

國立交通大學

資訊管理研究所

碩士論文

在首次通透模型下評價可違約障礙選擇權

Pricing Vulnerable Barrier Option under the First Passage Model



研究生：劉彥君

指導教授：戴天時 博士

中華民國 九十九 年 六 月

在首次通透模型下評價可違約障礙選擇權
Pricing Vulnerable Barrier Option under the First Passage Model

研究 生：劉彥君

Student : Yen-Chun Liu

指 導 教 授：戴 天 時 博 士

Advisor : Dr. Tian-Shyr Dai



Submitted to Institute of Information Management

College of Management

National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master of Science in Information Management

June 2010

Hsinchu, Taiwan, the Republic of China

中華民國 九十九 年 六 月

在首次通透模型下評價可違約障礙選擇權

學生：劉彥君

指導教授：戴天時 博士

國立交通大學資訊管理研究所

中華民國九十九年六月

摘要

在首次通過模型(First Passage Model, FPM)下評價可違約選擇權十分困難——尤其在公司違約門檻和選擇權價值相關時，評價公式無法推導，且數值模型也會因線性誤差而不可靠。本論文提出一個立體樹可同時模擬標的物價格和公司資產，而且可透過和違約門檻及障礙重合的方式縮減非線性誤差，本論文所提出的樹狀結構如不考慮 FPM，可收斂至 Klein (1996)與 Klein and Inglis (2001)的模型。評價可違約障礙選擇權可收斂至潘政宏(2010)的結果。

關鍵字：信用風險、可違約選擇權、可違約障礙選擇權、BTT 樹狀結構、交易對手風險、指數障礙選擇權。

Pricing Vulnerable Barrier Option under the First Passage Model

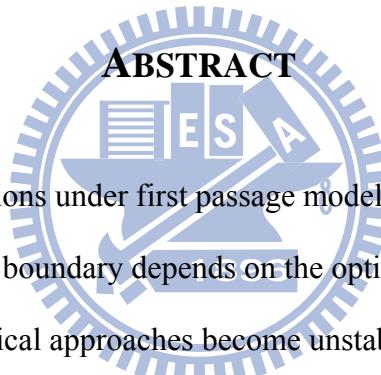
Student: Yen-Chun Liu

Advisor: Dr. Tian-Shyr Dai

Institute of Information Management

National Chiao Tung University

June 2010



Pricing vulnerable options under first passage model can be very difficult – especially when the default boundary depends on the option value. Analytical formula can't be derived and numerical approaches become unstable due to nonlinearity error. This thesis provides a three dimension tree that can simultaneously simulates the evolution of the underlying asset's value and firm's value. The nonlinearity error problem can be alleviated by making the tree align with the default boundary and the barrier.

Our tree model can evaluate the both model of Klein (1996) and Klein and Inglis (2001) and the pricing results converge to the closed form of Klein (1996.) The pricing results of vulnerable barrier option under the Merton's model converge to the closed form of Pan (2010), too.

KEYWORDS: Credit Risk, Vulnerable Option, Vulnerable Barrier Option, BTT, Counterparty Risk, Exponential Barrier Option.

誌 謝

感謝我的指導教授戴天時老師，在我就讀碩士的期間有很大的彈性來學習，老師在對許多事情也有一針見血的觀點，讓我收穫許多。在論文的指導上，老師除了對論文要求嚴謹，但也非常努力的讓我們在任何時候任何時間打電話向老師求救，如果沒有這些深夜電話，不知道研究該如何繼續做下去。

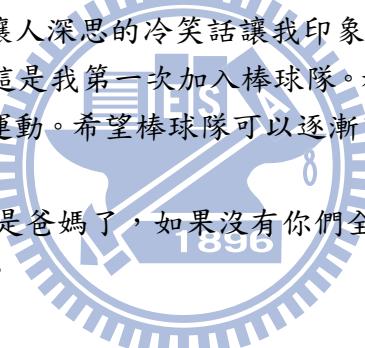
感謝實驗室的一姐婷琪還有學弟們大炮、kevin、Maxey、boki、vic、昌宏，平常有你們在實驗室非常的歡樂，在趕論文的時候大家也成為彼此激勵的好戰友，我想這段時光會成為我非常珍貴的回憶。

感謝 KM 的耿杰學長還有 QB、士原、士弘、耿瑜，很早的就去你們實驗室聊天玩樂，也讓我早早融入資管所的生活。還有瑋哥，跟你聊天很愉快也很有內容，除了讓我知道所上許多有趣的事也讓我學會了很多東西。

感謝 OTA 的筱嵐、鋒樟、怡菱、癸棠學長姊們，還有小紅和蜥蜴學弟，每天都生活在很有趣很新鮮的氛圍下，跟你們聊天總是充滿歡笑，讓我每天都迫不及待想到 Lab 看看還有沒有什麼新鮮事。小紅除了是我討論 Linux 的對象以外，他的妙語如珠還有每次都讓人深思的冷笑話讓我印象深刻。

感謝所上的棒球隊，這是我第一次加入棒球隊。和大家打棒球非常的快樂，也因此讓我愛上棒球這個運動。希望棒球隊可以逐漸茁壯，每年都可以挑戰黑龍旗。

當然最後要感謝的就是爸媽了，如果沒有你們全力支持，我無法擁有這麼愉快又充實的研究所生涯。



劉彥君 謹誌
國立交通大學資訊管理研究所
中華民國九十九年六月

目 錄

摘要	i
ABSTRACT	ii
致謝	iii
目錄	iv
圖目錄	vi
表目錄	viii
第一章、緒論	1
第一節、研究動機與背景	1
第二節、研究目的	1
第三節、研究架構	2
第二章、文獻探討	3
第一節、可違約選擇權(Vulnerable Option)	3
第二節、DFPM-HWT 樹狀結構	3
第三章、理論基礎	6
第一節、結構式模型 (Structural model)	6
第二節、模型的基礎假設	7
第三節、評價公式	8
第四章、研究架構與方法	11
第一節、樹狀結構	11
1、正交化	11
2、建構 $X(t)$ 樹	13
3、Barrier	17
4、建構 $Y(t)$ 樹	18
5、倒推法(Backward induction)	19
第二節、減少非線性誤差	19
第三節、使用 BTT 評價障礙選擇權的一個二期的範例	20
第五章、實驗結果與分析	27
第一節、評價一般選擇權(Vanilla Option)	27
第二節、評價常數障礙選擇權(Constant Barrier Option)	29
第三節、評價指數障礙選擇權(Exponential Barrier Option)	31
第四節、可違約一般買權敏感度分析	34
第五節、可違約障礙買權敏感度分析	39
第六章、總結	47
參考文獻	48

附錄 A、可違約選擇權評價結果	50
A1、一般選擇權違約門檻為 D^* 評價結果	50
A2、一般選擇權違約門檻為 D^* 於 FPM 模型下評價結果	51
A3、一般選擇權違約門檻為 $D^* + c$ 評價結果	52
A4、常數障礙選擇權違約門檻為 D^* 評價結果	53
A5、指數障礙選擇權違約門檻為 D^* 評價結果	54
A6、常數障礙選擇權違約門檻為 $D^* + c$ 評價結果	55
A7、指數障礙選擇權違約門檻為 $D^* + c$ 評價結果	56
附錄 B、CRR 機率證明	57

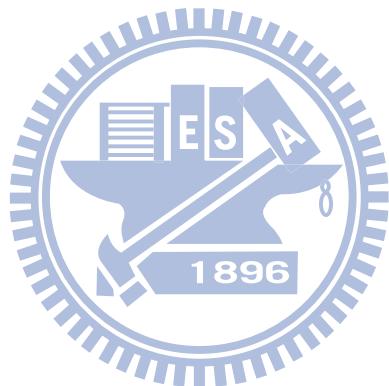


圖 目 錄

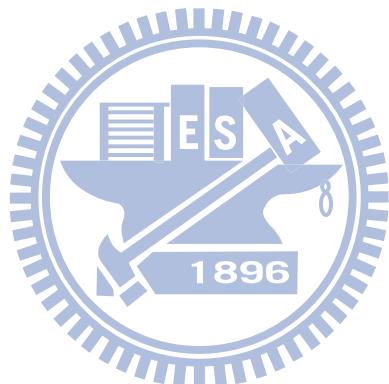
圖 2-1、非線性誤差示例，節點應和障礙重合，以減少非線性誤差	4
圖 2-2、使用 BTT 評價障礙選擇權範例	4
圖 3-1、Merton 與 FPM 示意圖。	6
圖 4-1、一期 CRR 示意圖。	14
圖 4-2、一個 3 期的 scaled random work，其中 $N=3$ ， $\Delta t=0.33$ 。	15
圖 4-3、調整後的 scaled random work。	15
圖 4-4、以 BTT 三元樹的部分評價障礙隨時間變動的障礙選擇權。	16
圖 4-5、Y 樹建構示意圖。	18
圖 4-6、一個二期的可違約障礙選擇權 X 樹	21
圖 4-7、一個二期的可違約障礙選擇權折現過程	24
圖 5-1、一般選擇權於 Merton 模型下，公司違約門檻為一常數 D^* 的 base case 收斂情況	27
圖 5-2、一般選擇權於 Merton 模型下，公司違約門檻為 D^*+c 的 base case 收斂情況	28
圖 5-3、一般選擇權於 FPM 模型下，公司違約門檻為一常數 D^* 的 base case 收斂情況	28
圖 5-4、一般選擇權於 FPM 模型下，公司違約門檻為一常數 D^*+c 的 base case 收斂情況	29
圖 5-5、常數障礙選擇權於 Merton 的模型下公司資產門檻為一常數 D^* 的 base case 收斂情況	30
圖 5-6、常數障礙選擇權於 Merton 的模型下公司資產門檻為 D^*+c 的 base case 收斂情況	30
圖 5-7、常數障礙選擇權於 FPM 的模型下公司資產門檻為一常數 D^* 的 base case 收斂情況	31
圖 5-8、常數障礙選擇權於 FPM 的模型下公司資產門檻為 D^*+c 的 base case 收斂情況	31
圖 5-9、指數障礙選擇權於 Merton 的模型下公司資產門檻為一常數 D^* 的 base case 收斂情況	32
圖 5-10、指數障礙選擇權於 Merton 的模型下公司資產門檻為 D^*+c 的 base case 收斂情況	32
圖 5-11、指數障礙選擇權於 FPM 的模型下公司資產門檻為一常數 D^* 的 base case 收斂情況	33
圖 5-12、指數障礙選擇權於 FPM 的模型下公司資產門檻為 D^*+c 的 base case 收斂情況	33
圖 5-13、期初股價對可違約一般選擇權敏感度分析	34

圖 5-14、期初公司資產價值對可違約一般選擇權敏感度分析	34
圖 5-15、股價波動度對可違約一般選擇權敏感度分析	35
圖 5-16、公司資產波動度對可違約一般選擇權敏感度分析	36
圖 5-17、履約價格對可違約一般選擇權敏感度分析	36
圖 5-18、公司其他債務對可違約一般選擇權敏感度分析	37
圖 5-19、無風險利率對可違約一般選擇權敏感度分析	37
圖 5-20、相關係數對可違約一般選擇權敏感度分析	38
圖 5-21、破產成本對可違約一般選擇權敏感度分析	38
圖 5-22、期初股價對可違約障礙選擇權敏感度分析	39
圖 5-23、期初公司資產價值敏感度分析	40
圖 5-24、股價波動度 σ_s 敏感度分析	41
圖 5-25、公司資產波動率 σ_V 敏感度分析	41
圖 5-26、障礙對可違約障礙選擇權的敏感度分析	42
圖 5-27、障礙折現率 γ 敏感度分析	43
圖 5-28、當障礙折現率太高時，障礙選擇權會收斂到一般選擇權	43
圖 5-29、履約價格 K 敏感度分析	44
圖 5-30、到期日 T 敏感度分析	44
圖 5-31、公司其他債務 D^* 敏感度分析	45
圖 5-32、無風險利率 r 敏感度分析	45
圖 5-33、公司資產與標的資產相關係數 ρ 敏感度分析	46
圖 5-34、破產成本 α 敏感度分析	46

1896

表 目 錄

表 A1、一般選擇權違約門檻為 D^* 評價結果	50
表 A2、一般選擇權違約門檻為 D^* 於 FPM 模型下評價結果	51
表 A3、一般選擇權違約門檻為 $D^* + c$ 評價結果	52
表 A4、常數障礙選擇權違約門檻為 D^* 評價結果	53
表 A5、指數障礙選擇權違約門檻為 D^* 評價結果	54
表 A6、常數障礙選擇權違約門檻為 $D^* + c$ 評價結果	55
表 A7、指數障礙選擇權違約門檻為 $D^* + c$ 評價結果	56



第一章、緒論

第一節、研究動機與背景

信用風險中存在著兩種風險，一種是衍生性金融商品標的物的風險(reference entity risk)，另外一種是交易對手的違約風險(counterparty risk)。

許多金融機構與他們公司客戶簽的契約透過店頭市場(over-the-counter market, OTC)來與其他金融機構進行交易。而店頭市場沒有保證金以及每日結算的機制，因此有機會發生選擇權賣方在到期日無法支付選擇權報酬而發生違約(Default)，因此這種類型的選擇權存在交易對手風險(counterparty risk)，而應將這樣的風險加入選擇權評價的考量中，我們稱之為可違約選擇權(Vulnerable Option)。

我們舉一個例子來說明上述兩種風險，如果我們跟雷曼兄弟買了標的物是希臘國債的選擇權，則我們將面臨上述兩種風險。今年(2010)因為希臘國家評等被調降，而引發了一連串的金融事件，希臘國債成為垃圾債券，非常有可能會違約，這是標的物風險；但在2008年9月雷曼兄弟宣布破產，他們將無法在到期日支付選擇權報酬，而這是交易對手風險。

Johnson and Stulz (1987)、Klein(1996)、Klein and Inglis (2001)等學者都做了相關研究，但他們皆假設只有在到期日才會發生違約，但在真實世界，選擇權賣方有可能在選擇權到期日之前就發生違約。此外，他們皆只能評價一般選擇權(vanilla option)，而無法評價其他如障礙選擇權(barrier option)等新奇選擇權。最後，Klein and Inglis (2001)所使用的數值分析方法，若用在評價在到期日前可違約的選擇權，將無法與障礙重合而發生非線性誤差(nonlinearity error)。

因此本文將試圖建構一個新的樹狀結構來評價可違約選擇權，期望能符合真實世界的情況，並能減少非線性誤差。

第二節、研究目的

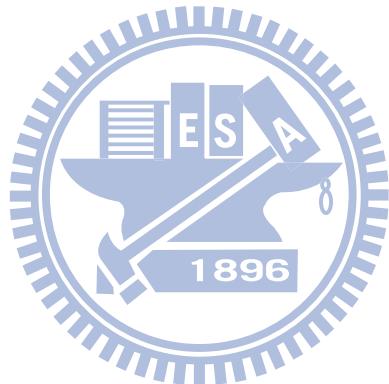
本論文將延伸 Klein and Inglis (2001)的模型與修改陳博宇(2009)的DFPM-HWT樹狀結構提出一個新的樹狀結構數值方法，來評價上一節所描述的可違約選擇權，並且放寬 Klein and Inglis (2001)僅可在到期日判斷選擇權賣方是否違約的限制，我們利用首次通透模型(First Passage Model, FPM)將違約發生在到期日之前的情況納入計算，使得模型更符合真實世界的情況。

本論文所提出的樹狀結構，也可以藉由讓樹的節點與障礙重合，減少非線性誤差，也就是說可減緩當期數越切越多但結果會發生震盪的情況。

最後，我們的樹狀結構，除了可評價一般選擇權以外，亦可評價標的資產為障礙選擇權等其他新奇選擇權。

第三節、研究架構

本論文的研究架構簡介如下：第二章為文獻回顧，將介紹過去與可違約選擇權、建立樹狀結構的相關論文；第三章為理論基礎，將描述所使用的理論包含首次通透模型、模型假設、以及評價公式；第四章為研究架構與方法，詳細介紹如何建構本論文所提出的樹狀結構；第五章為實驗結果與分析，將本論文所計算出來的結果與其他分析解或數值方法進行比較，或是評價不同的標的資產進行比較，並分析結果是否合理；第六章為總結，為結論與後續研究的建議。



第二章、文獻探討

第一節、可違約選擇權(Vulnerable Option)

Johnson and Stulz (1987)首先意識到選擇權賣方在到期日可能違約的重要性，他們將選擇權在到期日的價值視為選擇權賣方在到期日的違約門檻，且在到期日時將選擇權分為三種情況：當股價在到期日大於履約價($S_T > K$)時，且選擇權賣方資產足夠支付選擇權報酬($V_T > S_T - K$)，則買方獲得選擇權報酬；若股價在到期日大於履約價，但賣方無法支付選擇權報酬，則買方獲得公司全部資產；如果買權低於履約價，選擇權沒有價值，買方不會履約。

Klein (1996) 延伸了 Johnson and Stulz(1987)的架構，考慮賣方除了選擇權以外有其他債務(D^*)，且該債務為一個常數，選擇權的報酬對於賣方的債務結構沒有影響，因此將賣方公司資產的違約門檻設定為賣方的債務；Klein (1996)亦考慮了破產成本(bankruptcy cost)，當破產時選擇權持有人依照債權比例

$((S_T - K)^+ / D^*)$ 分配賣方破產後剩餘的資產。

Klein and Inglis (2001) 則再延伸了 Klein(1996)的模型，假設選擇權報酬對於賣方債務結構具有影響性，因此將賣方的違約門檻設定為賣方的其他債務(不含選擇權)加上選擇權報酬($D^* + (S_T - K)^+$)。當賣方違約時計算債務比例的總債務也使用相同的設定 $((S_T - K)^+ / (D^* + (S_T - K)^+))$ 。

Johnson and Stulz(1987)與 Klein(1996)皆有解析解(analytical solution)，Klein and Inglis(2001)則因為其違約門檻會隨著選擇權而變動，因此無法沒有解析解，只能由數值方法逼近來計算其價值。Klein and Inglis(2001)也提供了其模型的近似解析解(approximate analytical solution)來與數值方法的結果比較。

第二節、DFPM-HWT 樹狀結構

陳博宇(2009)提出了 DFPM-HWT 樹狀結構，該樹狀結構可處理兩個有相關係數的隨機過程無法求得聯合機率的問題，並利用 Lyuu and Dai(2006)的 BTT 樹狀結構中的三元樹部分，讓節點剛好與障礙重合，以減少非線性誤差。

非線性誤差是因為選擇權價格函數的非線性而產生的評價誤差(Figlewski and Gao(1999))。第一個障礙生效的節點稱為外部節點(outer node，其值為 0)，而障礙生效前的節點稱為內部節點(inner node，有值)，此時障礙在內部節點(不包含該點)到外部節點(包含該節點)範圍間的效果是一樣的，因此我們可以認為障礙位於障礙第一個生效的節點稱為有效障礙(effective barrier)。隨著期數越高，樹的

節點所在位置也會有所改變，障礙也會隨著外部節點的跳動而有所變動。在這樣的情況下，使用樹狀結構計算出來的價值也會有所跳動。

圖 2-1 為非線性誤差的一個示例，圖 2-1 (a)為切三期的情況，圖 2-1 (b)為切四期的情況。L 為真實的障礙，而圖(a)的有效障礙為 L1，圖(b)的有效障礙為 L2。

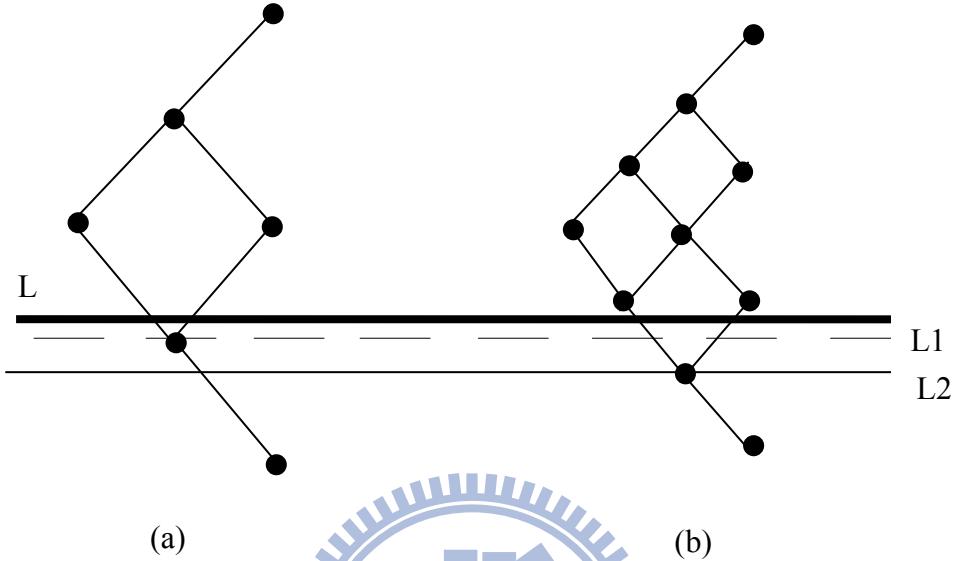


圖 2-1、非線性誤差示例，節點應和障礙重合，以減少非線性誤差

Dai and Lyuu (2010)提出 Bino-Trinomial Tree (BTT)來處理非線性誤差的問題。他們首先建立一個 CRR 樹並且在最後一期讓節點與障礙重合，但這個二元樹在第 0 期時未必會和期初價格重合，因此他們提出了一個三元樹將 CRR 產生的結果可以接回期初價格。圖 2-2 為使用 BTT 評價一個障礙選擇權的示意圖。

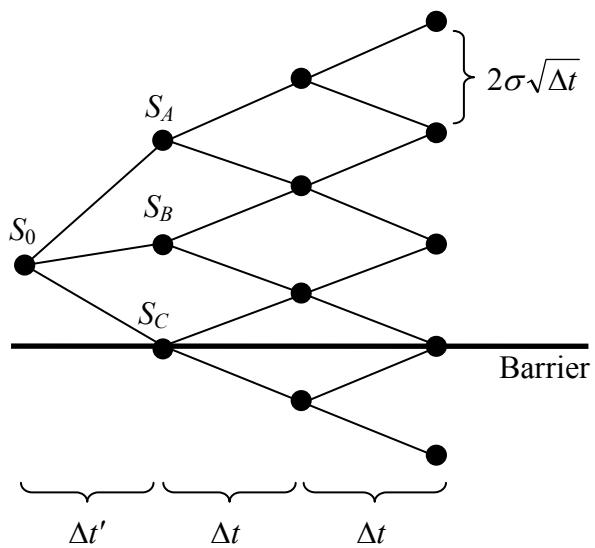


圖 2-2、使用 BTT 評價障礙選擇權範例

參考圖 2-2，當我們從最後一期開始做倒推法(Backward induction)一直做到第一期的時候，我們可以得到三個點 S_A 、 S_B 、 S_C 要折現到 S_0 。而三元樹的分支必須要符合節點 S_0 的平均 μ 以及變異數 Var ，其中

$$\mu \equiv (r - 0.5\sigma^2)\Delta t',$$

$$Var \equiv \sigma^2 \Delta t',$$

$\Delta t \leq \Delta t' < 2\Delta t$ ，而三個分支的機率 p_u 、 p_m 、 p_d 必須要介於 0 到 1 之間。

我們可以看到，在同一時間點每個節點之間的距離必須要是 $2\sigma\sqrt{\Delta t}$ ，因此必可以在時間點 $\Delta t'$ 找到一個唯一的節點 S_B ，他在取 \log 後的股價 $\hat{\mu}$ 會介於 $[\mu - \sigma\sqrt{\Delta t}, \mu + \sigma\sqrt{\Delta t}]$ 。我們選擇 S_B 作為中心點，並取他的上面一個點 S_A 及下面一個點 S_C ，這三個點與 S_0 就形成了一個三元樹。

我們令 $\tilde{\alpha}$ 、 $\tilde{\beta}$ 、 $\tilde{\gamma}$ 為 S_A 、 S_B 、 S_C 這三個點取 \log 後的股價與 μ 的差異：

$$\begin{aligned}\tilde{\beta} &\equiv \hat{\mu} - \mu, \\ \tilde{\alpha} &\equiv \hat{\mu} + 2\sigma\sqrt{\Delta t} - \mu = \tilde{\beta} + 2\sigma\sqrt{\Delta t}, \\ \tilde{\gamma} &\equiv \hat{\mu} - 2\sigma\sqrt{\Delta t} - \mu = \tilde{\beta} - 2\sigma\sqrt{\Delta t},\end{aligned}$$

其中 $\hat{\mu} = \ln\left(\frac{S_B}{S_0}\right) - \ln\left(\frac{S_0}{S_0}\right) = \ln\left(\frac{S_B}{S_0}\right)$ ， $\tilde{\beta} \in [-\sigma\sqrt{\Delta t}, \sigma\sqrt{\Delta t}]$ 。

而三個分支的機率可依以下三個等式以 Cramer's rule 導出：

$$\begin{aligned}p_u \cdot \tilde{\alpha} + p_m \cdot \tilde{\beta} + p_d \cdot \tilde{\gamma} &= 0, \\ p_u \cdot \tilde{\alpha}^2 + p_m \cdot \tilde{\beta}^2 + p_d \cdot \tilde{\gamma}^2 &= Var, \\ p_u + p_m + p_d &= 1\end{aligned}\tag{2-1}$$

可得

$$p_u = \frac{Det_u}{Det}, p_m = \frac{Det_m}{Det}, p_d = \frac{Det_d}{Det}\tag{2-2}$$

其中

$$\begin{aligned}Det &= (\tilde{\beta} - \tilde{\alpha}) \times (\tilde{\gamma} - \tilde{\alpha}) \times (\tilde{\gamma} - \tilde{\beta}), \\ Det_u &= (\tilde{\beta} \times \tilde{\gamma} + \Delta t) \times (\tilde{\gamma} - \tilde{\beta}), \\ Det_m &= (\tilde{\alpha} \times \tilde{\gamma} + \Delta t) \times (\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma}), \\ Det_d &= (\tilde{\alpha} \times \tilde{\beta} + \Delta t) \times (\tilde{\beta} - \tilde{\alpha})\end{aligned}\tag{2-3}$$

第三章、理論基礎

第一節、結構式模型 (Structural model)

Merton(1974)將公司結構視為股東權益和一零息債券組合而成，債券到期日為 T ，面額為 D 。股東權益好比歐式買權價值，到期日為 T ，履約價格為 D 。套入 Black and Scholes(1973)的選擇權評價公式來對股東權益及公司債進行評價。如圖 3-1，在到期日時，只有線 4 違約。

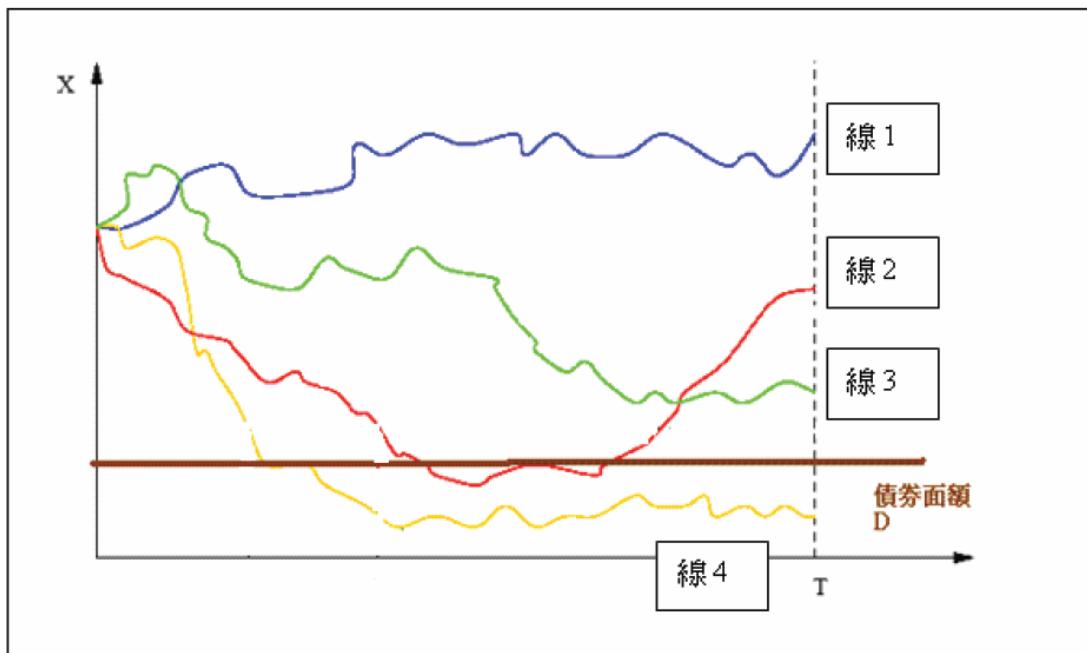


圖 3-1、Merton 與 FPM 示意圖。

在 Merton 模型下在到期日只有線 4 違約；在 FPM 模型下線 2 和線 4 在到期日前因為碰到障礙而違約。

Black and Cox (1976)改進 Merton(1974)模型，提出與時間相關的破產門檻，當公司資產低於該門檻時違約(如線 2,4)，故違約有可能發生在到期日之前，股東權益及公司債可用障礙選擇權公式評價。

當我們以傳統 FPM 模型評價信用風險時，計算的是關聯標的物的風險 (reference entity risk)，而另外一種信用風險為交易對手的違約風險(counterparty risk)。本論文評價的信用風險為交易對手的違約風險，將選擇權買方的名義請求權(nominal claim)視為一個標的物為所購買的選擇權的選擇權，並利用障礙選擇權公式來評價此名義請求權。

Klein and Inglis (2001)只有在到期日時才考慮選擇權賣方是否違約，本論文將引入上述首次通過模型，在每一期都檢查選擇權賣方的資產是否足以支付選擇權賣方的負債。

第二節、模型的基礎假設

我們使用 Klein and Inglis (2001)的模型，其基礎假設根據 Merton (1974)、Black and Cox (1976)、及 Johnson and Stulz (1987)。

假設 1：選擇權賣方資產的市場價值 V 的隨機過程定義為

$$\frac{dV}{V} = \mu_V dt + \sigma_V dZ_V,$$

其中 μ_V 為選擇權賣方資產的期望報酬， σ_V 為資產的波動度(假設為常數)， Z_V 為標準維納過程(Wiener process)。

假設 2：選擇權標的資產的市場價值 S 的隨機過程定義為

$$\frac{dS}{S} = \mu_S dt + \sigma_S dZ_S,$$

其中 μ_S 為選擇權標的資產的期望報酬， σ_S 為標的資產波動度(假設為常數)， Z_S 為標準維納過程。 Z_V 與 Z_S 的瞬間相關係數為 ρ_{VS} 。

假設 3：假設市場為完美市場(perfect)與無摩擦(frictionless)市場，即沒有交易成本(transaction cost)或課稅，且假設在連續時間下進行交易。

假設 4：當選擇權賣方資產 V_t 等於小於一個門檻值(threshold) $e^{-\gamma(T-t)}D^* + c_t$ 時發生違約(Default)，其中 c_t 為選擇權在時間點 t 時的價值且 D^* 為選擇權賣方在到期日時其他債務的價值。

假設 5：選擇權買方的名義請求權(nominal claim)為選擇權在時間點 t 時的價值。

假設 6：當公司清算後，選擇權買方收到 $(1-w)$ 乘上名義請求權，其中 w 表示名義請求權減記(write-down)的百分比，可由破產成本推導而來。

假設 7：選擇權買方名義請求權減記的百分比為 $w = 1 - (1-\alpha)V_t / (e^{-\gamma(T-t)}D^* + c_t)$ ，

其中 α 表示破產成本(deadweight costs)，以占選擇權賣方資產價值的百分比表示。

第三節、評價公式

根據 Cox and Ross (1976) 及 Harrison and Pliska (1981) 的風險中立評價方法，最適合 V 和 S 的風險中立過程為

$$\frac{dV}{V} = rdt + \sigma_V dZ_V$$

及

$$\frac{dS}{S} = rdt + \sigma_S dZ_S$$

其中 r 為無風險利率。這兩個表達式表示 S 和 V 在時間 T 的風險中立機率分配為聯合對數常態分配(joint lognormal)。基於這個分配，我們可以將可違約買權(vulnerable call)價值寫為選擇權在時間 T 的報酬加上因為公司違約清算產生的預期損失的期望值的折現。

基於第一節的定義，Johnson and Stulz(1987)、Klein (1996)、Klein and Inglis (2001) 分別可寫為：

- Johnson and Stulz(1987)：

$$c = e^{-r(T-t)} \left[E^* \left\{ \begin{array}{ll} S_T - K & S_T > K, V_T > S_T - K \\ V_T & \text{if } S_T > K, V_T \leq S_T - K \\ 0 & \text{otherwise} \end{array} \right\} \right]$$

- Klein (1996)：

$$c = e^{-r(T-t)} \left[E^* \left\{ \begin{array}{ll} S_T - K & S_T > K, V_T > D^* \\ (1-\alpha)V_T \frac{S_T - K}{D^*} & \text{if } S_T > K, V_T \leq D^* \\ 0 & \text{otherwise} \end{array} \right\} \right]$$

- Klein and Inglis (2001)：

$$c = e^{-r(T-t)} \left[E^* \left\{ \begin{array}{ll} S_T - K & S_T > K, V_T > D^* + S_T - K \\ \frac{S_T - K}{D^* + S_T - K} & \text{if } S_T > K, V_T \leq D^* + S_T - K \\ 0 & \text{otherwise} \end{array} \right\} \right]$$

第一行為當在到期日時，股價大於履約價且選擇權賣方的資產足以支付其他負債與選擇權報酬，此時選擇權買方可履約而得到 $S_T - K$ ；第二行為股價大於履約價且選擇權賣方的資產不足以支付其他負債與選擇權報酬，此時公司資產被

清算，扣除完破產成本後再依選擇權占總負債的比例償還給選擇權買方。

這三篇論文皆使用 Merton 的模型。Johnson and Stulz(1987)將選擇權到期日的報酬視為違約門檻，若選擇權買方違約，則可以獲得所有公司資產。Klein(1996)則考慮了公司有其他債務 D^* 的情況，且選擇權報酬對於公司債務沒有影響，因此 D^* 為一個常數。當違約發生時，他亦考慮破產成本以及依照債務比例來分配公司資產。Klein and Inglis(2001)則繼承了 Klein(1996)的模型，但將公司債務改為與選擇權報酬有關。

此外，Klein and Inglis (2001)可以縮減 Johnson and Stulz(1987)與 Klein(1996)的模型：當 $D^* \ll S_T - K$ 時，會縮減為 Johnson and Stulz(1987)的模型；當 $D^* \gg S_T - K$ 時，會縮減為 Klein(1996)的模型。

而我們除了上述的一般選擇權評價公式以外也分別對 Klein(1996)與 Klein and Inglis(2001)加入了 FPM 模型，另外我們也將計算障礙選擇權於 Merton 與 FPM 兩種模型的評價公式。

下表為本論文可評價的可違約一般選擇權，以及對應的相關文獻。

違約門檻	使用 Merton 模型	使用 FPM 模型
$S_T - K$	Johnson and Stulz (1987)	N/A
D^*	Klein (1996)	潘政宏 (2010)
$D^* + S_T - K$	Klein and Inglis (2001)	N/A

下表為本論文可評價的可違約障礙選擇權，以及對應的相關文獻。

違約門檻	使用 Merton 模型	使用 FPM 模型
D^*	潘政宏 (2010)	N/A
$D^* + S_T - K$	N/A	N/A

在 FPM 模型之下，公司債務為一常數，一般選擇權的評價公式為：

$$c = e^{-r(T-t)} \left[E^* \left\{ \begin{array}{ll} S_T - K & \quad S_T > K, \min_{0 \leq \tau_V \leq T} V(\tau_V) > e^{-r(T-\tau_V)} \cdot D^* \\ (1-\alpha)V(\tau_V) \frac{c(\tau_V)}{e^{-r(T-\tau_V)} \cdot D^*} & \quad \text{if} \quad S_T > K, \min_{0 \leq \tau_V \leq T} V(\tau_V) \leq e^{-r(T-\tau_V)} \cdot D^* \\ 0 & \quad \text{otherwise} \end{array} \right\} \right]$$

其中 $c(\tau_V)$ 為選擇權價值在時間點 τ_V 的價值。

在 FPM 模型之下，公司債務考慮選擇權報酬，一般選擇權的評價公式為：

$$c = e^{-r(T-t)} \left[E^* \left\{ \begin{array}{ll} S_T - K & \min_{0 \leq \tau_V \leq T} V(\tau_V) > e^{-r(T-\tau_V)} \cdot D^* + c(\tau_V) \\ (1-\alpha)V(\tau_V) \frac{c(\tau_V)}{e^{-r(T-\tau_V)} \cdot D^* + c(\tau_V)} & \text{if } S_T > K, \min_{0 \leq \tau_V \leq T} V(\tau_V) \leq e^{-r(T-\tau_V)} \cdot D^* + c(\tau_V) \\ 0 & \text{otherwise} \end{array} \right\} \right]$$

在 Merton 模型之下，公司債務為一常數，障礙選擇權的評價公式為：

$$c = e^{-r(T-t)} \left[E^* \left\{ \begin{array}{ll} S_T - K & \min_{0 \leq \tau_S \leq T} S(\tau_S) > B(\tau_S), S_T > K, V_T > D^* \\ (1-\alpha)V_T \frac{S_T - K}{D^*} & \text{if } \min_{0 \leq \tau_S \leq T} S(\tau_S) > B(\tau_S), S_T > K, V_T \leq D^* \\ 0 & \text{otherwise} \end{array} \right\} \right]$$

其中 $B(t) = e^{-\gamma(T-t)} D^* + c_B(t)$ 、 $c_B(t)$ 為障礙選擇權在時間 τ 的價格。

在 Merton 模型之下，公司債務考慮選擇權報酬，障礙選擇權的評價公式為：

$$c = e^{-r(T-t)} \left[E^* \left\{ \begin{array}{ll} S_T - K & \min_{0 \leq \tau_S \leq T} S(\tau_S) > B(\tau_S), S_T > K, V_T > D^* + S_T - K \\ (1-\alpha)V_T \frac{S_T - K}{D^* + S_T - K} & \text{if } \min_{0 \leq \tau_S \leq T} S(\tau_S) > B(\tau_S), S_T > K, V_T \leq D^* + S_T - K \\ 0 & \text{otherwise} \end{array} \right\} \right]$$

在 FPM 模型之下，公司債務為一常數，障礙選擇權的評價公式為：

$$c = e^{-r(T-t)} \left[E^* \left\{ \begin{array}{ll} S_T - K & \min_{0 \leq \tau_S \leq T} S(\tau_S) > e^{-\gamma(T-\tau_V)} \cdot B(\tau_S), S_T > K, \min_{0 \leq \tau_V \leq T} V(\tau_V) > e^{-r(T-\tau_V)} \cdot D^* \\ (1-\alpha)V(\tau_V) \frac{c(\tau_V)}{e^{-r(T-\tau_V)} \cdot D^*} & \text{if } \min_{0 \leq \tau_S \leq T} S(\tau_S) > e^{-\gamma(T-\tau_V)} \cdot B(\tau_S), S_T > K, \min_{0 \leq \tau_V \leq T} V(\tau_V) \leq e^{-r(T-\tau_V)} \cdot D^* \\ 0 & \text{otherwise} \end{array} \right\} \right]$$

在 FPM 模型之下，公司債務考慮選擇權報酬，障礙選擇權的評價公式為：

$$c = e^{-r(T-t)} \left[E^* \left\{ \begin{array}{ll} S_T - K & \min_{0 \leq \tau_S \leq T} S(\tau_S) > e^{-\gamma(T-\tau_V)} \cdot B(\tau_S), S_T > K, \min_{0 \leq \tau_V \leq T} V(\tau_V) > e^{-r(T-\tau_V)} \cdot D^* + c(\tau_V) \\ (1-\alpha)V(\tau_V) \frac{c(\tau_V)}{e^{-r(T-\tau_V)} \cdot D^* + c(\tau_V)} & \text{if } \min_{0 \leq \tau_S \leq T} S(\tau_S) > e^{-\gamma(T-\tau_V)} \cdot B(\tau_S), S_T > K, \min_{0 \leq \tau_V \leq T} V(\tau_V) \leq e^{-r(T-\tau_V)} \cdot D^* + c(\tau_V) \\ 0 & \text{otherwise} \end{array} \right\} \right]$$

第四章、研究架構與方法

我們將修改陳博宇(2009)提出的DFPM-HWT樹狀結構來評價可違約選擇權(vulnerable option)。

第一節、樹狀結構

本論文提供的樹狀結構的演算法大致如下：

1. 將兩個有相依性的隨機過程做正交化，產生兩個新的互相獨立的隨機過程 X 、 Y 。
2. 將選擇權所代表的隨機過程(以本論文為例為 X)展開樹狀結構，並對樹狀結構每一節點，以該節點做為參數，計算公司資產所代表的隨機過程(以本論文為例為 Y)的障礙。
3. 從時間點 0 開始，以下一期的障礙為基礎每隔 $2\sigma_Y \sqrt{\Delta t}$ 建立格子點，並以 BTT 樹中的三元樹部分尋找目前結點會接到下一期的哪一個節點，順向展開整棵 DFPM-HWT 所有節點。
4. 計算最後一期所有點的值，然後開始做倒推法一直到第 0 期。其中折現的機率為 X 樹的機率乘上對應 Y 樹的機率。

以下每一節分別對每一個步驟做推導以建構本論文所提出的樹狀結構。

1、正交化

由第三章的模型假設，公司資產 V 與選擇權標的資產 S 隨機過程為

$$\frac{dV}{V} = rdt + \sigma_V dZ_V ,$$

$$\frac{dS}{S} = rdt + \sigma_S dZ_S ,$$

其中 dZ_V 與 dZ_S 的相關係數為 ρ ， r 為無風險利率。由 Ito's lemma 可得

$$\frac{dV}{V} = rdt + \sigma_V dZ_V \Rightarrow d \ln V(t) = \left(r - \frac{\sigma_V^2}{2} \right) dt + \sigma_V dZ_V$$

$$\frac{dS}{S} = rdt + \sigma_S dZ_S \Rightarrow d \ln S(t) = \left(r - \frac{\sigma_S^2}{2} \right) dt + \sigma_S dZ_S$$

因為公司價值與標的資產有關聯性，因此透過正交化可將造樹過程簡化。令 $dZ \perp dZ_S$ ，則 dZ_V 可表示為

$$dZ_V = \rho dZ_S + \sqrt{1-\rho^2} dZ$$

則

$$d \ln V(t) = \left(r - \frac{\sigma_V^2}{2} \right) dt + \sigma_V \left(\rho dZ_S + \sqrt{1-\rho^2} dZ \right)$$

可以將 $d \ln S(t)$ 與新的 $d \ln V(t)$ 兩個合併為矩陣形式：

$$\begin{bmatrix} d \ln S(t) \\ d \ln V(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r - \frac{\sigma_S^2}{2} \\ r - \frac{\sigma_V^2}{2} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma_S & 0 \\ \sigma_V \rho & \sigma_V \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dZ_S \\ dZ \end{bmatrix} \quad (4-1)$$

求反矩陣 $\begin{bmatrix} \sigma_S & 0 \\ \sigma_V \rho & \sigma_V \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_S} & 0 \\ \frac{-\rho}{\sigma_S \sqrt{1-\rho^2}} & \frac{1}{\sigma_V \sqrt{1-\rho^2}} \end{bmatrix}$

計算過程：

$$\begin{bmatrix} \sigma_S & 0 \\ \sigma_V \rho & \sigma_V \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sigma_S} & 0 \\ \frac{\sigma_V \rho}{\sigma_S \sqrt{1-\rho^2}} & 1 & 0 & \frac{1}{\sigma_V \sqrt{1-\rho^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sigma_S} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-\rho}{\sigma_S \sqrt{1-\rho^2}} & \frac{1}{\sigma_V \sqrt{1-\rho^2}} \end{bmatrix}$$

則式(4-1)變成：

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_S} & 0 \\ \frac{-\rho}{\sigma_S \sqrt{1-\rho^2}} & \frac{1}{\sigma_V \sqrt{1-\rho^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \ln S(t) \\ d \ln V(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_S} & 0 \\ \frac{-\rho}{\sigma_S \sqrt{1-\rho^2}} & \frac{1}{\sigma_V \sqrt{1-\rho^2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r - \frac{\sigma_S^2}{2} \\ r - \frac{\sigma_V^2}{2} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dZ_S \\ dZ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} dX(t) \\ dY(t) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_S} d \ln S(t) \\ \frac{d \ln V(t)}{\sigma_V \sqrt{1-\rho^2}} - \frac{\rho d \ln S(t)}{\sigma_S \sqrt{1-\rho^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r - \frac{\sigma_S^2}{2}}{\sigma_S} \\ \frac{\left(r - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)}{\sigma_V \sqrt{1-\rho^2}} - \frac{\rho \left(r - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)}{\sigma_S \sqrt{1-\rho^2}} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dZ_S \\ dZ \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

把式(4-2)寫為一般形式為

$$dX(t) = \frac{1}{\sigma_S} \left(r - \frac{\sigma_S^2}{2} \right) dt + dZ_S \quad (4-3)$$

$$dY(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left(\frac{1}{\sigma_V} \left(r - \frac{\sigma_V^2}{2} \right) - \frac{1}{\sigma_S} \rho \left(r - \frac{\sigma_S^2}{2} \right) \right) dt + dZ \quad (4-4)$$

令 $X(0) \equiv 0$ 、 $Y(0) \equiv 0$ ，將式(4-3)式(4-4)積分可寫為

$$X(t) - X(0) = X(t) = \int_0^t dX(t) = \int_0^t \frac{1}{\sigma_s} d \ln S(t) = \frac{1}{\sigma_s} [\ln S(t) - \ln S(0)] = \frac{1}{\sigma_s} \ln \frac{S(t)}{S(0)} \quad (4-5)$$

$$\begin{aligned} Y(t) - Y(0) = Y(t) &= \int_0^t dY(t) = \int_0^t \frac{d \ln V(t)}{\sigma_v \sqrt{1 - \rho^2}} - \frac{\rho d \ln S(t)}{\sigma_s \sqrt{1 - \rho^2}} \\ &= \frac{1}{\sigma_v \sqrt{1 - \rho^2}} \int_0^t d \ln V(t) - \frac{\rho}{\sigma_s \sqrt{1 - \rho^2}} \int_0^t d \ln S(t) = \frac{1}{\sigma_v \sqrt{1 - \rho^2}} \ln \frac{V(t)}{V(0)} - \frac{\rho}{\sigma_s \sqrt{1 - \rho^2}} \ln \frac{S(t)}{S(0)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \left[\frac{1}{\sigma_v} \ln \frac{V(t)}{V(0)} - \frac{\rho}{\sigma_s} \ln \frac{S(t)}{S(0)} \right] \end{aligned} \quad (4-6)$$

其中 $V(0)$ 表示公司資產的起始價值， $S(0)$ 表示標的資產的起始價值。

由式(4-5)及式(4-6)，對於任意時間 $0 \leq t \leq T$ ，可以得到 $V(t), S(t)$ ：

$$X(t) = \frac{1}{\sigma_s} \ln \frac{S(t)}{S(0)} \Rightarrow S(t) = S(0) e^{\sigma_s X(t)} \quad (4-7)$$

$$\begin{aligned} Y(t) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \left[\frac{1}{\sigma_v} \ln \frac{V(t)}{V(0)} - \frac{\rho}{\sigma_s} \ln \frac{S(t)}{S(0)} \right] = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \left[\frac{1}{\sigma_v} \ln \frac{V(t)}{V(0)} - \rho X(t) \right] \\ \Rightarrow V(t) &= V(0) \exp \left\{ \sigma_v \left[\sqrt{1 - \rho^2} Y(t) + \rho X(t) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4-8)$$

2、建構 $X(t)$ 樹

這一小節我們將以 CRR 二元樹以及 BTT 三元樹為範例來介紹如何使用不同的樹狀結構來建立 $X(t)$ 樹。

2-1. 使用 CRR 二元樹建立 $X(t)$

已知 $X(t)$ 隨機微積分方程式為

$$dX(t) = \frac{1}{\sigma_s} \left(r - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) dt + dZ_s, \quad$$

而其平均報酬 $\mu_X = \frac{1}{\sigma_s} \left(r - \frac{\sigma_s^2}{2} \right)$ ，股價波動率 $\sigma_X = 1$ 。

由於 $X(t)$ 隨機變數所代表的是報酬率，因此只要直接加上 $\sigma_X \sqrt{\Delta t}$ 就是下一期上漲的節點 u' ，加上 $-\sigma_X \sqrt{\Delta t}$ 就是下一期下跌的節點，一期的 CRR 示意圖如圖 4-1。

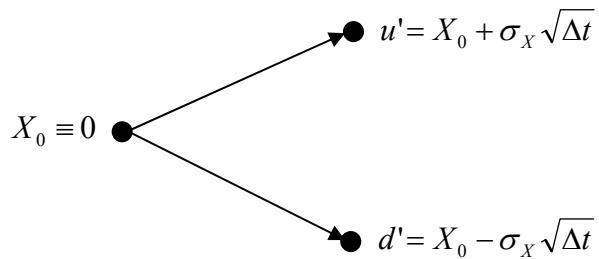


圖 4-1、一期 CRR 示意圖。

而上漲的機率 p_u 與下跌的機率 p_d 必須要滿足求期望值後要符合 X 隨機變數的均數(mean)，即滿足 $p_u \cdot u' + p_d \cdot d' = X_0 + \mu_X \Delta t$ 。 p_u 與 p_d 可由下列式子求得，就可讓 CRR 建立出來的樹狀結構符合 X 隨機變數的均數，證明請見附錄 B。

$$p_u = \frac{1 + \mu_X \sqrt{\Delta t}}{2}$$

$$p_d = 1 - p_u$$

2-2. 利用中央極限定理建立隨機漫步

本節將使用 Shreve, Stochastic Calculus for Finance II 一書中的定理 3.2.1 (Central limit) 來建立 X 隨機漫步過程。

令 $0 \sim T$ 時間切 N 期， $W^{(\frac{N}{T})}(t)$ 為一個 scaled random work，由 Central limit

(Shreve Theorem 3.2.1) 可知，對於任一時間 $t \geq 0$ ，當 $N \rightarrow \infty$ ， $W^{(\frac{N}{T})}(t)$ 會收斂到一個平均值為 0 且變異數為 t 的常態分配。即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W^{(\frac{N}{T})}(t) \sim N(0, t)$$

而當我們決定好 N 以後，每一期的時間間格 $\Delta t = \frac{T}{N}$ 。圖 4-2 為一個 3 期的示意

圖，其中 $N=3$ ， $\Delta t = \frac{1}{3} = 0.33$ 。

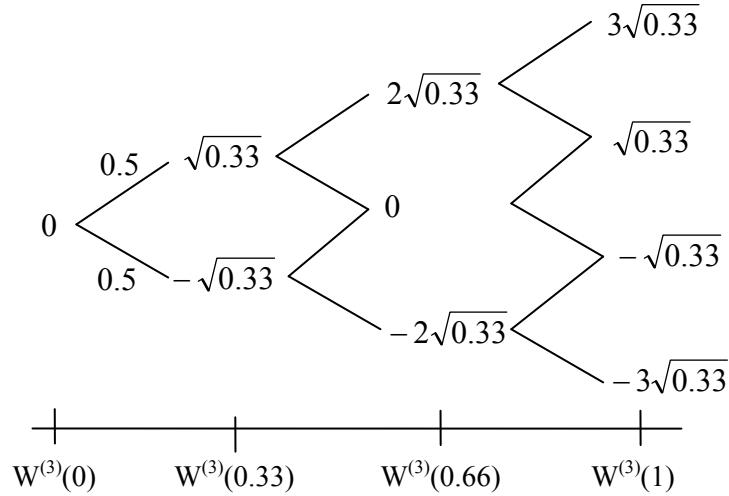


圖 4-2、一個 3 期的 scaled random work，其中 $N=3$ ， $\Delta t=0.33$ 。

由式(4-3) $dX(t) = \frac{1}{\sigma_s} \left(r - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) dt + dZ_s$ ，我們可以知道其平均報酬率為

$\mu_X = \frac{1}{\sigma_s} \left(r - \frac{\sigma_s^2}{2} \right)$ ， $\sigma_X = 1$ ，且 $X(t) \sim N(\mu_X t, \sigma_X^2 t)$ ，因此我們建立出來的 scaled

random work 需要調整平均值，使其符合 $X(t)$ 的分配。我們將每個節點加上 $N \times \mu_X \Delta t$ ，即完成 $X(t)$ 樹的建立。3 期的示意圖如圖 4-3：

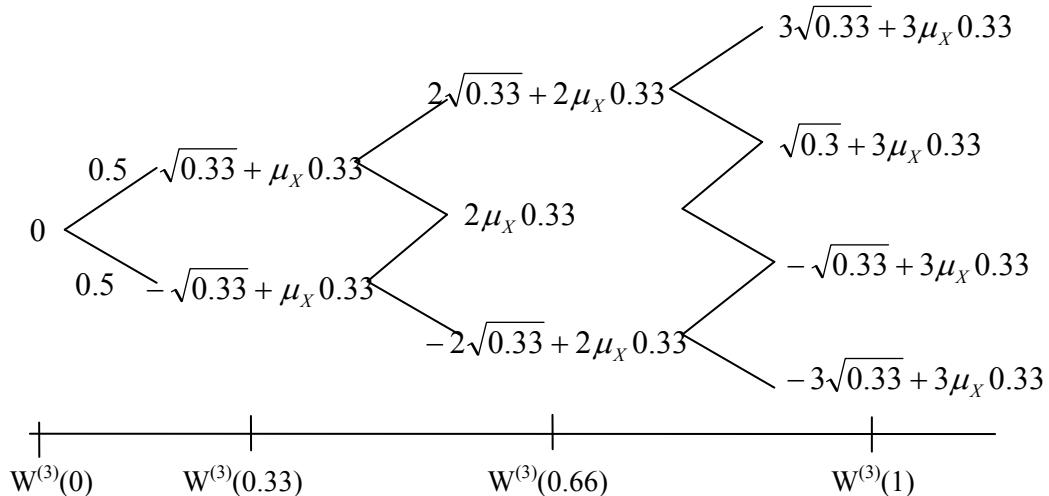


圖 4-3、調整後的 scaled random work。

2-3. 利用 BTT 建立樹狀結構

如果要評價一個障礙隨時間變動的障礙選擇權，可以使用 BTT 三元樹的部分來建構評價樹以避免非線性誤差。圖 4-4 為一個障礙隨時間變動的選擇權以 BTT 所建構的樹狀結構示意圖。

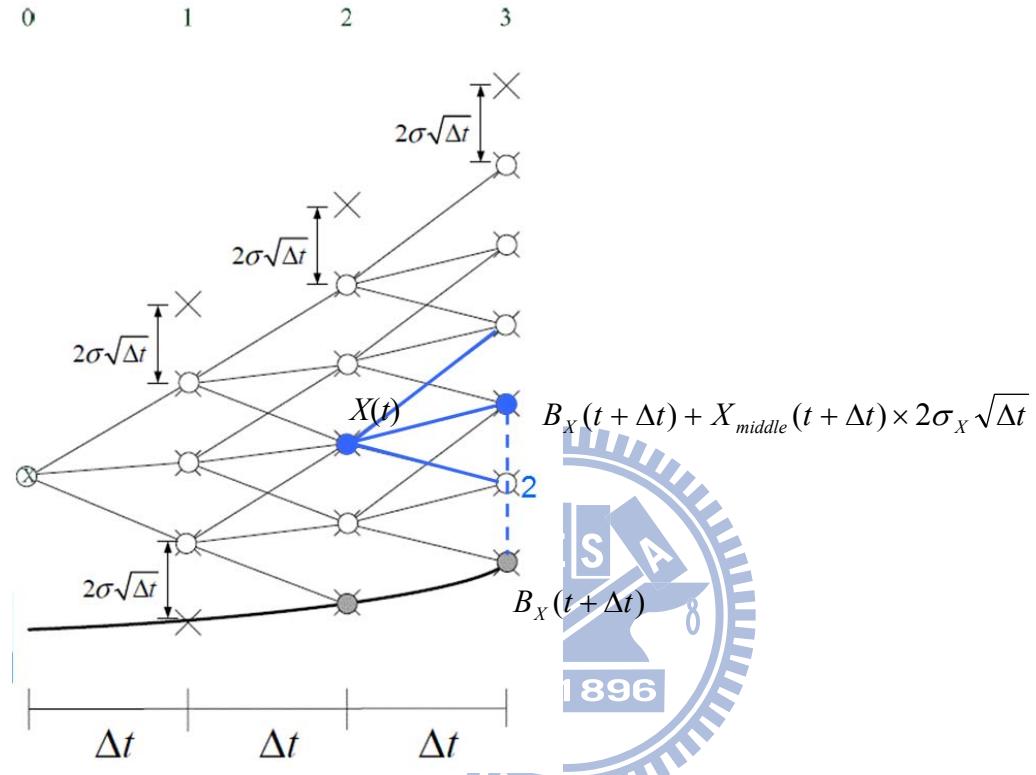


圖 4-4、以 BTT 三元樹的部分評價障礙隨時間變動的障礙選擇權。

我們由 $X(0)=0$ 開始到到期日 T 建立 X 樹。任一節點 $X(t)$ 加上 mean 後要接到下一期的中間節點，且該中間節點距離下一期的障礙 $X_{middle}(t + \Delta t)$ 倍 $2\sigma_X \sqrt{\Delta t}$ 的距離，則我們可以推導出式(4-9)以計算 $X_{middle}(t + \Delta t)$ ：

$$X_{middle}(t + \Delta t) = \left\lfloor \frac{X(t) + \mu\Delta t - B_X(t + \Delta t)}{2\sigma_X \sqrt{\Delta t}} + 0.5 \right\rfloor \quad (4-9)$$

其中 $B_X(t + \Delta t)$ 為下一期的障礙由股價 S 空間轉換到正交化後的 X 空間的價值。

3、Barrier

我們將 Barrier 設定為

$$B_V(t) = D^* \cdot e^{-r(T-t)} + c(t)$$

其中 D^* 為該公司除了選擇權以外的債務，而 $c(t)$ 為歐式買權在時間點 t 時的價值。

我們得到的 $B_V(t)$ 是公司資產 $V(t)$ 的門檻值，為了要帶入正交後的 X-Y-t 樹，所以我們必須將其轉換為對應的 Y 值。由

$$Y(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left[\frac{1}{\sigma_V} \ln \frac{V(t)}{V(0)} - \frac{\rho}{\sigma_S} \ln \frac{S(t)}{S(0)} \right]$$

將 $B_V(t)$ 視為 $V(t)$ 帶入，即可得對應的 $B_Y(t)$ ：

$$B_Y(t) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \left[\frac{1}{\sigma_V} \ln \frac{B_V(t)}{V(0)} - \frac{\rho}{\sigma_S} \ln \frac{S(t)}{S(0)} \right] \quad (4-10)$$

而 $c(t)$ 可以由兩種方式得到：

3-1. 使用公式解計算

如果是歐式買權，可以用 Black-Sholes Formula 來評價。B-S 選擇權評價公式如下：

$$c(t) = S(t) \cdot N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (4-11)$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S(t)}{K} + (r + 0.5\sigma_S^2)(T-t)}{\sigma_S \sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_S \sqrt{T-t}$$

將 $S(t) = S(0)e^{\sigma_S X(t)}$ 帶入上式，則式(4-11)變成

$$c(t) = S(0)e^{\sigma_S X(t)} N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

其中

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S(0)e^{\sigma_S X(t)}}{K} + (r + 0.5\sigma_S^2)(T-t)}{\sigma_S \sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_S \sqrt{T-t}$$

3-2. 利用 $X(t)$ 樹倒推法折現

由式(4-5) $X(t) = \frac{1}{\sigma_s} \ln \frac{S(t)}{S(0)}$ ， $X(t)$ 樹僅相依於 $S(t)$ 的資訊，因此我們可以藉由已經展開的 $X(t)$ 樹，取得每個節點上的 $S(t)$ ，最後利用倒推法取得 $c(t)$ 。

在到期日 T 時，我們有 $X(T)$ ，其選擇權的價格為

$$c(T) = (S(T) - K)^+ = (S(0)e^{\sigma_s X(T)} - K)^+$$

然後使用倒推法，利用當初建構 $X(t)$ 樹的機率求期望值和無風險利率折現。

由於 Barrier 僅需要 $X(t)$ 的資訊，因此可以利用上一步驟的結果計算每一個 $X(t)$ 上的 $B(t)$ ，再由此資訊在 Y 軸上每隔 $2\sigma_y \sqrt{\Delta t}$ 建立一個節點。

4、建構 $Y(t)$ 樹

對於 $Y(t)$ 樹，我們將使用本章第一節 2-3 小節的方式建立樹狀結構。由於 BTT 要求每個節點的間距必須為 $2\sigma_y \sqrt{\Delta t}$ ，但每個時間點障礙間的落差並不一定是 $2\sigma_y \sqrt{\Delta t}$ 的整數倍，因此格子點間並不會對齊，示意圖如圖 4-5。

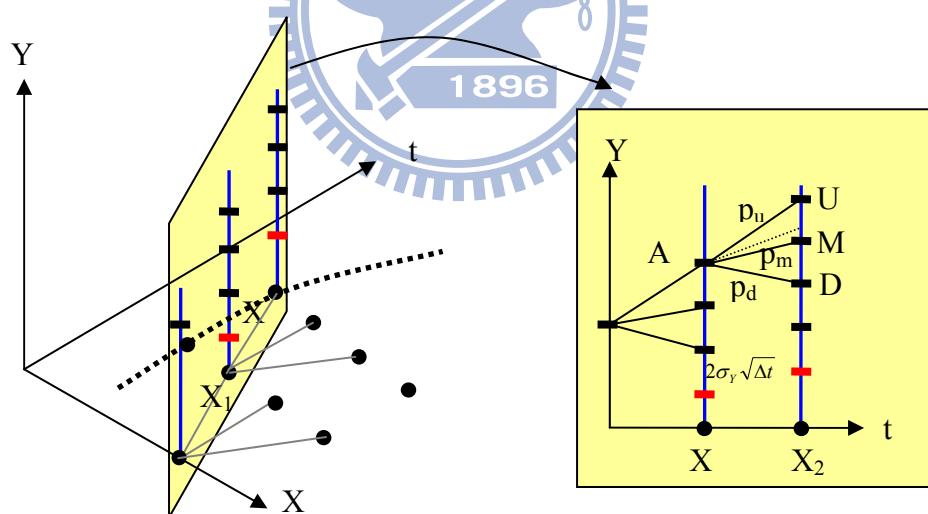


圖 4-5、 Y 樹建構示意圖。

對於時間點 t 上的節點 A ，我們尋找 $t+1$ 上最接近 $Ae^{\mu_y \Delta t}$ 的點 M ，及 M 的上面一點 U 、 M 下面一點 D ，最後記錄每一個 $X(t)$ 節點所需要的 Y 值在第幾格。

5、倒推法(Backward induction)

在到期日 T 時，我們可以展開 $X-Y$ 平面上所有的點，並且所有節點的值皆可以計算出來。因此對於 $t = T-1$ 所形成的 $X-Y$ 平面上的點，都可以由時間 T 的點求期望值並折現回來。

因為我們已經進行正交化，因此每個點的機率只需要將 Y 樹的機率乘上 X 樹的機率即可求得。

如果發生違約(Default)，則我們使用以下公式計算違約後的公司價值：

$$\begin{aligned}\omega_v(t) &= (1-\alpha)V(t) \frac{c(t)}{D^* + c(t)} \\ &= (1-\alpha)V(0)e^{\sigma_v \left[\sqrt{1-\rho^2}Y(t) + \rho X(t) \right]} \frac{c(t)}{D^* + c(t)}\end{aligned}$$

其中 α 為破產成本。

第二節、減少非線性誤差

為了減少非線性誤差，我們所建立的樹狀結構必須符合一些條件。以下將列出本論文使用到的減少非線性誤差必須符合的條件。

一般選擇權



- 最後一期的節點要和履約價格重合。
- 我們使用 Heston and Zhou(2000)的方法在最後一期和履約價格重合的那一個節點對選擇權報酬做積分。我們使用式(4-12)的式子來對該節點積分。

$$\frac{1}{u-d} \int_m^u (s-K) ds = \frac{1}{u-d} \left(\frac{u^2 - m^2}{2} - K(u-m) \right) \quad (4-12)$$

其中 m 代表和履約價格重合的節點的股價(在 S 域中計算)； u 代表在 X 樹狀結構和履約價格重和的點加上 $\sigma_x \sqrt{\Delta t}$ 然後再轉換到 S 域； d 代表在 X 樹狀結構和履約價格重和的點減去 $\sigma_x \sqrt{\Delta t}$ 然後再轉換到 S 域； K 為履約價格。

障礙選擇權

- 節點要和所有的障礙重合。

公司資產樹($Y(t)$ 樹)

- 如果在 Merton 模型下評價交易對手公司資產，我們可以將公司資產樹視為一種一般選擇權來評價。因此在最後一期和公司違約門檻重合的那一個節點我們可以對選擇權報酬做積分來減少非線性誤差。但因為公司碰觸到違約門檻時我們將得到名義請求權的價值而不是一般選擇權當股價等於履約價格的沒有報酬(即選擇權報酬為 0)，因此我們使用式(4-13)來計算。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{u-d} \left(\int_m^u (S_T - K) dv + \int_d^m (1-\alpha)v \frac{S_T - K}{B^*} dv \right) \\ &= \frac{1}{u-d} \left[(S_T - K)(u-m) + (1-\alpha) \frac{S_T - K}{B^*} \left(\frac{m^2 - d^2}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4-13)$$

其中 m 為在 Y 樹公司資產與障礙重合的節點所代表的公司資產； u 為在 Y 樹公司資產與障礙重合的節點加上 $\sigma_Y \sqrt{\Delta t}$ 所代表的公司資產； d 為在 Y 樹公司資產與障礙重合的節點減去 $\sigma_Y \sqrt{\Delta t}$ 所代表的公司資產； $S_T - K$ 為在到期日選擇權的報酬； B^* 為公司資產障礙。

第三節、使用 BTT 評價障礙選擇權的一個二期的範例

以下討論一個二期的樹的範例在 FPM 模型下評價可違約下出局障礙買權，其中公司資產違約門檻為公司其他債務加上選擇權報酬($D^* + c$)，參數如下：股價 $S=40$ 、履約價 $K=30$ 、障礙 $B=35$ 、障礙折現率 $\gamma=0.01$ 、公司資產在期初 $V=100$ 、公司的其他債務 $D^*=90$ 、距離到期日 $T=3$ 年、股價波動率 $\sigma_S=0.2$ 、公司資產波動率 $\sigma_V=0.2$ 、公司資產與股價相關係數 $\rho=0$ 、無風險利率 $r=0.05$ 、破產成本 $\alpha=0.25$ 。

而根據上面參數，我們可以計算每一期間隔時間 $\Delta t=1.5$ 、 $\sqrt{\Delta t}=1.22$ 、 $2\sqrt{\Delta t}=2.45$ 、 X 隨機變數的均數 $\mu_X=0.15$ 、 Y 隨機變數的均數 $\mu_Y=0.15$ 。

首先我們先使用 BTT 三元樹展開 X 樹並計算障礙選擇權，圖 4-6 為我們評價過程。我們先將每一期的障礙計算出來：

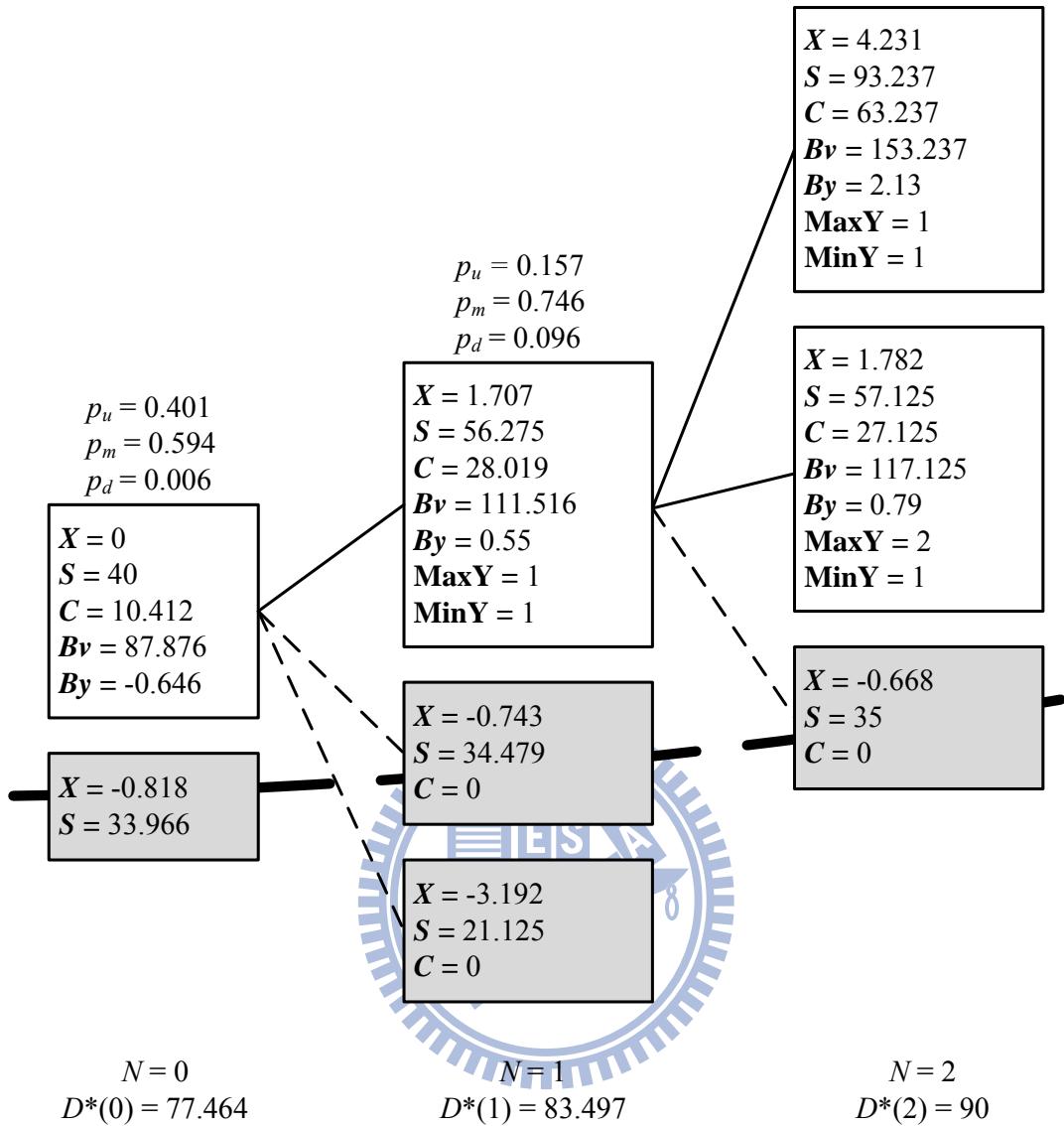


圖 4-6、一個二期的可違約障礙選擇權 X 樹

灰色的節點表示碰到或低於障礙的節點，所有價格四捨五入到小數點後第三位。

在第 1 期的障礙為

$$B_1 = B_2 * \exp(-\gamma * \Delta t) = 35 * \exp(-0.01 * 1.05) = 34.479 ,$$

第 0 期時障礙為

$$B_0 = B_1 * \exp(-\gamma * \Delta t) = 34.479 * \exp(-0.01 * 1.05) = 33.966 .$$

有了障礙以後，我們可以利用式(4-5)將障礙轉到 X 域。如第一期的障礙轉換到 X 域的計算如下：

$$\frac{1}{\sigma_s} \ln \frac{S(t)}{S(0)} = \frac{1}{0.2} \ln \frac{34.479}{40} \approx -0.743 .$$

有了每一期的障礙以後，我們現在可以利用 BTT 來建立三元樹。由於 $X(0) \equiv 0$ ，因此我們可由式(4-9)來計算三元樹的中間節點。以第一期為例，

$$X_{middle}(N=1) = \left\lfloor \frac{0 + 0.15 \times 1.5 - (-0.743)}{2.45} + 0.5 \right\rfloor = \lfloor 0.395 + 0.5 \rfloor = 0 ,$$

因此第 0 期節點所產生的三個分支，中間的分支將接到第一期障礙所在的節點，往上一個節點就是上漲的節點，往下一個節點就是下跌的節點。上節點的 X 值可由障礙加上節點編號乘上 $2\sqrt{\Delta t}$ 倍求得， S 的值可由式(4-7)轉換而來。如上面求得的 $X_{middle}(N=1) = 0$ ，障礙為 -0.743，因此 X 值為 $-0.743 + 0 \times 2.45 = -0.743$ ， S 的值 $S(1) = S(0)e^{\sigma_s X(1)} = 40 \times e^{0.2 \times (-0.743)} \approx 34.479$ ；而上漲的節點 X 值為 $-0.743 + 1 \times 2.45 = 1.707$ ， S 值為 56.275；下跌的節點 X 值為 $-0.743 - 1 \times 2.45 = -3.192$ ， S 值為 21.125。我們只需要展開比障礙還大的節點(白色節點)，如果節點剛好與障礙重合或是比障礙還小(灰色節點)，則因為選擇權出局而不必計算。

將樹建構完畢以後，我們可以使用倒推法計算選擇權價值。在到期日，選擇權報酬為 $I_{S_T > B}(S_T - K)^+$ ，所以三個節點報酬分別為 63.24、27.13、0。從到期日倒退一期，我們將利用到期日這三個節點求期望值並用無風險利率折現來求得第 1 期的選擇權價值，其中機率我們可由第二章第二節的方法求得 p_u 、 p_m 、 p_d 三個機率。以下我們將演示如何求得第一期 $X=1.707$ 的節點的 BTT 的機率。

首先我們要計算 BTT 中 $\tilde{\alpha}$ 、 $\tilde{\beta}$ 、 $\tilde{\gamma}$

$$\begin{aligned}\tilde{\beta} &\equiv 1.782 - (1.707 + 0.15 \times 1.5) = -0.15, \\ \tilde{\alpha} &\equiv \tilde{\beta} + 2\sigma\sqrt{\Delta t} = -0.15 + 2.45 = 2.3, \\ \tilde{\gamma} &\equiv \tilde{\beta} - 2\sigma\sqrt{\Delta t} = -0.15 - 2.45 = -2.6,\end{aligned}$$

式(2-1)讓 BTT 樹符合了隨機方程式的均值以及變異數且讓機率和為 1，依照 Crama's rule 可解得式(2-2)及式(2-3)。我們首先計算式(2-3)：

$$\begin{aligned}Det &= (\tilde{\beta} - \tilde{\alpha}) \times (\tilde{\gamma} - \tilde{\alpha}) \times (\tilde{\gamma} - \tilde{\beta}) \\ &= (-0.15 - 2.3) \times (-2.6 - 2.3) \times (-2.6 - (-0.15)) \approx -29.394, \\ Det_u &= (\tilde{\beta} \times \tilde{\gamma} + \Delta t) \times (\tilde{\gamma} - \tilde{\beta}) \\ &= (-0.15 \times (-2.6) + 1.5) \times (-2.6 - (-0.15)) \approx -4.629, \\ Det_m &= (\tilde{\alpha} \times \tilde{\gamma} + \Delta t) \times (\tilde{\alpha} - \tilde{\gamma}) \\ &= (2.3 \times (-2.6) + 1.5) \times (2.3 - (-2.6)) \approx -21.935, \\ Det_d &= (\tilde{\alpha} \times \tilde{\beta} + \Delta t) \times (\tilde{\beta} - \tilde{\alpha}) \\ &= (2.3 \times (-0.15) + 1.5) \times (-0.15 - 2.3) \approx -2.829\end{aligned}$$

然後我們可由式(2-2)求得機率：

$$p_u = \frac{Det_u}{Det} = \frac{-4.629}{-29.394} \approx 0.157$$

$$p_m = \frac{Det_m}{Det} = \frac{-21.935}{-29.394} \approx 0.746$$

$$p_d = \frac{Det_d}{Det} = \frac{-2.829}{-29.394} \approx 0.096$$

有了機率值後，我們就可以計算期望值，並依照無風險利率折現：

$$e^{-0.05 \times 1.5} [63.237 \times 0.157 + 27.125 \times 0.746 + 0 \times 0.096] \approx 28.019 ,$$

最後，我們可得期初的選擇權價值：

$$e^{-0.05 \times 1.5} [28.019 \times 0.401 + 0 \times 0.594 + 0 \times 0.06] = 10.412 .$$

有了選擇權價值後再加上公司債務的折現值，就可以得到違約門檻 Bv 。將 Bv 帶入式(4-10)就可以計算出 Y 樹在每一個 X 節點的公司資產門檻。有了 Y 樹的門檻，我們就能夠利用式(4-9)來建立 Y 樹。由於每一個 X 節點都會生成一個與 Y 軸平行的柱子，柱子上的節點就是 Y 樹的節點，而我們不知道這根柱子要多少個節點才能夠生成整棵 Y 樹，所以我們順向建立整棵樹，先讓每個節點接接着，並且記錄每一根柱子會用到的最高的節點 MaxY 以及最低的節點 MinY 。我們用一個整數來將柱子上的節點編號，違約門檻所在的節點是 0，往上一個節點(即往上 $2\sigma_Y \sqrt{\Delta t}$)是 1，往下一個節點是 -1，以此類推。我們可以注意到當公司資產碰到違約門檻時(節點編號小於等於 0)，選擇權的價值就以清算後的價值計算，該節點的值不是由倒推法得到的，因此 MinY 的最小值是 1。

例如由期初節點計算第 1 期白色節點，套用式(4-9)，可得：

$$Y_{middle}(N=1) = \left\lfloor \frac{0 + 0.15 \times 1.5 - (-0.54)}{2.45} + 0.5 \right\rfloor = \lfloor 0.31 + 0.5 \rfloor = 0 ,$$

因此是接到 Bv 所在的位置。往上一個點 $0+1=1$ 則得到這個節點在 Y 軸最高的位置，記錄在 MaxY 中；往下一個點 $0-1=-1$ 並和 1 取最大值(即 $\max(-1, 1)$)，則得到這個節點在 Y 軸最小且還沒有違約的節點，記錄在 MinY 中。如果之後還有其他節點使用到同樣的 X 節點，而且他需要的 Y 軸節點比目前已存的 MaxY 還大，

則更新 MaxY ，相反的，如果需要的 Y 軸節點比已存的 MinY 還小，則更新 MinY 。如果選擇權出局了(即圖 4-6 的灰色節點)，則該 X 節點上面的選擇權價值都是 0，計算 MaxY 和 MinY 是沒有意義的，因此在本例中我們沒有列出灰色節點的 MaxX 和 MinY 。

現在整棵樹我們都建構完成，可以使用倒推法計算可違約選擇權的價值，圖 4-7 為計算可違約選擇權的過程。

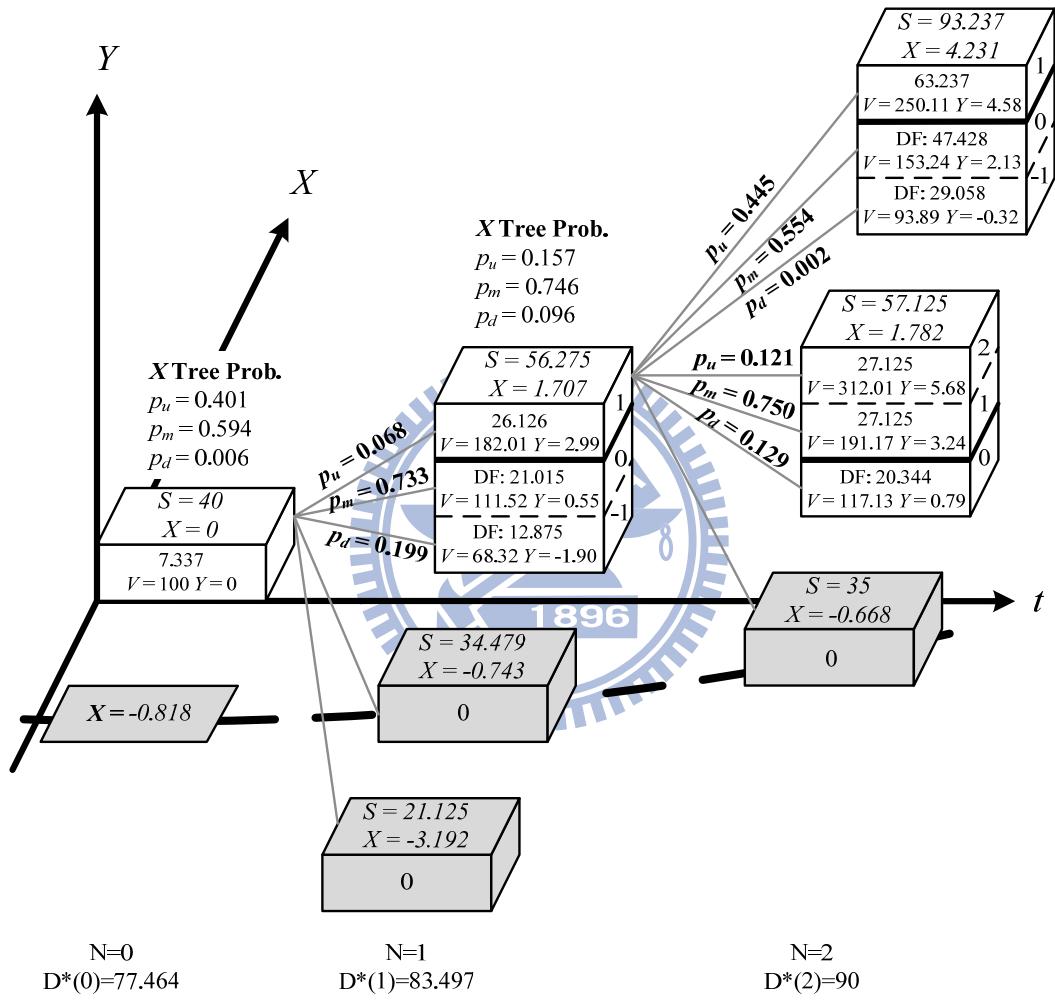


圖 4-7、一個二期的可違約障礙選擇權折現過程

我們一樣先在到期日計算每一個節點的報酬，如果交易對手的公司資產大於門檻，則可違約選擇權的報酬即為障礙選擇權的報酬，如果交易對手的公司資產碰觸到門檻，則我們會計算清算後可拿回多少錢。圖 4-7 到期日的立方柱為我們的計算結果，立方柱的粗實線以上為交易對手沒有違約的情況，粗實線以下為計算清算後可拿回多少報酬，我們加註一個標籤 DF (Default)以標示該報酬為清算後的報酬，此外我們也標註了在該節點對應的股價 S 、公司資產 V 及對應的 Y 值。

以 $X=1.782$ 的立方柱為例，該立方柱的選擇權報酬為 27.125 ， $Y=3.24$ 、 $Y=5.68$ 兩個節點因為在違約門檻之上，所以可違約選擇權的報酬就是 27.125 。當 $Y=0.79$ 時，則因為公司資產碰觸到違約門檻，交易對手發生違約，該節點的值我們使用違約公式來計算。本例到期日的違約公式為：

$$(1-\alpha)V(T) \frac{c(T)}{D^*+c(T)} ,$$

其中 $c(T)$ 是在到期日的選擇權價值、 $V(T)$ 是在到期日的公司資產價值。帶入上述案例可得

$$(1-\alpha)V(T) \frac{c(T)}{D^*+c(T)} = (1-0.25) \times 117.13 \times \frac{27.125}{90+27.125} \approx 20.344 .$$

可違約選擇權到期日的報酬求得之後，可使用倒推法來求得選擇權的報酬。 Y 樹的機率大致上跟 X 樹的機率求法相同，以下將示範如何計算第一期 $X=1.707$ ， $Y=2.99$ 連接到到期日 $X=4.231$ 的機率。由之前的計算可知，該節點的中間節點將會接到下一期編號為 0 的 Y 樹節點，由 Y 樹的資訊我們可求得 $\tilde{\alpha}$ 、 $\tilde{\beta}$ 、 $\tilde{\gamma}$ ：

$$\begin{aligned}\tilde{\beta} &\equiv 2.13 - (2.99 + 0.15 \times 1.5) = -1.085, \\ \tilde{\alpha} &\equiv \tilde{\beta} + 2\sigma\sqrt{\Delta t} = -1.085 + 2.45 = 1.365, \\ \tilde{\gamma} &\equiv \tilde{\beta} - 2\sigma\sqrt{\Delta t} = -1.085 - 2.45 = -3.535,\end{aligned}$$

然後計算式(2-3)，得到 $Det = -29.394$ 、 $Det_u = -13.073$ 、 $Det_m = -16.274$ 、 $Det_d = -0.048$ 。最後我們求得機率

$$\begin{aligned}p_u &= \frac{Det_u}{Det} = \frac{-13.073}{-29.394} \approx 0.445 , \\ p_m &= \frac{Det_m}{Det} = \frac{-16.274}{-29.394} \approx 0.554 , \\ p_d &= \frac{Det_d}{Det} = \frac{-0.048}{-29.394} \approx 0.002 .\end{aligned}$$

由於我們的隨機過程已經經過正交化，因此只要將 Y 樹的機率與 X 樹的機率相乘即可得到該節點的機率。我們以第 1 期的節點為例，來說明如何計算選擇權價值：

$$\begin{aligned}e^{-0.05 \times 1.5} &\left[0.157 \times (0.445 \times 63.237 + 0.554 \times 47.428 + 0.002 \times 29.058) \right. \\ &+ 0.746 \times (0.121 \times 27.125 + 0.750 \times 27.125 + 0.129 \times 20.344) \\ &\left. + 0.096 \times 0 \right] = 26.126\end{aligned}$$

當我們在求倒推法時需要引用到公司違約的 Y 軸節點，則我們使用對應的違約評價公式計算。本例的違約公式為：

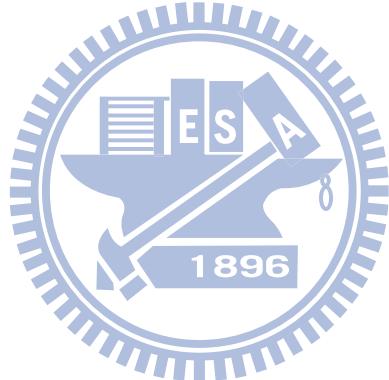
$$(1-\alpha)V(\tau_V) \frac{c(\tau_V)}{e^{-r(T-\tau_V)} \cdot D^* + c(\tau_V)} ,$$

其中 $c(\tau_V)$ 是在時間點 τ_V 的選擇權價值、 $V(\tau_V)$ 是在時間點 τ_V 的公司資產價值。

以第一期 $X=1.707$ 、 $Y=0.55$ 的節點為例，此時 $c(\tau_V)=28.019$ 、
 $V(\tau_V)=111.52$ 、 $e^{-r(T-\tau_V)}D^*=83.497$ 、破產成本 $\alpha=0.25$ ，帶入違約公式可得

$$(1-0.25) \times 111.52 \left(\frac{28.019}{83.497 + 28.019} \right) = 21.015 .$$

最後，我們可以不斷重複上述倒推法的步驟求得期初的可違約選擇權價值 7.337。



第五章、實驗結果與分析

一般我們所評價的選擇權，皆假設交易對手在選擇權持有人履約時不會違約，即不存在交易對手違約風險。而本論文繼承的 Klein(1996) 及 Klein and Inglis (2001)的模型則考慮了交易對手的違約風險。

本章將實做本論文的樹狀結構並對實驗結果進行分析。我們將以一般選擇權與障礙選擇權為例，並根據 Klein (1996)的固定違約門檻(D^*)及 Klein and Inglis (2001) 的變動違約門檻($D^* + c_i$)，並分別加入首次通透模型進行分析。

我們所使用的基本案例的參數為：股價 $S=40$ 、履約價 $K=40$ 、如果為障礙選擇權，障礙 $B=35$ 、公司資產在期初 $V=100$ 、公司的其他債務 $D^*=90$ 、距離到期日 $T=3$ 年、股價波動率 $\sigma_S = 0.2$ 、公司資產波動率 $\sigma_V = 0.2$ 、公司資產與股價相關係數 $\rho = 0$ 、無風險利率 $r=0.05$ 、破產成本 $\alpha=0.25$ ，切 500 期。

第一節、評價一般選擇權(Vanilla Option)

評價一般選擇權當障礙為一常數 D^* 的結果如附錄表 A1，當障礙為公司債務加上選擇權(D^*+c)的結果如附錄表 A3。在 FPM 模型下，當公司違約時選擇權持有人可獲得回收率 δ (recovery rate)乘上選擇權價值(即 $\delta \cdot c_i$) (潘政宏 2010 的 FPM 模型)如附錄表 A2。

評價一般選擇權於 Merton 模型下，公司違約門檻為一常數 D^* 的 base case 收斂情況如圖 5-1，當期數切得越大，本論文所提出的數值結果會逼近 Klein (1996) 所提出的可違約選擇權的理論價格。

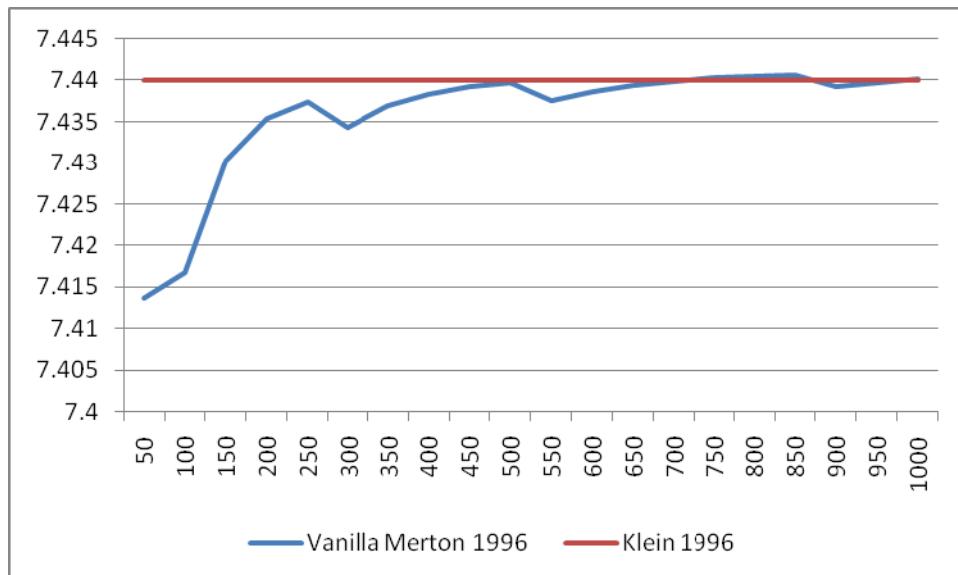


圖 5-1、一般選擇權於 Merton 模型下，公司違約門檻為一常數 D^* 的 base case 收斂情況

評價一般選擇權於 Merton 模型下，公司違約門檻為 D^*+c 的 base case 收斂情況如圖 5-2。其中 Klein and Inglis (2001) 是近似解而不是封閉解。

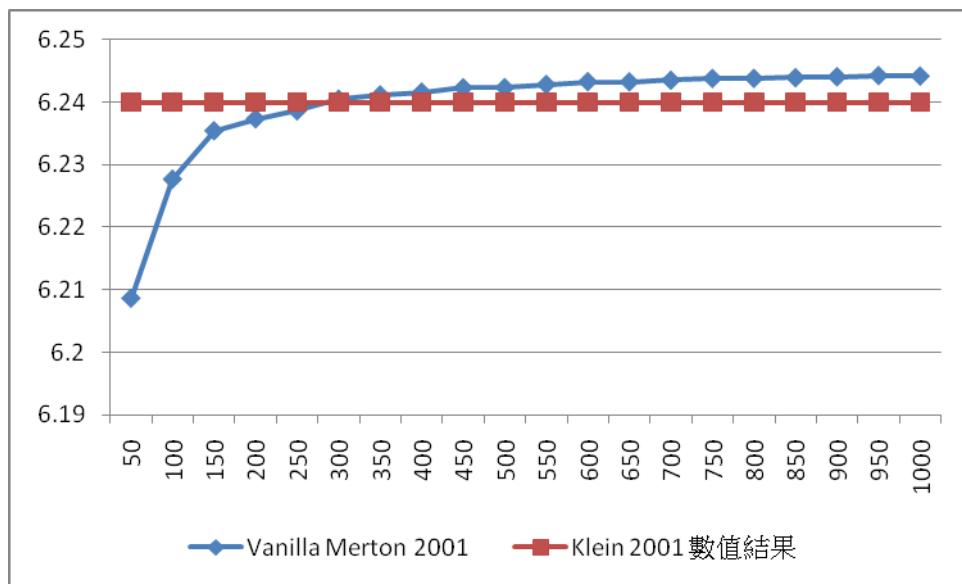


圖 5-2、一般選擇權於 Merton 模型下，公司違約門檻為 D^*+c 的 base case 收斂情況

評價一般選擇權於 FPM 模型下，公司違約門檻為一常數 D^* 的 base case 收斂情況如圖 5-3。

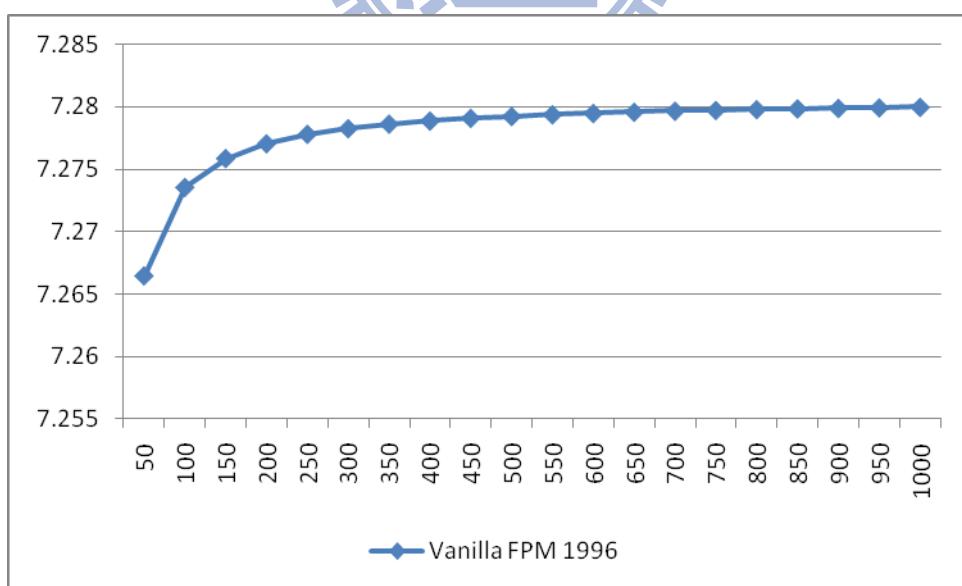


圖 5-3、一般選擇權於 FPM 模型下，公司違約門檻為一常數 D^* 的 base case 收斂情況

評價一般選擇權於 FPM 模型下，公司違約門檻為一常數 D^*+c 的 base case 收斂情況如圖 5-4。

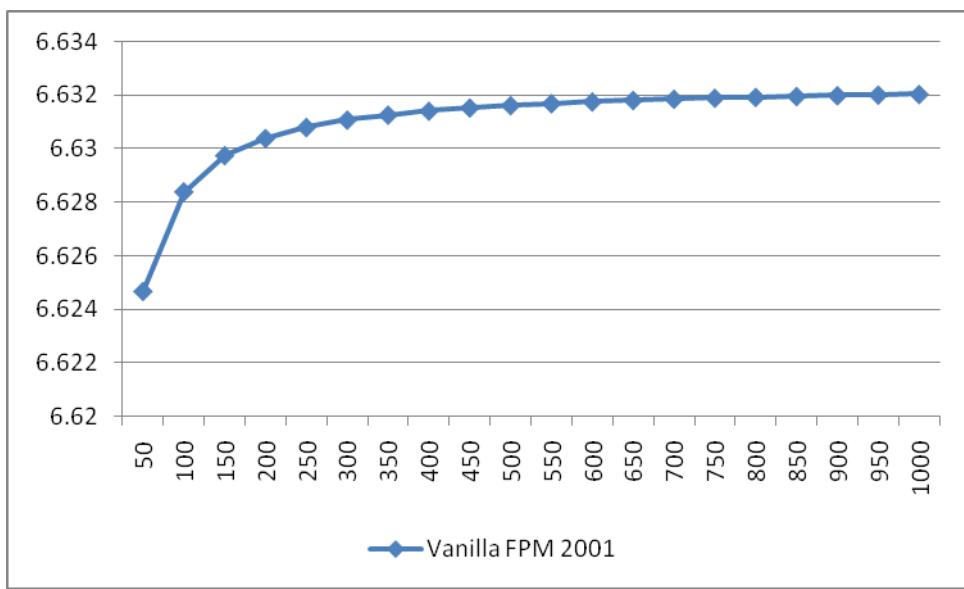


圖 5-4、一般選擇權於 FPM 模型下，公司違約門檻為一常數 D^*+c 的 base case 收斂情況

第二節、評價常數障礙選擇權(Constant Barrier Option)

在我們的模型中，令 $\gamma = 0$ 時就是障礙為一個常數的障礙選擇權。當障礙為一常數 D^* 的結果如附錄表 A4，當障礙為公司債務加上選擇權(D^*+c)的結果如附錄表 A6。

而我們評價常數障礙選擇權於 Merton 的模型下公司資產門檻為一常數 D^* 的 base case 收斂情況如圖 5-5，當期數切得越大，本論文所提出的數值結果會逼近潘政宏(2010)所提出的可違約選擇權的分析解。

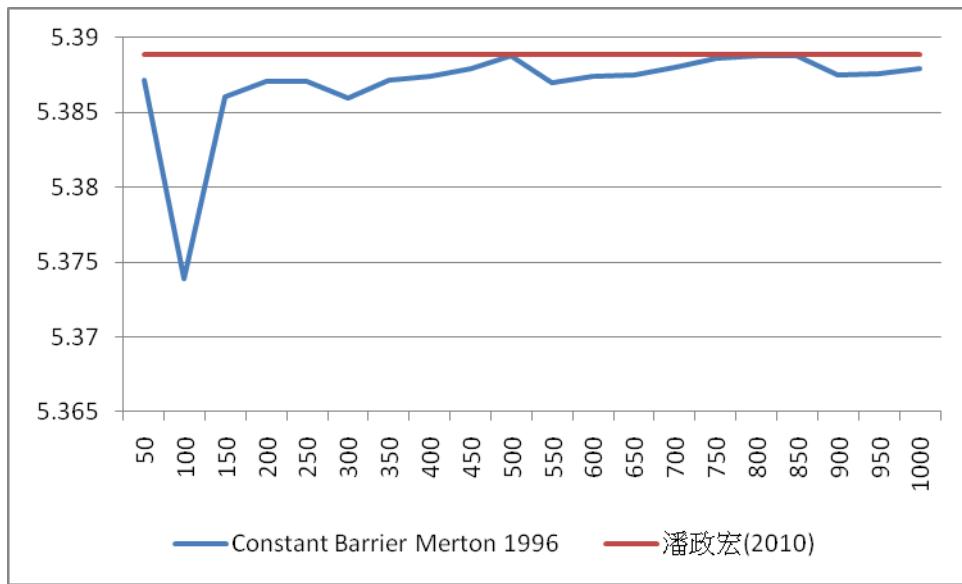


圖 5-5、常數障礙選擇權於 Merton 的模型下公司資產門檻為一常數 D^* 的 base case 收斂情況

常數障礙選擇權於 Merton 的模型下公司資產門檻為 D^*+c 的 base case 收斂情況如圖 5-6。

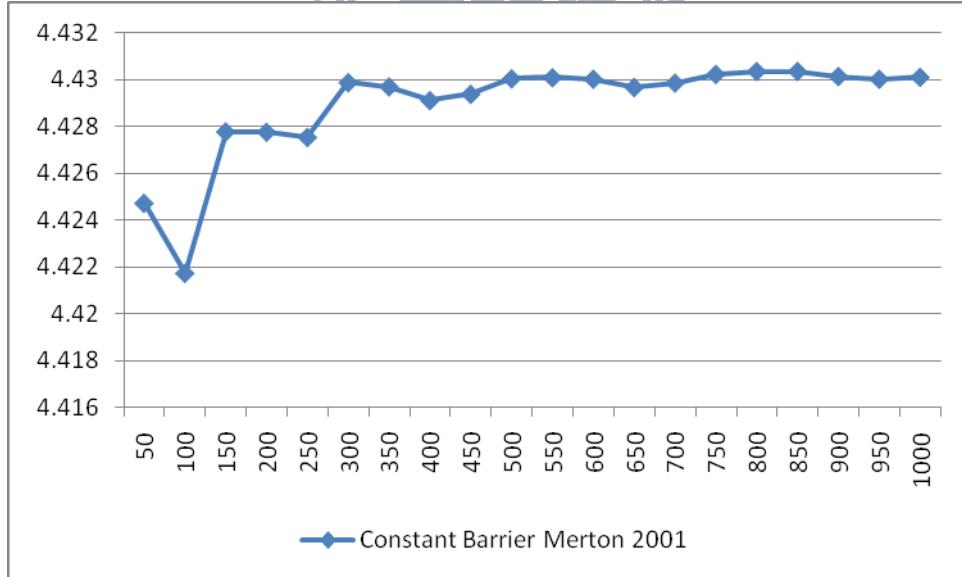


圖 5-6、常數障礙選擇權於 Merton 的模型下公司資產門檻為 D^*+c 的 base case 收斂情況

常數障礙選擇權於 FPM 的模型下公司資產門檻為一常數 D^* 的 base case 收斂情況如圖 5-7。

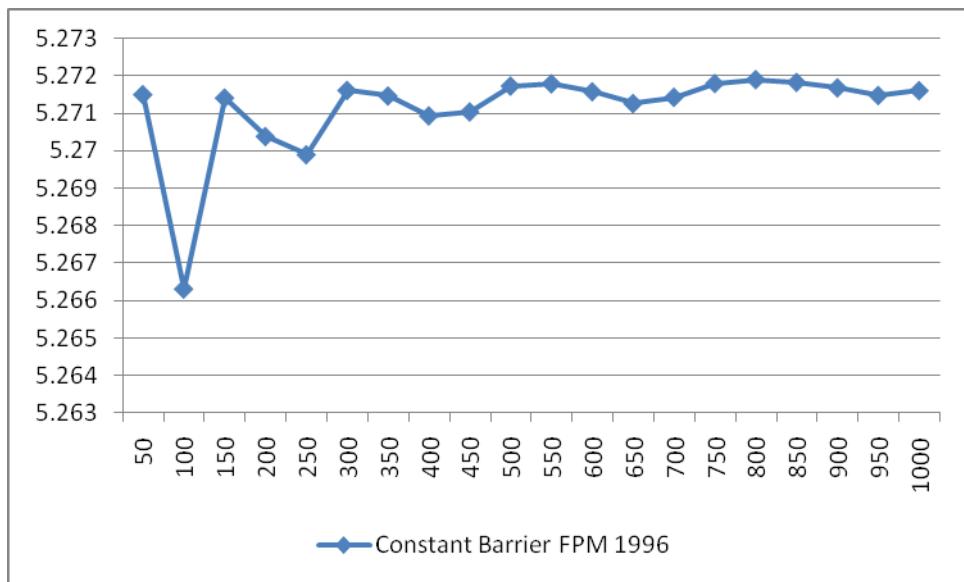


圖 5-7、常數障礙選擇權於 FPM 的模型下公司資產門檻為一常數 D^* 的 base case 收斂情況

常數障礙選擇權於 FPM 的模型下公司資產門檻為 D^*+c 的 base case 收斂情況如圖 5-8。

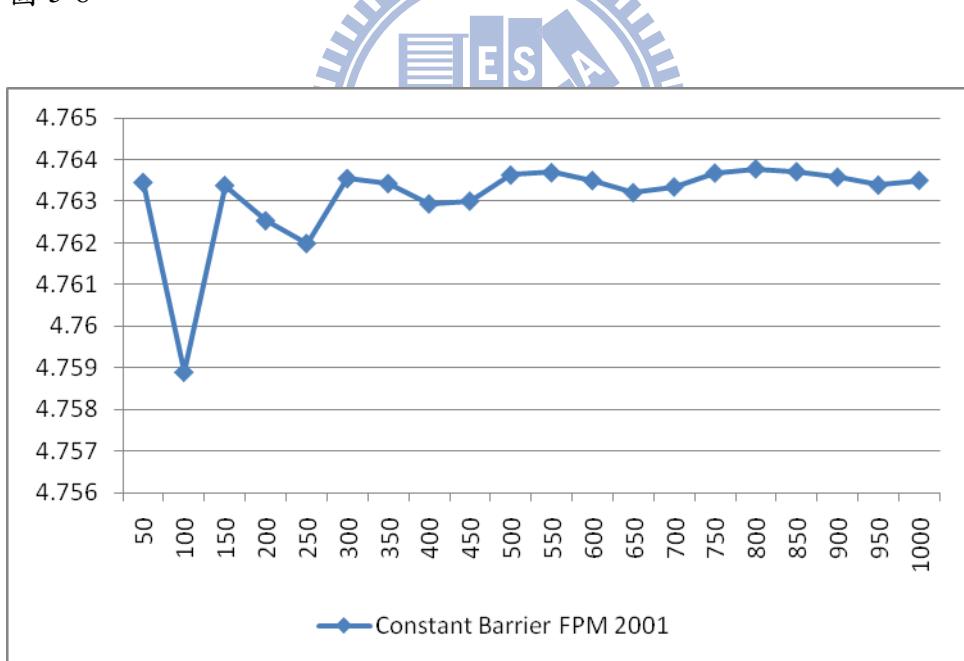


圖 5-8、常數障礙選擇權於 FPM 的模型下公司資產門檻為 D^*+c 的 base case 收斂情況

第三節、評價指數障礙選擇權(Exponential Barrier Option)

在我們的模型中，當 $\gamma \neq 0$ 時就是障礙為一個指數遞增的障礙選擇權。當障礙為一常數 D^* 的結果如附錄表 A5，當障礙為公司債務加上選擇權(D^*+c)的結果如附錄表 A7。

而我們指數障礙選擇權於 Merton 的模型下公司資產門檻為一常數 D^* 的 base case 收斂情況如圖 5-9，當期數切得越大，本論文所提出的數值結果會逼近潘政宏 (2010) 所提出的可違約選擇權的理論價格。我們在 base case 中令 $\gamma = 0.06$ 。

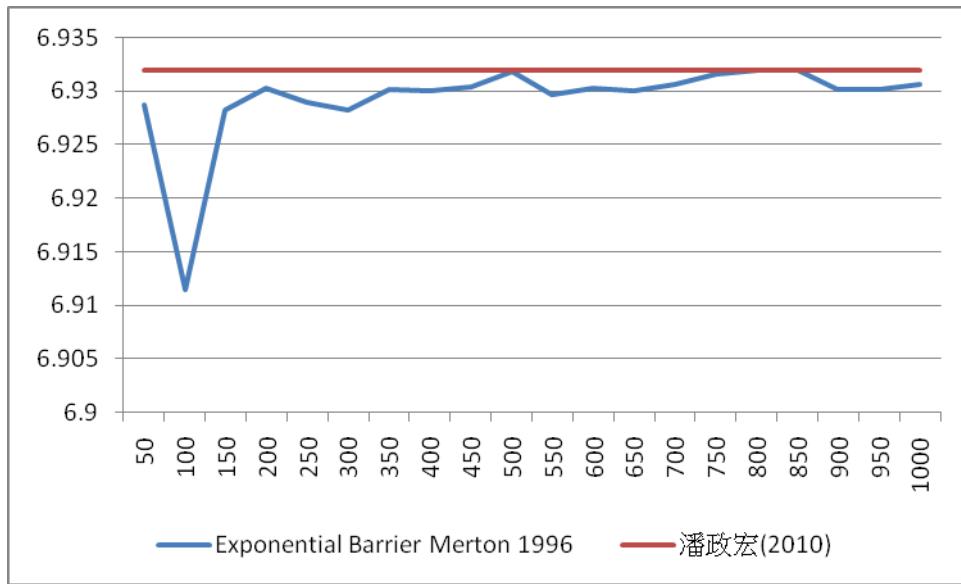


圖 5-9、指數障礙選擇權於 Merton 的模型下公司資產門檻為一常數 D^* 的 base case 收斂情況

指數障礙選擇權於 Merton 的模型下公司資產門檻為 D^*+c 的 base case 收斂情況如圖 5-10。

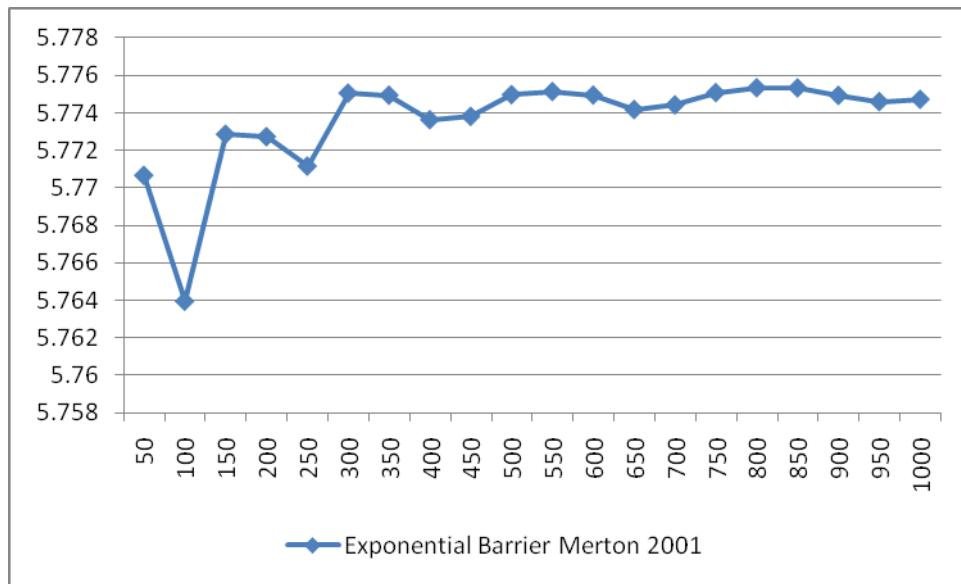


圖 5-10、指數障礙選擇權於 Merton 的模型下公司資產門檻為 D^*+c 的 base case 收斂情況

指數障礙選擇權於 FPM 的模型下公司資產門檻為一常數 D^* 的 base case 收斂情況如圖 5-11。

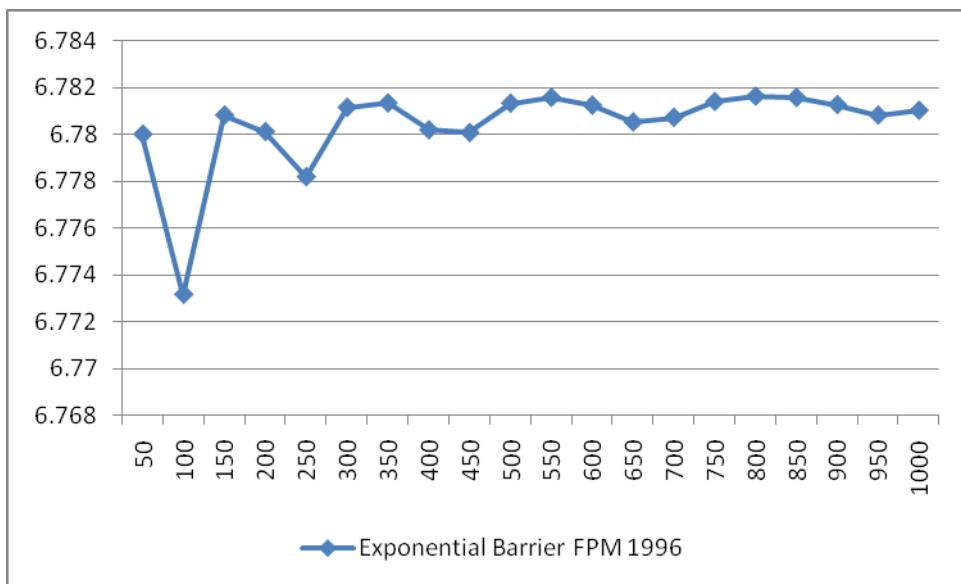


圖 5-11、指數障礙選擇權於 FPM 的模型下公司資產門檻為一常數 D^* 的 base case 收斂情況

指數障礙選擇權於 FPM 的模型下公司資產門檻為 D^*+c 的 base case 收斂情況如圖 5-12。

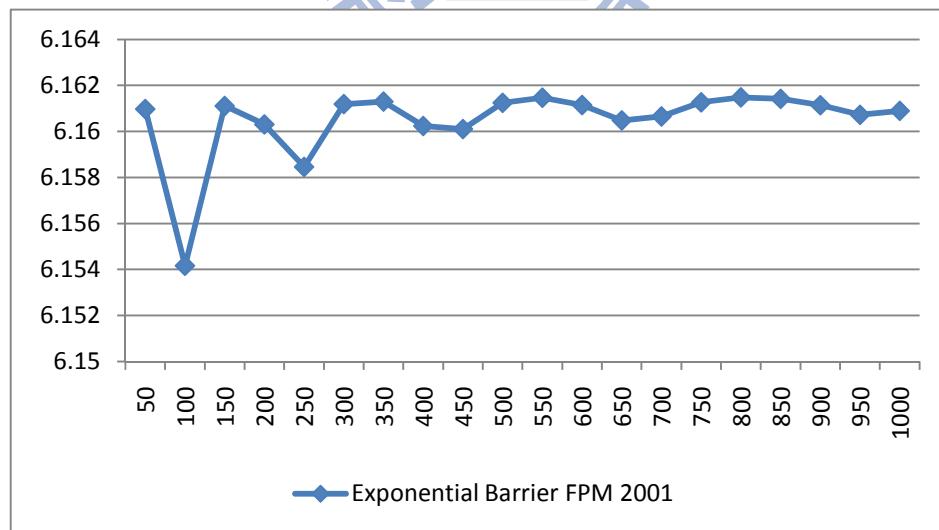


圖 5-12、指數障礙選擇權於 FPM 的模型下公司資產門檻為 D^*+c 的 base case 收斂情況

第四節、可違約一般買權敏感度分析

本節將根據模型中的各項參數來對各種可違約一般買權來進行敏感度分析。我們所使用的參數為第三節所列的基本案例。

- 期初股價 S

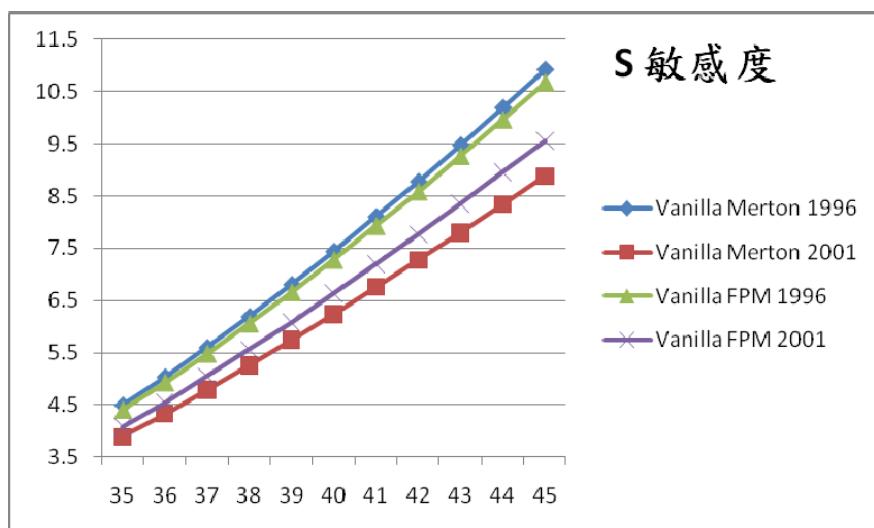


圖 5-13、期初股價對可違約一般選擇權敏感度分析

當期初股價越高的時候，可違約選擇權的價值就越高。因此期初股價對可違約一般選擇權的價值有正向的影響。

- 期初公司資產價值 V

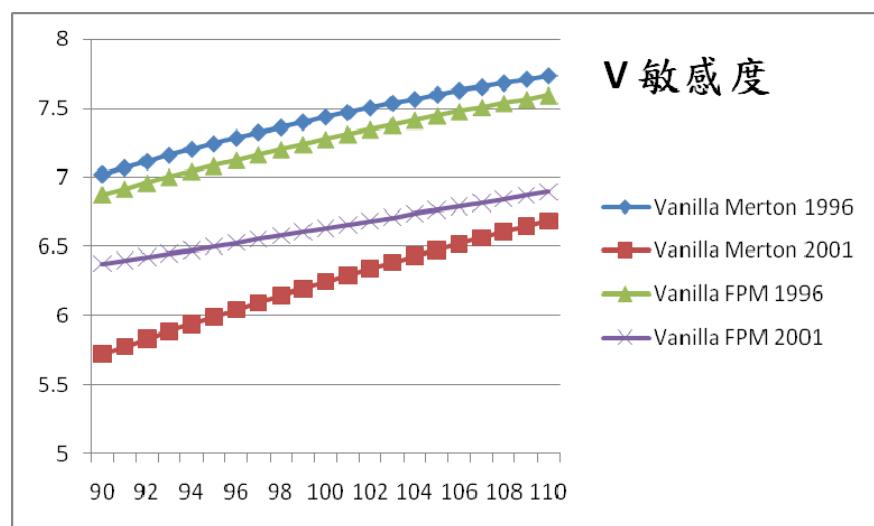


圖 5-14、期初公司資產價值對可違約一般選擇權敏感度分析

當公司期初資產越高的時候，可違約選擇權的價值就越高，因此公司期初資產對可違約一般選擇權的價值越高。

- 股價波動度 σ_s

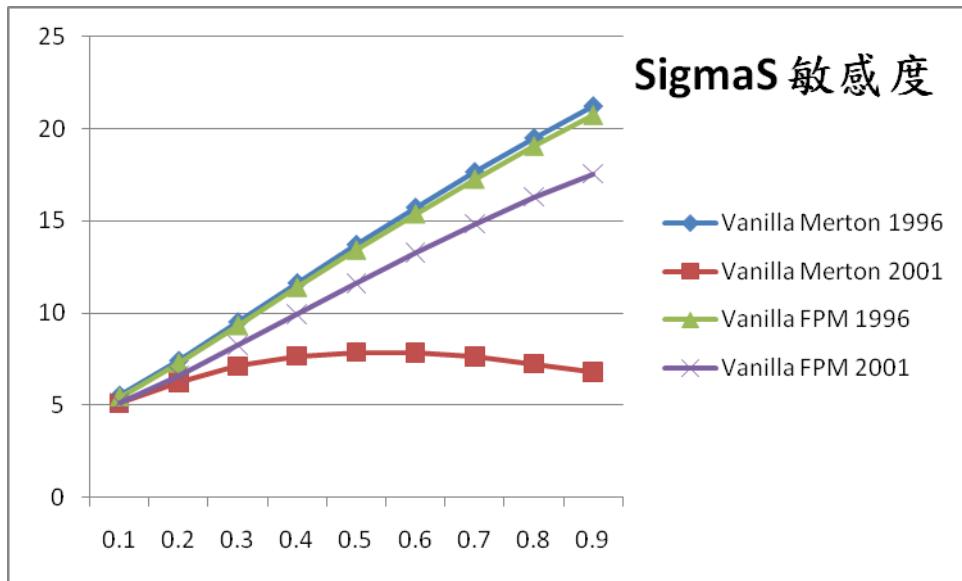


圖 5-15、股價波動度對可違約一般選擇權敏感度分析

只有在 Merton 模型下，當違約門檻隨著選擇權的價值變動(即 Vanilla Merton 2001)，可違約選擇權的價值沒有隨著股價波動度變高而升高。這是因為股價波動度越高，選擇權的價值跳動的範圍越大，Merton 模型只有在到期日交易對手才可能違約。但事實上交易對手有可能在到期日前公司資產就不足以支付選擇權報酬而違約了，造成在到期日交易對手違約的機會增加，如此將把選擇權的價值拉低。Vanilla FPM 2001 考慮了交易對手有可能在到期日發生違約，我們可以發現可違約選擇權的價值隨著股價波動度的升高而升高，這是因為當交易對手一觸碰到違約門檻就發生違約立刻清算，如此更可以保護債權人的權益。

Vanilla Merton 1996 的違約門檻沒有考慮選擇權報酬，其可違約選擇權的價值隨著股價波動度的升高而升高。但如果違約門檻考慮選擇權報酬時，選擇權價值增加違約門檻也隨著增加，交易對手也就越容易違約，如此會把可違約選擇權的價值拉低。因此 Vanilla Merton 2001 和 Vanilla Merton 1996 的結果有明顯不同，而違約門檻考慮選擇權價值更能反映真實交易對手風險。

- 公司資產波動度 σ_V

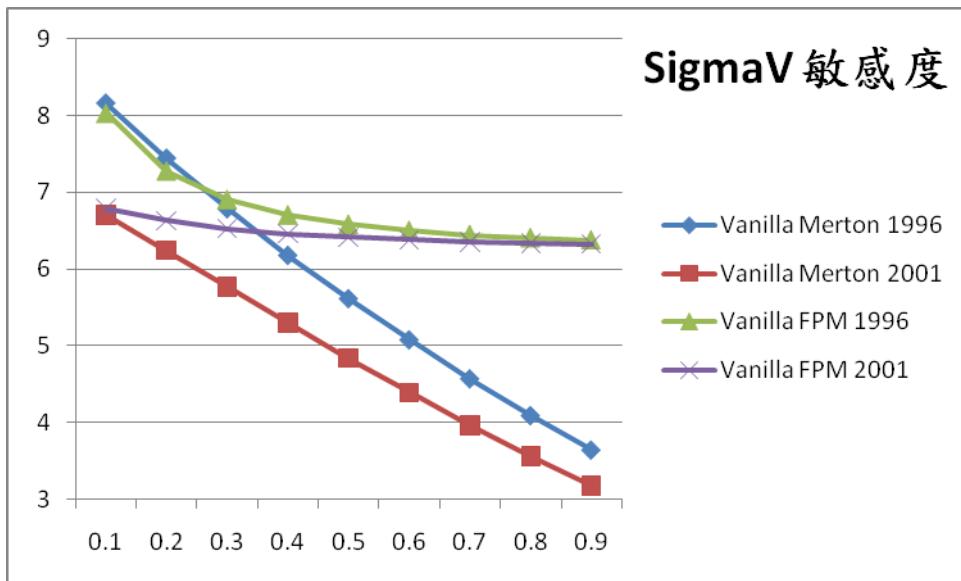


圖 5-16、公司資產波動度對可違約一般選擇權敏感度分析

當公司資產波動度越大，公司財務的槓桿就越高，風險越大，因此可違約選擇權的價值就越低。我們發現使用 FPM 模型會收斂到一個點，而不像 Merton 模型會一直下降，這是因為 FPM 模型考慮了交易對手有可能在到期日前發生違約，因此當交易對手財務風險大到一個程度，很容易很早就發生違約而被清算，因此對可違約選擇權的影響也逐漸變小。

- 履約價格 K

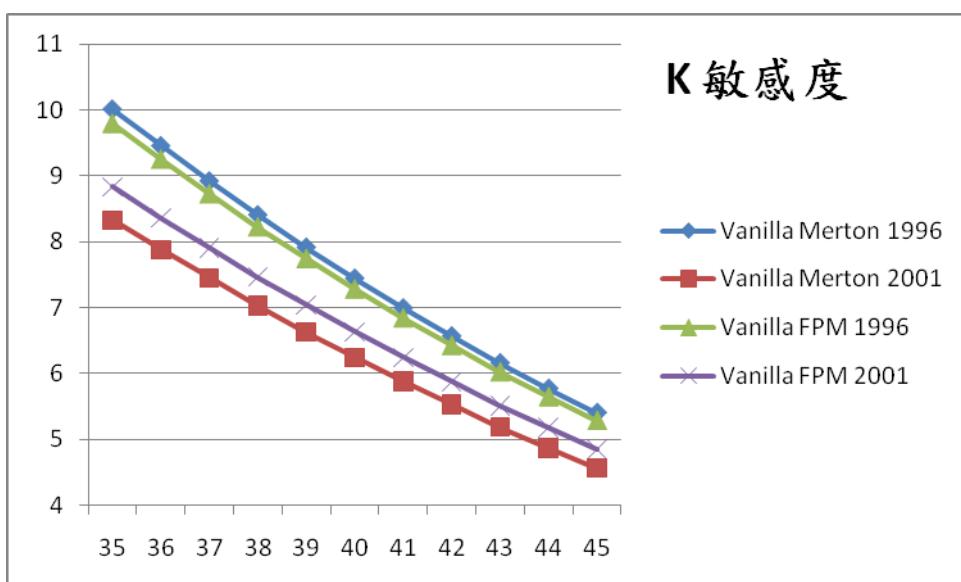


圖 5-17、履約價格對可違約一般選擇權敏感度分析

履約價格越高，可違約一般選擇權的價值就越低。

- 公司其他債務 D^*

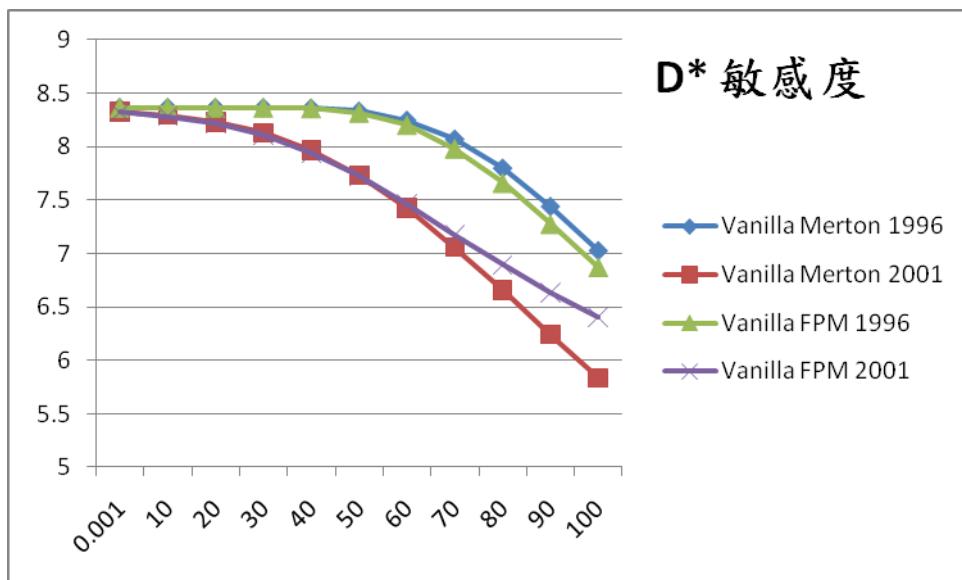


圖 5-18、公司其他債務對可違約一般選擇權敏感度分析

當公司債務越高，違約門檻就越高，就越容易發生違約。對可違約一般選擇權有負面的影響。

- 無風險利率 r

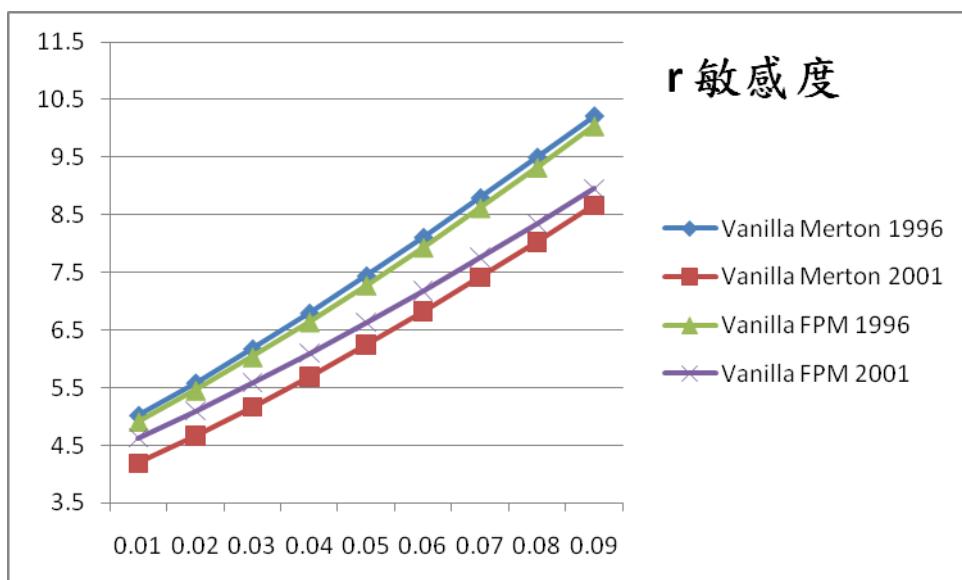


圖 5-19、無風險利率對可違約一般選擇權敏感度分析

當無風險利率越高，則選擇權的價值就越高，對可違約選擇權的價值有正面的影響。

- 公司資產與標的資產相關係數 ρ

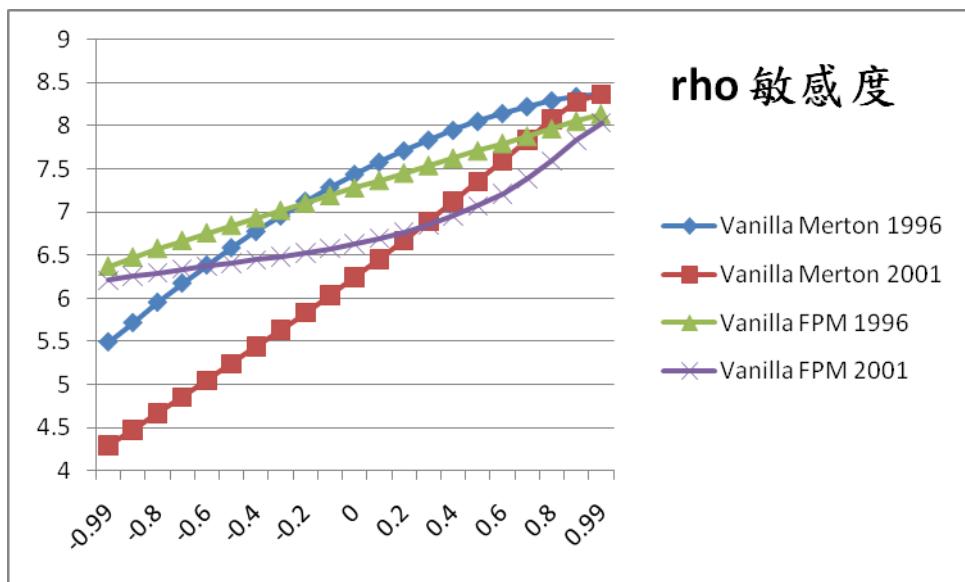


圖 5-20、相關係數對可違約一般選擇權敏感度分析

因為我們評價的是買權，因此當公司資產和股價相關係數越高，公司價值就隨著股價上升而上升，也就越不容易違約，因此對可違約選擇權有正向的影響。

- 破產成本 α

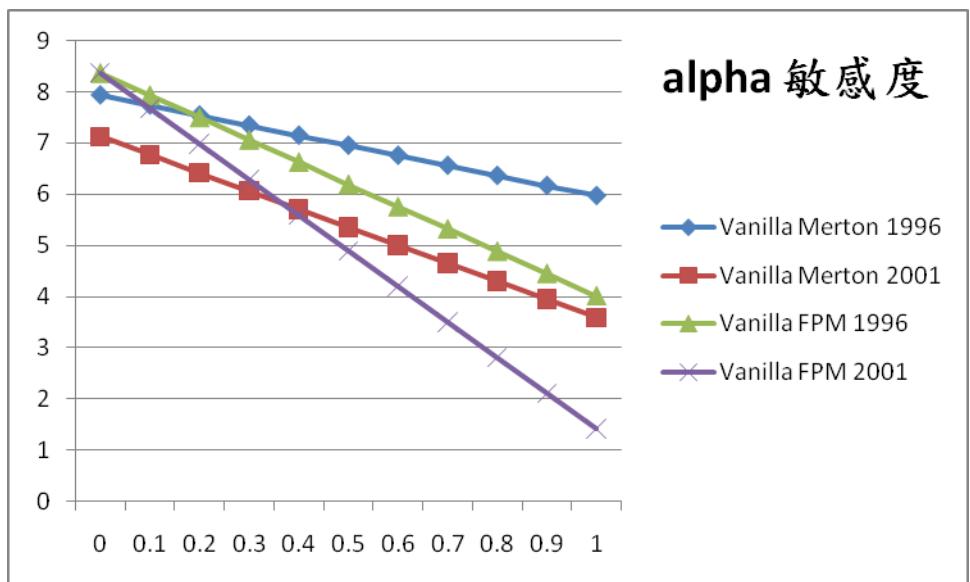


圖 5-21、破產成本對可違約一般選擇權敏感度分析

當破產成本越高，清算後可回收的選擇權報酬就越少，對可違約一般選擇權的價值有負面的影響。

第五節、可違約障礙買權敏感度分析

本節將根據模型中的各項參數來對各種可違約障礙買權來進行敏感度分析。我們所使用的參數為第三節所列的基本案例。

在以下列出的圖中，「Barrier FPM 1996 Const」，FPM 代表 FPM 模型、Const 代表常數障礙選擇權、1996 代表違約門檻為 D^* 。如果是「Barrier Merton 2001 Exp」，Merton 代表 Merton 模型、2001 代表違約門檻考慮選擇權價值即 D^*+c 、Exp 代表指數障礙選擇權。

- 期初股價 S

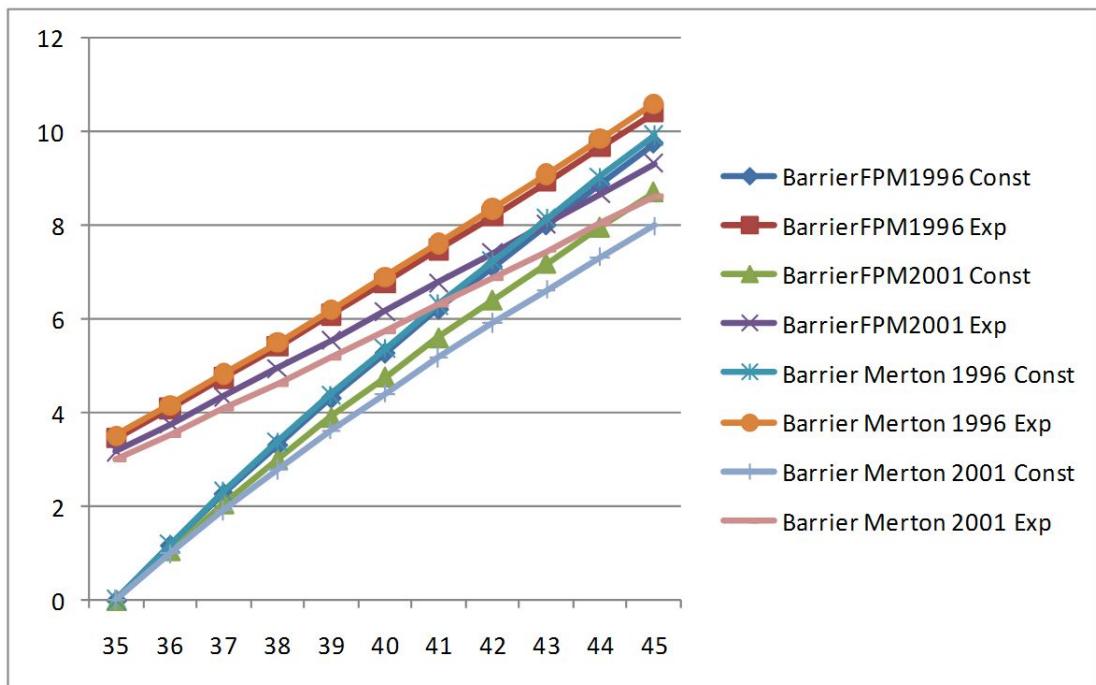


圖 5-22、期初股價對可違約障礙選擇權敏感度分析

由圖 5-22 我們可以看到當股價越高，可違約障礙買權的價值就越高。常數障礙選擇權當股價碰到違約門檻會在期初就出局，因此可違約選擇權價值從 0 開始；而指數障礙選擇權則因為障礙有折現因此在期初還有價值。

- 期初公司資產價值 V

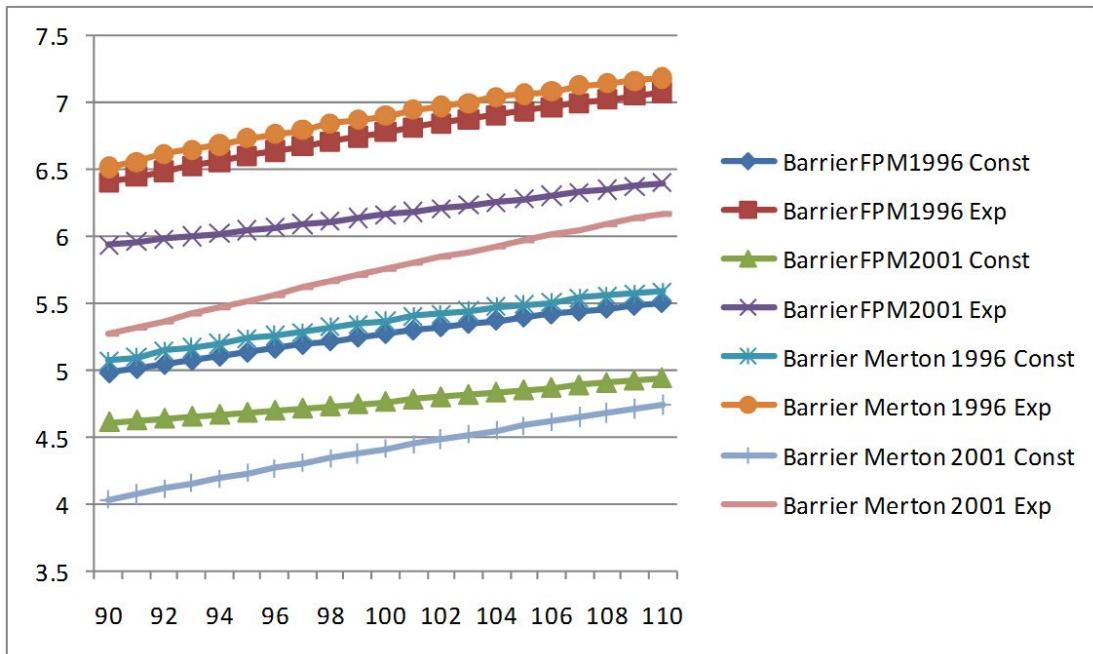


圖 5-23、期初公司資產價值敏感度分析

由圖 5-23 我們看到交易對手公司資產在期初價值越高，對選擇權價值有正面的影響，因為公司資產越高就越不容易違約，因此可違約選擇權的價值就越高。

- 股價波動度 σ_s

障礙選擇權的股價波動度敏感性分析如圖 5-24，其中橫軸為股價波動度，縱軸為可違約選擇權的價值。

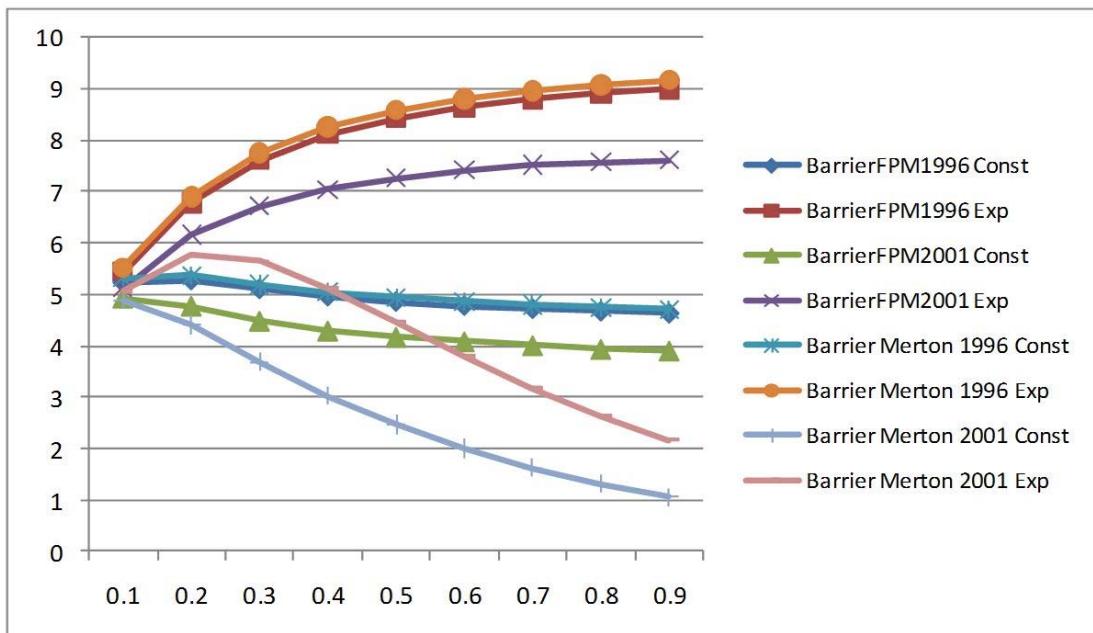


圖 5-24、股價波動度 σ_s 敏感度分析

股價波動率在不同模型下會有不同的影響，因此我們不能只依靠分析解，而應該用數值方法來確實模擬符合真實情況的模型。

- 公司資產波動率 σ_v

障礙選擇權的公司資產波動度敏感度分析如圖 5-25，其中橫軸為公司資產波動度，縱軸為可違約選擇權的價值。

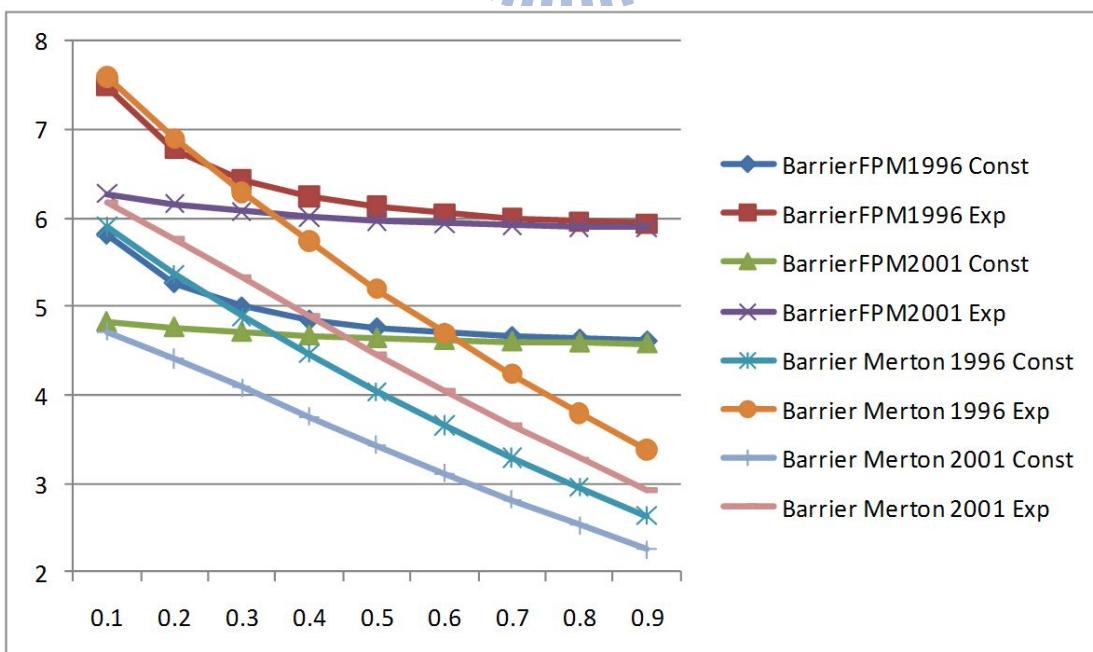


圖 5-25、公司資產波動率 σ_v 敏感度分析

當公司資產波動率越高的時候，表示公司槓桿越高、風險越大，因此也越容易違約，會降低可違約選擇權的價值。此外，我們可以看到使用 FPM 會收斂到一個值不會再下降，使用 Merton 模型則會隨著公司資產波動率越高而下降，這也表示 FPM 對於選擇權持有人有較好的保護，當公司在到期日前發生違約時債權人可以立刻清算公司而不必一直等到選擇權到期日時才能清算公司。

- 障礙選擇權的障礙 B

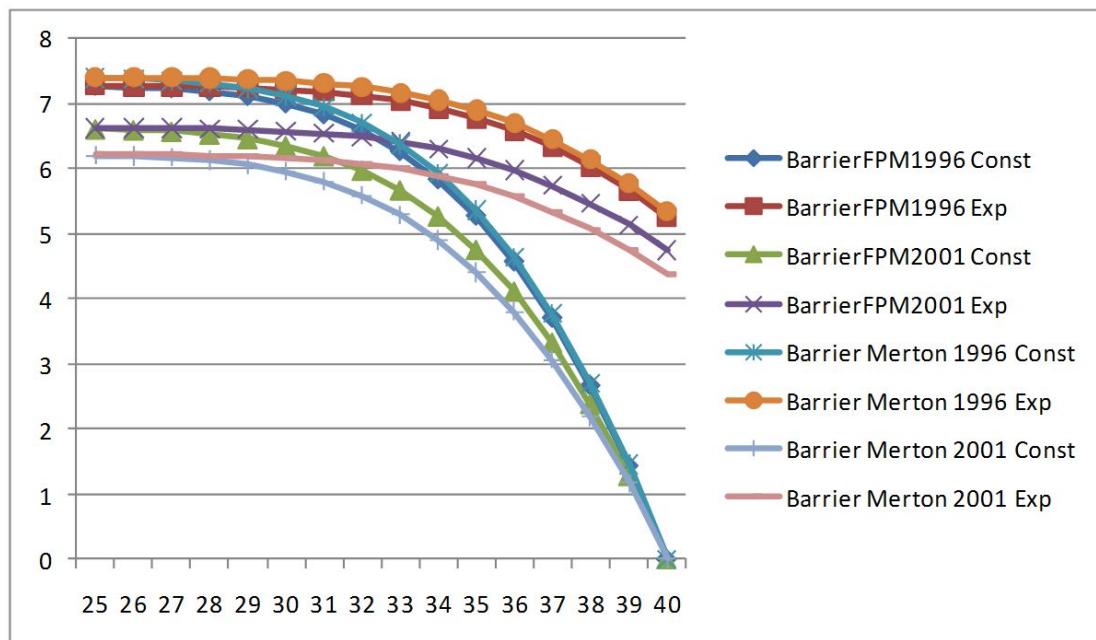


圖 5-26、障礙對可違約障礙選擇權的敏感度分析

當障礙選擇權障礙越高，對選擇權價值有負面的影響。如果是常數障礙選擇權，如果障礙提高到跟期初股價一樣，在期初就因碰到障礙而直接出局；而指數障礙選擇權則因障礙因折現而降低，而仍有保有價值，選擇權價值下降較慢。

- 障礙選擇權，障礙折現率 γ

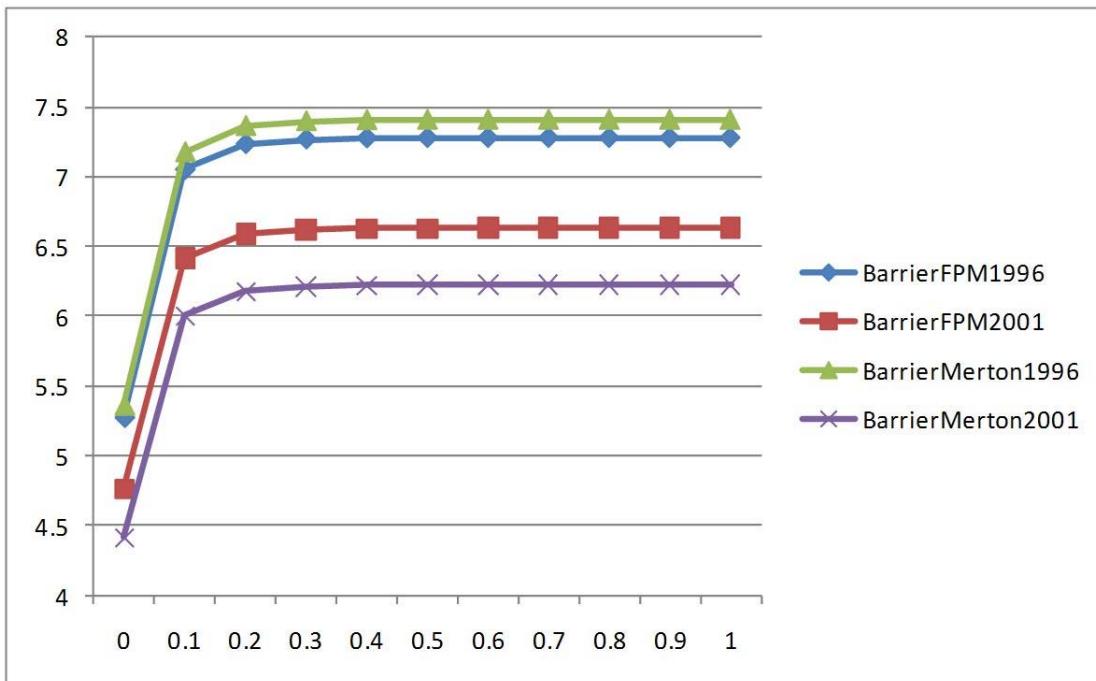


圖 5-27、障礙折現率 γ 敏感度分析

當障礙折現率越高時，障礙選擇權就越不容易碰觸到障礙而出局，因此選擇權會收斂為一般選擇權。圖 5-28 為在 Merton 模型下違約門檻為 D^* 的可違約障礙選擇權，會收斂到 Klein (1996) (在 Merton 模型下違約門檻為 D^* 的一般選擇權)的數值。

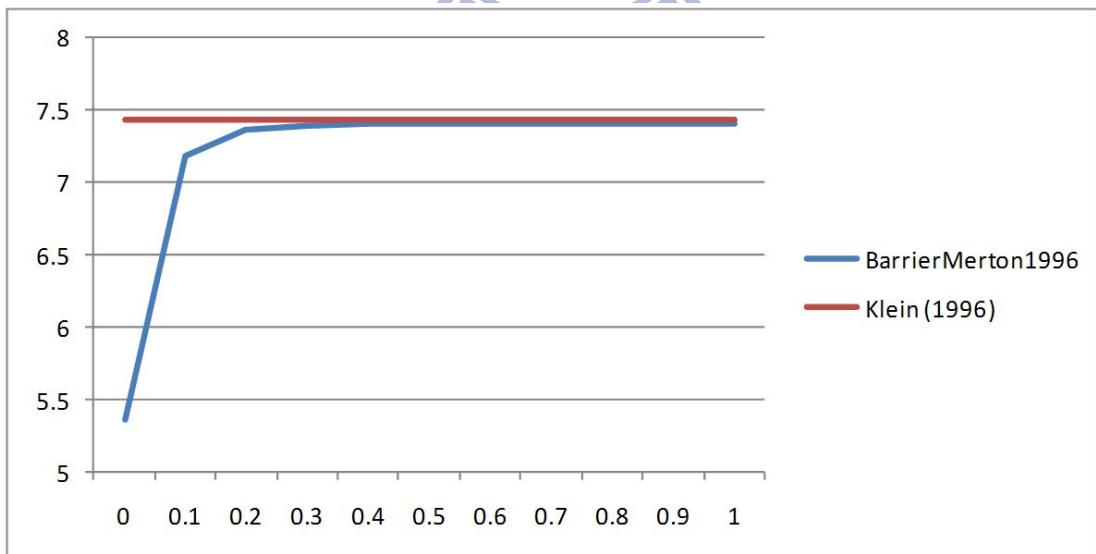


圖 5-28、當障礙折現率太高時，障礙選擇權會收斂到一般選擇權

- 履約價格 K

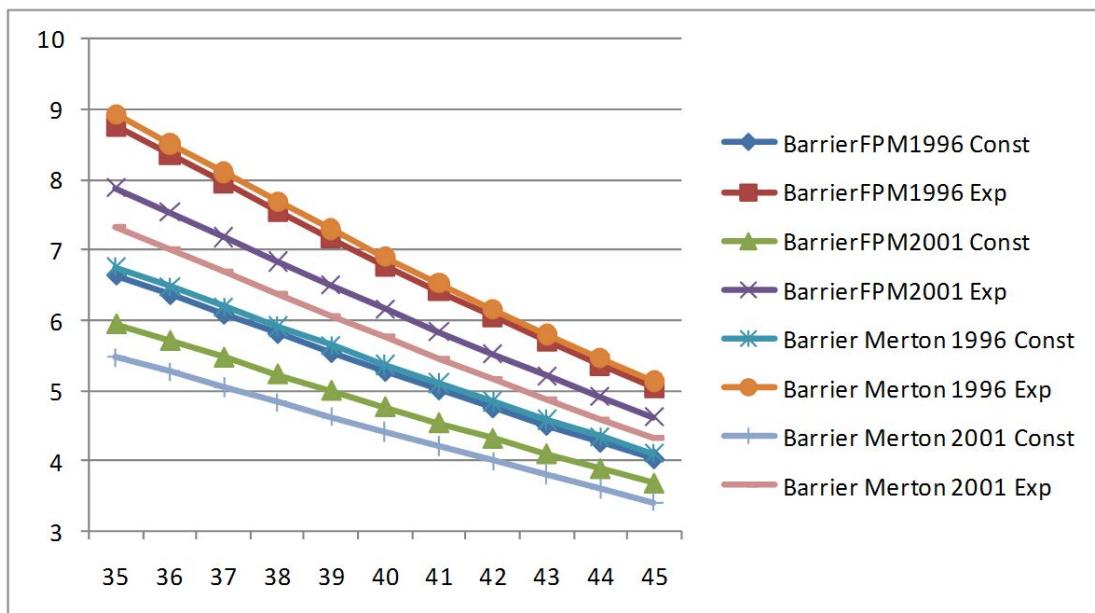


圖 5-29、履約價格 K 敏感度分析。

當履約價格越高，選擇權報酬就越低，因此選擇權的價值就會越低。

- 到期日 T

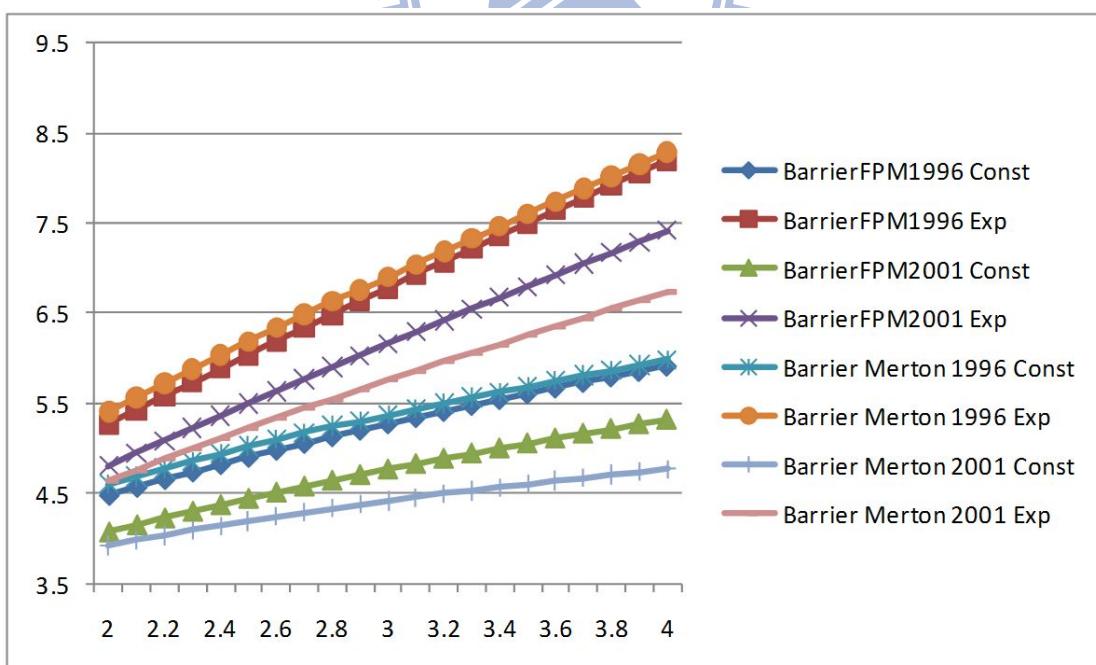


圖 5-30、到期日 T 敏感度分析。

當選擇權到期日越遠，則選擇權的時間價值就越高，因此選擇權的價值就越高。

- 公司其他債務 D^*

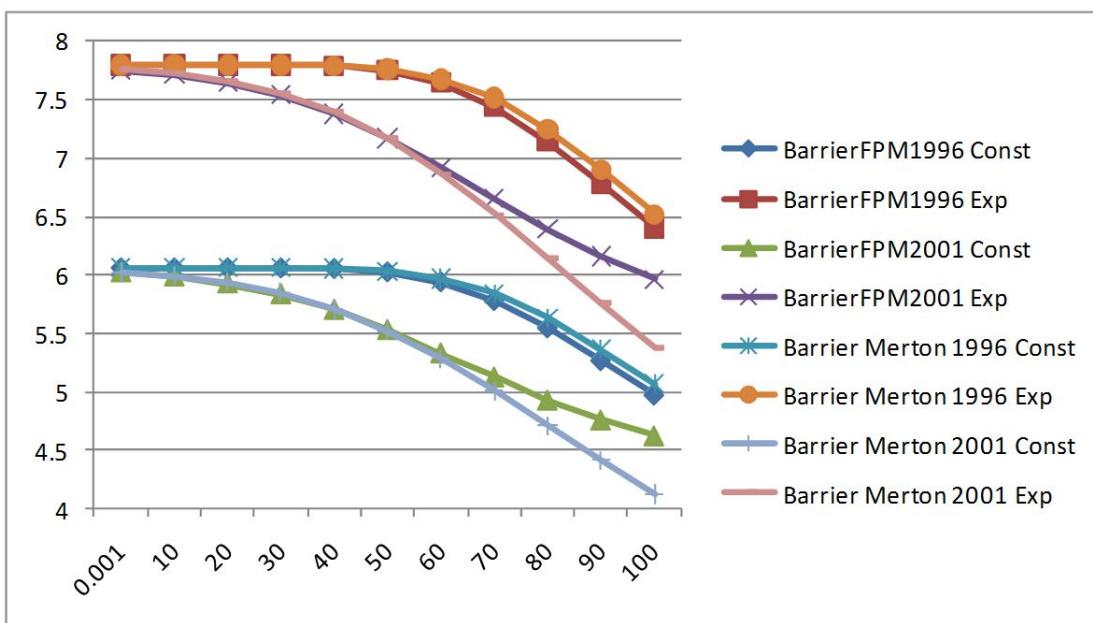


圖 5-31、公司其他債務 D^* 敏感度分析

當公司其他債務趨近於 0 的時候，模型會收斂為 Johnson and Stulz(1987)的模型，因此我們會看到相同類型的選擇權會收斂到一點。

當公司債務約高，就越容易違約，因此可違約選擇權的價值就越小。

- 無風險利率 r

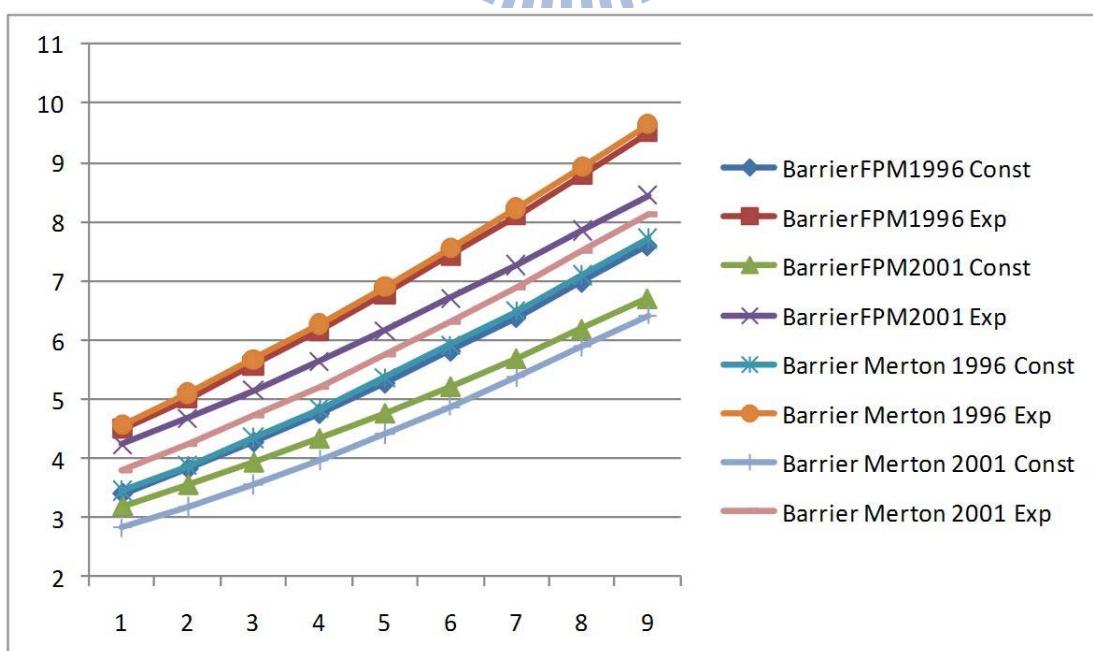


圖 5-32、無風險利率 r 敏感度分析

- 公司資產與標的資產相關係數 ρ

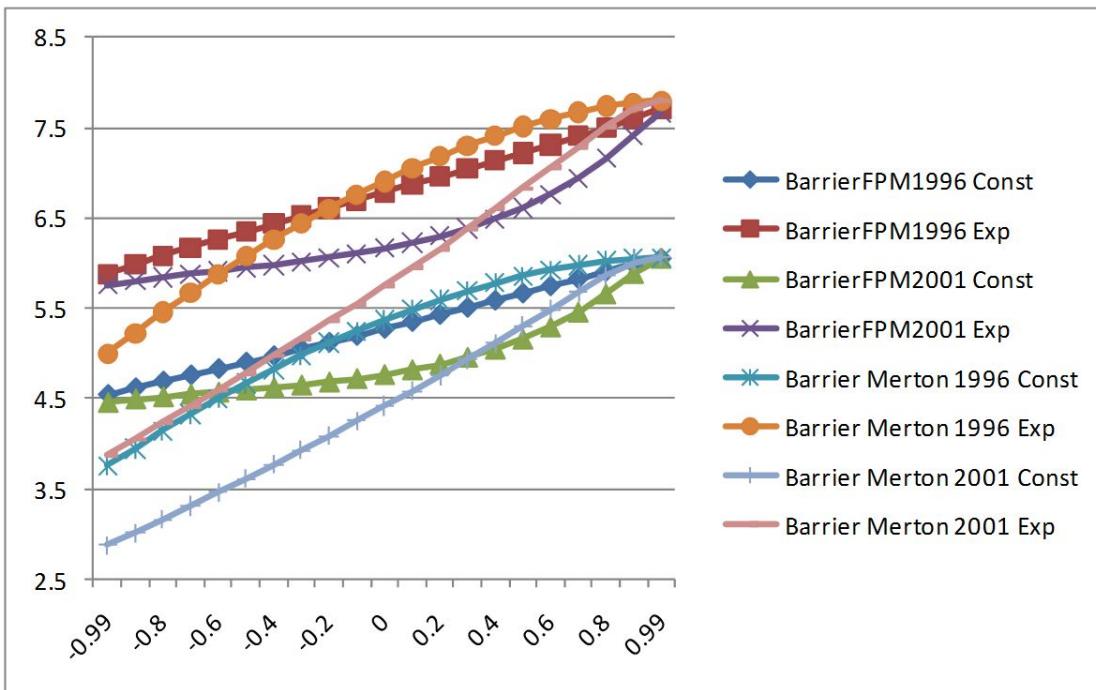


圖 5-33、公司資產與標的資產相關係數 ρ 敏感度分析

因為我們評價的是買權，標的資產越高，選擇權價值越高，若相關係數越高，則公司資產也隨著標的資產上漲而上漲，也越不容易違約，因此可違約選擇權的價值也越高。

- 破產成本 α

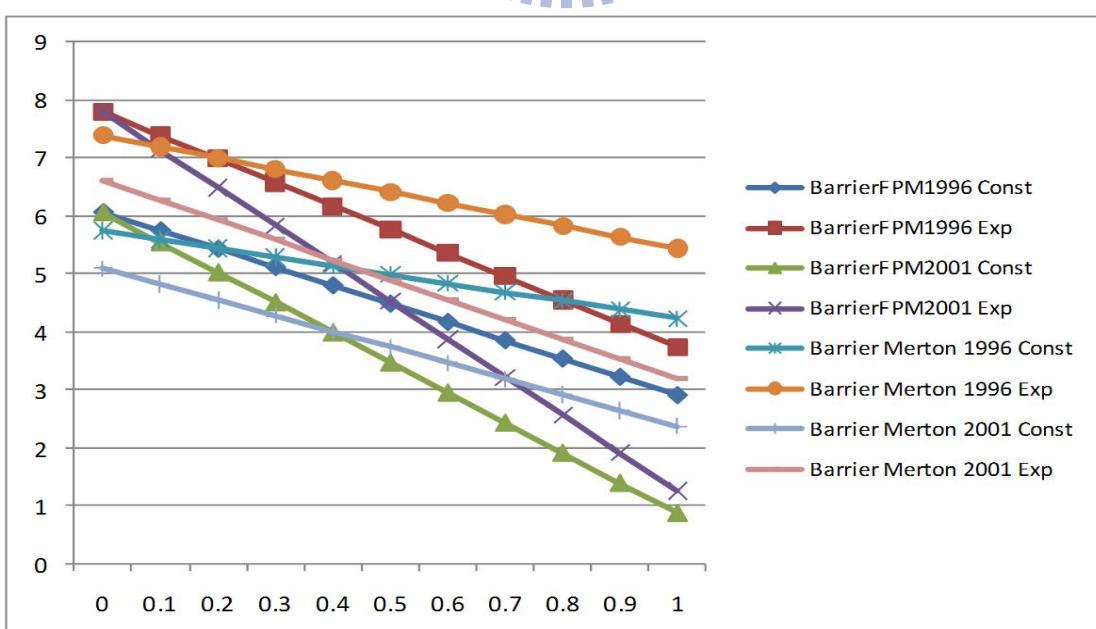


圖 5-34、破產成本 α 敏感度分析

破產成本敏感度分析結果如圖 5-25。若破產成本越高，則在違約時公司清算後所剩下的資產也越少，選擇權持有人拿回的資產也越少，因此對可違約選擇權有負面的影響。

第六章、總結

本論文修改陳博宇(2009)的樹狀結構，來評價可違約選擇權。本論文所提供的樹狀結構，除了可以評價 Johnson and Stulz(1987)、Klein(1996)、Klein and Inglis(2001)只能在到期日判斷是否違約的 Merton 模型，亦可以評價交易對手可能在到期日之前違約的 FPM 模型，且能確保樹狀模型能和公司資產障礙重合以減少非線性誤差，更能符合真實世界情況。

另外我們也評價了可違約障礙選擇權，證明了本論文所提供的樹狀結構能夠同時與障礙選擇權的障礙與公司資產障礙重合以減少非線性誤差。我們也對各項參數進行了敏感度分析，以了解可違約障礙選擇權的各種性質。

我們的樹狀模型經過實驗，有分析解的模型下只要切割的期數夠高，確實能收斂到分析解。沒有分析解的模型下，我們也使用蒙地卡羅數值方法做驗證與比較。

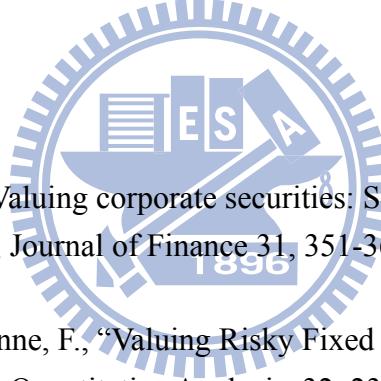


參考文獻

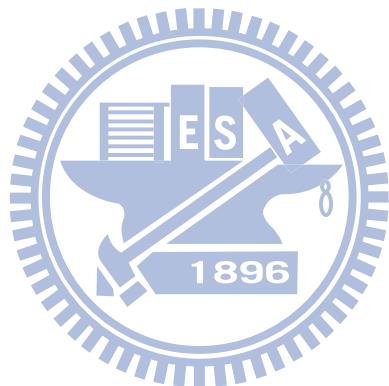
中文文獻

- [一] 杜宛珮，“運用在信用風險模型的創新數值方法 DFPM”，國立交通大學，碩士論文，民國 96 年。
- [二] 鍾明璋，“隨機利率下信用風險之衡量-使用創新之立體樹狀模型”，國立交通大學，碩士論文，民國 97 年。
- [三] 陳博宇，“在 Hull-White 隨機利率下信用風險之衡量--運用創新的數值方法 DFPM-HWT”，國立交通大學，碩士論文，民國 98 年。
- [四] 潘政宏，“有違約風險的選擇權：對偶問題”，國立交通大學，碩士論文，民國 99 年。

英文文獻

- 
- [1] Black, F., Cox, J.C., “Valuing corporate securities: Some effects of bond indenture provisions.”, *Journal of Finance* 31, 351-367, 1976.
 - [2] Briys, E., and De Varenne, F., “Valuing Risky Fixed Rate Debt : An Extension,” *Journal of Finance and Quantitative Analysis*, 32, 239-248, 1997.
 - [3] Dai, T.S., and Lyuu, Y.D., “The Bino-Trinomial Tree: a Simple Model for Efficient and Accurate Option Pricing.”, *Journal of Derivatives*, forthcoming.
 - [4] Heston, S., and Zhou, G. “On the Rate of Convergence of Discrete-Time Contingent Claims.” *Mathematical Finance*, 10, 53–75, 2000.
 - [5] Johnson, H., Stulz, R., “The pricing of options with default risk.”, *Journal of Finance* 42, 267-280, 1987.
 - [6] Klein, P.C., “Pricing Black-Scholes options with correlated credit risk.”, *Journal of Banking and Finance* 20, 1211-1229, 1996.
 - [7] Klein, P.C., Inglis, M., “Pricing vulnerable European options when the option's

- payoff can increase the risk of financial distress.”, Journal of Banking and Finance 25, 993-1012, 2001.
- [8] Merton, R. C., “On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest rates,” The Journal of Finance 29, 449-470, 1974.
- [9] Figlewski, S. and Gao, B., “The adaptive mesh model: a new approach to efficient option pricing.”, Journal of Financial Economics 53, 313–351, 1999.



附錄 A、可違約選擇權評價結果

A1、一般選擇權違約門檻為 D^* 評價結果

基本案例的參數為：股價 $S=40$ 、履約價 $K=40$ 、公司資產在期初 $V=100$ 、公司的其他債務 $D^*=90$ 、距離到期日 $T=3$ 年、股價波動率 $\sigma_S = 0.2$ 、公司資產波動率 $\sigma_V = 0.2$ 、公司資產與股價相關係數 $\rho = 0$ 、無風險利率 $r=0.05$ 、破產成本 $\alpha=0.25$ ，切 500 期。

蒙地卡羅法在 Merton 模型下，切 1 期跑 500,000 條。在 FPM 模型下，切 10,000 期，跑 500,000 條。

第(3)欄的結果為 $\frac{(2)-(1)}{(1)}$ 、第(6)欄的結果為 $\frac{(5)-(7)}{(7)}$ 。

	Klein (1996)	本論文 樹狀結構		蒙地卡羅	本論文 樹狀結構		蒙地卡羅
Model	Merton (1)	Merton (2)	誤差 (3)	Merton (4)	FPM (5)	誤差 (6)	FPM (7)
Base case	7.44	7.439724	0.00%	7.444187	7.279248	-0.35%	7.304611
$S = 30$	2.27	2.274841	0.21%	2.272977	2.225444	0.06%	2.224134
$S = 50$	14.75	14.754589	0.03%	14.751575	14.434206	-0.28%	14.47414
$V = 90$	7.03	7.025265	-0.07%	7.025277	6.875838	-0.23%	6.891743
$V = 110$	7.74	7.738257	-0.02%	7.743318	7.59719	0.17%	7.584414
$\rho = 0.5$	8.06	8.054961	-0.06%	8.060083	7.710506	-0.01%	7.711544
$\rho = -0.5$	6.59	6.58507	-0.07%	6.603063	6.843722	-0.04%	6.846581
$\sigma_S = 0.15$	6.45	6.445616	-0.07%	6.453172	6.306405	-0.39%	6.33115
$\sigma_S = 0.25$	8.48	8.476852	-0.04%	8.507638	8.294164	-0.35%	8.323184
$\sigma_V = 0.15$	7.80	7.794469	-0.07%	7.816228	7.596679	0.04%	7.593516
$\sigma_V = 0.25$	7.10	7.100621	0.01%	7.103791	7.059669	-0.05%	7.063072
$T = 2$	5.79	5.791777	0.03%	5.804434	5.616936	-0.39%	5.638938
$T = 4$	8.91	8.912625	0.03%	8.918955	8.787449	-0.41%	8.823983
$\alpha = 0$	7.93	7.929477	-0.01%	7.947047	8.368934	-0.24%	8.389419
$\alpha = 0.5$	6.95	6.94997	0.00%	6.956888	6.189563	-0.51%	6.221466
$r = 0.03$	6.17	6.170926	0.02%	6.176229	6.034314	-0.06%	6.038093
$r = 0.07$	8.80	8.798545	-0.02%	8.797238	8.625071	-0.26%	8.647342

表 A1、一般選擇權違約門檻為 D^* 評價結果

A2、一般選擇權違約門檻為 D^* 於 FPM 模型下評價結果

潘政宏(2010)的模型中，評價公式為

$$c = e^{-r(T-t)} \left[E^* \left\{ \begin{array}{ll} S_T - K & \text{if } S_T > K, \min_{0 \leq \tau_V \leq T} V(\tau_V) > e^{-r(T-\tau_V)} \cdot D^* \\ \delta \cdot c(\tau_V) & \text{if } S_T > K, \min_{0 \leq \tau_V \leq T} V(\tau_V) \leq e^{-r(T-\tau_V)} \cdot D^* \\ 0 & \text{otherwise} \end{array} \right\} \right]$$

跟表 A1(5)-(7)欄的評價公式不同，所以本節將評價潘政宏(2010)的模型。

基本案例的參數為：股價 $S=40$ 、履約價 $K=40$ 、公司資產在期初 $V=100$ 、公司的其他債務 $D^*=90$ 、距離到期日 $T=3$ 年、股價波動率 $\sigma_S = 0.2$ 、公司資產波動率 $\sigma_V = 0.2$ 、公司資產與股價相關係數 $\rho = 0$ 、無風險利率 $r=0.05$ 、交易對手違約時回收率(recovery rate) $\delta = 0.75$ ，切 500 期。第(3)欄計算公式為 $\frac{(2)-(1)}{(1)}$ 。

Model	Pan (2010)	本論文 樹狀結構	
	FPM (1)	FPM (2)	誤差 (3)
Base case	7.280725	7.277425	-0.05%
$\delta = 0.5$	6.191706	6.188347	-0.05%
$\delta = 1$	8.369744	8.366503	-0.04%
$S = 30$	2.224159	2.221873	-0.10%
$S = 50$	14.43423	14.43239	-0.01%
$V = 90$	6.876289	6.873337	-0.04%
$V = 110$	7.599432	7.595901	-0.05%
$\rho = 0.5$	7.711608	7.70864	-0.04%
$\rho = -0.5$	6.84591	6.842377	-0.05%
$\sigma_S = 0.15$	6.307618	6.30513	-0.04%
$\sigma_S = 0.25$	8.295925	8.291818	-0.05%
$\sigma_V = 0.15$	7.598892	7.595389	-0.05%
$\sigma_V = 0.25$	7.060602	7.057477	-0.04%
$T = 2$	5.618254	5.615371	-0.05%
$T = 4$	8.789032	8.785488	-0.04%
$r = 0.03$	6.121469	6.031906	-1.46%
$r = 0.07$	8.531479	8.623762	1.08%

表 A2、一般選擇權違約門檻為 D^* 於 FPM 模型下評價結果

A3、一般選擇權違約門檻為 $D^* + c$ 評價結果

基本案例的參數為：股價 $S=40$ 、履約價 $K=40$ 、公司資產在期初 $V=100$ 、公司的其他債務 $D^*=90$ 、距離到期日 $T=3$ 年、股價波動率 $\sigma_S = 0.2$ 、公司資產波動率 $\sigma_V = 0.2$ 、公司資產與股價相關係數 $\rho = 0$ 、無風險利率 $r=0.05$ 、破產成本 $\alpha=0.25$ ，切 500 期。

蒙地卡羅法在 Merton 模型下，切 1 期跑 500,000 條。在 FPM 模型下，切 10,000 期，跑 500,000 條。

第(3)欄的結果為 $\frac{(2)-(1)}{(1)}$ 、第(6)欄的結果為 $\frac{(5)-(7)}{(7)}$ 。

	Klein (2001)	本論文 樹狀結構		蒙地卡羅	本論文 樹狀結構		蒙地卡羅
Model	Merton (1)	Merton (2)	誤差 (3)	Merton (4)	FPM (5)	誤差 (6)	FPM (7)
Base case	6.24	6.242328	0.04%	6.270538	6.631623	-0.14%	6.64063
$S = 30$	2.01	2.016977	0.35%	2.014931	2.097143	0.53%	2.086183
$S = 50$	11.59	11.619487	0.25%	11.646633	12.704466	0.07%	12.696083
$V = 90$	5.71	5.720249	0.18%	5.747789	6.375881	0.03%	6.374126
$V = 110$	6.65	6.687367	0.56%	6.690237	6.89635	-0.28%	6.915641
$\rho = 0.5$	7.36	7.352732	-0.10%	7.377366	7.070358	-0.35%	7.094943
$\rho = -0.5$	5.23	5.240852	0.21%	5.252489	6.407589	-0.02%	6.408606
$\sigma_S = 0.15$	5.66	5.681483	0.38%	5.688559	5.839763	-0.23%	5.853077
$\sigma_S = 0.25$	6.7	6.732545	0.49%	6.763538	7.45096	-0.03%	7.453438
$\sigma_V = 0.15$	6.47	6.475394	0.08%	6.495449	6.702188	-0.28%	6.721132
$\sigma_V = 0.25$	5.98	6.007049	0.45%	6.012931	6.573819	-0.08%	6.579362
$T = 2$	4.97	4.998209	0.57%	5.016423	5.140581	-0.16%	5.148895
$T = 4$	7.27	7.300732	0.42%	7.31033	7.969995	-0.09%	7.976884
$\alpha = 0$	7.11	7.126082	0.23%	7.155766	8.36956	0.01%	8.368699
$\alpha = 0.5$	5.36	5.358575	-0.03%	5.372934	4.893686	-0.37%	4.911771
$r = 0.03$	5.16	5.162017	0.04%	5.191593	5.584866	-0.05%	5.587496
$r = 0.07$	7.4	7.415557	0.21%	7.439028	7.759332	-0.15%	7.770697

表 A3、一般選擇權違約門檻為 $D^* + c$ 評價結果

A4、常數障礙選擇權違約門檻為 D^* 評價結果

基本案例的參數為：股價 $S=40$ 、履約價 $K=40$ 、障礙 $B=35$ 、障礙折現率 $\gamma_B=0$ 、公司資產在期初 $V=100$ 、公司的其他債務 $D^*=90$ 、距離到期日 $T=3$ 年、股價波動率 $\sigma_S=0.2$ 、公司資產波動率 $\sigma_V=0.2$ 、公司資產與股價相關係數 $\rho=0$ 、無風險利率 $r=0.05$ 、破產成本 $\alpha=0.25$ ，切 500 期。

蒙地卡羅法切 10,000 期，跑 500,000 條。

第(3)欄的結果為 $\frac{(2)-(1)}{(1)}$ 、第(6)欄的結果為 $\frac{(5)-(7)}{(7)}$ 。

	潘政宏 (2010)	本論文 樹狀結構		蒙地卡羅	本論文 樹狀結構		蒙地 卡羅
Model	Merton (1)	Merton (2)	誤差 (3)	Merton (4)	FPM (5)	誤差 (6)	FPM (7)
Base case	5.388857	5.388744	0.00%	5.433403	5.271732	-0.97%	5.323297
$B = 20$	7.441921	7.442707	0.01%	7.425499	7.281095	-0.31%	7.303477
$B = 25$	7.428495	7.42771	-0.01%	7.449879	7.266423	-0.40%	7.295352
$B = 30$	7.150082	7.149991	0.00%	7.176991	6.994735	-0.32%	7.017135
$B = 40$	0	0	0.00%	0	0	0.00%	0
$S = 30$	0	0	0.00%	0	0	0.00%	0
$S = 50$	14.30664	14.30635	0.00%	14.310609	13.9957	-0.24%	14.02928
$V = 90$	5.088935	5.088299	-0.01%	5.136129	4.979013	-0.68%	5.013222
$V = 110$	5.605286	5.605163	0.00%	5.657194	5.502435	-0.90%	5.552316
$\rho = 0.5$	5.862597	5.862041	-0.01%	5.91183	5.66714	-0.92%	5.719966
$\rho = -0.5$	4.686723	4.686026	-0.01%	4.725023	4.896249	-0.72%	4.93163
$\sigma_S = 0.15$	5.440602	5.440181	-0.01%	5.469166	5.322053	-0.53%	5.350159
$\sigma_S = 0.25$	5.301374	5.301338	0.00%	5.35795	5.186224	-1.28%	5.253484
$\sigma_V = 0.15$	5.647535	5.645845	-0.03%	5.702527	5.502064	-1.05%	5.560421
$\sigma_V = 0.25$	5.144767	5.142985	-0.03%	5.188275	5.112403	-0.65%	5.146102
$T = 2$	4.614853	4.614471	-0.01%	4.635908	4.474447	-0.67%	4.504484
$T = 4$	5.999847	5.998593	-0.02%	6.059615	5.913574	-1.09%	5.97866
$\alpha = 0$	5.743501	5.743334	0.00%	5.794744	6.060655	-0.72%	6.104553
$\alpha = 0.5$	5.034213	5.034155	0.00%	5.071211	4.48281	-1.25%	4.539582
$r = 0.03$	4.369953	4.369864	0.00%	4.40403	4.272119	-0.75%	4.304614
$r = 0.07$	6.517149	6.517118	0.00%	6.574954	6.388056	-0.99%	6.451607

表 A4、常數障礙選擇權違約門檻為 D^* 評價結果

A5、指數障礙選擇權違約門檻為 D^* 評價結果

基本案例的參數為：股價 $S=40$ 、履約價 $K=40$ 、障礙 $B=35$ 、障礙折現率 $\gamma_B = 0.06$ 、公司資產在期初 $V=100$ 、公司的其他債務 $D^*=90$ 、距離到期日 $T=3$ 年、股價波動率 $\sigma_S = 0.2$ 、公司資產波動率 $\sigma_V = 0.2$ 、公司資產與股價相關係數 $\rho = 0$ 、無風險利率 $r=0.05$ 、破產成本 $\alpha=0.25$ ，切 500 期。

蒙地卡羅法切 10,000 期，跑 500,000 條。

第(3)欄的結果為 $\frac{(2)-(1)}{(1)}$ 、第(6)欄的結果為 $\frac{(5)-(7)}{(7)}$ 。

Model	潘政宏 (2010)	本論文 樹狀結構		蒙地卡羅	本論文 樹狀結構		蒙地卡羅
	Merton (1)	Merton (2)	誤差 (3)	Merton (4)	FPM (5)	誤差 (6)	FPM (7)
Base case	6.931974	6.931836	0.00%	6.96628	6.781317	-0.42%	6.809742
$B = 20$	7.442002	7.442542	0.01%	7.45372	7.280934	0.27%	7.261369
$B = 25$	7.440167	7.439173	-0.01%	7.470051	7.277637	0.32%	7.254669
$B = 30$	7.384522	7.384417	0.00%	7.372299	7.224071	-0.48%	7.258634
$B = 40$	5.370554	5.370426	0.00%	5.417792	5.253812	-0.64%	5.287858
$S = 30$	0.445043	0.445007	-0.01%	0.480322	0.435344	-6.71%	0.466671
$S = 50$	14.62156	14.62145	0.00%	14.617496	14.30396	-0.19%	14.331445
$V = 90$	6.546169	6.545356	-0.01%	6.575493	6.404776	-0.10%	6.411021
$V = 110$	7.210378	7.210227	0.00%	7.24329	7.078082	-0.10%	7.084993
$\rho = 0.5$	7.520264	7.519477	-0.01%	7.544601	7.222576	-0.18%	7.235632
$\rho = -0.5$	6.097956	6.097358	-0.01%	6.111722	6.347495	-0.12%	6.355196
$\sigma_S = 0.15$	6.300751	6.300481	0.00%	6.313103	6.163671	-0.32%	6.183472
$\sigma_S = 0.25$	7.415953	7.415919	0.00%	7.424956	7.254889	-0.37%	7.282054
$\sigma_V = 0.15$	7.264725	7.262558	-0.03%	7.296804	7.077605	-0.21%	7.092157
$\sigma_V = 0.25$	6.617988	6.615702	-0.03%	6.652687	6.576363	-0.17%	6.587562
$T = 2$	5.427814	5.427413	-0.01%	5.454397	5.262721	-0.36%	5.281881
$T = 4$	8.317517	8.315872	-0.02%	8.354253	8.198009	-0.48%	8.237265
$\alpha = 0$	7.388171	7.387964	0.00%	7.417201	7.796151	-0.20%	7.812087
$\alpha = 0.5$	6.475776	6.475708	0.00%	6.514444	5.766482	-0.78%	5.812092
$r = 0.03$	5.70121	5.701119	0.00%	5.708418	5.573597	-0.42%	5.597272
$r = 0.07$	8.264581	8.264385	0.00%	8.294164	8.100721	-0.25%	8.120726

表 A5、指數障礙選擇權違約門檻為 D^* 評價結果

A6、常數障礙選擇權違約門檻為 $D^* + c$ 評價結果

基本案例的參數為：股價 $S=40$ 、履約價 $K=40$ 、障礙 $B=35$ 、障礙折現率 $\gamma_B = 0$ 、公司資產在期初 $V=100$ 、公司的其他債務 $D^*=90$ 、距離到期日 $T=3$ 年、股價波動率 $\sigma_S = 0.2$ 、公司資產波動率 $\sigma_V = 0.2$ 、公司資產與股價相關係數 $\rho = 0$ 、無風險利率 $r=0.05$ 、破產成本 $\alpha=0.25$ ，切 500 期。

蒙地卡羅法切 10,000 期，跑 500,000 條。

第(2)欄的結果為 $\frac{(1)-(3)}{(3)}$ 、第(5)欄的結果為 $\frac{(4)-(6)}{(6)}$ 。

Model	本論文 樹狀結構		Merton (3)	本論文 樹狀結構		FPM (6)
	Merton (1)	誤差 (2)		FPM (4)	誤差 (5)	
Base case	4.430037	-1.09%	4.478929	4.763634	-0.51%	4.788123
$B = 20$	6.245474	0.19%	6.233875	6.632766	-0.04%	6.635325
$B = 25$	6.231211	-0.20%	6.244001	6.618678	-0.07%	6.62324
$B = 30$	5.976884	-0.06%	5.980491	6.361452	0.05%	6.357971
$B = 40$	0	0.00%	0	0	0.00%	0
$S = 30$	0	0.00%	0	0	0.00%	0
$S = 50$	11.21199	-0.17%	11.231601	12.31529	0.06%	12.307308
$V = 90$	4.048896	-1.10%	4.093894	4.612506	-0.24%	4.623727
$V = 110$	4.758867	-1.15%	4.81424	4.940438	-0.72%	4.976221
$\rho = 0.5$	5.315472	-0.94%	5.365709	5.15537	-0.63%	5.188122
$\rho = -0.5$	3.624853	-0.95%	3.659627	4.591278	-0.75%	4.626003
$\sigma_S = 0.15$	4.753976	-0.65%	4.7849	4.906492	-0.17%	4.915056
$\sigma_S = 0.25$	4.061212	-1.53%	4.124473	4.60875	-0.80%	4.646101
$\sigma_V = 0.15$	4.585251	-1.05%	4.633914	4.794735	-0.66%	4.826521
$\sigma_V = 0.25$	4.268875	-1.11%	4.316828	4.734896	-0.37%	4.752705
$T = 2$	3.930407	-0.57%	3.953047	4.068879	-0.45%	4.087266
$T = 4$	4.782029	-1.17%	4.838825	5.312366	-0.73%	5.351471
$\alpha = 0$	5.093697	-0.97%	5.143825	6.060567	-0.44%	6.087434
$\alpha = 0.5$	3.766376	-1.17%	3.811026	3.466701	-0.53%	3.485253
$r = 0.03$	3.577472	-1.09%	3.616816	3.930626	-0.48%	3.94968
$r = 0.07$	5.388688	-1.15%	5.451111	5.69142	-0.50%	5.720013

表 A6、常數障礙選擇權違約門檻為 $D^* + c$ 評價結果

A7、指數障礙選擇權違約門檻為 $D^* + c$ 評價結果

基本案例的參數為：股價 $S=40$ 、履約價 $K=40$ 、障礙 $B=35$ 、障礙折現率 $\gamma_B = 0.06$ 、公司資產在期初 $V=100$ 、公司的其他債務 $D^*=90$ 、距離到期日 $T=3$ 年、股價波動率 $\sigma_S = 0.2$ 、公司資產波動率 $\sigma_V = 0.2$ 、公司資產與股價相關係數 $\rho = 0$ 、無風險利率 $r=0.05$ 、破產成本 $\alpha=0.25$ ，切 500 期。

蒙地卡羅法切 10,000 期，跑 500,000 條。

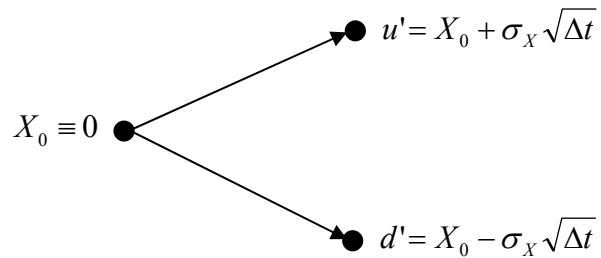
第(2)欄的結果為 $\frac{(1)-(3)}{(3)}$ 、第(5)欄的結果為 $\frac{(4)-(6)}{(6)}$ 。

Model	本論文 樹狀結構		Merton (3)	本論文 樹狀結構		FPM (6)
	Merton (1)	誤差 (2)		FPM (4)	誤差 (5)	
Base case	5.77496	-0.23%	5.788235	6.161242	0.00%	6.160952
$B = 20$	6.245762	0.00%	6.245746	6.632764	-0.12%	6.640736
$B = 25$	6.242432	-0.27%	6.259094	6.629627	0.02%	6.628475
$B = 30$	6.191052	-0.11%	6.198016	6.578356	-0.16%	6.588921
$B = 40$	4.389403	-0.83%	4.425932	4.745699	-0.33%	4.761221
$S = 30$	0.382527	-7.01%	0.411365	0.403358	-6.38%	0.430845
$S = 50$	11.49562	-0.27%	11.526351	12.58884	0.09%	12.578133
$V = 90$	5.286211	-0.27%	5.300469	5.938177	0.07%	5.934204
$V = 110$	6.193278	-0.10%	6.199742	6.40121	-0.08%	6.406206
$\rho = 0.5$	6.846804	-0.28%	6.866056	6.60803	-0.11%	6.615103
$\rho = -0.5$	4.801963	-0.05%	4.804151	5.942768	-0.08%	5.947604
$\sigma_S = 0.15$	5.543564	0.13%	5.536175	5.702588	0.01%	5.702239
$\sigma_S = 0.25$	5.793633	-0.46%	5.820449	6.486028	-0.05%	6.488954
$\sigma_V = 0.15$	5.986089	-0.25%	6.00123	6.2173	-0.14%	6.22606
$\sigma_V = 0.25$	5.559398	-0.17%	5.568999	6.113359	0.05%	6.110066
$T = 2$	4.658825	-0.41%	4.677904	4.804353	0.11%	4.798851
$T = 4$	6.755728	-0.46%	6.787018	7.41477	0.00%	7.414624
$\alpha = 0$	6.609825	-0.21%	6.623775	7.796046	0.01%	7.794996
$\alpha = 0.5$	4.940094	-0.34%	4.956896	4.526439	-0.03%	4.527766
$r = 0.03$	4.731759	-0.39%	4.750374	5.148278	-0.04%	5.150321
$r = 0.07$	6.92128	-0.28%	6.940718	7.264731	-0.05%	7.268449

表 A7、指數障礙選擇權違約門檻為 $D^* + c$ 評價結果

附錄 B、CRR 機率證明

在第四章第一節 2-1 小段中，若要利用 CRR 建立 $X(t)$ 隨機過程的樹狀結構，機率必須定義為 $p_u = \frac{1 + \mu_X \sqrt{\Delta t}}{2}$ ， $p_d = 1 - p_u$ 才能讓建立出來的樹狀結構符合 $X(t)$ 隨機過程的均數。我們建立出來的樹狀結構示意圖如下圖所示。



我們計算這棵樹的期望值，可以發現他會符合 $X(t)$ 隨機過程的樹狀結構。
證明如下：

$$\begin{aligned}
 p_u \cdot u' + p_d \cdot d' &= p_u [X_0 + \sigma_X \sqrt{\Delta t}] + p_d [X_0 - \sigma_X \sqrt{\Delta t}] \\
 &= [X_0 + \sigma_X \sqrt{\Delta t}] \frac{1 + \mu_X \sqrt{\Delta t}}{2} + [X_0 - \sigma_X \sqrt{\Delta t}] \frac{1 - \mu_X \sqrt{\Delta t}}{2} \\
 &= \frac{X_0 [1 + \mu_X \sqrt{\Delta t} + 1 - \mu_X \sqrt{\Delta t}] + \sigma_X \sqrt{\Delta t} [1 + \mu_X \sqrt{\Delta t} - 1 + \mu_X \sqrt{\Delta t}]}{2} \\
 &= X_0 + \mu_X \sqrt{\Delta t} \cdot \sigma_X \sqrt{\Delta t} = X_0 + \sigma_X \mu_X \Delta t
 \end{aligned}$$

如果 $\sigma_X = 1$ ，則 $p_u \cdot u' + p_d \cdot d' = X_0 + \mu_X \Delta t$ 。因為 $X(t)$ 隨機過程是經過正交化後的隨機變數，因此 $\sigma_X = 1$ ，建立的樹狀結構符合 $X(t)$ 隨機過程的均數。