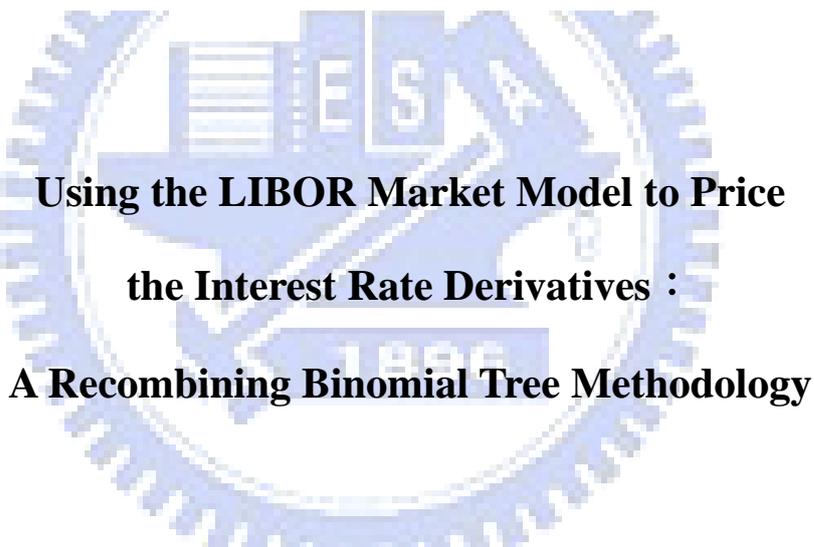


# 國立交通大學

財務金融研究所

碩士論文

以二項樹 LIBOR 市場模型評價利率衍生性商品



**Using the LIBOR Market Model to Price  
the Interest Rate Derivatives :**

**A Recombining Binomial Tree Methodology**

研究生：王薇婷

指導教授：鍾惠民 博士

戴天時 博士

中華民國九十八年六月

以二項樹 LIBOR 市場模型評價利率衍生性商品

**Using the LIBOR Market Model to Price**

**the Interest Rate Derivatives :**

**A Recombining Binomial Tree Methodology**

研 究 生：王薇婷

Student : Wei-Ting Wang

指 導 教 授：鍾惠民博士

Advisor : Dr. Huimin Chung

戴天時博士

Dr. Tian-Shyr Dai



A Thesis Submitted to Graduate Institute of Finance

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master of Science in

Finance

June 2009

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十八年六月

# 以二項樹 LIBOR 市場模型評價利率衍生性商品

研究生：王薇婷

指導教授：鍾惠民 博士

戴天時 博士

國立交通大學財務金融研究所碩士班

2009 年 6 月

## 摘要

本論文將以 LIBOR 市場模型為基礎，根據不同期間之節點重合遠期利率樹，提出創新方法建造多期間的遠期利率樹之聯合機率分配。由於 LIBOR 市場模型存在非馬可夫性質，本論文採用 Ho、Stapleton 和 Subrahmanyam(1995)提供節點重合之造二元樹方法，建構遠期利率樹狀結構 LIBOR 市場模型。本文將此模型結合 Hull-White (1994)同時考慮兩因子的三維度樹狀模型，延伸至不同到期日的利率樹，推導出多期遠期利率樹之聯合機率分配。不但能夠求算不同期間生效的遠期利率之條件機率，且能評價各種型式的利率衍生性商品；並與實務上常用 LIBOR 市場模型的蒙地卡羅模擬法做比較，證明樹狀方法提供更準確且更有效率的結果。

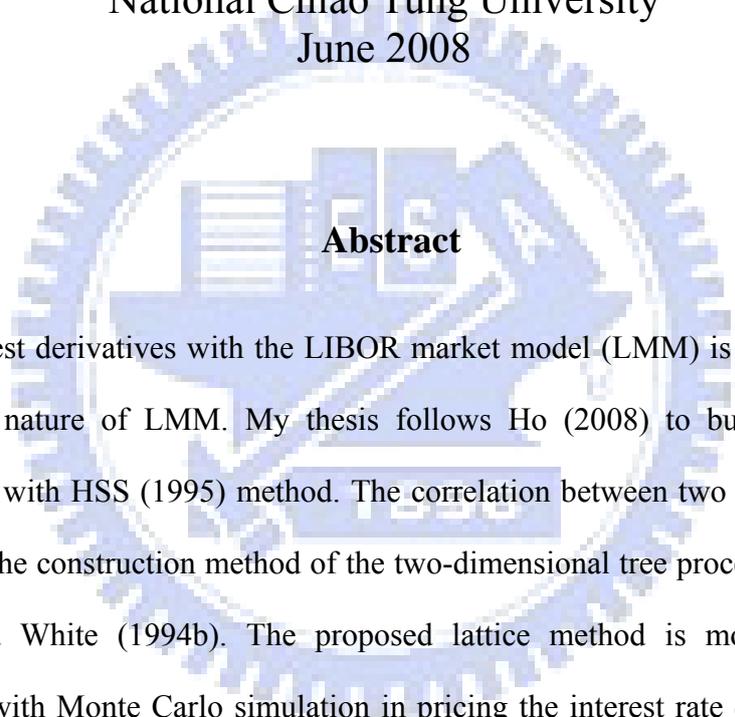
**關鍵字：**LIBOR 市場模型、債券選擇權、蒙地卡羅模擬法

Using the LIBOR Market Model to Price  
the Interest Rate Derivatives:  
A Recombining Binomial Tree Methodology

Student: Chun-Ju Ho

Advisors: Dr. Huimin Chung  
Dr. Tian-Shyr Dai

Graduate Institute of Finance  
National Chiao Tung University  
June 2008



**Abstract**

Pricing interest derivatives with the LIBOR market model (LMM) is hard due to the non-Markov nature of LMM. My thesis follows Ho (2008) to build recombined interest trees with HSS (1995) method. The correlation between two forward rates is modeled by the construction method of the two-dimensional tree procedure suggested by Hull and White (1994b). The proposed lattice method is more efficient in comparison with Monte Carlo simulation in pricing the interest rate derivatives, and more accurate in using Monte Carlo as the benchmark.

**Keywords: LMM, bond option, Monte Carlo simulation**

## 誌謝

本篇論文能夠順利的完成，首先要感謝 鍾惠民老師與 戴天時老師的協助，這段期間老師對學生的耐心指導與對學問一絲不苟的態度，除了給我很大的啟發，讓我對財務工程充滿興趣，也改變我的求學態度，對於理論的追求更謹慎、更踏實。感謝 呂育道博士、王之彥博士和 王克陸博士參與我的論文口試，並給予諸多寶貴的意見，使論文內容更臻完善。

接著感謝嘉紋在論文研究期間，給我很多鼓勵替我分憂解勞。還有博宇、弘杰和凱允這一年多來，一起同甘共苦，大家好學不倦的態度是我成長的原動力。最重要的是要感謝何俊儒學長，因為有他的帶領，我才能很快的進入狀況。感謝室友陪我度過好幾個漫漫長夜，十一舍的夥伴們帶給我許多歡樂。以及其他財金 96 級同學，從你們身上我學到很多做人處事的道理，相信你們未來必定會很有成就。

最後更要感謝我最摯愛的家人，因為有你們的支持與關愛，使我在求學的道路上無後顧之憂，以及我的男友韋華，在我低潮無助與不知所措的時候，因為有他陪伴，讓我有勇氣朝自己的興趣與理想邁進，以致今日順利完成碩士學業。

此刻謹將我的論文獻給親人與所有朋友，願論文完成的喜悅與您們分享，並再次獻上感謝的心，與最誠摯的祝福。

王薇婷 謹誌于

國立交通大學財務金融研究所

民國九十八年六月

# 目錄

摘要	i
Abstract	ii
誌謝	iii
目錄	iv
表目錄	v
圖目錄	vi
第一章 緒論	1
第一節 研究背景與動機	1
第二節 研究流程與論文架構	2
第二章 文獻探討	3
第一節 利率模型之演進	3
第二節 LIBOR 蒙地卡羅模擬的運用	8
第三節 離散時間之 LIBOR 市場模型期望值	8
第四節 建造樹狀節點重合的遠期利率 LIBOR 市場模型	10
第五節 Hull-White 同時考慮兩資產模型	12
第三章 研究方法	15
第一節 Hull-White 兩資產模型之應用	15
第二節 聯合機率分配的限制式	21
第四章 實證分析	25
第一節 評價 Bond Option	25
第五章 結論	33
參考文獻	34

## 表目錄

表 1. 由 $f(1;1,2)$ 與 $f(1;2,3)$ 各別之邊際機率所建構之非獨立的聯合機率分配..	16
表 2. 由 $f(1;1,2)$ 與 $f(1;3,4)$ 各別之邊際機率所建構之非獨立的聯合機率分配..	17
表 3. 由 $f'(1;3,4)$ 與 $f'(1;2,3)$ 各別之邊際機率所建構之非獨立的聯合機率分配	17
表 4. Hull-White (1994) 之 $3 \times 3$ 聯合機率分配.....	21
表 5. 兩變數 $X$ 、 $Y$ 獨立的聯合機率分配.....	22
表 6. 兩變數 $X$ 、 $Y$ 有相關性的聯合機率分配.....	22
表 7. 用二項樹方法評價債券選擇權.....	25
表 8. 用蒙地卡羅模擬法評價債券選擇權.....	25
表 9. 敏感度分析：初始的遠期利率變動對選擇權價值的影響.....	26
表 10. 敏感度分析：初始的波動度變動對選擇權價值的影響.....	28
表 11. 0~3 年之波動度期間結構.....	29
表 12. 敏感度分析：初始的遠期利率變動對選擇權價值的影響.....	30
表 13. 敏感度分析：相關係數對選擇價值的影響.....	31

## 圖目錄

圖 1. 論文架構圖 .....	2
圖 2. 單期遠期利率二項樹 .....	11
圖 3. Hull-White 三元樹模型 .....	13
圖 4. 遠期利率之機率轉換成 Hull-White 兩資產之三項樹模型 .....	15
圖 5. 由 $f(1;1,2)$ 與 $f(1;2,3)$ 各別之邊際機率所建構之非獨立的聯合機率分配	16
圖 6. 在給定 $f(1;1,2)$ 往上和 $f(1;2,3)$ 持平下 $f(1;3,4)$ 的條件機率 .....	18
圖 7. 初始的遠期利率變動對選擇權價值的影響 .....	27
圖 8. 波動度變動對選擇權價值的影響 .....	29
圖 9. 初始的遠期利率變動對選擇權價值的影響 .....	31



## 第一章 緒論

### 第一節 研究背景與動機

過去傳統利率模型描繪瞬間短期利率或瞬間遠期利率的隨機過程，如 Vaiscek、Hull-White、HJM 等。由於這些利率是無法從真實市場觀察取得，使用模型前為了符合市場資訊還須一一做校準，因此自 1997 年 Brace、Gatarek 及 Musiela(BGM)提出 LIBOR 市場模型(LIBOR Market Model)。此模型是根據市場上觀察得到的指標利率，而非抽象不存在的瞬間短期利率及瞬間遠期利率，所以透過市場資料即可描述目前的市場利率期間結構與利率波動結構，大幅增加產品定價的準確性。

LIBOR 市場模型假設遠期的 LIBOR rate 服從 lognormal 分配，這個假設對 Black 模型(1976)的實務應用提供進一步的理論說明。然而 LIBOR 市場模型採用多因子捕捉遠期利率結構，使其本身具有非馬可夫性質(Non-Markov property)。在建立樹狀模型時，會因路徑相依(path dependent)特性造成每期節點無法重合，而導致節點成指數成長不但降低評價的效率且增加困難度。

為了解決這個問題，本研究利用 Ho, Stapleton, and Subrahmanyam (1995)提出的建樹法，建立一個同時描繪利率期間結構與利率波動結構，並讓節點重合的二項樹。但是由於不同生效日的遠期利率之間並不是獨立關係，所以當我們在評價考慮多期不同生效日之遠期利率樹的商品時，像債券選擇權(bond option)、利率上限選擇權等利率衍生性商品，就必需求算不同期間生效的遠期利率樹之聯合機率分配。

本研究透過 Hull-White 同時考慮兩資產的三維度樹狀模型(1994)延伸出同時考慮多期遠期利率樹的聯合機率分配。如此，便可處理和多期不同生效日利率樹有關的金融商品，透過與蒙地卡羅模擬方法之比較，樹狀模型提供更準確更有效

率的評價結果。

## 第二節 研究流程與論文架構

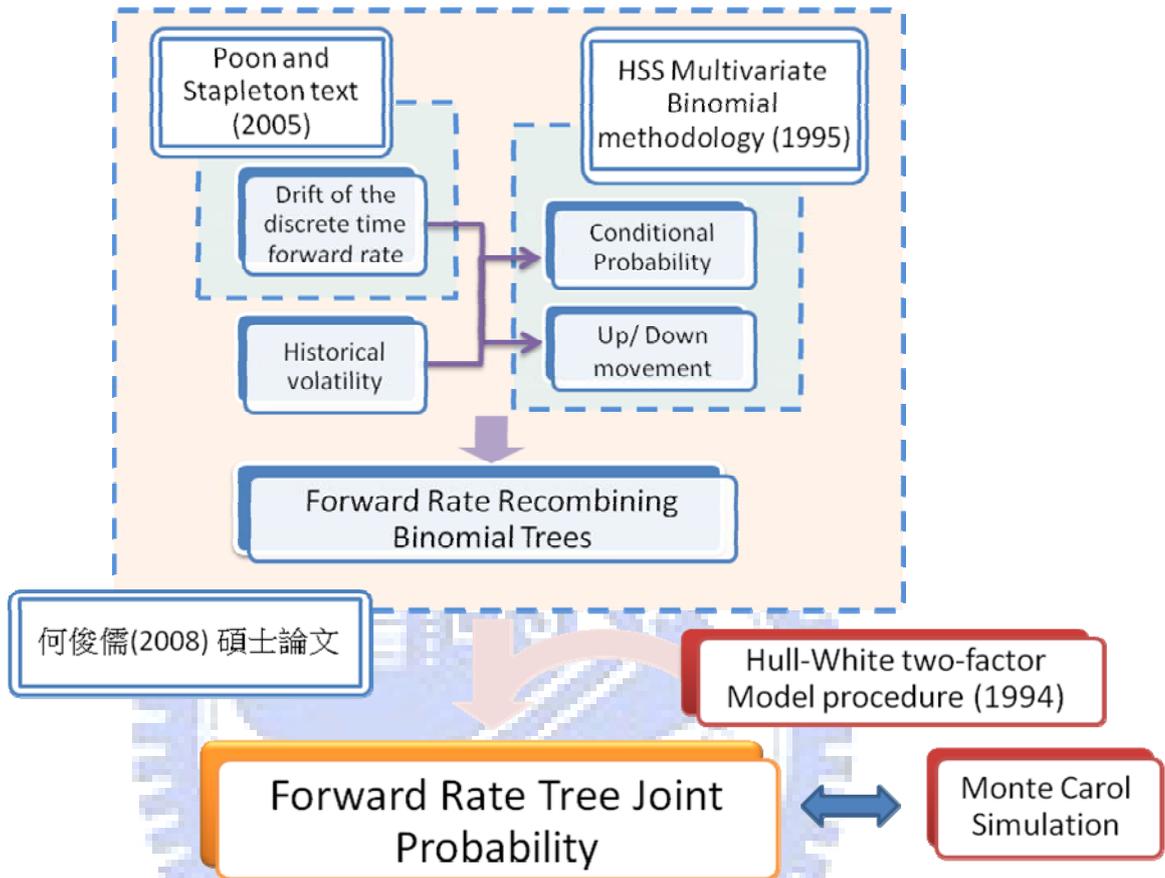


圖 1. 論文架構圖

根據何俊儒(2008)碩士論文提出建構單一期的遠期利率樹之方法，本研究將此論文做延伸，建構出多期遠期利率之聯合機率分配。第二章分成四小節：簡介利率模型之演進、介紹 LIBOR 市場模型蒙地卡羅模擬法、根據 Poon 與 Stapleton (2005) 推導出 LIBOR 市場模型最重要的漂浮項(drift term)，介紹離散的 BGM 模型，最後透過 Ho、Stapleton 和 Subrahmanyam 建造樹狀節點重合的數值方法，建造遠期利率 LIBOR 市場模型。第三章為研究方法，把 Hull-White 同時考慮兩因子的三維度樹狀模型應用在 LIBOR 市場模型不同到期日的遠期利率樹。第四章為實證分析：評價債券選擇權、與蒙地卡羅模擬法做比較。第五章為本研究之結論與貢獻。

## 第二章 文獻探討

本章將介紹利率模型之演進及蒙地卡羅模擬法在 LIBOR 市場模型的運用。接著介紹遠期利率協定，並推導出離散時間之 LIBOR 市場模型的期望值。最後，說明何俊儒(2008)的遠期利率造樹法。

### 第一節 利率模型之演進

利率模型之發展，可視為學者在尋找「如何能精準描述現行利率期間結構，使利率商品的模型理論價值能與市場價格一致」的演進過程，而利率模型一般可分為均衡模型（Equilibrium Models）與無套利模型（No Arbitrage Models）。

#### （一）均衡模型

當資本市場之供給與需求達到均衡時，能決定唯一的利率解，這就是均衡模型所隱含的經濟意義，此時利率期間結構模型為內生的，也就是利率是由模型產出的，但由於參數的自由度不夠，不能完全符合市場的利率期間結構，以致於會產生評價之理論價值與市場價格不符的問題。典型之均衡模型如下：

#### 1. Vasicek (1977)

Vasicek 為短期利率模型的一種，為最早假設短期利率具有均數復歸（Mean Reversion）特性的模型，其假設在風險中立下，短期利率  $r$  服從 Ornstein-Uhlenbeck (O-U) 隨機過程：

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma dW(t)$$

其中， $a$  為利率均數復歸的速度， $b$  為短期利率的長期平均水準， $\sigma$  為短期利率的波動度， $dW$  為布朗運動的變化量、 $dW \sim N(0, dt)$ 。

在此設定之下只要利率偏離長期平均水準  $b$  時，便會以  $a$  之速度收斂回復至

$b$ ，但由於 O-U 隨機過程為常態分配，故短期利率可能會出現負值，這與真實情況並不相符。

## 2. CIR (1985)

Cox-Ingersoll-Ross (CIR) 模型改進 Vasicek 模型中短期利率為負的缺點，將擴散項 (Diffusion) 的係數重新定為  $\sigma\sqrt{r(t)}$ ，因此短期利率波動度會隨利率上升而上升，其動態過程如下：

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$$

CIR 模型為在滿足效用極大化下所推導出的，利率的動態過程及風險的市場價格都是內生決定，故 CIR 模型會滿足一般均衡條件，但內生模型難與現行利率期間結構一致，又因其短期利率服從非中央卡方分配，因此並不利於模型參數的校準。

### (二) 無套利模型

為了克服利率模型與市場利率期間結構並不一致的缺點，在無套利模型中，將目前市場利率期間結構設為輸入值，且平移項(Drift term)設定為時間的函數，使利率模型完全符合市場真實情況，讓期初零息利率曲線會影響模型中未來短期利率的平均路線。大致包含以下幾種模型：

#### 1. Ho and Lee (1986)

Ho and Lee 是最早提出的無套利模型，其假設短期利率動態如下：

$$dr(t) = \theta(t)dt + \sigma dW(t)$$

其中， $\sigma$  為固定常數， $\theta(t)$  為時間  $t$  之函數。Ho and Lee 模型雖然改善了與市場利率期間結構不一致的問題，但此模型並不具備均數復歸特性，即不論利率多高或多低，利率的平均走勢都相同，且利率可能會為負，與真實

情況並不符。

## 2. Hull and White (1990)

Hull and White 模型為 Vasicek 模型的延伸，此模型將漂移項的參數設定為隨時間變動，以便能夠配適市場的期初利率期間結構，並且保留了均數復歸的特性如下：

$$dr(t) = (\theta(t) - ar)dt + \sigma dW(t)$$

或是

$$dr(t) = a\left(\frac{\theta(t)}{a} - r\right)dt + \sigma dW(t)$$

其中  $a$ ， $\sigma$  為常數， $\sigma$  為短期利率的波動度， $\theta(t)$  為使模型符合期初期間結構的時間函數。此模型可視為 Vasicek 模型加上隨時間變動的利率回歸水準  $\theta(t)/a$ 。在時間  $t$ ，短期利率會以  $a$  的速率回復到  $\theta(t)/a$  的利率水準， $\theta(t)$  可由期初期間結構推出

$$\theta(t) = f_t(0,t) + af(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})$$

其中  $f(0,t)$  為在 0 時間零觀察到，於時間  $t$  到期的瞬間遠期利率，下標  $t$  表對  $t$  做偏微分。最後一項通常非常小，如果將之忽略，這個式子隱含利率  $r$  在  $t$  瞬間的漂項為  $f_t(0,t) + a(f(0,t) - r)$ ，因此利率  $r$  的平均變動會遵循期初瞬間遠期利率曲線的斜率。

## 3. HJM (1992)

遠期利率模型中最具代表性的就是由 Heath、Jarrow、Merton (HJM) 所提出的以瞬間遠期利率為基礎之多因子模型，其模型表達如下：

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dW(t)$$

其中， $f(t, T)$  為在  $t$  時間所觀察  $T$  時間的瞬間遠期利率，

$$\alpha(t, T) = \sigma(t, T) \int_t^T \sigma(t, s) ds = \sum_{i=1}^d \sigma_i(t, T) \int_t^T \sigma_i(t, s) ds \text{ 為漂移項，}$$

$\sigma(t, T) = (\sigma_1(t, T), \dots, \sigma_d(t, T))$  為波動度項多維度向量，

$W(t) = (W_1(t), \dots, W_d(t))$  為多維度的布朗運動

此模型之漂移項與波動度皆為時間的函數，較符合市場之利率與波動度期間結構，但由於瞬間遠期利率無法從市場上直接觀察到，且其過程為非馬可夫過程 (Non-Markovian Process)，故增添了校準的困難。

#### 4. BGM (1997)

由於 HJM 模型下所描述的瞬間遠期利率，無法在市場上直接觀察，因此有另外一群學者在 HJM 模型基礎上，發展出可以直接使用市場上間斷簡單指標利率的市場模型 (LIBOR Market Model)。

這類的研究，根據描述的利率不同，一般可分成兩派：一派為 Brace、Gatarek、Musielá 的遠期 LIBOR 利率，稱為 BGM 模型，或稱為 LIBOR 市場模型 (LIBOR market model, LMM)；另一派為 Jamshidian 的遠期交換利率，稱為交換市場模型 (Swap market model, SMM)。

其中 BGM 模型是令  $Q_{i+1}$  是以零息債券  $P(t, T_{i+1})$  為計價單位的風險中立測度， $f(t, T_i, T_{i+1})$  為在  $t$  時間所觀察  $T_i$  到  $T_{i+1}$  期間的遠期利率，由  $P(t, T_i)$  與  $P(t, T_{i+1})$  所得到的遠期利率值為

$$\frac{P(t, T_i)}{P(t, T_{i+1})} = 1 + \delta_i f(t, T_i, T_{i+1}) \quad \delta_i = T_{i+1} - T_i$$

$$f(t, T_i, T_{i+1}) = \frac{1}{\delta_i} \left( \frac{P(t, T_i)}{P(t, T_{i+1})} - 1 \right)$$

由於  $\frac{P(t, T_i)}{P(t, T_{i+1})}$  為  $Q_{i+1}$ -Martingale，根據 Itô's Lemma， $f(t, T_i, T_{i+1})$  亦是一個

$Q_{i+1}$ - Martingale 過程：

$$df(t; T_i, T_{i+1}) = \sigma_i(t) f(t; T_i, T_{i+1}) dW(t), \quad i=1, 2, \dots, n$$

其中  $\sigma_i(t)$  為  $f(t; T_i, T_{i+1})$  在時間  $t$  的波動度， $W(t)$  為  $Q^{i+1}$  測度下之布朗運動。可解出遠期 LIBOR 利率的隨機微分方程式為

$$f(t; T_i, T_{i+1}) = f(0; T_i, T_{i+1}) \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^t \sigma_i^2(s) ds + \int_0^t \sigma_i(s) dW(s)\right)。$$

當上式  $i=n$ ，為  $f(t; T_n, T_{n+1})$  在  $P(t, T_{n+1})$  零息債券之  $Q^{n+1}$ - Martingale；為了推導  $f(t; T_n, T_{n+1})$  在  $Q^{k+1}$  測度下之一般化的隨機微分方程式，則透過測度轉換對所有的  $i=1, 2, \dots, n-1$ ， $f(t; T_n, T_{n+1})$  之隨機微分方程式的測度轉換到  $Q^i$  測度下，可寫成

$$df(t; T_n, T_{n+1}) = \sigma_n(t) [v_i(t) - v_{n+1}(t)] f(t; T_n, T_{n+1}) dt + \sigma_n(t) f(t; T_n, T_{n+1}) dW(t) \quad (1)$$

其中  $v_i(t)$  為  $t$  時間點的債券價格  $P(t, T_i)$  之波動度， $v_{n+1}(t)$  為  $t$  時間點的債券價格  $P(t, T_{n+1})$  之波動度。接下來會說明如何求算  $v_i(t) - v_{n+1}(t)$ ：

由於

$$\frac{P(t, T_i)}{P(t, T_{i+1})} = 1 + \delta_i f(t, T_i, T_{i+1}) \Rightarrow \ln P(t, T_i) - \ln P(t, T_{i+1}) = \ln [1 + \delta_i f(t, T_i, T_{i+1})] \quad (2)$$

在傳統風險中立的假設下，零息債券價格的隨機過程為

$$dP(t, T_k) = r(t) P(t, T_k) dt + v_k(t) P(t, T_k) dW(t),$$

用 Itô's Lemma，讓(2)式等號兩邊的  $dW$  項相等，可得到

$$v_i(t) - v_{i+1}(t) = \frac{\delta_i f(t, T_i, T_{i+1}) \sigma_i(t)}{1 + \delta_i f(t, T_i, T_{i+1})} \quad (3)$$

則由(2)式

$$\ln \frac{P(t, T_i)}{P(t, T_{n+1})} = \ln \frac{P(t, T_i)}{P(t, T_{i+1})} \frac{P(t, T_{i+1})}{P(t, T_{i+2})} \dots \frac{P(t, T_n)}{P(t, T_{n+1})} = \sum_{k=i}^n \ln [1 + \delta_k f(t, T_k, T_{k+1})] \quad (4)$$

由(3)式與(4)式

$$v_i(t) - v_{n+1}(t) = \sum_{k=i}^n v_k(t) - v_{k+1}(t) = \sum_{k=i}^n \frac{\delta_k f(t, T_k, T_{k+1}) \sigma_k(t)}{1 + \delta_k f(t, T_k, T_{k+1})}$$

代回(1)式，對所有的  $k < n$ ，可寫成在  $Q^k$  測度下之 BGM 模型的隨機微分方程式

$$\frac{df(t; T_n, T_{n+1})}{f(t; T_n, T_{n+1})} = \sum_{i=k}^n \frac{\delta_i f(t, T_i, T_{i+1}) \sigma_i(t) \sigma_n(t)}{1 + \delta_i f(t, T_i, T_{i+1})} dt + \sigma_n(t) dW(t) \quad (5)$$

## 第二節 LIBOR 蒙地卡羅模擬的運用

由於  $f(t; T_i, T_{i+1})$  服從對數常態分配，可將(5)式測度  $Q^k$  下之隨機過程寫成

$$d \ln f(t; T_i, T_{i+1}) = \left( \sum_{j=k}^i \frac{\delta_j f(t; T_j, T_{j+1}) \sigma_j(t) \sigma_i(t)}{1 + \delta_j f(t; T_j, T_{j+1})} - \frac{\sigma_i^2(t)}{2} \right) dt + \sigma_i(t) dW(t)$$

利用尤拉吉米斯旦定理(Euler and Milstein Schemes)進行斷續化(Discretization)，得

$$f(t+\Delta t; T_i, T_{i+1}) = f(t; T_i, T_{i+1}) \exp \left\{ \left( \sum_{j=k}^i \frac{\delta_j f(t; T_j, T_{j+1}) \sigma_j(t) \sigma_i(t)}{1 + \delta_j f(t; T_j, T_{j+1})} - \frac{\sigma_i^2(t)}{2} \right) \Delta t + \sigma_i(t) \Delta W(t) \right\}$$

以此方程式做為蒙地卡羅法模擬遠期利率變化的路徑。

## 第三節 離散時間之 LIBOR 市場模型期望值

此章節我們根據 Poon 與 Stapleton (2005) 推導出 LIBOR 市場模型最重要的漂浮項(drift term)介紹離散的 BGM 模型。會分成兩部分，先介紹遠期利率協定(Forward Rate Agreements; FRAs)，再透過此利率商品在發行時價值為零，推導無套利的離散時間之 LIBOR 市場模型期望值。

### (一) 遠期利率協定(Forward Rate Agreements; FRAs)

在  $t$  時間約定  $T_n$  到  $T_{n+1}$  時間的固定利率  $K$ ，在  $T_n$  時間以  $K$  交換從  $T_n$  到  $T_{n+1}$  之  
 年化即期利率  $y(T_n, T_{n+1})$ 。則在  $T_n$  時間支付固定利率一方的支出為

$$FRA(T_n) = \frac{A(y(T_n, T_{n+1}) - K)\delta}{1 + y(T_n, T_{n+1})\delta}$$

其中  $\delta = T_{n+1} - T_n$ ， $A$  為本金。在無套利條件下，期初建立協定時價值為零，因此  
 $K$  會等於市場的遠期利率  $f(t, T_n, T_{n+1})$ ，可得在一開始  $t$  時間的遠期利率協定

$FRA(t, T_n)$  價值

$$FRA(t, T_n) = E_t \left[ \frac{A(y(T_n, T_{n+1}) - f(t, T_n, T_{n+1}))\delta}{1 + y(T_n, T_{n+1})\delta} \right] = 0$$

### (二) 離散時間之 LIBOR 市場模型期望值

現在我們介紹 Poon 與 Stapleton (2005) 在風險中立下導出的重要結果。

#### 1. 零息債券價格

$$P(t, T_n) = P(t, T_1) E_t(P(T_1, T_n))$$

亦可求得遠期債券價格

$$E_t(P(T_1, T_n)) = \frac{P(t, T_n)}{P(t, T_1)} = f(t, T_1, T_n)$$

#### 2. 遠期債券價格的漂淨項

$$\begin{aligned} E_t[For(T_1, T_i, T_n)] - f(t, T_i, T_n) \\ = -\frac{P(t, T_1)}{P(t, T_n)} \text{cov}_t[f(T_1, T_i, T_n), P(T_1, T_n)] \end{aligned}$$

#### 3. 由遠期利率協定推出 $T_n$ 期間遠期利率漂淨項

$$\begin{aligned} E_t[f(T_1; T_n, T_{n+1})] - f(t; T_n, T_{n+1}) = \\ -\text{cov}_t \left[ f(T_1; T_n, T_{n+1}), \frac{1}{1 + y(T_1, T_2)} \times \frac{1}{1 + f(T_1; T_2, T_3)} \times \dots \times \frac{1}{1 + f(T_1; T_n, T_{n+1})} \right] \\ \times (1 + f(t; T_1, T_2)) \cdot (1 + f(t; T_2, T_3)) \cdots (1 + f(t; T_n, T_{n+1})) \end{aligned}$$

透過 Stein's Lemma for lognormal variables，我們可以將原本的方程式修正成

$$\begin{aligned} E_t[f(T_1; T_n, T_{n+1})] - f(t; T_n, T_{n+1}) &= \\ f(t; T_n, T_{n+1}) \times \frac{\delta f(t; T_1, T_2)}{1 + \delta f(t; T_1, T_2)} \cdot \text{cov}_t[\ln f(T_1; T_n, T_{n+1}), \ln f(T_1; T_1, T_2)] &+ \dots \\ + f(t; T_n, T_{n+1}) \times \frac{\delta f(t; T_n, T_{n+1})}{1 + \delta f(t; T_n, T_{n+1})} \cdot \text{cov}_t[\ln f(T_1; T_n, T_{n+1}), \ln f(T_1; T_n, T_{n+1})] & \end{aligned}$$

其中  $\text{cov}_t[\ln f(T_1; T_i, T_{i+1}), \ln f(T_1; T_n, T_{n+1})]$  是  $i$  期間生效的遠期利率與  $n$  期間生效的

遠期利率之共變異數，為了寫作方便以下我們用  $\tilde{\sigma}_{i,n}$  表示，定義

$$\text{cov}_t[\ln f(T_1; T_i, T_{i+1}), \ln f(T_1; T_n, T_{n+1})] \equiv \tilde{\sigma}_{i,n} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

得到 Poon 與 Stapleton (2005) 推導的離散時間之 LIBOR 市場模型之漂浮項

$$\begin{aligned} \frac{E_t[f(T_1; T_n, T_{n+1})] - f(t; T_n, T_{n+1})}{f(t; T_n, T_{n+1})} &= \frac{\delta f(t; T_1, T_2)}{1 + \delta f(t; T_1, T_2)} \cdot \tilde{\sigma}_{1,n} + \frac{\delta f(t; T_2, T_3)}{1 + \delta f(t; T_2, T_3)} \cdot \tilde{\sigma}_{2,n} \\ &+ \dots + \frac{\delta f(t; T_n, T_{n+1})}{1 + \delta f(t; T_n, T_{n+1})} \cdot \tilde{\sigma}_{n,n} \end{aligned} \quad (6)$$

#### 第四節 建造樹狀節點重合的遠期利率 LIBOR 市場模型

Ho, Stapleton, and Subrahmanyam (1995) 提供一個一般化的方法建造多變量的二項樹，用以逼近多變量的對數常態過程。因為 LIBOR 市場模型符合 HSS 方法設定的條件，所以本文參考 Derrick, Stapleton, and Stapleton (2005) 與何俊儒 (2008) 的碩士論文，可以得到  $T_N$  期間遠期利率在  $i$  時間的值

$$f(i; T_n, T_{n+1})_r = f(0; T_n, T_{n+1}) u_i^{N_i - r} d_i^r, \quad i = T_1, T_2, \dots, T_n$$

其中

$$\begin{aligned} d_i &= \frac{2[E(f(i; T_n, T_{n+1})) / f(0; T_n, T_{n+1})]^{\frac{1}{N_i}}}{1 + \exp(2\sigma_{i-1,i} \sqrt{(T_i - T_{i-1}) / n_i})} \\ u_i &= 2[E(f(i; T_n, T_{n+1})) / f(0; T_n, T_{n+1})]^{\frac{1}{N_i}} - d_i \\ N_i &= N_{i-1} + n_i \end{aligned}$$

$r$ ：在時間  $T_N$  從上面開始數第  $r$  個節點

造出二項樹在  $T_1$  期會有  $n_1$  個節點， $r_1=0,1,\dots,n_1$  在 1 時間從上面開始數第  $r_1$  個節點， $T_2$  期在會有  $n_2$  個節點， $r_2=0,1,\dots,n_1+n_2$  在 2 時間從上面開始數第  $r_2$  個節點，結果如下圖所示：

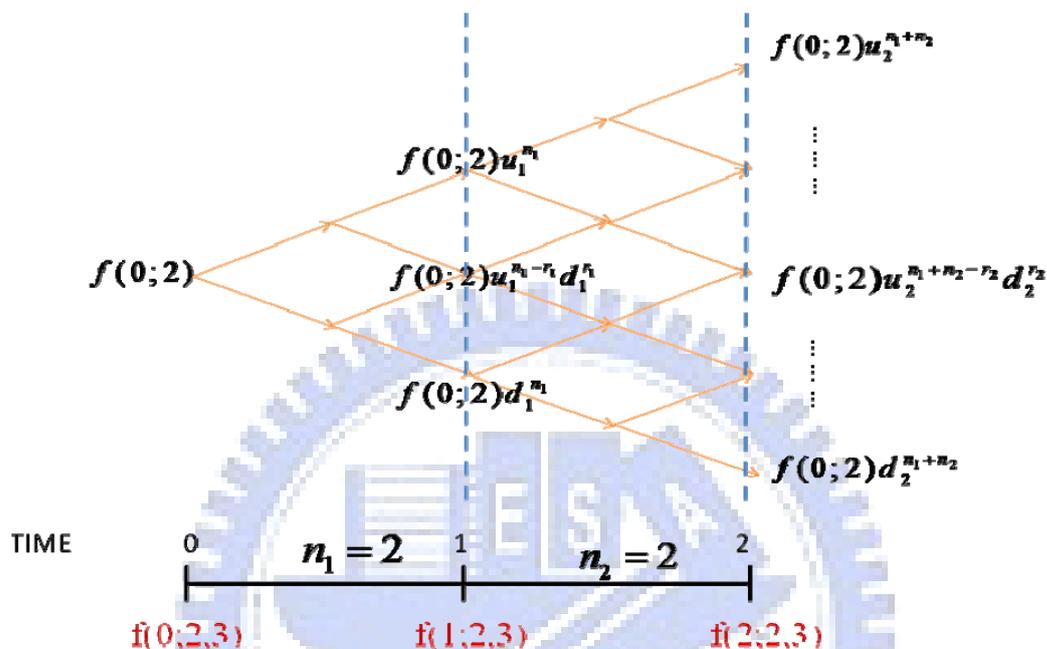


圖 2. 單期遠期利率二項樹

在假設遠期市場利率服從聯合對數常態分配下，遠期利率  $f(i;T_n,T_{n+1})$ ,  $i = T_1, T_2, \dots, T_n$  可以用二項分配近似，利用上式之  $u_i$  和  $d_i$ ，條件機率給定  $i-1$  時間點在  $r$  節點之上漲機率為

$$q(x_i | x_{i-1} = x_{i-1,r}) = \frac{E_{i-1}(x_i) - (N_{i-1} - r) \ln u_i - r \ln d_i}{n_i (\ln u_i - \ln d_i)} - \frac{\ln d_i}{\ln u_i - \ln d_i} \quad \forall i, r \quad (2)$$

其中

$$x_i = \ln \frac{f(i;T_n,T_{n+1})}{f(0;T_n,T_{n+1})}$$

因為  $x_i$  服從常態分配，

$$x_i = a_i + b_i x_{i-1} + \varepsilon_i, \quad E_{i-1}(\varepsilon_i) = 0$$

運用時間序列方法可求得迴歸係數

$$b_i = \sqrt{[t_i \sigma_{0,i}^2 - (t_i - t_{i-1}) \sigma_{i-1,i}^2] / t_{i-1} \sigma_{0,i-1}^2}$$

$$a_i = E(x_i) - b_i E(x_{i-1})$$

接著計算給定  $x_{i-1}$ ， $x_i$  之條件期望值

$$E_{i-1}(x_i) = a_i + b_i x_{i-1,r} = E(x_i) - b_i E(x_{i-1}) + b_i x_{i-1,r} \quad (3)$$

因為  $f(i; T_n, T_{n+1})$  服從對數常態分配

$$E(x_i) = \ln \left[ \frac{E(f(i; T_n, T_{n+1}))}{f(0; T_n, T_{n+1})} \right] - \frac{1}{2} \sigma_{0,i}^2 \quad (4)$$

$E_{i-1}(x_i)$  就可根據方程式(4)求出。用方程式(1)的漂浮項，我們可以移項整理並代入方程式(4)

$$\frac{E_i[f(T_1; T_n, T_{n+1})]}{f(0; T_n, T_{n+1})} = \frac{f(t; T_n, T_{n+1})}{f(0; T_n, T_{n+1})} \times \left( 1 + \frac{\delta_1 f(t; T_1, T_2)}{1 + \delta_1 f(t; T_1, T_2)} \cdot \tilde{\sigma}_{1,n} + \frac{\delta_2 f(t; T_2, T_3)}{1 + \delta_2 f(t; T_2, T_3)} \cdot \tilde{\sigma}_{2,n} + \dots + \frac{\delta_n f(t; T_n, T_{n+1})}{1 + \delta_n f(t; T_n, T_{n+1})} \cdot \tilde{\sigma}_{n,n} \right) \quad (5)$$

得到給定  $x_{i-1}$ ， $x_i$  之上漲條件機率  $q(x_i | x_{i-1})$ 。

## 第五節 Hull-White 同時考慮兩資產模型

在Hull-White (1994)的模型建構方法，先考慮一個過程 $Z$ 受 $X$ 和 $Y$ 兩個隨機過程影響，且  $Z_t = X_t + Y_t$ 。其中

$$dX_t = \mu^X(t, X_t)dt + \sigma^X(t, X_t)dW^X(t)$$

$$dY_t = \mu^Y(t, Y_t)dt + \sigma^Y(t, Y_t)dW^Y(t)$$

$\mu^X$ 、 $\mu^Y$ 、 $\sigma^X$ 、 $\sigma^Y$  是隨時間變動的函數， $W^X$  和  $W^Y$  是有共變異關係的標準布朗運動， $dW^X dW^Y = \rho dt$ ， $\rho \in [-1, 1]$ 。接下來，用 $X$ 和 $Y$ 的邊際分配與兩者間的共變異係數，建構 $Z$ 二維度的聯合機率分配。以下為Hull-White (1994b)推導出三項樹的邊際機率分配

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{\eta_{i,k}^2}{6V_i^2} + \frac{\eta_{j,k}}{2\sqrt{3}V_i}$$

$$p_m = \frac{2}{3} - \frac{\eta_{j,k}}{3V_i^2}$$

$$p_d = \frac{1}{6} + \frac{\eta_{i,k}^2}{6V_i^2} - \frac{\eta_{j,k}}{2\sqrt{3}V_i}$$

其中  $\eta_{j,k} = M_{i,j} - x_{i+1,k}$ ,  $M_{i,j}$  和  $V_{i,j}^2$  是  $X$  在給定  $X(t_i) = x_{i,j}$  之下,  $t_{i+1}$  時間的期望值與變異數。選定一個  $k$  值讓  $x_{i+1,k}$  盡可能逼近  $M_{i,j}$

$$k = \text{round}\left(\frac{M_{i,j}}{\Delta x_{i+1}}\right),$$

而  $p_u$ 、 $p_m$  和  $p_d$  分別表示下圖三種情況  $x_{i+1,k+1}$ 、 $x_{i+1,k}$  和  $x_{i+1,k-1}$  的機率。

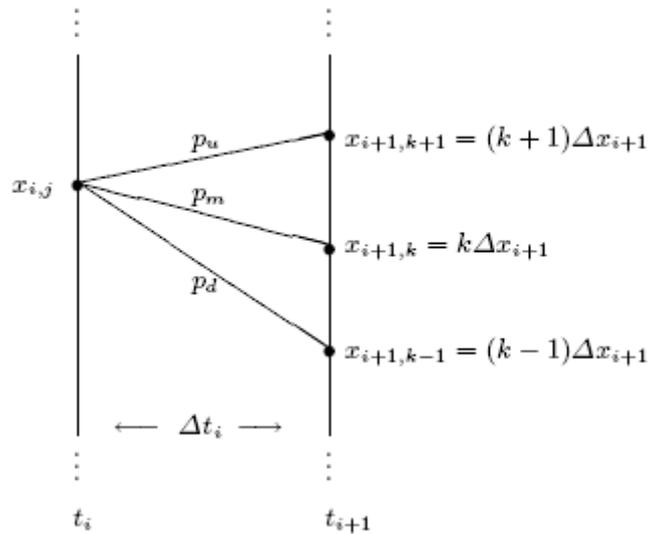


圖 3. Hull-White 三元樹模型

同理我們可以得到相同條件下  $y_{i+1,k+1}$ 、 $y_{i+1,k}$  和  $y_{i+1,k-1}$  的機率： $q_u$ 、 $q_m$  和  $q_d$ 。

先建構一個彼此獨立的聯合機率分配

$$\Pi_0 = \begin{pmatrix} \pi_{ud} & \pi_{um} & \pi_{uu} \\ \pi_{md} & \pi_{mm} & \pi_{mu} \\ \pi_{dd} & \pi_{dm} & \pi_{du} \end{pmatrix}$$

其中每個機率是由兩個邊際機率相成得到，如  $\pi_{ud} = p_u \cdot q_d$ 。

為了使這個聯合機率分配可以解釋兩變數的相關性，且不影響原本的邊際機率，

對每個機率值做調整，可以得到下面之方程式：

$$\frac{\text{Cov}\{X(t_{i+1}), Y(t_{i+1}) | X(t_i), Y(t_i)\}}{V_i^X V_i^Y} = \frac{\Delta x_{i+1} \Delta y_{i+1} (-\pi_{ud} - \varepsilon_{ud} + \pi_{uu} + \varepsilon_{uu} + \pi_{dd} - \varepsilon_{dd} + \pi_{du} - \varepsilon_{du})}{V_i^X V_i^Y} \approx \rho$$

$\varepsilon_{ud}$  為  $\pi_{ud}$  之機率調整參數，詳細求算方法見 Hull-White (1994b)，一般化的整理

$$\Pi_\rho = \Pi_0 + \rho(\Pi_1^l - \Pi_0^l), \quad \text{if } \rho > 0$$

$$\Pi_\rho = \Pi_0 - \rho(\Pi_{-1}^l - \Pi_0^l), \quad \text{if } \rho < 0$$

其中  $\Pi_\rho$  is 是一個隱含兩相關變數的機率矩陣且相關係數為  $\rho$ 。而  $\Pi_1^l, \Pi_0^l$  和

$\Pi_{-1}^l$  則分別表示不同相關係數的機率矩陣  $\rho = 1, \rho = 0$  和  $\rho = -1$ 。



### 第三章 研究方法

本章將透過 Hull-White 同時考慮兩資產模型的建造過程，進一步應用在多期的 LIBOR 市場模型之遠期利率樹。先舉例說明如何建立 LIBOR 市場模型之聯合機率分配；再介紹此三維度樹狀模型應用在 LIBOR 市場模型存在相關性的聯合機率分配，必須重新推導的限制式。

#### 第一節 Hull-White 兩資產模型之應用

本研究應用何俊儒(2008)的碩士論文，導出的 LIBOR 市場模型之遠期利率二項樹方法，用一個簡單的例子說明如何應用到 LIBOR 市場模型，求算聯合機率分配。接著，提出建構遠期利率聯合機率分配之一般式，以及建構聯合機率矩陣：

步驟一、先個別造出單一期的 $f(0;1,2)$ 與 $f(0;2,3)$ 的遠期利率樹。

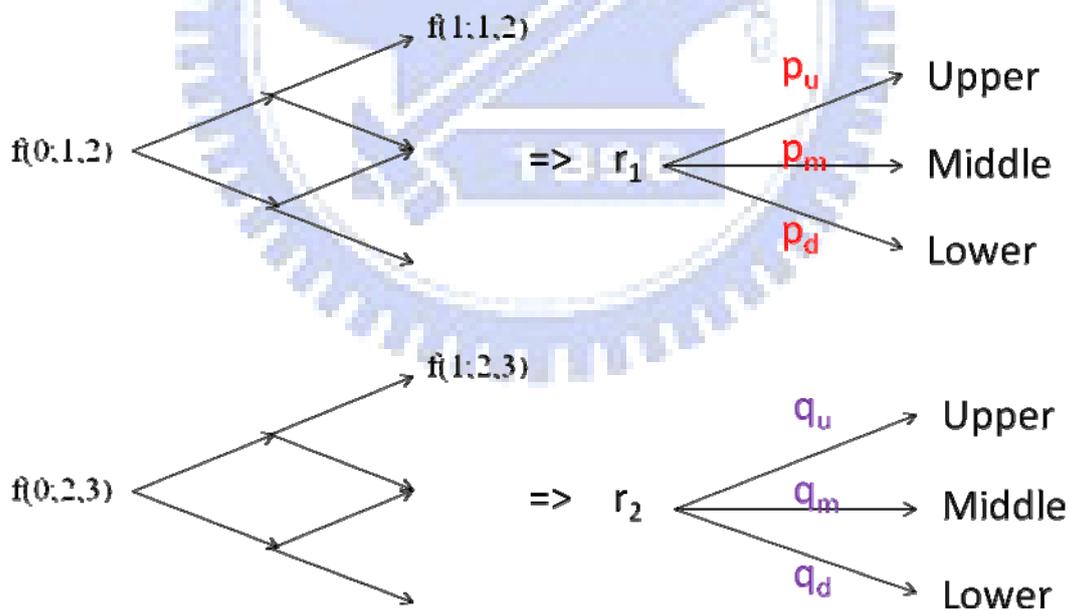


圖 4. 遠期利率之機率轉換成 Hull-White 兩資產之三項樹模型

本研究以分割兩期的利率樹為例，到期時會有三個節點。將各別利率樹每個節點的邊際率值算出，轉化成Hull-White模型的三種情況機率，造出 $f(1;1,2)$ 三種情形

下 $f(1;2,3)$ 上、中、下三種情形的聯合機率分配，為了轉換成已知 $f(1;1,2)$ 往上， $f(1;2,3)$ 的條件機率，會將矩陣的每一行除以已知條件的邊際機率。下表為兩利率樹有相關性的矩陣

		$f(1;1,2)$		
		$p_d$	$p_m$	$p_u$
$f(1;2,3)$	$q_u$	A	B	C
	$q_m$	D	E	F
	$q_d$	G	H	I

表 1. 由 $f(1;1,2)$ 與 $f(1;2,3)$ 各別之邊際機率所建構之非獨立的聯合機率分配

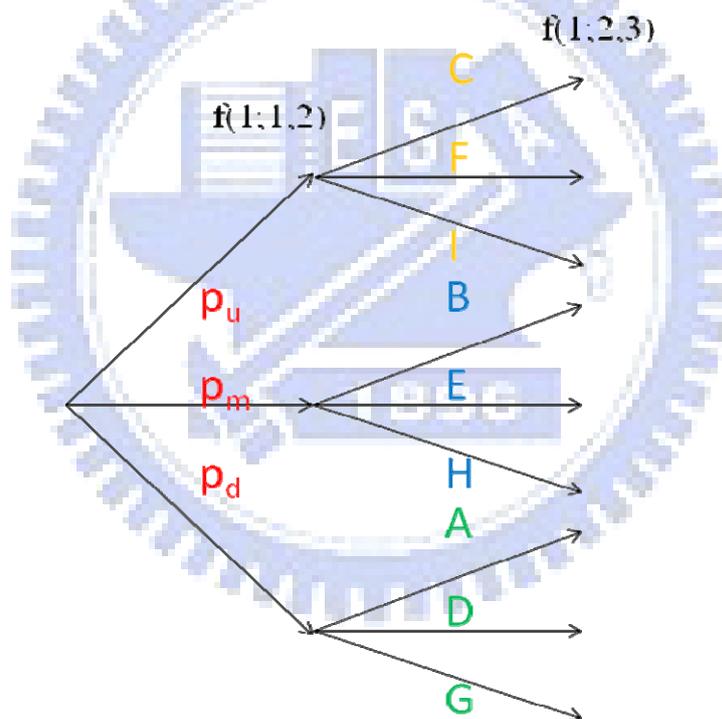


圖 5. 由 $f(1;1,2)$ 與 $f(1;2,3)$ 各別之邊際機率所建構之非獨立的聯合機率分配

步驟二、建構更多期的條件機率分配。

往後推一期到 $f(1;3,4)$ ，由於 $f(1;3,4)$ 同時與 $f(1;1,2)$ 和 $f(1;2,3)$ 有關，且 $f(1;1,2)$ 與 $f(1;2,3)$ 彼此也存在相關性，為了考慮所有的相關係數，本文先建構 $f(1;3,4)$ 與 $f(1;1,2)$ 之聯合機率分配：

	$f(1;1,2)$			
	$p_d$	$p_m$	$p_u$	
	$r_u$	J	K	L
$f(1;3,4)$	$r_m$	M	N	O
	$r_d$	P	Q	R

表 2. 由  $f(1;1,2)$  與  $f(1;3,4)$  各別之邊際機率所建構之非獨立的聯合機率分配

令  $f'(1;3,4)$  為給定  $f(1;1,2)$  是往上波動的機率(表 2 之 L,O,R)，而  $f'(1;2,3)$  為根據上一步驟所得到的，給定  $f(1;1,2)$  是往上波動， $f(1;2,3)$  為上、中、下三種情形的機率(表 1 之 C,F,I)矩陣：

	$f'(1;2,3)$			
	C	F	I	
	L	a	b	c
$f'(1;3,4)$	O	d	e	f
	R	g	h	i

表 3. 由  $f'(1;3,4)$  與  $f'(1;2,3)$  各別之邊際機率所建構之非獨立的聯合機率分配

如此一來便同時考慮所有遠期利率樹兩兩之間的相關係數關係。下圖即是上述方法下所得到的  $f(1;3,4)$  之條件機率：

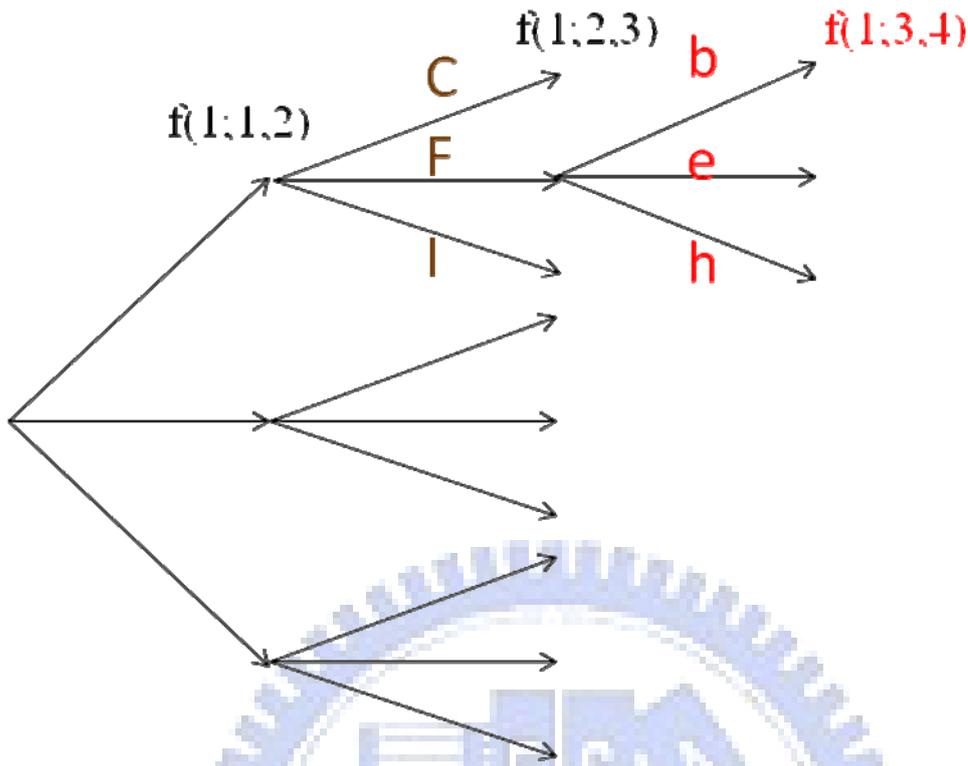


圖 6. 在給定  $f(1;1,2)$  往上和  $f(1;2,3)$  持平下  $f(1;3,4)$  的條件機率

其中 b,e,f 便是  $f(1;1,2)$  往上的節點， $f(1;2,3)$  是中間的節點， $f(1;3,4)$  三個節點調整過後的機率分配。本文根據上述之方法類推，導出求算聯合機率的一般式。

**定理** 多期遠期利率聯合機率分配

給定  $T_1$  到  $T_2$  期間的遠期利率在欲求算之  $t$  時間點，到達  $i_1$  節點； $T_2$  到  $T_3$  期間的遠期利率在欲求算之  $t$  時間點，到達  $i_2$  節點；同理，假設在  $t$  時間的各個遠期利率樹，皆分割為  $m-1$  期，則有  $m$  個節點， $i_j=1,2,\dots,m$ ；其中  $j=1,2,\dots,n$ ，即共有  $n$  個遠期利率樹， $T_1$  到  $T_2$ 、 $T_2$  到  $T_3$ 、...、 $T_n$  到  $T_{n+1}$  期遠期利率之條件機率為

$$V_{Cov}^{i_1 i_2 i_3 \dots i_n} = \begin{cases} \frac{[\Pi_0^{i_1 i_2 i_3 \dots i_{n-1}} + Cov_{n,n+1}(\Pi_1 - \Pi_0)]e_{i_n}}{(V_{Cov,n}^{i_1 i_2 i_3 \dots i_{n-1}})' e_{i_n}}, & \text{if } Cov_{n,n+1} > 0 \\ \frac{[\Pi_0^{i_1 i_2 i_3 \dots i_{n-1}} - Cov_{n,n+1}(\Pi_1 - \Pi_0)]e_{i_n}}{(V_{Cov,n}^{i_1 i_2 i_3 \dots i_{n-1}})' e_{i_n}}, & \text{if } Cov_{n,n+1} < 0 \end{cases}$$

其中

$$\Pi_0^{i_1 i_2 i_3 \dots i_{n-1}} = V_{Cov, n-1}^{i_1 i_2 i_3 \dots i_{n-1}} \left( V_{Cov, n-2}^{i_1 i_2 i_3 \dots i_{n-1}} \right)' \quad \forall i_j = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n-1$$

為 $T_1$ 到 $T_2$ 、 $T_2$ 到 $T_3$ 、...、 $T_{n-1}$ 到 $T_n$ 期遠期利率和 $T_n$ 到 $T_{n+1}$ 期遠期利率之間為獨立關係的聯合機率矩陣

$e_i = [0 \dots 0 \ 1 \ 0 \dots 0]$  為第 $i$ 個值為1；其他為0之 $m \times 1$ 行向量

$\Pi_1, \Pi_0$  和  $\Pi_{-1}$  分別表示不同相關係數( $\rho = 1, \rho = 0$ 和 $\rho = -1$ )的機率矩陣

下一節本文將針對  $Cov(\Pi_1 - \Pi_0)$  與  $Cov(\Pi_{-1} - \Pi_0)$  的調整矩陣建構做更深入的介紹。接下來先解說此定理：

### 解說

本文用數學歸納法說明，當  $n=1$ ：

假設  $[p_1^1 \ p_2^1 \ \dots \ p_m^1]$  為  $f(T_1; T_1, T_2)$  之邊際機率的  $1 \times m$  列向量，且  $[p_1^2 \ p_2^2 \ \dots \ p_m^2]$  為

$f(T_1; T_2, T_3)$  之邊際機率的  $1 \times m$  列向量，則令  $\Pi_0 = \begin{bmatrix} p_1^2 \\ p_2^2 \\ \vdots \\ p_m^2 \end{bmatrix} [p_1^1 \ p_2^1 \ \dots \ p_m^1]$ ，為假設  $f$

$(T_1; T_1, T_2)$  與  $f(T_1; T_2, T_3)$  獨立的  $m \times m$  機率矩陣。如果  $Cov_{1,2} > 0$ ，則經調整矩陣修正

$\Pi_0 + Cov_{1,2}(\Pi_1 - \Pi_0)$  為  $f(T_1; T_1, T_2)$  與  $f(T_1; T_2, T_3)$  存在正相關性之聯合機率矩陣，而

$[\Pi_0 + Cov_{1,2}(\Pi_1 - \Pi_0)] e_{i_1}$  就是  $T_2$  到  $T_3$  期間的遠期利率在  $T_1$  時間點，同時

$(T_1; T_1, T_2)$  到達  $i_1$  節點的機率，則轉換成條件機率

$$V_{Cov}^i = [p_{1,1}^2 \ p_{2,1}^2 \ \dots \ p_{m,1}^2]' = [\Pi_{0,1} + Cov_{1,2}(\Pi_1 - \Pi_0)] e_{i_1} / [p_1^1 \ p_2^1 \ \dots \ p_m^1] e_{i_1} ;$$

同理，如果  $Cov_{1,2} < 0$ ，則經調整矩陣修正

$$V_{Cov}^i = [p_{1,1}^2 \ p_{2,1}^2 \ \dots \ p_{m,1}^2]' = [\Pi_{0,1} - Cov_{1,2}(\Pi_{-1} - \Pi_0)] e_{i_1} / [p_1^1 \ p_2^1 \ \dots \ p_m^1] e_{i_1}$$

為  $f(T_1; T_1, T_2)$  與  $f(T_1; T_2, T_3)$  存在負相關性之條件機率。

故當  $n=2$ ，在已知條件  $f(T_1; T_1, T_2)$  遠期利率到達第  $i_1$  個節點， $f(T_1; T_3, T_4)$  之條

件機率向量為

$$V_{Cov,1}^{i_1} = \begin{cases} \left[ \Pi_{0,1} + Cov_{1,3}(\Pi_1 - \Pi_0) \right] e_{i_1} / \left[ p_1^1 \ p_2^1 \ \dots \ p_m^1 \right] e_{i_1}, & \text{if } Cov_{1,3} > 0 \\ \left[ \Pi_{0,1} - Cov_{1,3}(\Pi_{-1} - \Pi_0) \right] e_{i_1} / \left[ p_1^1 \ p_2^1 \ \dots \ p_m^1 \right] e_{i_1}, & \text{if } Cov_{1,3} < 0 \end{cases}$$

其中  $i_1 = 1, 2, \dots, m$ ,  $\Pi_{0,1} = \begin{bmatrix} p_1^3 \\ p_2^3 \\ \vdots \\ p_m^3 \end{bmatrix} \left[ p_1^1 \ p_2^1 \ \dots \ p_m^1 \right]$ 。接著考慮  $f(T_1; T_3, T_4)$  在  $f(T_1; T_1, T_2)$

遠期利率到達  $i_1$  節點時與  $f(T_1; T_2, T_3)$  在  $f(T_1; T_1, T_2)$  遠期利率到達  $i_1$  節點的條件機  
率為

$$V_{Cov}^{i_1 i_2} = \begin{cases} \left[ \Pi_0^{i_1} + Cov_{2,3}(\Pi_1 - \Pi_0) \right] e_{i_2} / \left( V_{Cov,2}^{i_1} \right)' e_{i_2}, & \text{if } Cov_{1,2} > 0 \\ \left[ \Pi_0^{i_1} - Cov_{2,3}(\Pi_{-1} - \Pi_0) \right] e_{i_2} / \left( V_{Cov,2}^{i_1} \right)' e_{i_2}, & \text{if } Cov_{1,2} < 0 \end{cases}$$

$\Pi_0^{i_1} = V_{Cov,1}^{i_1} \left( V_{Cov}^{i_1} \right)'$ ，即當  $n=2$  時定理成立。

令  $n=k$  時定理成立，可建立  $T_1$  到  $T_2$ 、 $T_2$  到  $T_3$ 、...、 $T_k$  到  $T_{k+1}$  期遠期利率與  $T_{k+1}$   
到  $T_{k+2}$  期遠期利率獨立之機率矩陣：

先建立  $f(T_1; T_k, T_{k+1})$  與  $f(T_1; T_1, T_2)$  為獨立關係之聯合機率矩陣

$\Pi_0^{i_1 i_2 i_3 \dots i_{k-1}} = V_{Cov,k}^{i_1 i_2 i_3 \dots i_{k-1}} \left[ p_1^1 \ p_2^1 \ \dots \ p_m^1 \right]'$ ，如果  $Cov_{1,k} > 0$ ，則經調整矩陣修正

$V_{Cov,1}^{i_1 i_2 \dots i_k} = \left[ \Pi_0^{i_1 i_2 i_3 \dots i_{k-1}} + Cov_{1,k}(\Pi_1 - \Pi_0) \right] e_{i_k} / \left[ p_1^1 \ p_2^1 \ \dots \ p_m^1 \right] e_{i_k}$  為  $f(T_1; T_k, T_{k+1})$  與  $f$

$(T_1; T_1, T_2)$  存在正相關性之聯合機率矩陣；接著建立  $f(T_1; T_k, T_{k+1})$  與  $f(T_1; T_2, T_3)$

為獨立關係之聯合機率矩陣，把  $f(T_1; T_1, T_2)$  遠期利率到達第  $i_1$  個節點的條件下， $f$

$(T_1; T_k, T_{k+1})$  與  $f(T_1; T_2, T_3)$  的機率向量相乘  $\Pi_{0,1}^{i_1 i_2 i_3 \dots i_{k-1}} = V_{Cov,1}^{i_1 i_2 i_3 \dots i_k} \left( V_{Cov}^{i_1} \right)'$  得到獨立的聯

合機率分配，如果  $Cov_{2,k} > 0$ ，則經調整矩陣修正

$V_{Cov,2}^{i_1 i_2 \dots i_k} = \left[ \Pi_{0,1}^{i_1 i_2 i_3 \dots i_{k-1}} + Cov_{2,k}(\Pi_1 - \Pi_0) \right] e_{i_k} / \left( V_{Cov,1}^{i_1 i_2 \dots i_k} \right)' e_{i_k}$  為  $f(T_1; T_k, T_{k+1})$  與  $f(T_1; T_2, T_3)$

存在正相關性之聯合機率矩陣；依此類推，則  $n=k$  時， $f(T_1; T_1, T_2)$  遠期利率到

達第 $i_1$ 個節點， $f(T_1; T_2, T_3)$ 遠期利率到達第 $i_2$ 個節點，...， $f(T_1; T_k, T_{k+1})$ 遠期利率到達第 $i_k$ 個節點， $f(T_1; T_{k+1}, T_{k+2})$ 之機率向量為

$$V_{Cov}^{i_1 i_2 i_3 \dots i_k} = \begin{cases} [\Pi_{0, k-2}^{i_1 i_2 i_3 \dots i_{k-1}} + Cov_{k-1, k}(\Pi_1 - \Pi_0)] e_{i_k} / (V_{Cov}^{i_1 i_2 i_3 \dots i_k})' e_{i_k}, & \text{if } Cov_{k+1, k} > 0 \\ [\Pi_{0, k-2}^{i_1 i_2 i_3 \dots i_{k-1}} - Cov_{k-1, k}(\Pi_{-1} - \Pi_0)] e_{i_k} / (V_{Cov}^{i_1 i_2 i_3 \dots i_k})' e_{i_k}, & \text{if } Cov_{k+1, k} < 0 \end{cases}$$

$$\text{其中 } \Pi_{0, k-2}^{i_1 i_2 i_3 \dots i_{k-1}} = V_{Cov, k}^{i_1 i_2 i_3 \dots i_{k-1}} (V_{Cov, k-1}^i)' \quad \forall i_j = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, k-1$$

故由數學歸納法，對所有的  $n$ ，此定理成立。

## 第二節 聯合機率分配的限制式

根據上一節的結果，討論二項樹分割成  $m-1$  期的一般化狀況。將  $f(t; T_i, T_{i+1})$  從 0 時間展到  $t$  時間會有  $m$  個節點，並求算  $m$  個節點之機率；同時建立  $f(t; T_j, T_{j+1})$  從 0 時間展到  $t$  時間的  $m$  個節點與  $m$  個機率的二項樹，且  $i \neq j$ 。則根據定理所求算出的多期遠期利率聯合機率分配矩陣，應滿足以下幾個條件：1.  $f(t; T_i, T_{i+1})$  之邊際機率不變，故有  $m$  個限制式；2.  $f(t; T_j, T_{j+1})$  之邊際機率不變，同樣為  $m$  個限制式；3. ”調整矩陣”  $\rho(\Pi_1^l - \Pi_0^l)$  與  $\rho(\Pi_{-1}^l - \Pi_0^l)$  調整後的聯合機率矩陣，其共變異數要符合  $f(t; T_i, T_{i+1})$  與  $f(t; T_j, T_{j+1})$  實際求算的樣本共變異數值。總結以上，可知我們今天造出的  $m \times m$  聯合機率矩陣會有  $m^2$  個未知數，但是只有  $2m+1$  條限制式，因此，調整矩陣的建構會有無窮多組解。在此本文以 Hull-White (1994) 之  $3 \times 3$  矩陣為例，說明如何讓上述三個條件成立。

表 4.Hull-White (1994) 之  $3 \times 3$  聯合機率分配

		R <sub>1</sub> -move		
		Lower	Middle	Upper
R <sub>2</sub> -move	Upper	$p_d q_u - \varepsilon$	$p_m q_u - 4\varepsilon$	$p_u q_u + 5\varepsilon$
	Middle	$p_d q_m - 4\varepsilon$	$p_m q_m + 8\varepsilon$	$p_u q_m - 4\varepsilon$
	Lower	$p_d q_d + 5\varepsilon$	$p_m q_d - 4\varepsilon$	$p_u q_d - \varepsilon$

由表4，舉 $R_1$ 的Lower機率來看， $p_d q_u - \varepsilon + p_d q_m - 4\varepsilon + p_d q_d + 5\varepsilon = p_d \times (q_u + q_m + q_d) = p_d$ ，滿足第一個條件；同理 $R_2$ 的Lower、Middle、Upper機率也滿足第二個條件。接著本文將討論 $\varepsilon$ 求算方法，即讓矩陣滿足第三個條件。

為了方便理解，先將兩個不同期間的遠期利率假設為兩變數 $X$ 、 $Y$ ，且服從對數常態，如此假設是為了滿足LIBOR市場模型的基本條件。假設兩變數獨立的聯合機率矩陣為

表 5. 兩變數  $X$ 、 $Y$  獨立的聯合機率分配

		Y-move		
		$Yd_2^2$	$Yd_2u_2$	$Yu_2^2$
X-move	$Xu_1^2$	$\pi_{ud}$	$\pi_{um}$	$\pi_{uu}$
	$Xd_1u_1$	$\pi_{md}$	$\pi_{mm}$	$\pi_{mu}$
	$Xd_2^2$	$\pi_{dd}$	$\pi_{dm}$	$\pi_{du}$

其中 $u_1$ 、 $d_1$ 為 $X$ 的二項樹上漲下跌幅度， $u_2$ 、 $d_2$ 為 $Y$ 的二項樹上漲下跌幅度。假設兩變數存在共變異關係的聯合機率矩陣為

表 6. 兩變數  $X$ 、 $Y$  有相關性的聯合機率分配

		Y-move		
		$Yd_2^2$	$Yd_2u_2$	$Yu_2^2$
X-move	$Xu_1^2$	$\tilde{\pi}_{ud}$	$\tilde{\pi}_{um}$	$\tilde{\pi}_{uu}$
	$Xd_1u_1$	$\tilde{\pi}_{md}$	$\tilde{\pi}_{mm}$	$\tilde{\pi}_{mu}$
	$Xd_2^2$	$\tilde{\pi}_{dd}$	$\tilde{\pi}_{dm}$	$\tilde{\pi}_{du}$

則根據已知的共變異數值，要等於下列推導之樣本共變異數

$$\begin{aligned}
Cov(d \ln X, d \ln Y) &= E(d \ln X d \ln Y) - E(d \ln X)E(d \ln Y) \\
&= \ln u_1^2 (\tilde{\pi}_{ud} \ln d_2^2 + \tilde{\pi}_{um} \ln d_2 u_2 + \tilde{\pi}_{uu} \ln u_2^2) + \ln u_1 d_1 (\tilde{\pi}_{md} \ln d_2^2 + \tilde{\pi}_{mm} \ln d_2 u_2 + \tilde{\pi}_{mu} \ln u_2^2) \\
&\quad + d_1^2 (\tilde{\pi}_{dd} \ln d_2^2 + \tilde{\pi}_{dm} \ln d_2 u_2 + \tilde{\pi}_{du} \ln u_2^2) \\
&- \left[ \ln u_1^2 (\tilde{\pi}_{ud} + \tilde{\pi}_{um} + \tilde{\pi}_{uu}) + \ln u_1 d_1 (\tilde{\pi}_{md} + \tilde{\pi}_{mm} + \tilde{\pi}_{mu}) + \ln d_1^2 (\tilde{\pi}_{dd} + \tilde{\pi}_{dm} + \tilde{\pi}_{du}) \right] \\
&\quad \times \left[ \ln u_2^2 (\tilde{\pi}_{uu} + \tilde{\pi}_{mu} + \tilde{\pi}_{du}) + \ln u_2 d_2 (\tilde{\pi}_{um} + \tilde{\pi}_{mm} + \tilde{\pi}_{dm}) + \ln d_2^2 (\tilde{\pi}_{ud} + \tilde{\pi}_{md} + \tilde{\pi}_{dd}) \right] \\
&\left( \begin{array}{l} \because \tilde{\pi}_{id} + \tilde{\pi}_{im} + \tilde{\pi}_{iu} = \pi_{id} + \pi_{im} + \pi_{iu} \quad \forall i = u, m, d \\ \tilde{\pi}_{dj} + \tilde{\pi}_{mj} + \tilde{\pi}_{uj} = \pi_{dj} + \pi_{mj} + \pi_{uj} \quad \forall j = u, m, d \end{array} \right), \text{ 即邊際機率不變} \\
&= \ln u_1^2 \ln d_2^2 (\tilde{\pi}_{ud} - \pi_{ud}) + \ln u_1^2 \ln d_2 u_2 (\tilde{\pi}_{um} - \pi_{um}) + \ln u_1^2 \ln u_2^2 (\tilde{\pi}_{uu} - \pi_{uu}) + \\
&\quad \ln u_1 d_1 \ln d_2^2 (\tilde{\pi}_{md} - \pi_{md}) + \ln u_1 d_1 \ln d_2 u_2 (\tilde{\pi}_{mm} - \pi_{mm}) + \ln u_1 d_1 \ln u_2^2 (\tilde{\pi}_{mu} - \pi_{mu}) + \\
&\quad \ln d_1^2 \ln d_2^2 (\tilde{\pi}_{dd} - \pi_{dd}) + \ln d_1^2 \ln d_2 u_2 (\tilde{\pi}_{dm} - \pi_{dm}) + \ln d_1^2 \ln u_2^2 (\tilde{\pi}_{du} - \pi_{du})
\end{aligned}$$

根據 Hull-White (1994) 之 3×3 矩陣

(1) if  $Cov(d \ln X, d \ln Y) > 0$ ,

$$\begin{array}{lll}
\tilde{\pi}_{ud} - \pi_{ud} = -\varepsilon & \tilde{\pi}_{um} - \pi_{um} = -4\varepsilon & \tilde{\pi}_{uu} - \pi_{uu} = 5\varepsilon \\
\tilde{\pi}_{md} - \pi_{md} = -4\varepsilon & \tilde{\pi}_{mm} - \pi_{mm} = 8\varepsilon & \tilde{\pi}_{mu} - \pi_{mu} = -4\varepsilon \\
\tilde{\pi}_{dd} - \pi_{dd} = 5\varepsilon & \tilde{\pi}_{dm} - \pi_{dm} = -4\varepsilon & \tilde{\pi}_{du} - \pi_{du} = -\varepsilon
\end{array}$$

$\Rightarrow Cov(d \ln X, d \ln Y)$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon \left[ \ln u_1^2 (-\ln d_2^2 - 4 \ln d_2 u_2 + 5 \ln u_2^2) + \right. \\
&\quad \ln u_1 d_1 (-4 \ln d_2^2 + 8 \ln d_2 u_2 - 4 \ln u_2^2) + \\
&\quad \left. \ln d_1^2 (5 \ln d_2^2 - 4 \ln d_2 u_2 - \ln u_2^2) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{let } L_1 &= \ln u_1^2 (-\ln d_2^2 - 4 \ln d_2 u_2 + 5 \ln u_2^2) + \ln u_1 d_1 (-4 \ln d_2^2 + 8 \ln d_2 u_2 - 4 \ln u_2^2) + \\
&\quad \ln d_1^2 (5 \ln d_2^2 - 4 \ln d_2 u_2 - \ln u_2^2)
\end{aligned}$$

$$= \varepsilon \times L_1$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{Cov(d \ln X, d \ln Y)}{L_1}$$

(2) if  $Cov(d \ln X, d \ln Y) < 0$ ,

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}_{ud} - \pi_{ud} &= 5\varepsilon & \tilde{\pi}_{um} - \pi_{um} &= -4\varepsilon & \tilde{\pi}_{uu} - \pi_{uu} &= -\varepsilon \\
\tilde{\pi}_{md} - \pi_{md} &= -4\varepsilon & \tilde{\pi}_{mm} - \pi_{mm} &= 8\varepsilon & \tilde{\pi}_{mu} - \pi_{mu} &= -4\varepsilon \\
\tilde{\pi}_{dd} - \pi_{dd} &= -\varepsilon & \tilde{\pi}_{dm} - \pi_{dm} &= -4\varepsilon & \tilde{\pi}_{du} - \pi_{du} &= 5\varepsilon
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Cov}(d \ln X, d \ln Y)$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon \left[ \ln u_1^2 (5 \ln d_2^2 - 4 \ln d_2 u_2 - \ln u_2^2) + \right. \\
&\quad \ln u_1 d_1 (-4 \ln d_2^2 + 8 \ln d_2 u_2 - 4 \ln u_2^2) + \\
&\quad \left. \ln d_1^2 (-\ln d_2^2 - 4 \ln d_2 u_2 + 5 \ln u_2^2) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{let } L_2 &= \ln u_1^2 (5 \ln d_2^2 - 4 \ln d_2 u_2 - \ln u_2^2) + \ln u_1 d_1 (-4 \ln d_2^2 + 8 \ln d_2 u_2 - 4 \ln u_2^2) + \\
&\quad \ln d_1^2 (-\ln d_2^2 - 4 \ln d_2 u_2 + 5 \ln u_2^2)
\end{aligned}$$

$$= \varepsilon \times L_2$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{\text{Cov}(d \ln X, d \ln Y)}{L_2}$$

求得滿足個別的邊際機率與共變異數關係的調整矩陣。



## 第四章 實證分析

### 第一節 評價 Bond Option

我們將樹狀模型用來評價歐式債券選擇權，標的物是面值\$100的債券且每半年會發一次債息，票面利率為10%；選擇權到期日是半年後，履約價是100元。我們假設一開始各期的遠期利率皆是5%，且市場的波動度為20%之常數。使用Matlab軟體撰寫程式，表7是用二項樹方法得到的債券選擇權價值；而表8是用蒙地卡羅模擬法得到的結果。

表 7.用二項樹方法評價債券選擇權

n	選擇權價值	t(秒)
10	7.256405610765942	0.000257
100	7.256407987405482	0.000620
1000	7.256408225544007	0.003150

“n” 表示每半年分割的期數  
“t” 計算 Matlab 程式開始到結束的時間

表 8.用蒙地卡羅模擬法評價債券選擇權

m	MC	std	95% C.I.	t(秒)
100	7.2622	0.030202	(7.203,7.3214)	0.012615
1000	7.2556	0.011015	(7.234,7.2772)	0.073579
10000	7.2514	0.0035163	(7.2445,7.2583)	0.689756
100000	7.2568	0.0010955	(7.2546,7.2589)	6.939770
1000000	7.2564	0.00034602	(7.2557,7.257)	69.853408

“m” 用蒙地卡羅模擬法模擬債券選擇權價格的次數  
“MC” 用蒙地卡羅模擬法模擬 m 次的平均債券選擇權價格  
“std” 模擬 m 次的標準差  
“95% C.I.” 為 95%的信賴區間  
“t” 計算 Matlab 程式開始到結束的時間

由表 8 可以看出，蒙地卡羅模擬法求算出的債券選擇權價值會漸進收斂到 7.2564 與二項樹方法的結果一致。但是蒙地卡羅模擬法須模擬 1000000 次，且花費 69 秒才得到收斂的結果，計算時間遠大於二項樹法的 0.003 秒。而且本研究發現二項樹方法即使在分割期數很少的狀況下，依然很接近正確值。

為了檢視本研究之模型的可靠性，透過敏感度分析比較蒙地卡羅模擬法與二項樹法在任何情況下結果是否一致。統一以二項樹法分割 1000 期的結果，與蒙地卡羅模擬法做 10000 次試驗的結果做比較。表 9 說明初始的遠期利率由 0.05 到 0.055，每次變動 0.05% 對選擇權價值的影響。可以看出二項樹的評價結果恆落在蒙地卡羅模擬法 95% 的信賴區間以內，這部分我們直接可以和圖 2 說明之。除此之外，債券選擇權價值會隨遠期利率上升而下降，符合選擇權價值與利率之關係。

表 9. 敏感度分析：初始的遠期利率變動對選擇權價值的影響

r	tree	MC	std	95% C.I.
0.05	7.2564	7.2564	0.003439	(7.2497,7.2631)
0.0505	7.2303	7.2302	0.003471	(7.2234,7.2371)
0.051	7.2041	7.2041	0.003503	(7.1973,7.211)
0.0515	7.178	7.178	0.003535	(7.1711,7.185)
0.052	7.1519	7.152	0.003566	(7.145,7.159)
0.0525	7.1259	7.1259	0.003598	(7.1189,7.133)
0.053	7.0998	7.0999	0.003629	(7.0928,7.107)
0.0535	7.0738	7.0739	0.003661	(7.0667,7.0811)
0.054	7.0478	7.0479	0.003692	(7.0407,7.0552)
0.0545	7.0219	7.022	0.003724	(7.0147,7.0293)
0.055	6.9959	6.9961	0.003755	(6.9887,7.0034)

“r” 初始的遠期利率

“tree” 二項樹方法分割成 1000 期的債券選擇權評價結果

“MC” 用蒙地卡羅模擬法模擬 10000 次的平均債券選擇權價格

“std” 用蒙地卡羅模擬法模擬 10000 次的標準差

“95% C.I.” 為 95% 的信賴區間

波動度設為 10%

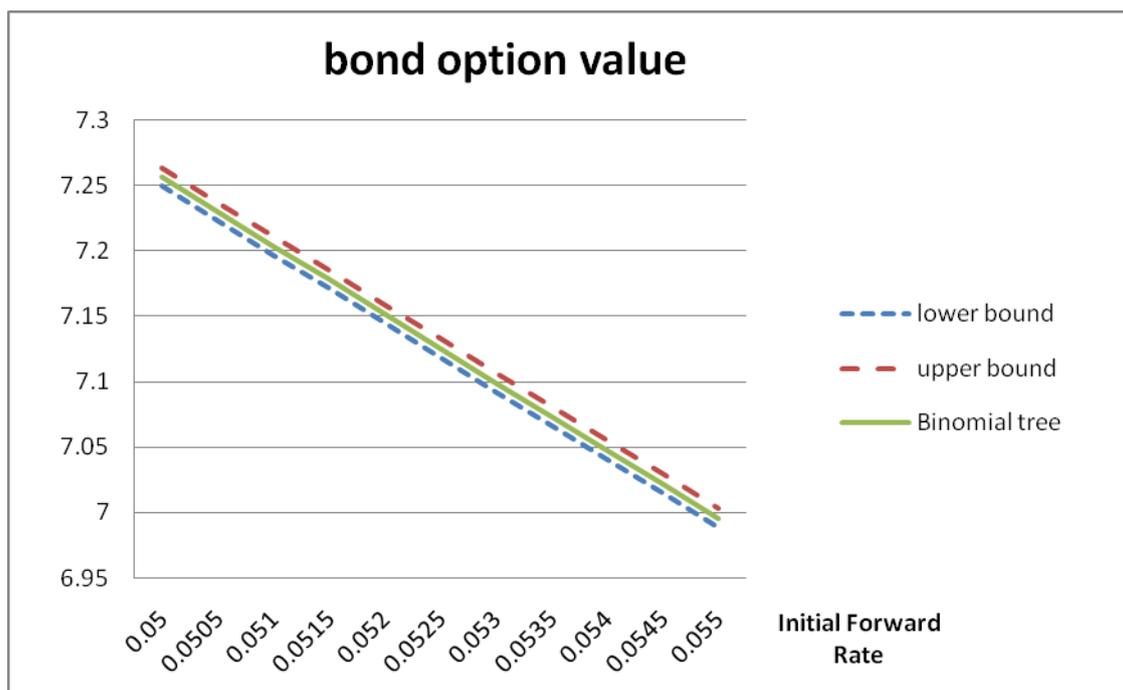


圖 7. 初始的遠期利率變動對選擇權價值的影響

x 軸為初始的遠期利率，y 軸為選擇權價值。lower bound 和 upper bound 為蒙地卡羅模擬 95%信賴區間的上下界

表 10 則檢視波動度由 10%到 29%，且假設每一期的波動度期間結構為固定，每次變動 1%對兩種方法評價結果的影響。二項樹的評價結果依然落在蒙地卡羅模擬法 95%的信賴區間以內，這部分本文直接以圖 3 說明之。除此之外，研究發現債券選擇權價值會隨波動度上升而下降，這部分不符合一般選擇權價值與波動度之關係。主要是因為 LIBOR 市場模型每一期的期望值會受市場波動度的影響，此部分可以回顧方程式(5)由 Poon 與 Stapleton 推導出的結果，所以當遠期利率之波動度上升時，未來的遠期利率也跟著上升，而這部分的影響大於波動度上升所引起的選擇權價值上升，因此導致債券選擇權的價值下降。由圖 3，與蒙地卡羅模擬法 95%的信賴區間比較，可看出波動度會造成信賴區間變大，使得評價準確性降低，要提高準確性就必須增加模擬次數，但由先前表 8 的結果可知，增加模擬次數會大幅增加評價所需的時間，降低評價的效率。由此可見二項樹法的優點。

表 10. 敏感度分析：初始的波動度變動對選擇權價值的影響

volatility	tree	MC	std	95% C.I.
0.1	7.2573	7.2555	0.001719	(7.2522,7.2589)
0.11	7.2572	7.2554	0.001891	(7.2516,7.2591)
0.12	7.2572	7.2552	0.002064	(7.2511,7.2592)
0.13	7.2571	7.255	0.002237	(7.2506,7.2593)
0.14	7.257	7.2548	0.002409	(7.25,7.2595)
0.15	7.2569	7.2546	0.002582	(7.2495,7.2596)
0.16	7.2568	7.2544	0.002756	(7.249,7.2598)
0.17	7.2567	7.2542	0.002929	(7.2484,7.2599)
0.18	7.2566	7.254	0.003103	(7.2479,7.2601)
0.19	7.2565	7.2538	0.003277	(7.2474,7.2602)
0.2	7.2564	7.2536	0.003451	(7.2469,7.2604)
0.21	7.2563	7.2534	0.003625	(7.2463,7.2605)
0.22	7.2562	7.2533	0.0038	(7.2458,7.2607)
0.23	7.256	7.2531	0.003974	(7.2453,7.2609)
0.24	7.2559	7.2529	0.004149	(7.2448,7.261)
0.25	7.2558	7.2527	0.004325	(7.2442,7.2612)
0.26	7.2556	7.2525	0.0045	(7.2437,7.2614)
0.27	7.2555	7.2524	0.004676	(7.2432,7.2615)
0.28	7.2553	7.2522	0.004853	(7.2427,7.2617)
0.29	7.2551	7.252	0.005029	(7.2422,7.2619)

“r” 初始的遠期利率

“tree” 二項樹方法分割成 1000 期的債券選擇權評價結果

“MC” 用蒙地卡羅模擬法模擬 10000 次的平均債券選擇權價格

“std” 用蒙地卡羅模擬法模擬 10000 次的標準差

“95% C.I.” 為 95%的信賴區間

初始的遠期利率設為 5%

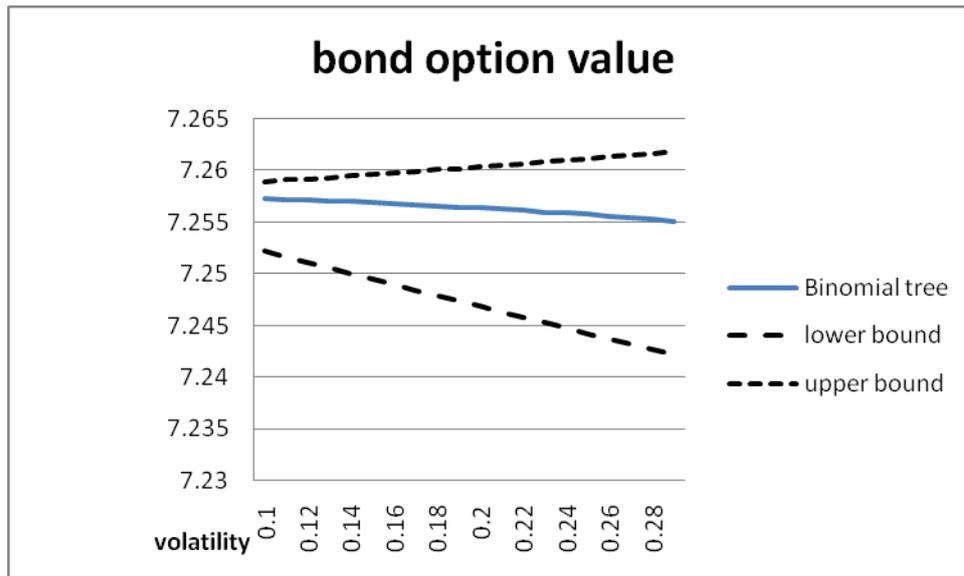


圖 8. 波動度變動對選擇權價值的影響

x 軸為波動度，y 軸為債券選擇權價值。lower bound 和 upper bound 為蒙地卡羅模擬 95%信賴區間的上下界

接著本研究同樣評價歐式債券選擇權，但是標的物為面值\$100 的債券且每年發一次債息，票面利率為 5%，債券到期日為第三年；選擇權到期日為一年，履約價是 100 元。同樣假設一開始各期的遠期利率皆是 5%，表 11 為假設市場的波動度期間結構：

表 11. 0~3 年之波動度期間結構

期間(年)	0~1	1~2	2~3
波動度	0.27	0.283333	0.323333
$\sqrt{Cov(2\sim 3, t\sim t+1)}$	0.295465734	0.302673	--
$\sqrt{Cov(1\sim 2, t\sim t+1)}$	0.276586334	--	--

則同樣的將二項樹方法之結果與蒙地卡羅法做比較，驗證評價更長期的債券選擇權，本研究之模型的可靠性。

以二項樹法分割 40 期的結果，與蒙地卡羅模擬法做 10000 次試驗的結果做比較。表 12 說明初始的遠期利率由 0.045 到 0.0545，每次變動 0.05%對選擇權價

值的影響。可以看出二項樹的評價結果恆落在蒙地卡羅模擬法 95%的信賴區間以內，這部分直接以圖 4 說明之。除此之外，債券選擇權價值會隨遠期利率上升而下降，符合選擇權價值與利率之關係。

表 12. 敏感度分析：初始的遠期利率變動對選擇權價值的影響

r	tree	MC	std	95% C.I.
0.045	1.086	1.0877	0.011064	(1.066,1.1094)
0.0455	1.0276	1.0298	0.010852	(1.0085,1.051)
0.046	0.97109	0.97389	0.010634	(0.95304,0.99473)
0.0465	0.9181	0.92016	0.010409	(0.89976,0.94056)
0.047	0.86714	0.86858	0.010177	(0.84863,0.88852)
0.0475	0.81672	0.81901	0.009941	(0.79952,0.83849)
0.048	0.7684	0.77147	0.009701	(0.75246,0.79049)
0.0485	0.72428	0.72607	0.009456	(0.70753,0.7446)
0.049	0.68145	0.68256	0.00921	(0.66451,0.70061)
0.0495	0.6397	0.64104	0.008962	(0.62348,0.6586)
0.05	0.59935	0.60136	0.008713	(0.58428,0.61843)
0.0505	0.56216	0.56354	0.008463	(0.54695,0.58013)
0.051	0.52741	0.52763	0.008214	(0.51153,0.54373)
0.0515	0.49394	0.49359	0.007964	(0.47798,0.5092)
0.052	0.46101	0.46135	0.007716	(0.44623,0.47648)
0.0525	0.42966	0.43085	0.007469	(0.41621,0.44549)
0.053	0.4024	0.40209	0.007224	(0.38793,0.41624)
0.0535	0.37575	0.37483	0.006981	(0.36115,0.38851)
0.054	0.34986	0.34903	0.006743	(0.33581,0.36224)

“r” 初始的遠期利率

“tree” 二項樹方法分割成 40 期的債券選擇權評價結果

“MC” 用蒙地卡羅模擬法模擬 10000 次的平均債券選擇權價格

“std” 用蒙地卡羅模擬法模擬 10000 次的標準差

“95% C.I.” 為 95%的信賴區間

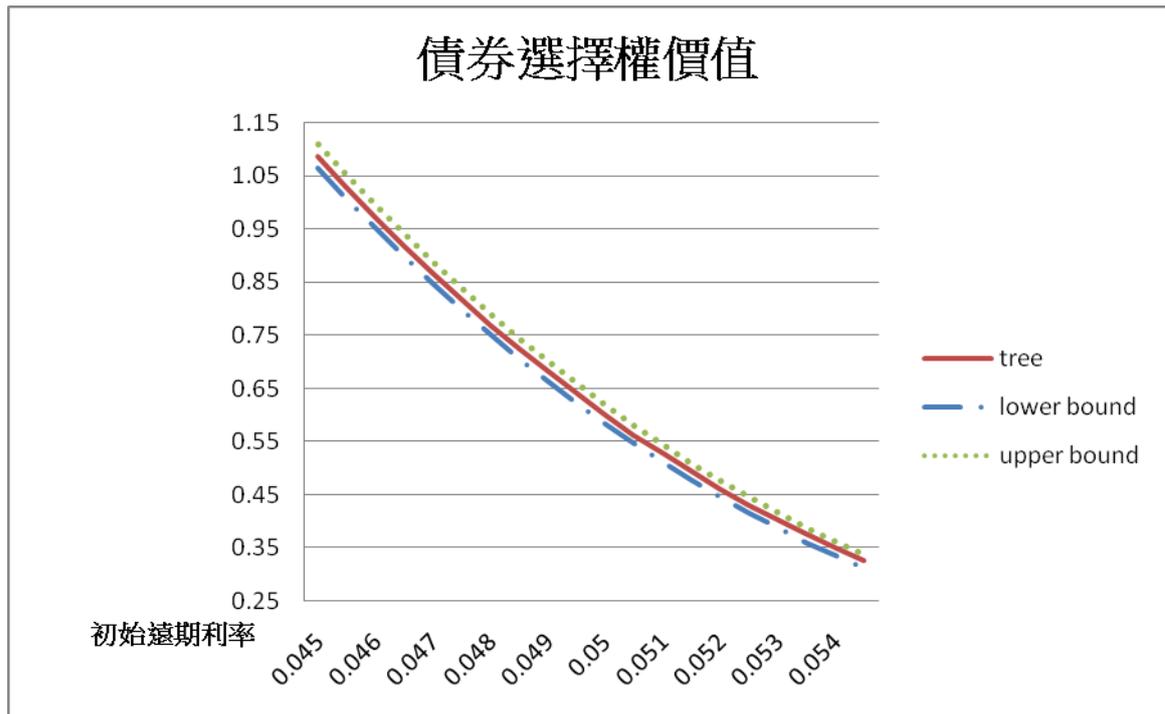


圖 9. 初始的遠期利率變動對選擇權價值的影響

x 軸為初始的遠期利率，y 軸為選擇權價值。lower bound 和 upper bound 為蒙地卡羅模擬 95%信賴區間的上下界

表 13. 敏感度分析：相關係數對選擇價值的影響

r	Tree ( $\rho < 1$ )	Tree ( $\rho = 1$ )
0.045	1.0896	1.086
0.0455	1.0312	1.0276
0.046	0.97455	0.97109
0.0465	0.92143	0.9181
0.047	0.87043	0.86714
0.0475	0.82006	0.81672
0.048	0.77167	0.7684
0.0485	0.72725	0.72428
0.049	0.68448	0.68145
0.0495	0.64266	0.6397

“r” 初始的遠期利率

“tree” 二項樹方法分割成 40 期的債券選擇權評價結果

“MC” 用蒙地卡羅模擬法模擬 10000 次的平均債券選擇權價格

“std” 用蒙地卡羅模擬法模擬 10000 次的標準差

“95% C.I.” 為 95%的信賴區間

表 13 主要比較相關係數與選擇權價值的關係，研究結果顯示，相關係數小於一的選擇權價值恆會大於相關係數等於一。其原因和債券選擇權與波動度的理由一樣，可以參見方程式(5)由 Poon 與 Stapleton 推導出的結果，遠期利率回隨相關係數增加而增加。因此相關係數較大則遠期利率較高，這使得債券價格下降，選擇權價值也跟著下降。



## 第五章 結論

本研究提供了 LIBOR 利率模型樹狀模型更完備的評價方法，使原本只能評價單期的遠期利率樹，可以根據利率衍生性商品的形式建構各種遠期利率樹。因此，能夠評價更多元之利率衍生性商品。

在實證分析部分，本研究將所建構出的二項樹模型與實務上常應用的蒙地卡羅模擬法做比較，驗證二項樹模型在評價的準確性與效率性都優於蒙地卡羅模擬法。蒙地卡羅模擬法求算出的債券選擇權價值會漸進收斂到 7.2564 與二項樹方法的結果一致。但是蒙地卡羅模擬法須模擬 1000000 次，且花費 69 秒才得到收斂的結果，計算時間遠大於二項樹法的 0.003 秒。而且研究發現二項樹方法即使在分割期數很少的狀況下，依然很接近正確值。即使評價更長期的債券選擇權，也能確保二項樹方法的結果會落在蒙地卡羅模擬法的 95%信賴區間裡面。

由於二項樹方法除了可以提供準確的評價結果，還可用來評價美式的衍生性商品。唯獨必須先克服架構分割多期的調整矩陣，如果能夠建構出調整矩陣之一般式，則未來必定可以廣泛應用在各種利率商品之評價上。

## 參考文獻

- (1) Brace, A., D. Gatarek, and M. Musiela, 1997, *The Market Model of Interest Rate Dynamics*, *Mathematical Finance*, 7, no. 2, 127-155
- (2) London, J., *Modeling Derivatives in C++*, Wiley Finance, 2004.
- (3) Hull, J. 2006. *Options, Futures and Other Derivative Securities* (6th ed.). Pearson.
- (4) Ho, T.S., R.C. Stapleton, and M.G. Subrahmanyam, 1995, *Multivariate Binomial Approximations for Asset Prices with Non-Stationary Variance and Covariance Characteristics*, *Review of Financial Studies*, 8, 1125-1152.
- (5) Hull, J. and A. White, 1994, *Numerical Procedures for Implementing Term Structure Model II : Two-Factor Models*, *Journal of Derivatives*, 2, 7-16
- (6) Ho, C.J., “Using the LIBOR Market Model to Price the Interest Rate Derivatives: A Recombining Binomial Tree Methodology”, 2008
- (7) Poon, S.H. and R.C. Stapleton, 2005, *Asset Pricing in Discrete Time A Complete Markets Approach*, Oxford.
- (8) Steven E. Shreve, 2004, *Stochastic Calculus for Finance II: continuous-time models*
- (9) Sandra Derrick, Daniel J. Stapleton and Richard C. Stapleton, 2005, *The Libor Market Model: A Recombining Binomial Tree Methodology*