序。v_{oj} 代表 DMU_o 為主角時在第 j 名名次所獲得的票數，W 代表所有權重的向量集合，α 為標準化的轉換變數，$\hat{W}$ 則為經過標準化後的權重向量集合，$\hat{W}_j$ 為第 j 名名次標準化後的權重，$\hat{Z}_o^{(1)}$ 為經過權重標準化後，各位候選人的總合分數。其標準化的模式如(P9)：

$$\text{(P9)} \quad \hat{Z}_o^{(1)} = \max \sum_{j=1}^{k} v_{oj} \hat{W}_j \tag{12}$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{k} v_{oj} W_j = 1, \tag{12.1}$$

$$\sum_{j=1}^{k} v_{ij} W_j \le 1, \quad i = 1, \ldots, m, \quad \textit{for all efficient} \quad i \ne o, \tag{12.2}$$

$$W_j - W_{j+1} \ge \varepsilon, \quad j = 1, \ldots, k-1, \tag{12.3}$$

$$W_k \ge \varepsilon \ge 0, \tag{12.4}$$

$$\hat{W} = \alpha W, \quad \alpha > 0, \tag{12.5}$$

$$\left\| \hat{W} \right\| = 1, \tag{12.6}$$

$$\textit{where} \left\| \cdot \right\| \textit{is a certain norm.}$$

該作者將權重的大小用 norm 來鎖定，不管是 1 norm 或是 2 norm 的大小都鎖定為 1，並透過 α 的轉換，可將計算出來的權重轉換為相同 size 下的權重，可

得到新的總合分數來分出高下。由限制式(12.2)可以知道，此模式評比高效 DMUs 誰強誰弱時，僅需要高效者的參與，不需要其他不相關的非高效 DMUs 參與，故此方法的優點，是非高效者的改變不會影響到高效者的排序。但是該作者還是無法解決 ε 設定問題，故將 ε 設為 0，故存在著可能會造成最後一名得票的權重為 0，以及可能造成各名次得票的權重相等的問題。

（Wang & Chin, 2007）則將低效包絡面的觀念跟投票機制作結合，其使用的投票模式是 (Noguchi et al., 2002)所提出的模式，將該模式轉換成低效模式，模式如(P10)：

$$(\text{P10})\quad Z_o^{(2)} = \min \sum_{j=1}^{k} v_{oj} W_j \tag{13}$$

$$s.t.\quad \sum_{j=1}^{k} v_{ij} W_j \ge 1, \quad i = 1,\dots,m, \tag{13.1}$$

$$W_1 \ge 2W_2 \ge \dots \ge kW_k, \tag{13.2}$$

$$W_k \ge \varepsilon = \frac{2}{Nk(k+1)} \ge 0. \tag{13.3}$$

模式(P10)是求取相同排名候選人的最小相對分數(least relative total scores)。由於該排名相同的候選人，都擁有相同的最大相對分數(best relative total scores)，故必須比較最小相對分數，誰的最小相對分數較大，誰就是優勝者，藉此來做同排名的排序。但是此模式為輪流當主角，該方法是用非低效的分數做比較，但是非低效彼此之間參考的低效對象並不一樣，故計算後的最小相對成績無法作排序，但該作者拿來作排序，可能有些爭議。且 ε 值是經由推導而得，但是在轉成低效模式後， ε 值的變化卻不影響結果，這樣便失去 (Cook & Kress, 1990)當初制

定 ε 是區辨強度因子的意義。

(Liu & Tsai, 2009)利用數學規劃的方式來解決同排名問題，作者將各名次得票的權差拉大，並且拉低最後一名得票的權重，以提高前面名次的權重，藉此改變權重最佳解。其模式為(P11)所示：

$$\text{(P11)} \quad \varepsilon_{\max}^{(LT)} = \max \varepsilon_2 \tag{14}$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{k} v_{ij} W_j \le 1, \quad i \in C, \tag{14.1}$$

$$W_j - W_{j+1} \ge \varepsilon_2 > 0, \quad j = 1, \ldots, k-1, \tag{14.2}$$

$$W_k \ge \varepsilon_2 - h > 0, \tag{14.3}$$

$$h \le \varepsilon_1^*. \tag{14.4}$$

模式(P11)中的 C 是指相同排名候選人的集合，最後一個名次的權重則利用 h 變數來做調整，而 h 必須不大於第一階段所求出的最大區辨因子 ε_1^* ，並找出一個新的區辨因子 ε_2。此方法的優點在於不需要人為的介入設定，可由系統自行決定權重；且相較於其他文獻皆是利用輪流當主角的方式求解，此作者則採用共同權重觀念跟投票系統作結合，使各候選人可得到絕對分數，而非相對分數，故沒有參考對象不同而無法排序的問題；且作者證明該方法可使各得票權重的權差呈現比例增加，以確保合理性。因為此方法目標式為求 ε_2 的極大值，故沒有 ε_2 設定的問題，也不會出現 ε_2 為 0 的情況；且評比同排名時，僅將同排名者代入模式中計算，並無其他候選人參與，故不會發生非高效者的改變會影響到高效者的排序。

(Liu & Hai, 2005)針對供應商的選擇，採用投票的方式進行，利用層級分析法(Analytic Hierarchy Process, AHP)來進行供應商的評選，並提出投票式層級分析法(Voting Analytic Hierarchy Process, VAHP)，以取代既有的 AHP 成對比較的方法。此 VAHP 可以分成三個步驟，第一個步驟，是由每一位決策者針對受評估目標進行排序，以避免兩兩比較方法的不一致性問題；第二個步驟，運用 (Noguchi et al., 2002)所提出的模式，求出排序之權重值；第三個步驟，計算出受評估目標的總合分數，以排列優先順序。並且也可使用多目標二元整數規劃模式，以個別受評單位進行組合評估方式，評選不同組合之供應商。改善了原本兩兩比較方法的缺失，使得整體評比能夠更加客觀與公平。

2.3 投票相關文獻

投票系統機制是指由一群投票者(專家)對於一個以上的候選人做出心目中排序的投票選擇，即每個投票者可以從 m 個候選人中選擇 k 個候選人做排序投票，也就是在投票者心目中的前面 k 名，分別給予 k 個候選人排序名次。投票之後統計出每個候選人 i ($i=1,\ldots,m$)其得到第一名的票數 v_{i1}、第二名的票數 v_{i2}、…、第 k 名的票數 v_{ik}。為了得知候選人的總排名，便賦予各名次得票數權重，以 W_j 表示每張第 j 名得票的權重($j=1,\ldots,k$)，可加權計算出候選人 i 其總合分數 $Z_i^{(3)}$。

$$Z_i^{(3)} = \sum_{j=1}^{k} v_{ij} W_j, \quad i = 1,\ldots,m. \tag{15}$$

依據上述的方程式，候選人總合分數會受到權重的影響而改變，因此權重如何設定非常重要，應該給予客觀的權重設定，以免造成評選的結果不公平。(Cook & Kress, 1990)提出一個方式，於優先順序的選舉(preferential election)中，使用 DEA 來對候選人排序。每位候選人 DMU_i ($i=1,\ldots,m$)輪流當主角，其總合分數以

其最有利的權重($W_1, W_2, \cdots, W_k$)計算。其模式如下：

$$\text{(P12)}\quad Z_o^{(4)} = \max \sum_{j=1}^{k} v_{oj} W_j \tag{16}$$

$$s.t.\quad \sum_{j=1}^{k} v_{ij} W_j \le 1, \quad i = 1,\ldots,m, \tag{16.1}$$

$$W_j - W_{j+1} \ge d\left(j,\varepsilon\right), \quad j = 1,\ldots,k-1, \tag{16.2}$$

$$W_k \ge d\left(k,\varepsilon\right) \ge 0. \tag{16.3}$$

限制式(16.1)是限制每位候選人的總合分數最多不能超過 1，而總合分數達到 1 的人即是高效，而總合分數小於 1 者，則稱之為非高效。模式(P12)中 $d(\cdot, \varepsilon)$ 為非負之區辨強度函數(discrimination intensity function)，且有 $d(j, \varepsilon) \ge d(j+1, \varepsilon)$ 的性質，並滿足 $d(\cdot, 0) = 0$。參數 ε 稱之為區辨因子(discriminating factor)。其意涵認為第一名的權重必定要比第二名權重高，依此類推，而 ε 為極小的正值，代表權重必不會相等，至少會有極小的差別。

但是 (Cook & Kress, 1990)認為 $d(\cdot, \varepsilon)$ 中的 ε 變化會影響總合分數，不同的 ε 會使排序結果不同，並得到不同的優勝者。例如設定 $d(\cdot, \varepsilon)$：$d(j, \varepsilon) = \varepsilon$，$d(j, \varepsilon) = \varepsilon/j$ 和 $d(j, \varepsilon) = \varepsilon/j!$，(16.2)及(16.3)不等式右邊分別為 ε 、 ε/j 及 $\varepsilon/j!$。以上不同遞減函數變化後，發現所得到的優勝者皆不同。為了解決 ε 值設定的問題， (Cook & Kress, 1990)將模式(P12)寫成模式(P13)

$$\text{(P13)}\quad \varepsilon_{\max}^{(CK)} = \max \varepsilon \tag{17}$$

$$s.t.\quad \sum_{j=1}^{k} v_{ij} W_j \le 1, \quad i = 1,\ldots,m, \tag{17.1}$$

$$W_j - W_{j+1} \ge d\left(j,\varepsilon\right), \quad j = 1,\ldots,k-1, \tag{17.2}$$

$$W_k \geq d\left(k,\varepsilon\right), \tag{17.3}$$

$$W_j \geq 0, \quad j=1,\ldots,k-1, \tag{17.4}$$

$$\varepsilon \geq 0. \tag{17.5}$$

其中 $d(j, \varepsilon)$可以用 0、ε、ε/j 等或其他函數表示。此模式核心概念為穩健性(robustness)，ε 值的設定影響著模式(P12)之結果，當 ε 的值設定越小時，滿足高效條件之 DMUs 越多，當 ε 增加時，滿足高效條件之 DMUs 個數會越來越少。最後，當 ε 大到某一程度之時，便只會剩下某一 DMU 為高效(也可能會發生另一 DMU，其同時也滿足高效之條件，此時 DMU 其總合分數皆相同，但增加 ε 也無法再將這些 DMUs 做區別)。在 ε 不斷增加的狀況之下，若該候選人一直能維持高效，則該 DMU 其穩健度較強。換言之，代表該候選人績效表現優秀，在 ε 其值可變化之區間內(模式(P12)為 feasible 之狀況)，無論 ε 為何值，該候選人都會是高效。 (Cook & Kress, 1990)針對排序提出了剝層計算法(peeling)，在穩健性的概念下，也就是 $\varepsilon_{\max}^{(CK)}$ 的狀況下，求解模式(P13)的結果，若第一組限制式中，有候選人 q 其滿足 $\sum_{j=1}^{k} v_{qj} W_j^* = 1$ 之性質，便可判定候選人 q 凌駕所有其他的候選人。也就是說， ε 在一個範圍內改變時，候選人 q 有較高的穩健度。在得到獲勝的候選人之後，便刪除該候選人，將剩下的候選人利用模式(P13)重新計算，找尋下個獲勝的候選人，重複進行 m - 1 次，便可對 m 個候選人進行排序。

(Hashimoto, 1997)考慮於投票系統中使用 DEA 的確認區間排除模式(DEA/AR exclusion model)，且令 $d(\cdot, \varepsilon) = \varepsilon$，於模式中，其著重於考慮權差非遞增的限制，其模式如下：

(P14) $Z_o^{(5)} = \max \sum_{j=1}^{k} v_{oj} W_j$ (18)

$$s.t.\quad \sum_{j=1}^{k} v_{ij} W_j \le 1, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{18.1}$$

$$W_j - W_{j+1} \ge \varepsilon, \quad j = 1, \ldots, k-1, \tag{18.2}$$

$$W_j - W_{j+1} \ge W_{j+1} - W_{j+2}, \quad j = 1, \ldots, k-2, \tag{18.3}$$

$$W_j \ge 0, \quad j = 1, \ldots, k-1, \tag{18.4}$$

$$W_k \ge \varepsilon. \tag{18.5}$$

模式(P14)相較於模式(P12)多了$W_j - W_{j+1} \ge W_{j+1} - W_{j+2}$這條限制式，因為加入權差非遞增的觀念，意涵為第一名跟第二名的權重差距，要不小於第二名跟第三名的權重差距，避免出現第三名跟第二名的權差，反而比第二名跟第一名的權差大，這樣即失去競賽的排序公平性，因為每個名次的晉升都有其困難度，但是名次越高，晉升困難度就要越高才是公平的排序。

(Liu & Tsai, 2009)提出了 AP 和 GP。AP 模式是將 (Hashimoto, 1997)模式的目標式作改變，原本的模式是輪流當主角，作者將其改為 $\varepsilon_{\max}^{(AP)}$ ，也就是共同權重的模式，其模式如下：

(P15) $\varepsilon_{\max}^{(AP)} = \max \varepsilon$ (19)

$$s.t.\quad \sum_{j=1}^{k} v_{ij} W_j \le 1, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{19.1}$$

$$W_j - W_{j+1} \ge \varepsilon, \quad j = 1, \ldots, k-1, \tag{19.2}$$

$$W_j - W_{j+1} \ge W_{j+1} - W_{j+2}, \quad j = 1, \ldots, k-2, \tag{19.3}$$

$$W_k \geq \varepsilon > 0. \tag{19.4}$$

而 GP 模式則是加入權比非遞增的觀念，作者認為在實務上，有些情況是候選人 m 的個數會遠大於排 k 個名次，也就是說，要從眾多的候選人中，選出極少數表現優秀的候選人，這種情況是競爭的非常激烈，因此能得到前幾名的候選人，實屬不易，所以要特別強調優勝者勝利的困難度。該作者舉奧林匹克運動會的短跑為例，強調由銀牌晉升成金牌的難度，相對於銅牌晉升成銀牌的難度要更高才合理，認為賦予金牌與銀牌權重之比率，不能低於銀牌與銅牌權重之比率，這即是權比非遞增法則。GP 模式以 (Cook & Kress, 1990)的模式概念為主，以 ε 極大化來找尋共同權重，加上 (Hashimoto, 1997) 所提之權差非遞增觀念，以及 (Liu & Tsai, 2009)所提的權比非遞增法則，其模式如下：

$$\text{(P16)} \quad \varepsilon_{\max}^{(GP)} = \max \varepsilon \tag{20}$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{k} v_{ij} W_j \leq 1, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{20.1}$$

$$W_j - W_{j+1} \geq \varepsilon, \quad j = 1, \ldots, k-1, \tag{20.2}$$

$$W_j - W_{j+1} \geq W_{j+1} - W_{j+2}, \quad j = 1, \ldots, k-2, \tag{20.3}$$

$$\frac{W_j}{W_{j+1}} - \frac{W_{j+1}}{W_{j+2}} \geq 0, \quad j = 1, \ldots, k-2, \tag{20.4}$$

$$W_k \geq \varepsilon > 0. \tag{20.5}$$

此模式多了 $W_j / W_{j+1} - W_{j+1} / W_{j+2} \geq 0$ 限制式，其意涵為第一名與第二名的權重比，必須不小於第二名與第三名的權重比，依此類推，避免出現以下狀況：假設第一名權重為 0.7，第二名權重為 0.4，第三名權重為 0.2，此權重雖符合模式(P14)

的權差非遞增，但第二名與第三名的權重比，大於第一名與第二名的權重比，造成第三名晉升到第二名的困難度，比第二名晉升到第一名高，這對於第一名的權重是不公平的，因此才需加入權比非遞增的觀念，以強調公平性與可貴性。

模式(P13)、模式(P15)與模式(P16)為共同權重求解模式，其優點在於可以直接排序非高效群，因為其為絕對績效分數，而非相對績效分數。模式(P14)為各候選人輪流當主角，所得為相對績效分數，大多需要利用交叉效率評比，才能做出全體排序。故在考量便利性與公平性下，本研究將針對共同權重的投票機制模型，進行以下的研究探討。

3 本研究提出新的方法

在傳統的 DEA 模型中，會遇若干個排名相同而無法進行排序的困難，在上述所提及的三個共同權重投票模型亦有此困擾，雖然大部分投票機制文獻，會利用交叉效率評比來解決這問題，但是交叉效率評比卻有缺點，以多組權重來評量仍不盡周延。因此本研究提出二個利用數學規劃的模型，將排名相同的候選人加以差異化，可有效且公平的進行全體排序。

3.1 第一個方法

第一個方法是利用同排名之間總合分數最大差距的觀念，來將相同排名的候選人予以差異化。這個模式的目的，是要求取相同排名之間最大的差距，利用相同排名之間差距最大來予以差異化。本研究為了方便解釋，故採用 (Cook & Kress, 1990)的模式(P13)來做說明，但是本方法亦可套用在模式(P15)與模式(P16)上，皆可解決相同排名的問題。第一個方法模式(P17)中，目標式是將所有相同排名候選人，彼此之間的差距相加總，此方法的目的，就是要讓相同排名之間差距最大化，利用此方法來區辨優勝者。我們只針對在模式(P13)中相同排名的候選人來

進行評量，由限制式(21.2)得知，我們先令同排名的候選人為a_i；故限制式(21.1)、(21.2)中的 C 指的是相同排名的候選人集合；目標式中的n代表相同排名候選人集合中的個數；此模式(P17)是為了解決模式(P13)產生相同排名的問題，故限制式(21.3)、(21.4)皆由模式(P13)而來，第一個方法的模式如下：

$$\text{(P17)} \quad \max \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{l=i+1}^{n} |a_i - a_l| \tag{21}$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{k} v_{ij} W_j \le 1, \quad i \in C, \tag{21.1}$$

$$\sum_{j=1}^{k} v_{ij} W_j = a_i, \quad i \in C, \tag{21.2}$$

$$W_j - W_{j+1} \ge d, \quad j = 1,\dots,k-1, \tag{21.3}$$

$$W_k \ge d, \tag{21.4}$$

$$d = \varepsilon_1^*(1-\tau) > 0, \tag{21.5}$$

$$a_i > 0, \quad i \in C. \tag{21.6}$$

但是在求取差距最大化之前，必須注意到的是限制式(21.3)、(21.4)中的(d)值該如何制定？在第一階段，模式(P13)中可以求得最大的區辨因子(ε_1^*)，但是這個(ε_1^*)卻是將這些相同排名候選人的總合分數鎖得緊緊的關鍵，若(d)還是等於(ε_1^*)的話，則計算出來的權重，還是第一階段求得的該組權重，那麼相同排名候選人所得的總合分數一樣都為 1；若是(d)大於(ε_1^*)，那必定無可行解。所以我們認為必須先把(d)的值放寬鬆一點，這樣權重才有變動的空間，配合相同排名之間差距最大化的方法，就能找到一組真正分辨誰勝誰負的權重。故我們利用限制式(21.5)對其作比例性的寬放，也就是我們提出的模式中的區辨因子(d)，由第

一階段計算出來的(ε_1^*)，以比例的方式寬放，而這個寬放的比例(τ)，由決策者自行決定，而(τ)的範圍為$0<\tau<1$。這個比例會影響計算出來的權重，但不會影響同排名候選人的排序。不過本研究建議，(τ)的寬放比例不要太大比較好，因為我們必須尊重第一階段求得的區辨程度(ε_1^*)，放寬鬆的原因，是為了讓權重可以變動，以區分同排名候選人的強弱，故只需要稍作寬鬆即可分出高下。若比例限制降低，則權重會降低，輸的該位候選人的總合分數會降低，相對的目標值就會增加。

本研究為了解決排名相同無法排序的問題，利用同排名之間總合分數最大差距的觀念，來將相同排名的候選人予以差異化。先利用模式(P13)可得到一組共同權重，我們將這組權重與得票數相乘，便可求出各候選人的總合分數，此時若有若干位候選人排名相同，為了將這些同排名的候選人分出高下，我們利用模式(P17)計算出這些同排名候選人彼此間最大的差距總和，同時也會得到各候選人新的總合分數，故可依照該總合分數進行排序，如此便可解決同排名候選人排序的問題。

除了解決模式(P13)若干個候選人排名相同無法分出高下的問題，亦可以解決 (Liu & Tsai, 2009)提出的 AP 模式跟 GP 模式的相同排名問題，我們將解決模式寫成模式(P18)與模式(P19)，內容將不再贅述。下面模式(P18)為解決 AP 模式的方法：

$$\text{(P18)}\quad \max \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{l=i+1}^{n} |a_i - a_l| \tag{22}$$

$$s.t.\quad \sum_{j=1}^{k} v_{ij}W_j \le 1,\quad i \in C, \tag{22.1}$$

$$\sum_{j=1}^{k} v_{ij} W_j = a_i, \quad i \in C, \tag{22.2}$$

$$W_j - W_{j+1} \geq d, \quad j = 1, \ldots, k-1, \tag{22.3}$$

$$W_j - W_{j+1} \geq W_{j+1} - W_{j+2}, \quad j = 1, \ldots, k-2, \tag{22.4}$$

$$W_k \geq d, \tag{22.5}$$

$$d = \varepsilon_1^*(1-\tau) > 0, \tag{22.6}$$

$$a_i > 0, \quad i \in C. \tag{22.7}$$

下面的模式(P19)為解決 GP 模式同排名的方法：

$$\text{(P19)} \quad \max \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{l=i+1}^{n} | a_i - a_l | \tag{23}$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{k} v_{ij} W_j \leq 1, \quad i \in C, \tag{23.1}$$

$$\sum_{j=1}^{k} v_{ij} W_j = a_i, \quad i \in C, \tag{23.2}$$

$$W_j - W_{j+1} \geq d, \quad j = 1, \ldots, k-1, \tag{23.3}$$

$$W_j - W_{j+1} \geq W_{j+1} - W_{j+2}, \quad j = 1, \ldots, k-2, \tag{23.4}$$

$$\frac{W_j}{W_{j+1}} - \frac{W_{j+1}}{W_{j+2}} \geq 0, \quad j = 1, \ldots, k-2, \tag{23.5}$$

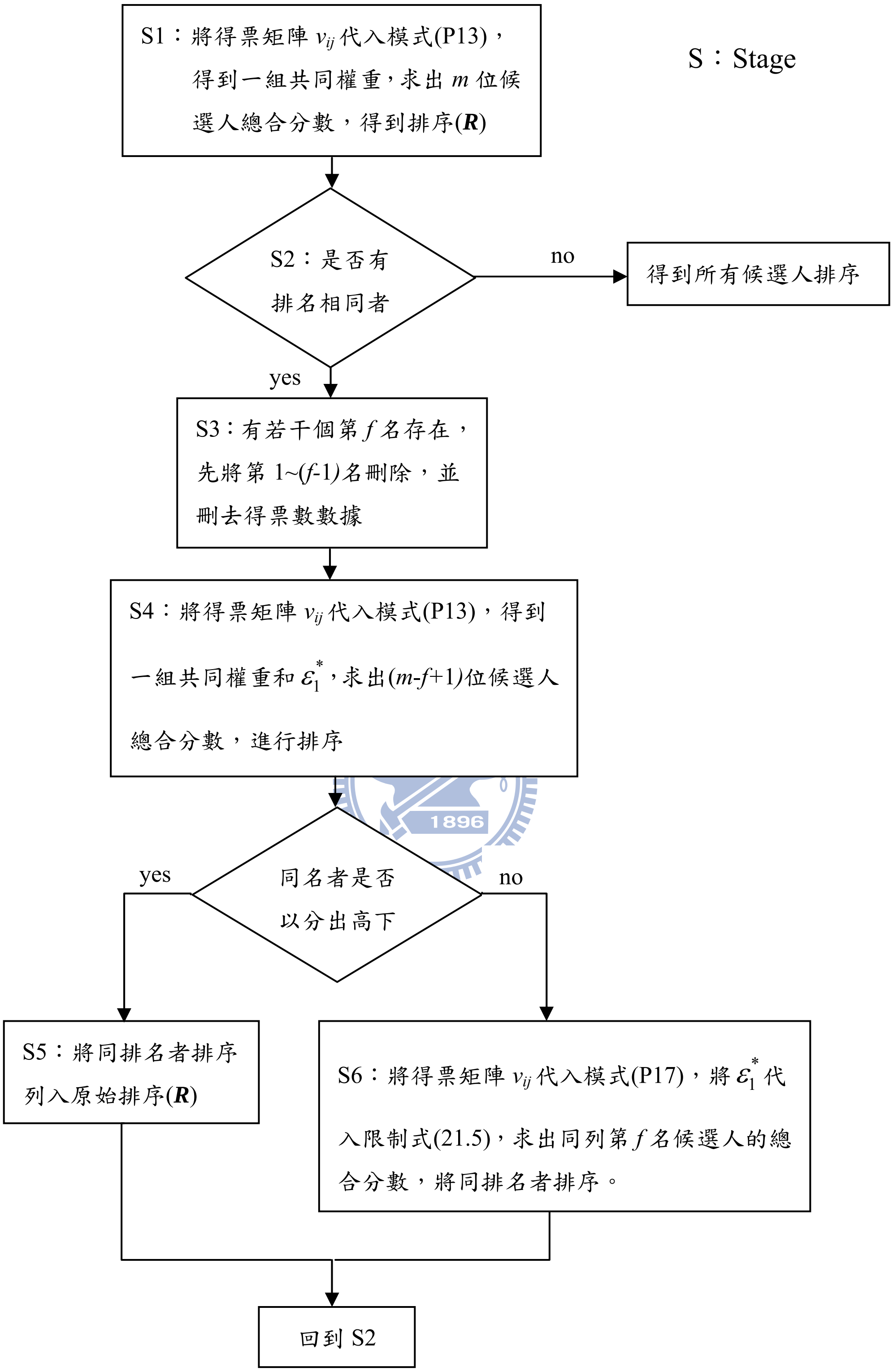
$$W_k \geq d, \tag{23.6}$$

$$d = \varepsilon_1^*(1-\tau) > 0, \tag{23.7}$$

$$a_i > 0, \quad i \in C. \tag{23.8}$$

(Cook & Kress, 1990)提出剝層計算的方法，來逐步找到各個候選人的排名。(Liu & Tsai, 2009)以共同權重的觀念計算總合分數，其證明剝層計算法與共同權重計算出來的排序結果會一樣，因此我們可以僅計算一次，得到一組共同權重，代入各候選人得票數，得到總合分數，可利用此總合分數來做排序，但仍會遇到排名相同的問題。

在解決排名相同的問題，我們將方法流程整理如圖一。本研究將 (Cook & Kress, 1990)提出的剝層計算法加以延伸，剝層法的觀念為排名在前面的候選人，確定會凌駕於排名在後面的候選人，因此可以把前面的候選人刪除，再繼續計算。本研究將承繼這個觀念，假設每個投票者可以從 m 個候選人中選擇 k 個候選人，我們將 m 個候選人的數據代入模式(P13)，可得到一組最原始的候選人排序($\boldsymbol{R}$)。若遇到一個以上第 f 名情況時，我們先將前$(f\text{-}1)$名剔除，將剩下$(m\text{-}f+1)$名候選人數據代入模式(P13)，若原本皆排名 f 的候選人，在計算後已可以分出高下，那就將這些原本第 f 名候選人的新排序列入原始的排序($\boldsymbol{R}$)；若計算後仍無法分出高下，就將$(m\text{-}f+1)$名候選人數據代入模式(P17)，利用最大差距模式來解決排序問題，再將新排序列入原始的排序($\boldsymbol{R}$)。本研究方法強調原始排序($\boldsymbol{R}$)的重要性，因為該組排序是考慮所有候選人而評估出來，具備參考價值，故使用剝層法後，也不該抹滅此原始排序的意義與價值。但必須注意，刪除了候選人，使受評的候選人人數改變，計算出的 ε_1^* 也會不斷改變，因此在代入限制式(21.5)時要特別小心。



圖一：解決多個同排名之方法流程圖

假設 A,B,C,D,E,F,G,H,I,J 10 位候選人，經由投票後統計結果，將所得數據進行 S1，得到排序如表一之原始排序，此時 A 與 B 兩位同列第一名、D 與 E 兩位為第四名、G,H,I 三位同列第七名。進行 S2，首先要將 A 與 B 兩位分出高下。進行 S6，得知 B 勝 A，排序如表一之第一階段排序。到 S2，由於 D 與 E 兩位為第四名，故進行 S3。將 D～J 7 位候選人代入 S4，得知 D 與 E 仍同為此階段第一名。我們進行 S6，得知 D 勝 E，排序如表一之第二階段排序。到 S2，由於 G,H,I 三個同列第七名，剔除 D,E,F，將 G～J 4 位候選人代入 S4。得知 G 勝 I 勝 H，排序如表一之第三階段排序。到 S2，由於無同排名，完成如表一之最終排序。

表一：各階段排序表

候選人	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
原始排序(***R***)	1	1	3	4	4	6	7	7	7	10
候選人	B	A	C	D	E	F	G	H	I	J
第一階段排序	1	2	3	4	4	6	7	7	7	10
候選人	—	—	—	D	E	F	G	H	I	J
第二階段排序				4	5	6	7	7	7	10
候選人	—	—	—	—	—	—	G	I	H	J
第三階段排序							7	8	9	10
候選人	B	A	C	D	E	F	G	I	H	J
最終排序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

我們這個模式可以避免掉先前排序文獻中的兩大缺點，第一點即是 ε 設定的問題，很多文獻都是令 $\varepsilon = 0$，但是 $\varepsilon = 0$ 是不合理的，原因有二：(1)權重相減如果等於 0，就代表兩個名次權重相等，那就等於沒有鑑別程度。(2)最後一名的權重(W_k^*)可能會等於 0，這樣就代表最後一名的得票數是沒用到的，失去投這票的意義。第二點是，非高效者的改變會影響到高效者的排序，如果評比高效的候選人，還加入其他非高效的候選人一起評比，那高效候選人的排名會受到非高

效候選人的影響而改變，故我們認為，不應該把非高效的候選人放進來一起評比，才能避免這個問題。關於第一點問題，因為在我們方法的第一階段可求出一個最大的(ε_1^*)，第二階段時由決策者給予合理的比例寬放，故並不會使(d)為 0，所以不會出現第一項缺點。而第二個問題，由於我們第二階段利用同排名之間總合分數最大差距的觀念，來將相同排名的候選人予以差異化時，僅需要同排名的候選人來進行評比，不需要其他不相關的非高效候選人參與，故非高效者的改變，不會影響到高效者的排序。

在我們的模式中是採用共同權重的觀念，我們認為投票模式應該採用共同權重較為合理，因為共同權重的意涵，為由管理者來尋找一組共同的權重，來評比其想要檢視的受評單位，不同於傳統的輪流當主角，是由各決策單位各自尋找一組對自己最有利的權重，來彰顯自己的特色，而投票系統源自於 DEA，是沒有投入項(input)的 DEA 模式，其得到的數據是該受評單位在各名次所得到的票數，在投票系統的評比中，我們將這些各名次得票視為評比指標，給予權重，但特別的地方是這些評比指標是具有強弱性，而非一般 DEA 中的參考指標，那些指標不具有強弱性質，方適合用輪流當主角來評比，故我們認為在投票模式的評比中，應該採用共同權重的觀念較為合適。

3.2 第二個方法

第二個是利用求取最小可將兩者總合分數區分的差距，將相同排名的候選人分出高下。我們認為相同排名的候選人其總合分數相同，但是只要有些微的差距，就能將其分出高下，而我們所關心的是在些微的差距下，這組權重是多少，以及誰勝誰負。有別於第一個方法的觀念，是求取同排名之間最大的差距，該方法獲得的是將候選人之間差距拉的最開的權重。但是我們現在反過來想要知道在最小

的差距之下，那組區辨同排名的權重是多少。本研究為了方便解釋，一樣採用(Cook & Kress, 1990)的模式(P13)來做說明，但是本方法亦可套用在模式(P15)與模式(P16)上，皆可解決相同排名的問題。我們第二個方法模式(P20)中，目標式是求取相同排名候選人中任兩位之間的差距，但我們的目的，是要讓相同排名之間差距最小化，利用此方法來區辨優勝者。但由於目標式是求取同排名之間最小的差距，我們為了不讓差距為 0，必須給予他一個極小的下限，而這個下限值(b)由決策者來決定。其它的限制式皆與模式(P17)相同。我們提出的第二個方法如下：

$$(\text{P20}) \quad \min |a_i - a_l| \tag{24}$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{k} v_{ij} W_j \le 1, \quad i \in C, \tag{24.1}$$

$$\sum_{j=1}^{k} v_{ij} W_j = a_i, \quad i \in C, \tag{24.2}$$

$$|a_i - a_l| \ge b, \quad i \in C, l \in C, i \ne l, \tag{24.3}$$

$$W_j - W_{j+1} \ge d, \quad j = 1,...,k-1, \tag{24.4}$$

$$W_k \ge d, \tag{24.5}$$

$$d = \varepsilon_1^*(1-\tau) > 0, \tag{24.6}$$

$$a_i > 0, \quad i \in C. \tag{24.7}$$

在模式(P20)中，值得注意的是(b)的設定，(b)的範圍為 $b > 0$，決策者可以依照其喜好，決定這個最小差距的下限是多少。決策者會考量若是讓差距太大，可能會影響到評比輸的那方，也可能會影響到該決策者發放獎金的多寡。由限制

式(24.3)知，模式(P20)是一次評比相同排名者中的任兩位，得到兩兩之間的勝負後，我們可以透過兩兩相比的方法，得到最終所有相同排名者的排序。

此方法除了解決模式(P13)若干個候選人排名相同無法分出高下的問題，亦可以解決 (Liu & Tsai, 2009)提出的 AP 模式跟 GP 模式的相同排名問題。我們把解決模式寫成模式(P21)與模式(P22)，加入權差非遞增與權比非遞增公式，其餘限制式皆相同。下面模式(P21)為解決 AP 模式的方法：

$$\text{(P21)}\quad \min |a_i - a_l| \tag{25}$$

$$s.t.\quad \sum_{j=1}^{k} v_{ij} W_j \le 1,\quad i \in C, \tag{25.1}$$

$$\sum_{j=1}^{k} v_{ij} W_j = a_i,\quad i \in C, \tag{25.2}$$

$$|a_i - a_l| \ge b,\quad i \in C, l \in C, i \ne l, \tag{25.3}$$

$$W_j - W_{j+1} \ge d,\quad j = 1,\dots,k-1, \tag{25.4}$$

$$W_j - W_{j+1} \ge W_{j+1} - W_{j+2},\quad j = 1,\dots,k-2, \tag{25.5}$$

$$W_k \ge d, \tag{25.6}$$

$$d = \varepsilon_1^*(1-\tau) > 0, \tag{25.7}$$

$$a_i > 0,\quad i \in C. \tag{25.8}$$

下面的模式(P22)為解決 GP 模式同排名的方法：

$$\text{(P22)}\quad \min |a_i - a_l| \tag{26}$$

$$s.t.\quad \sum_{j=1}^{k} v_{ij} W_j \le 1,\quad i \in C, \tag{26.1}$$

$$\sum_{j=1}^{k} v_{ij} W_j = a_i, \quad i \in C, \tag{26.2}$$

$$| a_i - a_l | \geq b, \quad i \in C, l \in C, i \neq l, \tag{26.3}$$

$$W_j - W_{j+1} \geq d, \quad j = 1, \ldots, k-1, \tag{26.4}$$

$$W_j - W_{j+1} \geq W_{j+1} - W_{j+2}, \quad j = 1, \ldots, k-2, \tag{26.5}$$

$$\frac{W_j}{W_{j+1}} - \frac{W_{j+1}}{W_{j+2}} \geq 0, \quad j = 1, \ldots, k-2, \tag{26.6}$$

$$W_k \geq d, \tag{26.7}$$

$$d = \varepsilon_1^*(1-\tau) > 0, \tag{26.8}$$

$$a_i > 0, \quad i \in C. \tag{26.9}$$

我們第二個方法一樣是使用剝層延伸法來作排序，使用方法與第一個方法相同。我們第二個模式一樣可以避免掉兩大缺點，第一點即是 ε 設定的問題；第二點是，非高效者的改變會影響到高效者的排序。此方法是提供另外一種角度，來思考相同排名的問題，一樣可以將同排名者分出高下。

4 案例介紹

由於本研究的方法可以解決 (Cook & Kress, 1990)投票模式，以及 (Liu & Tsai, 2009)提出的 AP 與 GP 模式中，有若干個候選人排名相同無法分出高下的問題。故分別舉三個案例來套用上述的三個模式，並運用本研究所提出的兩種方法。

4.1 供應商選擇

以我們生活最息息相關的投票機制為例，有某家公司需要 1000 台挖土機，欲發包予 2 家供應商，共有 7 家供應商 A~G 前來參與競爭，該公司採取投票的方式來選擇供應商。由 37 位經理與主管來投票決定，投票機制為每位經理可以選擇心中前 3 名的供應商，分別給予 3 家供應商排序。投票結果如表二所示：

表二：供應商票選得票結果

候選人(供應商)	得第一名票數	得第二名票數	得第三名票數
A	10	5	1
B	8	7	3
C	6	5	7
D	4	7	8
E	4	10	2
F	3	2	7
G	2	1	9

我們利用 (Cook & Kress, 1990)提出的模式(P13)來進行評量，故我們將表二中的數據代入模式(P13)中，我們運用 Super Lingo 8.0 軟體來計算。結果如表三所示，得到最大的 ε_1^* 值為 0.0244，第一、二、三名得票數權重分別為 0.0732、0.0488 和 0.0244。由於我們所求為共同權重，因此我們可以將所有候選人作排序。將得票數與權重相乘，可得到各候選人的總合分數，候選人 C,F,G 分別為 0.8537、0.4878 和 0.4146，但此時 A 與 B 總合分數皆為 1；且 D 與 E 總合分數也同為 0.8293。我們為了將 A,B,D,E 四位候選人做出排序，遵循剝層延伸法的觀念，先將 A 與 B 候選人分出高下。我們先利用第一個方法來做，故把 A 與 B 的數據代入模式(P17)，並將 $\varepsilon_1^* = 0.0244$ 代入限制式(21.5)，此時的τ值是由決策者自行決定，故我們在此案例中都先將τ設為 0.1，但是τ值的設定大小並不影響最後計算出來的排序結果。經過模式(P17)計算，我們將d^*寬放為 0.0220 後，可以得到第一、二、三名得票數權重分別為 0.0759、0.0439 和 0.0220。因此我們可以得到 A 與 B 兩

位候選人的總合分數，A 的總合分數為 1，B 的總合分數為 0.98，兩位候選人總合分數的最大差距為 0.02。我們要依據此總合分數來發包予 A 與 B 兩家供應商，並採取無條件進位方式，故 A 可得到的供應量為 1000*(1/1+0.98) = 506 台挖土機，B 則分配到 494 台挖土機。

表三：供應商候選人在第一個方法的排名分析

供應商	ε_1^*=0.0244			τ=0.1	d^*=0.0220	
	(P13)			(P17)		
	總合分數		排名	總合分數		排名
A	1.0000		1	1.0000		1
B	1.0000		1	0.9800		2
C	0.8537		3	—		—
D	0.8293		4	—		—
E	0.8293		4	—		—
F	0.4878		6	—		—
G	0.4146		7	—		—
權重	W_1 = 0.0732			W_1 = 0.0759		
	W_2 = 0.0488			W_2 = 0.0439		
	W_3 = 0.0244			W_3 = 0.0220		

Note： "—"代表非高效候選人，不需要參與計算

我們利用第二個方法來排序，將 A 與 B 的數據代入模式(P20)，並將 ε_1^* = 0.0244 代入限制式(24.6)，此時的 τ 設為 0.1，而我們在此案例中都將 b 值設定為 0.001。經過模式(P20)計算，我們可以得到表四，我們將 d^* 寬放為 0.0220 後，可以得到第一、二、三名得票數權重分別為 0.0664、0.0444 和 0.0225。因此我們可以得到 A 與 B 兩位候選人的總合分數，A 的總合分數為 0.9080，B 的總合分數為 0.9090，兩位候選人總合分數的最小差距為 0.001。此時的排序結果與第一個方法不同，B 得到的供應量為 1000*(0.9090/0.9090+0.9080) = 501 台挖土機，A 則分配到 499 台挖土機。

表四：供應商候選人在第二個方法的排名分析

供應商	ε_1^*=0.0244		τ=0.1	b=0.001	d^*=0.0220
	(P13)		(P20)		
	總合分數	排名	總合分數		排名
A	1.0000	1	0.9080		2
B	1.0000	1	0.9090		1
C	0.8537	3	—		—
D	0.8293	4	—		—
E	0.8293	4	—		—
F	0.4878	6	—		—
G	0.4146	7	—		—
權重	W_1 = 0.0732 W_2 = 0.0488 W_3 = 0.0244		W_1 = 0.0664 W_2 = 0.0444 W_3 = 0.0225		

Note：“—”代表非高效候選人，不需要參與計算

由於此時的 D 與 E 仍然並列第四名，為了將 D 與 E 兩位候選人做出排序，採用剝層延伸法，先將候選人 A,B,C 剔除，如表五所示。

表五：供應商候選人排名

供應商	得第一名票數	得第二名票數	得第三名票數	排名	
A	10	5	1	1	剔除
B	8	7	3	2	剔除
C	6	5	7	3	剔除
D	4	7	8	4	
E	4	10	2	4	
F	3	2	7	6	
G	2	1	9	7	

將候選人 D,E,F,G 的得票數據代入模式(P13)計算，所得如表六。得到最大的 ε_1^* 值為 0.0294，第一、二、三名得票數權重分別為 0.0882、0.0588 和 0.0294。將得票數與權重相乘，得到各候選人的總合分數，候選人 D,E,F,G 分別為 1、1、0.5882 和 0.5000，D 與 E 仍然無法分出高下。故我們先採取第一個方法來做排序，將 D 與 E 的資料代入模式(P17)，並將 ε_1^* = 0.0294 代入限制式(21.5)，我們將 d^*

寬放為0.0265後，可得第一、二、三名得票數權重分別為0.0866、0.0601和0.0265。D 的總合分數為 0.9786， E 的總合分數 1，兩位候選人總合分數的最大差距為 0.0214。由結果可知 E 較 D 優秀。候選人 A,B,C,F,G 的排序並沒有改變，候選人 E 為第四名，D 為第五名。

表六：供應商使用第一個方法的第二階段排名分析

供應商	ε_1^*=0.0294		τ=0.1	d^*=0.0265
	(P13)		(P17)	
	總合分數	排名	總合分數	排名
D	1.0000	1	0.9786	2
E	1.0000	1	1.0000	1
F	0.5882	3	—	—
G	0.5000	4	—	—
權重	W_1 = 0.0882		W_1 = 0.0866	
	W_2 = 0.0588		W_2 = 0.0601	
	W_3 = 0.0294		W_3 = 0.0265	

Note： “—”代表非高效候選人，不需要參與計算

我們利用第二個方法來對 D 與 E 進行排序，將 D 與 E 的數據代入模式(P20)，並將 ε_1^* = 0.0294 代入限制式(24.6)，τ 值設為 0.1。我們可以得到表七，第一、二、三名得票數權重分別為 0.1036、0.0533 和 0.0265。D 的總合分數為 0.9990，E 的總合分數為 1，兩位候選人總合分數的最小差距為 0.001。這次的排序結果與第一個方法相同，E 的總合分數比 D 大，故 E 在第二個方法中為第一名，D 則為第二名，其他候選人排名不改變。

表七：供應商使用第二個方法的第二階段排名分析

供應商	ε_1^*=0.0294		τ=0.1	b=0.001	d^*=0.0265
	(P13)		(P20)		
	總合分數	排名	總合分數		排名
D	1.0000	1	0.9990		2
E	1.0000	1	1.0000		1
F	0.5882	3	—		—
G	0.5000	4	—		—
權重	W_1 = 0.0882		W_1 = 0.1036		
	W_2 = 0.0588		W_2 = 0.0533		
	W_3 = 0.0294		W_3 = 0.0265		

Note： “—”代表非高效候選人，不需要參與計算

經由利用兩個方法對 A 與 B 以及 D 與 E 的評比後，發現第一個方法的計算結果，都符合我們先前提出的常理認定。A 的第一名票數較 B 多，在一般認定中應該會覺得是 A 獲勝，而在我們第一個方法計算後，也證實的確是 A 較 B 強；D 跟 E 的第一名票數都一樣，但是 E 的第二名票數較 D 的多，故我們計算後，也是呈現 E 比 D 強的結果。在符合常理的認定之下，我們獲得了一組共同權重來區辨同排名者，並且利用新的總合分數比例來分配挖土機的發包數量。但是第二個方法卻不盡然符合常理認定，因為第二個方法是用另外一種角度來評量，故與第一個方法的結果不盡然會相同。

表八：供應商在兩種方法下的最終排名

供應商	得第一名票數	得第二名票數	得第三名票數	排名 方法一	排名 方法二
A	10	5	1	1	2
B	8	7	3	2	1
C	6	5	7	3	3
D	4	7	8	5	5
E	4	10	2	4	4
F	3	2	7	6	6
G	2	1	9	7	7

4.2 公司監事選舉

某家便利超商集團欲從 6 位大股東甲~己候選人中選出 2 位擔任監事，監管該公司旗下的 500 家分店，並依排名分配其不同的權力，權力越大者，監管的分店數則越多。由 15 位股東代表來投票決定，投票機制為每位代表可以選擇心中前 3 名的監事人選，分別給予 3 位監事排序。各候選人得票結果如表九所示：

表九：監事選舉得票結果

候選人 (大股東)	得第一名票數	得第二名票數	得第三名票數
甲	5	4	2
乙	3	7	2
丙	3	2	5
丁	2	1	2
戊	1	1	3
己	1	0	1

我們利用 (Liu & Tsai, 2009)提出的 AP 模式進行評量，我們將表九中的數據代入模式(P15)中，我們運用 Super Lingo 8.0 軟體來計算。結果如表十所示，得到最大的 ε_1^* 值為 0.04，第一、二、三名得票數權重分別為 0.120、0.080 和 0.040，候選人甲與乙的總合分數皆為 1。我們利用第一個方法將甲與乙做出排序，把甲與乙的數據代入模式(P18)，並將 $\varepsilon_1^* = 0.04$ 代入限制式(22.6)，此時的 τ 值依然設為 0.1。經過模式(P18)計算，我們將 d^* 寬放為 0.036 後，可以得到第一、二、三名得票數權重分別為 0.128、0.072 和 0.036。因此我們可以得到甲與乙兩位候選人的總合分數，甲的總合分數為 1，乙的總合分數為 0.960，兩位候選人總合分數的最大差距為 0.040。為了分配兩位候選人的監管權力，我們利用總合分數比例來計算，甲可監管的分店數為 500*(1/1+0.960) = 256 家，乙則分配到 244 家分店。

表十：監事候選人在第一個方法的排名分析

大股東	$\varepsilon_1^*=0.04$		$\tau=0.1$	$d^*=0.036$
	(P15)		(P18)	
	總合分數	排名	總合分數	排名
甲	1.000	1	1.000	1
乙	1.000	1	0.960	2
丙	0.720	3	—	—
丁	0.400	4	—	—
戊	0.320	5	—	—
己	0.160	6	—	—
權重	$W_1 = 0.120$		$W_1 = 0.128$	
	$W_2 = 0.080$		$W_2 = 0.072$	
	$W_3 = 0.040$		$W_3 = 0.036$	

Note： “—”代表非高效候選人，不需要參與計算

表十一是將模式(P15)與模式(P18)計算後的權重作分析，因為我們希望能夠符合權差非遞增的條件。

表十一：比較各名次的權重在第一個方法下於各個模式之結果(AP)

			W_1	W_2	W_3
模式(P15)	W_j	權重	0.120	0.080	0.040
	$W_j - W_{j+1}$	權重遞減	0.040	0.040	
	$W_j - 2W_{j+1} + W_{j+2}$	權差遞減	0		
模式(P18)	W_j	權重	0.128	0.072	0.036
	$W_j - W_{j+1}$	權重遞減	0.056	0.036	
	$W_j - 2W_{j+1} + W_{j+2}$	權差遞減	0.020		

在模式(P15)下，權差相減是 0，有符合權差非遞增的條件。在模式(P18)下，權差相減為 0.020，符合權差非遞增的條件。

我們再利用第二個方法來進行排序，將甲與乙的數據代入模式(P21)，並將 $\varepsilon_1^*=0.04$ 代入限制式(25.7)，τ 值設為 0.1，而我們在此案例中也將 b 值設定為 0.001，我們可以得到表十二。第一、二、三名得票數權重分別為 0.109、0.073 和 0.037。甲的總合分數為 0.911，乙的總合分數為 0.912，兩位候選人總合分數

的最小差距為 0.001。利用第二個方法的計算結果，乙為優勝者，可以分配到監管的分店數為 500*(0.912/0.912+0.911) = 251 家，甲則分配到 249 家。

表十二：監事候選人在第二個方法的排名分析

大股東	ε_1^*=0.04		τ=0.1　b=0.001　d^*=0.036	
	(P15)		(P21)	
	總合分數	排名	總合分數	排名
甲	1.000	1	0.911	2
乙	1.000	1	0.912	1
丙	0.720	3	—	—
丁	0.400	4	—	—
戊	0.320	5	—	—
己	0.160	6	—	—
權重	W_1 = 0.120		W_1 = 0.109	
	W_2 = 0.080		W_2 = 0.073	
	W_3 = 0.040		W_3 = 0.037	

Note：“—”代表非高效候選人，不需要參與計算

表十三是將模式(P21)計算後的權重作分析，因為我們希望能夠符合權差非遞增的條件。

表十三：比較各名次的權重在第二個方法下於各個模式之結果(AP)

			W_1	W_2	W_3
模式(P21)	W_j	權重	0.109	0.073	0.037
	$W_j - W_{j+1}$	權重遞減	0.036	0.036	
	$W_j - 2W_{j+1} + W_{j+2}$	權差遞減	0		

在模式(P21)下，權差相減是 0，有符合權差非遞增的條件。經由利用兩個方法的評比後，發現第一個方法的結果，符合我們先前提出的常理認定，但是第二個方法卻沒有符合。

4.3 某地區國中區運動會排名

某地區舉辦每年度的國中區運運動會，共有 10 所國民中學參加比賽，比賽項目包括田賽與徑賽，每項競賽項目皆會取前三名，分別頒予金牌、銀牌和銅牌。

最後再計算各所國民中學得到的獎牌積分，來決定今年度的總錦標由誰獲得，而且前兩名的國中，可獲得教育部的 50 萬獎學金補助。下面表十四是各所國民中學所得到的獎牌數統計：

表十四：各所國民中學所得獎牌數統計

國民中學	金牌	銀牌	銅牌
A	15	7	6
B	15	6	8
C	8	13	8
D	7	8	12
E	6	7	10
F	6	7	8
G	5	6	5
H	3	6	4
I	3	5	4
J	2	5	5

我們利用 (Liu & Tsai, 2009)提出的 GP 模式進行評量，我們將表十四中的數據代入模式(P16)中，由於限制式(20.4)為分數型態，故為非線性模式，我們使用 Super Lingo 8.0 軟體來計算。結果如表十五所示，金、銀和銅牌得票數權重分別為 0.0500、0.0250 和 0.0125，且得到最大的 ε_1^* 值為 0.0125。但是 A 與 B 的總合分數皆為 1，我們必須將 A 與 B 分出高下，因為這樣才能知道誰獲得今年的總錦標。我們採用第一個方法計算，將 A 與 B 的數據代入模式(P19)，並將 ε_1^* = 0.0125 代入限制式(23.7)，此處的 τ 值依然設為 0.1。我們將 d^* 寬放為 0.0113 後，經過模式(P19)計算，可以得到金、銀和銅牌得票數權重分別為 0.0510、0.0240 和 0.0113。因此我們可以得到 A 與 B 兩所國民中學的總合分數，A 的總合分數為 1，B 的總合分數為 0.9985，兩所國民中學總合分數的最大差距為 0.0015。A 總合分數勝過 B，故可得知 A 國民中學拿下今年地區運動會的總錦標，並且拿到教育部的補助獎學金 500000*(1/1+0.9985) = 250188 元，B 可拿到 249812 元。

表十五：國民中學區運運動會在第一個方法的排名分析

國民中學	ε_1^*=0.0125		τ=0.1	d^*=0.0113
	(P16)		(P19)	
	總合分數	排名	總合分數	排名
A	1.0000	1	1.0000	1
B	1.0000	1	0.9985	2
C	0.8250	3	—	—
D	0.7000	4	—	—
E	0.6000	5	—	—
F	0.5750	6	—	—
G	0.4625	7	—	—
H	0.3500	8	—	—
I	0.3250	9	—	—
J	0.2875	10	—	—
權重	W_1 = 0.0500		W_1 = 0.0510	
	W_2 = 0.0250		W_2 = 0.0240	
	W_3 = 0.0125		W_3 = 0.0113	

Note： “—”代表非高效候選人，不需要參與計算

表十六是將模式(P16)與模式(P19)計算後的權重作分析，因為我們希望能夠符合權差非遞增與權比非遞增的條件。

表十六：比較各名次的權重在第一個方法下於各個模式之結果(GP)

			W_1	W_2	W_3
模式(P16)	W_j	權重	0.0500	0.0250	0.0125
	$W_j - W_{j+1}$	權重遞減	0.0250	0.0125	
	$W_j - 2W_{j+1} + W_{j+2}$	權差遞減	0.0125		
	W_j / W_{j+1}	權比	2.0000	2.0000	
	$W_j / W_{j+1} - W_{j+1} / W_{j+2}$	權比遞減	0		
模式(P19)	W_j	權重	0.0510	0.0240	0.0113
	$W_j - W_{j+1}$	權重遞減	0.0270	0.0127	
	$W_j - 2W_{j+1} + W_{j+2}$	權差遞減	0.0143		
	W_j / W_{j+1}	權比	2.1250	2.1239	
	$W_j / W_{j+1} - W_{j+1} / W_{j+2}$	權比遞減	0.0011		

在模式(P16)下，權差相減是 0.0125，有符合權差非遞增的條件；權比相減為 0，亦符合權比非遞增的條件。在模式(P19)下，權差相減為 0.0143，符合權差非

遞增的條件；權比相減為 0.0011，符合權比非遞增的條件。

我們用第二個方法來對 A 與 B 進行排序。將 A 與 B 的數據代入模式(P22)，並將 $\varepsilon_1^* = 0.0125$ 代入限制式(26.8)，τ 值設為 0.1，在此案例中我們將 b 值設定為 0.005，我們可以得到表十七。得到金、銀和銅牌得票數權重分別為 0.0470、0.0275 和 0.0163。A 的總合分數為 0.9950，B 的總合分數為 1，兩間國民中學總合分數的最小差距為 0.005。排序結果與第一個方法不同，B 國民中學的總合分數比 A 大，故 B 在第二個方法中拿下今年國中區運動會的總錦標。而 B 可拿到教育部的補助獎學金 500000*(1/1+0.9950) = 250627 元，A 則可拿到 249373 元補助獎學金。

表十七：國民中學區運運動會在第二個方法的排名分析

國民中學	ε_1^*=0.0125		τ=0.1	b=0.001	d^*=0.0113
	(P16)		(P22)		
	總合分數	排名	總合分數		排名
A	1.0000	1	0.9950		2
B	1.0000	1	1.0000		1
C	0.8250	3	—		—
D	0.7000	4	—		—
E	0.6000	5	—		—
F	0.5750	6	—		—
G	0.4625	7	—		—
H	0.3500	8	—		—
I	0.3250	9	—		—
J	0.2875	10	—		—
權重	W_1 = 0.0500 W_2 = 0.0250 W_3 = 0.0125		W_1 = 0.0470 W_2 = 0.0275 W_3 = 0.0163		

Note： "—"代表非高效候選人，不需要參與計算

表十八是將模式(P22)計算後的權重作分析，因為我們希望能夠符合權差非遞增與權比非遞增的條件。

表十八：比較各名次的權重在第二個方法下於各個模式之結果(GP)

			W_1	W_2	W_3
模式(P22)	W_j	權重	0.0470	0.0275	0.0163
	$W_j - W_{j+1}$	權重遞減	0.0195	0.0112	
	$W_j - 2W_{j+1} + W_{j+2}$	權差遞減	0.0083		
	W_j / W_{j+1}	權比	1.7091	1.6871	
	$W_j / W_{j+1} - W_{j+1} / W_{j+2}$	權比遞減	0.0220		

在模式(P22)下，權差相減為 0.0083，符合權差非遞增的條件；權比相減為 0.0220，符合權比非遞增的條件。經由利用兩個方法的評比後，發現第一個方法的結果，符合我們先前提出的常理認定，但是第二個方法卻沒有符合。

4.4 與其他排序方法比較

本研究提出兩個方法，第一個是利用同排名之間總合分數最大差距的觀念，第二個是求取最小能將同排名區辨的差距，找到一組權重，使相同排名能分出高下。在以往的文獻中，有許多針對相同排名排序的方法。我們拿 (Liu & Tsai, 2009) 的排序方法與我們的兩個方法，分別在 CK 模式、AP 模式和 GP 模式下做比較，比較結果分別整理在表十九、表二十、表二十一與表二十二：

表十九：CK 模式的排序方法比較表(一)

CK			排序方法		
			M1	M2	(Liu)
UOA	總合分數	排名			
A	1.0000	1	1.0000 (1)	0.9080 (2)	1.0000 (1)
B	1.0000	1	0.9800 (2)	0.9090 (1)	0.9512 (2)
C	0.8537	3			
D	0.8293	4			
E	0.8293	4			
F	0.4878	6			
G	0.4146	7			
權重	$W_1 = 0.0732$		$W_1 = 0.0759$	$W_1 = 0.0664$	$W_1 = 0.0773$
	$W_2 = 0.0488$		$W_2 = 0.0439$	$W_2 = 0.0444$	$W_2 = 0.0434$
	$W_3 = 0.0244$		$W_3 = 0.0220$	$W_3 = 0.0225$	$W_3 = 0.0095$

Note： “M1”代表本研究第一個方法，M2”代表本研究第二個方法

表二十：CK 模式的排序方法比較表(二)

CK			排序方法		
			M1	M2	(Liu)
UOA	總合分數	排名			
D	1.0000	1	0.9786 (2)	0.9990 (2)	0.9118 (2)
E	1.0000	1	1.0000 (1)	1.0000 (1)	1.0000 (1)
F	0.5882	3			
G	0.5000	4			
	$W_1 = 0.0882$		$W_1 = 0.0866$	$W_1 = 0.1036$	$W_1 = 0.1003$
權重	$W_2 = 0.0588$		$W_2 = 0.0601$	$W_2 = 0.0533$	$W_2 = 0.0571$
	$W_3 = 0.0294$		$W_3 = 0.0265$	$W_3 = 0.0265$	$W_3 = 0.0138$

Note： “M1”代表本研究第一個方法，M2”代表本研究第二個方法

表十九中的第二欄為原始資料在 CK 模式下計算所得的總合分數，第四與五欄為本研究的排序方法所計算的總合分數，第六欄為 (Liu & Tsai, 2009)的排序方法計算所得。在欄中的( )代表經過排序方法計算後的新排序，最下方為解決相同排名的新權重。由表十九與表二十可得知，本研究的第一個排序方法與 (Liu & Tsai, 2009)的方法結果相同，且都符合我們之前提到的常理認定。但我們的第二個排序結果就不太相同，且不一定會符合常理認定。但是三個方法求得的權重皆不相同，因此所得之總合分數也不相同。我們的方法計算下，新權重與原始權重的變化比例較小，而 (Liu & Tsai, 2009)的新權重變化比例較大，尤其是最後一名的權重會差別很大。

表二十一：AP 模式的排序方法比較表

AP			排序方法		
			M1	M2	(Liu)
UOA	總合分數	排名			
甲	1.0000	1	1.0000 (1)	0.9110 (2)	1.0000 (1)
乙	1.0000	1	0.9600 (2)	0.9120 (1)	0.9600 (2)
丙	0.7200	3			
丁	0.4000	4			
戊	0.3200	5			
己	0.1600	6			
權重	$W_1 = 0.1200$ $W_2 = 0.0800$ $W_3 = 0.0400$		$W_1 = 0.1280$ $W_2 = 0.0720$ $W_3 = 0.0360$	$W_1 = 0.1090$ $W_2 = 0.0730$ $W_3 = 0.0370$	$W_1 = 0.1328$ $W_2 = 0.0752$ $W_3 = 0.0176$

Note： “M1”代表本研究第一個方法，M2”代表本研究第二個方法

表二十一為在 AP 模式下的比較。在 AP 模式下本研究第一個方法排序與(Liu & Tsai, 2009)的結果依然相同，且都符合常理認定；而第二個方法的排名卻不一樣，也不符合常理認定。在這個案例中剛好第一個方法跟 (Liu & Tsai, 2009)的總合分數皆相同，但是權重卻有很大差異。我們的第一個方法計算下，第一名權重增加較 (Liu & Tsai, 2009)少；而我們最後一名權重減少的比例也較少。

表二十二：GP 模式的排序方法比較表

GP			排序方法		
			M1	M2	(Liu)
UOA	總合分數	排名			
A	1.0000	1	1.0000 (1)	0.9950 (2)	1.0000 (1)
B	1.0000	1	0.9985 (2)	1.0000 (1)	0.9966 (2)
C	0.8250	3			
D	0.7000	4			
E	0.6000	5			
F	0.5750	6			
G	0.4625	7			
H	0.3500	8			
I	0.3250	9			
J	0.2875	10			
權重	$W_1 = 0.0500$ $W_2 = 0.0250$ $W_3 = 0.0125$		$W_1 = 0.0510$ $W_2 = 0.0240$ $W_3 = 0.0113$	$W_1 = 0.0470$ $W_2 = 0.0275$ $W_3 = 0.0163$	$W_1 = 0.0525$ $W_2 = 0.0222$ $W_3 = 0.0094$

Note： “M1”代表本研究第一個方法，M2”代表本研究第二個方法

表二十二中我們第一個方法與 (Liu & Tsai, 2009)的比較結果也相同，A 與 B 的排序一樣，且均符合常理認定。但 (Liu & Tsai, 2009)的銅牌權重減少比例較大，代表銅牌的重要性被降低較多。第二個方法排序結果依然與第一個方法不同。這三個方法皆提供不同的思考角度，來獲得一組共同權重，解決相同排名的問題，都確實能解決問題。

5 結論

在 DEA 中，高效之間以及非高效之間的排序問題一直困擾著大家，許多文獻都在探討著排序的問題，共同權重是較常見用來排序非高效之間的方法，但依舊會遇到排名相同，無法分出高下的窘境。本研究使用的投票模式就是共同權重，在運算的過程會有若干個候選人排名相同的問題，因此本研究提出了兩個方法，來將相同排名的候選人予以差異化，可以解決相同排名的候選人之間無法排序的問題。但本研究的重點在於如何分配資源給若干相同排名者，利用本研究的方法

區辨出排名後，我們可得到新的總合分數，我們依照該總合分數的比例來分配資源。在實務上，分配獎金或是分配供應商的供應量方面都很常見，在區辨排名後，較佳的該位候選人應該獲得較多的資源才公平。故本研究不僅區辨同排名者的排序，更加著重於探討同排名者的資源分配問題。

本研究提出的兩個解決相同排名概念，不僅可以使用於這些投票模式，更加可以套用在其他的模式上，依然可以進行排序，解決排名相同的問題。然而該使用哪一種方法，則由決策者來決定，這兩個方法是從不同的思考角度出發，決策者可以視使用目的與環境因素來決定。本研究提供的方法簡單易懂，計算也不繁複，可有效減少成本與時間。且皆避免掉排序文獻中經常出現的兩大缺點，第一點即是 ε 設定的問題，在我們模式中沒有 ε 設定的問題，且也確保 ε_1^* 不會為 0；第二點是非高效者的改變不會影響到高效者的排序，因為我們第二階段的評比，僅需要同排名的候選人來進行評比，不需要其他不相關的非高效候選人參與。

在我們評比相同排名的候選人前，根據一般人常理的認定，通常會認為第一名得票數較多者較強，若第一名得票數相同者，則比較第二名得票數，依此類推，這種想法是符合常理的認定。在案例中可以發現，本研究提出的第一個方法，找到的一組共同權重計算後，都能符合常理認定；但是第二個方法卻不盡然符合，因為第二個方法是利用不同角度來思考；然而在第二個方法中，(b)值的設定對於決策者的考量有什麼影響呢!若是在發放獎金的評選中，評選後有兩位候選人並列第一名，必須依照總合分數，以比例方式來發放獎金，如果決策者讓差距太大，也就是(b)值設定太大，那可能會造成評比輸的該方總合分數過低，使其權益受到影響。在以往的文獻中，大多數都是探討若干個第一名的時候，該怎麼處

理？卻很少探討到同時若干個第 p 名(p=2,…,m.)時該怎麼處理，本研究特別針對這種情況，提出剝層延伸法，用來解決同時有多個名次有若干個同排名的情況。

但是本研究的第一個方法，因為是將每個同排名的候選人彼此之間的距離加總最大化，若同時有多個候選人同排名，那我們提出的解決方法中的目標式，可能展開後會比較繁複，越多個同排名者，則兩兩之間的項數就會越多。但是第一階段共同權重採用 $\varepsilon_{\max}$ 的理由就是為了讓同排名的候選人降到最低，故到第二階段還是有很多同排名的候選人的機會不高，但將來可以朝這方面研究。本研究提出的第二個方法中，由於 b 值是由決策者自行決定，而 b 值如何訂定，以及 b 值的改變會造成總合分數的如何變化，可以作敏感度分析的探討，這些也都是將來可以研究的方向。

參考文獻

Adler, N., Friedman, L. & Sinuany-Stern, Z., 2002. Review of ranking methods in the data envelopment analysis context. *European Journal of Operational Research*, pp.249-265.

Andersen, P. & Petersen, N.C., 1993. A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis. *Management Science*, pp.1261-1264.

Charnes, A., Cooper, W.W. & Rhodes, E., 1978. Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, pp.429-444.

Cook, W.D. & Kress, M., 1990. A data envelopment model for aggregating preference rankings. *Management Science*, pp.1302-1310.

Doyle, J. & Green, R., 1994. Efficiency and cross-efficiency in DEA: Derivations, meanings and uses. *Journal of the Operational Research Society*, pp.567-578.

Green, R.H., Doyle, J.R. & Cook, W.D., 1996. Preference voting and project ranking using DEA and cross-evaluation. *European Journal of Operational Research*, pp.461-472.

Hashimoto, A., 1997. A ranked voting system using a DEA/AR exclusion model: A note. *European Journal of Operational Research*, pp.600-604.

Liu, F.-H.F. & Hai, H.-L., 2005. The voting analytic hierarchy process method for selecting supplier. *International Journal of Production Economics*, pp.308-317.

Liu, F.-H.F. & Tsai, L.-C., 2009. The voting theories with arithmetic and geometric progression. *Working paper*, Department of Industrial Engineering and Management, National Chiao Tung University, Hsinchu City, Taiwan.

Noguchi, H., Ogawa, M. & Ishii, H., 2002. The appropriate total ranking method using DEA for multiple categorized purposes. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, pp.155-166.

Obata, T. & Ishii, H., 2003. A method for discriminating efficient candidates with ranked voting data. *European Journal of Operational Research*, pp.233-237.

Roll, Y., Cook, W.D. & Golany, B., 1991. Controlling factor weights in data envelopment analysis. *IIE Transactions*, pp.2-9.

Wang, Y.-M. & Chin, K.-S., 2007. Discriminating DEA efficient candidates by considering their least relative total scores. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, pp.209-215.