國 立 交 通 大 學

財 務 金 融 研 究 所

碩 士 論 文

在 Hull-White 隨機利率下信用風險之衡量

—運用創新的數值方法 DFPM-HWT

A Novel Lattice Model for Credit Risk Measurement with

Hull-White Interest Rate Model

研 究 生： 陳博宇

指導教授： 戴天時 博士

中 華 民 國 九 十 八 年 六 月

在 Hull-White 隨機利率下信用風險之衡量

—運用創新的數值方法 DFPM-HWT

A Novel Lattice Model for Credit Risk Measurement with Hull-White Interest Rate Model

研 究 生：陳博宇　　Student：Bo-Yu Chen

指導教授：戴天時博士　　Advisor：Dr. Tian-Shyr Dai

國立交通大學

財務金融研究所

碩士論文

A Thesis Submitted to Graduate Institute of Finance
National Chiao Tung University
in partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master of Science in
Finance

June 2009
Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十八年六月

在 Hull-White 隨機利率下信用風險之衡量

—運用創新的數值方法 DFPM-HWT

學生：陳博宇　　　　　　　　指導教授：戴天時 博士

國立交通大學財務金融研究所

中華民國九十八年六月

摘要

本文提出創新的二維度立體樹狀結構評價模型 DFPM-HWT，當公司資產與利率服從相依的隨機變動過程下，此模型可評價出公司債券的價值，也可調整其數值結構來配適具有隨機性質的違約門檻和公司價值具有離散跳躍等性質，以解決數狀結構常有的非線性誤差。此評價模型不僅可以衡量信用風險，更可以對具有美式性質 (American-style features) 的公司債做評價。Briys and Varenne (1997) 結構式評價模型(對有違約風險的債券定價) 和 Hull-White (1990) 利率延伸性商品評價模型(對可贖回買權定價) 都可視為 DFPM-HWT 評價模型的特例。本文利用敏感度分析觀察贖回價格與債券利差之間的關係，並加以解釋與說明。

關鍵字： 信用風險、隨機利率、結構式模型、違約門檻、首次通過模型、離散跳躍、可贖回債券。

A Novel Lattice Model for Credit Risk Measurement with Hull-White Interest Rate Model

Student：Bo-Yu Chen Advisor：Dr. Tian-Shyr Dai

Graduate Institute of Finance

National Chiao Tung University

June 2009

ABSTRACT

This paper suggests a novel two-dimensional lattice tree model "DFPM-HWT" that can evaluate the corporate bond when firm value and interest rates follow correlated stochastic processes. This lattice model can adjust its structure to fit stochastic default barriers and discrete jumps of the firm value to alleviate the oscillation problem. It can not only measure the credit risk, but price some American-style features like callable, putable bonds. Both Briys and Varenne (1997) evaluation model (for pricing defaultable bonds) and Hull and White (1990) evaluation model (for pricing callable call option) can be regarded as special cases of DFPM-HWT. Detail sensitive analysis are given to illustrate the relations between credit spreads, redemption premium, and etc.

KEYWORDS: Credit Risk, Stochastic Interest Rate, Structure Model, Default Barrier, First Passage Model, Discrete Jump, Callable Bond.

誌謝

感謝我的指導教授戴天時老師。戴天時老師總是不遺餘力地教導著我們，從暑假期間我們就開始組讀書會、密集地 meeting，由 Shreve 的 Stochastic Calculus for Finance 到 Bielecki 的 Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging 讓我踏進了信用風險的領域，也確定了此篇論文的方向。老師驚人的邏輯思考能力總能發現我的邏輯死角，並運用引導的方式讓我的頭腦去思考、去激盪。老師對學術研究的認真、嚴謹的態度深深地影響我對學問的執著，對學生平易近人的親切也讓我能快樂積極地與老師討論。很慶幸能成為老師的指導學生，從您這學習到的知識與態度令我受益良多。

感謝王釧茹學姊，學姊總是很有耐心地聽取我的疑問，並且很用心地與我一同想出解決的方法。謝謝學姊能撥出時間與我討論問題，學姊給我的許多建議都能讓本文更趨於完善。同時，也要感謝這一年來一路一起學習的天時幫幫員們，弘杰、凱允、薇婷和嘉紋，我們一同 meeting、一同學習、一同報告，這慢慢所產生的革命情懷也是支撐著我堅持下去的動力。感謝我的好搭擋劉彥君，因為有你的幫忙我的立體樹狀結構模型才能如此順利地完成，你的縝密思緒與邏輯總是能給予我當頭棒喝的提醒。感謝財金所上的全班同學、我的好室友阿瓚、俊文和家維，謝謝大家的鼓勵與支持，很高興這二年的研究所歲月有你們陪同。

最後要感謝我的父母，謝謝你們給我一個完整的家庭與自由學習的環境，感謝我的哥哥給我許多建議與關心，謝謝香婷細心的提醒與體諒，因為有家人的支持與關愛才能讓我有信心與力量來完成這篇論文。

陳博宇　謹誌

國立交通大學財務金融研究所

中華民國九十八年六月

目錄

表目錄

圖目錄

符號說明

V(t)	：在 t 時間點的公司資產價值
L	：評價負債的面額
σ	：:公司資產的波動度
r(t)	：:在 t 時間點的無風險短期利率
a	：均數復迴歸率
η	：利率的波動度
b(t)	：在 t 時間點利率的長期水準
T	：到期日
B(t,T)	：在 t 時間點上到期日為 T 的無風險零息債券
$\tilde{v}(t)$	：在 t 時間點上的違約門檻值
ξ	：對債權人的保護程度
f_1	：:到期日期的回收率
f_2	：到期日時的回收率
ρ	：資產變動與利率變動的相關性

第一章 緒論

第一節 研究動機與背景

從 2004 年 6 月到 2006 年 6 月，美國聯邦準備儲蓄理事會連續 17 次調升聯邦資金利率，拉高了隨市場利率調動的房屋抵押貸款利率，造成房屋貸款者沉重的還款壓力，甚至產生了大量的違約事件，而造成 2007 年美國的次級房屋信用貸款風暴。隨著投資銀行貝爾斯登被摩根大通公司收購、美國第四大投資銀行雷曼兄弟申請破產，和美國國際集團 (AIG) 所面臨的財務危機，可看出次貸風暴對金融體系已達到相當大程度的傷害，甚至在 2008 年 9 月轉變為全球性的金融危機。這一連串的事件，不僅重創了金融體系的體質，也間接地影響到非金融型態公司的融資，進而增加了許多公司可能倒閉的機率。

債券是市場上資金分配的重要工具之一，對資金供給者來看，如何給予合理的債券價格和考慮到公司是否會破產的信用問題就顯得相當重要。從過去的事件可了解市場上的利率變動與公司價值是互相影響的，例如：保險業收入為收取保戶之保費，利用保費投資於其它的長期金融投資工具，以賺取利差，當長短期利差降低，會導致保險公司獲利減少，加上投資有關利率的商品必須更加了解利率對商品價值的敏感度，利率顯然成為影響公司是否發生違約的重要因子。所以本文在利率是隨機變動的情況下使用信用風險中的結構式模型 (structural form model) 去做公司債的評價，運用公司資產作為主要變數，並加入公司資產離散跳躍因子與債券具有可贖回 (callable) 性質等延伸因子，試圖去評價出合理的公司債價值。

第二節 研究目的

在結構式模型中，是以公司資產變動情況作為此公司債是否有違約 (default) 的依據。若以固定的違約門檻 (default barrier) 來決定其是否違約，可能會造成

當違約發生時公司資產遠高於負債面額之不合理狀況，而運用其負債面額的折現值做為違約門檻即為其中一種解決方法。但是在利率是隨機變動的環境下，違約門檻就會變成隨機變動的門檻，這樣會增加評價模型的複雜度。Briys and Varenne (1997) 提出的評價模型已考慮資產價值、利率變動和違約門檻隨機性變動的情況，並在市場是連續交易的假設下求出封閉解 (closed-form) ，卻不允許資產有瞬間離散跳躍 (jump) 的情況發生，然而在真實世界中，有許多的影響因子皆會造成公司的資產價值瞬間跳躍的情形，例如在評價的時間裡，公司若需先償還負債中已到期的公司債，即會造成公司需要變賣資產來支出一筆龐大的費用，此時就會使公司資產價值在特定時間點產生離散跳躍的情形。另外，Briys and Varenne (1997) 的評價模型也無法評價具有可贖回 (callable) 或可賣回 (putable) 等具有選擇權性質的債券。

針對 Briys and Varenne (1997) 評價模型的缺點，本文將提出一個新的數值樹狀結構評價模型 DFPM-HWT (Discrete First Passage Model with Hull-White tree) 以解決無法討論離散跳躍因子和無法評價具有選擇權性質債券的問題。此新的數值評價模型延伸了 Briys and Varenne (1997) 的評價模型，不僅考慮了資產價值、利率變動和違約門檻的隨機變動性，也可運用市場上公司財務報表和即時的離散訊息，給予此數值評價模型其離散跳躍或可贖回的時間點，並經由數值近似的方法求出最合理的公司負債價值。此數值樹狀模型不僅可以評價含有市場風險和違約風險的公司債價值，還可以評價由二隨機過程的標的物所建構並具有內生隨機門檻特性的衍生性商品價值。

第三節 研究架構

本文的研究架構可分為五個章節，第一章為緒論分為三節：1. 研究動機與背景；2. 研究目的；3. 研究架構。第二章為文獻回顧分為三大節：1. 結構式信用評價模型的演進介紹；2. DFPM (Discrete First Passage Model) 的延伸發展；3. 建構 DFPM-HWT 方法的參考文獻介紹。第三章為研究方法分為三大節：1. DFPM-HWT 的模型基礎假設；2. 建構 DFPM-HWT 樹狀結構模型；3.

DFPM-HWT 的評價介紹。第四章為模型數值分析結果與討論分為三大節：1. 模型比較；2. 考慮離散跳躍因子；3. 可贖回債的評價。第五章為結論與後續研究建議。

第二章　文獻回顧

本文以信用風險中的結構式模型為基礎，延伸其模型來對債券做更合理的評價。因此，第一節將簡介信用風險的結構式模型 (structural form model) 與縮減式模型 (reduced form model)，並討論其連續型評價模型的演進過程。第二節則探討 DFPM 的延伸文獻。第三節介紹 DFPM-HWT 建構模型的方法的參考文獻。

財務上，一般習慣將風險劃分為信用風險、市場風險、作業風險。信用風險的定義是指交易對手未能履行約定契約中所規定的義務，而造成損失的風險；市場風險的定義為市場上商品價格波動，所造成的損失風險；作業風險的定義為因不恰當的外部程序、人為與系統因素，以及內部事件所導致的損害風險。本文主要以市場風險中的利率風險與信用風險來設計其評價的模型。

信用風險的評價模型主要分為兩類。一為結構式模型，其明確定義公司資產價值隨機，並定義公司資產於到期日前低於違約門檻或在到期日無法償付為違約事件。二為縮減式模型，此模型將公司破產與否定義為外生變數，且不考慮將公司資產價值作為參數，而是利用市場價格、信用評等轉換等市場訊息為模型變數，經由統計方法求出其債券價格。

在實證的文獻方面，皆顯示出縮減式模型的評價比結構式模型更符合真實市場的實證價格，然而將其公司的違約可能性視為已知的隨機過程，並且忽略公司資產對其破產的影響頗受爭議。故本文選擇運用結構式評價模型為基礎，在放寬其模型假設條件後，期望其評價價值能更符合市場實際價格。

第一節　結構式評價模型

以下介紹結構式評價模型的演進過程，簡述各模型的特色與缺點，並統整比較。

・**Merton (1974)**：運用信用風險結構式模型為基礎，發展出一種評價公開發行公司債的評價模型。此模型是利用 Black and Scholes (1973)選擇權定價理論為架構，假設整個公司的資產結構是由股東權益價值與一到期日為 T，面額為 L 的零息債券所組合而成。換句話說，可將股東權益價值視為到期日為 T、履約價格為 L，以公司資產價值為標的物的歐式買權，此時公司的負債價值就等於公司資產價值減去其股東權益價值，於是就評價出此零息債券的價值。

Merton 的模型只考慮在負債到期日時是否發生違約，並不能處理公司在到期日前就發生違約的情況。此缺點在 Black and Cox(1976)提出的首次通過模型(First passage models)獲得解決。

・**Black and Cox (1976)**：提出的 FPM 模型放寬了 Merton 設定公司只有在到期日才能違約的限制，設定負債面額的折現值為違約門檻，並定義公司違約的觸發條件為公司資產第一次觸碰到違約門檻。所以公司發生二種違約狀況，一是在到期日前，公司資產價值觸碰到違約門檻;二是到期日時，公司償還不出負債面額。

FPM 模型雖然解決 Merton 模型只考慮公司到期日時違約的缺點，但仍然無法放寬利率是固定常數的限制，這樣使得 FPM 評價模型只能考慮信用風險，而無法含括利率風險的影響。後續的評價模型解決了此項缺點，讓其評定的價格更合理。

・**Kim, Ramaswamy and Sundaresan (1993)**：假設股東無法變賣公司資產來支付股息，且公司必須支付債權人連續債息 C。定義公司的違約條件為在到期日裡($0 \le t \le T$) 公司無足夠資金支付債權人債息，所以當公司的支出金額小於債息($\kappa \cdot V(t) \le C$) 時就會產生違約的情況。違約門檻設為

$$\tilde{v}(t) = \begin{cases} C/\kappa, & if\ t < T \\ L, & if\ t = T \end{cases} \quad , \qquad (2.1.1)$$

其中 C 表示債券利息，κ 表示公司的現金支出，L 為債券面額。

並引用 Cox, Ingersoll, and Ross (1985) 之利率期間結構模型，視利率隨機過程為

$$dr(t)=a(b-r(t))dt+\eta\sqrt{r(t)}dW_2(t)\text{ ，}\tag{2.1.2}$$

其中 a 為均數復迴歸率，b 為長期利率平均，η 為利率的波動度，以上三個變數為外生給定的固定常數，$W_2(t)$ 為布朗隨機過程。

視資產價值為

$$dV(t)=V(t)(r(t)-\kappa)dt+\sigma V(t)dW_1(t)\text{ ，}\tag{2.1.3}$$

其中 σ 為資產價值的波動度，$W_1(t)$ 為布朗隨機過程。

$$u_t(V,r,t)+(r-\kappa)V\cdot u_V(V,r,t)+(ab-ar)u_r(V,r,t)+\frac{1}{2}\sigma^2V^2u_{VV}(V,r,t)+\frac{1}{2}\eta^2ru_{rr}(V,r,t)+$$

$$\sigma\eta\sqrt{r}V\rho u_{Vr}(V,r,t)+c-ru(V,r,t)=0\tag{2.1.4}$$

其中 u 函數為負債價值函數，ρ 為利率與資產的相關係數，$u_t(V,r,t)$、$u_V(V,r,t)$、$u_r(V,r,t)$ 為債價值函數分別對時間、資產價值和利率做一階微分。$u_{VV}(V,r,t)$、$u_{rr}(V,r,t)$ 和 $u_{Vr}(V,r,t)$ 為二階微分。

藉由解 (2.1.4) 的 PDE，即可以求出此負債評價模型的數值解。

・**Longstaff and Schwartz (1995)**：引用 Black and Cox (1976) 的 FPM 模型，並加以延伸。假定資產價值與短期利率彼此之間不獨立，其短期利率是以 Vasicek (1977) 之利率期間結構表示

$$dr(t)=a(b-r(t))dt+\eta dW_2(t)\text{ ，}\tag{2.1.5}$$

資產價值為

$$dV(t)=r(t)V(t)dt+\sigma V(t)dW_1(t)\text{ ，}\tag{2.1.6}$$

其違約門檻假設為一外生給定的固定常數 K。提出新的方法去處理違約時，公司實際應支付給債權人的金額，違約時，公司必須考慮到破產成本，故給予債權人的金額應為 $(1-W)K=\delta K$ ，其中 W 為破產成本，δ 為回收率 (recovery rate)。

並在無風險中立測度下求出具有違約風險的負債價值 (2.1.7) 式。

$$D_t(X,r,T)=LB_t(r,T)(1-W\mathrm{P}_T\{\tau\le T\,|\,F_t\})=LB_t(r,T)-WLB_t(r,T)Q_t(X,r,T) \qquad (2.1.7)$$

其中為 L 零息債券的本金，$B_t(r,T)$ 為到期日為 T 的無風險零息債券在 t 時的價值。$X=V/K$，$Q_t(X,r,T)$ 為公司在無風險中立下的違約機率。

綜論上述二篇文獻的缺失有三，一是這些評價模型並無法防止公司違約時，所付給債權人的金額超過其債券面額折現的價值等不合理的事情發生。二是
在到期日時依資產價值是否低於固定常數的違約門檻來公司是否違約，會發生公司在到期日時未違約，但卻沒有相對應的資產價值來支付本金。以 Longstaff and Schwartz(1995)評價模型為例子，假設在到期日時公司資產價值小於債券本金$(V(T)<L)$，但未觸破到違約門檻 K(K<L)，依照 Longstaff and Schwartz 的假設其狀況視為公司未違約，於是債務人在到期日時支付給債權人的金額為$V(T)$，但其真實情況應視公司為違約，因為公司沒有足夠的資產去支付本金的金額(L)。三是此二篇文獻引用的利率模型皆為均衡模型 (Equilibrium Models)，所產生的利率是由均衡市場的模型所推導的，會產生與市場上真實利率期間結構不一致的問題。

・**Briys and Varenne (1997)**：引用 Hull and White (1990) 之利率期間結構模型來描述利率的變動，其隨機過程為

$$dr(t)=a(t)(b(t)-r(t))dt+\eta(t)dW_2(t) \quad , \qquad (2.1.8)$$

假設門檻為 $\tilde{v}(t)=\xi\cdot L\cdot B(t,T)$，$0\le\xi\le1$。

其中 $B(t,T)$ 為到期日為 T 的無風險零息債券在 t 時點的價值，ξ 為公司對債權人的保護程度。

且將其破產條件定義為 (1) 到期日時公司價值低於債券面額的情況，(2) 在到期日前公司價值觸碰到違約門檻。

(1) 公司於到期日時違約

到期日時有違約風險的零息債券價值為

$$L\cdot 1_{\{T(V_T,\tilde{v}(T))\ge T,V(T)\ge L\}}+f_2\cdot V(T)\cdot 1_{\{T(V_T,\tilde{v}(T))\ge T,V(T)<L\}}\text{，}\qquad(2.1.9)$$

其中 L 為此債券的本金， $T(V_t,\tilde{v})=\inf\{t\ge 0,V_t=\tilde{v}(t)\}$，$f_2$為到期日公司違約時的回收率 (recover rate)。

(2) 公司於到期日前違約

在 T 前違約時零息債券的現金流量

$$D_{T(V_t,\tilde{v}(t))}=f_1\cdot V_{T(V_t,\tilde{v}(t))}$$

$$=f_1\cdot\xi L\cdot B(T(V_t,\tilde{v}(t)),T)\ \ if\ \ T(V_t,\tilde{v}(t))<T\text{，}\qquad(2.1.10)$$

其中 f_1為到期日前公司違約時的回收率。

統整後可得知此具有違約風險的零息債券於到期日的現金流量為

$$D_T=f_1\cdot\xi L\cdot 1_{\{T(V_t,\tilde{v}(t))<T\}}+f_2\cdot V_T\cdot 1_{\{T(V_T,\tilde{v}(T))\ge T,V_T<L\}}+L\cdot 1_{\{T(V_T,\tilde{v}(T))\ge T,V_T\ge L\}}\text{。}\qquad(2.1.11)$$

在 t=0 時有違約風險的零息債券價值為

$$D_0=E^Q[e^{-\int_0^T r_t dt}\{f_1\cdot\xi L\cdot 1_{\{T(V_t,\tilde{v}(t))<T\}}+f_2\cdot V_T\cdot 1_{\{T(V_T,\tilde{v}(T))\ge T,V_T<L\}}+L\cdot 1_{\{T(V_T,\tilde{v}(T))\ge T,V_T\ge L\}}\}]\text{。}\qquad(2.1.12)$$

經由計算可得此風險債券在 t=0 時的封閉解價值:

$$D_0=LB(0,T)\cdot[1-B_E(l_0,1)+B_E(q_0,\frac{l_0}{q_0})-(1-f_1)l_0(N(-d_3)+\frac{N(-d_4)}{q_0})$$
$$-(1-f_2)l_0(N(d_3)-N(d_1)+\frac{N(d_4)-N(d_6)}{q_0})]\text{，}\qquad(2.1.13)$$

其中

$$d_1=\frac{\ln l_0+\Sigma(T)/2}{\sqrt{\Sigma(T)}}=d_2+\sqrt{\Sigma(T)}\text{，}\qquad d_3=\frac{\ln q_0+\Sigma(T)/2}{\sqrt{\Sigma(T)}}=d_4+\sqrt{\Sigma(T)}\text{，}$$

$$d_5=\frac{\ln(q_0^2/l_0)+\Sigma(T)/2}{\sqrt{\Sigma(T)}}=d_6+\sqrt{\Sigma(T)}\text{，}\qquad \Sigma(T)=\int_0^T[(\rho\sigma+\sigma_B(t,T))^2+(1-\rho^2)\sigma^2]dt\text{，}$$

$$l_0=\frac{V(0)}{LB(0,T)}\text{，}\qquad q_0=\frac{V(0)}{\beta LB(0,T)}\text{，}\qquad B_E(l_0,1)=-l_0N(-d_1)+N(-d_2)\text{，}$$

$$B_E(q_0,\frac{l_0}{q_0})=-q_0N(-d_5)+\frac{l_0}{q_0}N(-d_6)\text{，}\qquad \sigma_B(t,T)=\eta(t)\cdot\int_t^T\exp(-\int_t^u a(s)ds)du\text{，}$$

$N(\cdot)$為標準常態分配的累積分配函數。

此評價模型因為引用了無套利利率模型(No Arbitrage Models)，故可以藉由市場上的零息利率調整其所描述的利率過程。另外，其隨機變動違約門檻保有Black and Cox (1976) 設定的門檻特質，而不會產生債權人在公司違約時還能拿到額外的異常收益。因此，此評價模型能更精確與合理的評價出公司債的價值，並且從模型假設上可視Longstaff and Schwartz (1995)評價模型為此評價模型之特例。

下表 2.1 為連續型結構式評價模型的模型假設統整：

表 2.1 結構式評價模型整理

Model	**Assets Process**	**Interest Rate**	**Default Barrier**
Black and Cox (1976)	$\frac{dV(t)}{V(t)} = rdt + \sigma dW_1(t)$	r(constant)	$e^{-r(T-t)}L$
Kim, Ramaswamy and Sundaresan (1993)	$\frac{dV(t)}{V(t)} = r(t)dt + \sigma dW_1(t)$	$dr(t) = a(b - r(t))dt + \eta\sqrt{r(t)}dW_2(t)$ $(CIR\ Model)$	K
Longstaff and Schwartz (1995)	$\frac{dV(t)}{V(t)} = r(t)dt + \sigma dW_1(t)$	$dr(t) = a(b - r(t))dt + \eta dW_2(t)$ $(Vasicek\ Model)$	K
Briys and de Varenne (1997)	$\frac{dV(t)}{V(t)} = r(t)dt + \sigma dW_1(t)$	$dr(t) = a(t)(b(t) - r(t))dt + \eta(t)dW_2(t)$ $(Hull-White\ Model)$	$\xi \cdot L \cdot B(t,T)$ $0 \le \xi \le 1$

第二節　DFPM 離散型評價模型

Briys and Varenne (1997) 的評價模型並不允許公司資產有離散跳躍的情況，且也無法處理具有美式性質(American-style feature)的金融商品如callable/putable bonds。但在現實情況中，公司償還公司負債與發行具有可贖回或可賣回性質的債券是非常普遍的，若無法合理將這些情況考慮進評價模型中，這樣的評價結果也不能確切表達出其真實的價值。因此，本文運用數值樹狀結構模型來彌補這些缺點，並依據以下文獻延伸發展出 DFPM-HWT。

・**杜宛珮 (2007)**：一般公司負債的結構通常是由不同到期日的負債所組合而成，假定有一公司的負債結構是由到期日 T_1 的負債 B_1 與到期日 T_2 的負債 B_2 所構成 $(T_1 < T_2)$，此時若要評價公司債 B_2 的價值就要考慮到在 T_1 時間點償還負債 B_1 所造成資產價值離散跳躍的問題。但是 Black and Cox (1976) 所提出的 FPM 卻無法處理此種情況，因為其模型假設違約門檻為一外生給定的常數，若公司償還負債，其負債結構也會隨之產生變動，其違約門檻也需變動作調整，否則會造成不合理的評價結果。因此，杜宛珮 (2007) 提出 DFPM(Discrete First Passage Model)來改善上述的問題。DFPM 運用 Bion-Trinomial Tree 消除違約門檻所產生的非線性誤差，和償還公司債所造成的公司資產價值離散跳躍，其評價的方法比 FPM 更合理，可視為 FPM 的延伸。

・**鍾明璋 (2008)**：提出 EDFPM (Extension DFPM) 放寬 DFPM 利率為固定常數的假設，討論資產價值與利率變動為兩相關隨機過程的評價方法。運用正交化將相依的兩隨機過程轉換成兩個獨立的隨機過程，含有資產特性的新變數以 DFPM 的方法算出其變動機率，含有利率特性的新變數則以二元樹的方法算出其變動機率，再經由獨立的特性將其個別的變動機率相乘求出聯合變動機率，最後經由折

現的步驟求出公司負債的價值。此為 Longstaff and Schwartz (1995) 評價模型的延伸，但是仍具有違約門檻為外生給定常數和利率期限結構為均衡模型的缺點。

第三節　建構 DFPM-HWT 方法的參考文獻

DFPM-HWT 評價模型建立在無套利利率期限結構模型和 FPM 評價模型基礎下所延伸出的數值樹狀模型。建構此樹狀模型，需先解決資產價值與利率變動具有相依性的特性，若直接運用利率與資產做二維度的立體樹評價，即會發生在 backward induction 時，其聯合機率無法求得的問題；另外，Figlewski and Gao (1999) 提出運用數值方法評價具有門檻性質的衍生性商品價值時，會因非線性誤差而造成評價結果跳動的問題。以下介紹三個建構 DFPM-HWT 的立基文獻。

・**Acharya and Carpenter (2002)**：提出引用 Kim, Ramaswamy and Sundaresan (1993) 的評價模型，假設公司資產價值服從幾何布朗運動，利率為 CIR 利率期間結構，採用正交化的方法和樹狀結構模型，評價出具有違約風險的公司債價值並探討其避險方法。經由正交化的過程，可將原來具有相關性的兩個隨機過程轉換成彼此互相獨立的新變數，根據獨立性的特質，即可運用彼此的邊際機率相乘求出其聯合機率。首先，建立二維度節點重合的立體格子樹，運用變數變換將格子點所對應的原資產價值與利率求出，再搭配聯合機率即能評價具有違約風險的公司債價值。

・**Hull and White (1994)**： 提出兩階段建立利率三元樹的方法，將連續型的 Hull and White 短期模型改為離散時間型(discrete time)的隨機過程，也就是將瞬間短期利率 r(t)轉換成模擬距到期日為△t 的零息利率 R(t,t+△t)，其中△t 為利率樹每期時間的間隔，此零息利率的隨機過程為:

$$dR(t,t+\Delta t)=(\theta(t)+aR(t,t+\Delta t))dt+\eta dW_2 \quad 。 \qquad (2.3.1)$$

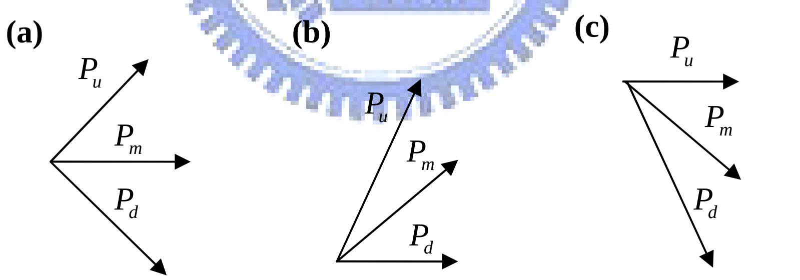
第一階段

建立期初利率值為零，θ(t)為零，並且對稱於$R^*(t)=0$的三元樹，此$R^*(t)$的隨機過程為:

$$dR^*(t)=-aR^*(t)dt+\eta dW_2 \quad , \qquad (2.3.2)$$

$R^*(t+\Delta t)-R^*(t)$服從期望值為$-aR^*(t)\Delta t$, 變異數為$\eta^2\Delta t$的常態分配。

定義$\Delta R^*=\eta\sqrt{3\Delta t}$為利率樹的間距，任一節點(i,j)代表時間為 i$\Delta t$，利率$R^*(t)$為的$j\Delta R^*$節點，利率$R^*(t)$在下一期上漲的機率為$P_u$，不變的機率為$P_m$，下降的機率為$P_d$。並設置利率上界$j_{max}=0.184/(a\Delta t)$和利率下界$j_{min}=-0.184/(a\Delta t)$，當利率碰觸到利率下界時，其下期的變動走勢為(b)；當利率碰觸到利率上界時，其下期的變動走勢為(c)；當利率未碰觸到上界與下界時，其下期的變動走勢為(a)，此項設定使利率表視出有均數回歸 (mean reversion) 的特性。再利用一階與二階常態分配的動差函數和機率總和為一等三個方程式解出P_u、P_m、P_d的機率值。



『圖 2.1』利率變動機率的示意圖

第二階段

在第一階段求出的利率樹和當時市場所觀察到的利率期間結構未必一致，因此，第二階段主要是要調整$R^*(t)$樹上的節點都能符合期初市場上的利率期間結構，並將 $R^*(t)$三元樹轉換成 r(t)三元樹。定義$\alpha_i\equiv\alpha(i\Delta t)=r(i\Delta t)-R^*(i\Delta t)$，並定義$Q_{i,j}$為在利率走到節點(i,j)時支付一元，否則報酬為零的商品現值。運用α_i與$Q_{i,j}$讓 r(t)三元樹符合期初市場上的利率期間結構的特性，以前推法(Forward induction)求出

下列公式。

$$\alpha_i = \frac{\ln\sum_{j=-\eta_i}^{\eta_i} Q_{m,j} e^{-j\Delta R^* \Delta t} - \ln P_{i+1}}{\Delta t} \qquad (2.3.3)$$

其中 P_{i+1} 為在 $(i+1)\Delta t$ 到期的零息債券價格，η_i 為三元樹在 $i\Delta t$ 時變數 j 的最大值。

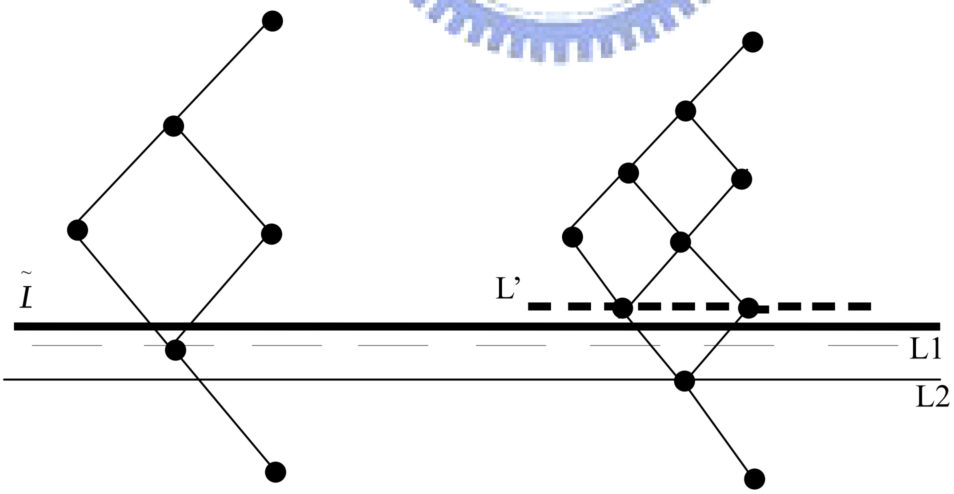
求出 α_i 後可推出下列公式。

$$Q_{i+1,j} = \sum_k Q_{i,k}\, q(k,j) \exp[-(\alpha_i + k\Delta R)\Delta t] \qquad (2.3.4)$$

其中 $q(k,j)$ 為節點(i,k)走到節點(i+1,j)的機率。

算出每一期的 α_i，再運用一開始給定的 a 和 σ 等固定常數，就可以求出與市場上利率期間結構一致的利率樹。

・**Dai and Lyuu (2006)**：提出的 Bino-trinomial tree (BTT) 可解決數值樹狀模型評價障礙選擇權 (Barrier option) 所產生的非線性誤差。非線性誤差主要因違約門檻值與選擇權價值函數並非線性關係而造成，故使用數值樹狀方法評價時，違約門檻會隨著切割期數不同而造成擺盪的現象。



『圖 2.2』非線性誤差

圖中兩期的 CRR 樹並沒有碰到真實的門檻值 $\tilde{L}$，而是以最接近 $\tilde{L}$ 的節點值 L1 為門檻。而在三期的 CRR 樹則是選擇接近 L1 的 L2 為門檻值。

BTT 結合 CRR 二元樹和一階段的三元樹結構。本文將引用 Dai and Lyuu (2006) 所提出解決 single-barrier options 的 BTT 建構方法，建構能與違約門檻重合的樹狀結構。

建構評價障礙選擇權的樹狀結構方法，首先需考慮其樹狀節點是否能與真實門檻值重合，在已知有固定門檻值的情況下，BTT 立足於建構一個能與門檻值重合的二元 CRR 樹，在原時間點到第一期，建立出比二元樹多一自由度的三元樹，以解決已碰觸到門檻的 CRR 樹無法與原時間點股價重合的問題。

參考圖(2.3)，假設 $\beta \equiv \hat{u} - u$， $\alpha \equiv \hat{u} + 2\sigma\sqrt{\Delta t} - u = \beta + 2\sigma\sqrt{\Delta t}$ ，

$$\gamma \equiv \hat{u} - 2\sigma\sqrt{\Delta t} - u = \beta - 2\sigma\sqrt{\Delta t} \quad 。 \tag{2.3.5}$$

其中 $u = (r - \sigma^2/2)\Delta t$ ，$\hat{u} = \ln(S_B/S_0) - \ln(S_0/S_0) = \ln(S_B/S_0)$ ，$\beta \in [-\sigma\sqrt{\Delta t}, \sigma\sqrt{\Delta t})$。

再根據以下三個等式以 Cramer's rule 求出股價變動的機率，

$$P_{su} \cdot \alpha + P_{sm} \cdot \beta + P_{sd} \cdot \gamma = 0 \quad ， \tag{2.3.6}$$

$$P_{su} \cdot \alpha^2 + P_{sm} \cdot \beta^2 + P_{sd} \cdot \gamma^2 = \sigma^2 \cdot \Delta t \quad ， \tag{2.3.7}$$

$$P_{su} + P_{sm} + P_{sd} = 1 \quad 。 \tag{2.3.8}$$

而 CRR 樹的股價變動機率為

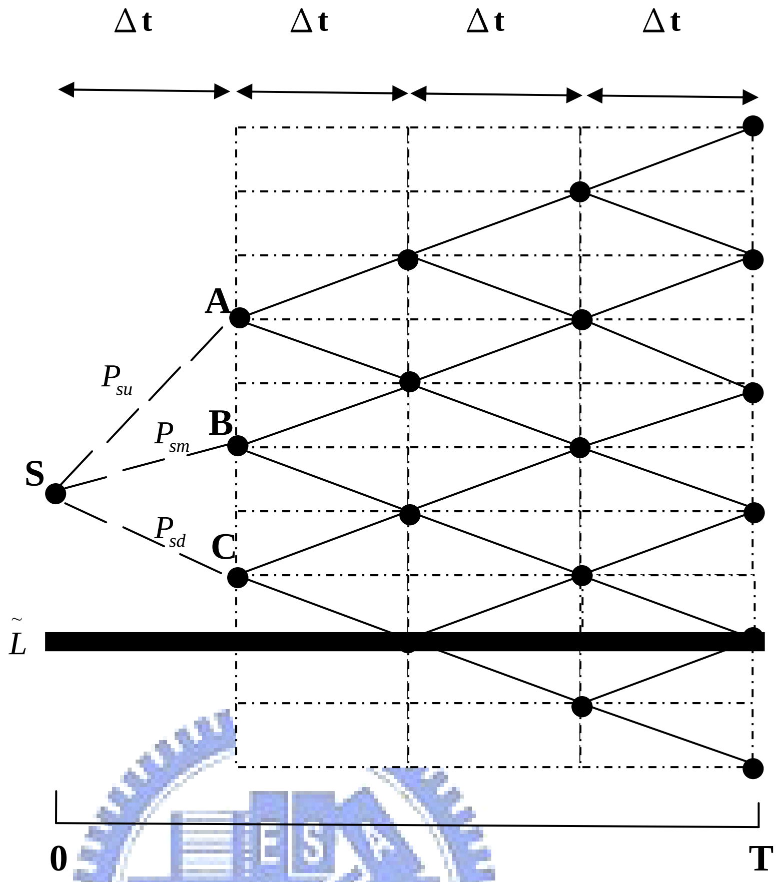
$$P_{CRRu} = (e^{r\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}})/(e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}) \quad ， \tag{2.3.9}$$

$$P_{CRRd} = 1 - P_{CRRu} \quad 。 \tag{2.3.10}$$

所有節點變動的機率和到期日的選擇權價值出現之後，運用標準的後推法 (backward induction) 即能求出此障礙選擇權的期初價值。

$$u_s = e^{-r\Delta t}(P_{su}u_A + P_{sm}u_B + P_{sd}u_C) \quad ， \tag{2.3.11}$$

其中 u_s 為在 S 節點的障礙選擇權價值。



『圖 2.3』BTT 示意圖

圖中 $\tilde{L} \equiv \ln(Barrier/S_0)$，縱軸的單位為 $\ln(S(t)/S_0)$，其中 S(t)為 t 時股價價格。

第三章　研究方法

本文提出的DFPM-HWT數值方法為Briys and Varenne (1997) 評價模型的延伸。此新式的樹狀評價模型是以無套利利率結構模型為基礎，運用正交化的轉換過程，將利率與資產價值變動此兩相依的隨機過程轉變成彼此獨立的新變數，並且運用 BTT 造樹方法的理念，解決違約門檻可能造成的非線性誤差和資產價值發生離散跳躍的評價衡量。DFPM-HWT 不僅能評價具有利率隨機性和違約風險的公司負債價值，還能處理資產價值具有離散跳躍情形的負債評價。

第一節是提出此數值模基的基礎假設。第二節介紹如何建構 DFPM-HWT。第三節示範 DFPM-HWT 樹狀結構的評價過程。

第一節　　模型的基礎假設

此數值模型的基礎假設前六點主要是引用 Briys and Varenne (1997) 所提出的論點，第七點則是處理資產價值具離散跳躍時所應用的前提假設。

一、 資本市場是一個完全市場 (perfect market) 且證券的交易具連續性。

Harrison and Kreps (1979) 提出在這個假設存在唯一的風險中立機率測度Q，任何證券的折現價格在此測度下，皆遵循 Martingale 的性質。

二、 隨機利率 r(t)為 Hull and White (1990) 的 extended Vasicek model

$$dr(t)=a(b(t)-r(t))dt+\eta dW_2(t) \tag{3.1.1}$$

或

$$dr(t)=(\theta(t)-a\cdot r(t))dt+\eta(t)dW_2(t) \tag{3.1.2}$$

其中，a 為均數復迴歸率，η 為利率的波動度，此二參數皆為固定常數;b(t)為利率的長期水準，$\theta(t)=a\cdot b(t)$，此二變數會隨時間改變而變動。

三、 公司資產價值 V(t)服從幾何布朗運動(Geometric Brownian Motion):

$$\frac{dV(t)}{V(t)}=r(t)dt+\sigma dW_1(t) \tag{3.1.3}$$

$$d\ln V(t)=(r(t)-\frac{\sigma^2}{2})dt+\sigma dW_1(t) \quad \text{(by Ito's lemma)} \tag{3.1.4}$$

$$d\ln V(t)=(r(t)-\frac{\sigma^2}{2})dt+\sigma[\rho dW_2(t)+\sqrt{1-\rho^2}dZ(t)] \tag{3.1.5}$$

$dW_1(t)=\rho dW_2(t)+\sqrt{1-\rho^2}dZ(t)$，其中 $W_2(t)$ 與 $Z(t)$ 為互相獨立的布朗運動，ρ 為公司資產價值與利率變動的相關性。

四、根據 (3.1.1) 式可推出到期日為 T 於 t 時無風險的零息債券價值 B(t,T)，在風險中立機率測度下的隨機過程為:

$$\frac{dB(t,T)}{B(t,T)}=r(t)dt+\sigma_B(t,T)dW_2(t) \tag{3.1.6}$$

其中 $\sigma_B(t,T)$ 為無風險零息債券價格的波動度，在利率波動度與均數回歸率為固定常數假設下，參考第二章第一節 Longstaff and Schwartz (1995) 評價模型對 $\sigma_B(t,T)$ 的定義，可得

$$\begin{aligned}\sigma_B(t,T)&=\eta\cdot\int_t^T \exp(-\int_t^u ads)du\\&=\eta\cdot\int_t^T e^{-a(u-t)}du=\frac{\eta}{a}(1-e^{-a(T-t)})\end{aligned} \quad , \tag{3.1.7}$$

五、假設債權人受保護條款 (safety covenant) 的保護，當公司資產低於其特定違約門檻時, 債權人可以行使公司破產或重整的權力。定義其特定時間點的違約門檻 $\tilde{v}(t)$ 為

$$\tilde{v}(t)=\xi\cdot L\cdot B(t,T) \quad ,0\le\xi\le1 \quad , \tag{3.1.8}$$

其中 ξ 為固定常數，可視為對債權人的保護程度。

六、當違約發生時，公司債權人會收到部分的公司資產價值。假設在到期日前違約，回收率為 $f_1(0\le f_1\le 1)$；在到期日違約，其回收率為 $f_2(0\le f_2\le 1)$。f_1和 f_2的多寡可由市場上不同的保護條款做調整，此項條件放寬將使得定價模型更符合真實市場。

七、當公司需償還負債時，公司股東並不會挪用自身的資金去償付本金，而是以變買公司資產的方式來償還。

第二節　DFPM-HWT 的建構

根據第一節的第二和第三個假設，可了解資產與利率這兩個隨機過程具有相依性，運用樹狀結構模型進行評價時，需要明確了解這兩個隨機過程的變動聯合機率才能運算，然而在現實的狀態下，並不容易建構這兩個隨機過程的聯合機率，因此，本文採用正交化的方法，將利率和資產此兩個變數轉換成兩個互相獨立的變數，簡化聯合機率的計算。再運用 Hull and White (1990) 所提出三元利率樹的特性產生具有利率特質的新變數 Y(t)，並引用 Dai and Lyuu(2006)所提出的 BTT (Bino-trinomial tree) 建樹方法建立具有違約門檻性質的新變數 X(t)，結合這兩個三元樹創造出二維度的立體格子樹，最後經由後推法 (Backward induction) 評價出公司負債的價值。

接下來將介紹建構 DFPM-HWT 的步驟:

一、正交化

本文期望引用 Briys and Varenne (1997) 的評價模型，運用正交化的方法將資產價值與利率變動轉換成兩獨立隨機過程，再運用樹狀結構模型對公司負債價值

做合理的評價。

首先，將資產隨機過程 (3.1.5) 與利率隨機過程 (3.1.2) 運用矩陣的形式表示

$$\begin{bmatrix} d\ln V(t) \\ dr(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(t)-\dfrac{\sigma^2}{2} \\ \theta(t)-a\cdot r(t) \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2}\sigma & \rho\sigma \\ 0 & \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dZ(t) \\ dW_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.2.1)$$

求出 $\begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2}\sigma & \rho\sigma \\ 0 & \eta \end{bmatrix}$ 矩陣的反矩陣(inverse of matrix)，再將其反矩陣 (3.2.2) 對 (3.2.1) 等式的左右相乘，可得 (3.2.3) 式。

$$\begin{bmatrix} \sqrt{1-\rho^2}\sigma & \rho\sigma \\ 0 & \eta \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(\sqrt{1-\rho^2})\sigma\eta} \begin{bmatrix} \eta & -\rho\sigma \\ 0 & \sqrt{1-\rho^2}\sigma \end{bmatrix} \text{，} \quad (3.2.2)$$

$$\begin{bmatrix} dX(t) \\ dY(t) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \dfrac{d\ln V(t)}{\sigma\sqrt{1-\rho^2}} - \dfrac{\rho dr(t)}{\eta\sqrt{1-\rho^2}} \\ \dfrac{dr(t)}{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{r(t)-\dfrac{\sigma^2}{2}}{\sigma\sqrt{1-\rho^2}} - \dfrac{\rho(\theta(t)-ar(t))}{\eta\sqrt{1-\rho^2}} \\ \dfrac{(\theta(t)-ar(t))}{\eta} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dZ(t) \\ dW_2(t) \end{bmatrix} \text{。} \quad (3.2.3)$$

其中 $X(t)=X(0)+\dfrac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\dfrac{\ln\dfrac{V(t)}{V(0)}}{\sigma}-\rho\left[\dfrac{r(t)-r(0)}{\eta}\right]\right)$， (a)

$Y(t)=Y(0)+\dfrac{r(t)-r(0)}{\eta}$ ， (b)

令 $X(0)\equiv 0$、$Y(0)\equiv 0$、V(0)為公司資產的起始價值、r(0)為起始的短期利率。則 (3.2.3) 式會轉變為 (3.2.4) 和 (3.2.5) 式。

$$\begin{bmatrix} dX(t) \\ dY(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{r(t)-\dfrac{\sigma^2}{2}}{\sigma\sqrt{1-\rho^2}} - \dfrac{\rho(\theta(t)-ar(t))}{\eta\sqrt{1-\rho^2}} \\ \dfrac{(\theta(t)-ar(t))}{\eta} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dZ(t) \\ dW_2(t) \end{bmatrix} \text{，} \quad (3.2.4)$$

$$\begin{bmatrix} dX(t) \\ dY(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_X(t) \\ u_Y(t) \end{bmatrix}dt+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dZ(t) \\ dW_2(t) \end{bmatrix} \quad 。 \qquad (3.2.5)$$

X(t)的 drift 項為 $u_X(t)=\dfrac{r(t)-\dfrac{\sigma^2}{2}}{\sigma\sqrt{1-\rho^2}}-\dfrac{\rho(\theta(t)-ar(t))}{\eta\sqrt{1-\rho^2}}$，Y(t)的 drift 項為 $u_Y(t)=\dfrac{(\theta(t)-ar(t))}{\eta}$，再經由 (a) 和 (b) 求出資產價格 V(t)和利率價值 r(t)並可用 X(t)和 Y(t)表示如下:

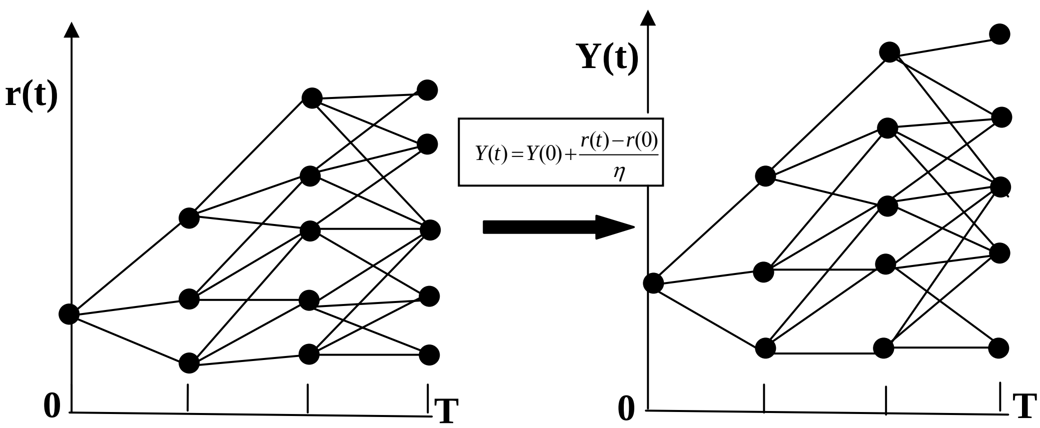
$$V(t)=V(0)\exp\{\sigma(\sqrt{1-\rho^2}\cdot X(t)+\rho\cdot Y(t))\}\text{，}\quad r(t)=r(0)+Y(t)\cdot\eta \quad 。 \qquad (3.2.6)$$

求出兩獨立的新變數 X(t)和 Y(t)後，要分別建構出 X(t)和 Y(t)的樹狀結構，並加以結合和評價。

二、 建構 Y 變數的三元樹狀結構

因為$r(t)=r(0)+Y(t)\cdot\eta$，故可看出利率 r(t)與新變數 Y(t)互相為一對一的線性關係。我們可以先生成出利率的數值樹狀結構，再經由簡單的調整，生成新變數 Y(t)的樹狀結構。

運用第二章第三節所介紹的 Hull and White 兩階段利率三元樹的建構方法，建構出具有均數復歸 (mean reversion) 性質的利率期限結構，再經由簡單的變數變換即可求出 Y(t)變數的三元樹。



『圖 3.1』建構 Y(t)三元樹的示意圖

從圖 (3.1) 可知每一個 Y(t)三元樹的節點都存在唯一對應的 r(t)節點，且 Y(t)

節點變動到下一期的機率都於其對應的 r(t)節點的變動機率相等。因此，建構出的 Y(t)三元樹也具有 Hull-White tree 的利率特性。

其 Y(t)的變動機率為

(a)

$$\begin{cases} P_{YU}=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}(a^2j^2\Delta t^2-aj\Delta t) \\ P_{YM}=\frac{2}{3}-a^2j^2\Delta t^2 \\ P_{YD}=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}(a^2j^2\Delta t^2+aj\Delta t) \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} P_{YU}=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}(a^2j^2\Delta t^2+aj\Delta t) \\ P_{YM}=-\frac{1}{3}-a^2j^2\Delta t^2-2aj\Delta t \\ P_{YD}=\frac{7}{6}+\frac{1}{2}(a^2j^2\Delta t^2+3aj\Delta t) \end{cases}$$

(c)

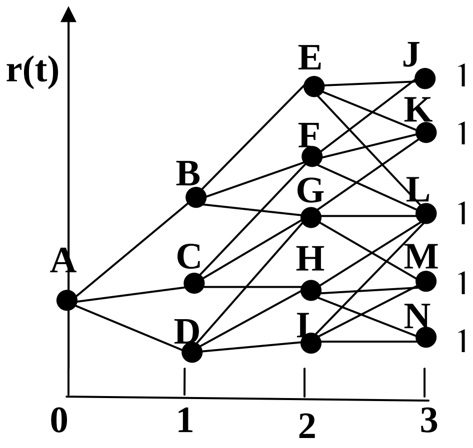
$$\begin{cases} P_{YU}=\frac{7}{6}+\frac{1}{2}(a^2j^2\Delta t^2-3aj\Delta t) \\ P_{YM}=-\frac{1}{3}-a^2j^2\Delta t^2+2aj\Delta t \\ P_{YD}=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}(a^2j^2\Delta t^2-aj\Delta t) \end{cases}$$

根據『圖 2.1』的分類列出，其中 j 為固定時間上 r(t)三元樹的節點位置。

三、建構 X 變數的三元樹

根據第二章的第一節可了解 Briys and Varenne(1997)評價模型對違約門檻的設定為 $\tilde{v}(t)=\xi\cdot L\cdot B(t,T)$,$0\le\xi\le1$，和無風險零息債券價格相關。因此，可藉由 Hull and White 利率樹推出每個節點對應的無風險零息債券價格。

建構出 Hull and White 三元利率期限結構樹後，即可以運用後推法(backward induction)求出不同時點到到期日 T 的零息債券價格 B(t,T)。



『圖 3.2』運用 backward induction 求 B(t,T)

註:假定債券在第三期到期，面值為 1，則 E 節點的零息債券價格為

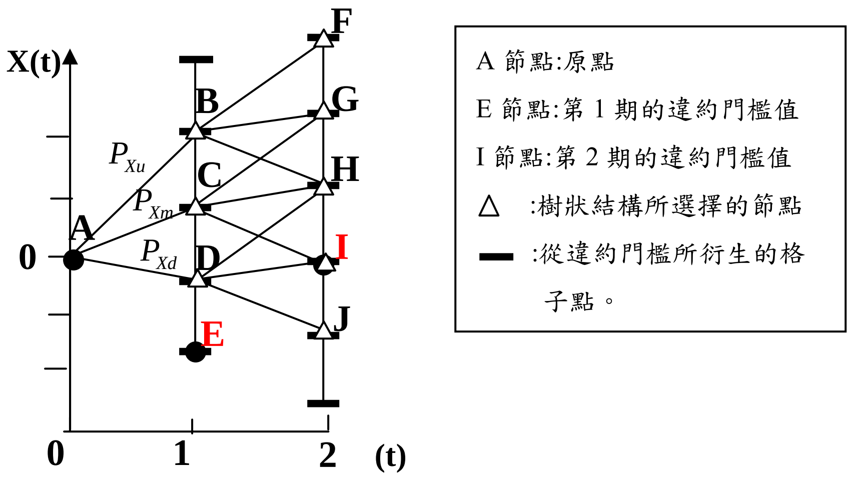
$B_E(2,T)=e^{-r_E(2)\Delta t}(1\cdot \mathrm{P_{ru}(E)}+1\cdot \mathrm{P_{rm}(E)}+1\cdot \mathrm{P_{rd}(E)})$，其中 $\mathrm{P_{ru}(E)}$ 為利率從 E 節點上升至 J 節點的機率;

$P_{rm}(E)$為利率從 E 節點移至 K 節點的機率；$P_{rd}(E)$為利率從 E 節點下降至 L 節點的機率。

經由此方法可求出每一個節點到到期日 T 的零息債券價格，也可藉由違約門檻的定義特性求出每一個利率節點或是每一個 Y(t)節點所對應的違約門檻值。

參考 (3.1.8) 的門檻值設定，並將每一個 Y(t)節點所對應的違約門檻值經由正交化的變數變換函數轉換成 $\tilde{X}(t)=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}(\frac{\ln(\tilde{v}(t)/V(0))}{\sigma}-\rho Y(t))$，以 E 節點為例，其所對應的 X 變數的違約門檻值為 $\tilde{X}_E(2)=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}(\frac{\ln((\xi\cdot L\cdot B_E(2,T))/V(0))}{\sigma}-\rho Y_E(2))$。因此，當 Y(t)變數的三元樹建構完成，也同時求出每一個 Y(t)節點所對應的 X(t)變數的違約門檻值。建構出 Y(t)變數的三元樹狀結構後，從要評價的時點至到時日之間 X(t)所要對應的變動門檻值 $\tilde{X}(t)$都可以明確計算出來。

從第二章的『圖 2.3』可發現，所有的 BTT 節點與門檻值 $\tilde{L}$ 的間距都是 $\sigma_S\sqrt{\Delta t}$ 的倍數。在三元樹部分，當下一期的上漲、不變、下跌的節點彼此間距都是 $2\sigma_S\sqrt{\Delta t}$，當期的節點一定可以找到一個下一期的節點使到它們之間的距離在 $[u_S-\sigma_S\sqrt{\Delta t},u_S+\sigma_S\sqrt{\Delta t})$ 的區間裡，再將此距離向上和向下位移 $2\sigma_S\sqrt{\Delta t}$ 即求出下一期上漲、下跌的節點並建構出三元樹。因此，根據這個想法可推展出已知下一期的門檻值的情況下，將與門檻值間距為一定倍數的格子點都表示出來，運用上述的特性可以找到於原點對應的下一期格子點。



『圖 3.3』建構 X(t)的示意圖

假設 $dX(t)=u_X dt+\sigma_X dW_1(t)$，故在 0 到 1 期間裡 $X(t)\sim N(u_X\Delta t,\sigma_X^2\Delta t)$，我們可在違約門檻 E 節點所產生出的格子點找尋到 B 節點，使得

$(B-A)\in[u_X\Delta t-\sigma_X\sqrt{\Delta t},u_X\Delta t+\sigma_X\sqrt{\Delta t})$。另外，從(3.2.3)式可得知 $\sigma_x=1$、

$u_x(t)=\dfrac{r(t)-\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma\sqrt{1-\rho^2}}-\dfrac{\rho(\theta(t)-ar(t))}{\eta\sqrt{1-\rho^2}}$，其中的 $\theta(t)$ 可用(3.2.7)式估計出。

$$\hat{\theta}(t)=\frac{\alpha(t+1)-\alpha(t)}{\Delta t}+a\cdot\alpha(t+1) \qquad (3.2.7)$$

其中 $\alpha(t)$ 為 t 時 Hull-White 利率樹的調整因子，a 為均數復迴歸率。

(3.2.7)為引用 Hull and White (2005) 所提出的估計方法。

因此，$\beta\equiv(B-A)-u_X$ (3.2.8)

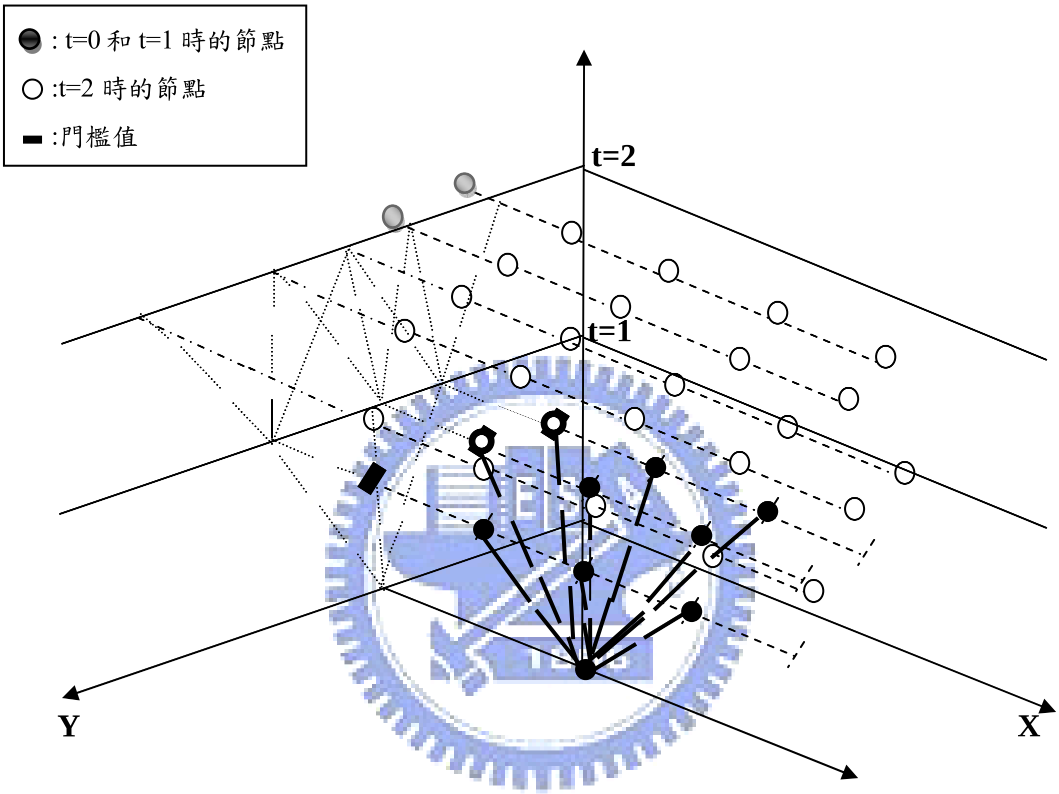
$$\alpha\equiv(B-A)-u_X+2\sigma_X\sqrt{\Delta t} \longrightarrow C\equiv B+2\sigma_X\sqrt{\Delta t} \qquad (3.2.9)$$

$$\gamma\equiv(B-A)-u_X-2\sigma_X\sqrt{\Delta t} \longrightarrow D\equiv B-2\sigma_X\sqrt{\Delta t} \qquad (3.2.10)$$

可運用 BTT 建樹方法分別求出 P_{Xu}、P_{Xm}、P_{Xd} (參考 (2.3.9) 式)。

接下來用同樣的步驟可求出第二期在違約門檻 J 節點為基礎下的 X 三元樹節點 F、G、H、I、J。

DFPM-HWT 的 X(t)三元樹運用上述的想法建構出整個三元樹的節點與移動機率值，此項建樹方法可使得每一期 X(t)三元樹的節點與當期的變動門檻值之間的距離都為 $2\sigma_X\sqrt{\Delta t}$ 的倍數，所以儘管每一期的違約門檻值都不盡相同，但是 DFPM-HWT 的 X(t)三元樹每一期的節點仍然有與違約門檻值重合的機會。



『圖 3.4』建構 DFPM-HWT 的示意圖

『圖 3.4』為結合彼此獨立的 Y(t)三元樹和 X(t)三元樹所建構出的 DFPM-HWT。根據第二章的 (2.1.11) 式可知此債券於到期日的所有可能價值，再運用 (2.1.12) 式的離散型標準後推法(backward induction)求出今日的公司負債價值，其中所使用的聯合變動機率可由 X(t) 和 Y(t)的邊際機率相乘得知。

第三節　DFPM-HWT 的評價介紹

本文以實際例子介紹 DFPM-HWT 評價模型，假設有一到期日為一年的零息公司債，其面額為 3000 元 (L=3000)，且此公司在簽定這項交易時給予債權人申請此公司破產的權力，此權力是依據已明確規定的違約門檻為基礎。假設現在公司資產價值為 5000 元，市場上的零息利率 (zero rate) 為表(3.1)給定。

表(3.1)市場上的零息利率

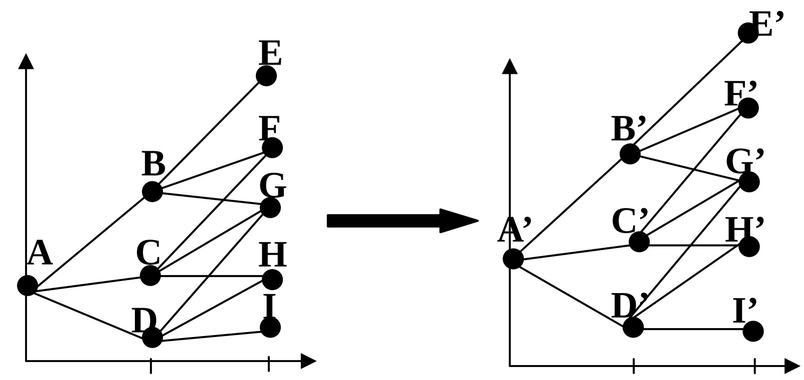
到期日	零息利率
0.5(年)	0.0343
1(年)	0.03824
1.5(年)	0.04183
2(年)	0.04512
2.5(年)	0.04815
3(年)	0.05086

此資料來自 Options, Futures and Other Derivatives-sixth edition 一書第 665 頁 Table28.1。

將期初已知的外生變數帶入 DFPM-HWT 評價模型中，σ=0.2、a=0.1、η=0.01 和 ρ=-0.25，違約門檻為 $\tilde{v}(t)=\xi\cdot L\cdot B(t,T)$，$\xi$=0.9。當公司資產價值小於此門檻，債權人即能申請此公司破產，此時可拿回 80%的資產價值 ($f_1=f_2$=0.8)。

確立了其初的外生變數後，接著運用第三章第二節的建構方法產生 DFPM-HWT 立體樹狀結構。

經由第三章第二節的 (3.2.6) 式可了解正交化後新變數的型態。先造出 dt=0.5 年的 Hull-White 利率樹，再轉換成 Y 變數的三元樹。下『圖 3.5』可了解每個節點所包含的訊息



節點	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*
R(%)	3.4300	5.4440	4.2193	2.9945	7.3553	6.1305	4.9058	3.681	2.4563
P_u	0.1670	0.1432	0.1670	0.1932	0.1220	0.1432	0.1670	0.1932	0.2220
P_m	0.6660	0.6635	0.6660	0.6635	0.6560	0.6635	0.6660	0.6635	0.6560
P_d	0.167	0.1932	0.1670	0.1432	0.2220	0.1932	0.1670	0.1432	0.1220

節點	*A’*	*B’*	*C’*	*D’*	*E’*	*F’*	*G’*	*H’*	*I’*
Y	0	2.0139	0.7892	-0.4354	3.9252	2.7005	1.4757	0.2510	-0.9737
P_{Yu}	0.1670	0.1432	0.1670	0.1932	0.1220	0.1432	0.1670	0.1932	0.2220
P_{Ym}	0.6660	0.6635	0.6660	0.6635	0.6560	0.6635	0.6660	0.6635	0.6560
P_{Yd}	0.1670	0.1932	0.1670	0.1432	0.2220	0.1932	0.1670	0.1432	0.1220

『圖 3.5』列出利率樹和 Y 變數三元樹的機率和節點值

註:此為 John Hull 的 Options, Futures, and Other Derivatives 一書 Figure 28.9 的修改。

由利率樹的節點可求出每一個節點所應對應的無風險零息債券價值$B(t,T)$，經過計算求出每一個節點的門檻值$\tilde{v}(t)$，並將其轉換成 X 變數所對應的門檻值$\tilde{X}(t)$求出，表(3.2)是全部資訊的整理:

表(3.2)違約門檻值

節點	A'	B'	C'	D'	E'	F'	G'	H'	I'
$\tilde{v}(t)$	2598.701	2627.497	2643.636	2659.875	3000	3000	3000	3000	3000
$\tilde{X}(t)$	-3.3794	-2.8025	-3.0871	-3.3717	-1.6244	-1.9406	-2.2568	-2.5730	-2.8893

另外，由 (3.2.7) 式可以求出 $\hat{\theta}(0)=0.0200043$、$\hat{\theta}(1)=0.018636$，和 $\hat{\theta}(2)=0.017578$。經由 BTT 建樹方法和(3.2.8)、(3.2.9)、(3.2.10)式可建構出 X 變數的三元樹。其中每一節點所對應的 u_X 整理於表(3.3)：

表(3.3)給定 Y 節點下對應的平均值

節點	*A'*	*B'*	*C'*	*D'*	*E'*	*F'*	*G'*	*H'*	*I'*
u_X	0.2508	0.259231	0.2434	0.2276	0.2702	0.2544	0.2386	0.2228	0.2069

參考『圖 3.4』的示意圖，經由 BTT 建構方法的核心想法，可從 t=0 的原點建構出同一時間、不同違約門檻值的不同面向的 X 變數三元樹，依照同樣的方法就可以產生出立體的 DFPM-HWT 樹狀結構。

當期的每一個節點在下一期都可以移動至 9 個節點，經由標準的後推法將下一期 9 個節點的債券價值與其節點移動的機率作結合，再運用這一期節點所對應的利率值做折現，照這個步驟不斷的往後推算，即可求出此零息的公司債價值為 2887.416454 元。

第四章　模型數值分析結果與討論

Briys and Varenne (1997) 評價模型雖然運用無套利 Hull and White 利率模型與 FPM 基礎性質解釋利率隨機性與公司違約的狀況，但是其模型只能探討零息的公司債券。當公司債券具有可贖回的性質時，此評價模型就無法順利運作。另外，當資產價值具有離散跳躍性質時，此模型仍然是無法順利評價。本文所提出的 DFPM-HWT 可以解決以下所面臨的情況，並且可以考慮到現實社會上離散的公司資訊對公司價值的影響。第一節是 DFPM-HWT 與 Briys and Varenne 評價模型的比較；第二節考慮離散跳躍因子；第三節可贖回債 (callable bond) 的評價。

第一節　評價模型的比較

此節將DFPM-HWT和Briys and Varenne (1997) 的評價模型做比較，可發現當DFPM-HWT模型切割期數越大時，其評價的價值越接近Briys and Varenne (1997) 評價模型的封閉解。下表4.1為模型的比較整理:

表4.1模型比較整理

切割期數 N	DFPM-HWT		具有非線性誤差的評價模型	
	債券價值	相對誤差(%)	債券價值	相對誤差(%)
1	2887.445753	0.1076	3000	4.009824
45	2885.416007	0.037204	2886.78963	0.084827
90	2885.214342	0.030212	2886.74343	0.083225
180	2885.061554	0.024915	2886.69979	0.081712
360	2884.946165	0.0209	2908.91887	0.852047

註:到期日為1年，公司資產5000，債券面額3000，σ=0.2，η=0.01，ρ=-0.25, a=0.1, $f_1=f_2$=0.8, ξ=0.9;相對誤差分別為不同的評價方法與Briys and Varenne(1997)評價模型的封閉解(2884.342922)比較求得。

從表4.1可顯示出解決非線性誤差的重要性，當數值樹狀結構不具有解決非線

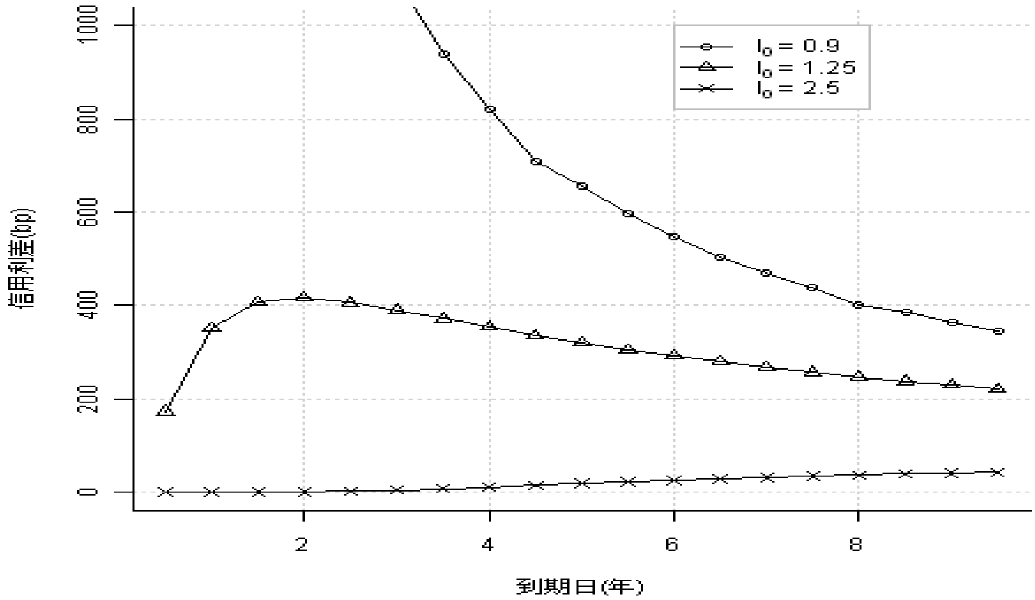
性誤差的特性時，就算將切割期間切得越細，其評價誤差不會平滑 (smooth) 的收斂，會有誤差振盪 (oscillation) 的現象。

另外，Briys and Varenne (1997) 提出運用(2.1.13)式中的$l_0=\frac{V(0)}{LB(0,T)}$作為公司的槓桿程度 (leverage levels)，並觀察不同的槓桿程度對公司信用利差 (Credit spreads) 的影響。運用等式(4.1)可求算出公司的信用利差，觀察不同槓桿程度下，公司信用利差的變化。從『圖 4.1』發現，公司槓桿程度愈小 (l_0=2.5) 時，其信用利差呈現緩慢上升的趨勢;當槓桿程度中等 (l_0=1.25) 時，其信用利差在前幾年會急遽上升，但到達了一定程度後就會緩慢下降;而當槓桿程度愈大(l_0=1.25)時，其信用利差呈現負斜率的下降趨勢。此趨勢圖與 Merton (1974) 和 Briys and Varenne (1997) 的結果相同並符合許多實證文獻的結果 (Jones,Mason, and Rosenfeld(1984), Ogden(1987),和 Sarig and Warga(1989))。

在圖(4.1)的信用利差定義為

$$CS_0=-\frac{1}{T}\ln\frac{D_0}{LB(0,T)} \tag{4.1.1}$$

其中 T 為到期日，D_0為有風險零息債券現在的價值 (代入 DFPM-HWT 所評價出的債券價值)，L 為風險債券的本金，$B(0,T)$為到期日為 T 在衡量時間點(t=0)的無風險零息債券價值。



『圖4.1』公司槓桿程度與信用利差的關係

註:X軸代表到期日，Y軸為信用利差。初始已知變數:資產的波動度0.2，利率的波動度0.01，均數復歸率0.1，資產與利率變動相關係數-0.25，債權人的保護程度ξ=0.9，違約時的回收比率$f_1 = f_2$=0.8。零息利率資料採用John Hull (2006)一書第670頁的Table 28.2。

第二節　考慮離散跳躍因子

從第四章第一節可知 DFPM-HWT 評價模型可以近似連續型的 Briys and Varenne 評價模型，甚至可將 Briys and Varenne 評價模型視為其模型的特例，因為 DFPM-HWT 評價模型可考慮包含離散跳躍因子的債券評價等延伸。現實社會上公司的負債結構不可能皆由同一種到期日的負債所構成，但是 Briys and Varenne (1997) 評價模型，卻將公司的總負債價值視為一個零息債券，因此，若在評價的總期間內有部份負債是到期日前就必須償還，此套假設邏輯就會產生問題而無法順利評價。另外，公司的總負債結構通常是由不同期間的負債構成，當部份的負債在評價的到期日前償還，其整體的負債結構會隨之變動，其違約門檻

也會有所調整。Briys and Varenne(1997)評價模型卻仍運用總負債價值的折現值做違約門檻，並未做適當的調整。DFPM-HWT 評價模型是運用 BTT 的建構方法造出具有違約門檻性質的立體樹，就算違約門檻會調整變動，但因為調整變動後的門檻值在造出 Y 變數三元樹後就可以確定，因此，可使用 BTT 的特性造出一定會與門檻值重合的立體樹來解決違約門檻變動的情況。以下舉一個公司償還負債的例子來說明。

假設公司的總負債為 3000，是由要衡量的債券 A(到期日為 T)與到期日為 5 年的債券 B 所構成，其中債券 A 的本金為 1000，債券 B 的本金為 2000。公司的違約門檻因償還債券 B 的情況，可將違約門檻設為以下定義：

When T < 5 year

$$\tilde{v}(t) \equiv \xi \cdot 1000 \cdot B(t,T) + \xi \cdot 2000 \cdot B(t,5) \quad ,$$

$$\tilde{v}(T) \equiv 1000 + \xi \cdot 2000 \cdot B(T,5) \quad 。$$

When T = 5 year

$$\tilde{v}(t) \equiv \xi \cdot 1000 \cdot B(t,T) + \xi \cdot 2000 \cdot B(t,5)$$

$$\tilde{v}(T) \equiv 1000 + 2000 = 3000 \quad 。$$

When T > 5 year

$$\tilde{v}(t) \equiv \xi \cdot 1000 \cdot B(t,T) + \xi \cdot 2000 \cdot B(t,5) \quad , \quad \text{if} \quad t < 5 \text{ year},$$

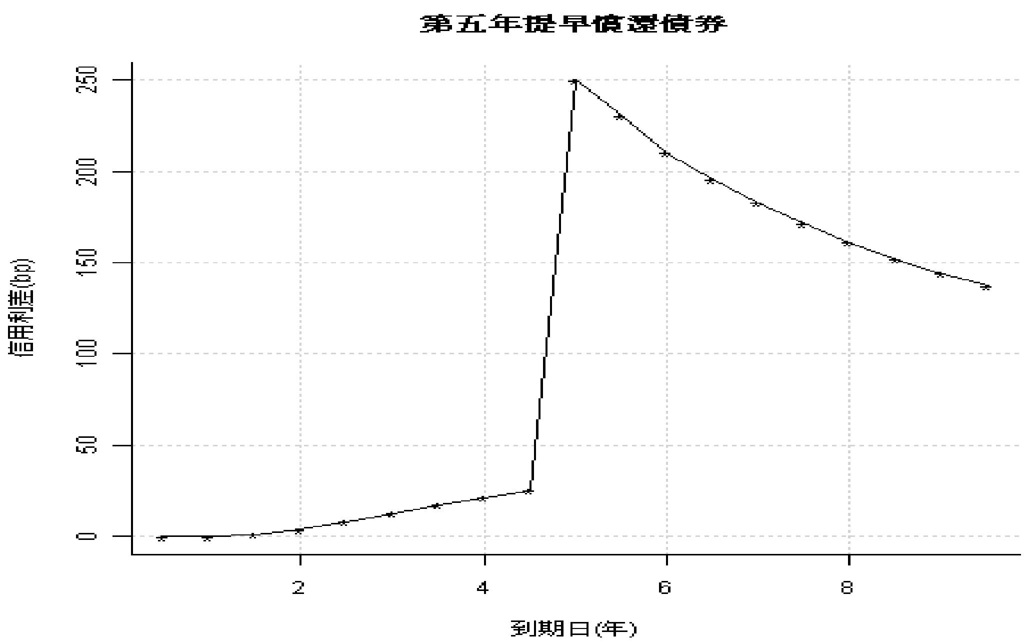
$$\tilde{v}(t) \equiv \xi \cdot 1000 \cdot B(t,T) + 2000 \quad , \quad \text{if} \quad t = 5 \text{ year},$$

$$\tilde{v}(t) \equiv \xi \cdot 1000 \cdot B(t,T) \quad , \quad \text{if } 5 \text{ year} < t < T \text{ year},$$

$$\tilde{v}(T) \equiv 1000 \quad , \quad \text{if} \quad T > 5 \text{ year} \quad 。$$

其中在 5 年內發生違約狀況時，債券 A 的債權人所拿到的金額依比例與債券 B 的債權人劃分。以債券 A 債權人的角度觀察，公司第 5 年償還債券 B 時，應

會檢視到其信用利差在第 5 年時明顯增加，然而在 5 年後因為違約門檻向下調整，所以應會有償還債券 B 後的信用利差逐漸下降的狀況。從『圖 4.2』可看出 DFPM-HWT 評價模型能合理表示其債券的信用風險狀態，並能更適切地評價出其合理的負債價值。



『圖4.2』第五年償還負債

註:X軸為到期日，Y軸為信用利差。初始已知變數:原資產價值5000，資產的波動度0.4，利率的波動度0.01，均數復歸率0.1，資產與利率變動相關係數-0.25，債權人的保護程度ξ=0.9，違約時的回收比率 $f_1 = f_2$=0.8。零息利率資料採用John Hull (2006)一書第670頁的Table 28.2。

另外，上述的評價情況也可視為付息債券的評價方法，在評價付息債券價值時，將定義公司發生違約的狀況為當公司無法在付息日付出債息或在到期日時無法償還本金和債息給債權人，因此，可將付息債券依其現金流量的情況拆解為依到期日公司付出金額為本金、到期日相同的零息債券和依付息金額為本金、到期日為付息時間點的若干零息債券所構成。當公司付出債息給債權人，即可視為公司償還到期日為付息時間點的零息債券，因為公司在付債息時需支出一筆金額，

此會造成公司資產價值離散跳躍。依此邏輯推論，DFPM-HWT 評價模型即可評價出具有利率與信用風險的付息債券的價值，此解決 Briys and Varenne (1997) 評價模型只能評價零息債券的缺點。

第三節　可贖回債的評價

Briys and Varenne (1997) 評價模型是將公司負債視為零息債券，依選擇權定價基礎求出合理價值，因此，可運用此邏輯定價出公司發行的零息債券價值。然而，衡量的債券擁有可贖回的性質時，此評價模型的封閉解就無法確切地評價出合理的債券價值。可贖回債券給予債券發行人一個可以提早贖回債券的權利，在特定的可贖回時點至到期日前，債務人皆可依契約訂定的贖回價將發行的債券買回。此類債券的價值與利率的變動有極密切的關係，當市場利率走低時，債務人可行使贖回的權利，並再發行較低債息的債券以減少融資成本。因此，評價可贖回債券時必須將利率隨機性與適切性考慮周延，以免評價出錯誤的結果。

・評價可贖回債券價值

本文提出的 DFPM-HWT 評價模型不僅能在包含利率與信用風險下考慮離散跳躍的情況，更能處理債券具有可贖回特性的評價。以具有歐式買權的可贖回債券為例，在不考慮稅務優惠 (tax benefit) 下，債券包含債券可贖回時間點 (CT) 和贖回價格 (S)，可贖回價格的債券價值僅需在原 DFPM-HWT 樹狀結構模型的可贖回點加入判斷條件 (4.3.1) 即可求得。

$$\min(D_{CT}(x,y),S) \tag{4.3.1}$$

其中 $D_{CT}(x,y)$ 為在可贖回點上所有 DFPM-HWT 立體樹節點所對應的債券價值，x 為 $X(t)$ 三元樹的節點，y 為 $Y(t)$ 三元樹的節點，S 為可贖回價格。

另外，從 (4.3.1) 式的假設可看出公司決定贖回債券時，一定擁有足夠的公

司資產價值去變現贖回。因為在決定贖回時，公司資產等於權益價值加上負債 $(V_{CT}=D_{CT}+E_{CT})$，而權益價值為非負的實數 $(E_{CT}\geq 0)$，所以此時的公司資產價值必大於等於負債價值 $(V_{CT}\geq D_{CT})$，根據(4.3.1)式可知公司贖回此債券必定是在 $D_{CT}(x,y)>S$ 時執行此贖回權，因此在 (4.3.1) 式的假設中可確保公司有足夠的資產價值去贖回債券 $(V_{CT}\geq D_{CT}>S)$。

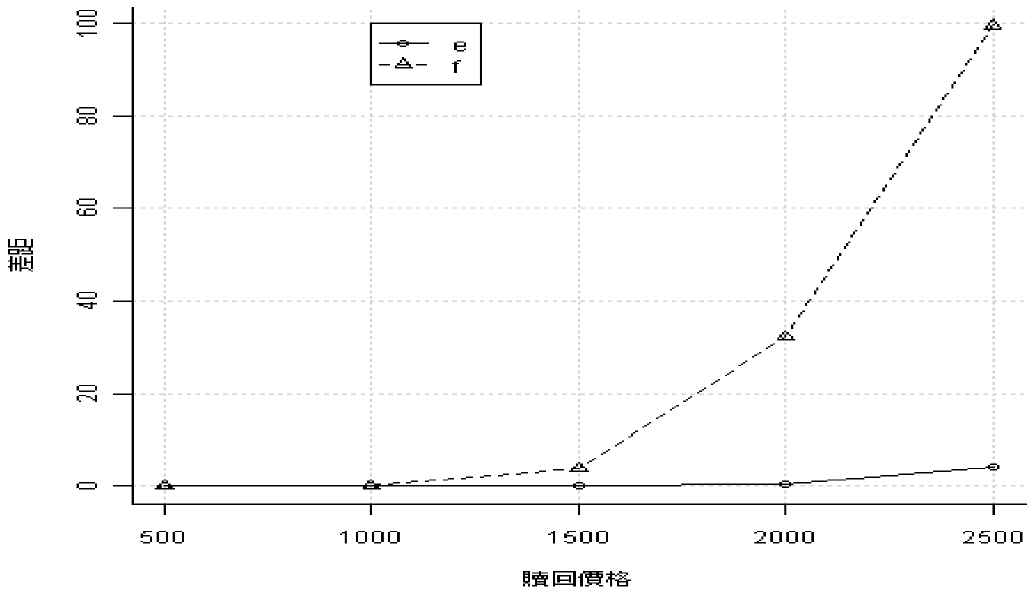
運用 DFPM-HWT 評價模型來探討債券具有可贖回性質對與債權人風險的影響，從表 4.3 可發現 (b) 的債券價值明顯比 (a) 的價值低，而 (b) 與 (a) 的利差差距即為公司債債權人所承受的信用風險後應獲得到的超額報酬； (c) 的可贖回債券與 (a) 的公司債的利差差距反應了可贖回選擇權的價值。另外，(d) 的債券價值都比其它三種債券價值還低，主要是因為此種債券考慮了違約風險與可贖回性質，而 (c) 與 (d) 的利差都會隨著贖回價格越低而越高，此顯示出 DFPM-HWT 評價模型可以合理地考慮到贖回債券的性質。而且可從表 4.2 發現 (b) 與 (c) 的利差相加並不等於 (d) 的利差值，因為在公司資產價值很低的情況下，此公司違約的可能性很大，即便在利率走低，贖回債券對公司有利的狀況下，公司可能會沒有足夠的資本去贖回債券，所以執行此買權的可能性將變低。若只將只考慮違約風險的利差 (b) 與只考慮可贖回性質的利差 (c) 相加來求算考慮二種情況的利差 (d)，會發生衡量產生偏誤的現象。因此，DFPM-HWT 評價模型能夠更確實地反應出債權人承受信用風險與可贖回性質後應給予的超額報酬。

表 4.2 不同風險因子的比較

贖回價格	無違約風險的普通零息債券(a)		有違約風險的普通零息債券(b)		無違約風險的可贖回債券(c)		有違約風險的可贖回債券(d)	
	價值	利差 (bp)	價值	利差 (bp)	價值	利差 (bp)	價值	利差 (bp)
2700	2482.9125	0	2466.1149	22.63	2403.0576	108.97	2395.3283	119.71
2650	2482.9125	0	2466.1149	22.63	2358.7740	170.97	2353.1924	178.86
2600	2482.9125	0	2466.1149	22.63	2314.4462	234.21	2310.1571	240.39
2550	2482.9125	0	2466.1149	22.63	2270.1184	298.67	2266.6634	303.74

註:此四種債券的到期日皆為 3 年，c 與 d 的贖回時間點為第 2 年。起始資訊：原公司資產價值 5000，資產的波動度 0.2，利率的波動度 0.01，均數復歸率 0.1，資產與利率變動相關係數-0.25，債權人的保護程度 ξ=0.9，違約時的回收比率 $f_1 = f_2$=0.8。零息利率資料採用用 John Hull (2006) 一書第 670 頁的 Table。

『圖 4.3』可看出期初體質差 (f) 的公司其所承受的違約風險會隨著贖回價格越高而比體質好 (e) 的公司更大，此顯示出當贖回價格越高時，債權人所承受的信用風險程度會越明顯。



『圖 4.3』公司體質與風險承受的關係

註:縱軸為違約風險的可贖回債券(d)與無違約風險的可贖回債券(c)的利差差距，為了觀察方便都在將差距的單位為(bp);e 為期初資產價值 5000 的體質良好公司，f 為期初資產價值 3200 的體質較差公司，二個公司的以下期初資訊皆相同:資產的波動度 0.2，利率的波動度 0.01，均數復歸率 0.1，資產與利率變動相關係數-0.25，債權人的保護程度 ξ=0.9，違約時的回收比率 $f_1 = f_2$=0.8。零息利率資料採用用 John Hull (2006)一書第 670 頁的 Table。

・評價贖回買權的價值

可贖回債券可視為一個普通債券與以此債券為標的物的買權所構成，買權的價值定義為 call option value = noncallable bond value –callable bond value。在討論無風險狀態下的可贖回零息債券，可根據 Hull and White (1990)定義的公式求出此買權的價值，此公式為:

$$ZBC(CT,T,X)=D(CT)\Phi(h)-SD(T)\Phi(h-\sigma_B) \qquad (4.3.2)$$

其中 $\sigma_B=\eta\sqrt{\dfrac{1-e^{-2a(CT)}}{2a}}\cdot\dfrac{1}{a}[1-e^{-a(T-CT)}]$ ， $h=\dfrac{1}{\sigma_B}\ln\dfrac{D(CT)}{D(T)S}+\dfrac{\sigma_B}{2}$

，$ZBC(CT,T,X)$ 為可贖回時點 CT、標的債券到期日 T、贖回價 X 的歐式可贖回債券，$D(CT)$ 為本金 1 元到期日為 CT 的零息債券，$D(T)$ 為本金 1 元到期日 T 的零息債券，$\Phi(\cdot)$ 為標準常態分配的累積機率分配。

表 4.3 為由 DFPM-HWT 評價模型所推導出的無違約風險的贖回買權價值與(4.3.2)式的比較整理，可發現其相對誤差極小，且隨著贖回價格越低而有越精確的趨勢，代表著 DFPM-HWT 評價模型對於具有高贖回風險的債券評價更為準確，也表示債權人可運用此項模型對贖回所造成的風險做有效的控管。

表 4.3 無違約風險的贖回買權比較

贖回價格	DFPM-HWT 買權價值	(4.2)式 買權價值	|相對誤差|·(%)
2700	79.85486	78.53938	1.67493
2650	124.1386	123.0259	0.90441
2600	168.4663	167.5519	0.5457
2550	212.7942	212.0781	0.33763

註:評價的債券為到期日 3 年、贖回時點為 2 年、本金 3000，具有歐式贖回權的零息債券。起始資訊：原公司資產價值 5000，資產的波動度 0.2，利率的波動度 0.01，均數復歸率 0.1，資產與利率變動相關係數-0.25，債權人的保護程度 ξ=0.9，違約時的回收比率 $f_1=f_2$=0.8。零息利率資料採用 Options, Futures and Other Derivatives-sixth edition 一書第 670 頁的 Table。

(4.3.2)式的贖回買權評價公式只能應用於標的物為無風險的零息債券，對於考慮公司違約風險的零息債券卻無法衡量；DFPM-HWT 評價模型可評價出具有違約風險的贖回買權價值，此為 (4.3.2) 式的延伸，更可視 (4.3.2) 式為 DFPM-HWT 的特例。表(4.4)為不同贖回價格與不同贖回時點的敏感度分析整理，可發現不論贖回時間點在何時，其包含違約風險的贖回買權價值皆低於無違約風險的贖回買權，故此評價模型的確能適切地考慮信用風險的因素。另外，隨著贖回價格愈高，其選擇權價值隨著贖回時間點的變動更形激烈，在高的贖回價格下，贖回時間點的長短對於此贖回買權和可贖回債券的價值都有顯著的影響。

表 4.4 贖回價格與贖回時點的敏感度分析

贖回價格	選擇權價值 贖回時間點： 1 年		選擇權價值 贖回時間點： 1.5 年		選擇權價值 贖回時間點： 2 年	
	UD	*D*	*UD*	*D*	*UD*	*D*
2700	0.571214	0.366855	13.86504	10.95206	79.85486	70.11749
2650	5.27489	3.763103	44.27438	36.64328	124.1386	112.1095
2600	24.1139	18.28642	87.34022	75.3817	168.4663	154.8459
2550	61.23772	49.41959	133.1778	118.5262	212.7942	197.8453

註:評價的債券為到期日3年本金3000，具有歐式贖回權的零息債券, UD代表沒有考慮違約可能性的選擇權價值，D代表考慮違約可能性的選擇權價值。起始資訊：原公司資產價值5000，資產的波動度0.2，利率的波動度0.01，均數復歸率0.1，資產與利率變動相關係數-0.25，債權人的保護程度ξ=0.9，違約時的回收比率 $f_1 = f_2$=0.8。零息利率資料採用用John Hull (2006)一書第670頁的Table 28.2。

第五章　結論與後續研究發展

第一節　　結論

本文提出的 DFPM-HWT 評價模型不僅包含 DFPM 解決非線性誤差的特性，也具有 Hull-White 利率結構與市場利率配合的優點。此評價模型具有以下優點：在模型結構方面，離散型模型更能觀察市場利率和公司財報等離散時間訊息，而且公司在償還負債、提早贖回負債或遭遇法律訴訟的時間點皆為離散時間而非連續時間，運用離散時間點衡量負債價值比連續時間點來得更合理。在信用風險方面，此評價模型的違約門檻可隨著利率的隨機變動做調整，比外生給定的違約門檻更能合理地考慮公司違約的狀況，另外，放寬了回收率的限制，使此模型更能符合現實債券市場上複雜的契約規則。在模型延伸方面，此評價模型更能處理資產，包含離散跳躍因子與債券可贖回特性的評價，從第四章第二節可了解不同型態的離散跳躍，此模型都可以合理評價；另外，也可以評價可贖回債券等複雜形式的債券，解決 Briys and Varenne (1997) 評價模型無法處理的債券型態。

第二節　　後續研究建議

本文提出的 DFPM-HWT 評價模型雖然可以處理許多現實情況下的負債評價，但尚有許多方面能更加精進。提供以下兩方面做參考：

一、　負債評價方面

本文假設利率為 Hull and White (1990) 提出的 extended Vasicek model (參考(3.1.1)式)，後續研究可以放寬利率波動度與均數復迴歸率為固定常數的限制，使其模型更加完善。另外，本文評價的債券類型皆為固定債息的債券型態，後續研究可以延伸探討浮動債息的公司債類型與可轉換債等債券型態的評價，讓其模型

更適合實務上的運用。

二、　衍生性商品評價方面

本文提出的 DFPM-HWT 評價模型的建構理念，可延伸至其它種商品的價值評價，例如具有障礙性質的彩虹選擇權即依據兩項隨機過程的標的物所構成，且具有門檻限制的性質，即可運用此項建構理念來評價。

參考文獻

中文文獻

「1」杜宛珮, “運用在信用風險模型的創新數值方法DFPM”,國立交通大學,碩士論文,民國96年。

「2」鍾明璋, “隨機利率下信用風險之衡量-使用創新之立體樹狀模型”,國立交通大學,碩士論文,民國97年。

英文文獻

「1」Acharya, V. V., and Carpenter J.N., “Corporate Bond Valuation and Hedging with Stochastic Interest Rates and Endogenous Bankruptcy,” *The Review of Financial Studies*, 15, 1355-1383, 2002.

「2」Bielecki, T. R., and Rutkowski M., *Credit Risk: Modeling, Valuation and Hedging,* Springer Finance, 2004.

「3」Black, F., and Cox, J.C., “Valuing Corporate Securities：Some Effects of Bond Indenture provisions,” *Journal of Finance*, 31, 361-367, 1976.

「4」Brigo, D., and Mercurio, F., *Interest Rate Models Theory and Practice,* Springer Finance, 2003.

「5」Briys, E., and De Varenne, F., “Valuing Risky Fixed Rate Debt：An Extension,” *Journal of Finance and Quantitative Analysis*, 32, 239-248, 1997.

「6」Dai, T.S., and Lyuu, Y.D., “The Bino-Trinomial Tree：a Simple Model for Efficient and Accurate Option Pricing.”, Announced in the Asian FA/FMA 2006 Meeting, Auckland, New Zealand.2006.

「7」Lando, D., *Credit Risk Modeling-Theory and Application,* Princeton University

Press, 2004.

「8」Fabozzi, F. J.,*Bond Markets, Analysis, and Strategies,* Pearson Education,2007

「9」Figlewski, S., and Gao, B., "The Adaptive Mesh Model；A New Approach to E.cient Option Pricing," *The Journal of Finance Economics*, 53, 313-351, 1999.

「10」Geske, R., "The Valuation of Corporate Liabilities as Compound Options,"*Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 12 , 541-552, 1977.

「11」Hull, J., *Options, Futures, and Other Derivatives 6Th. Englewood Cliffs,* NJ Prentice-Hall, 2006.

「12」Hull, J., and A. White, *Hull-White on Derivatives-A Compilation of Articles ,* Risk Books, 2005.

「13」Hull, J., and A. White, "Using Hull-White Interest-Rate Trees," *Journal of derivatives*, 3, 26-36, 1996.

「14」Hull, J., and A. White, "Pricing Interest-Rate-Derivative Securities," *The Review of Financial Studies*, 3, 573-592, 1990.

「15」Kim, I. J., Ramaswamy, K., and Sundaresan, S. M., "Does default risk in coupons affect the valuation of corporate bonds?: A contingent claims model," *Financial Management* 22, 117-131, 1993.

「16」London, J., *Modeling Derivatives in C++,* Wiley Finance, 2004.

「17」Longstaff, F.A.Schwartz, E.S., "A Simple Approach to Valuing Risky Fixed and Floating Rate Debt," *The Journal of Finance*, 50, 789-819, 1995.

「18」Merton, R. C., "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest rates," *The Journal of Finance* 29, 449-470, 1974.

「19」Nielsen, L. T., Saá-Requejo, J., and Santa-Clara, P., "Default Risk and Interest Rate Risk: The Term Structure of Default Spreads," Working Paper, INSEAD, 1993.

「20」Shreve, S., *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models,* Springer Finance**,** 2007.

「21」Vasicek, O., “An Equilibrium Characterization of the Term Structure,” *Journal of Financial Economics* 5, 177-188, 1977.

「22」Van Deventer, D. R., Lmai, K., and Mesler, M., *Advanced Financial Risk Management-Tools and Techniques for Integrated Credit Risk and Interest Rate Risk Management, John Wiley & Sons*, 2005.