國 立 交 通 大 學

財 務 金 融 研 究 所

碩 士 論 文

評價離散股利股票障礙選擇權

Pricing Barrier Option on Stocks with Discrete Dividend

研 究 生： 鄭凱允

指導教授： 王克陸 博士

戴天時 博士

中 華 民 國 九 十 八 年 六 月

評價離散股利股票障礙選擇權

學生：鄭凱允　　　　　　　　　指導教授：王克陸 博士

戴天時 博士

國立交通大學財務金融研究所

中華民國九十八年六月

摘要

本文嘗試延伸障礙選擇權的評價公式，考慮在標的物股票支付離散股息的前提下，推導障礙選擇權的近似公式解。我使用泰勒展開式，使用連續隨機股利率來近似離散股息，配息完的股價的隨機過程，可用對數常態分配表示，並以上方出局障礙選擇權為例，求取近似公式解，並且依照本文方法可延伸評價其他型態障礙選擇權。

Pricing Barrier Option on Stocks with Discrete Dividend

Student：Kai-Yun Cheng Advisor：Dr. Keh-Luh Wang

Dr. Tian-Shyr Dai

Graduate Institute of Finance

National Chiao Tung University

June 2009

ABSTRACT

A new method is described to price barrier options on stock with discrete dividend. We use continue random dividend yield to approximate the first-order Taylor expansion of single discrete dividend. This thesis focuses on the up-out option and the extension to other barrier options like down-out is straight forward.

KEYWORDS: Barrier Option, Taylor Expansion, Up-out Option, Down-out Option.

誌　謝

本篇論文得以順利完成，誠摯地感謝指導教授 戴天時及 王克陸博士悉心指導，無論是研究方向的指點、研究方法的釐定甚至是研究結論的解讀，老師皆不厭其煩的給予提點指正，老師淵博的學識讓我在研究所的生涯中獲益良多。另外，口試期間承蒙 呂育道博士及 王之彥博士及 林余昭博士細心審閱並撥冗蒞臨指導，對於論文不吝諸多寶貴的建議與見解，使本篇論文得以更臻完善。

在碩士班的日子，除了要感謝恩師 戴天時及 王克陸博士不吝在學業上及工作上給予建議，也要感謝所有交大財金所的老師們及 96 級的同學們所給予的教導與協助。感謝博宇、弘杰、薇婷、嘉紋耐心幫我紀錄及提點論文方向；感謝不吝分享諸多 Matlab 寶貴技巧的大師品杉；感謝彥霖、秋香、昭華、經銓及育嬋用心舉辦謝師宴及各式的 Party，帶給我滿滿的回憶；感謝王釧茹學姊提供諸多寶貴的意見與資源。這些日子以來，非常感謝你們的陪伴，給予我更多的學習機會與成長空間，也讓我的論文得以順利完成。

最後，衷心感謝我的家人，感謝父母對我的養育與栽培，因為有你們的支持與包容，使我能無後顧之憂完成碩士學業，因為有你們的鼓勵，使得我更加珍惜這得來不易的一切。最後，再次感謝所有給予過我幫助的師長與同學，以及我最摯愛的家人，謝謝你們！

目錄

表目錄

圖目錄

第一章　緒論

第一節　研究動機與背景

障礙選擇權是早期推出的新奇選擇權之一，至今依舊受到市場熱烈歡迎。所謂障礙選擇權是指契約中投資者的報酬受到標的資產上方(下方)障礙價格的影響；若在選擇權存續期間屆滿，標的物價格觸碰障礙價格，則選擇權可能立刻失效或生效，因此障礙選擇權屬於路徑相依選擇權（Path-dependent Option）的一種。

Merton (1973)是第一位訂價障礙選擇權的學者，而後，障礙選擇權訂價可分為兩種方法，其一主要由Wilmott et al(1993)提出微分方程方法，此方法較不為廣泛使用；第二種為本文所使用的期望值方法，由Rubinstein and Reiner(1991) and Rich(1994)提出詳細的証明，定義標的物資產價格在風險中立下的機率分配，使用反射定理(Harrison (1985))求得期初障礙選擇權價格，此方法雖較為複雜，但能求得較精確的封閉解，而障礙選擇權公式推導請見本文第二章第三節。

Merton (1973)延伸Black 以及Scholes (1973)標準股票選擇權訂價公式，套入標的物股價的固定股利率，因此，可以使用Merton (1973)方法計算標的物需要處理連續股利率的障礙選擇權訂價，但是，真實事件中幾乎都分發離散型股利，過去並無精確定價離散型股利障礙選擇權公式，故本文研究之。

第二節　研究目的

我們推導障礙選擇權訂價公式，使用連續隨機股利率近似離散型股利，故股價過程可用對數常態過程表示，以利公式推導。本篇論文主要推導上方出局障礙選擇權公式，並且可以依據本文證明步驟延伸推導其他型態的障礙選擇權公式

第三節　研究架構

本文各章節內容說明如下，首先第一章為緒論，說明研究背景與動機、研究目的。第二章進行文獻探討，回顧分發離散股利股價隨機過程以及基本障礙選擇權公式。第三章為研究方法為數學模型架構。第四章為模型數值分析結果與財務議題探討。第五章為結論以及後續延伸方向。

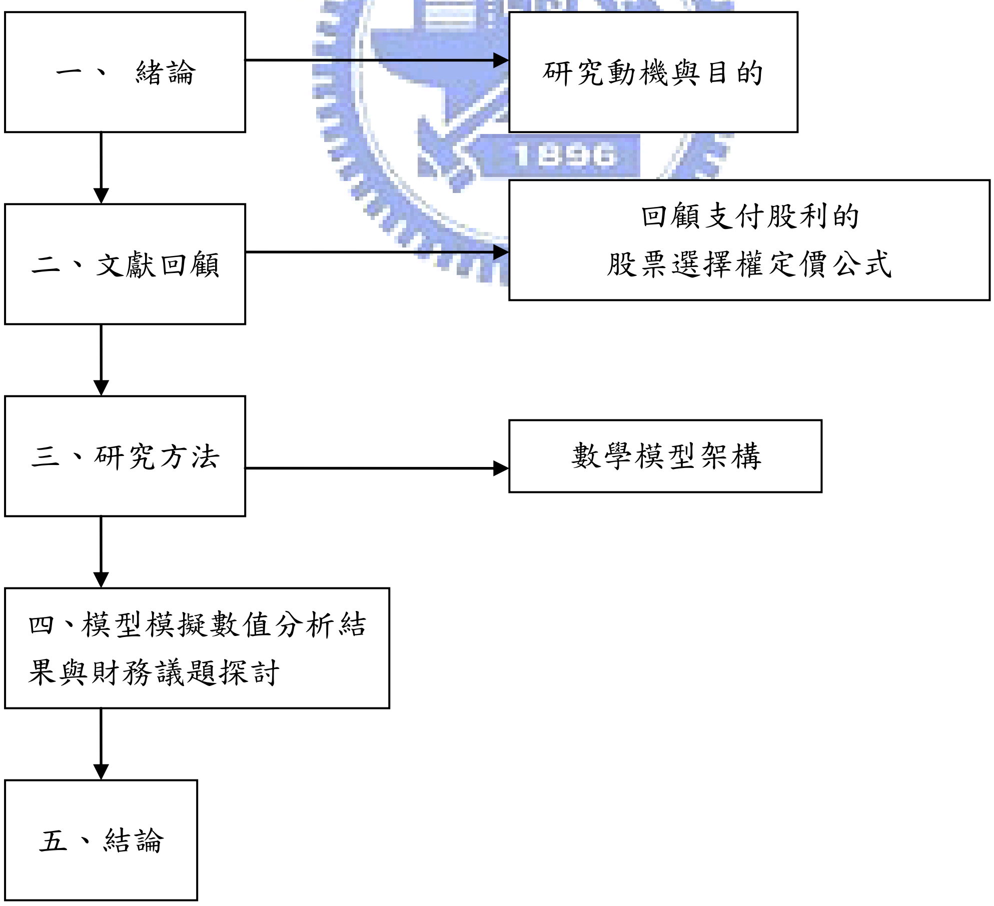

圖 1.1　研究架構圖

第二章 文獻回顧

本文評價分發離散股利股票障礙選擇權為主。第一節定義股價隨機過程，並簡略說明過去三種模擬分發離散股利之隨機過程。第二節介紹 Dai and Lyuu(2007)提出的離散股利股價精確近似公式。第三節則介紹基本障礙選擇權模型和評價公式。

第一節 介紹三種離散股利股價之過程

探討關於分發離散股利之股價隨機過程的議題已經相當多年， Black 以及 Scholes (1973)假設標的物股價服從對數常態分配，推導無股利之股票選擇權訂價模型，開創了未來對選擇權訂價的基本公式。Merton (1973)延伸上述模型，發展出固定股利率之股票選擇權訂價模型，他定義股價依照無風險利率扣除股利率成長，開啟後面學者討論股利的大門，而大部分的學者假定股利為連續發放，但真實世界中股利都是離散發放，這造成相當大的誤差。有許多文獻探討離散股利處理，Frishling(2002)將這些方法分成下列三類：

模型一： Roll(1977)提出將期初股價扣除未來已知股利以無風險利率折現後的現值是為新的期初股價，而選擇權價格可由算出新的期初股價代入 Black-Scholes 公式中期初股價的部份。

模型二： Musiela 以及 Rutkowski(1997)引用 Heath 以及 Jarrow(1988)的論文，提出將到期日的執行價加上除息日的股利以無風險利率複利至到期日的價格視為新的執行價，而選擇權價格可由算出新的到期日執行價代入 Black-Scholes 公式中執行價的部份。

模型三： 此模型在除息日將股價扣除股利，除息前後隨機項都服從對數常態分配，所以當選擇權股價歷經 K 次除息，則需要計算 K+1 段股價隨機過程。

根據 Dai and Lyuu (2007)結果看出，上述三種模型，代入相同的變數，算

出的選擇權價格皆不相同，其中，以模型三所算出價格最為正確，但無法求得封閉解，而代入相同波動度，模型一因為期初股價低於模型三，所以模型一股價即時波動度小於模型三，無法精確算出選擇權價格，相反的，模型二到期日股價大於模型三，故股價即時波動度大於模型三，一樣偏離精確價格，故 Dai and Lyuu (2007)建議用連續隨機股利近似離散股利，推導出股價隨機過程更易於評價公式推導，描述如下：

第二節　模型四：以支付隨機連續股利率的股票價格過程近似支付離散股利的價格過程

模型三假設風險中立下股價服從對數常態分配：

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = r\,dt + \sigma dB(t), \tag{2.2.1}$$

其中 S(t)為 t 時間點時股價， r 為無風險利率， σ 為股價波動度，W(t)為在風險中立下的標準布朗運動。因此 S(t)可得：

$$S(t) = S(s)e^{(r-0.5\sigma^2)(t-s)+\sigma(W(t)-W(s))} \tag{2.2.2}$$

模型三假設在 t_1 時間點發放 c_1 股利，則單期股利股票在到期日 T 時股價可由(2.2.2)下列所示：

$$S(T) = [S(0)e^{\mu t_1+\sigma(W(t_1)-W(0))} - c_1]e^{\mu(T-t_1)+\sigma(W(T)-W(t_1))} \tag{2.2.3}$$

其中 $\mu \equiv r - 0.5\sigma^2$ 。模型四假設離散型股利 c_1 可以以連續隨機股利率 q_1 表示，使其在 t_1 時間的股價機率分配如下：

$$S(t_1) = S(0)e^{\mu t_1+\sigma(W(t_1)-W(0))} - c_1 \equiv S(0)e^{(\mu-q_1)t_1+\sigma(W(t_1)-W(0))} \tag{2.2.4}$$

根據(2.2.4)移項定義出 q_1 公式如下：

$$\mathrm{S}(0)\mathrm{e}^{\mu \mathrm{t}_1+\sigma(W(\mathrm{t}_1)\text{-}\mathrm{W}(0))}(1-e^{-q_1 t_1})=c_1$$

$$\Rightarrow\ 1-e^{-q_1 t_1}=\frac{c_1 e^{-\mu t_1}}{S(0)}e^{-\sigma(W(\mathrm{t}_1)\text{-}\mathrm{W}(0))} \tag{2.2.5}$$

因為q_1通常相當小，故(2.2.5)左項以及右項共同取一次泰勒展開式，左項趨近$q_1 t_1$，右項趨近$k_1(1\text{-}\sigma(W(t_1)\text{-}W(0)))$，其中$k_1=\dfrac{c_1 e^{-\mu t_1}}{S(0)}$。所以(2.2.5)可以求得$q_1$趨近$q_1\approx\dfrac{k_1(1-\sigma(W(\mathrm{t}_1)\text{-}W(0)))}{t_1}$。

因此，模型四的假設下$S(T)$可以改成逼近$S'(T)$如下式：

$$\begin{aligned}S(T)&=[\mathrm{S}(0)\mathrm{e}^{\mu \mathrm{t}_1+\sigma(W(\mathrm{t}_1)\text{-}W(0))}-c_1]\mathrm{e}^{\mu(T-\mathrm{t}_1)+\sigma(W(T)-W(\mathrm{t}_1))}\\&=\mathrm{S}(0)\mathrm{e}^{(\mu-q_1)\mathrm{t}_1+\sigma(W(\mathrm{t}_1)\text{-}W(0))+\mu(T-\mathrm{t}_1)+\sigma(W(T)-W(\mathrm{t}_1))}\\&\approx S'(0)\mathrm{e}^{(\mu-k_1/\mathrm{T})\mathrm{T}+k_1\sigma(W(\mathrm{t}_1)\text{-}W(0))+\sigma(W(T)-W(0))}\end{aligned}\tag{2.2.6}$$

由下圖一所示，實線為發放離散股利股價實際路徑，虛線為使用連續隨機股利近似之股價路徑：

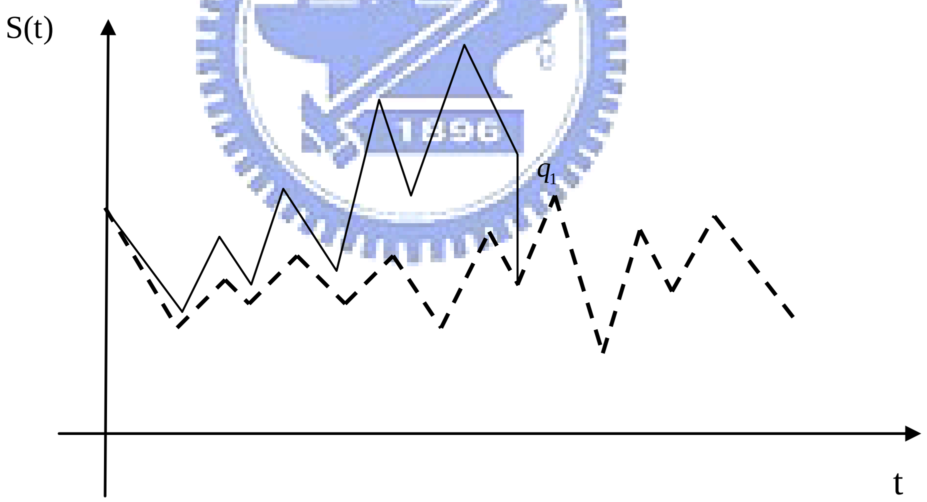

圖 2.1　股價近似路徑圖

由(2.2.6)可知，標準股票選擇權價格可視為$e^{-rT}E[S'(T)\text{-}K]$。而本篇論文在$0\le t<t_1$假設股價路徑為(2.2.2)，$t_1\le t\le T$使用(2.2.6)帶入障礙選擇權來模擬時間t_1到T標的物股價。

第三節　基本障礙選擇權

此節討論基本障礙選擇權的觀念以及訂價公式，最主要參考來源 Steven E. Shreve(2004)，詳細證明請研讀此書第七章。

障礙選擇權，即是選擇權標的物價格上(下)方設有障礙價格，當價格觸碰到障礙價格，則發生合約失效(生效)，稱為 knock-out option(knock-out option)，如表 2.1，一般而言標準障礙選擇權可分為八種：

	out option		**in option**	
up option $(B > S(0))$	$(\theta S(T)-\theta K)^+$	if $B > \max_{0\le t\le T} S(t)$	$(\theta S(T)-\theta K)^+$	if $B < \max_{0\le t\le T} S(t)$
	0	if $B < \max_{0\le t\le T} S(t)$	0	if $B > \max_{0\le t\le T} S(t)$
down option $(B < S(0))$	$(\theta S(T)-\theta K)^+$	if $B < \max_{0\le t\le T} S(t)$	$(\theta S(T)-\theta K)^+$	if $B > \max_{0\le t\le T} S(t)$
	0	if $B > \max_{0\le t\le T} S(t)$	0	if $B < \max_{0\le t\le T} S(t)$
θ =1　for call option **θ =-1　for put option**				

表 2.1 八種障礙選擇權報酬表

為了證明障礙選擇權公式，以下先說明三個定理：

定理 2.1　反射定理(Harrison (1985))

首先，如圖 2.2，我們先定義 x 軸為時間軸，y 軸為標準布朗運動的值，固定 x 軸時間點 t 以及 y 軸一個正值 m，我們想要計算非大於 t 時間點下，標準布朗運動觸碰到 m 的機率如下(如同我們定義當標準運動第一次觸碰到 m 時間點一隨機 first passage time τ_m 小於等於 t 的機率)：

$$P\{\tau_m \le t, W(t) \le w\}$$

假設$w<m$情況下，如圖 2.2，在τ_m之後布朗運動路徑可由m水準反射至另外一個方向，經過反射之後 t 時間點布朗運動小於等於w的機率可視為布朗運動大於等於$2m-w$的機率：

$$P\{\tau_m \le t, W(t) \le w\} = P\{W(t) \ge 2m - w\} \qquad (2.3.1)$$

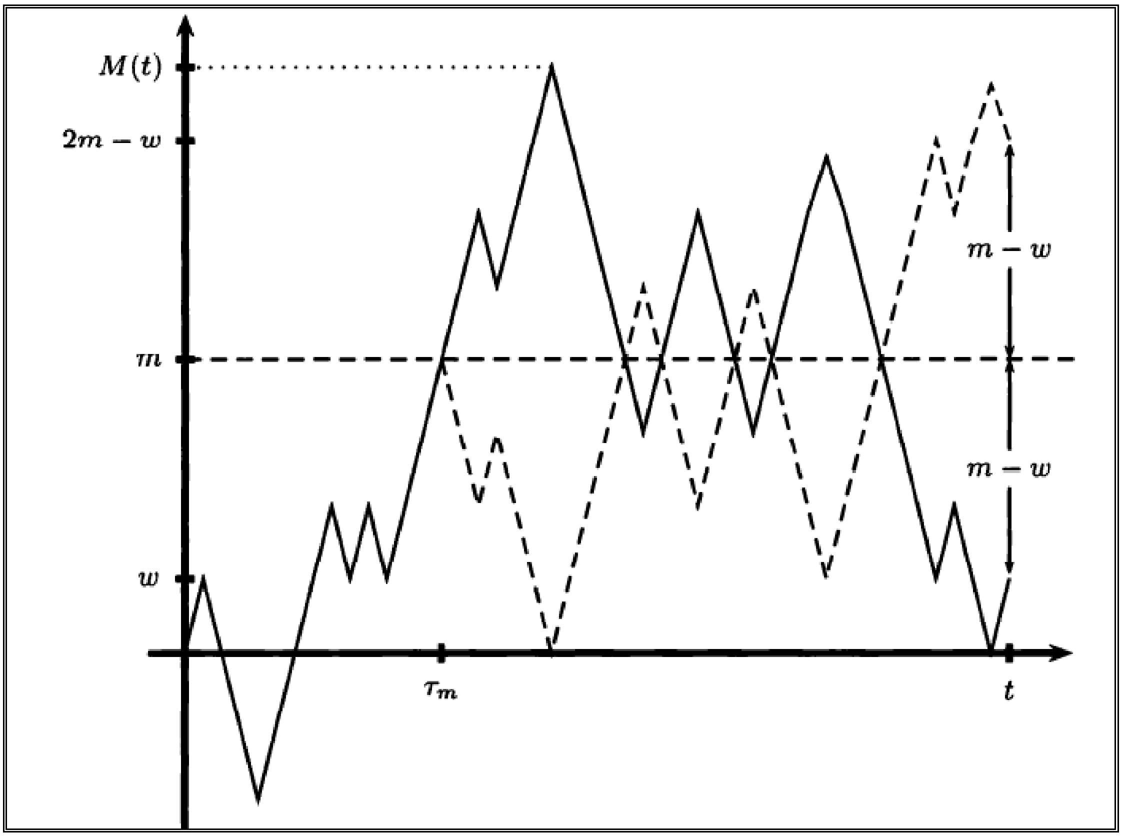

圖 2.2 布朗運動反射路徑

我們定義時間點 t 之前的布朗運動最大值如下：

$$M(t) = \max_{0 \le s \le t} W(s)$$

如果$\tau_m \le t$，則也可表示成$M(t) \ge m$，因此我們可以將(2.3.1)改寫成：

$$P\{\tau_m \le t, W(t) \le w\} = P\{M(t) \ge m, W(t) \le w\} = P\{W(t) \ge 2m - w\},\ \ w \le m, m \ge 0 \quad (2.3.2)$$

由(2.3.2)，我們可以推導$W(t)$以及$M(t)$的聯合機率分配。

定理 2.2：當$t>0$，$(M(t),W(t))$的聯合機率分配為：

$$f_{M(t),W(t)}(m,w)=\frac{2(2m-w)}{t\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{(2m-w)^2}{2t}},\qquad w\le m,m>0. \tag{2.3.3}$$

証明：因為(2.3.2)左式寫成積分式如下：

$$P\{M(t)\ge m,W(t)\le w\}=\int_m^\infty\int_{-\infty}^w f_{M(t),W(t)}(x,y)dydx$$

以及右式寫成積分式如下：

$$P\{W(t)\ge 2m\text{-}w\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{2m-w}^\infty e^{-\frac{z^2}{2t}}dz$$

使得左右兩式相等為：

$$\int_m^\infty\int_{-\infty}^w f_{M(t),W(t)}(x,y)dydx=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{2m-w}^\infty e^{-\frac{z^2}{2t}}dz$$

對左右兩邊對m微分，求得：

$$\int_{-\infty}^w f_{M(t),W(t)}(m,y)dy=\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}e^{\frac{-(2m-w)^2}{2t}}.$$

再對兩邊同微w求得：

$$f_{M(t),W(t)}(m,w)=-\frac{2(2m-w)}{t\sqrt{2\pi t}}e^{\frac{-(2m-w)^2}{2t}}.$$

得證之。

定理 2.3 (Girsanov, one dimension)： 令$0\le t\le T$的時間點，假設存在一個布朗運動$W(t)$在機率空間(Ω,F,P)下，以及$0\le t\le T$時，對於$W(t)$存在一個 filtration $F(t)$，另外$0\le t\le T$時，存在一個adapted process $\Theta(t)$，我們定義：

$$Z(t)=\exp\{-\int_0^t\Theta(u)dW(u)-\frac{1}{2}\int_0^t\Theta^2(u)du\}, \tag{2.3.4}$$

$$\widetilde{W}(t)=W(t)+\int_0^t\Theta(u)du \tag{2.3.5}$$

以及假設

$$E\int_0^T \Theta^2(u)Z^2(u)du < \infty$$

則在機率測度 $\widetilde{P}$ 下，隨機過程 $\widetilde{W}(t)$ 在 $0 \le t \le T$ 屬於一個標準布朗運動。

利用以上三個定理，我們開始推導上方出局障礙選擇權的訂價公式。而其他型態的障礙選擇權以此類推。

模型四中假設股價屬於對數常態分配，其中 $\widetilde{W}(t)$ 在風險中立機率測度 $(\Omega, F, \widetilde{P})$ 下是標準布朗運動，換言之在 $\widetilde{P}$ 測度下沒有 drift 項，然而由(2.2.2)可知 $S(T)$ 在 $\widetilde{P}$ 測度下有 drift 項為 μ，為了使用定理 2.1－反射定理解出股價隨機過程的機率分配，因此我們先定義轉換測度因子 $\widehat{Z}(t)$：

$$\widehat{Z}(t) = e^{-\alpha W(t) + \frac{1}{2}\alpha^2 t}, \qquad 0 \le t \le T, \tag{2.3.6}$$

使用 $\widehat{Z}(t)$ 定義新的機率測度 $\widehat{P}$ 如下：

$$\widehat{P}(A) = \int_A Z(T) d\widetilde{P} \quad \text{for all } A \in F$$

接著使用定理 2.3－Girsanov‘s Theorem 將 $\widetilde{W}(t)$ 轉換至 $\widehat{W}(t)$：

$$\widehat{W}(t) = \alpha t + \widetilde{W}(t) \qquad 0 \le t < T \tag{2.3.7}$$

經由上述測度轉換，$\widehat{W}(t)$ 在 $\widetilde{P}$ 下有 drift α 項，然而在 $\widehat{P}$ 下是標準布朗運動，根據定理 2.2 解出在 $\widehat{P}$ 下布朗運動的聯合機率分配：

$$\widehat{f}_{\widehat{M},\widehat{W}}(m,w) = \frac{2(2m-w)}{t\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2t}(2m-w)^2}, w \le m, m \ge 0 \tag{2.3.8}$$

藉由 Steven E. Shreve(2004)中的 Lemma 5.2.1，經過(2.3.6)與(2.3.8)計算後，可得在 $\widetilde{P}$ 下布朗運動的聯合機率分配：

$$\widetilde{f}_{\widehat{M},\widehat{W}}(m,w)=\frac{2(2m-w)}{t\sqrt{2\pi t}}e^{\alpha w-\frac{1}{2}\alpha^2 t-\frac{1}{2t}(2m-w)^2}, w\le m, m\ge 0 \qquad (2.3.9)$$

上方出局買權障礙選擇權價格藉由期望值計算求得如下：

$$\begin{aligned} V(T) &= (S(0)e^{\sigma \widehat{W}(T)}-K)^{+} I_{\{S(0)e^{\sigma \widehat{M}(T)}<B\}} \\ &= (S(0)e^{\sigma \widehat{W}(T)}-K) I_{\{\widehat{M}(T)<b,\widehat{W}(T)>k\}} \end{aligned} \qquad (2.3.10)$$

其中 $k=\frac{1}{\sigma}\log\frac{K}{S(0)}, b=\frac{1}{\sigma}\log\frac{B}{S(0)}$，(2.3.5)根據馬可夫性質給定期初資訊下對到期日價格折現取期望值後可推得期初價格公式：

$$\begin{aligned} V(0) &= \widetilde{E}[e^{-rT}V(T)\,|\,F(0)] \\ &= \int_k^b\int_{w^+}^b e^{-rT}(S(0)-K)\frac{2(2m-w)}{T\sqrt{2\pi T}}e^{\alpha w-\frac{1}{2}\alpha^2 T-\frac{1}{2T}(2m-w)^2}dmdw \\ &= S(0)[N(\delta_+(T,\frac{S(0)}{K}))-N(\delta_+(T,\frac{S(0)}{B}))] \\ &\quad -e^{-rT}K[N(\delta_-(T,\frac{S(0)}{K}))-N(\delta_-(T,\frac{S(0)}{B}))] \\ &\quad -B(\frac{S(0)}{B})^{-\frac{2r}{\sigma^2}}[N(\delta_+(T,\frac{B^2}{KS(0)}))-N(\delta_+(T,\frac{B}{S(0)}))] \\ &\quad +e^{-rT}K(\frac{S(0)}{B})^{-\frac{2r}{\sigma^2}+1}[N(\delta_-(T,\frac{B^2}{KS(0)}))-N(\delta_-(T,\frac{B}{S(0)}))] \end{aligned} \qquad (2.3.11)$$

其中

$$\delta_{\pm}(\tau,s)=\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}[\log s+(r\pm\frac{1}{2}\sigma^2)\tau]$$

因此，(2.3.7)為上方出局 買權障礙選擇權封閉解。

第三章 研究方法

本章節將延續上章節討論 Dai and Lyuu（2007)支付隨機連續型股利率近似離散型股利率的股票選擇權近似公式以及基本障礙選擇權訂價公式，進一步研究支付一期離散型股利股票障礙選擇權的訂價公式以及支付兩期離散型股利股票障礙選擇權的訂價公式及支付 n 期股利一般通式。首先對支付一期離散股利股票過程定義，將股價視為對數常態分配，並且區分股價配息前與後兩段時間，第一段時間使用一般股價隨機過程，而第二段時間使用模型四對標的物股票配息後模擬的路徑，分別導出兩段時間的股價過程聯合機率分配，再利用馬可夫性質計算期初障礙選擇權價格，其中期望值部份可分為四種變數，使用遞迴重積分計算。

第一節　支付一期隨機連續型股利率近似離散型股利的數學模型基礎假設

我們假設股價隨機過程服從對數常態分配，並將支付一期離散型股利的股價過程分為配息前後兩段不同的隨機過程，在配息前，我們假設股價服從(2.2.2)：

$$\mathrm{S(t)} = \mathrm{S(0)e}^{\mu \mathrm{t}+\sigma(\mathrm{W(t)}-\mathrm{W(0)})}, \qquad 0 \le t < t_1 \qquad (3.1.1)$$

其中 $\mu \equiv r - 0.5\sigma^2$，$t_1$ 為除息日，在配息後我們使用模型四的假設(2.2.6)，隨機連續股利率近似離散型股利，如下：

$$S(t) \approx S(0)\mathrm{e}^{(\mu - k_1/\mathrm{T})\mathrm{T} + k_1\sigma(W(\mathrm{t}_1) - W(0)) + \sigma(W(T) - W(0))}, \qquad t_1 \le t \le T \qquad (3.1.2)$$

如圖 3.1，實線為實際股價過程，虛線為使用隨機連續型股利近似離散型股利後的股價過程，其中，(3.1.1)的股價過成為圖中實線，(3.1.2)為圖中虛線。

在 $0 \le t < t_1$，股價過程服從(3.1.1)，為了推導布朗運動的聯合機率分配，我們使用定理 2.3 轉換測度，將 $\widetilde{W}(t)$ 轉換至 $\widehat{W}(t)$：

$$\widehat{W}(t) = \alpha t + \widetilde{W}(t) \qquad 0 \le t < T \qquad (3.1.3)$$

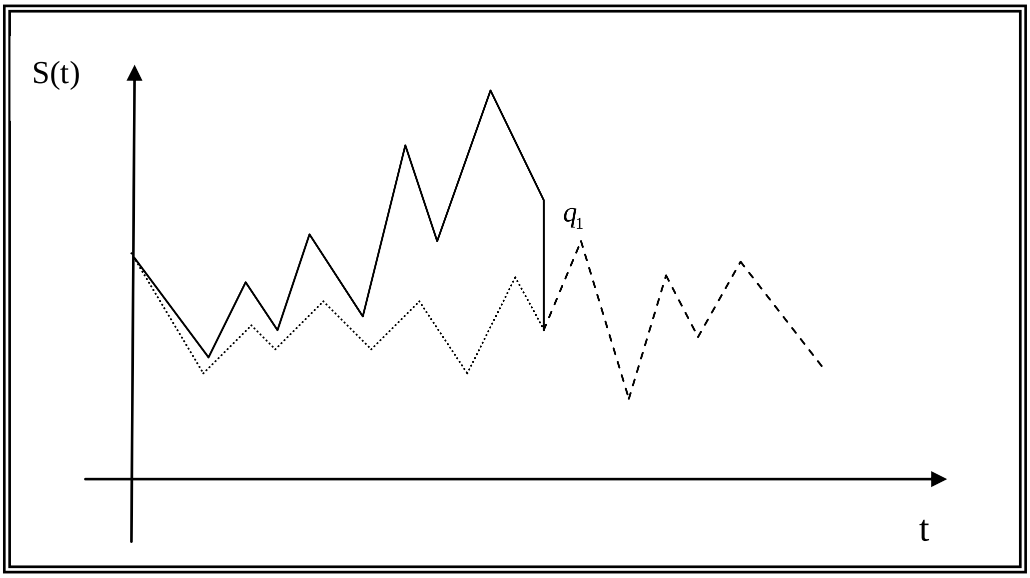

圖 3.1 模型假設股價路線圖

其中 $\widehat{W}(t)$ 是在測度 $\widehat{P}$ 下，而 $\alpha \equiv \mu/\sigma$，則(3.1.1)可以改寫成：

$$S(t) = S(0)e^{\sigma\widehat{W}(t)}, \qquad 0 \le t < t_1 \qquad (3.1.4)$$

第二段股價隨機過程的起點 $t = t_1$ 時，股價過程可由(3.1.2)表示：

$$S(t_1) \approx S(0)\exp(\mu t_1 - k_1 + (1+k_1)\sigma W(t_1)) \qquad (3.1.5)$$

因此，在 $t_1 \le t \le T$，(3.1.2)可區分第二段股價過程起點以及而後隨機過程：

$$\begin{aligned} S(t) &\approx S(0)\mathrm{e}^{(\mu - k_1/\mathrm{T})\mathrm{T} + k_1\sigma(W(\mathrm{t}_1) - W(0)) + \sigma(W(T) - W(0))} \\ &= S(0)\exp\{[\mu t_1 - k_1 + (1+k_1)\sigma W(t_1)] + [\mu(t-t_1) + \sigma(W(t) - W(t_1))]\} \end{aligned} \qquad (3.1.6)$$

我們令一個在風險中立測度 $\widetilde{P}$ 下新的標準布朗運動 $W_1(t-t_1)$ 如下：

$$W_1(t-t_1) = W(t) - W(t_1) \qquad t_1 \le t \le T$$

使用定理 2.3 將 $W_1(t-t_1)$ 轉換測度至 $\widehat{P}$ 下，使得：

$$W_1(t-t_1) + \frac{\mu(t-t_1)}{\sigma} = \widehat{W}_1(t-t_1) \qquad t_1 \le t \le T \qquad (3.1.7)$$

藉由(3.1.3)以及(3.1.7)，將(3.1.6)改寫成如下：

$$\begin{aligned} S(t) &\simeq S(0)\exp\{[(1+k_1)\mu t_1 + (1+k_1)\sigma W(t_1) - k_1\mu t_1 - k_1] + \sigma\widehat{W}_1(t-t_1)\} \\ &= S(0)\exp(-k_1(\mu t_1 + 1))\exp((1+k_1)\sigma\widehat{W}(t_1) + \sigma\widehat{W}_1(t-t_1)) \\ &= S'(0)\exp((1+k_1)\sigma\widehat{W}(t_1) + \sigma\widehat{W}_1(t-t_1)) \qquad t_1 \le t \le T \end{aligned} \qquad (3.1.8)$$

其中$S'(0)=S(0)\exp(-k_1(\mu t_1+1))$。由(3.1.4)以及(3.1.8)，經過定理 2.3 轉換測度後，兩段股價隨機過程分別如下：

$$
\begin{aligned}
S(t) &= S(0)e^{\sigma\widehat{W}(t)}, && 0\le t<t_1 \\
S(t) &= S'(0)\exp((1+k_1)\sigma\widehat{W}(t_1)+\sigma\widehat{W}_1(t-t_1)) && t_1\le t\le T
\end{aligned}
$$

第二節　支付一期股利之障礙選擇權模型推導

使用定理2.1反射定理以及定理2.2求出布朗運動過程最大值與布朗運動的聯合機率分配，有了聯合機率分配，便可利用期望值方法計算障礙選擇權期初價格。

1. 布朗運動過程最大值與布朗運動聯合機率分配

除息前後布朗運動過程最大值如下：

$$\widehat{M}(t_1)=\max_{0\le t<t_1}\widehat{W}(t),\quad \widehat{M}_1(T-t_1)=\max_{t_1\le t\le T}\widehat{W}_1(T-t_1),$$

根據定理 2.2 求得除息前後分別的聯合機率分配，除息前$0\le t<t_1$參照(2.3.9)求得$(\widehat{M}(t_1),\widehat{W}(t_1))$聯合機率分配如下：

$$\widetilde{f}_{\widehat{M},\widehat{W}}(m,w)=\frac{2(2m-w)}{t_1\sqrt{2\pi t_1}}e^{\alpha w-\frac{1}{2}\alpha^2 t_1-\frac{1}{2t_1}(2m-w)^2}\qquad ,w\le m,m\ge 0 \qquad (3.2.1)$$

如圖 3.2 所示，當$t_1\le t\le T$，依照定理 2.1 以及定理 2.2 可以推得除息後連續型股利率過程在測度$\widehat{P}$下布朗運動$(\widehat{M}_1(T-t_1),\widehat{W}_1(T-t_1))$聯合分配如下：

$$\widehat{\widetilde{f}}_{\widehat{M}_1,\widehat{W}_1}(m_1,w_1)=\frac{2(2m_1-w_1)}{(T-t_1)\sqrt{2\pi(T-t_1)}}e^{-\frac{1}{2(T-t_1)}(2m_1-w_1)^2},w_1\le m_1,m_1\ge 0 \qquad (3.2.2)$$

根據定理 2.3，定義轉換因子

$$\widehat{Z}(T-t_1)=e^{-\alpha\widehat{W}_1(T-t_1)+\frac{1}{2}\alpha^2(T-t_1)},\qquad t_1\le t\le T \qquad (3.2.3)$$

藉由 Steven E. Shreve(2004)中的 Lemma 5.2.1，結合(3.2.2)與(3.2.3)，推得在測度$\widetilde{P}$下聯合機率分配如下：

$$\widetilde{f}_{\widehat{M}_1,\widehat{W}_1}(m_1,w_1)=\frac{2(2m_1-w_1)}{(T-t_1)\sqrt{2\pi(T-t_1)}}e^{\alpha w_1-\frac{1}{2}\alpha^2(T-t_1)-\frac{1}{2(T-t_1)}(2m_1-w_1)^2},w_1\le m_1,m_1\ge 0 \qquad (3.2.4)$$

整理上述(3.2.1)以及(3.2.4)分別的聯合機率分配：

$$\widetilde{f}_{\widehat{M},\widehat{W}}(m,w)=\frac{2(2m-w)}{t_1\sqrt{2\pi t_1}}e^{\alpha w-\frac{1}{2}\alpha^2 t_1-\frac{1}{2t_1}(2m-w)^2} \quad ,w\le m,m\ge 0 \qquad 0\le t<t_1$$

$$\widetilde{f}_{\widehat{M}_1,\widehat{W}_1}(m_1,w_1)=\frac{2(2m_1-w_1)}{(T-t_1)\sqrt{2\pi(T-t_1)}}e^{\alpha w_1-\frac{1}{2}\alpha^2(T-t_1)-\frac{1}{2(T-t_1)}(2m_1-w_1)^2},w_1\le m_1,m_1\ge 0 \quad t_1\le t\le T$$

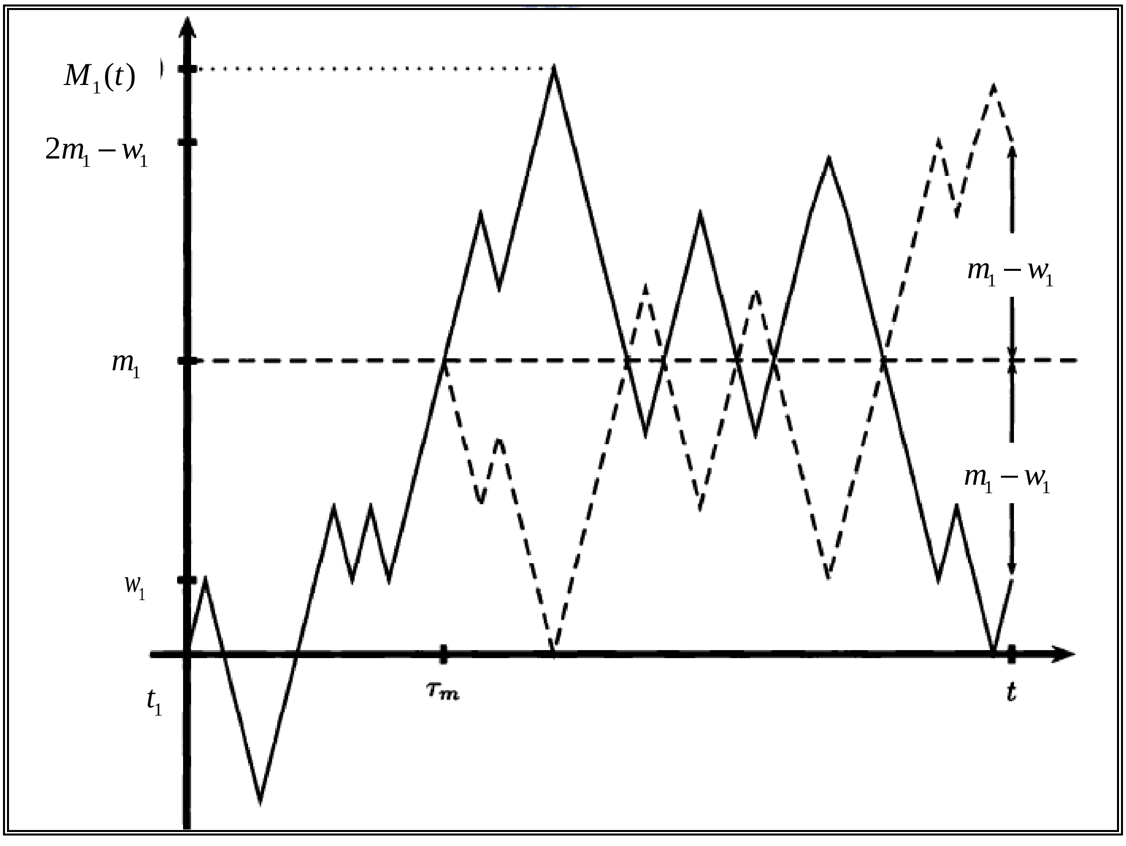

圖 3.2 除息後布朗運動反射路徑

2. 使用期望值方法求得障礙選擇權訂價公式

利用(3.2.1)以及(3.2.4)聯合機率分配，推算近似一期離散型股利股票障礙

選擇權的 payoff。根據第二章第三節所述，上方出局買權障礙選擇權在存續期間標的物股價必須並無觸碰到障礙價格，另外到期日標的物價格必須大於執行價格，此選擇權在到期日才能執行，故在考慮到期日選擇權 payoff 時必須加入下述條件：

i. 在配息前 $0 \le t < t_1$，股價最大值必須小於障礙價格 B：

$$S(0)e^{\sigma \widehat{M}(t_1^-)} < B \qquad 0 \le t < t_1$$

經過移項之後，定義 $\widehat{M}(t_1) < b$，推得配息前布朗運動最大值上限為：

$$b = \frac{1}{\sigma}\ln\frac{B}{S(0)} \tag{3.2.5}$$

並且因為 $B > S(0)$，所以 $b > 0$。

ii. 在配息後 $t_1 \le t \le T$，近似連續型股利率的股價最大值必須小於障礙價格 B：

$$S'(0)\exp((1+k_1)\sigma\widehat{W}(t_1)+\sigma\widehat{M}_1(T-t_1)) \le B \qquad t_1 \le t \le T$$

經過移項之後，定義 $\widehat{M}_1(T-t_1) < b_1$，推得配息後布朗運動最大值上限為：

$$b_1 = \frac{1}{\sigma}(\ln\frac{B}{S'(0)} - (1+k_1)\sigma\widehat{W}(t_1)) \tag{3.2.6}$$

在選擇權不失效前提下 $S'(0)\exp((1+k_1)\sigma\widehat{W}(t_1)) \le B$，所以 $b_1 > 0$。

iii. 到期日標的物價格必須大於執行價格 K，(3.1.8)式視為標的物到期日價格，股價與執行價格關係如下：

$$S(T) \approx (S'(0)\exp((1+k_1)\sigma\widehat{W}(t_1)+\sigma\widehat{W}_1(T-t_1)) > K$$

經過移項之後，定義 $\widehat{W}_1(T-t_1) > k$，推得到期日布朗運動 $\widehat{W}_1(T-t_1)$ 下限為：

$$k = \frac{1}{\sigma}(\ln\frac{K}{S'(0)} - (1+k_1)\sigma\widehat{W}(t_1)) \tag{3.2.7}$$

因此，考慮支付一期離散型股利的上方出局股票障礙選擇權在到期日的價值如下：

$$V(T)=(S'(0)\exp((1+k_1)\sigma\widehat{W}(t_1)+\sigma\widehat{W_1}(T-t_1))-K)$$
$$\cdot\ I\{\widehat{W}_1(T-t_1)>k,\widehat{M}_1(T-t_1)<b_1,\widehat{M}(t_1)<b\}$$

利用風險中立訂價公式：

$$V(t)=\widetilde{E}[e^{-r(T-t)}V(T)\,|\,F(t)],\qquad 0\le t\le T \tag{3.2.8}$$

當 $t=0$，考慮支付一期離散型股利的上方出局股票障礙選擇權在期初的價值為 $V(0)=\widetilde{E}[e^{-rT}V(T)]$。由條件三得知如果 $S'(0)\exp((1+k_1)\sigma\widehat{W}(t_1)>K$，表示 $k<0$，則如圖 3.3 Panel(b)所示 $(\widehat{M}_1(T-t_1),\widehat{W}_1(T-t_1))$ 的積分區域為 $\{(m_1,w_1);k\le w_1\le m_1\le b_1\}$，反之，如果 $S'(0)\exp((1+k_1)\sigma\widehat{W}(t_1)<K$，表示 $k>0$，則如圖 3.3 Panel(a)所示 $(\widehat{M}_1(T-t_1),\widehat{W}_1(T-t_1))$ 的積分區域為 $\{(m_1,w_1);k\le w_1\le m_1,0\le m_1\le b_1\}$，結合上述，積分區域可描述成 $\{(m_1,w_1);k\le w_1\le b_1,w_1^+\le m_1\le b_1\}$，其中 w_1^+ 表示 w_1 與 0 兩者取最大者 $\max\{w_1,0\}$。而 $(\widehat{M}(t_1),\widehat{W}(t_1))$ 積分區域如圖 3.4 為 $\{(m,w);-\infty\le w\le b,0\le m\le b\}$。

因此考慮支付一期離散型股利的上方出局股票障礙選擇權在期初的價值如下：

$$\begin{aligned}V(0)=&\int_{-\infty}^{b}\int_{0}^{b}\int_{k}^{b_1}\int_{w_1^+}^{b_1}e^{-rT}(S'(0)\exp((1+k_1)\sigma w+\sigma w_1-K)\\&\cdot\frac{2(2m-w)}{t_1\sqrt{2\pi t_1}}e^{\alpha w-\frac{1}{2}\alpha^2 t_1-\frac{1}{2t_1}(2m-w)^2}\\&\cdot\frac{2(2m_1-w_1)}{(T-t_1)\sqrt{2\pi(T-t_1)}}e^{\alpha w_1-\frac{1}{2}\alpha^2(T-t_1)-\frac{1}{2(T-t_1)}(2m_1-w_1)^2}dm_1dw_1dmdw\end{aligned}\tag{3.2.9}$$

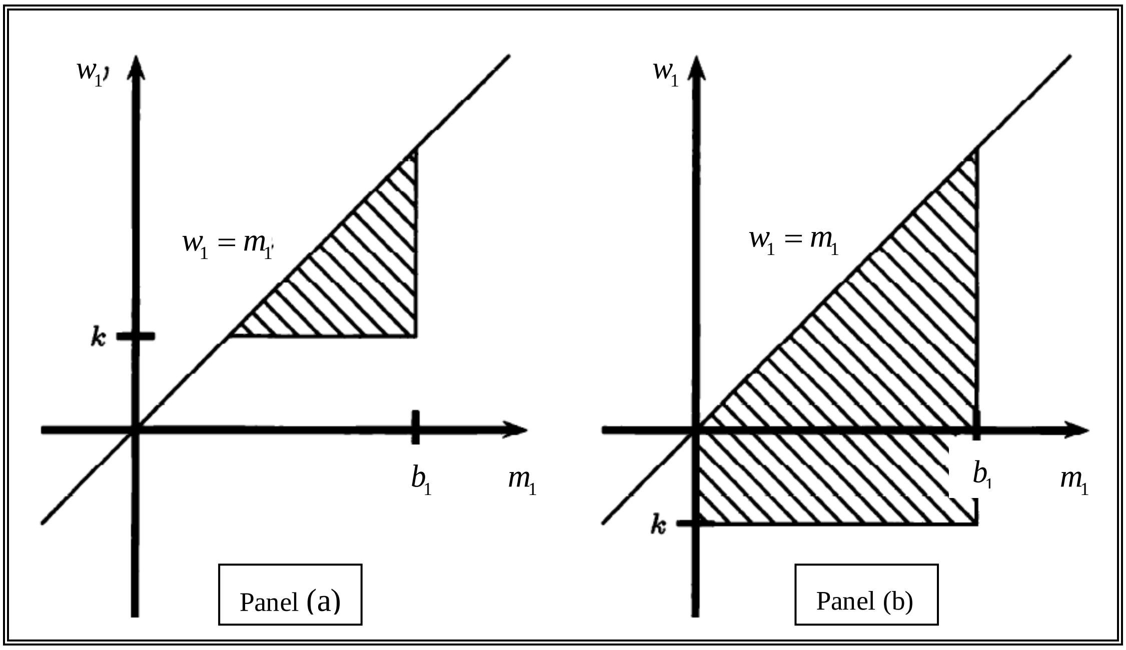

圖 3.3 $(\widehat{M}_1(T-t_1),\widehat{W}_1(T-t_1))$ 積分區域

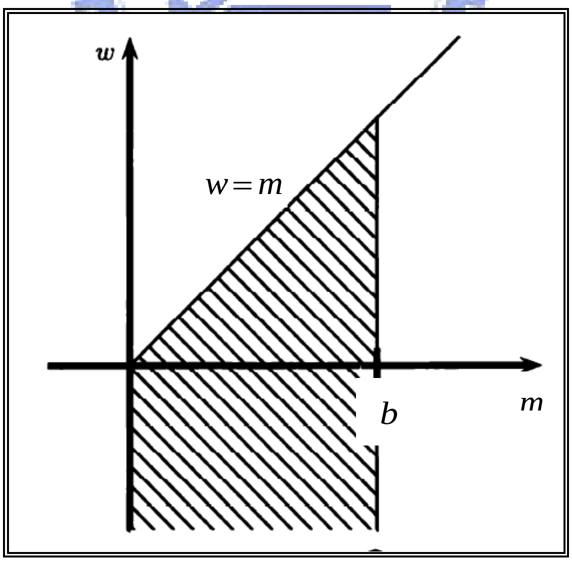

圖 3.4 $(\widehat{M}(t_1),\widehat{W}(t_1))$ 積分區域

3. 計算考慮支付一期離散型股利的上方出局股票障礙選擇權期初價格

將(3.2.9)改寫成(3.2.10)：

$$
\begin{aligned}
V(0)=&\int_{-\infty}^{b}\int_{0}^{b}e^{-rt_1}\bullet\ \frac{2(2m-w)}{t_1\sqrt{2\pi t_1}}e^{\alpha w-\frac{1}{2}\alpha^2t_1-\frac{1}{2t_1}(2m-w)^2}\\
&\bullet(\int_{k}^{b_1}\int_{w_1^+}^{b_1}e^{-r(T-t_1)}(S'(0)\exp((1+k_1)\sigma\widehat{W}(t_1)+\sigma\widehat{W}_1(T-t_1))-K)\\
&\bullet\frac{2(2m_1-w_1)}{(T-t_1)\sqrt{2\pi(T-t_1)}}e^{\alpha w_1-\frac{1}{2}\alpha^2(T-t_1)-\frac{1}{2(T-t_1)}(2m_1-w_1)^2}\ dm_1dw_1)dmdw \qquad (3.2.10)
\end{aligned}
$$

由(3.2.10)可分為兩部份，灰色部份定為第一部份，其中並無$(\widehat{M}_1(T-t_1),\widehat{W}_1(T-t_1))$變數，所以可以先積分$dm$此變數，黑色部份定為第二部份，其中並無$\widehat{M}(t_1)$變數，所以可以積分$(dm_1,dw_1)$變數，而第一部分不能先積分$dw$是因為第二部份上下界為$w$的函數，因此，第一部份積分$\widehat{M}(t_1)$變數結果如下：

$$
\begin{aligned}
\text{part one}\ \Rightarrow\ &\int_{-\infty}^{b}\int_{0}^{b}e^{-rt_1}\frac{2(2m-w)}{t_1\sqrt{2\pi t_1}}e^{\alpha w-\frac{1}{2}\alpha^2t_1-\frac{1}{2t_1}(2m-w)^2}\ dm\ dw\\
&=-\int_{-\infty}^{b}\frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}}e^{-rt_1+\alpha w-\frac{1}{2}\alpha^2t_1-\frac{1}{2t_1}(2m-w)^2}\Big|_{w^+}^{b}dw\\
&=\int_{-\infty}^{b}\frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}}e^{-rt_1}[e^{\alpha w-\frac{1}{2}\alpha^2t_1-\frac{1}{2t_1}w^2}-e^{\alpha w-\frac{1}{2}\alpha^2t_1-\frac{1}{2t_1}(2b-w)^2}]\ dw \qquad (3.2.11)
\end{aligned}
$$

第二部份積分$(\widehat{M}_1(T-t_1),\widehat{W}_1(T-t_1))$變數結果如下：

$$
\begin{aligned}
\text{part two}\Rightarrow\ &\int_{k}^{b_1}\int_{w_1^+}^{b_1}e^{-r(T-t_1)}(S'(0)\exp((1+k_1)\sigma w+\sigma w_1)-K)\\
&\cdot\frac{2(2m_1-w_1)}{(T-t_1)\sqrt{2\pi(T-t_1)}}e^{\alpha w_1-\frac{1}{2}\alpha^2(T-t_1)-\frac{1}{2(T-t_1)}(2m_1-w_1)^2}\ dm_1\ dw_1\\
=&\int_{k}^{b_1}(S'(0)\exp((1+k_1)\sigma w+\sigma w_1)-K)\\
&\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t_1)}}[e^{-r(T-t_1)+\alpha w_1-\frac{1}{2}\alpha^2(T-t_1)-\frac{1}{2(T-t_1)}w_1^2}\\
&\qquad-e^{-r(T-t_1)+\alpha w_1-\frac{1}{2}\alpha^2(T-t_1)-\frac{1}{2(T-t_1)}(2b_1-w_1)^2}]\ dw_1\\
=&\,S'(0)\exp((1+k_1)\sigma w)I(1)-KI(2)\\
&\qquad-S'(0)\exp((1+k_1)\sigma w)I(3)+KI(4) \qquad (3.2.12)
\end{aligned}
$$

其中

$$I(1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t_1)}}\int_k^{b_1} e^{\sigma w_1-r(T-t_1)+\alpha w_1-\frac{1}{2(T-t_1)}w_1^2}dw_1,$$

$$I(2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t_1)}}\int_k^{b_1} e^{-r(T-t_1)+\alpha w_1-\frac{1}{2(T-t_1)}w_1^2}dw_1,$$

$$I(3)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t_1)}}\int_k^{b_1} e^{\sigma w_1-r(T-t_1)+\alpha w_1-\frac{1}{2(T-t_1)}(2b_1-w_1)^2}dw_1$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t_1)}}\int_k^{b_1} e^{\sigma w_1-r(T-t_1)+\alpha w_1-\frac{2}{(T-t_1)}b_1^2+\frac{2}{(T-t_1)}b_1w_1-\frac{1}{2(T-t_1)}w_1^2}dw_1$$

$$I(4)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t_1)}}\int_k^{b_1} e^{-r(T-t_1)+\alpha w_1-\frac{1}{2(T-t_1)}(2b_1-w_1)^2}dw_1$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t_1)}}\int_k^{b_1} e^{-r(T-t_1)+\alpha w_1-\frac{2}{(T-t_1)}b_1^2+\frac{2}{(T-t_1)}b_1w_1-\frac{1}{2(T-t_1)}w_1^2}dw_1$$

上述四個積分式配方法後可由通式表示：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t_1)}}\int_k^{b_1} e^{\beta+\gamma w_1-\frac{1}{2(T-t_1)}w_1^2}dw_1=\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t_1)}}\int_k^{b_1} e^{-\frac{1}{2(T-t_1)}(w_1-\gamma(T-t_1))^2+\frac{1}{2}\gamma^2(T-t_1)+\beta}dw_1$$

$$=e^{\frac{1}{2}\gamma^2(T-t_1)+\beta}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{1}{\sqrt{(T-t_1)}}(k-\gamma(T-t_1))}^{\frac{1}{\sqrt{(T-t_1)}}(b_1-\gamma(T-t_1))} e^{-\frac{1}{2}y^2}dy \qquad (3.2.13)$$

其中令 $y=\frac{w_1-\gamma(T-t_1)}{\sqrt{(T-t_1)}}$，變數變換後使得積分式能以計算成累積常態函數，將(3.2.6) b_1 以及(3.2.7) k 代入可得：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t_1)}}\int_k^{b_1} e^{\beta+\gamma w_1-\frac{1}{2(T-t_1)}w_1^2}dw_1$$

$$=e^{\frac{1}{2}\gamma^2(T-t_1)+\beta}[N(\frac{b_1-\gamma(T-t_1)}{\sqrt{(T-t_1)}})-N(\frac{k-\gamma(T-t_1)}{\sqrt{(T-t_1)}})]$$

$$=e^{\frac{1}{2}\gamma^2(T-t_1)+\beta}[N(\frac{\frac{1}{\sigma}(\ln\frac{B}{S'(0)}-(1+k_1)\sigma w)-\gamma(T-t_1)}{\sqrt{(T-t_1)}})$$

$$-N(\frac{\frac{1}{\sigma}(\ln\frac{K}{S'(0)}-(1+k_1)\sigma w)-\gamma(T-t_1)}{\sqrt{(T-t_1)}})] \qquad (3.2.14)$$

根據(3.2.14)，積分式 $I(1)$ 中的係數為 $\beta=-r(T-t_1)-\frac{1}{2}\alpha^2(T-t_1)$ 以及 $\gamma=\alpha+\sigma$，所以 $\frac{1}{2}\gamma^2(T-t_1)+\beta=0$，因此 $I(1)$ 如下：

$$I(1)=N(\frac{\frac{1}{\sigma}(\ln\frac{B}{S'(0)}-(1+k_1)\sigma w)-(\alpha+\sigma)(T-t_1)}{\sqrt{(T-t_1)}})-N(\frac{\frac{1}{\sigma}(\ln\frac{K}{S'(0)}-(1+k_1)\sigma w)-(\alpha+\sigma)(T-t_1)}{\sqrt{(T-t_1)}})$$

根據(3.2.14)，積分式 $I(2)$ 中的係數為 $\beta=-r(T-t_1)-\frac{1}{2}\alpha^2(T-t_1)$ 以及 $\gamma=\alpha$，所以 $\frac{1}{2}\gamma^2(T-t_1)+\beta=-r(T-t_1)$，因此 $I(2)$ 如下：

$$I(2)=e^{-r(T-t_1)}[N(\frac{\frac{1}{\sigma}(\ln\frac{B}{S'(0)}-(1+k_1)\sigma w)-\alpha(T-t_1)}{\sqrt{(T-t_1)}})-N(\frac{\frac{1}{\sigma}(\ln\frac{K}{S'(0)}-(1+k_1)\sigma w)-\alpha(T-t_1)}{\sqrt{(T-t_1)}})]$$

根據(3.2.14)，積分式 $I(3)$ 中的係數為 $\beta=-r(T-t_1)-\frac{1}{2}\alpha^2(T-t_1)-\frac{2b_1^2}{(T-t_1)}$ 以及 $\gamma=\alpha+\sigma+\frac{2b_1}{(T-t_1)}$，所以 $\frac{1}{2}\gamma^2(T-t_1)+\beta=2b_1(\alpha+\sigma)$，因此 $I(3)$ 如下：

$$I(3)=e^{\frac{2}{\sigma}(\ln\frac{B}{S'(0)}-(1+k_1)\sigma w)(\alpha+\sigma)}[N(\frac{-\frac{1}{\sigma}(\ln\frac{B}{S'(0)}-(1+k_1)\sigma w)-(\alpha+\sigma)(T-t_1)}{\sqrt{(T-t_1)}})-N(\frac{\frac{1}{\sigma}(\ln\frac{K}{S'(0)}-(1+k_1)\sigma w)-\frac{2}{\sigma}(\ln\frac{B}{S'(0)}-(1+k_1)\sigma w)-(\alpha+\sigma)(T-t_1)}{\sqrt{(T-t_1)}})]$$

根據(3.2.14)，積分式 $I(4)$ 中的係數為 $\beta=-r(T-t_1)-\frac{1}{2}\alpha^2(T-t_1)-\frac{2b_1^2}{(T-t_1)}$ 以及 $\gamma=\alpha+\frac{2b_1}{(T-t_1)}$，所以 $\frac{1}{2}\gamma^2(T-t_1)+\beta=-r(T-t_1)+2b_1\alpha$，因此 $I(4)$ 如下：

$$I(4) = e^{-r(T-t_1)+\frac{2\alpha}{\sigma}(\ln\frac{B}{S'(0)}-(1+k_1)\sigma w)}[N(\frac{-\frac{1}{\sigma}(\ln\frac{B}{S'(0)}-(1+k_1)\sigma w)-\alpha(T-t_1)}{\sqrt{(T-t_1)}})$$
$$-N(\frac{\frac{1}{\sigma}(\ln\frac{K}{S'(0)}-(1+k_1)\sigma w)-\frac{2}{\sigma}(\ln\frac{B}{S'(0)}-(1+k_1)\sigma w)-\alpha(T-t_1)}{\sqrt{(T-t_1)}})]$$

結合(3.2.11)，(3.2.12)以及上述四條積分式，推導出期初上方出局障礙選擇權價格一次積分式：

$$\begin{aligned} V(0) = \int_{-\infty}^{b} \{ & \frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}} e^{-rt_1} (e^{\alpha w-\frac{1}{2}\alpha^2 t_1-\frac{1}{2t_1}w^2} - e^{\alpha w-\frac{1}{2}\alpha^2 t_1-\frac{1}{2t_1}(2b-w)^2}) \\ & \cdot [S'(0)\exp((1+k_1)\sigma w)I(1) - KI(2) \\ & - S'(0)\exp((1+k_1)\sigma w)I(3) + KI(4)]\}\, dw \end{aligned} \qquad (3.2.15)$$

由於公式(3.2.15)一次積分式我們無法積分，故我們使用 matlab 中的數值積分辛普森法對(3.2.15)做積分。

第三節　支付兩期隨機連續型股利率近似離散型股利的數學模型基礎假設

本節推導支付兩期隨機連續股利率近似離散型股利之上方出局障礙選擇權評價公式，支付兩期股利與支付一期股利推導方法大致相同。首先，我們依然假設支付兩期離散股利之股價服從對數常態分配，並且將股價過程分成三部分，分別為第一次除息日 t_1 前、第一次除息後至第二次除息日 t_2 前以及第二次除息後，其中第一次除息前股價過程與(3.1.1)相同，第二段股價過程將(3.1.2)到期日 T 提前至 t_2，而我們延伸模型四推導過程求得第三段股價過程，如下所示：

$$\begin{aligned} S(t) \approx S(0)\exp[& \mu t_2 - k_1 - k_2 + (1+k_1)(1+k_2)\sigma W(t_1) \\ & + (1+k_2)\sigma(W(t_2)-W(t_1))] \\ & + [\mu(t-t_2)+\sigma(W(t)-W(t_2))] \quad t_2 \le t \le T \end{aligned} \qquad (3.3.1)$$

經過整理後，依序股價過程如下：

$$
\begin{cases}
S(t)=S(0)e^{\mu t+\sigma(W(t)-W(0))} & 0\le t<t_1 \quad (3.1.1)\\
S(t)\approx S(0)e^{(\mu-k_1/t)t+k_1\sigma(W(t_1)-W(0))+\sigma(W(t)-W(0))} & t_1\le t\le t_2 \quad (3.1.2)\\
S(t)\approx S(0)\exp[\mu t_2-k_1-k_2+(1+k_1)(1+k_2)\sigma W(t_1) & \\
\qquad +(1+k_2)\sigma(W(t_2)-W(t_1))] & \\
\qquad +[\mu(t-t_2)+\sigma(W(t)-W(t_2))] & t_2\le t\le T \quad (3.3.1)
\end{cases}
$$

我們定義一個在風險中立機率測度 $\widetilde{P}$ 新的標準布朗運動 $W_2(t-t_2)$ 如下：

$$W_2(t-t_2)=W(t)-W(t_2) \qquad t_2\le t$$

使用定理 2.3 將 $W_2(t-t_2)$ 轉換測度至 $\widehat{P}$ 下，使得：

$$W_2(t-t_2)+\frac{\mu(t-t_2)}{\sigma}=\widehat{W}_2(t-t_2) \qquad t_2\le t\le T \qquad (3.3.2)$$

藉由(3.1.3)、(3.1.7)以及(3.3.2)，將(3.3.1)改寫成如下：

$$
\begin{aligned}
S(t)\approx S''(0)\exp[&(1+k_1)(1+k_2)\sigma\widehat{W}(t_1)\\
&+(1+k_2)\sigma\widehat{W}_1(t_2-t_1)+\sigma\widehat{W}_2(t-t_2)] \quad t_2\le t\le T \qquad (3.3.3)
\end{aligned}
$$

其中 $S''(0)=S(0)\exp(-k_1-k_2-k_1\mu t_1(k_2+1)-k_2\mu t_2)$。由(3.1.3)、(3.1.7)以及(3.3.2)，經過定理 2.3 轉換測度後，三段股價隨機過程分別如下：

$$
\begin{aligned}
&S(t)=S(0)e^{\sigma\widehat{W}(t)}, && 0\le t<t_1\\
&S(t)\approx S'(0)\exp((1+k_1)\sigma\widehat{W}(t_1)+\sigma\widehat{W}_1(t-t_1)) && t_1\le t\le t_2\\
&S(t)\approx S''(0)\exp[(1+k_1)(1+k_2)\sigma\widehat{W}(t_1) && \\
&\qquad +(1+k_2)\sigma\widehat{W}_1(t_2-t_1)+\sigma\widehat{W}_2(t-t_2)] && t_2\le t\le T
\end{aligned}
$$

第四節　支付兩期股利之障礙選擇權模型推導

使用定理 2.1 反射定理以及定理 2.2 求出布朗運動過程最大值與布朗運動的聯合機率分配，有了聯合機率分配，便可利用期望值方法計算障礙選擇權期初價

格。

1. 布朗運動過程最大值與布朗運動聯合機率分配

除息前後布朗運動過程最大值如下：

$$\widehat{M}_2(T-t_2)=\max_{t_2\le t\le T}\widehat{W}_2(T-t_2),$$

根據定理 2.2 求得第二次除息後的聯合機率分配，參照(2.3.9)求得

$(\widehat{M}_2(t),\widehat{W}_2(t))$ 聯合機率分配如下：

$$\widehat{f}_{\widehat{M}_2,\widehat{W}_2}(m_2,w_2)=\frac{2(2m_2-w_2)}{(T-t_2)\sqrt{2\pi(T-t_2)}}e^{-\frac{1}{2(T-t_2)}(2m_2-w_2)^2},w_2\le m_2,m_2\ge 0 \quad (3.3.4)$$

根據定理 2.3，定義轉換因子

$$\widehat{Z}(T-t_2)=e^{-\alpha\widehat{W}_2(T-t_2)+\frac{1}{2}\alpha^2(T-t_2)},\quad t_2\le t\le T \quad (3.3.5)$$

藉由 Steven E. Shreve(2004)中的 Lemma 5.2.1，結合(3.3.4)與(3.3.5)，推得

在測度 $\widetilde{P}$ 下聯合機率分配如下：

$$\widetilde{f}_{\widehat{M}_2,\widehat{W}_2}(m_2,w_2)=\frac{2(2m_2-w_2)}{(T-t_2)\sqrt{2\pi(T-t_2)}}e^{\alpha w_2-\frac{1}{2}\alpha^2(T-t_2)-\frac{1}{2(T-t_2)}(2m_2-w_2)^2},w_2\le m_2,m_2\ge 0 \quad (3.3.6)$$

整理上述(3.2.1)、(3.2.4) 以及(3.3.6)分別的聯合機率分配：

$$\widetilde{f}_{\widehat{M},\widehat{W}}(m,w)=\frac{2(2m-w)}{t_1\sqrt{2\pi t_1}}e^{\alpha w-\frac{1}{2}\alpha^2 t_1-\frac{1}{2t_1}(2m-w)^2} \quad ,w\le m,m\ge 0 \quad 0\le t<t_1$$

$$\widetilde{f}_{\widehat{M}_1,\widehat{W}_1}(m_1,w_1)=\frac{2(2m_1-w_1)}{(t_2-t_1)\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}}e^{\alpha w_1-\frac{1}{2}\alpha^2(t_2-t_1)-\frac{1}{2(t_2-t_1)}(2m_1-w_1)^2} \quad ,w_1\le m_1,m_1\ge 0 \quad t_1\le t\le t_2$$

$$\widetilde{f}_{\widehat{M}_2,\widehat{W}_2}(m_2,w_2)=\frac{2(2m_2-w_2)}{(T-t_2)\sqrt{2\pi(T-t_2)}}e^{\alpha w_2-\frac{1}{2}\alpha^2(T-t_2)-\frac{1}{2(T-t_2)}(2m_2-w_2)^2} \quad ,w_2\le m_2,m_2\ge 0 \quad t_2\le t\le T$$

2. 使用期望值方法求得障礙選擇權訂價公式

利用(3.2.1)、(3.2.4) 以及(3.3.6)聯合機率分配，推算近似兩期離散型股利股票障礙選擇權的 payoff。根據第二章第三節所述，上方出局買權障礙選

擇權在存續期間標的物股價必須並無觸碰到障礙價格，另外到期日標的物價格必須大於執行價格，此選擇權在到期日才能執行，故在考慮到期日選擇權 payoff 時必須加入下述條件：

i. 在配息前 $0 \le t < t_1$，股價最大值必須小於障礙價格 B：

$$S(0)e^{\sigma \widehat{M}(t_1^-)} < B \qquad 0 \le t < t_1$$

經過移項之後，定義 $\widehat{M}(t_1) < b$，推得配息前布朗運動最大值上限為：

$$b = \frac{1}{\sigma}\ln\frac{B}{S(0)} \tag{3.2.5}$$

並且因為 $B > S(0)$，所以 $b > 0$。

ii. 在配息後 $t_1 \le t \le T$，近似連續型股利率的股價最大值必須小於障礙價格 B：

$$S'(0)\exp((1+k_1)\sigma\widehat{W}(t_1) + \sigma\widehat{M}_1(T-t_1)) \le B \qquad t_1 \le t \le T$$

經過移項之後，定義 $\widehat{M}_1(T-t_1) < b_1$，推得配息後布朗運動最大值上限為：

$$b_1 = \frac{1}{\sigma}(\ln\frac{B}{S'(0)} - (1+k_1)\sigma\widehat{W}(t_1)) \tag{3.3.8}$$

在選擇權不失效前提下 $S'(0)\exp((1+k_1)\sigma\widehat{W}(t_1)) \le B$，所以 $b_1 > 0$。

iii. 在第二次配息後 $t_2 \le t \le T$，近似連續型股利率的股價最大值必須小於障礙價格 B：

$$S''(0)\exp[(1+k_1)(1+k_2)\sigma\widehat{W}(t_1) + (1+k_2)\sigma\widehat{W}_1(t_2-t_1) + \sigma\widehat{W}_2(t-t_2)] \le B \qquad t_2 \le t \le T$$

經過移項之後，定義 $\widehat{M}_1(T-t_1) < b_1$，推得配息後布朗運動最大值上限為：

$$b_2 = \frac{1}{\sigma}\ln\frac{B}{S''(0)} - (1+k_2)\widehat{W}_1(t_2-t_1) - (1+k_1)(1+k_2)\widehat{W}(t_1) \tag{3.3.9}$$

在選擇權不失效前提下 $S''(0)\exp[(1+k_1)(1+k_2)\sigma\widehat{W}(t_1) + (1+k_2)\sigma\widehat{W}_1(t_2-t_1)] \le B$，所以 $b_2 > 0$。

iv. 到期日標的物價格必須大於執行價格K，(3.3.3)式視為標的物到期日價格，股價與執行價格關係如下：

$$S(T) \approx S''(0)\exp[(1+k_1)(1+k_2)\sigma\widehat{W}(t_1) + (1+k_2)\sigma\widehat{W}_1(t_2-t_1)+\sigma\widehat{W}_2(T-t_2)] > K$$

經過移項之後，定義$\widehat{W}_2(T-t_2)>k$，推得到期日布朗運動$\widehat{W}_2(T-t_2)$下限為：

$$k=\frac{1}{\sigma}\ln\frac{K}{S''(0)}-(1+k_2)\widehat{W}_1(t_2-t_1)-(1+k_1)(1+k_2)\widehat{W}(t_1) \qquad (3.3.10)$$

因此，考慮支付兩期離散型股利的上方出局股票障礙選擇權在到期日的價值如下：

$$V(T)=(S''(0)\exp[(1+k_1)(1+k_2)\sigma\widehat{W}(t_1)+(1+k_2)\sigma\widehat{W}_1(t_2-t_1)+\sigma\widehat{W}_2(T-t_2)]-K) \cdot I\{\widehat{W}_2(T-t_2)>k, \widehat{M}_2(T-t_2)<b_2, \widehat{M}_1(T-t_1)<b_1, \widehat{M}(t_1)<b\}$$

利用風險中立訂價公式：

$$V(t)=\widetilde{E}[e^{-r(T-t)}V(T)\,|\,F(t)], \qquad 0\le t\le T \qquad (3.3.11)$$

當$t=0$，考慮支付一期離散型股利的上方出局股票障礙選擇權在期初的價值為$V(0)=\widetilde{E}[e^{-rT}V(T)]$。由條件四得知如果$S''(0)\exp[(1+k_1)(1+k_2)\sigma\widehat{W}(t_1)+(1+k_2)\sigma\widehat{W}_1(t_2-t_1)]>K$，表示$k<0$，則$(\widehat{M}_2(T-t_2),\widehat{W}_2(T-t_2))$的積分區域為$\{(m_2,w_2);k\le w_2\le m_2\le b_2\}$，反之，如果$S''(0)\exp[(1+k_1)(1+k_2)\sigma\widehat{W}(t_1)+(1+k_2)\sigma\widehat{W}_1(t_2-t_1)]<K$，表示$k>0$，則$(\widehat{M}_2(T-t_2),\widehat{W}_2(T-t_2))$的積分區域為$\{(m_2,w_2);k\le w_2\le m_2, 0\le m_2\le b_2\}$，結合上述，積分區域可描述成$\{(m_2,w_2);k\le w_2\le b_2, w_2^+\le m_2\le b_2\}$，其中$w_2^+$表示$w_2$與0兩者取最大者$\max\{w_2,0\}$。而$(\widehat{M}(t_1),\widehat{W}(t_1))$以及$(\widehat{M}_1(t_2),\widehat{W}_1(t_2))$積分區域分別為$\{(m,w);-\infty\le w\le b, 0\le m\le b\}$以及$\{(m_1,w_1);-\infty\le w_1\le b_1, 0\le m_1\le b_1\}$。

因此考慮支付兩期離散型股利的上方出局股票障礙選擇權在期初的價值如下：

$$V(0)=\int_{-\infty}^{b}\int_{0}^{b}\int_{-\infty}^{b_1}\int_{0}^{b_1}\int_{k}^{b_2}\int_{w_2^+}^{b_2} e^{-rT}(S(T)-K)\bullet\frac{2(2m-w)}{t_1\sqrt{2\pi t_1}}e^{\alpha w-\frac{1}{2}\alpha^2 t_1-\frac{1}{2t_1}(2m-w)^2}$$
$$\bullet\frac{2(2m_1-w_1)}{(t_2-t_1)\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}}e^{\alpha w_1-\frac{1}{2}\alpha^2(t_2-t_1)-\frac{1}{2(t_2-t_1)}(2m_1-w_1)^2}$$
$$\bullet\frac{2(2m_2-w_2)}{(T-t_2)\sqrt{2\pi(T-t_2)}}e^{\alpha w_2-\frac{1}{2}\alpha^2(T-t_2)-\frac{1}{2(T-t_2)}(2m_2-w_2)^2}dm_2dw_2dm_1dw_1dmdw \qquad (3.3.12)$$

3. 計算考慮支付兩期離散型股利的上方出局股票障礙選擇權期初價格

(3.3.12)分別對 dm_2, dw_2, dm_1, dm 積分，因此導出(3.3.13)如下：

$$V(0)=\int_{-\infty}^{b}\int_{-\infty}^{b_1}\{\frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}}e^{-rt_1+\alpha w-\frac{1}{2}\alpha^2 t_1}(e^{-\frac{1}{2t_1}w^2}-e^{-\frac{1}{2t_1}(2b-w)^2})$$
$$\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}}e^{-r(t_2-t_1)+\alpha w_1-\frac{1}{2}\alpha^2(t_2-t_1)}(e^{-\frac{1}{2(t_2-t_1)}w_1^2}-e^{-\frac{1}{2(t_2-t_1)}(2b_1-w_1)^2})$$
$$\cdot[S''(0)\exp(\sigma w(1+k_1)(1+k_2)+\sigma(1+k_2)w_1)J(1)-KJ(2)$$
$$-S''(0)\exp(\sigma w(1+k_1)(1+k_2)+\sigma(1+k_2)w_1)J(3)+KJ(4)]\}dw_1dw \qquad (3.3.13)$$

其中

$$J(1)=[N(\frac{b_2-(\alpha+\sigma)(T-t_2)}{\sqrt{(T-t_2)}})-N(\frac{k-(\alpha+\sigma)(T-t_2)}{\sqrt{(T-t_2)}})]$$

$$J(2)=e^{-r(T-t_2)}[N(\frac{b_2-\alpha(T-t_2)}{\sqrt{(T-t_2)}})-N(\frac{k-\alpha(T-t_2)}{\sqrt{(T-t_2)}})]$$

$$J(3)=e^{2(\alpha+\sigma)b_2}[N(\frac{b_2-(\alpha+\sigma+\frac{2b_2}{\tau_2})(T-t_2)}{\sqrt{(T-t_2)}})-N(\frac{k-(\alpha+\sigma+\frac{2b_2}{\tau_2})(T-t_2)}{\sqrt{(T-t_2)}})]$$

$$J(4)=e^{-r(T-t_2)+2\alpha b_2}[N(\frac{b_2-(\alpha+\frac{2b_2}{\tau_2})(T-t_2)}{\sqrt{(T-t_2)}})-N(\frac{k-(\alpha+\frac{2b_2}{(T-t_2)})(T-t_2)}{\sqrt{(T-t_2)}})]$$

根據(3.2.14)，積分式 $J(1)$ 中的係數為 $\beta=-r(T-t_2)-\frac{1}{2}\alpha^2(T-t_2)$ 以及

$\gamma=\alpha+\sigma$，所以 $\frac{1}{2}\gamma^2(T-t_2)+\beta=0$，因此 $J(1)$ 如下：

$$J(1)=N(\frac{b_2-(\alpha+\sigma)(T-t_2)}{\sqrt{(T-t_2)}})-N(\frac{k-(\alpha+\sigma)(T-t_2)}{\sqrt{(T-t_2)}})$$

根據(3.2.14)，積分式 $J(2)$ 中的係數為 $\beta=-r(T-t_2)-\frac{1}{2}\alpha^2(T-t_2)$ 以及 $\gamma=\alpha$ ，所以 $\frac{1}{2}\gamma^2(T-t_2)+\beta=-r(T-t_2)$ ，因此 $J(2)$ 如下：

$$J(2)=e^{-r(T-t_2)}[N(\frac{b_2-\alpha(T-t_2)}{\sqrt{(T-t_2)}})-N(\frac{k-\alpha(T-t_2)}{\sqrt{(T-t_2)}})]$$

根據(3.2.14)，積分式 $J(3)$ 中的係數為 $\beta=-r(T-t_2)-\frac{1}{2}\alpha^2(T-t_2)-\frac{2b_2^2}{(T-t_2)}$ 以及 $\gamma=\alpha+\sigma+\frac{2b_2}{(T-t_2)}$ ，所以 $\frac{1}{2}\gamma^2(T-t_2)+\beta=2b_2(\alpha+\sigma)$ ，因此 $J(3)$ 如下：

$$J(3)=e^{2b_2(\alpha+\sigma)}[N(\frac{-b_2-(\alpha+\sigma)(T-t_2)}{\sqrt{(T-t_2)}})-N(\frac{k-2b_2-(\alpha+\sigma)(T-t_2)}{\sqrt{(T-t_2)}})]$$

根據(3.2.14)，積分式 $J(4)$ 中的係數為 $\beta=-r(T-t_2)-\frac{1}{2}\alpha^2(T-t_2)-\frac{2b_2^2}{(T-t_2)}$ 以及 $\gamma=\alpha+\frac{2b_2}{(T-t_2)}$ ，所以 $\frac{1}{2}\gamma^2(T-t_2)+\beta=-r(T-t_2)+2b_2\alpha$ ，因此 $J(4)$ 如下：

$$J(4)=e^{-r(T-t_2)+2b_2\alpha}[N(\frac{-b_2-\alpha(T-t_2)}{\sqrt{(T-t_2)}})-N(\frac{k-2b_2-\alpha(T-t_2)}{\sqrt{(T-t_2)}})]$$

由於公式(3.3.13)兩次積分式我們無法積分，故我們使用 matlab 中的數值積分辛普森法對(3.3.13)做積分。

第四章 模型模擬數值分析結果與財務議題探討

本章節討論模型模擬數值分析以及財務議題探討，第一節討論特殊情況股利為零時，本文推導支付隨機連續股利率近似離散型股利之上方出局股票障礙選擇權公式結果是否與(2.3.11)結果相同，第二節利用敏感度分析圖分析各參數之間關係是否符合真實情況，第三節討論本文數值結果與蒙地卡羅數值結果比較。

第一節 特殊情況

1. 當支付一期離散股利為零時，我們驗證本文支付隨機連續股利率近似離散型股利之上方出局股票障礙選擇權公式(3.2.15)是否與上方出局選擇權封閉解(2.3.11)相同，而本文使用 Matlab 中的數值積分辛普森法計算(3.2.15)，如表 4.1 所示，當 $r = 0.03$、$\sigma = 0.2$、$K = 50$、$B = 65$、$T = 1$、$t_1 = 0.5$、$c_1 = 0$，期初股價 $S(0) = \{44, 46, 48, 50, 52\}$，則封閉解減去數值積分的誤差大約為 $\pm 10^{-6}$。

期初股價	44	46	48	50	52
封閉解	1.00632706	1.251835	1.459959	1.601375	1.653843
數值積分	1.006327205	1.25184	1.459957	1.601373	1.653842
誤差	-1.44794E-07	-4.6E-06	1.61E-06	1.81E-06	9.21E-07

表 4.1 一期股利特殊事件封閉解與數值積分

2. 當支付兩期離散股利為零時，我們驗證本文支付隨機連續股利率近似離散型股利之上方出局股票障礙選擇權公式(3.3.13)是否與上方出局選擇權封閉解(2.3.11)相同，而本文使用 Matlab 中的數值積分辛普森法計算(3.3.13)，如表 4.1 所示，當 $r = 0.03$、$\sigma = 0.2$、$K = 50$、$B = 65$、$T = 1$、$t_1 = 0.5$、$c_1 = 0$，期初股價 $S(0) = \{47, 49, 51, 53, 55\}$，則封閉解減去數值積分的誤差大約為 $\pm 10^{-5}$。

期初價格	47	49	51	53	55
封閉解	0.582992565	0.555573539	0.512992197	0.45750672	0.391711479
數值積分	0.582967948	0.555530534	0.51298405	0.457507056	0.391714897
誤差	2.4617E-05	4.30048E-05	8.14725E-06	-3.35845E-07	-3.41852E-06

表 4.2 兩期股利特殊事件封閉解與數值積分

3. 判斷可能誤差原因有二：

i. 數值積分辛普森法所造成的誤差。

ii. 計算機小數點進位誤差。

第二節 模型參數比較

1. 使用敏感度分析比較期初股價與股利的關係，當 $r=0.03$、$\sigma=0.2$、$K=50$、$B=65$、$T=1$、$t_1=0.5$，股利設定為 $c_1=\{1,2,3\}$，期初股價設定為 $S(0)=\{45,50,55,60,64\}$，如圖 4.1 所示，在固定到期日的情況下，當期初價格偏離障礙價格越遠，選擇權價格越低，並且隨著股利越高，選擇權價格也越低，這符合當股價越低，買權價格越小的性質，而期初股價高過 55 時，選擇權價格開始下降，並且當股價接近障礙價格 65 時，三種股利的選擇權價格相當接近，這符合當期初股價越靠近障礙價格，上方出局障礙選擇權價格越小以及受到股利變動影響也越小。

2. 使用敏感度分析比較存續期間與股利的關係，當 $r=0.03$、$\sigma=0.2$、$K=50$、$B=65$、$S(0)=50$、$t_1=0.5$，股利設定為 $c_1=\{0.6,2.4\}$，存續期間設定為 $T=\{1,2,3\}$，如圖 4.2，存續期間與選擇權價格關係與事實相符，存續期間越長，選擇權股價越低；然而股利高者在存續期間為 1 時選擇權價格比起股利低者較低，而與存續期間為 3 時相反，推測原因是因為短期間內股價受到股利影響較大，故股利高者選擇權價格較低，而當存續期間拉長，在期間內股利低者的股價有較多的機會觸碰到障礙價格而失效，所以選擇權價格較低。

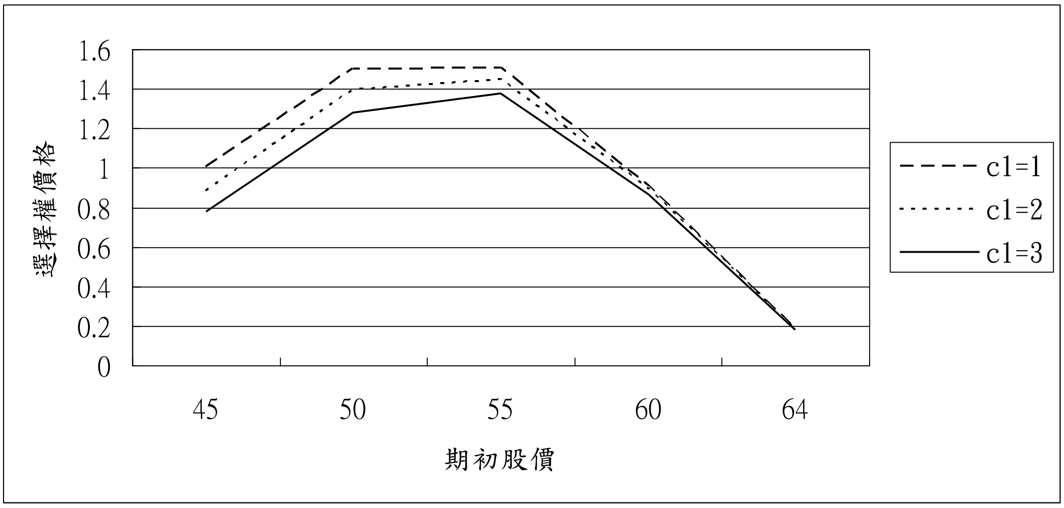

圖 4.1 期初股價與股利關係

X 軸表示期初股價，Y 軸表示選擇權價格

參數設定：$r=0.03$ 、$\sigma=0.2$ 、$K=50$ 、 $B=65$ 、$T=1$ 、 $t_1=0.5$

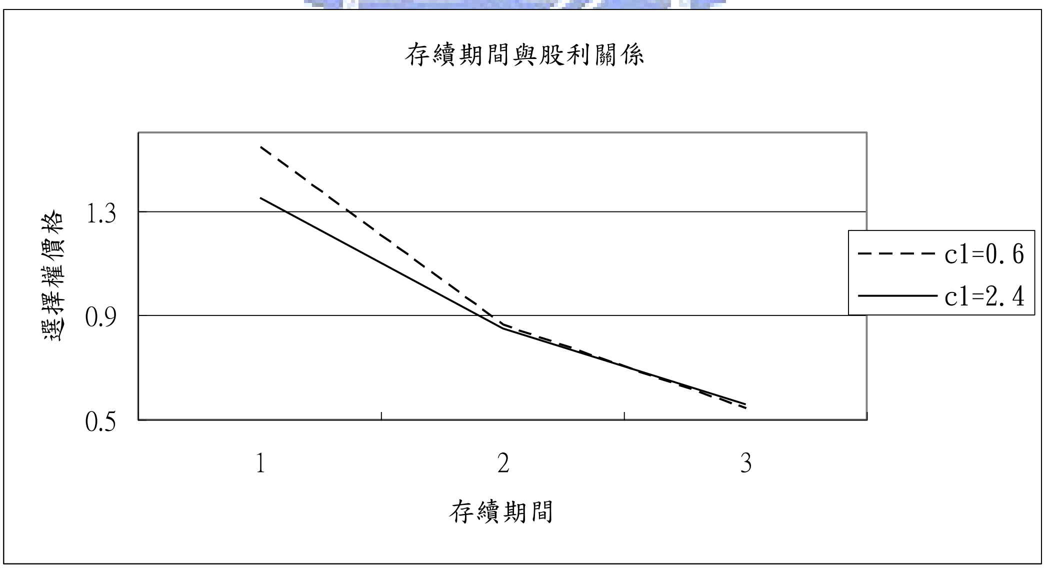

圖 4.2 存續期間與股利關係

X 軸為存續期間，Y 軸為選擇權價格，

參數設定：$r=0.03$ 、 $\sigma=0.2$ 、 $K=50$ 、 $B=65$ 、 $S(0)=50$ 、 $t_1=0.5$

第三節　本文數值結果與蒙地卡羅數值結果比較

1.　使用股利變動之敏感度分析比較本文數值結果與蒙地卡羅數值結果，當 $r = 0.03$、$\sigma = 0.2$、$K = 50$、$B = 65$、$S(0) = 50$、$t_1 = 0.5$，$T = 1$，股利設定為 $c_1 = \{0.3, 0.6, 0.9, ..., 2.7, 3\}$，如圖 4.3 所示，本文數值積分結果隨著股利增加而選擇權價格遞減，並且落在蒙地卡羅信賴區間內。

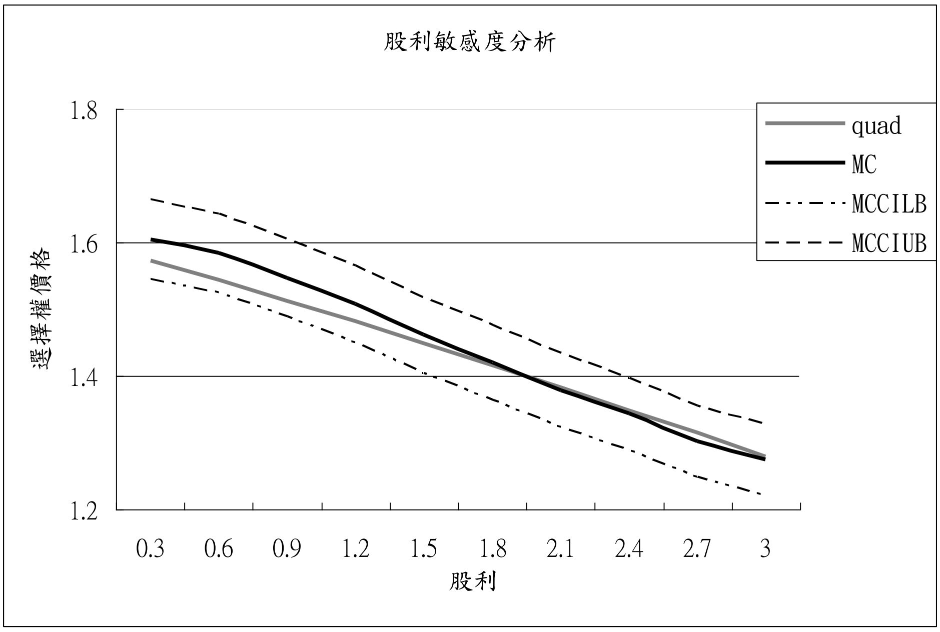

圖 4.3 股利變動比較本文數值結果與蒙地卡羅數值結果

X 軸為股利，Y 軸為選擇權價格

參數設定：$r = 0.03$、$\sigma = 0.2$、$K = 50$、$B = 65$、$S(0) = 50$、$t_1 = 0.5$，$T = 1$

2.　使用期初股價變動之敏感度分析比較本文數值結果與蒙地卡羅數值結果，當 $r = 0.03$、$\sigma = 0.2$、$K = 50$、$B = 65$、$c_1 = 1$、$t_1 = 0.5$，$T = 1$，期初股價設定為 $S(0) = \{46, 47, 48, ..., 54, 55\}$，如圖 4.4 所示，因為期初股價越低，買權價值越低，而當股價靠進障礙價格，契約越容易失效，所以選擇權價格下降，另外，本文數值結果落在蒙地卡羅信賴區間內。

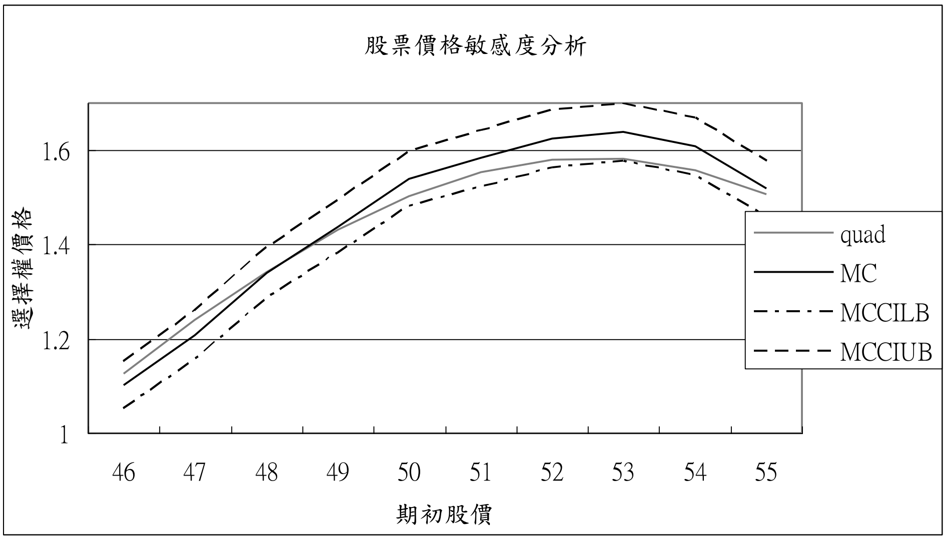

圖 4.4 期初股價變動比較本文數值結果與蒙地卡羅數值結果

X 軸為期初股價，Y 軸為選擇權價格

參數設定：$r=0.03$、$\sigma=0.2$、$K=50$、$B=65$、$c_1=1$、$t_1=0.5$，$T=1$

3. 使用執行價格變動之敏感度分析比較本文數值結果與蒙地卡羅數值結果，當 $r=0.03$、$\sigma=0.2$、$S(0)=50$、$B=65$、$c_1=1$、$t_1=0.5$，$T=1$，執行價設定為 $K=\{47,49,51,53,55,57\}$，如圖 4.5 所示，因為執行價越高，買權價值越低，當執行價格逼近障礙價格，選擇權價格逼近零，並且本文數值結果落在蒙地卡羅信賴區間內。

4. 使用障礙價格變動之敏感度分析比較本文數值結果與蒙地卡羅數值結果，當 $r=0.03$、$\sigma=0.2$、$K=50$、$S(0)=50$、$c_1=1$、$t_1=0.5$，$T=1$，障礙價格設定為 $B=\{57,59,61,...,73,75\}$，如圖 4.6 所示，因為障礙價格越接近期初價格，越容易使得契約失效，而當障礙價格逼近期初股價時，選擇權價格接近零，另外，本文數值結果落在蒙地卡羅信賴區間內。

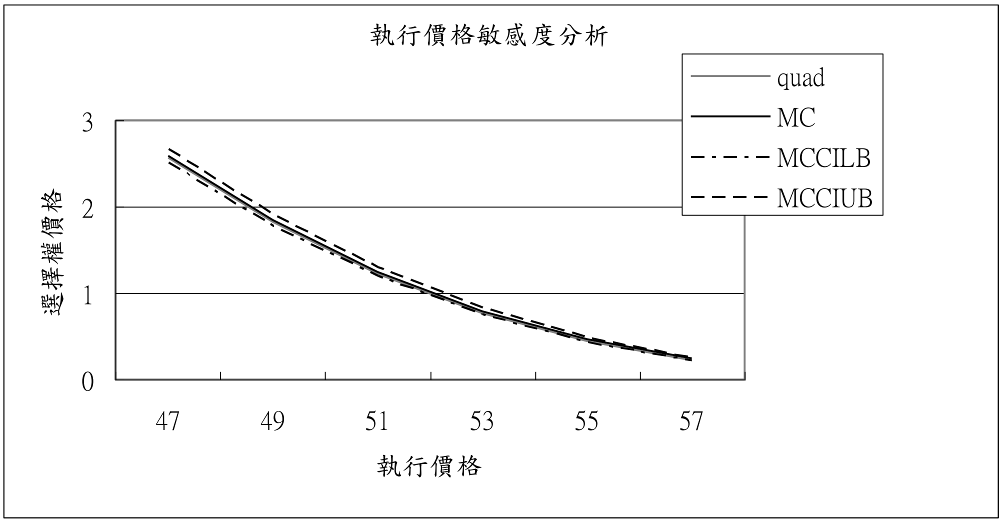

圖 4.5 執行價格變動比較本文數值結果與蒙地卡羅數值結果

X 軸為執行價格，Y 軸為選擇權價格

參數設定：$r = 0.03$ 、 $\sigma = 0.2$ 、 $S(0) = 50$ 、 $B = 65$ 、 $c_1 = 1$ 、 $t_1 = 0.5$ ， $T = 1$

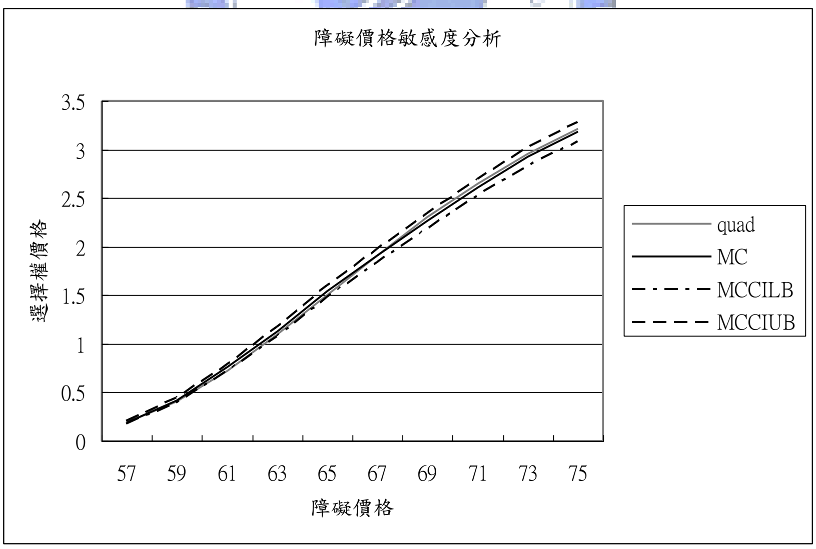

圖 4.6 障礙價格變動比較本文數值結果與蒙地卡羅數值結果

X 軸為障礙價格，Y 軸為選擇權價格

參數設定：$r = 0.03$ 、 $\sigma = 0.2$ 、 $K = 50$ 、 $S(0) = 50$ 、 $c_1 = 1$ 、 $t_1 = 0.5$ ， $T = 1$

5. 使用無風險利率變動之敏感度分析比較本文數值結果與蒙地卡羅數值結果，當 $B=65$、$\sigma=0.2$、$K=50$、$S(0)=50$、$c_1=1$、$t_1=0.5$，$T=1$，無風險利率設定為 $r=\{0.014,0.018,0.022,...,0.046,0.05\}$，如圖 4.7 所示，利率上升，蒙地卡羅結果以及無發放股利上方出局股票選擇權價格皆上升，與本文數值結果相同，另外，本文數值結果落在蒙地卡羅信賴區間內。

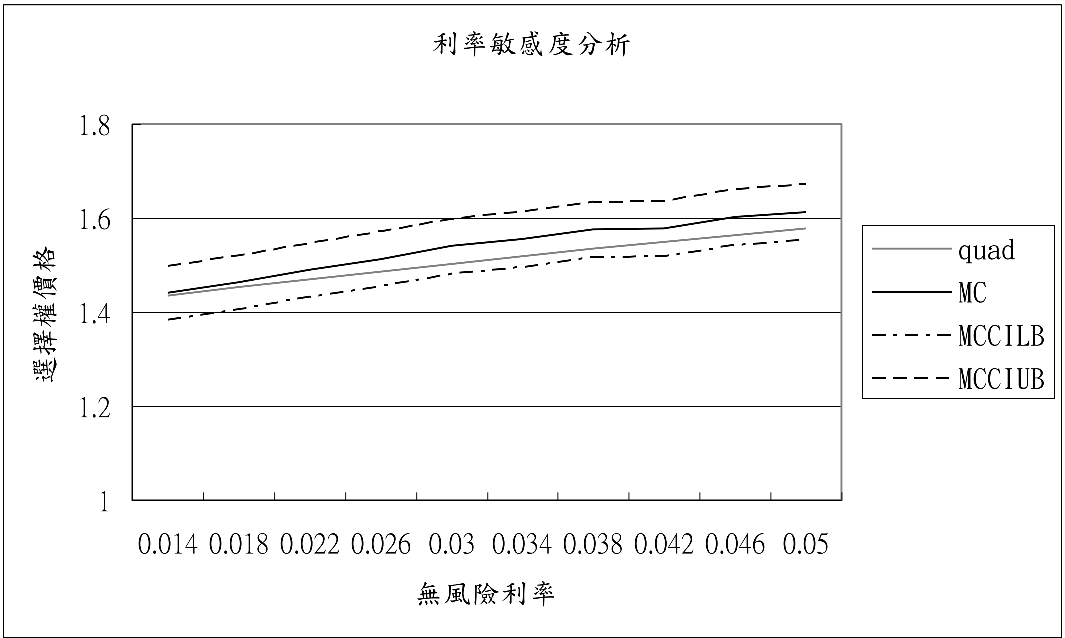

圖 4.7 無風險利率變動比較本文數值結果與蒙地卡羅數值結果

X 軸為無風險利率，Y 軸為選擇權價格

參數設定：$B=65$、$\sigma=0.2$、$K=50$、$S(0)=50$、$c_1=1$、$t_1=0.5$，$T=1$

6. 使用波動度變動之敏感度分析比較本文數值結果與蒙地卡羅數值結果，當 $r=0.03$、$B=65$、$K=50$、$S(0)=50$、$c_1=1$、$t_1=0.5$，$T=1$，波動度設定為 $v=\{0.1,0.2,0.3,...,0.9,1\}$，如圖 4.8 所示，因為波動度越大，股價區間越大，下方越容易低於執行價，上方越容易高於障礙價格，另外，本文數值結果落在蒙地卡羅信賴區間內。

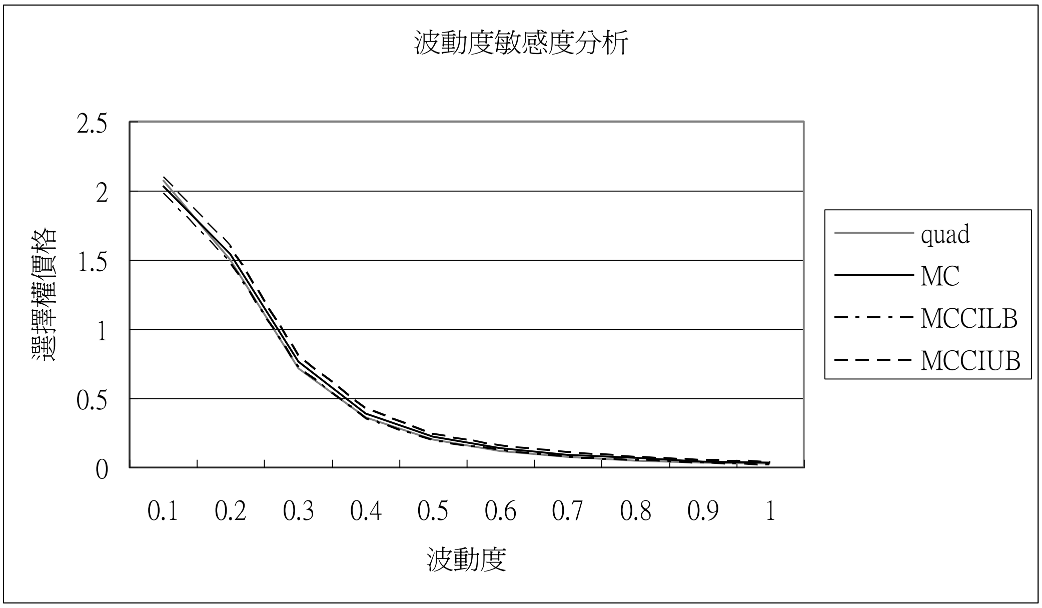

圖 4.8 波動度變動比較本文數值結果與蒙地卡羅數值結果

X 軸為波動度，Y 軸為選擇權價格

參數設定：$B=65$、$r=0.03$、$K=50$、$S(0)=50$、$c_1=1$、$t_1=0.5$，$T=1$

7. 使用除息日變動之敏感度分析比較本文數值結果與蒙地卡羅數值結果，當 $r=0.03$、$\sigma=0.2$、$K=50$、$S(0)=50$、$c_1=1$、$B=65$，$T=1$，除息日設定為 $t_1=\{0.1,0.2,0.3,...,0.8,0.9\}$，如圖 4.9 所示，除息日越接近到期日，蒙地卡羅結果下降，與本文數值結果相同，然而，依據模型一的近似模型，當股利越早發放，則選擇權價格越低的結果相反，這可能是模型一近似模型有問題，另外，本文數值結果落在蒙地卡羅信賴區間內。

8. 使用存續期間變動之敏感度分析比較本文數值結果與蒙地卡羅數值結果，當 $r=0.03$、$B=65$、$K=50$、$S(0)=50$、$c_1=1$、$t_1=0.5$，$v=0.2$，存續期間設定為 $v=\{0.6,0.7,0.8,...,1.4,1.5\}$，如圖 4.10 所示，因為股價 drift 項為正數，表示股價整體擁有上升的趨勢，所以當存續期間越長，上方越容易觸碰障礙價格，另外，本文數值結果落在蒙地卡羅信賴區間內。

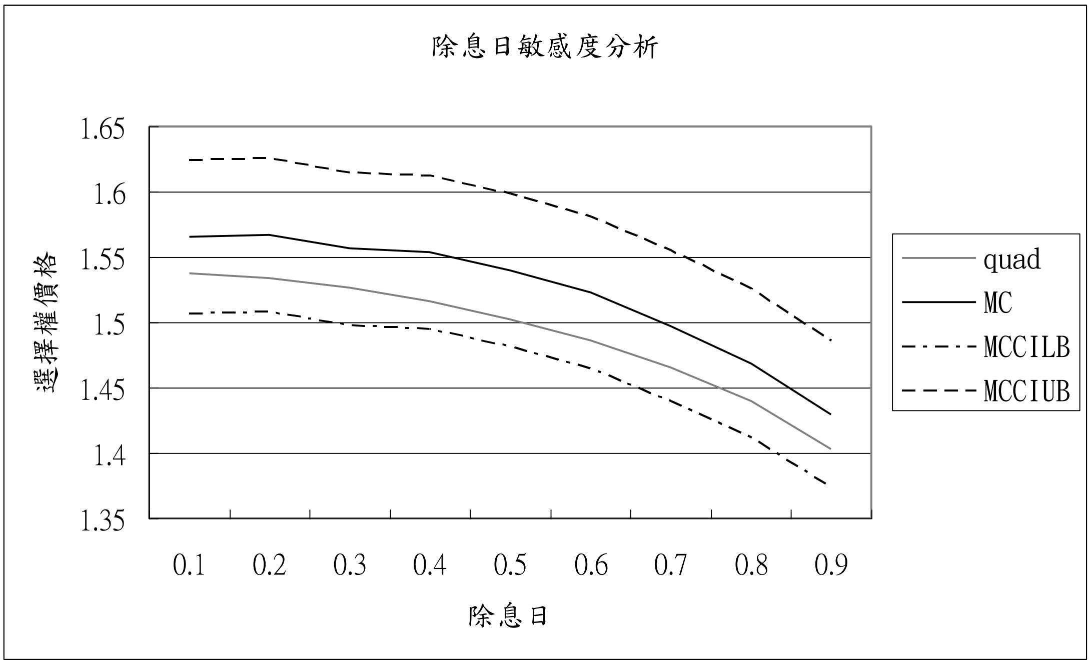

圖 4.9 除息日變動比較本文數值結果與蒙地卡羅數值結果

X 軸為除息日，Y 軸為選擇權價格

參數設定：$B=65$、$r=0.03$、$K=50$、$S(0)=50$、$c_1=1$、$v=0.2$，$T=1$

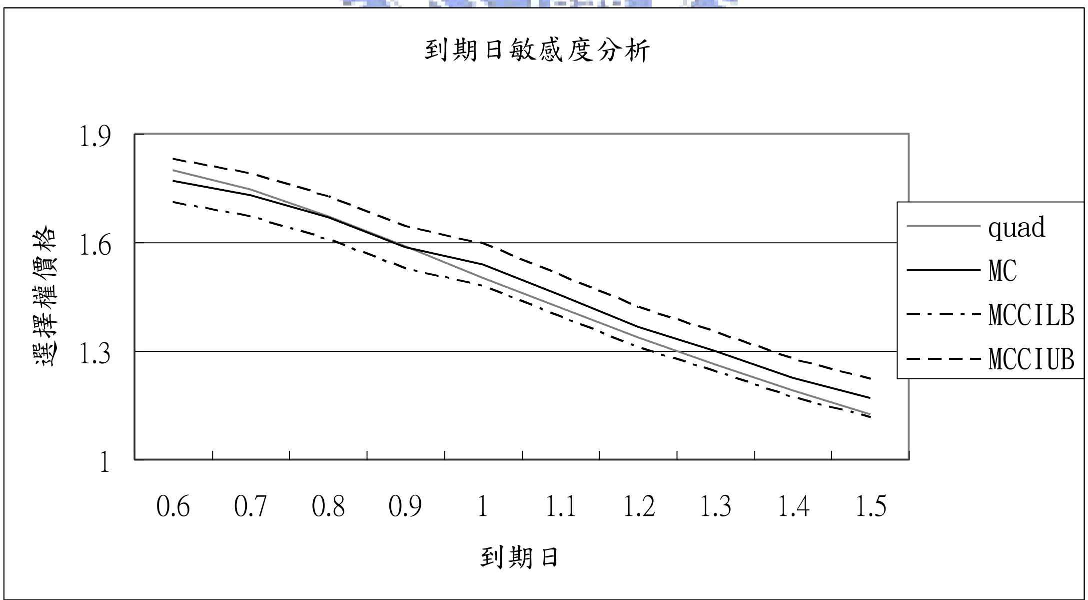

圖 4.10 存續期間變動比較本文數值結果與蒙地卡羅數值結果

X 軸為存續期間，Y 軸為選擇權價格

參數設定：$B=65$、$r=0.03$、$K=50$、$S(0)=50$、$c_1=1$、$v=0.2$，$t_1=0.5$

第五章　結論以及後續研究

第一節　結論

傳統支付離散股利之股票障礙選擇權並沒有精確解，本文推導支付隨機連續型股利近似離散股利之上方出局股票障礙選擇權公式，使用數值積分得到精確解，本文模型結果符合財務意涵，並且敏感度分析的結果皆落於蒙地卡羅信賴區間之內，證明我們推導公式相當穩定且精確。

第二節　後續研究

1.　(3.2.15)無封閉解，使用數值積分辛普森法會造成計算上的誤差，為了使誤差降至可容忍的範圍，可以考慮對(3.2.15)指數項展開泰勒展開式，使得控制誤差在合理範圍，另外一種作法是對常態累積分配函數做五項近似展開，但以上兩種計算上皆為複雜，較難以計算。

2.　可將模型四延伸至其他支付離散股利路徑相關選擇權上應用，譬如回顧選擇權…等等。

參考文獻

1. Harrison, M.J., (1985), **Brownian motion and stochastic flow systems**, Wiley (New York)

2. Hull, J., **Options, Futures, and Other Derivatives** 5^{Th}. Englewood Cliffs, NJ Prentice-Hall, 2006.
3. Merton, R.C., (1973), **The theory of rational option pricing**, Bell J. of Economics and Management Science, 4, 141-183.
4. Musiela, M. and Rutkowski, M. (1997) **Martingale Methods in Financial Modeling**, Springer, Germany.
5. Peter W.Buchen, (2006), **Pricing European Barrier Options**, School of Mathematics and Statistics, University of Sydney.
6. Rich, D., (1994), **The mathematical foundations of barrier option pricing theory**, Advances in Futures and Options Research, 7, 267-311.
7. Ritchken, P., (1995), **On pricing barrier options**, The J. of Derivatives,xxx, 19-28.
8. Rubinstein, M. and Reiner E., (1991), **Breaking down the barriers, Risk**, 4(8),28-35.
9. Shreve, E., **Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models,** Springer Finance, 2007
10. Tian-Shyr Dai and Yuh-Dauh Lyuu. **Accurate Approximation Formulas for Stock Options with Discrete Dividends** . *Applied Economics Letters*, (April 28, 2008)

11. Wilmott, P., Dewynne, J. and Howison, S., (1993), **Option pricing: mathematical models and computation**, Oxford Financial Press.