

國立交通大學  
資訊科學與工程研究所

碩 士 論 文

應 用 顯 隱 性 變 分 積 分 器  
於 變 形 物 體 的 高 頻 震 動 運 動 保 持

Preserving High-Frequency Vibration of Deformable Objects Using  
the Implicit-Explicit Variational Integrator

研 究 生：黃錫洲

指 導 教 授：林文杰 教授

中 華 民 國 一 百 年 八 月

應用顯隱性變分積分器於變形物體的高頻震動運動保持  
Preserving High-Frequency Vibration of Deformable Objects

Using the Implicit-Explicit Variational Integrator

研究生：黃錫洲

Student : Hsi-Chou Huang

指導教授：林文杰

Advisor : Wen-Chieh Lin

國立交通大學

資訊工程研究所

碩士論文

A Thesis

Submitted to Department of Computer Science and Engineering

College of Computer Science

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

in

Computer Science

August 2011

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一百年八月

## 中文摘要

本論文提出了一個有效率的方法可維持變形物體之高頻振動運動。在電腦動畫中，變形物體之高頻振動運動的細節日益被重視，然而相關之研究鮮少被討論。在過去為了模擬高頻振動運動，通常使用隱性變分積分器以維持高頻能量。但變形物體同時具有高頻和低頻運動，而隱性變分積分器將無法有效率地模擬低頻運動。本論文使用顯隱性變分積分器模擬變形物體，該變分積分器以顯性法模擬低頻位能、隱性法模擬高頻位能，使之效能優於一般變分積分器。然而，顯隱性變分積分器無法直接使用在一般變形物體的模擬方法上，因此我們採取簡化有限元素法透過 Courant-Friedrichs-Lewy(CFL)條件將系統位能分成高頻和低頻位能再將之運用至顯隱性變分積分器之上。實驗結果顯示我們的架構可加速模擬速度並有效的保持系統能量，應用在不同變形物體上。



## ABSTRACT

In this thesis, we propose an efficient approach to preserve high frequency vibration of deformable objects. In computer animation, the motion details of deformable objects have become more and more important but rarely been discussed. In the past, simulating high-frequency vibration motion in implicit variational integrators are usually applied to preserve high-frequency energy. The motions of deformable objects could be decomposed into low-frequency and high-frequency modes; however, implicit variational integrators cannot simulate low-frequency modes efficiently. We use the implicit-explicit variational integrator to simulate deformable objects. The computational performance of implicit- explicit variational integrator is better than that of normal variational integrators as the low-frequency energy part is integrated explicitly and the high-frequency energy part is integrated implicitly; however, the implicit-explicit variational integrator cannot directly applied to deformation simulation. Therefore, we use the Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) condition to decompose system potential energy into low-frequency and high-frequency potential energy, respectively. In our experiments, our framework can improve the simulation speed and preserve the system energy on different deformable objects.

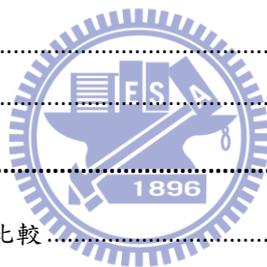
## 誌謝

我必須感謝我的指導教授林文杰博士的耐心指導。還有這段時間 GPL 和 CAIG 實驗室的同儕們陪伴和指教。最後，我必須感謝家人的支持和鼓勵，讓我可以沒有懊悔的全力完成碩士學位。



# 目錄

中文摘要 .....	I
ABSTRACT .....	II
誌謝 .....	II
目錄 .....	IV
圖目錄 .....	VI
表格目錄 .....	VIII
中英文對照表 .....	IX
第一章 緒論 .....	1
第二章 文獻回顧 .....	4
2.1 簡化的有限元素法 .....	4
2.2 積分器 .....	7
第三章 幾何力學與變分積分器簡介 .....	10
3.1 傳統積分器和變分積分器比較 .....	10
3.2 連續幾何力學 .....	11
3.2.1 連續 Lagrangian 力學 .....	12
3.2.2 連續 Hamiltonian 力學 .....	13
3.3 離散幾何力學 .....	14
3.3.1 離散 Lagrangian 力學 .....	14
3.3.2 離散 Hamiltonian 力學 .....	15
3.4 變分積分器 .....	16
3.4.1 Stormer-Verlet .....	17
3.4.2 隱性中點法 .....	17
3.4.3 NEWMARK .....	18
第四章 方法 .....	19
4.1 簡化 ST. VENANT-KIRCHHOFF 有限元素法 .....	19
4.1.1 簡化的運動方程式 .....	20



4.1.2	簡化的多項式力和切線勁度矩陣.....	21
4.1.3	線性模態分析和模態導數.....	22
4.1.4	施作外力和呈現動畫.....	22
4.2	拆解簡化 ST.VENANT 有限元素法.....	22
4.2.1	Courant–Friedrichs–Lewy (CFL) 條件.....	23
4.2.2	依據自然頻率拆解.....	23
4.3	顯隱性變分積分器(IMEXv).....	24
4.3.1	保守場顯隱性變分積分器.....	24
4.3.2	非保守場顯隱性變分積分器.....	27
4.4	實作顯隱性變分積分器 在簡化 ST. VENANT-KIRCHHOFF 變形物體.....	30
4.4.1	Quasi-Newton 法.....	31
4.4.2	Quasi-Newton 法，在質量是單位矩陣.....	33
<b>第五章 實驗.....</b>		<b>35</b>
5.1	實驗設定.....	35
5.2	實驗一:IMEXv 和 NEWMARK 無環境阻尼下的能量行為比較.....	40
5.3	實驗二:IMEXv 和 NEWMARK 有環境阻尼下的能量行為比較.....	41
5.4	實驗三:驗證系統能量的保持.....	43
5.5	實驗四:不同時間區間大小比較.....	44
5.6	效能比較.....	45
5.7	限制條件.....	46
<b>第六章 貢獻與未來展望.....</b>		<b>48</b>
6.1	貢獻.....	48
6.2	綜合討論.....	48
6.3	未來展望.....	49
<b>參考資料.....</b>		<b>52</b>
<b>附錄一 小定理.....</b>		<b>56</b>
<b>附錄二 能量圖比較.....</b>		<b>57</b>
<b>附錄三 效能數據.....</b>		<b>72</b>

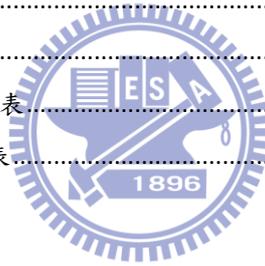
# 圖目錄

圖 1 系統架構流程圖。最上層是有限元素法簡化，中間為經由自然震盪頻率拆解系統，最底層是數值運算。.....	3
圖 2 MODAL WARPING[6]，CHOI 和 KO 透過線性模態分析取得線性基底，如上圖所示分為六個運動模式，但此基底為線性基底無法施作大變位分析。.....	5
圖 3 DATA-DRIVEN DEFORMATION MODELING。JAMES 和 FATAHALIAN [8] 透過(A)預先計算的資料取得(B)簡化運動模式.....	6
圖 4 線性運動模組和模態導數[2]。BARBIC 和 JAMES 透過模態分析取得線性運動模式(LINEAR MODES)接著對線性運動模式取得模態導數(MODAL DERIVATIVE)。.....	6
圖 5 半隱性積分器的布料模擬[4]。BRAFF 和 WITKIN 透過半隱性積分器模擬布料動畫，因為數值阻尼導致細節無法有效保持。.....	7
圖 6 非變分積分器和 AVI 積分器布料模擬比較。左圖為隱性 EULER 法計算出來的布料(H=0.00075 秒)、中圖同樣為隱性 EULER 法(H=0.001 秒)，最右圖為使用 AVI(H=0.00037 秒)，H 是時間區間(TIMESTEP)大小。隱性 EULER 法，因為過度收斂導致(數值阻尼)，無法有效保持細節(皺褶)，而 AVI 可以有效保持細節[15]。.....	8
圖 7 非同步變分積分器(AVI)系列容易發生線性共振導致不穩定。R-RESPA 為一個 AVI 系列的變分積分器，容易因為發生共振導致系統不穩定。而 IMEXV 可以有效保持穩定性。[1].....	9
圖 8 拆解布料隱性求解矩陣。BOXERMAN 和 ASCHER[14]透過拆解布料的彈簧將低頻彈簧由顯性法計算已達到化簡 JACOBIAN 矩陣。左圖為原始 JACOBIAN 矩陣的非零項次示意圖，左圖是經過拆解的矩陣。.....	9
圖 9 理想單擺於不同積分器的運動行為。最左為傳統顯性積分器、中間為傳統隱性積分器、最右邊為變分積分器。單擺下方為擺動軌跡，只有變分積分器的解維持在一定範圍之內。.....	11
圖 10 可形變模型既施力示意圖。針對每一個模型，做單點施力。藍色箭頭是施力方向和大小。.....	37
圖 11 固定時間長度施力示意圖。給予系統單一大小外力加時間為 0.3 秒。在 0.3 秒之後即無外力作用，如最右下角所示。時間順序為由左至右，由上至下。.....	38
圖 12 週期性施力示意圖。藍色箭頭為施力方向和大小會隨著時間而改變，時間順序為由左至右，由上至下。.....	39
圖 13 衝擊力無環境阻尼能量圖。在此兩者能量是有些許不同是因為兩者的 QUADRATURE 不相同(IMEXV $\alpha = 0.5$ 、NEWMARK $\alpha = 1.0$ )。.....	41
圖 14 固定時間長度施力無環境阻尼能量圖。IMEXV 和 NEWMARK，因為施力長達 100 個 FRAME，使	

得 QUADURATE 係數(IMEXV $\alpha = 0.5$ 、NEWMARK $\alpha = 1.0$ )的影響下降，所以能量圖近乎相同。 .....	41
圖 15 週期性施力無環境阻尼能量圖。此為施力為 1Hz 正弦波力的能量圖。因為給予外力是一個持續性週期施力，所以系統能量將持續累積。在此施力狀況，IMEXV 和 NEWMARK 的能量圖是幾乎相同的。 .....	42
圖 17 良好能量行為驗證圖。此為 HORSE 的能量圖，左邊是 0 到 35 秒、右邊是 9966 秒到 10000 秒。表示經過了三百萬個 FRAMES。結果顯示，後 3 秒的整體能量比前 35 秒增加了 2%、後 30 秒的高頻能量比前 35 秒消散 28%。其中，施力條件是給予一個初始的衝擊力，在中間過程中不具有外力、阻尼力。時間區間大小為 0.003 秒模擬時間是 10000 秒。(A)、(B)圖為系統總能量，(c)、(D)為系統高頻能量。 .....	43
圖 18 不同時間區間大小巨觀能量圖。此為 BEAM 的能量圖，表示在時間區間大小並不會影響巨觀能量圖。此圖可以觀察出在我們設定的三個時間區間的能量曲線是非常類似的。其中我們設定的是時間區間大小為 0.01 秒、0.005 秒、0.001 秒。施力條件為初始給予長達 0.3 秒的施力，在中間過程不具有其他外力跟阻尼力。 .....	44
圖 19 不同時間區間大小微觀能量圖。此為圖 18 僅觀察 0~1 秒。可以發現三個時間區間大小雖然相當類似，但還是有些些許不同，其中時間區間越小變化越是快速，但整體還是相當類似。 .....	45
圖 22 BEAM 衝擊力能量圖 .....	57
圖 23 BEAM 固定時間施力能量圖 .....	58
圖 24 BEAM 週期性施力能量圖 .....	59
圖 25 BASKET 衝擊力能量圖 .....	60
圖 26 BASKET 固定時間施力能量圖 .....	61
圖 27 BASKET 週期性施力能量圖 .....	62
圖 28 BRIDGE 固定時間施力能量圖 .....	63
圖 29 BASKET 週期性施力能量圖 .....	64
圖 30 TOWER 衝擊力能量圖 .....	65
圖 31 TOWER 固定時間施力能量圖 .....	66
圖 32 TOWER 週期性施力能量圖 .....	67
圖 33 HEART 衝擊力能量圖 .....	68
圖 34 HEART 固定時間施力能量圖 .....	69
圖 35 HEART 週期性施力能量圖 .....	70

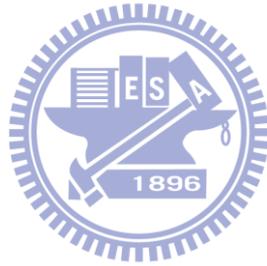
## 表格目錄

表 1 時間區間為 0.003 秒的高頻低頻運動模式數量表。高低頻運動模式數量由系統拆解決定.....	46
表 2 IMEXV vs. NEWMARK 無阻尼加速比較表。以下數據是 IMEXV 對 NEWMARK 的加速倍率，在此 IMEXV 運算速度皆比 NEWMARK 來的快速，所以此圖之中。其中可以發現 HEART 的加速比例是 最高的。是因為 NEWMARK 需要 30 個運動模式皆為隱性求解，而 IMEXV 只有 3 個運動模式隱 性求解可以達到大量加速。詳細數據請見附錄。.....	46
表 3 實驗一 IMEXV 所達成的模擬時間長度(秒)。在 36 組實驗裡面有 IMEXV 三組未能夠達成設定的 30 秒的實驗。如表中的綠色部分即是無法完成的組別。.....	51
表 4 IMEXV vs NEWMARK 有阻尼加速比較表.....	72
表 5 無阻尼衝擊力，效能比較表.....	73
表 6 無阻尼固定時間施力，效能比較表.....	73
表 7 無阻尼週期性施力，效能比較表.....	74
表 8 具阻尼衝擊力，效能比較表.....	74
表 9 具阻尼固定時間施力，效能比較表.....	75
表 10 具阻尼週期性施力，效能比較表.....	75



## 中英文對照表

英文	中文
basis	基底
blow up	發散
conventional integrator	傳統積分器
coupled	耦合
decompose by natural frequency	拆解系統經由自然震盪頻率
deformable solid object	可形變的實心物體
discrete geometric mechanics	離散幾何力學
dynamical equation	動力方程式
energy-conserving	能量守恆
explicit method	顯性法
finite element method	有限元素法
framework	系統架構
functional function	泛函
generalized coordinates	廣義座標系統
geometrics mechanics	幾何力學
good energy-behavior	良好能量行為
harmonic	和諧的
ideal pendulum	理想單擺
ill-condition matrix	病態矩陣
implicit method	隱性法
implicit-Explicit(IMEX)	顯隱性
mass-orthonormal	質量單位正交
mass-spring	質量彈簧
modal analysis	模態分析
modal derivative	模態導數
numerical damping	數值阻尼
numerical solver	數值計算
over damping	過阻尼
reduced	簡化的
reduced coordinates	簡化空間
stationary	定值
timestep size	時間區間
variational	變分的
well-condition matrix	良態矩陣



# 第一章

## 緒論

近年來在計算機圖學領域，各式各樣的物理力學模擬方法被提出討論，其中包含質量彈簧系統(mass-spring system)及有限元素法都是被廣泛使用的變形物體模擬方法。然而，變形物體的高頻率震盪運動卻鮮少在電腦動畫領域裡面被提出討論。本篇論文的目的是模擬變形物體的高頻震盪運動，並且有效使用在電腦動畫上。一般變形物體模擬方法是透過傳統數值積分器求解動力方程式以獲得物理模擬的結果。然而，電腦動畫領域常使用的傳統的數值積分器並不足以模擬我們所想要高頻震盪運動，因為傳統的數值積分器隨著時間累積的數值誤差導致系統能量不正確。在此論文中，我們使用變分為基礎的積分器(以下稱為 變分積分器 variational integrator)以確保長時間的能量保持。

但單使用變分積分器尚不足以有效模擬變形物體的高頻震盪運動。變形物體的運動是同時具備低頻率和高頻率運動。在一般積分器的求解方法策略上，低頻率運動是透過顯性法(explicit method)求解，相對的高頻率運動由隱性法(implicit method)求解。就如上所言，實際上物體運動是同時具備低頻率跟高頻率運動，假如使用顯性法當作求解方法，在大時間區間(timestep)之下，高頻率運動會因為太過敏感而很容易發散。否則需要縮小時間區間導致運算量的增加，或者可使用隱性法避免這個問題。另外一方面，若使用隱性法則需要透過迭代求解，但對於低頻率運動是多餘的計算。因此，單純顯性或是隱性積分器都不足以有效解決我們所要解決的問題。所以，我們使用具有顯隱性(implicit-explicit)特質的積分器有效率低處理高頻震盪運動問題。

綜合上面我們所闡述，我們需要保持系統能量，且同時有效計算低頻率和高頻率運動的積分器。因此，我們使用 implicit-explicit variational (IMEXv) 積分器[1]來做為數值積分器。IMEXv 是一個顯隱性積分器，假設系統位能可以有效的分割成低頻和高頻

位能，並且對低頻位能使用顯性原理計算、對高頻位能使用隱性計算。也就是低頻和高頻都可以使用適合的評估方法，進而加速系統效能。

然而，使用 IMEXv 最大的前提假設是系統的能量需要有效的做拆解。但是，Stern 和 Grinspun[1]並沒有提出一個具體的方法拆解出低頻和高頻位能。本篇論文根據 Courant - Friedrichs - Lewy (CFL) 條件，提出一個具體的評估系統低頻和高頻位能的機制。再將整個機制套用到簡化的 St. Venant-Kirchhoff deformable models (StVK)有限元素法[2]之上。

簡化的 StVK 有限元素法是一個將 St. Venant-Kirchhoff 材質之可形變的實心物件透過模態分析(modal analysis)和模態導數(modal derivatives)取得質量單位正交的(mass-orthonormal)基底[3]。接著再簡化空間之上做有效元素模擬是一個可以產生大幅度形變的方法。因為系統是在簡化空間之上做運算，因此整個系統可以在即時之下完成運算。此外簡化的 StVK 有限元素法產生的基底就是一個具有頻率基礎的基底，所以適合套用在本論文中的高頻低頻位能拆解機制。

本篇論文提出一個系統架構透過 IMEXv 有效模擬簡化的 StVK 有限元素法，如圖 1 是我們的系統架構圖。在第一階段，有限元素法簡化，我們透過模態分析和模態導數取得簡化的 StVK 的基底。第二階段，經由自然震盪頻率拆解系統，我們根據自然震盪頻率和 CFL 條件進行系統拆解。第三階段，數值計算，我們將之前已經拆解的基底帶入 IMEXv 之中做數值計算。

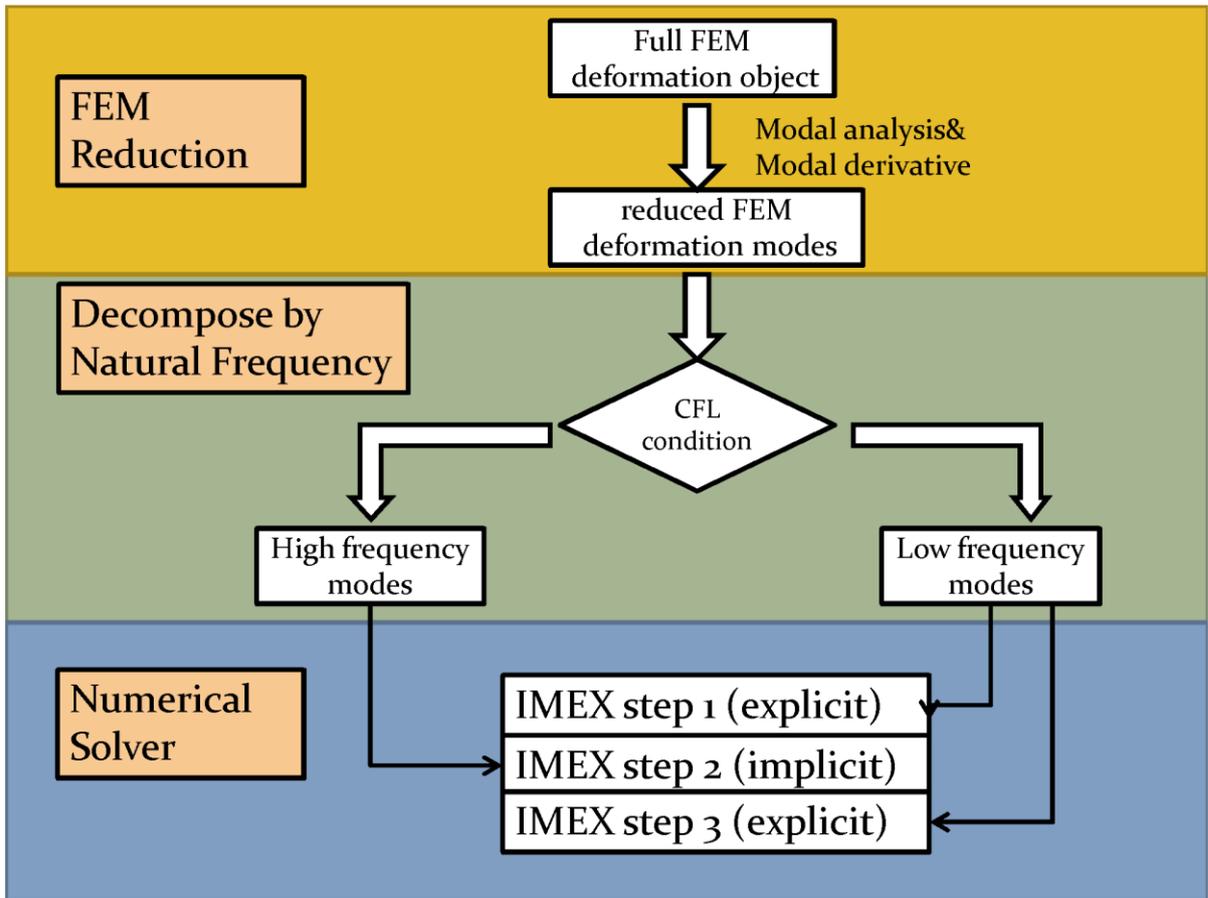


圖 1 系統架構流程圖。最上層是有限元素法簡化，中間為經由自然震盪頻率拆解系統，最底層是數值運算。

# 第二章

## 文獻回顧

在具有變形物體模擬上，各式各樣的模擬方法已經被大量討論。在此我們將就與本論文相關文獻作一一介紹。其中，本篇論文使用簡化有限元素法，將在 2.1 討論。為了模擬複雜系統，所使用的積分器將在 2.2 中討論。

### 2.1 簡化的有限元素法

諸多以物理學為基礎的變形物體模擬方法已經在電腦圖學領域廣泛利用，像是質量彈簧系統[4]、有限元素法，皆可達到逼真的效果。然而，質量彈簧系統對於實心物體無法有效維持物體體積且不適用用於頻率拆解。對於我們想要使用的 IMEXv 並不是一個有效的方法。

另外一方面，有限元素法可以保持實心物體體積且藉由模態分析作為理論基礎進而可以對系統依據頻率拆解。因此成為我們所選用的方法。但高維度有限元素法因為龐大的計算量對於互動式模擬是不可行的。而對於電腦圖學領域，希望系統可以具有互動性甚至是即時運算。因此，簡化有效元素法成為具有互動的變形物體的主流之一。而各式各樣的簡化有限元素法在過去被提出像是：

Krysl 等人[5]提出一個以統計學為基礎的簡化有限元素法。他們所提出的方法先在做一次性的全維度模擬，接著由預先計算的資料透過標準 PCA 處理進而取簡化空間基底(reduced coordinated basis)，接著在利用該組基底模擬，進而簡化大量計算量。但

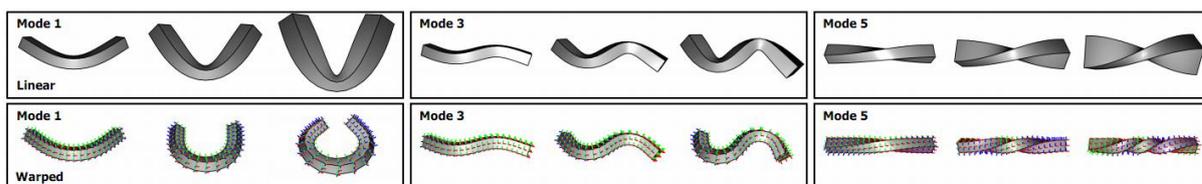


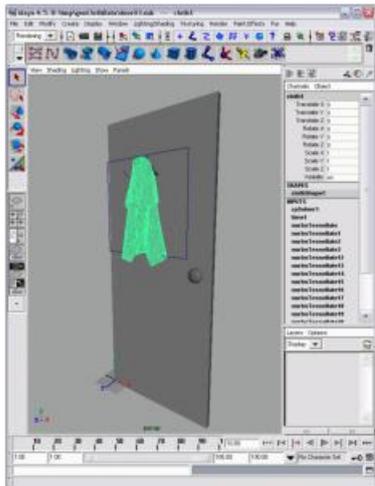
圖 2 Modal warping[6]，Choi 和 ko 透過線性模態分析取得線性基底，如上圖所示分為六個運動模式，但此基底為線性基底無法施作大變位分析。

是此方法並不適合於大變位分析(large scale deformation)且不是一個具有互動的方法。

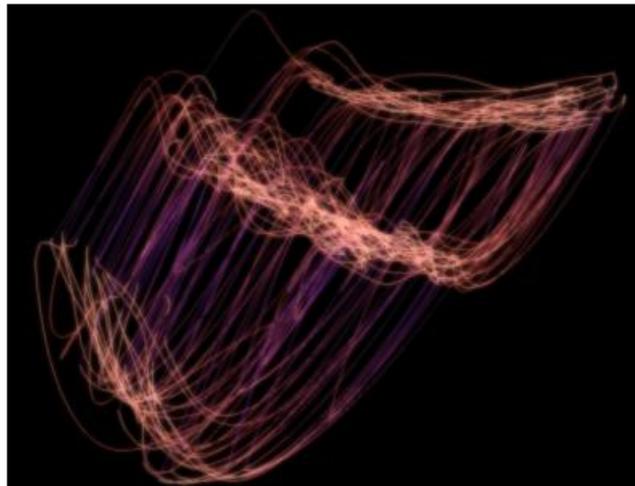
James 和 Fatahalian [7]透過有限的施力組合在非線性系統之上，接著對於預先計算出的運動資料施作 PCA 取得有效基底(或稱簡化運動模式 如圖 2)。雖然，該方法可以有效解決自身碰撞問題。但所產生的結果僅侷限於事先給予的施力組合。另外一方面，此方法無法全自動產生資料需要透過人工給予預先施力。

Choi 和 Ko[6]提出 modal warping 的方法，透過線性模態分析(linear modal analysis)取得線性基底(如圖 2)。但該基底是獨立的和諧運動基底無法捕捉非線性耦合的(nonlinear coupled)運動行為。另外，此方法的基底為線性基底並不適用於大變位分析。

Barbic 和 James[2]提出簡化 St.Venant-Kirchhoff (StVk)有限元素法，同樣是透過線性模態分析取的線性運動模式，而更進一步對該組線性運動模式施作導數運算，進而取得模態導數。再經由線性運動模式(linear modes)和模態導數(modal derivatives)作質量單位正交化過程取得有效基底。實際上，此方法是基底版的泰勒級數二階展開，因此可以確保大變位分析，且在此基底產生過程是近乎全自動，不同於 James 和 Fatahalian[6]需要透過互動是產生。此外，簡化 StVK 有限元素法的有效基底是具有頻率性質利於高低頻運動拆解，所以成為我們所使用的模擬方法，將在有完整的討論。此外，線性運動模是和模態導數如圖 4 所示。



(a) Precomputation



(b) Reduced dynamics model

圖 3 Data-Driven Deformation Modeling。James 和 Fatahalian [8] 透過(a)預先計算的資料取得(b)簡化運動模式

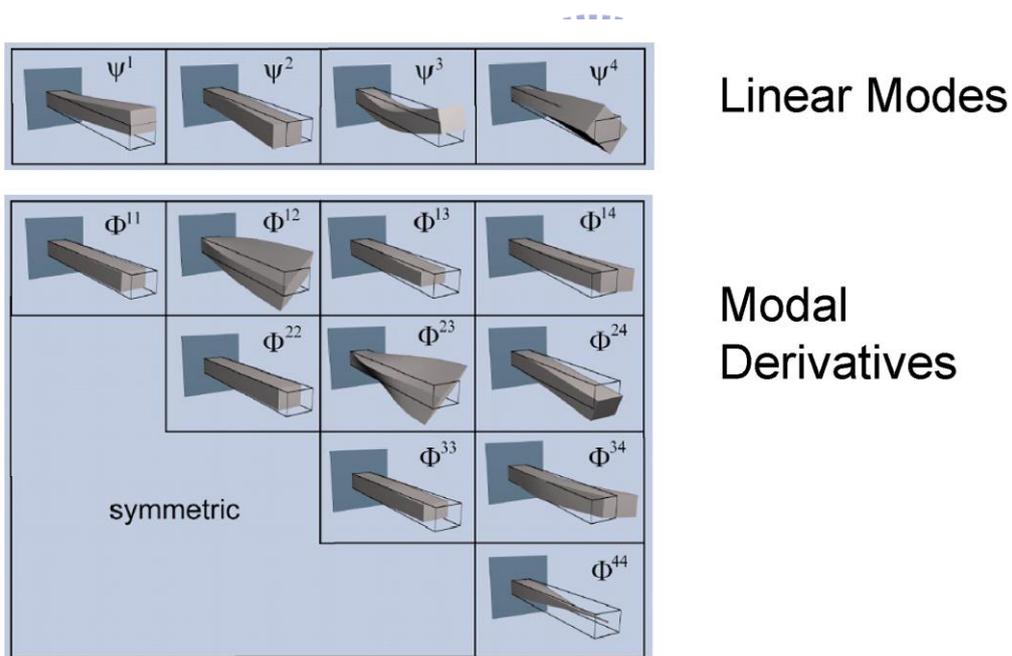


圖 4 線性運動模組和模態導數[2]。Barbic 和 James 透過模態分析取得線性運動模式 (linear modes)接著對線性運動模式取得模態導數(modal derivative)。

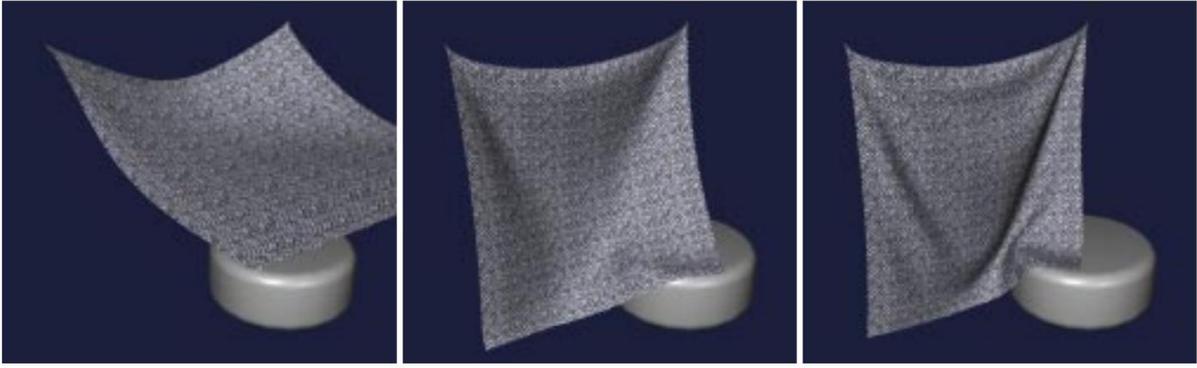


圖 5 半隱性積分器的布料模擬[4]。Braff 和 Witkin 透過半隱性積分器模擬布料動畫，因為數值阻尼導致細節無法有效保持。

## 2.2 積分器

在古典力學[9]模擬上，可透過解析解的方式計算微分方程得到真正的力學行為。然而，解析解僅存在於簡單系統。對於複雜系統求解，只能夠透過數值解的方式取得近似的結果。而數值解可由傳統積分器求解，像是使用顯性 Euler 法、隱性 Euler 法、Runge-Kutta，在過去已經被廣泛討論[10]。

在電腦動畫領域，半隱性積分器[4, 11-14]，因為在大時間區間具有良好收斂性，在布料模擬上已經主導圖學領域長達十年之久。然而，此方法是一個強迫收斂的方法，導致動畫的細節上會有所流失(如圖 5)，因此對於更精細的模擬，並沒有辦法有效呈現。其中根本的原因是數值阻尼<sup>1</sup>(numerical damping)，造成高頻能量無法有效保持。然而，在過去電腦動畫領域，著重的是系統穩定性，而非系統精確性。所以半隱性積分器被廣泛使用。

而近年來隨著電腦動畫的進步，更精確的模擬成為物理模擬的主要發展方向之

<sup>1</sup> Numerical damping 是隱性法會導致能量越來越小，並不是一個可以控制的阻尼。



圖 6 非變分積分器和 AVI 積分器布料模擬比較。左圖為隱性 Euler 法計算出來的布料 ( $h=0.00075$  秒)、中圖同樣為隱性 Euler 法( $h=0.001$  秒), 最右圖為使用 AVI( $h=0.00037$  秒),  $h$  是時間區間(timestep)大小。隱性 Euler 法, 因為過度收斂導致(數值阻尼), 無法有效保持細節(皺褶), 而 AVI 可以有效保持細節[15]。

一, 因此系統能量保持顯得越來越重要。而在應用數學領域此問題已經被廣泛討論, 為了保持系統能量, 結果即是使用變分積分器[16]。變分積分器是指以幾何力學為基礎的積分器, 因此可以保持系統能量且不會增加太多額外運算量。因此在電腦動畫領域, 變分積分器也開始嶄露頭角。在過去 Stern 和 Desbrun[17]將變分積分器介紹到電腦動畫領域上所使用。接著 Kharevych 等人[8]提出一個全新變分積分器, 透過最小化 Liliyan 函數使得非線性方程解根問題變成最小化解根方法。

但是, 以上的方法較適合使用在不具有多向性材質的材料之上。然而, 在大多數電腦動畫領域, 所使用的材質會希望不是只是具有單一方向性, 像是布料模擬、希望不具有大的延展性具有可彎取的性質。基本上, 這兩性質是有所不同的。為了解決這問題, 非同步變分積分器(AVI)[18]透過大的時間區間求解低頻部分, 而小的時間區間求解高頻部分, 也是一個先進的技術。像是[15]將 AVI 使用在布料模擬上可以有效保持系統能量, 進而保持更多動畫細節(如 圖 6)。Harmon 等人[19]使用 AVI 做為變形物體的積分器並提供一個具有可靠度的碰撞處理機制。但是, AVI 無可避免會產生線性共振的問題(如 圖 7), 導致系統不穩定[1]。因此, 顯隱性變分積分器成為另外一個可以使用的策略。

顯隱性積分器的主要策略, 即是針對高頻部分採取顯性求解、低頻部分採取隱性

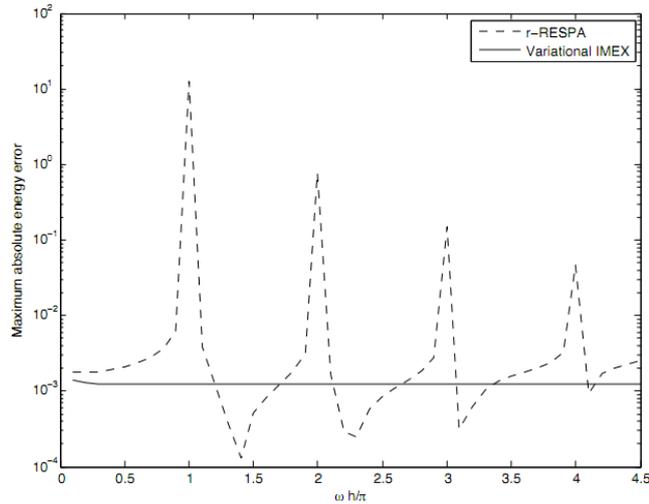


圖 7 非同步變分積分器(AVI)系列容易發生線性共振導致不穩定。r-RESPA 為一個 AVI 系列的變分積分器，容易因為發生共振導致系統不穩定。而 IMEXv 可以有效保持穩定性。[1]

求解。在過去圖學領域，Boxerman 和 Ascher[20]透過將低頻部分透過顯性 Euler 法求解而高頻部分透過隱性 Euler 求解，以降低隱性求解的 Jacobian 矩陣的非零項次數達到加速的目的(如 圖 8)，但此方法是以 Euler 法為基礎的顯隱性積分器，並不符合真正的物理特性，所以無法有效保持系統能量。而 Stern 和 Grinspun [1]提出一個以幾何力學為基礎的顯隱性積分器(即 IMEXv)，可以保持系統能量並適合於大的時間區間使用，將 4.3.1 在中完整介紹。但是，他們的方法並沒有明確定義如何定義高頻和低頻部份，本篇論文將在 4.2 介紹具體定義拆解高頻和低頻位能。此外原始 IMEXv 之中系統是不具有外力，本篇論文將在 4.3.2 中推導具有外力的 IMEXv。

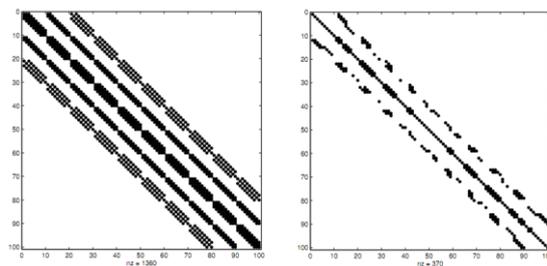


圖 8 拆解布料隱性求解矩陣。Boxerman 和 Ascher[14]透過拆解布料的彈簧將低頻彈簧由顯性法計算已達到化簡 Jacobian 矩陣。左圖為原始 Jacobian 矩陣的非零項次示意圖，左圖是經過拆解的矩陣。

# 第三章

## 幾何力學與變分積分器簡介

本篇論文著重的是有效保持系統能量的積分器，但一般積分器並沒有辦法達成我們所想要的訴求。3.1 說明為什麼傳統積分器不適合在電腦動畫中使用。3.2 闡述連續幾何力學的推演過程，但連續幾合力學並不適合用在複雜系統，所以 3.3 推導離散幾何力學。最後，3.4 將利用離散幾何力學，推導出變分積分器可廣泛使用在各種物理動態系統。

### 3.1 傳統積分器和變分積分器比較



數值積分器在科學和工程領域上面被廣泛使用。像是顯性 Euler、隱性 Euler、Runge-Kutta 等傳統的積分器，因為在工程上的適用性被大量使用<sup>2</sup>。但電腦動畫領域，傳統的數值積分器並沒有辦法達到有效的效果。因為，傳統積分器隨著時間累積的數值誤差導致在長時間模擬系統能量行為不正確。更具體的說法是由傳統顯性積分器所求得的解都比真正的解來的大，最後導致系統因誤差累積而發散(blow-up)；然而，傳統隱性積分器的解都比真正的解來的小，導致系統能量隨著時間越來越小或稱為過阻尼現象(over-damping)。此兩種現象皆是不正確的能量行為。而我們所使用的變分積分器最大的優點是系統不會隨著時間而爆炸或是過阻尼保持正確的能量行為。

以一個實例可以說明這樣的行為。考慮一個不具有空氣阻力的理想單擺，系統能量

<sup>2</sup> 在工程領域所需要的是特定時刻點的精確行為且運算時間不在考量範圍。

不應隨著時間而改變，如圖 9 所示。上面的部分是運動的樣子，下面是運動軌跡。左邊是由顯性積分器所求解的結果，隨著時間而發散；中間是隱性積分器的結果，隨著時間擺動幅度變小；右邊是變分積分器的結果，不會隨著時間改變擺動幅度。

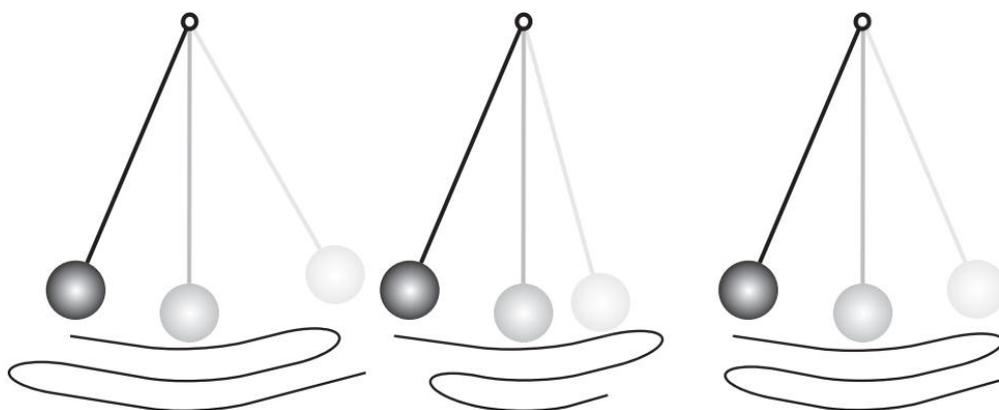


圖 9 理想單擺於不同積分器的運動行為。最左為傳統顯性積分器、中間為傳統隱性積分器、最右邊為變分積分器。單擺下方為擺動軌跡，只有變分積分器的解維持在一定範圍之內。

變分積分器有辦法保持系統能量的根本原因是變分積分器符合幾何力學，是考慮真正的物理運動行為；而傳統積分器僅考慮微分方程求解，因此無法保持系統能量。所以在下一節將介紹幾合力學以利於推導變分積分器。

## 3.2 連續幾何力學

傳統牛頓力學是古典力學重要的基礎，其中可藉由牛頓第二運動定律：

$$F = ma$$

求解物體的運動行為。其中  $F$  是作用在一個物體的外力、 $m$  是物體質量、 $a$  是加速度。此系統描述並不具有內力且適用於直角座標系統的系統。但牛頓運動定律在 hard-constraint 描述上並不直觀。進而，Lagrangian 以能量守恆的觀點推演出幾何力學適用於廣義座標系統之上，將在 3.2.1 做說明。然而，Lagrangian 力學需要求解二階微分方程（二階 ODE）

在某些系統求解相對不容易。而 Hamiltonian 力學透過動量的定義將原本二階 ODE 變成一階耦合微分方程組(以下稱 一階耦合 ODE) 是 Lagrangian 力學的重新表述，以利在某些情況更方便計算，將在 3.2.2 說明。

### 3.2.1 連續 Lagrangian 力學

Lagrangian 力學透過系統總能量的定義計算整體運動軌跡能量變化總和是牛頓力學的重新表述。此作法考慮完整運動軌跡的能量總和是所求得是整體運動行為並非局部運動行為。以數學形式表示，需要先定義系統總能量 Lagrangian 量：

$$L(q, \dot{q}) = K(\dot{q}) - V(q), \quad (3.2.1)$$

其中  $q$  是廣義位置或稱運動路徑、 $\dot{q} = \frac{\partial q}{\partial t}$  的  $q$  對時間的一次導數、 $K(\dot{q})$  是系統總動能、 $V(q)$  是系統總位能。

接著由 Lagrangian 量可以定義系統對於時間的作用量(action function):

$$S(q) = \int_0^T L(q, \dot{q}) dt. \quad (3.2.2)$$

是 Lagrangian 量對時間  $[0, t]$  的積分。根據 Hamilton's principle 指出大自然會選擇具有最少能量交換的路徑，也就是  $S(q)$  是有一個具有極值存在。但是，實際上  $q$  是一個時間的函數，我們沒有辦法直接對  $q$  取導數進而產生了變分法。

變分法是泛函(functional function)求解極值的方法，其中泛函是指函數的值域也是一個函數。變分法的核心概念是如何取得兩個固定端點的中間最佳路徑。這個問題的概念是很類似最佳化方法，舉例說明:有一個函數  $f(x)$ ，最佳解會存在於  $\nabla f(x) = 0$ 。但泛函問題沒有辦法對  $q$  取導數。取而代之的對路徑  $q$  取變分表示為  $\delta q$  是一個無限小的擾動在兩個  $q$  的固定端點上。在 Lagrangian 力學上，實際上要處理的是作用量  $S(q)$  的變分如下:

$$\begin{aligned}\delta S(q) &= \delta \int_0^T L(q, \dot{q}) dt = \int_0^T \left[ \frac{\partial L}{\partial q} \cdot \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \delta \dot{q} \right] dt \\ &= \int_0^T \left[ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q dt + \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \delta q \right]_0^T\end{aligned}\quad (3.2.3)$$

其中，最後一項是經由部分積分取得。因為兩個邊界端點是固定的，所以  $\delta q(0) = \delta q(T) = 0$ ，以致  $\left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \delta q \right]_0^T = 0$ 。而作用量極值的存在是  $\delta S(q) = 0$ ，也就是  $\int_0^T \left[ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q dt = 0$ ，根據變分小定理(詳見附錄一)，可得 Euler-Lagrangian 方程式

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0. \quad (3.2.4)$$

此方程式是一個二階 ODE 問題，可視為牛頓第二運動定律的另外一種表述方式且適用於廣義座標系統，因為符合 Hamilton's principle 所以滿足實際上的力學行為。

### 3.2.2 連續 Hamiltonian 力學



連續 Lagrangian 力學是藉由以  $q$  為變數的二階 ODE 求解取得力學行為。然而某些力學問題，二階 ODE 並不是那麼容易求解。而 Hamiltonian 力學是透過動量的定義  $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ ，將原本的問題轉至耦合的二維廣義動量-位置  $(p, q)$  座標系統。進而得到連續 Hamilton's 方程組：

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \end{cases} \quad (3.2.5),$$

其中 Hamilton 量的定義是

$$H(p, q) = p \cdot \dot{q} - L(q, \dot{q}).$$

而透過 Hamilton's 方程組求解的力學，稱為 Hamiltonian 力學。

### 3.3 離散幾何力學

連續幾何力學透過能量法對於廣義座標系統的力學運算提供一個有效的詮釋觀點，也就是只要經由連續幾何力學計算的求解，就可以有效保持能量且結果和牛頓運動定律是相符合的。然而，連續幾何力學計算需要透過解析解取得實際上的運動方程式，對於複雜的系統並沒有辦法直接達成，因為複雜系統本身就是沒有解析解的存在。所以，離散幾何力學[21]因而產生以解決複雜系統問題。

在我們推導離散幾何力學之前，首先必須將原本的路徑 $q(t)$ ，定義成離散路徑 $q: \{t_0, t_1, t_2 \cdots, t_k, \cdots, t_N = T\}$ ，其中， $t \in [0, T]$ ， $k, N \in \mathbb{N}$ 。即 $q_k$ 是 $q(t_k)$ 的近似值。

#### 3.3.1 離散 Lagrangian 力學

離散 Lagrangian 力學目的是透過離散 Lagrangian 量的定義來產生離散 Euler-Lagrangian 方程式。不同的是離散 Lagrangian 量  $L_d(q_k, q_{k+1}, h)$  是定義於時間區間  $[t_k, t_{k+1}]$ ，即  $h = t_{k+1} - t_k$ ，也就是下列形式：

$$L_d(q_k, q_{k+1}, h) \approx \int_{t_k}^{t_{k+1}} L(q, \dot{q}) dt \quad (3.3.1)$$

右邊的項次可經由單點 quadrature 去做逼近，而 $\dot{q}$ 由 $(q_k - q_{k+1})/h$ 逼近，表示形式如下：

$$L_d(q_k, q_{k+1}, h) = h L\left((1 - \alpha)q_k + \alpha q_{k+1}, \frac{q_{k+1} - q_k}{h}\right), \quad (3.3.2)$$

其中 $\alpha \in [0, 1]$ ， $\alpha = 1/2$  此 quadrature 具有二次精度，其他為單精度。

我們已經定義離散 Lagrangian 量，即可計算離散作用量  $S_d$  透過下列形式：

$$S_d := S_d(\{q_i\}_{i=0\dots N}) \approx \sum_{k=0}^{N-1} L_d(q_k, q_{k+1}) \approx \int_0^T L(q, \dot{q}) dt = S(q) \quad (3.3.3)$$

對  $S_d$  做變分可得:

$$\delta S_d = \sum_{k=0}^{N-1} [D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) \cdot \delta q_k + D_2 L_d(q_k, q_{k+1}) \cdot \delta q_{k+1}], \quad (3.3.4)$$

其中  $D_1$  和  $D_2$  是分別對  $L_d$  的第一個和第二個變數取偏微分，其中取變分需要兩個端點需要為固定端點，也就是  $\delta q_0 = \delta q_N = 0$ ，經過整理可得:

$$\delta S_d = \sum_{k=0}^{N-1} [D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) + D_2 L_d(q_{k-1}, q_k)] \cdot \delta q_k \quad (3.3.5)$$

透過 Hamilton's principle 可知  $\delta S_d = 0$ ，其中  $\delta q_k$  是任意值可得離散 Euler-Lagrangian 方程式:

$$D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) + D_2 L_d(q_{k-1}, q_k) = 0 \quad (3.3.6)$$

此方程式是透過三個變數去定義整個方程式，也就是只要取得連續的兩個路徑位置  $q_{k-1}$  與  $q_k$ ，經由(3.3.6)即可計算出  $q_{k+1}$ ，此方法就是離散 Lagrangian 力學，以此方程式所計算出來的結果，將會符合變分原理且是變分積分器的基礎。

### 3.3.2 離散 Hamiltonian 力學

我們已經取得離散 Euler-Lagrangian 方程式，但透過 Euler-Lagrangian 方程式求解，並沒有辦法達到制式化的積分器。取而代之，可由離散 Hamiltonian 力學更方便取得變分積分器。

首先經由(3.3.6)定義時間點  $t_k$  的離散動量

$$p_k = D_2 L_d(q_{k-1}, q_k) = -D_1 L_d(q_k, q_{k+1})$$

可將(3.3.6)寫成下列形式:

$$p_k = -D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) \quad (3.3.7)$$

$$p_{k+1} = D_2 L_d(q_k, q_{k+1}) \quad (3.3.8)$$

此二方程式的作用，相當類似連續 Hamilton's 方程組。實際上並不完全相同不過功能  
是相當的。此二方程式是變分積分器推導的重要方程式。

### 3.4 變分積分器

一個積分器符合離散 Euler-Lagrangian 方程式，即是變分積分器。實際上傳統的積分器  
都並不符合離散 Euler-Lagrangian 方程式。此外，透過不同離散 Lagrangian 量  $L_d$  定義，  
搭配(3.3.7)、(3.3.8)，可推導出不同變分積分器如:Stormer-Verlet、隱性中點法。此二皆  
為常用的雙精度變分積分器，其中 Stormer-Verlet 是顯性積分器，隱性中點法是隱性積  
分器。



在我們繼續討論變分積分器之前，我們先討論  $L_d$  的定義方式。考慮連續  
Lagrangian 量  $L(q, \dot{q}) = K(\dot{q}) - V(q)$ ，是動能  $K(\dot{q})$  和位能  $V(q)$  的差值。其中定義動能  
 $K(\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}M\dot{q}$ ，其中  $M$  是系統質量矩陣；而位能  $V(q)$  依據系統有不同定義。

而根據(3.3.2)可定義離散 Lagrangian 量  $L_d(q_k, q_{k+1}, h) = h L((1 - \alpha)q_k + \alpha q_{k+1}, \frac{q_{k+1} - q_k}{h})$ ，其中一律取  $\alpha = 1/2$  可得兩倍精度。其中取  $\frac{q_{k+1} - q_k}{h}$  是速度  $\dot{q}$  的近似值接著  
可定義離散動能為  $K_d(q_k, q_{k+1}) = \frac{1}{2}(\frac{q_{k+1} - q_k}{h})^T M(\frac{q_{k+1} - q_k}{h})$ ；在此先以  $V(q_k, q_{k+1})$  表示離散  
位能。可得離散 Lagrangian 量:

$$L_d(q_k, q_{k+1}, h) = \frac{h}{2} \left( \frac{q_{k+1} - q_k}{h} \right)^T M \left( \frac{q_{k+1} - q_k}{h} \right) - V(q_k, q_{k+1}) \quad (3.3.9)$$

離散位能  $V(q_k, q_{k+1})$  可依據不同 quadrature 法則定義進而推導出不同積分器。

### 3.4.1 Stormer-Verlet

離散位能  $V(q_k, q_{k+1})$  可經由梯形法定義  $V(q_k, q_{k+1}) = h \cdot \frac{V(q_k) + V(q_{k+1})}{2}$ ，可得離散梯形 Lagrangian 量：

$$L_d^{trap}(q_k, q_{k+1}) = \frac{h}{2} \left( \frac{q_{k+1} - q_k}{h} \right)^T M \left( \frac{q_{k+1} - q_k}{h} \right) - h \frac{V(q_k) + V(q_{k+1})}{2} \quad (3.4.1)$$

將  $L_d^{trap}(q_k, q_{k+1})$  取代(3.3.7)、(3.3.8)中的  $L_d(q_k, q_{k+1})$  可得：

$$p_k = M \left( \frac{q_{k+1} - q_k}{h} \right) + \frac{h}{2} \nabla V(q_k) \quad (3.4.2)$$

$$p_{k+1} = M \left( \frac{q_{k+1} - q_k}{h} \right) - \frac{h}{2} \nabla V(q_{k+1}) \quad (3.4.3)$$

再經由移項整理：

$$q_{k+1} = q_k + hM^{-1}p_k - \frac{1}{2}h^2(\nabla V(q_k)) \quad (3.4.4)$$

$$p_{k+1} = p_k - h \left( \frac{\nabla V(q_k) + \nabla V(q_{k+1})}{2} \right) \quad (3.4.5)$$

(3.4.4)、(3.4.5) 即是知名的 Stormer-Verlet 法的積分公式。(3.4.4) 的更新狀態  $(p_k, q_k) \mapsto (p_k, q_{k+1})$ ；而(3.4.5)為  $(p_k, q_{k+1}) \mapsto (p_{k+1}, q_{k+1})$ ，此二皆為顯性運算可很快速的完成計算，但因為需要小的時間區間所以不適合處理高頻位能。

### 3.4.2 隱性中點法

隱性中點法的離散位能  $V(q_k, q_{k+1})$  由中點法定義  $V(q_k, q_{k+1}) = hV\left(\frac{q_k + q_{k+1}}{2}\right)$ ，可得離散中點 Lagrangian 量：

$$L_d^{mid}(q_k, q_{k+1}) = \frac{h}{2} \left( \frac{q_{k+1} - q_k}{h} \right)^T M \left( \frac{q_{k+1} - q_k}{h} \right) - hV\left(\frac{q_k + q_{k+1}}{2}\right) \quad (3.4.6)$$

將  $L_d^{mid}(q_k, q_{k+1})$  取代(3.3.7)、(3.3.8)中的  $L_d(q_k, q_{k+1})$  可得:

$$p_k = M\left(\frac{q_{k+1} - q_k}{h}\right) + \frac{h}{2} \nabla V\left(\frac{q_k + q_{k+1}}{2}\right) \quad (3.4.7)$$

$$p_{k+1} = M\left(\frac{q_{k+1} - q_k}{h}\right) - \frac{h}{2} \nabla V\left(\frac{q_k + q_{k+1}}{2}\right). \quad (3.4.8)$$

(3.4.7)、(3.4.8)經由代換整理可得:

$$\begin{cases} q_{k+1} = q_k + hM^{-1}\left(\frac{p_k + p_{k+1}}{2}\right) \\ p_{k+1} = p_k - h\nabla V\left(\frac{q_k + q_{k+1}}{2}\right) \end{cases} \quad (3.4.9)$$

(3.4.9)為隱性中點法的更新公式需要透過隱性迭代求解。然而，在大的時間區間對於低頻位能來說，並不需要經過迭代求解。所以，不適合用在低頻位能求解。

### 3.4.3 NEWMARK



NEWMARK(1959)積分器是一個在結構力學常用的積分器。實際上 NEWMARK[16]也是一個變分積分器符合離散 Euler-Lagrangian 方程式，如下列形式:

$$q_{k+1} = q_k + h \cdot \dot{q}_k + \frac{h^2}{2} [(1 - 2\beta)a(q_k) + 2\beta a(q_{k+1})] \quad (3.4.10)$$

$$\dot{q}_{k+1} = \dot{q}_k + h \cdot [(1 - \gamma)a(q_k) + \gamma a(q_{k+1})] \quad (3.4.11)$$

$$a(q) = M^{-1}(-\nabla V(q)) \quad (3.4.12)$$

其中  $\gamma \in [0, 1]$ 、 $\beta \in [0, \frac{1}{2}]$ 。其中  $\beta = 0$ 、 $\gamma = 1/2$  是一個顯性積分器，和 Stormer-Verlet 是等價的，所以也適用低頻位能計算。 $\gamma = \frac{1}{2}$ 、 $\beta = \frac{1}{4}$  是一個隱性積分器，也可以保持系統能量行為，適用於高頻計算，然而需要迭代求解。

# 第四章

## 方法

本篇論文透過簡化 St. Venant-Kirchhoff (StVK) 有限元素法取得預先計算好的運動模式，以利於在模擬時只針對這幾個運動模式做運算。在呈現動畫階段，再用運動模式係數對應運動模式投影到實際上要顯示的動畫。將在 4.1 介紹。然而，這些運動模式是具有一定的運動頻率。我們希望使用顯性積分器計算低頻運動模式；使用隱性積分器計算高頻運動模式。如此可以降低運算的計算量。為了這個目的我們透過自然頻率和取樣頻率比較，以拆解低頻和高頻運動模式，此部分將在 4.2 介紹。我們透過希望透過變分積分器保持變形物體的高頻運動，但又為了有效計算低頻和高頻運動模式，所以最後採用 IMEX<sub>v</sub>，將在 4.3 介紹。

最後 4.4，我們將實作我們的系統架構。但依據簡化 StVK 有限元素法實作 IMEX<sub>v</sub> 並不直觀，因此需要透過一定的方法加以調整，詳細實作方法將在 4.4 做完整解說。



### 4.1 簡化 St. Venant-Kirchhoff 有限元素法

在諸多有限元素法之中，St. Venant-Kirchhoff (StVK) 材質是一個常用在圖學領域的材質。簡單說明，StVK 材質是指該材質在彈性伸縮是均質性的。而 StVK 材質因為簡單容易，所以廣泛在電腦圖學上所使用。然而，在具有大幅度變化的變形物體，需要大量取樣元素，導致系統的計算量龐大，對於即時運算需求不敷使用。因此，進而產生了簡化的有限元素法。

簡化的有限元素法，透過少量的有效基底構成低維度的子空間，而僅在子空間上面做權重模擬運算。而在最後繪圖動畫階段再將權重經由基底投影可得實際結果，這就是簡化有限元素法的基本原理。

本篇論文所使用的簡化 StVK 有限元素法是使用 Barbic 和 James [2] 所提出的方法。此方法使用 StVK 有限元素法經由模態分析和模態導數取得有效基底。進而取得簡化運動方程式使得計算量大幅下降，且該組有效基底是具有頻率性質，利於我們自然頻率的取得。

#### 4.1.1 簡化的運動方程式

在我們之前所討論的運動方程式，是考慮 Euler-Lagrangian 方程式，也就是：

$$M\ddot{u} + D(u, \dot{u}) + R(u) = f \quad (4.1.1)$$

其中  $M \in \mathbf{R}^{3n \times 3n}$  是系統質量、 $u \in \mathbf{R}^{3n}$  是形變向量、 $D(u, \dot{u})$  是阻尼力、 $R(u)$  是系統內力、 $f$  是系統外力、 $n$  是質點數量。而其中內力可經  $R(u) = K(u) \cdot u$  計算， $K(u)$  是梯度勁度矩陣。而阻尼力  $D(u, \dot{u})$  是透過 Rayleigh 阻尼模型取得，即：

$$D(u, \dot{u}) = (\alpha M + \beta K(\dot{u}))\dot{u} \quad (4.1.2)$$

其中  $\alpha$  是影響低頻阻尼力的係數， $\beta$  是影響高頻阻尼力的係數，而  $\alpha$ 、 $\beta$  皆必須正值。適當的  $\alpha$ 、 $\beta$  選擇可以讓模擬更加真實，符合真實世界的需求。

然而，為了即時運算需求必須使用簡化有限元素法。簡化有限元素法的精神是取有效基底  $U \in \mathbf{R}^{3n, r}$  ( $r$  是有效基底的數量)，可將原本的形變向量進行代換即  $u = Uq$ ，其中  $q$  是有效基底的權重值也可視為廣義座標系的形變向量。原本的運動方程式變為：

$$MU\ddot{q} + R(Uq) = f \quad (4.1.3)$$

再投影至子空間乘上  $U^T$ ，可得：

$$U^T MU\ddot{q} + U^T R(Uq) = U^T f \quad (4.1.4)$$

此為簡化的運動方程式，而 Barbic 和 James[2] 所取的有效基底稱為質量正交基底，具有  $U^T MU = I_r$  的特性，其中  $I_r$  是  $r \times r$  的單位矩陣。可得簡化的運動方程式：

$$\ddot{q} + \tilde{D}(q, \dot{q}) + \tilde{R}(q) = \tilde{f} \quad (4.1.5)$$

其中  $\tilde{D}$ 、 $\tilde{R}$ 、 $\tilde{f}$  是  $r$  維簡化力即

$$\tilde{D}(q, \dot{q}) = U^T D(Uq, U\dot{q}), \quad (4.1.6)$$

$$\tilde{R}(q) = U^T R(Uq), \quad (4.1.7)$$

$$\tilde{f} = U^T f. \quad (4.1.8)$$

而簡化的切線勁度矩陣為  $\tilde{K}(q) = U^T K(Uq)U \in \mathbf{R}^{r \times r}$ 。因為(4.1.5)的維度遠小於(4.1.1)。所以簡化有限元素法可以快速地完成計算。至於簡化力可以透過預先計算係數可以預先計算將在 4.1.2 做更進一步的說明。

#### 4.1.2 簡化的多項式力和切線勁度矩陣

內力是位能的對形變向量  $q$  的一次偏微分。因為 StVK 材質的單位元素位能是一個四次方程式，所以對應的內力是一個三次方程式。而簡化 StVK 有限元素法是藉由在子空間的運算使得計算可以加速，簡化系統內力係數是可以預先計算簡化內力可寫為下列形式：

$$\tilde{R}(q) = U^T R(Uq) = P^i q_i + Q^{ij} q_i q_j + S^{ijk} q_i q_j q_k \quad (4.1.9)$$

其中， $P^i$ 、 $Q^{ij}$ 、 $S^{ijk} \in \mathbf{R}^r$  是預先計算的簡化內力係數。在模擬階段只需要經由(4.1.9)即可計算簡化系統內力用於簡化空間計算。而相對應的簡化切線度矩陣  $\tilde{K}(q) \in \mathbf{R}^{r \times r}$  是  $\tilde{R}(q) \in \mathbf{R}^r$  的 Jacobian 矩陣。也就是  $\tilde{K}$  的第  $l$  列是：

$$\frac{\partial \tilde{R}(q)}{\partial q_l} = P^l + (Q^{li} + Q^{il})q_i + (S^{lij} + S^{ilj} + S^{ijl})q_i q_j \quad (4.1.10)$$

其中  $P^i$ 、 $Q^{ij}$ 、 $S^{ijk}$  是非零常數。

### 4.1.3 線性模態分析和模態導數

對於簡化空間計算，有效基底幾乎決定了模擬的結果。而簡化 StVK 有限元素法的有效基底計算是先透過線性模態分析[3]取得線性基底 $\Psi^i$ 。經由線性模態分析所取得的線性基底為一個良好的基底，但僅限於在小變位分析之上，對於大變位系統會因為基底是線性而導致失真。為了改善這個問題，可由透過對線性基底 $\Psi^i$ 取導數[17]可得模態導數 $\Phi^{ij}$ 。同時取線性基底 $\Psi^i$ 和模態導數 $\Phi^{ij}$ 為有效基底，進而可適用於大變位系統。此方法的整體概念可視為對於形變向量  $u$  的基底版泰勒級數展開：

$$u(p) = \sum_{i=1}^k \Psi^i p_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \Phi^{ij} p_i p_j + O(p^3) \quad (4.1.11)$$

其中， $p$ 是基底所對應的係數。也就是經由這樣的對應關係同時取線性基底  $\Psi$ 和模態導數  $\Phi$ 。不再是一個線性基底而是一個二次基底因此適用大變位動畫。

另外，Barbic 和 James[2]的工作之中，有效基底  $U$ 是有經過質量單位正交化使得具有 $U^T M U = I_r$ 的特性，將成為實作上的一大利多，我們將在 4.4.2 做完整的討論。

### 4.1.4 施作外力和呈現動畫

在簡化 StVK 有限元素法的架構中，施作外力是相當容易的。假設，我們現在有外力  $f$ ，在模擬階段，只要把外力投影至簡化空間之中亦即 $\tilde{f} = U^T f$ 。而要獲得最後的動畫，我們只須再將基底權重  $q$  經由有效基底  $U$  投影回實際變位  $u$  亦即  $u = Uq$ 。

## 4.2 拆解簡化 St. Venant 有限元素法

簡化 StVK 有限元素法所得到有效基底  $U$  具有頻率性質，我們可以拆解基底取得低頻和高頻運動模式。然而高頻和低頻並沒有明確的定義。因此，我們需要 CFL 條件界定高頻和低頻的運動模式，將在 4.2.1 介紹。而詳細的拆解方法會在 4.2.2 解說。

## 4.2.1 Courant - Friedrichs - Lewy (CFL) 條件

變分積分器可以有效保持系統能量。但變分積分器還是受限於 Courant - Friedrichs - Lewy (CFL) 條件[22]。所謂 CFL 條件是指使用顯性法求解微分方程式，時間區間的大小必須要足夠小，使得系統中剛性(stiff)最強的部分可以正確計算，否則系統將會逐漸變成不穩定，除非是使用隱性方法來規避 CFL 條件。

然而，時域的 CFL 條件描述並不明確。相對的，頻率域的描述是比較清晰。頻率域上的 CFL 條件是指系統取樣頻率必須要比系統最高頻率的小，否則系統將會變成不穩定。然而 CFL 條件是系統穩定的必要條件而非充要條件，但為了系統的穩定性還是需要遵守 CFL 條件。本論文透過 CFL 條件在頻率域上的描述，來拆解簡化 StVK 有限元素法使得 IMEXv 可以有效使用。

## 4.2.2 依據自然頻率拆解

IMEXv 的精神在於把高頻、低頻位能分開處理。因此我們為了使 IMEXv 可以有效使用，必須先區分出低頻位能跟高頻位能。然而，微分方程求解受限於 CFL 條件，已經在上小節做過討論。其中得到的最後結論是，符合 CFL 條件的即可使用顯性法；相對的，就要透過隱性法求解。意指符合 CFL 條件應該歸納為低頻位能；不符合 CFL 條件歸納為高頻位能。其中的關鍵是取樣頻率我們定義為

$$\omega_{sample} = \frac{1}{h}(Hz) \quad (4.2.1)$$

其中  $h$  是時間區間大小，此極限頻率表示在此系統適用於顯性法的最大頻率。也就是說，只要該位能的頻率高於  $\omega_{sample}$  就是高頻位能；此位能低於  $\omega_{sample}$  就是低頻位能。

我們使用的簡化 StVK 有限元素法，本生就具有頻率的特性。因此，透過解  $r \times r$  的  $\tilde{M}x = \lambda \tilde{K}(0^r)x$  的特徵問題求解，取得特徵值  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$ ，其中  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_r$ 。可得自然頻率組  $\Omega = \frac{\sqrt{\Lambda}}{2\pi} = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r\}$  和取樣頻率做比較，將低於極限頻率歸納為低頻運動模式組  $\Omega_{low} = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{er}\}$ ；反之為高頻震盪運動模式組  $\Omega_{high}$

$= \{\omega_{er+1}, \omega_{er+2}, \dots, \omega_r\}$ , 其中  $er$  是低頻基底的數量亦是適用於顯性法的運動模式數量。

在上述我們已經區分出低頻運動模式組和高頻運動模式組。而在簡化 StVK 有限元素法之中，每一個運動模式具有相對應的運動模式基底，也就是  $\Omega_{low}$  對應的運動模式基底為  $U_{low}$ ，表示該組運動模式是低頻運動模式可以透過顯性求解；相對的， $\Omega_{high}$  所對應高頻運動模式基底為  $U_{high}$ ，在大的時間區間需透過隱性求解。本節所介紹的依據自然頻率拆解方法，可以區分出低頻和高頻運動模式，並且有效使用在 IMEXv 之上。

### 4.3 顯隱性變分積分器 (IMEXv)

在於變形物體模擬，我們希望達成有效率地保持系統能量同時具有高頻和低頻運動。在保持系統能量的訴求之下經由第三章討論，變分積分器成為在微分方程求解主要的工具之一。然而，之前所討論的積分器並沒有辦法有效計算高低頻運動，因為使用顯性法(如 Stormer-Verlet)計算高頻運動，需要使用小的時間區間會大幅增加整體計算量，否則需要改用隱性法求解。而直接使用隱性法(如隱性中點法)做計算，會導致低頻運動也需要透過迭代求解對於低頻運動是非必要的。所以，本篇論文使用顯隱性變分積分器 (explicit-implicit variational integrator 簡稱 IMEXv)[1]，對於低頻透過顯性運算，高頻項透過隱性運算，來達到有效計算的效果。4.3.1 是保守場 IMEXv 的推導流程，4.3.2 是非保守場的 IMEXv 的推導流程。

#### 4.3.1 保守場顯隱性變分積分器

IMEXv 的精神是將低頻運動用顯性法計算高頻運動用隱性法計算。為了這個目的，把原本的系統位能  $V(q)$  分為低頻位能  $V_{low}(q)$  跟高頻位能  $V_{high}(q)$ ，即

$V(q)_{IMEX} = V_{high}(q) + V_{low}(q)$  取代(3.3.9)中的位能項，可得：

$$L_d^{IMEX}(q_k, q_{k+1}) = \frac{h}{2} \left( \frac{q_{k+1} - q_k}{h} \right)^T M \left( \frac{q_{k+1} - q_k}{h} \right) - V_{high}(q_k, q_{k+1}) - V_{low}(q_k, q_{k+1}) \quad (4.3.1)$$

而高頻位能  $V_{high}(q_k, q_{k+1})$  透過中點法定義，低頻位能  $V_{low}(q_k, q_{k+1})$  透過梯形法定義，可得

顯隱性 Lagrangian 量:

$$L_d^{IMEX}(q_k, q_{k+1}) = \frac{h}{2} \left( \frac{q_{k+1} - q_k}{h} \right)^T M \left( \frac{q_{k+1} - q_k}{h} \right) - h V_{high} \left( \frac{q_k + q_{k+1}}{2} \right) - h \frac{V_{low}(q_k) + V_{low}(q_{k+1})}{2} \quad (4.3.2)$$

此離散 Lagrangian 量目的是把離散位能分成高低頻處理。為了推導出離散變分積分器，將(4.3.2)帶入(3.3.7)、(3.3.8)可得:

$$p_k = M \left( \frac{q_{k+1} - q_k}{h} \right) + \frac{h}{2} \nabla V_{low}(q_k) + \frac{h}{2} \nabla V_{high} \left( \frac{q_k + q_{k+1}}{2} \right) \quad (4.3.3)$$

$$p_{k+1} = M \left( \frac{q_{k+1} - q_k}{h} \right) - \frac{h}{2} \nabla V_{low}(q_{k+1}) - \frac{h}{2} \nabla V_{high} \left( \frac{q_k + q_{k+1}}{2} \right). \quad (4.3.4)$$

理論上，(4.3.3)、(4.3.4)此二方程式就是 IMEXv。但此二方程式因為  $\nabla V_{high} \left( \frac{q_k + q_{k+1}}{2} \right)$  是需要透過迭代求解，導致此二方程式也需要迭代求解。所以，直接對於此二方程式求解並沒有辦法達成我們目的。為了達成我們將低頻用顯性計算、高頻用隱性計算的目的，我們取兩個中繼動量:

$$p_k^+ = p_k - \frac{h}{2} \nabla V_{low}(q_k) \quad (4.3.5)$$

$$p_{k+1}^- = p_{k+1} + \frac{h}{2} \nabla V_{low}(q_{k+1}) \quad (4.3.6)$$

將(4.3.5)代入(4.3.3)取代可得:

$$p_k^+ = M \left( \frac{q_{k+1} - q_k}{h} \right) + \frac{h}{2} \nabla V_{high} \left( \frac{q_k + q_{k+1}}{2} \right) \quad (4.3.7)$$

將(4.3.6)代入(4.3.4)取代可得:

$$p_{k+1}^- = M \left( \frac{q_{k+1} - q_k}{h} \right) - \frac{h}{2} \nabla V_{high} \left( \frac{q_k + q_{k+1}}{2} \right) \quad (4.3.8)$$

將(4.3.7)、(4.3.8)經由交互代換可得:

$$\begin{cases} q_{k+1} &= q_k + hM^{-1}\left(\frac{p_k^+ + p_{k+1}^-}{2}\right) \\ p_{k+1}^- &= p_k^+ - h\nabla V_{high}\left(\frac{q_k + q_{k+1}}{2}\right) \end{cases} \quad (4.3.9)$$

其中在上述離散動量求得順序為  $p_k \mapsto p_k^+ \mapsto p_{k+1}^- \mapsto p_{k+1}$ ，可得完整顯隱性變分積分器如下：

$$\text{Step 1: } p_k^+ = p_k - \frac{h}{2}\nabla V_{low}(q_k), \quad (4.3.10)$$

$$\text{Step 2: } \begin{cases} q_{k+1} &= q_k + hM^{-1}\left(\frac{p_k^+ + p_{k+1}^-}{2}\right) \\ p_{k+1}^- &= p_k^+ - h\nabla V_{high}\left(\frac{q_k + q_{k+1}}{2}\right) \end{cases} \quad (4.3.11)$$

$$\text{Step 3: } p_{k+1} = p_{k+1}^- - \frac{h}{2}\nabla V_{low}(q_{k+1}). \quad (4.3.12)$$

也就是(4.3.10)、(4.3.11)、(4.3.12)是(4.3.3)、(4.3.4)的重新整理，其中各方程式狀態更新如下：

1. (4.3.10),  $(p_k, q_k) \mapsto (p_k^+, q_k)$ ，顯性更新。
2. (4.3.11),  $(p_k^+, q_k) \mapsto (p_{k+1}^-, q_{k+1})$ ，隱性迭代更新。
3. (4.3.12),  $(p_{k+1}^-, q_{k+1}) \mapsto (p_{k+1}, q_{k+1})$ ，顯性更新。



此顯隱性積分器當  $\nabla V_{low} \equiv 0$ ，此積分器等價於隱性中點法；相對的當  $\nabla V_{high} \equiv 0$ ，等價於 Stormer-Verlet。所以，此積分器是介於這兩積分器之間的綜合積分器。

然而，Step 1 及 Step 3 是相當類似的。當離散動量不需要紀錄，可以將 Step 1 及 Step 3 合併更新法如下，將(4.3.12)的  $k+1$  取代為  $k$  可得：

$$p_k = p_k^- - \frac{h}{2}\nabla V_{low}(q_k)$$

帶入(4.3.10)可得：

$$p_k^+ = p_k^- - h \nabla V_{low}(q_k) \quad (4.3.13)$$

將(4.3.13)中的 $p_k^-$ 取代為 $p_k$ 、(4.3.11)中的 $p_{k+1}^-$ 取代為 $p_{k+1}$ 可得兩階段 IMEXv

$$\text{Step 1 : } p_k^+ = p_k - h \cdot V_{low}(q_k), \quad (4.3.14)$$

$$\text{Step 2 : } \begin{cases} q_{k+1} &= q_k + hM^{-1}\left(\frac{p_k^+ + p_{k+1}}{2}\right) \\ p_{k+1} &= p_k^+ - h \nabla V_{high}\left(\frac{q_k + q_{k+1}}{2}\right) \end{cases} \quad (4.3.15)$$

此代換法，可以減少計算量且更容易實作。

### 4.3.2 非保守場顯隱性變分積分器

4.3.1 所討論的是在保守場<sup>3</sup>[23]的 IMEXv。但電腦動畫領域絕大部分的模擬都是需要跟環境作互動，單純保守場的 IMEXv 是不夠的。因此，我們參考 Kane 等人[16]的方法擴充原本的保守場 IMEXv，而推導出是適用於非保守場的 IMEXv。

非保守場變分積分器推導運算是和保守場變分積分器是相當類似的。不同的是保守場幾何力學是透過作用量方程式(3.3.3)推導出 Euler-Lagrangian 方程式，得以推導出變分積分器，而非保守場變分積分器[16]是透過 Lagrange-d' Alembert principle:

$$\delta \int L(q(t), \dot{q}(t)) dt + \int F(q(t), \dot{q}(t)) \cdot \delta q dt = 0. \quad (4.3.16)$$

其所對應的離散 Lagrange-d' Alembert principle 為:

$$\delta \sum_{k=0}^{N-1} L_d(q_k, q_{k+1}) + \sum_{k=0}^{N-1} [F_d^-(q_k, q_{k+1}) \cdot \delta q_k + F_d^+(q_k, q_{k+1}) \cdot \delta q_{k+1}] = 0, \quad (4.3.17)$$

<sup>3</sup>保守場是指在模擬過程不具有外力或是消散力存在

其中  $L_d(q_k, q_{k+1})$  是離散 Lagrangian 量、 $F_d^-$  和  $F_d^+$  是離散外力，將會在後面做進一步討論。而類似之前我們推導出離散 Euler-Lagrangian 方程式的方式，我們可以推導出具有外力的離散 Euler-Lagrangian 方程式：

$$D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) + D_2 L_d(q_{k-1}, q_k) + F_d^-(q_k, q_{k+1}) + F_d^+(q_{k-1}, q_k) = 0. \quad (4.3.18)$$

首先經由(4.3.18)定義時間點  $t_k$  離散動量：

$$p_k = D_2 L_d(q_{k-1}, q_k) + F_d^-(q_{k-1}, q_k) = -D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) - F_d^+(q_k, q_{k+1}) \quad (4.3.19)$$

可將(4.3.19)寫成下列形式：

$$p_k = -D_1 L_d(q_k, q_{k+1}) - F_d^+(q_k, q_{k+1}) \quad (4.3.20)$$

$$p_{k+1} = D_2 L_d(q_k, q_{k+1}) + F_d^-(q_k, q_{k+1}) \quad (4.3.21)$$

將我們之前所定義的離散顯隱性 Lagrangian 量  $L_d^{IMEX}$  取代(4.3.20)、(4.3.21)中的  $L_d$  推導可得：

$$p_k = M\left(\frac{q_{k+1} - q_k}{h}\right) + \frac{h}{2} \nabla V_{low}(q_k) + \frac{h}{2} \nabla V_{high}\left(\frac{q_k + q_{k+1}}{2}\right) - F_d^-(q_k, q_{k+1}) \quad (4.3.22)$$

$$p_{k+1} = M\left(\frac{q_{k+1} - q_k}{h}\right) - \frac{h}{2} \nabla V_{low}(q_{k+1}) - \frac{h}{2} \nabla V_{high}\left(\frac{q_k + q_{k+1}}{2}\right) + F_d^+(q_k, q_{k+1}). \quad (4.3.23)$$

在此離散外力  $F_d(q_k, q_{k+1})$  是透過積分方法計算。假設外力可分成高頻和低頻外力，離散低頻外力  $F_{low}$  將由梯形法求得、離散高頻外力  $F_{high}$  由中點法求得。取代(4.3.22)、(4.3.23)可得：

$$p_k = M\left(\frac{q_{k+1} - q_k}{h}\right) + \frac{h}{2} \nabla V_{low}(q_k) + \frac{h}{2} \nabla V_{high}\left(\frac{q_k + q_{k+1}}{2}\right) - F_{low}^-(q_k, q_{k+1}) - F_{high}^-(q_k, q_{k+1}) \quad (4.3.24)$$

$$p_{k+1} = M\left(\frac{q_{k+1} - q_k}{h}\right) - \frac{h}{2} \nabla V_{low}(q_{k+1}) - \frac{h}{2} \nabla V_{high}\left(\frac{q_k + q_{k+1}}{2}\right) + F_{low}^+(q_k, q_{k+1}) + F_{high}^+(q_k, q_{k+1}) \quad (4.3.25)$$

同樣此二方程式需要透過迭代求解，類次 4.3.1 的方式我們取中繼離散動量：

$$p_k^+ = p_k - \frac{h}{2} \nabla V_{low}(q_k) + F_{low}^-(q_k, q_{k+1}) \quad (4.3.26)$$

$$p_{k+1}^- = p_{k+1} + \frac{h}{2} \nabla V_{low}(q_{k+1}) - F_{low}^+(q_k, q_{k+1}). \quad (4.3.27)$$

將(4.3.26)、(4.3.27)代入(4.3.24)、(4.3.25)。而 $F_{high}^-(q_k, q_{k+1})$ 、 $F_{high}^+(q_k, q_{k+1})$ 皆由中點法定義所以兩者是相同的。因此令離散高頻外力為

$$F_{high}(q_k, q_{k+1}) = 2F_{high}^-(q_k, q_{k+1}) = 2F_{high}^+(q_k, q_{k+1})$$

接著類似 4.3.1 的推導可得三階段有施力的 IMEXv：

$$\text{Step 1 : } p_k^+ = p_k - \frac{h}{2} \nabla V_{low}(q_k) + F_{low}^-(q_k, q_{k+1}), \quad (4.3.28)$$

$$\text{Step 2 : } \begin{cases} q_{k+1} = q_k + hM^{-1}\left(\frac{p_k^+ + p_{k+1}^-}{2}\right), \\ p_{k+1}^- = p_k^+ - h\nabla V_{high}\left(\frac{q_k + q_{k+1}}{2}\right) + F_{high}(q_k, q_{k+1}), \end{cases} \quad (4.3.29)$$

$$\text{Step 3 : } p_{k+1} = p_{k+1}^- - \frac{h}{2} \nabla V_{low}(q_{k+1}) + F_{low}^+(q_{k+1}). \quad (4.3.30)$$

其中離散高頻率外力由中點法求得：

$$F_{high}(q_k, q_{k+1}) = h \cdot f_{high}\left(\frac{q_k + q_{k+1}}{2}\right),$$

離散低頻外力由梯形法求得：

$$F_{low}^-(q_k, q_{k+1}) = \frac{h}{2} f_{low}(q_k),$$

$$F_{low}^+(q_k, q_{k+1}) = \frac{h}{2} f_{low}(q_{k+1}),$$

而 $f(q)$ 是外力或是阻尼力。

同樣的具有施力 IMEXv 積分器參考 4.3.1 的方法，將 $F_{low}^-$ 、 $F_{low}^+$ 合併取得  
 $F_{low}(q_k) = hf_{low}(q_k)$ ，一樣可以轉換為兩階段版本有施力 IMEXv 方程組：

$$\text{Step 1 : } p_k^+ = p_k - h \cdot \nabla V_{low}(q_k) + F_{low}(q_k), \quad (4.3.31)$$

$$\text{Step 2 : } \begin{cases} q_{k+1} &= q_k + hM^{-1}\left(\frac{p_k^+ + p_{k+1}}{2}\right) \\ p_{k+1} &= p_k^+ - h\nabla V_{high}\left(\frac{q_k + q_{k+1}}{2}\right) + F_{high}(q_k, q_{k+1}) \end{cases} \quad (4.3.32)$$

有施力 IMEXv 可以將外力依據高頻和低頻分開處理，本質上是保守場 IMEXv 的變化型。但實際上我們只對阻尼力拆解，因為我們所使用的 Rayleigh 阻尼力為速度的函數，也就是高頻阻尼力會隨著迭代而變化且具有頻率性質。而外力並沒有直接做拆解的動作，因為對於具有互動的系統，無法預期外力是高頻或是低頻。

## 4.4 實作顯隱性變分積分器

### 在簡化 St. Venant-Kirchhoff 變形物體

在 4.1 我們已討論簡化 StVK 有限元素法，最後的結論是取得有效基底  $U$ ，而基底即廣義座標系，所對應的權重值  $q$  即是廣義座標系的變位量，且取得預先計算相對應的系統內力系數用來快速計算系統內力  $\tilde{R}$  和切線勁度矩陣  $\tilde{K}$ 。在 4.2 將簡化 StVK 有限元素法進行拆解成高頻基底  $U_{high}$ 、低頻基底  $U_{low}$ ，所對應的分別是高頻內力  $\tilde{R}_{high}$ 、低頻內力  $\tilde{R}_{low}$ ，進而可以套用 4.3 所討論的有施力 IMEXv。

在幾何力學中內力是透過位能  $V$  描述，即系統內力是系統位能對自由度的一階偏微分 [19]，也就是  $R_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$ ，也就是 IMEXv 中的  $\nabla V$  表示所有系統內力，所以位能跟內力有了一一對應的關係，也就是簡化低頻力為  $\tilde{R}_{low} = -\nabla \tilde{V}_{low}$ 、簡化高頻力為  $\tilde{R}_{high} = -\nabla \tilde{V}_{high}$ 。如此一來我們可將簡化 StVK 有限元素法套用在有施力 IMEXv 之上。

但直接施作有施力 IMEXv 還是有些許問題將在 4.4.1 加以討論。此外簡化 StVK 有限元素法的質量矩陣為單位矩陣，使得 4.4.1 所提出的方法，可以更加精簡將在 4.4.2 討論。

#### 4.4.1 Quasi-Newton 法

本小節將說明如何實作兩階段有施力的 IMEXv 在簡化 StVK 有限元素法中。我們將 Step1 (4.3.31) 的低頻內力  $\nabla V_{low}(q_k)$  取代為  $-\tilde{R}_{low}(q_k)$ 、 $F_{low}(q_k)$  為  $h \cdot \tilde{f}_{low}(q_k)$ ，即  $\tilde{p}_k^+ = \tilde{p}_k - (\tilde{R}_{low}(q_k) - \tilde{f}_{low}(q_k))$  可透過顯性計算直接求解。而依據 Step2(4.3.32) 的高頻內力  $\nabla V_{high}(q_k)$  為  $-\tilde{R}_{high}(q_k)$ 、高頻外力為  $F_{high}(q_k)$  為  $h \cdot f_{high}(\frac{q_k+q_{k+1}}{2})$  可得

$$q_{k+1} = q_k + hM^{-1}\left(\frac{p_k^+ + p_{k+1}}{2}\right) \quad (4.4.1)$$

$$p_{k+1} = p_k^+ - h\tilde{R}_{high}\left(\frac{q_k + q_{k+1}}{2}\right) + hf_{high}\left(\frac{q_k + q_{k+1}}{2}\right). \quad (4.4.2)$$

(4.4.1)、(4.4.2) 需要透過求解非線性方程組。但此方程組的 Jacobian 矩陣於大的時間區間時容易是一個病態矩陣(ill-condition matrix)，直接透過 Newton-Raphson 求解變得不可行。所以，我們使用一個類似 Newton-Raphson 的方法作為非線性求解工具。

我們將(4.4.1)中的  $p_{k+1}$  由(4.4.2)取代可得：

$$q_{k+1} = q_k + hM^{-1}p_k^+ - \frac{h^2}{2}M^{-1}\left(\tilde{R}_{high}\left(\frac{q_k + q_{k+1}}{2}\right) + f_{high}\left(\frac{q_k + q_{k+1}}{2}\right)\right) \quad (4.4.3)$$

針對(4.4.3)經由 Newton-Raphson 迭代法求解非線性方程式。在每一次迭代更新  $\tilde{R}_{high}(\frac{q_k+q_{k+1}}{2})$ 、 $\tilde{f}_{high}(\frac{q_k+q_{k+1}}{2})$ 、 $\tilde{p}_{k+1}$ 。因為(4.4.3)的 Jacobian 矩陣即使在較大的時間區間，依然是一個良置矩陣(well-condition matrix)，所以(4.4.3)可以有效求解。而我們稱這個方法稱作為 quasi-Newton 迭代法。

演算法 1 是兩階段有施力的 IMEXv 在簡化 StVK 有限元素法的實作細節。其中需要注意：

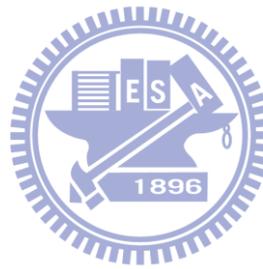
1. 第 12 行，內力的 Jacobian 矩陣是原本切線勁度矩陣的一半，因為實際上  $\tilde{R}(q)$  的變數是  $q_{k+1}$  而非  $\bar{q}$ 。依據微分連鎖律可得  $J(\tilde{R}_{high}(\bar{q})) = \frac{1}{2}\tilde{K}_{high}(\bar{q})$

2. 第 12 行，高頻率外力的 Jacobian 矩陣。在我們實作之中，只有施作阻尼力是依據 Rayleigh 阻尼模型。所對應的阻尼矩陣是

$$J(\tilde{f}_{high}(\bar{q})) = \alpha \tilde{M} + \beta J(\tilde{R}_{high}(\bar{q})), \text{ 其中 } \alpha、\beta \text{ 是阻尼係數。}$$

3. 第 7、18 行中的高頻外力  $\tilde{f}_{high}(\bar{q})$  阻尼力。而實際阻尼力經由下列計算:

$\tilde{f}_{high}(\bar{q}) = J(\tilde{f}_{high}(\bar{q})) \cdot \bar{\dot{q}}$ 。其中， $\bar{\dot{q}}$  為中點速度可由  $q_k、q_{k+1}$  差分取得，或者是由離散動量計算， $\bar{\dot{q}} = M^{-1} \tilde{p}_{k+1}$ ，因為簡化 StVK 有限元素法，質量矩陣  $M$  為單位矩陣，所以可以取  $\bar{\dot{q}} = \tilde{p}_{k+1}$ 。



```

1 //step 1
2 計算低頻內力  $\tilde{R}_{low}(q_k)$ 、低頻阻尼力  $\tilde{f}_{low}(q_k)$ 
3 累積低頻動量  $\tilde{p}_k^+ = \tilde{p}_k - (\tilde{R}_{low}(q_k) - \tilde{f}_{low}(q_k))$ 
4 //step 2
5 估計下一個時刻點位置  $q_{k+1}^0 = q_k + hM^{-1}\tilde{p}_k^+$ 
6 計算中點位置  $\bar{q} = \frac{(q_{k+1}^0 + q_k)}{2}$ 
7 計算高頻內力  $\tilde{R}_{high}(\bar{q})$ 、高頻外力  $\tilde{f}_{high}(\bar{q})$ 
8 For  $j = 1$  to  $j_{max}$  //施作 Quasi-Newton 迭代法
9    $residual = q_{k+1}^j - q_k - hM^{-1}\tilde{p}_k^+ - \frac{h^2}{2}M^{-1}(\tilde{R}_{high}(\bar{q}) - \tilde{f}_{high}(\bar{q}))$ ;
10  if  $\|residual\|_{\infty} \leq tolq$ 
11     break out of for loop;
12  估計 Jacobian 矩陣  $A = I - \frac{h^2}{2}M^{-1}(J(\tilde{R}_{high}(\bar{q})) - J(\tilde{f}_{high}(\bar{q})))$ 
13  求解  $r \times r$  線性系統:
14      $A(\Delta q_{k+1}^j) = -residual$ 
15      $q_{k+1}^{j+1} = q_{k+1}^j + \Delta q_{k+1}^j$ 
16     計算中點位置  $\bar{q} = \frac{(q_{k+1}^{j+1} + q_k)}{2}$ 
17     估計高頻內力  $\tilde{R}_{high}(\bar{q})$ 、高頻外力  $\tilde{f}_{high}(\bar{q})$ 
18     更新動量  $\tilde{p}_{k+1} = \tilde{p}_k - h(\tilde{R}_{high}(\bar{q}) - \tilde{f}_{high}(\bar{q}))$ 
19 end of for loop
20 更新下個時刻點位置  $q_{k+1} = q_{k+1}^{j+1}$ 

```

演算法 1 有施力的 IMEXv solved by quasi-Newton 迭代法

#### 4.4.2 Quasi-Newton 法，在質量是單位矩陣

在上一小節所描述的 Quasi-Newton 法會有多餘計算，因為  $\tilde{M}$  是一個單位矩陣  $I_r$ ，表示每一個運動模式的位移量  $q$ ，只會受到該模式的受力而改變，也就是演算法 1 中的 step2 (第 8 到 19 行)，低頻運動模式位置  $q$  是常量並非變量，因此不會隨著迭代過程而改變。換言之，step2 (第 8 到第 19 行) 可以由原本的  $r$  維非線性解根轉換為  $ir$  維非線性解根，其中  $ir$  是高頻運動模式數量。於是，演算法 1 可以轉換為演算法 2，使得系統計算量更進一步下降。

```

1 //step 1
2 計算低頻內力  $\tilde{R}_{low}(q_k)$ 、低頻阻尼力  $\tilde{f}_{low}(q_k)$ 
3 累積低頻動量  $\tilde{p}_k^+ = \tilde{p}_k - (\tilde{R}_{low}(q_k) - \tilde{f}_{low}(q_k))$ 
4 //step 2
5 估計下一個時刻點位置  $q_{k+1}^0 = q_k + hM^{-1}\tilde{p}_k^+$ 
6 計算中點位置  $\bar{q} = \frac{(q_{k+1}^0 + q_k)}{2}$ 
7 計算高頻內力  $\tilde{R}_{high}(\bar{q})$ 、高頻外力  $\tilde{f}_{high}(\bar{q})$ 
8 For  $j = 1$  to  $j_{max}$  //施作 Quasi-Newton 迭代法
9    $residual = q_{k+1}^j - q_k - hM^{-1}\tilde{p}_k^+ - \frac{h^2}{2}M^{-1}(\tilde{R}_{high}(\bar{q}) - \tilde{f}_{high}(\bar{q}))$ ;
10  if  $\|residual\|_{\infty} \leq tolq$ 
11     break out of for loop;
12  估計 Jacobian 矩陣  $A = I - \frac{h^2}{2}M^{-1}(J(\tilde{R}_{high}(\bar{q})) - J(\tilde{f}_{high}(\bar{q})))$ 
13  求解  $ir \times ir$  線性系統:
14      $A(\Delta q_{k+1}^j) = -residual$ 
15      $q_{k+1}^{j+1} = q_{k+1}^j + \Delta q_{k+1}^j$ 
16     計算中點位置  $\bar{q} = \frac{(q_{k+1}^{j+1} + q_k)}{2}$ 
17     估計高頻內力  $\tilde{R}_{high}(\bar{q})$ 、高頻外力  $\tilde{f}_{high}(\bar{q})$ 
18     更新動量  $\tilde{p}_{k+1} = \tilde{p}_k - h(\tilde{R}_{high}(\bar{q}) - \tilde{f}_{high}(\bar{q}))$ 
19 end of for loop
20 更新下個時刻點位置  $q_{k+1} = q_{k+1}^{j+1}$ 

```

演算法 2 有施力的 IMEXv solved by quasi-Newton 迭代法 (當質量矩陣是單位矩陣)

# 第五章

## 實驗

本論文所採取的具有施力的 IMEXv(以下簡稱 IMEXv)所具備優點是有效保持系統能量，且透過將低頻和高頻位能分開運算使得計算速度可以加速，因此我們需要驗證能量的正確性，大致分成四個實驗:在實驗一，我們設定不同施力於同樣模型以比較 IMEXv 和 NEWMARK 的能量行為；在實驗二，我們比較 IMEXv 和 NEWMARK 的具有環境阻尼情況下的能量行為；在實驗三，我們將經由長時間的模擬以驗證 IMEXv 是否有效系統能量；實驗四:將設定不同時間區間大小以測試 IMEXv 對時間區間的敏感度。

我們在 5.1 將介紹此四實驗的共通設定。接著別分別在 5.2、5.3、5.4、5.5 分別說明和討論此四組。然後，5.6 將討論 IMEXv 的效能增進。最後，5.7 將說明 IMEXv 的限制條件。

### 5.1 實驗設定

我們的所有實驗使用桌上型電腦(Intel Core i5 [760@2.8GHz](#))，使用 MKL(Intel Math Kernel Library)為線性代數運算函數庫以達到最佳運算效能。在這裡我們考慮兩種積分器:IMEXv 是根據 4.4.2 所實作，而 NEWMARK 積分器是由 Barbic[24]所提供的原始碼。

除此之外，我們考慮三種基礎設定分別為物體模型、外力條件及環境阻尼:

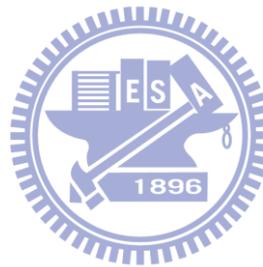
**物體模型** 為了驗證我們系統的使用廣度，我們嘗試對不同可形變模型進行模擬，分別為:beam、basket、bridge、horse、tower 和 heart，此六種可形變模型，如圖 10 所示。

**外力條件** 為了測試系統對不同形式外力，我們測試三種外力條件分別是衝擊力、固定

時間長度施力、週期性施力:

1. 衝擊力，是指給予一個長達 0.003 秒的衝擊力，如圖 10。
2. 固定時間長度施力，是指給予施力為 0.3 秒的方波力，以測試系統對於非衝擊力的響應效果，如圖 11。
3. 週期性施力，是指給系統外力大小是隨著 1Hz 的正弦波(sin)變化，以測試系統是否會發生共振現象，如圖 12。

**環境阻尼** 為了測試系統阻尼環境效應。所以，我們測試兩個阻尼狀態，一為無阻尼 (Rayleigh 阻尼係數 $\alpha = 0, \beta = 0$ )；另為具有阻尼(Rayleigh 阻尼係數 $\alpha = 0.3, \beta = 0$ )。



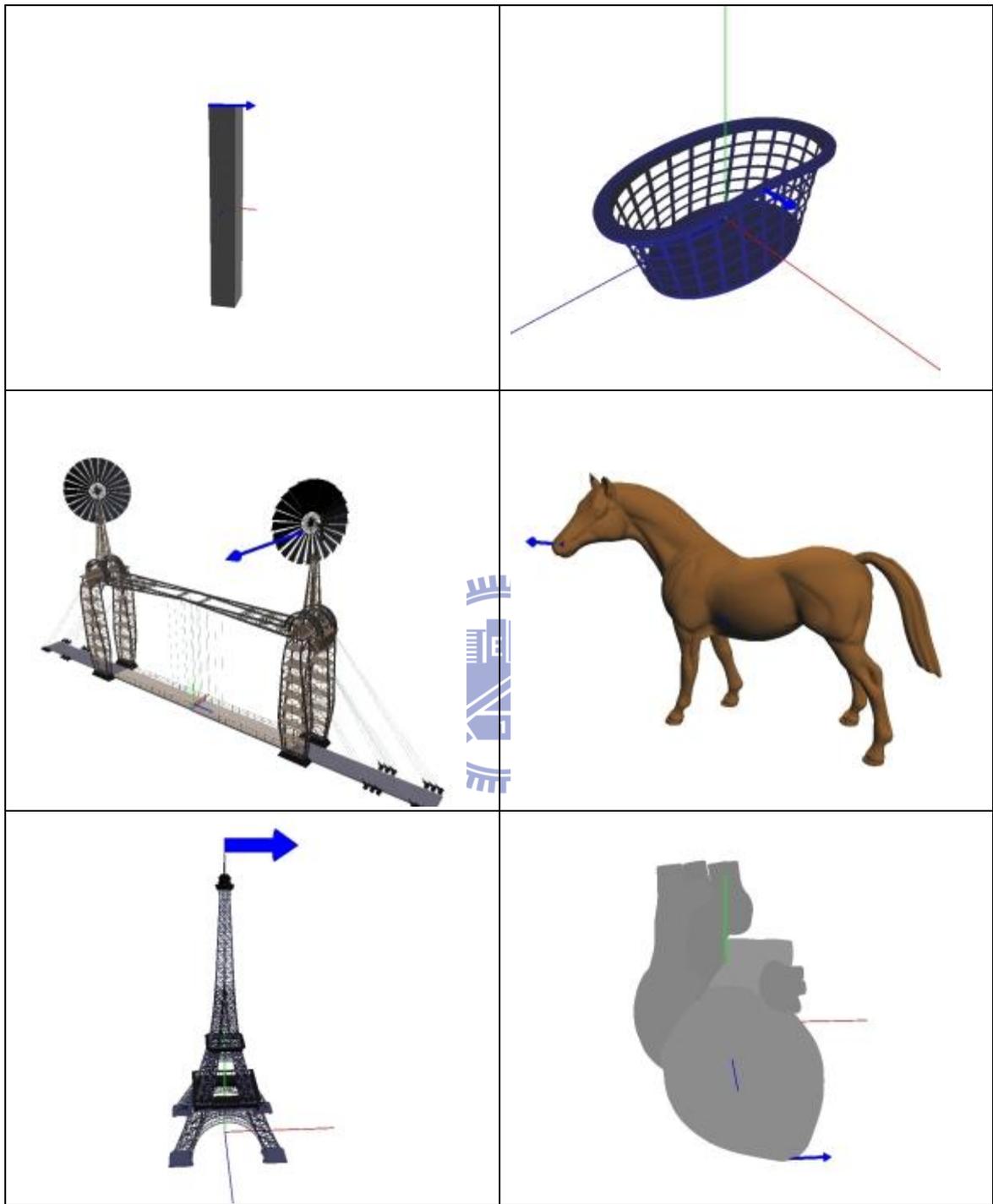


圖 10 可形變模型既施力示意圖。針對每一個模型，做單點施力。藍色箭頭是施力方向和大小。

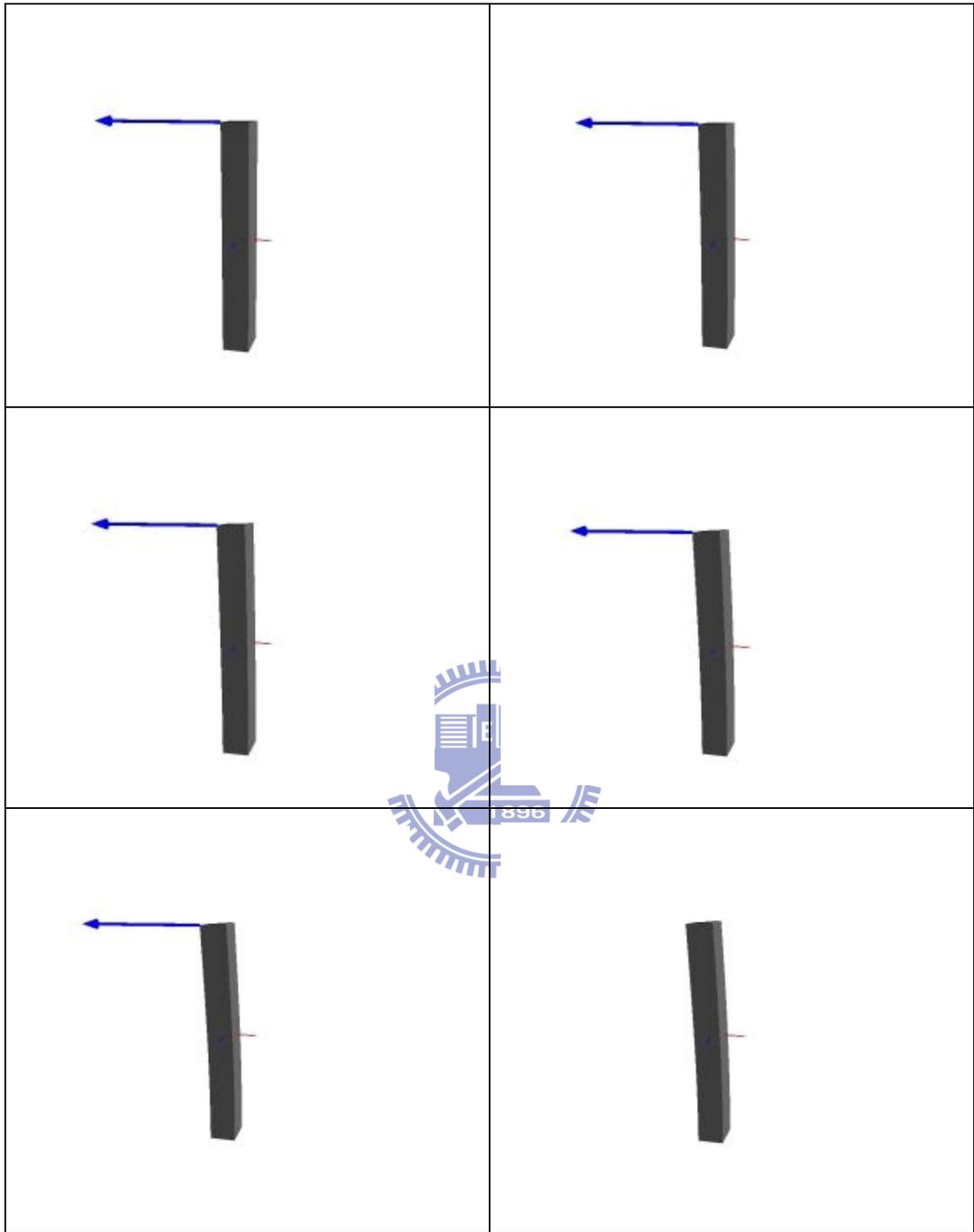


圖 11 固定時間長度施力示意圖。給予系統單一大小外力加時間為 0.3 秒。在 0.3 秒之後即無外力作用，如最右下角所示。時間順序為由左至右，由上至下。

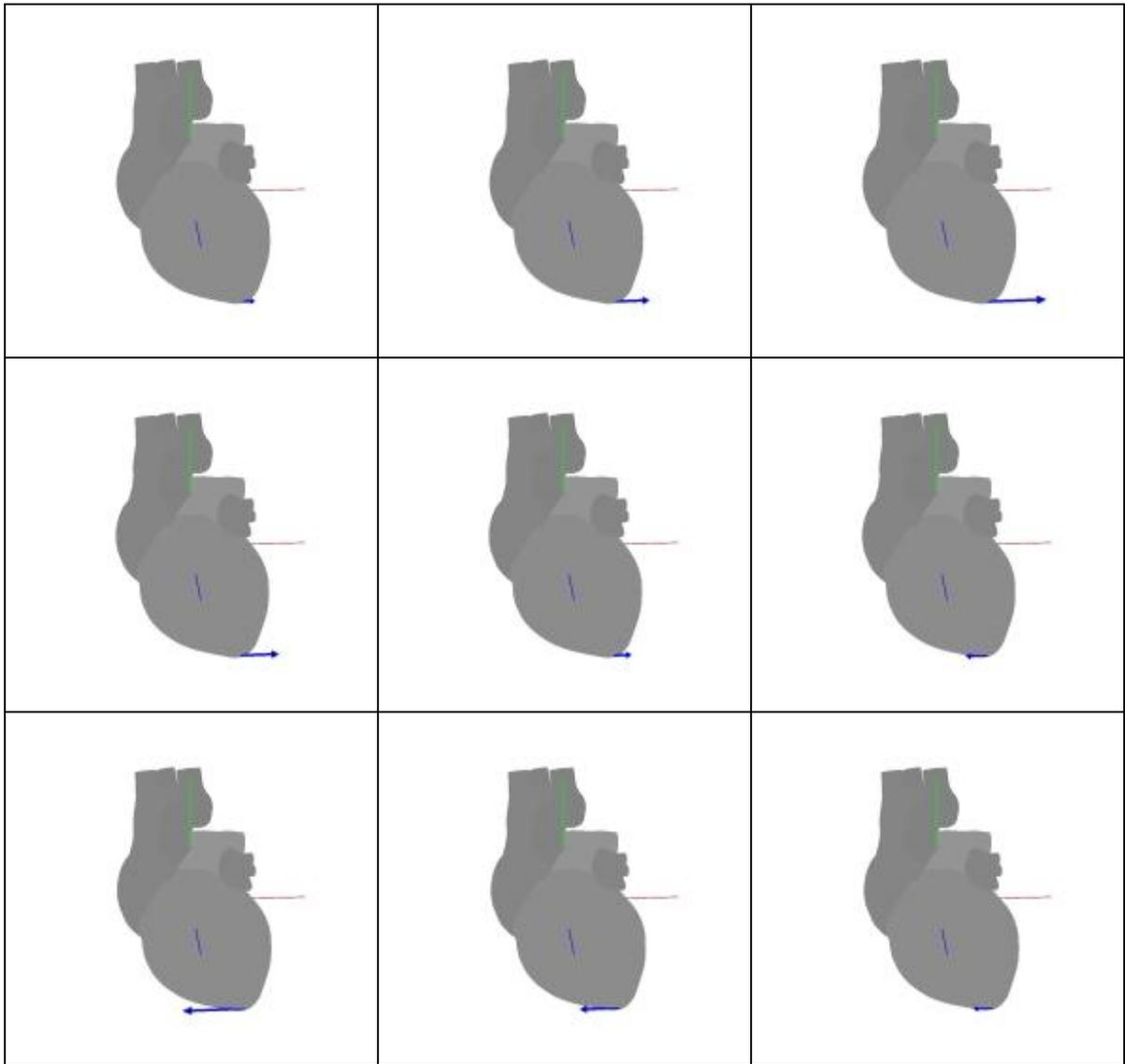


圖 12 週期性施力示意圖。藍色箭頭為施力方向和大小會隨著時間而改變，時間順序為由左至右，由上至下。

## 5.2 實驗一: IMEXv 和 NEWMARK 無環境阻尼下的能量行為比較

實驗一是比較 IMEXv 和 NEWMARK 的無阻尼能量行為，我們對上節描述六種可形變模型進行長達 30 秒的模擬。經由我們觀察發現此六種可形變模型的能量行為是相當類似的，因此我們僅呈現 horse 的能量圖，其餘能量圖，請見附錄二。

以下考慮上節所描述的三種施力條件(衝擊力、固定時間長度施力、週期性力)，其中模擬時間區間大小設為 0.003 秒。以下先以不同施力條件做討論:

### 衝擊力

圖 13 衝擊力無環境阻尼能量圖。可以發現左圖 IMEXv 的整體能量範圍比右圖 NEWMARK 的能量來的大，會發生這種情況是因為我們採取的是衝擊力(即是最小的單位時間施力)，因為 IMEXv 和 NEWMARK 的外力 quadrature 係數是不相同的(IMEXv  $\alpha = 0.5$ 、NEWMARK  $\alpha = 1$ )，導致兩者能量似乎是不一樣的。

### 固定時間長度施力

圖 14 為固定時間長度施力且不具有阻尼的能量圖，其中施力的時間長達 0.3 秒，而時間區間是 0.003 秒，而把施力時間拉至 100 個 frames，使得 quadrature 係數的影響下降，所以兩者的能量行為就近乎相同。不會像是圖 13 是具有差異。

### 週期性施力

圖 15 為週期性施力能量圖。上節所提到的 1Hz sin 波週期性施力，系統能量隨著時間而逐漸增長，且 IMEXv 和 NEWMARK 的能量圖是近乎相同。

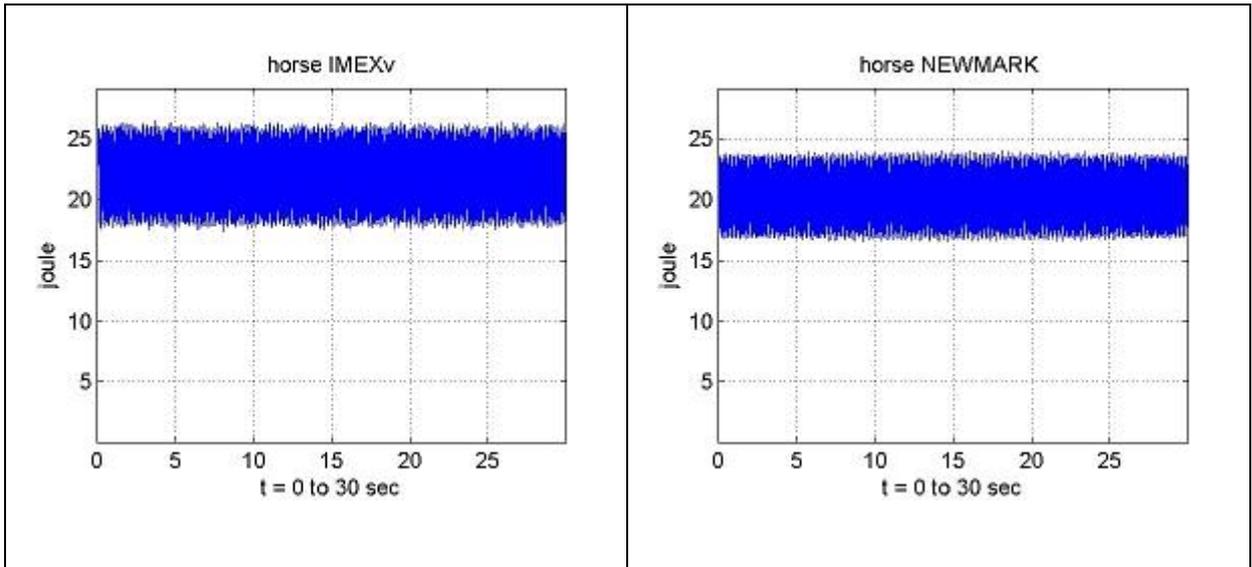


圖 13 衝擊力無環境阻尼能量圖。在此兩者能量是有些許不同是因為兩者的 quadrature 不相同(IMEXv  $\alpha = 0.5$ 、NEWMMARK  $\alpha = 1.0$ )。

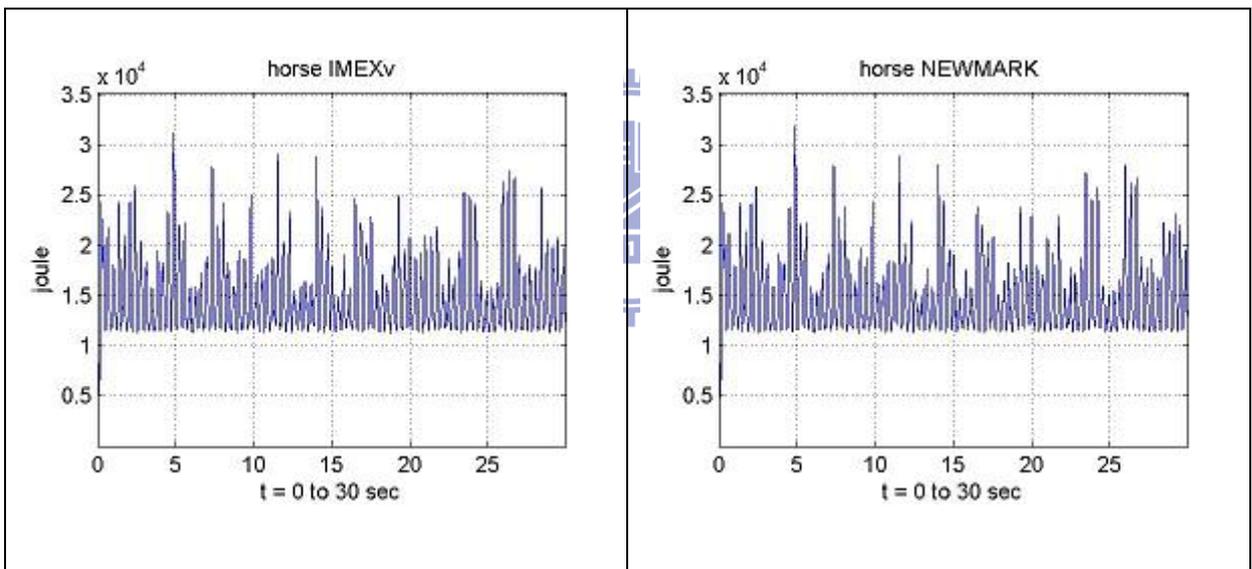


圖 14 固定時間長度施力無環境阻尼能量圖。IMEXv 和 NEWMARK，因為施力長達 100 個 frame，使得 quadrature 係數(IMEXv  $\alpha = 0.5$ 、NEWMMARK  $\alpha = 1.0$ )的影響下降，所以能量圖近乎相同。

### 5.3 實驗二：IMEXv 和 NEWMARK 有環境阻尼下的能量行為比較

實驗二是為了比較 IMEXv 和 NEWMARK 具有阻尼的能量行為。實驗二和實驗一基本設定都是相同的，不同點是實驗二是具有阻尼力版本。實驗一的最後結論是此二積分器的能量行為相當類似的，所以此節我們僅舉單一例子討論，其餘能量圖一樣請見附錄。

圖 16 是衝擊力具有阻尼力的能量圖，可以發現實際上兩者的能量消散行為是極為類似的並沒有太大不同。

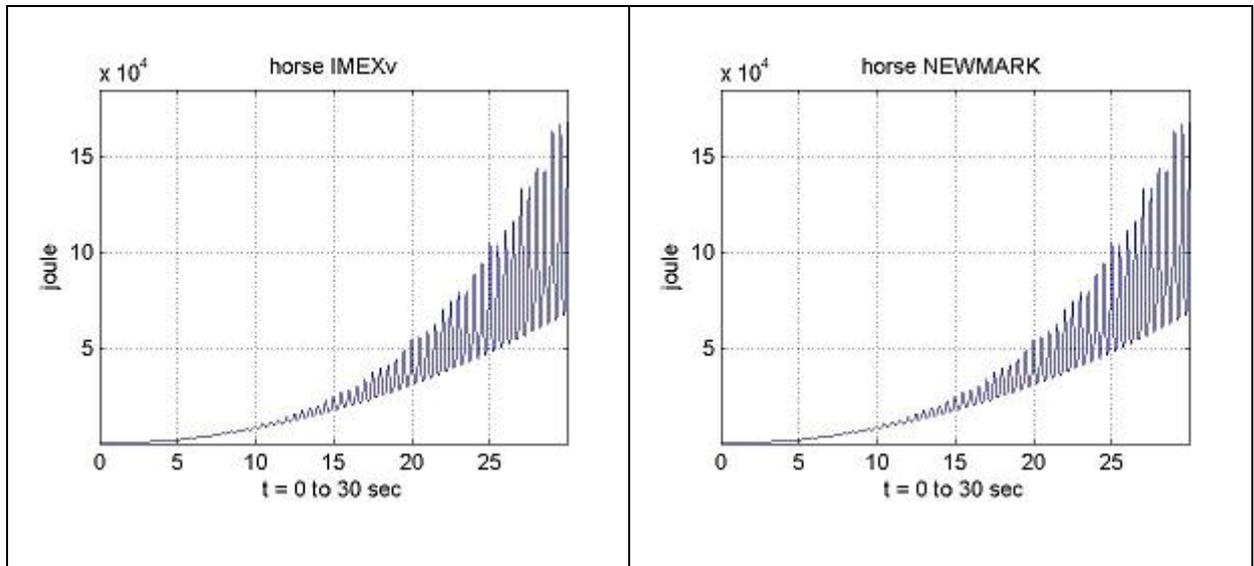


圖 15 週期性施力無環境阻尼能量圖。此為施力為 1Hz 正弦波力的能量圖。因為給予外力是一個持續性週期施力，所以系統能量將持續累積。在此施力狀況，IMEXv 和 NEWMARK 的能量圖是幾乎相同的。

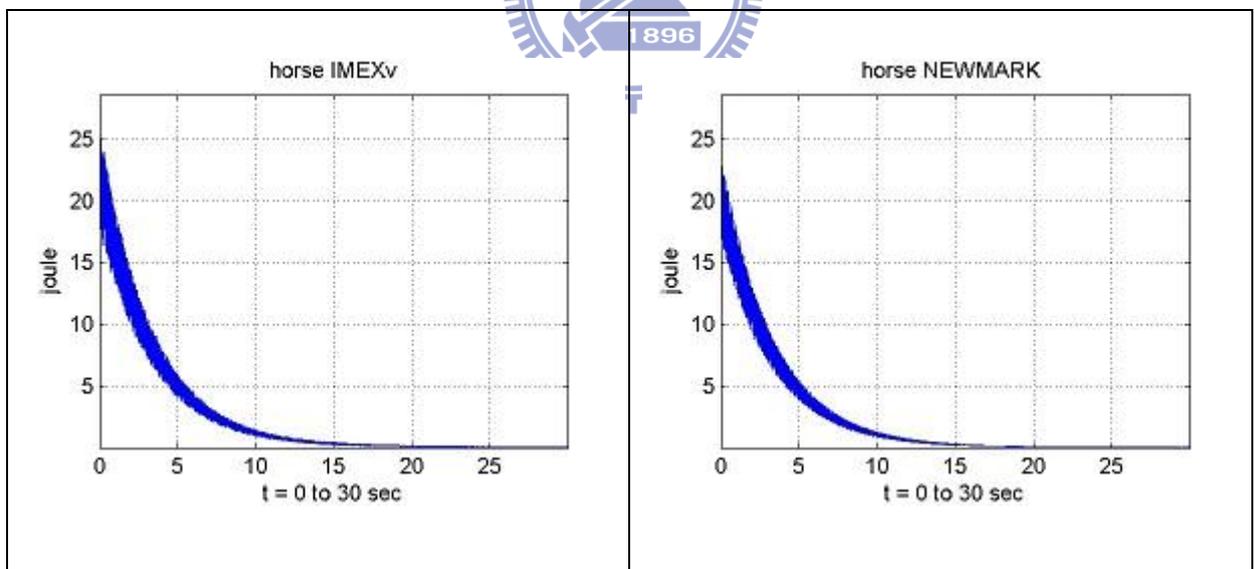


圖 16 衝擊力具有環境阻尼能量圖。IMEXv 和 NEWMARK 的能量消散是極類似的。

## 5.4 實驗三:驗證系統能量的保持

本節我們將驗證 IMEXv 是否可以有效保持系統能量，意即系統能量不會隨著長時間模擬導致發散或者是過度收斂。因此，實驗三將觀察在長時間模擬之下 IMEXv 是否可以保持能量在一定範圍之內。此實驗使用 horse 為運動模型，給予一個初始的衝擊力如 5.1 所描述。接著在中間過程不給予外力和阻尼力，設定時間區間大小為 0.003 秒，最後我們讓模擬長達 10000 秒，也就是多達三百萬個 frames。能量圖如圖 17 所示，可以看出總體能量保持在固定範圍之內，但實際上後 35 秒的平均總體能比前 35 秒增加了 2%；而高頻能量數值誤差的累積有所衰減，導致後 35 秒比前 35 秒衰退了 28%。

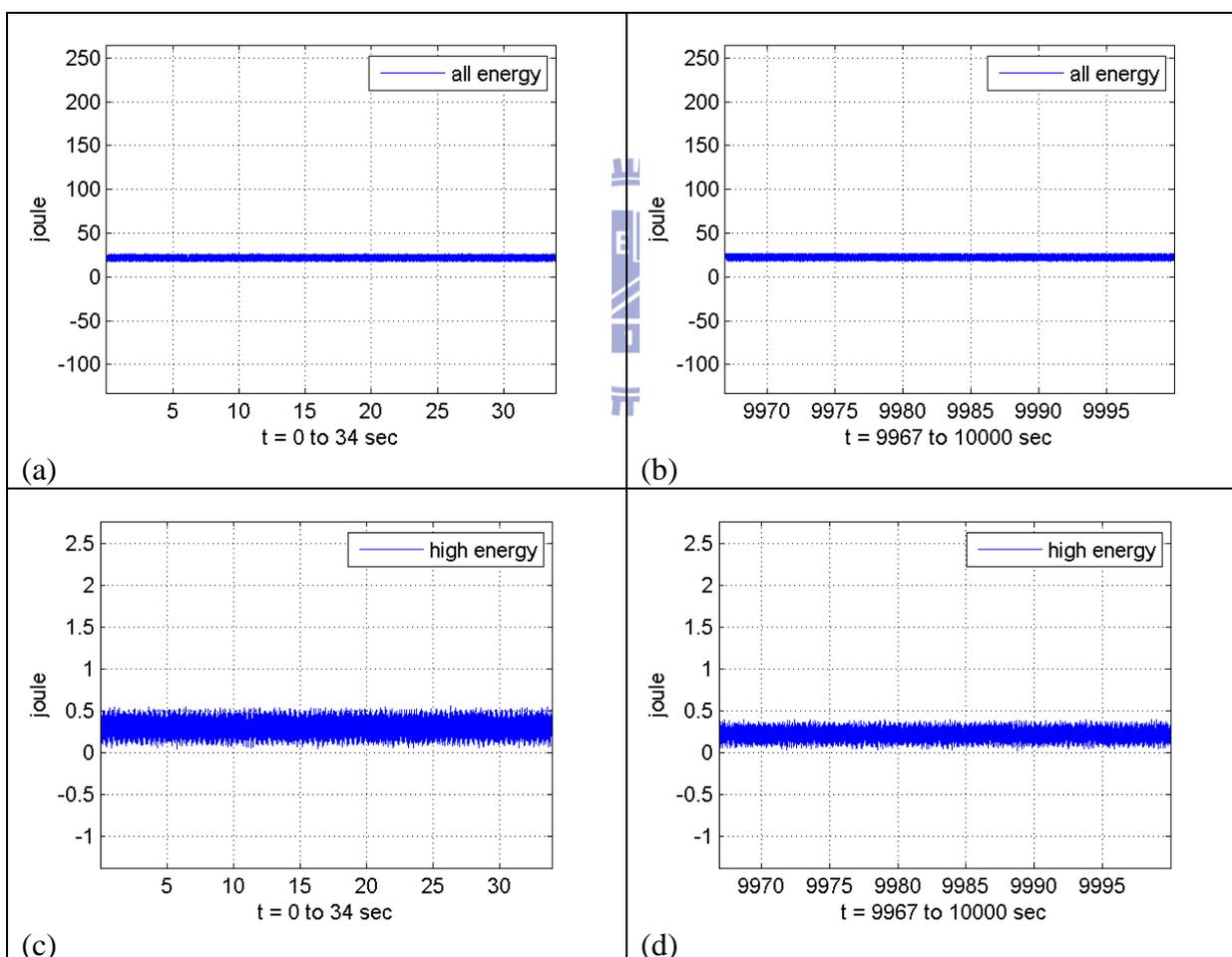


圖 17 良好能量行為驗證圖。此為 horse 的能量圖，左邊是前 35 秒、右邊是最後 35 秒，表示經過了三百萬個 frames。後 35 秒的整體能量比前 35 秒增加了 2%、而高頻能量消散 28%。其中，施力條件給予衝擊力，中間不具有阻力和外力。時間區間為 0.003 秒模擬時間長達 10000 秒。(a)、(b)圖為系統總能量，(c)、(d)為系統高頻能

量。

## 5.5 實驗四:不同時間區間大小比較

實驗四將驗證時間區間大小是否影響 IMEXv 的能量結果,本實驗使用 beam 作為施作模型,施力條件為長達 0.3 秒的方波力,在方波力去除之後即無其他外力和阻尼力,在同條件下除了時間區間大小皆相同,其中設定時間區間大小為 0.01 秒、0.005 秒、0.001 秒。最後,能量圖如圖 18 所示,結果巨觀顯示此三時間區間的能量曲線幾乎是一模一樣,因此我們推論 IMEXv 巨觀能量行為不會隨著時間區間大小改變。若微觀即如圖 19 所示可發現不同時間區間大小還是有些許不同。

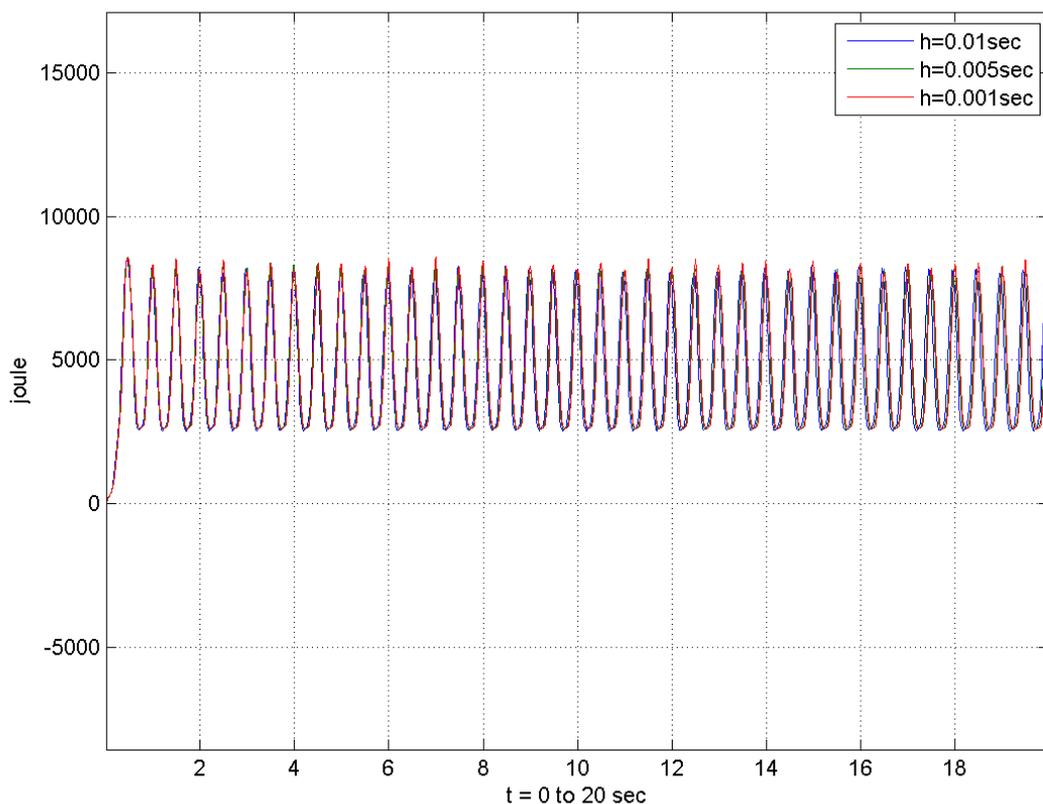


圖 18 不同時間區間大小巨觀能量圖。此為 beam 的能量圖,表示在時間區間大小並不會影響巨觀能量圖。此圖可以觀察出在我們設定的三個時間區間的能量曲線是非常類似的。其中我們設定的是時間區間大小為 0.01 秒、0.005 秒、0.001 秒。施力條件為初始給予長達 0.3 秒的施力,在中間過程不具有其他外力跟阻尼力。

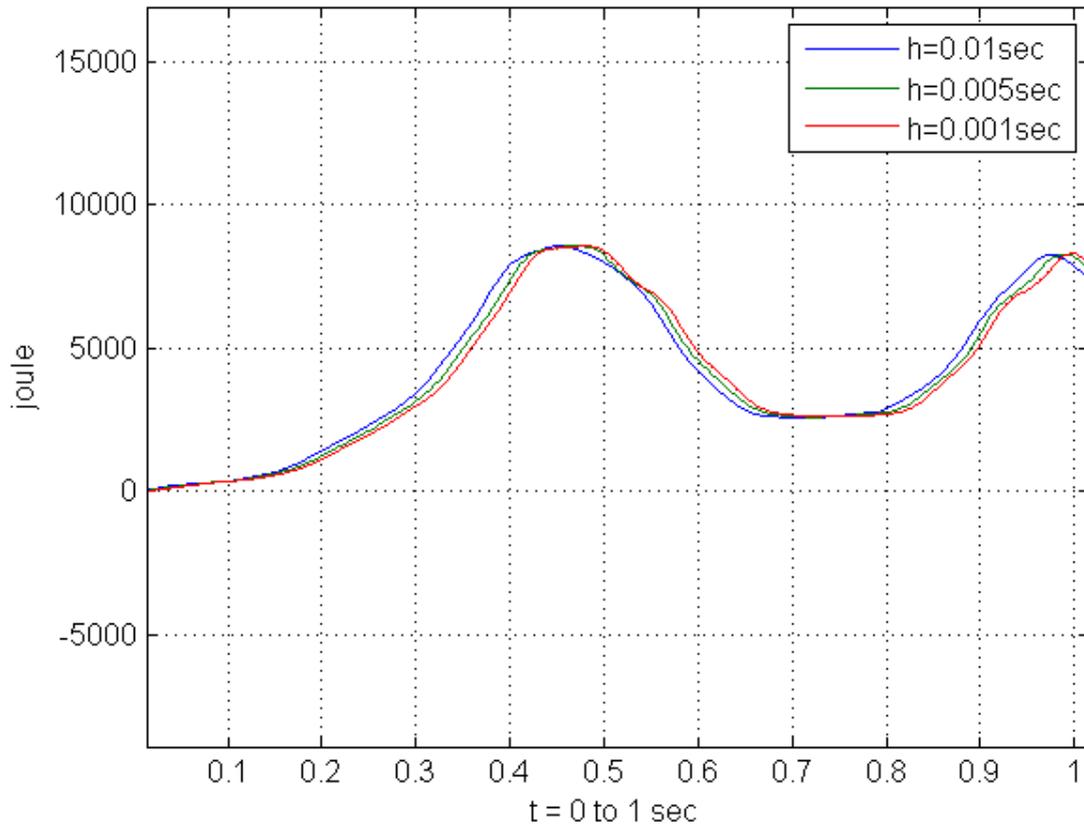


圖 19 不同時間區間大小微觀能量圖。此為圖 18 僅觀察 0~1 秒。可以發現三個時間區間大小雖然相當類似，但還是有些些許不同，其中時間區間越小變化越是快速，但整體還是相當類似。

## 5.6 效能比較

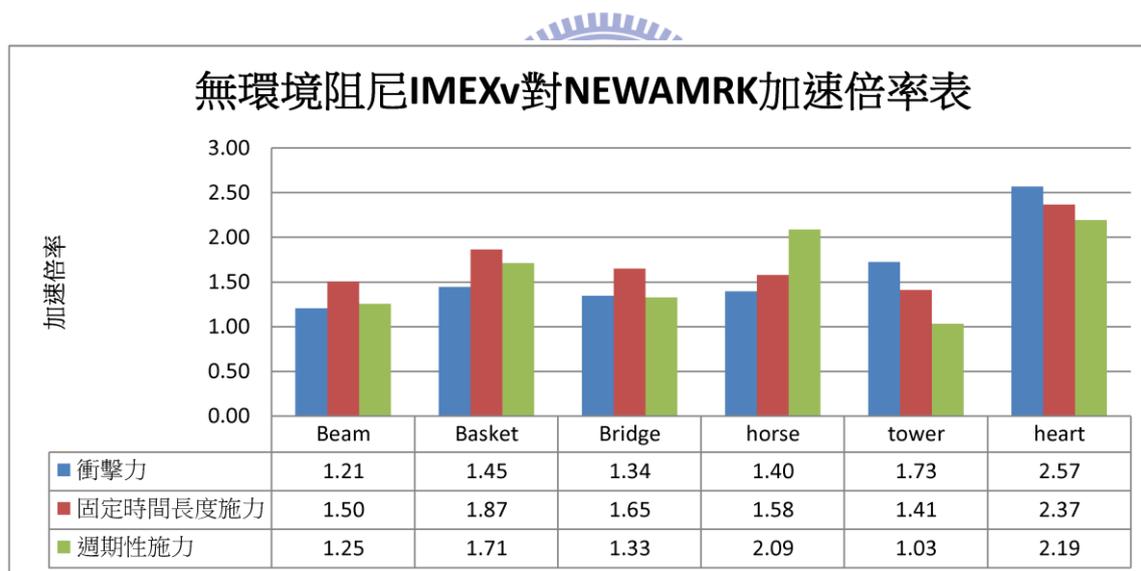
在此我們比較 NEWMARK 和 IMEXv 的運算時間，以驗證 IMEXv 是在效能上有所提升。而 IMEXv 運算速度的提升是藉由將顯性求解低頻運動模式，而非如 NEWMARK 皆採取隱性求解。所以，IMEXv 的低頻運動模式數量會直接影響到運算速度。如表 1 是時間區間為 0.003 秒的高頻低頻運動模式數量表。其中，高低頻運動模式數量是根據 4.2.2 的拆解方法所自動決定，而把低頻數量會直接影響到加速倍率如表 2 所示，我們可以發現 IMEXv 確實可以達到加速的目的。其中，以 heart 這個模型達到最大的加速比例是因為 heart 在 IMEXv 高頻數量只有 3 也就是只有 3 個運動模式透過隱性求解而 NEWMARK 卻需要 30 個運動模式皆透過隱性求解，所以 heart 這個模型 IMEXv 在速度

改進上具有優勢。

表 1 時間區間為 0.003 秒的高頻低頻運動模式數量表。高低頻運動模式數量由系統拆解決定

模型名稱	簡化運動模式數量	低頻數量	高頻數量
beam	15	9	6
basket	20	15	5
bridge	15	13	2
horse	15	9	6
tower	20	11	9
heart	30	27	3

表 2 IMEXv v.s. NEWMARK 無阻尼加速比較表。以下數據是 IMEXv 對 NEWMARK 的加速倍率，在此 IMEXv 運算速度皆比 NEWMARK 來的快速，所以此圖之中。其中可以發現 heart 的加速比例是最高的。是因為 NEWMARK 需要 30 個運動模式皆為隱性求解，而 IMEXv 只有 3 個運動模式隱性求解可以達到大量加速。詳細數據請見附錄。



## 5.7 限制條件

IMEXv 是一個介於 Stormer-Verlet 和隱性中點法的變分積分器，保留了此二變分積分器的優點，但也意味包含兩個積分器的缺點。

IMEX<sub>v</sub> 將高頻運動模式透過隱性中點法求解，將可使用大時間區間求解。並不表示可以使用無限大的時間區間，在我們實驗過程指出對於過大的時間區間( $h=0.01$  秒)，將會系統將因為非線性求解的不穩定導致系統不容易求解。而在電腦動畫為了畫面的流暢，需要取得足夠的取樣頻率，此限制相對不是那麼重要。

另外一方面，IMEX<sub>v</sub> 每個時間區間所需要的迭代數量，會受到外力大小而影響。因為，越大的外力導致系統受到越大的擾動將需要更多迭代數量，以取得系統正確解答。也就是系統外力過大，將會使得迭代數量大量攀升，甚至導致系統無法有效收斂使得 IMEX<sub>v</sub> 不具有吸引力。

我們透過取樣頻率和靜止狀態的自然頻率比較得到低頻和高頻運動模式。然而，自然頻率和切線勁度矩陣是正相關。我們所使用簡化的 StVK 有限元素法，切線勁度矩陣隨著形變大小而改變，導致實際上系統的自然頻率是具有可變性。即在大形變自然震盪頻率會因此大幅攀升。但我們只採用靜止時刻的自然震盪頻率做為系統拆解的依據，因此大形變的自然頻率將被低估，導致該使用隱性求解的部分還是使用顯性求解，最終導致系統趨近於不穩定。當然可以在模擬時進行系統拆解，使得更精確地區分高頻和低頻。但因為在每個時間區間分析自然頻率，並不符合經濟效益，所以不被我們所採納。

最後，雖然變分積分器可以有效保持系統的整體能量行為。但要滿足這樣的行為，需要整個模擬過程需要使用固定的時間區間大小已經被證實[25]。而普遍電腦動畫都會希望使用不同時間區間大小，來降低運算量，而在我們系統中 IMEX<sub>v</sub> 並還沒有辦法達到此要求。

# 第六章

## 貢獻與未來展望

### 6.1 貢獻

在過去電腦動畫領域，具有高頻率的變形物體模擬方法鮮少被討論。本篇論文提出一個透過系統能量拆解有效使用 IMEX<sub>v</sub> 模擬變形物體低頻和高頻運動的系統架構。

為了保持系統整體能量，我們使用 IMEX<sub>v</sub> 透過顯性法模擬低頻運動，隱性法模擬高頻運動，達到有效率模擬低頻運動和高頻運動行為，並使得系統良好能量行為。

然而，一般可形變的有限元素法，因為低頻和高頻位能並沒有明確定義所以並不適合直接使用 IMEX<sub>v</sub>。我們根據 CFL 條件比較取樣頻率和自然頻率拆解出高頻和低頻位能使得 IMEX<sub>v</sub> 得以有效使用。

### 6.2 綜合討論

NEWMARK 積分器是在結構力學上常用的變分積分器，本論文驗證 IMEX<sub>v</sub> 和 NEWMARK 的能量行為，如 5.2 所討論是近乎相同的，此結果使得兩者的實際運動行為如圖 20 所示是近乎相同的。其實，只要能量近乎相同運動行為也會是相同的。而 IMEX<sub>v</sub> 和 NEWMARK 最大的差別是，IMEX<sub>v</sub> 會隨著時間區間大小動態區分出顯性和隱性求解的運動模式並分開處理，而 NEWMARK 僅把所有運動模式透過顯性或是隱性求解。所以，IMEX<sub>v</sub> 的收斂速度會因為非線性方程組降維(見 4.4.2)得以變快，最後 IMEX<sub>v</sub> 可以達到 1 到 3 倍的加速(見 5.6)相對於 NEWMARK。

但實際上，在我們的實作 IMEXv 的本身求解的穩定性並不如 NEWMARK，在我們實驗一中的 36 組實驗裡面，有三組實驗 IMEXv 並沒有達成完成長達 30 秒的模擬時間如表 3 所示，其中的原因是非線性求解還是具有本身穩定性的問題，如圖 21 在 6.5 秒之後系統能量變化開始變得不穩定，最後在七秒之後即發散無法有效求解。所以，其實 IMEXv 在非線性求解是有待加強的部分，可以在未來繼續完成。

### 6.3 未來展望

我們所提出的低頻高頻拆解方法是透過靜止狀態的自然頻率進行拆解。假如可以提出一個在執行時間有效率拆解方法。將會使 IMEXv 使用範圍更加廣泛具有更大吸引力。

目前我們將 IMEXv 套用在簡化的 StVK 有限元素法之上。其實 IMEXv 也可以使用在更多物理模擬系統像是布料、流體、煙模擬之上，但需要一個有效區分出低頻位能和高頻位能的演算法進而使用 IMEXv，進而有效保持低頻運動和高頻運動而且有效的保持整體能量。



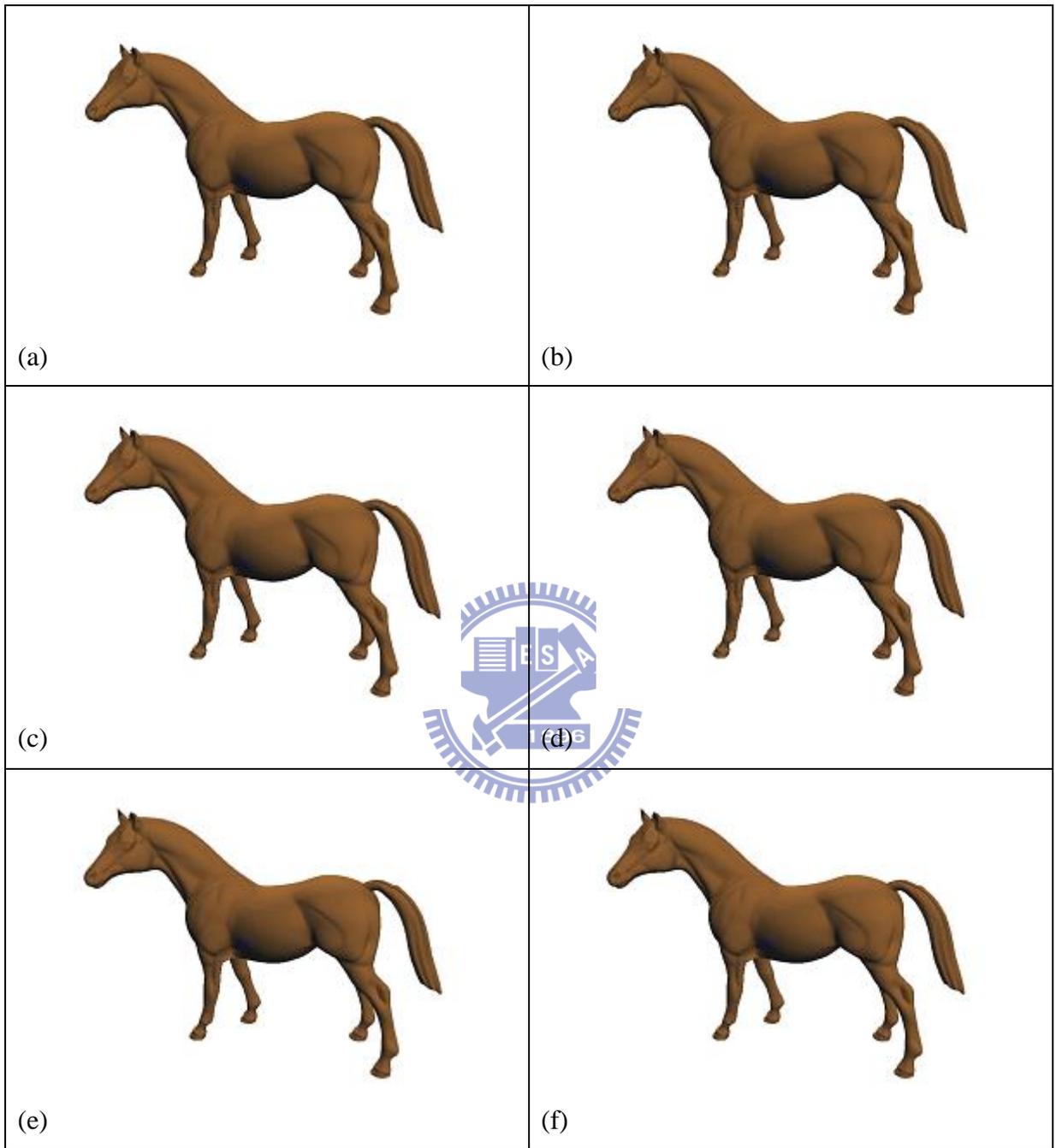


圖 20 IMEXv 和 NEWMARK 動畫比較圖。此為馬的模型受到長達 0.3 秒施力的動畫圖。左邊(a)、(c)、(e)是 IMEX 的 0、3、16 秒的動畫圖；右圖(b)、(d)、(f)是 NEWMARK 的相同時間動畫圖。可以發現此二積分器的結果是近乎相同的。

表 3 實驗一 IMEXv 所達成的模擬時間長度(秒)。在 36 組實驗裡面有 IMEXv 三組未能夠達成設定的 30 秒的實驗。如表中的綠色部分即是無法完成的組別。

	Beam	Basket	Bridge	horse	tower	heart
無阻尼衝擊力	30	30	30	30	30	30
無阻尼固定時間施力	30	30	30	30	30	30
無阻尼週期性施力	6.86	30	30	30	10.53	30
具阻尼衝擊力	30	30	30	30	30	30
具阻尼固定時間施力	30	30	30	30	30	30
具阻尼週期性施力	7.12	30	30	30	30	30

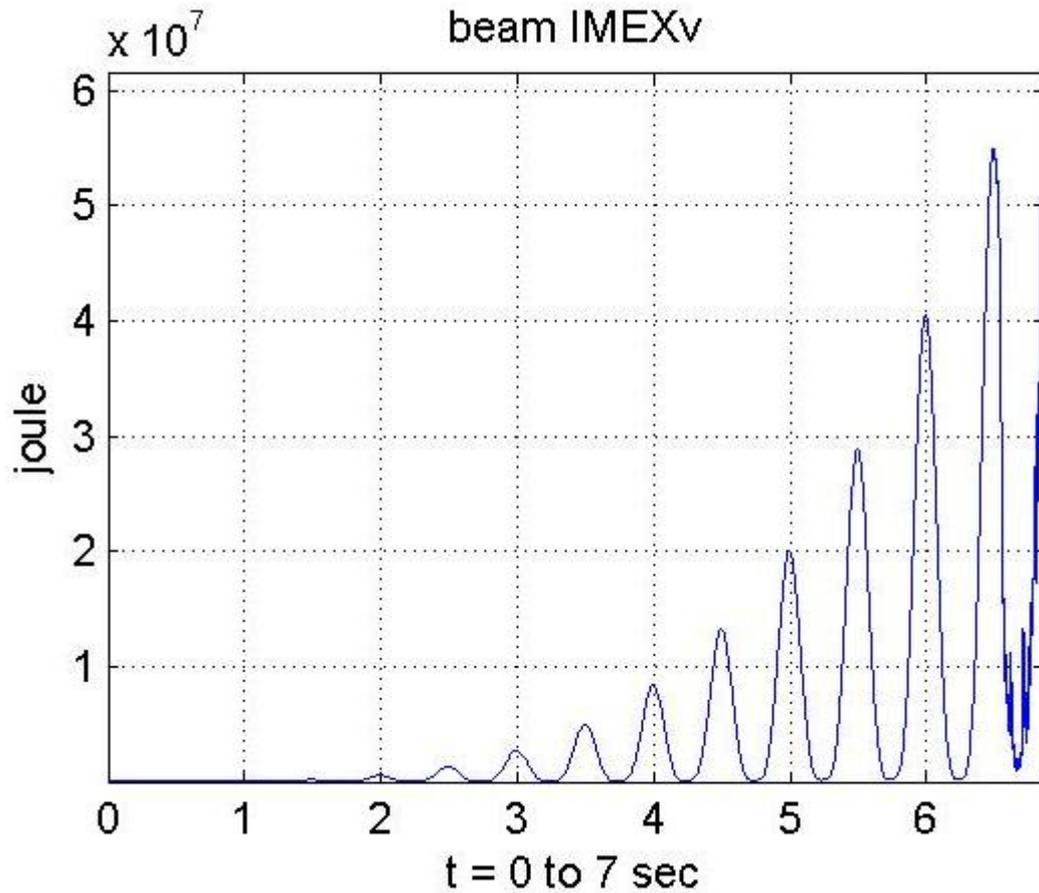


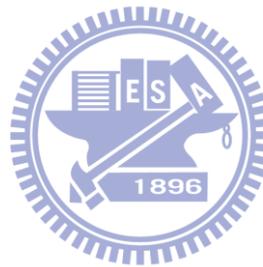
圖 21 beam 無阻尼週期性施力 IMEXv 能量圖。此為實驗一的配置，但 IMEXv 並沒有辦法完成 30 秒的模擬，因為在 6.5 秒之後能量趨近於不穩定導致非線性求解無法有效完成。

## 參考資料

- [1] A. Stern and E. Grinspun, "Implicit-Explicit Variational Integration of Highly Oscillatory Problems," *Multiscale Model. Simulation*, vol. 7, pp. 1779-1794, 2009.
- [2] J. Barbic and D. L. James, "Real-Time Subspace Integration for St. Venant-Kirchhoff Deformable Models," *ACM Transactions on Graphics (SIGGRAPH 2005)*, vol. 24, pp. 982-990, August 2005.
- [3] A. A. Shabana, *Theory of Vibration, vol. 2*: Springer-Verlag, 1991.
- [4] D. Baraff and A. Witkin, "Large steps in cloth simulation," in *Proceedings of the 25th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, 1998, pp. 43-54.
- [5] P. Krysl, S. Lall, and J. Marsden, "Dimensional model reduction in non linear finite element dynamics of solids and structures," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 51, pp. 479-504, 2001.
- [6] M. G. Choi and H. S. Ko, "Modal warping: Real-time simulation of large rotational deformation and manipulation," *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, pp. 91-101, 2005.
- [7] D. L. James and K. Fatahalian, "Precomputing interactive dynamic deformable scenes," *ACM Transactions on Graphics*, vol. 22, pp. 879-887, 2003.
- [8] L. Kharevych, W. Yang, Y. Tong, E. Kanso, J. E. Marsden, P. Schröder, and M. Desbrun, "Geometric, variational integrators for computer animation," presented at the Proceedings of the 2006 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation, Vienna, Austria, 2006.
- [9] H. Goldstein, C. Poole, J. Safko, and S. R. Addison, *Classical mechanics* vol. 70, 2002.
- [10] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, and W. T. Vetterling, *Numerical recipes* vol. 3: Cambridge Univ Press, 2007.
- [11] R. Bridson, S. Marino, and R. Fedkiw, "Simulation of clothing with folds and wrinkles," in *ACM SIGGRAPH 2005 Courses*, Los Angeles, California, 2003.
- [12] G. Irving, J. Teran, and R. Fedkiw, "Invertible finite elements for robust simulation of

- large deformation," *Proceedings of the 2004 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation*, pp. 131-140, 2004.
- [13] E. Sifakis, T. Shinar, G. Irving, and R. Fedkiw, "Hybrid simulation of deformable solids," in *Proceedings of the 2007 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation*, San Diego, California, 2007, pp. 81-90.
- [14] A. Selle, M. Lentine, and R. Fedkiw, "A mass spring model for hair simulation," *ACM Transactions on Graphics* vol. 27, pp. 1-11, 2008.
- [15] B. Thomaszewski, S. Pabst, and W. Strasser, "Asynchronous cloth simulation," in *Computer Graphics International*, 2008.
- [16] C. Kane, J. E. Marsden, M. Ortiz, and M. West, "Variational Integrators and the Newmark Algorithm for Conservative and Dissipative Mechanical Systems," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 49, pp. 1295--1325, 1999.
- [17] A. Stern and M. Desbrun, "Discrete geometric mechanics for variational time integrators," presented at the ACM SIGGRAPH 2006 Courses, Boston, Massachusetts, 2006.
- [18] A. Lew, J. E. Marsden, M. Ortiz, and M. West, "Asynchronous variational integrators," *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 167, pp. 85-146, 2003.
- [19] D. Harmon, E. Vouga, B. Smith, R. Tamstorf, and E. Grinspun, "Asynchronous contact mechanics," *ACM Transactions on Graphics*, vol. 28, pp. 1-12, 2009.
- [20] E. Boxerman and U. Ascher, "Decomposing cloth," presented at the Proceedings of the 2004 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation, Grenoble, France, 2004.
- [21] A. Stern and M. Desbrun, "Discrete geometric mechanics for variational time integrators," in *Siggraph Course*, 2006, pp. 1-6.
- [22] R. Courant, K. Friedrichs, and H. Lewy, "On the partial difference equations of mathematical physics," *IBM Journal of Research and Development*, vol. 11, pp. 215-234, 1967.
- [23] M. West, "Variational integrators," Ph.D. Thesis, California Institute of Technology, 2004.
- [24] J. Barbic. (2009). *Computer graphics research code*, <http://www.jernejbarbic.com/code>.

- [25] R. D. Skeel, "Variable step size destabilizes the Stormer/leapfrog/Verlet method," *BIT Numerical Mathematics*, vol. 33, pp. 172-175, 1993.





# 附錄一 小定理

## 變分小定理

假設  $\forall h(x) \in C^\infty[a, b]$  且  $\int_a^b f(x)h(x)dx = 0, h(a) = h(b) = 0$

則  $\forall x \in (a, b), f(x) = 0$ 。

證明:

令  $r(x) \in C^\infty[a, b], r(a) = r(b) = 0$

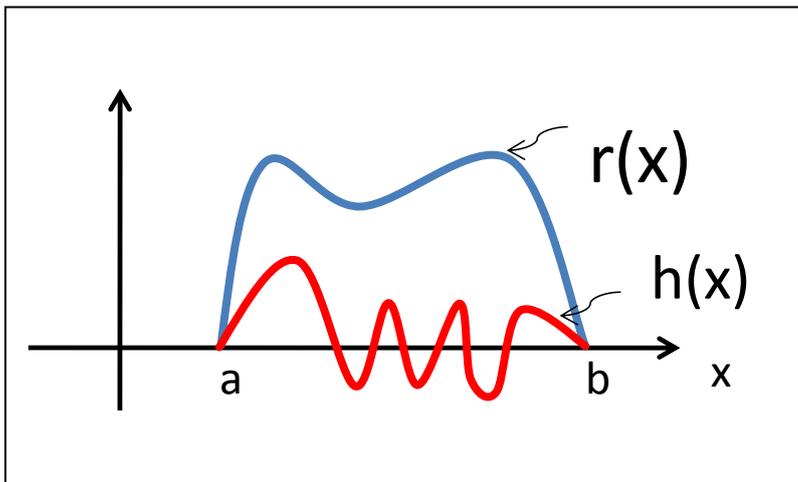
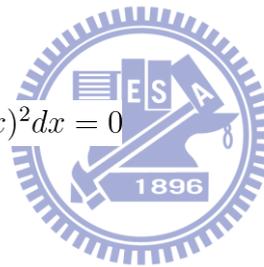
$\Rightarrow \forall x \in (a, b), r(x) > 0$

令  $h(x) = r(x)f(x)$

$\Rightarrow \int_a^b f(x)h(x)dx = \int_a^b r(x)f(x)^2dx = 0$

因為  $r(x) > 0, \forall x \in (a, b)$

$\Rightarrow f(x) = 0, \forall x \in [a, b]$



## 附錄二 能量圖比較

以下附錄是每一個可形變模型搭配不同施力和阻尼力的能量圖，實驗條件如 5.1 所設定。同一個表格包含四張圖能量圖，左上為無阻尼 IMEXv、右上為無阻尼 NEWMARK、左下為具阻尼 IMEXv、右下為具阻尼 NEWMARK:

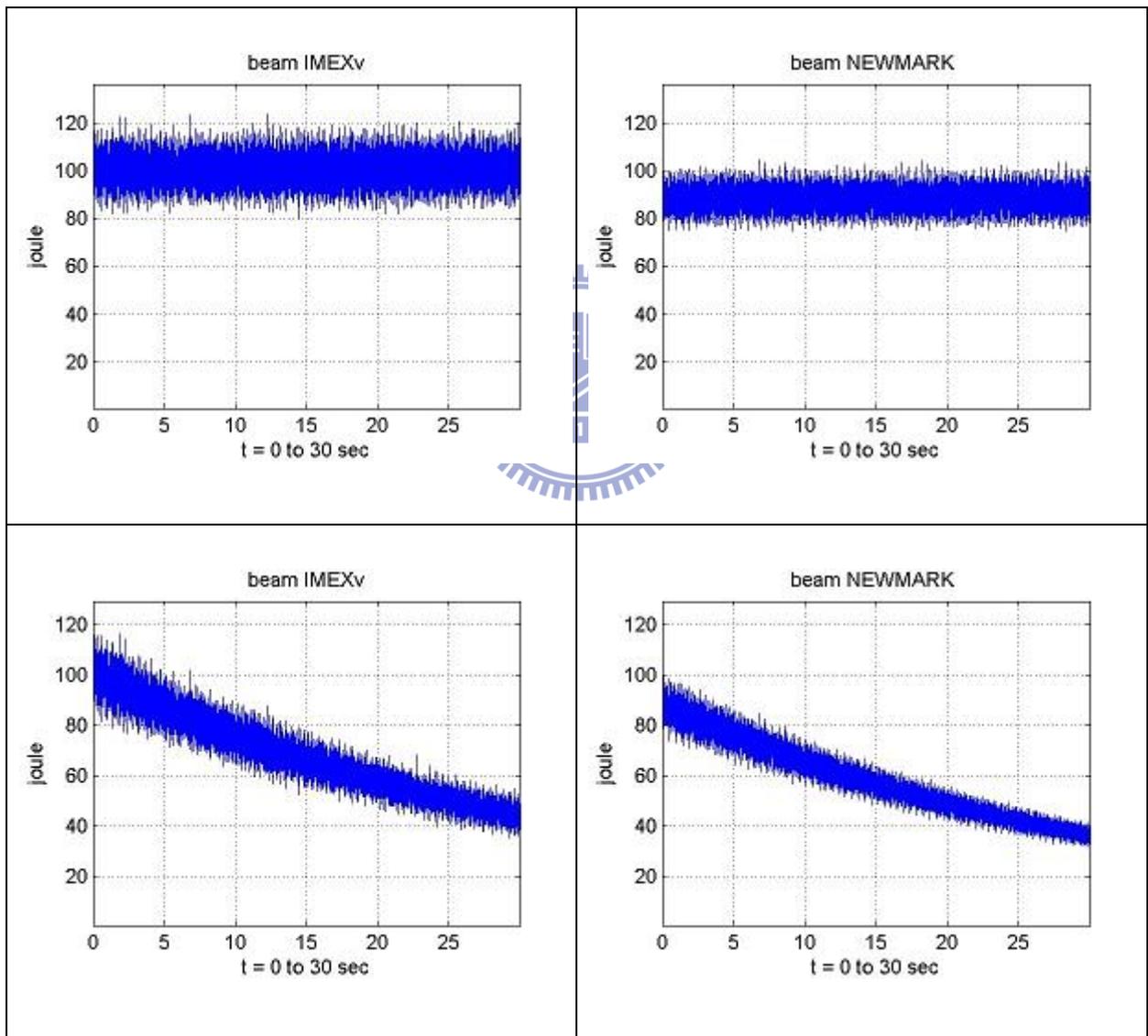


圖 22 beam 衝擊力能量圖

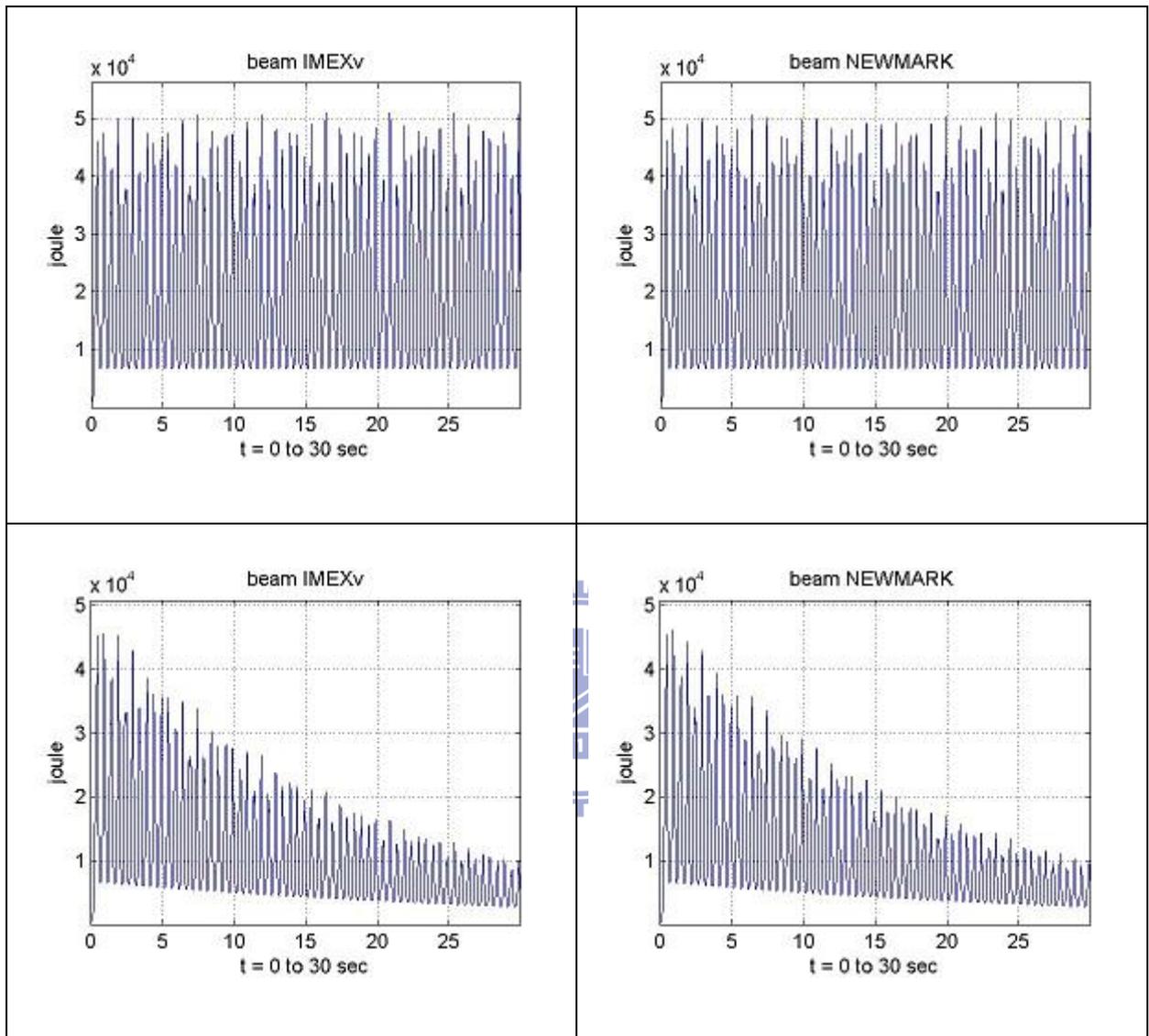


圖 23 beam 固定時間施力能量圖

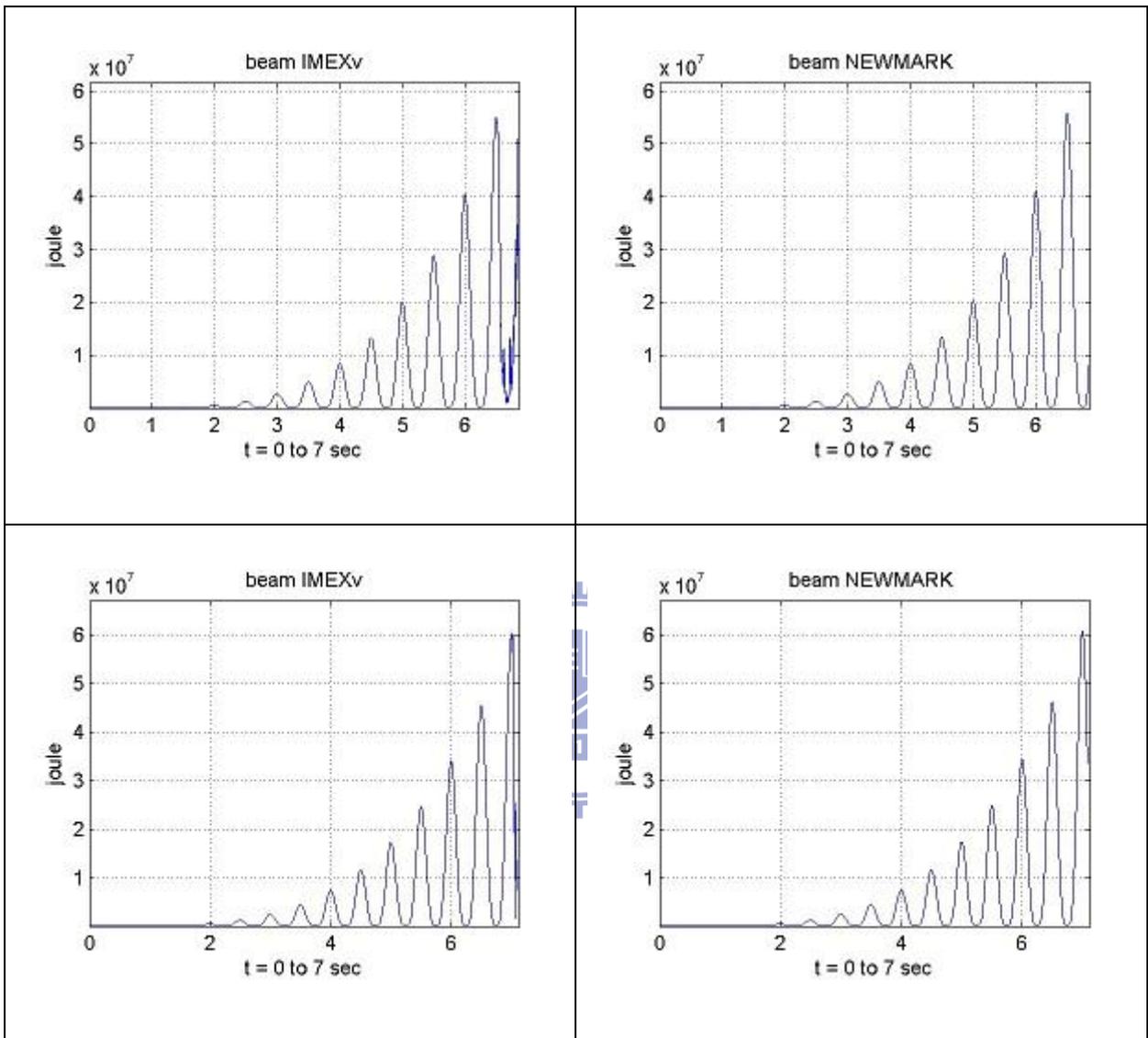


圖 24 beam 週期性施力能量圖

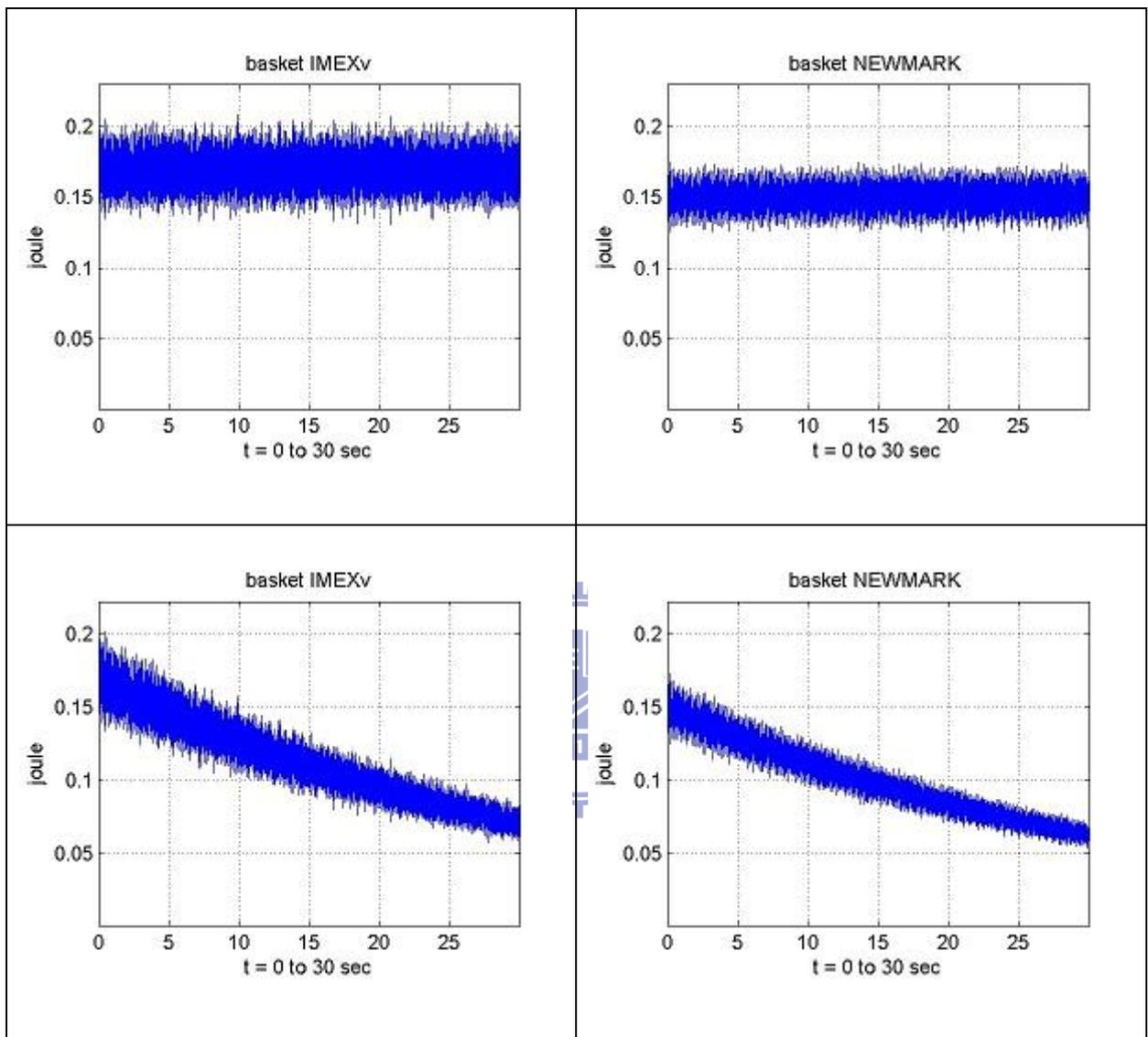


圖 25 basket 衝擊力能量圖

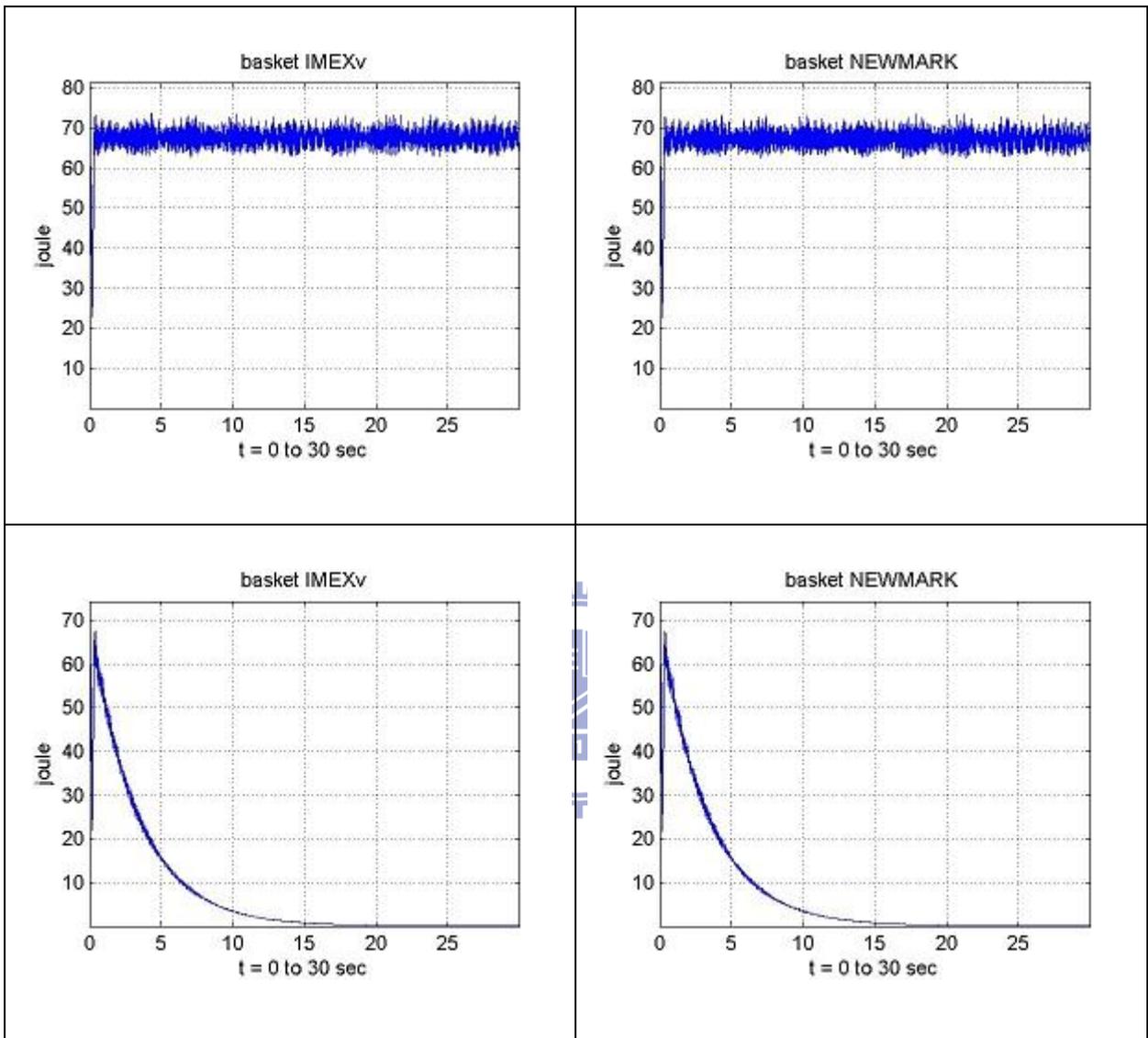


圖 26 basket 固定時間施力能量圖

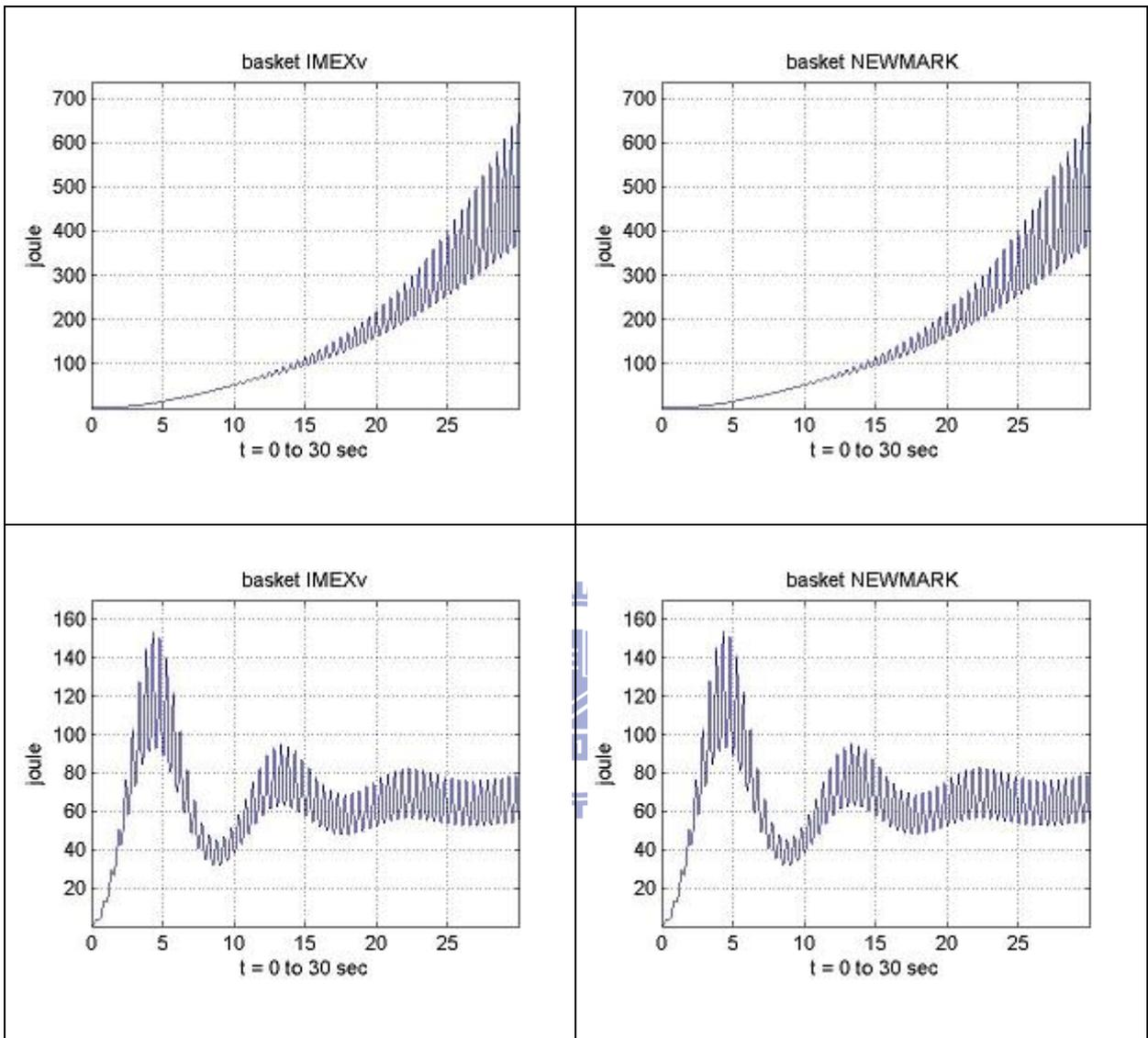


圖 27 basket 週期性施力能量圖

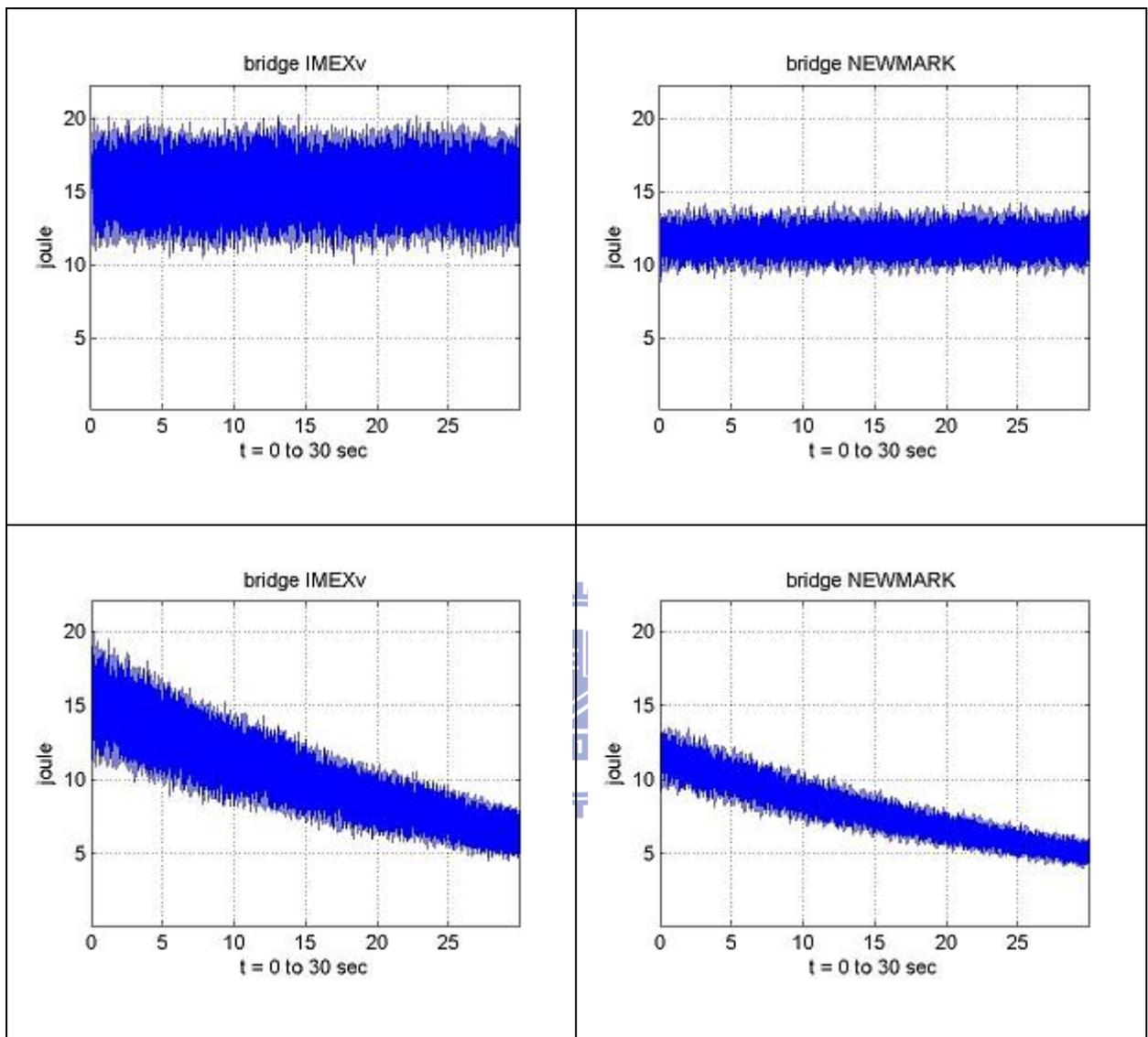


圖 28 bridge 固定時間施力能量圖

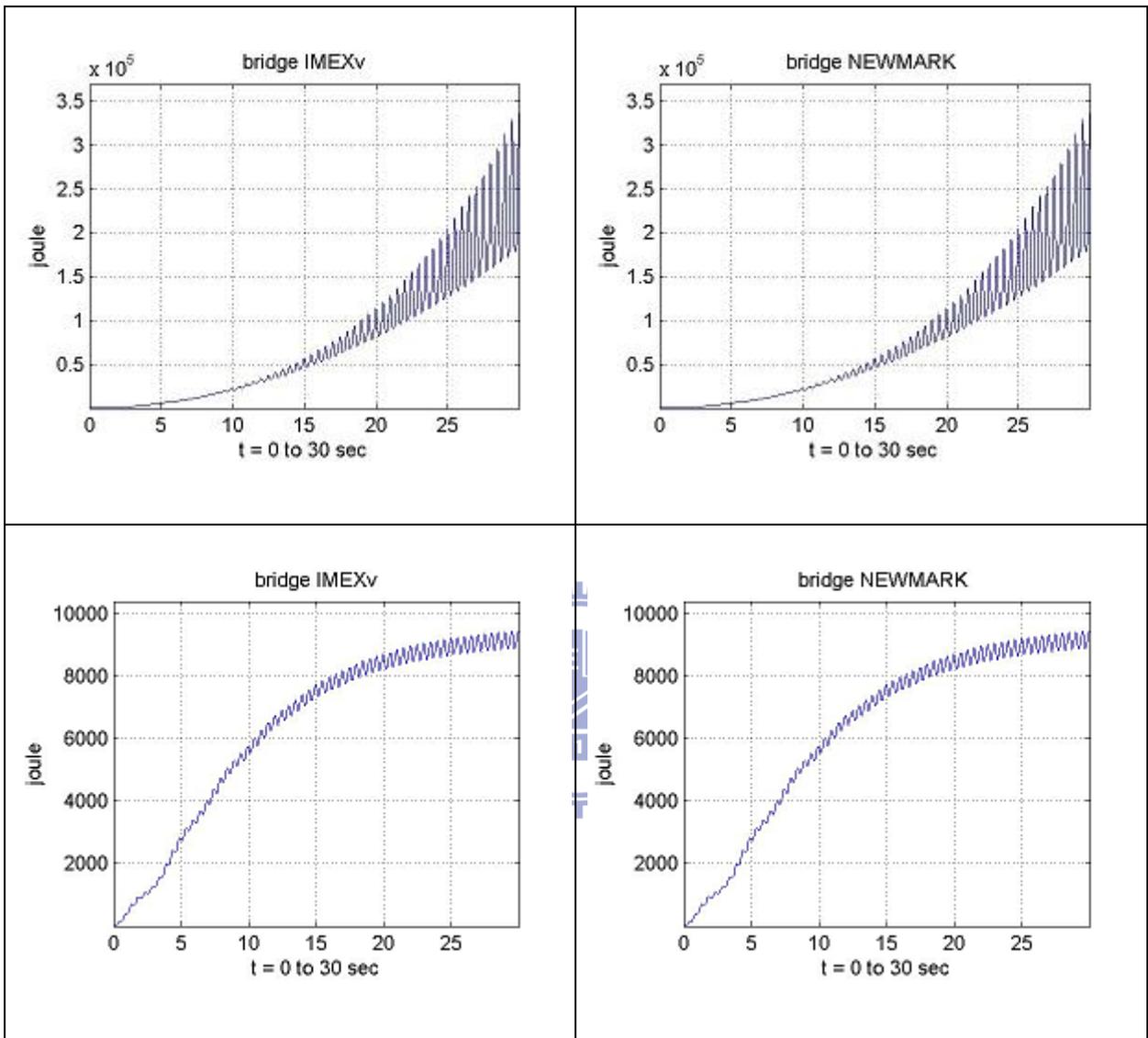


圖 29 basket 週期性施力能量圖

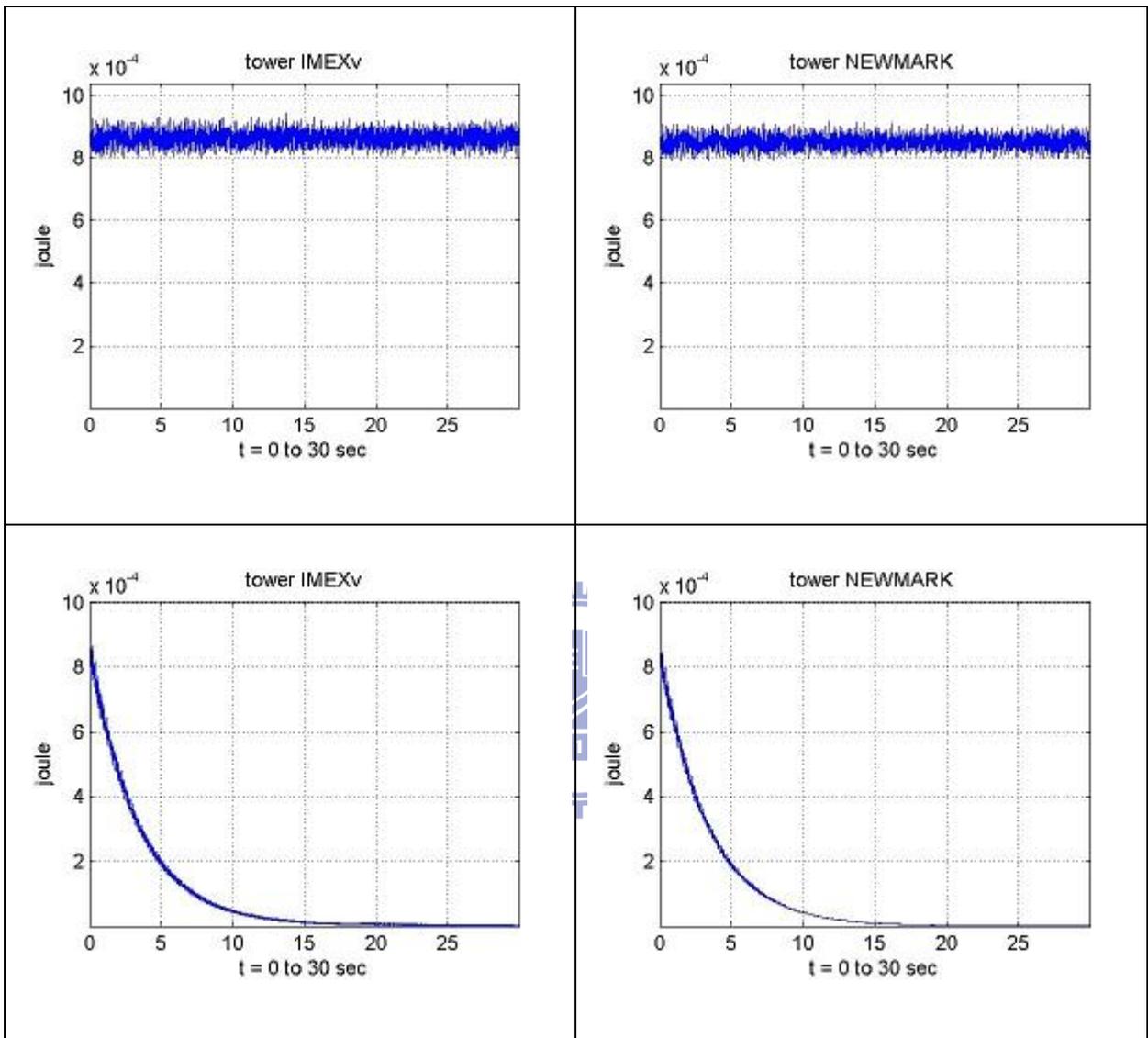


圖 30 tower 衝擊力能量圖

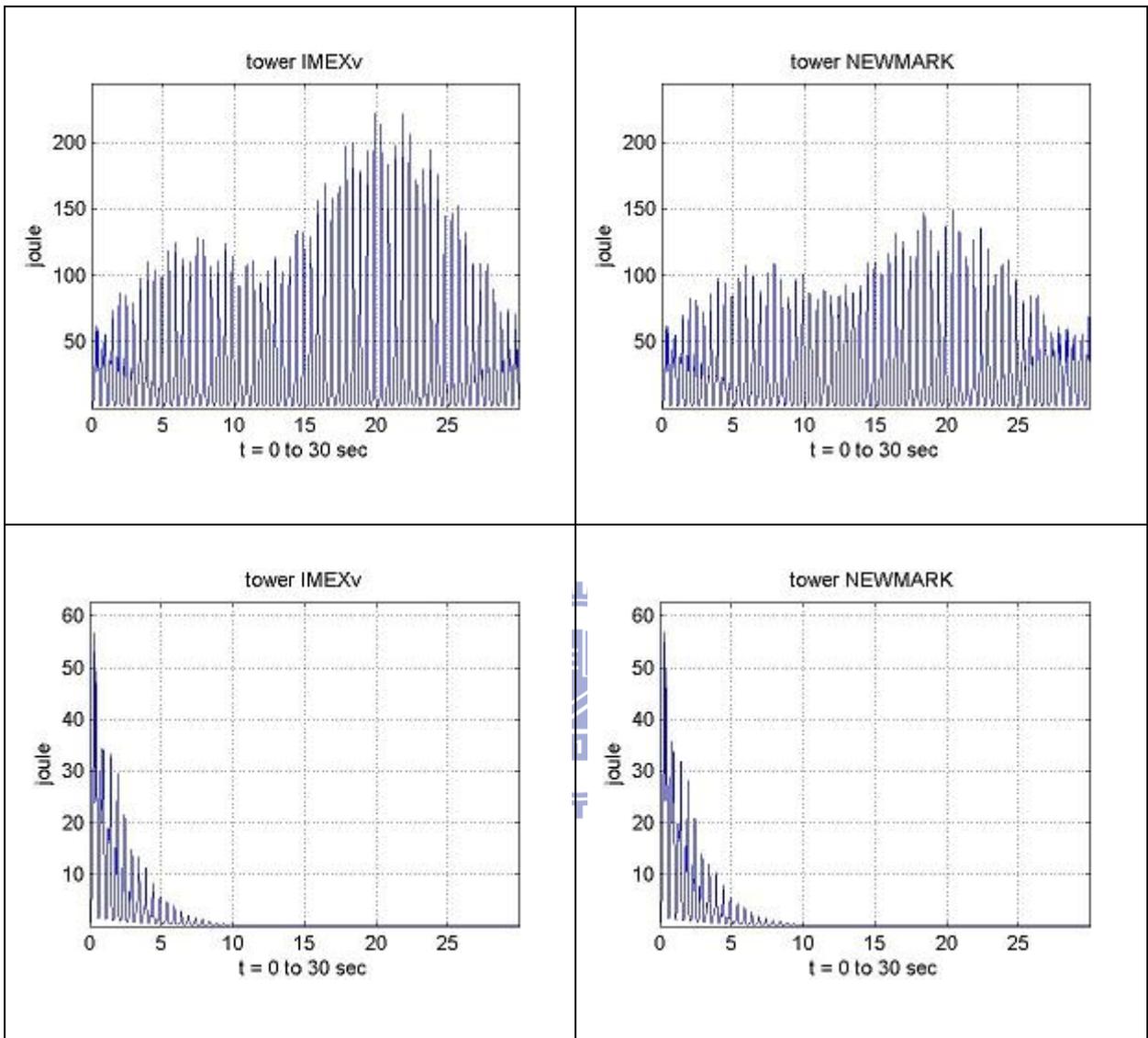


圖 31 tower 固定時間施力能量圖

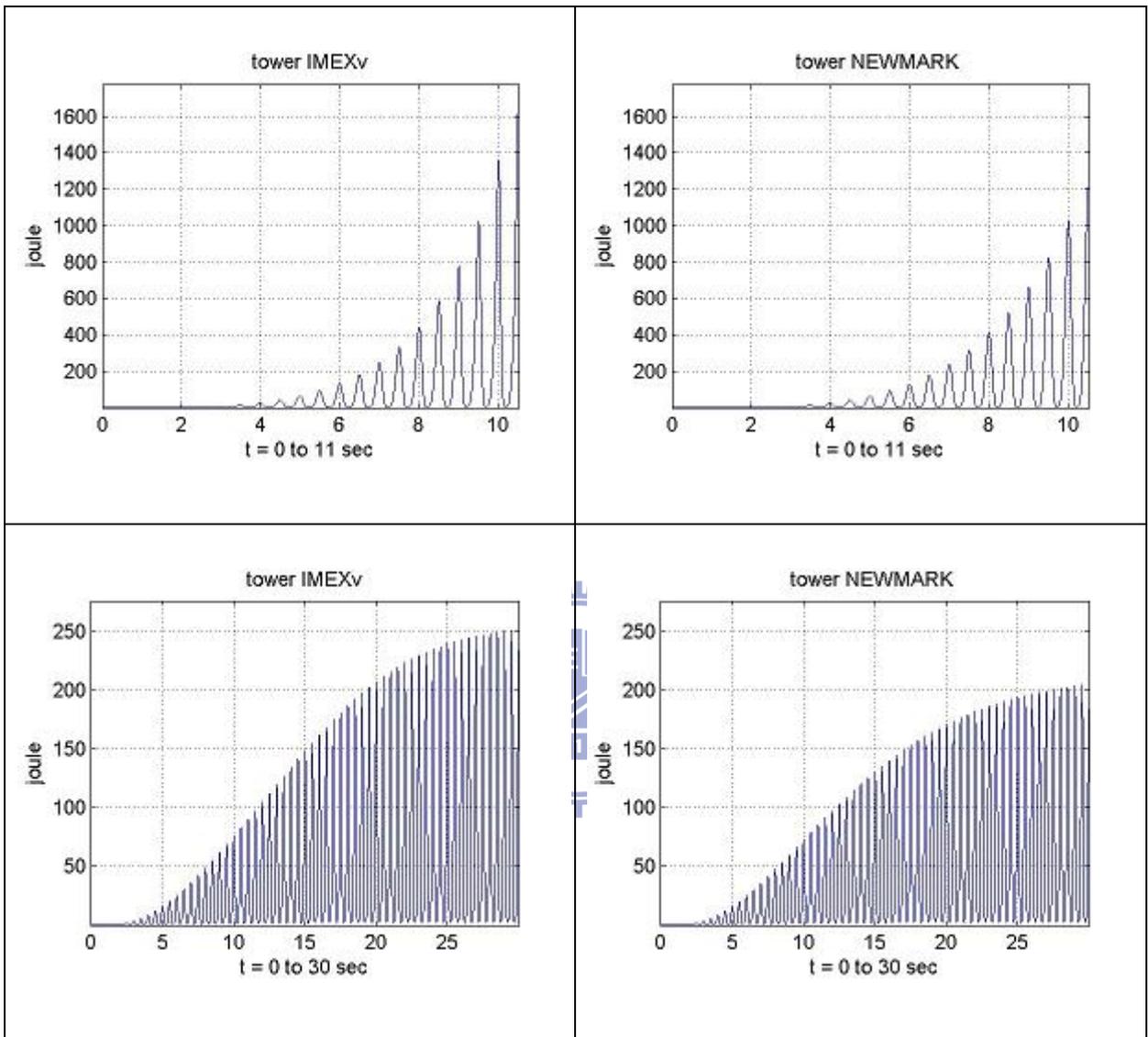


圖 32 tower 週期性施力能量圖

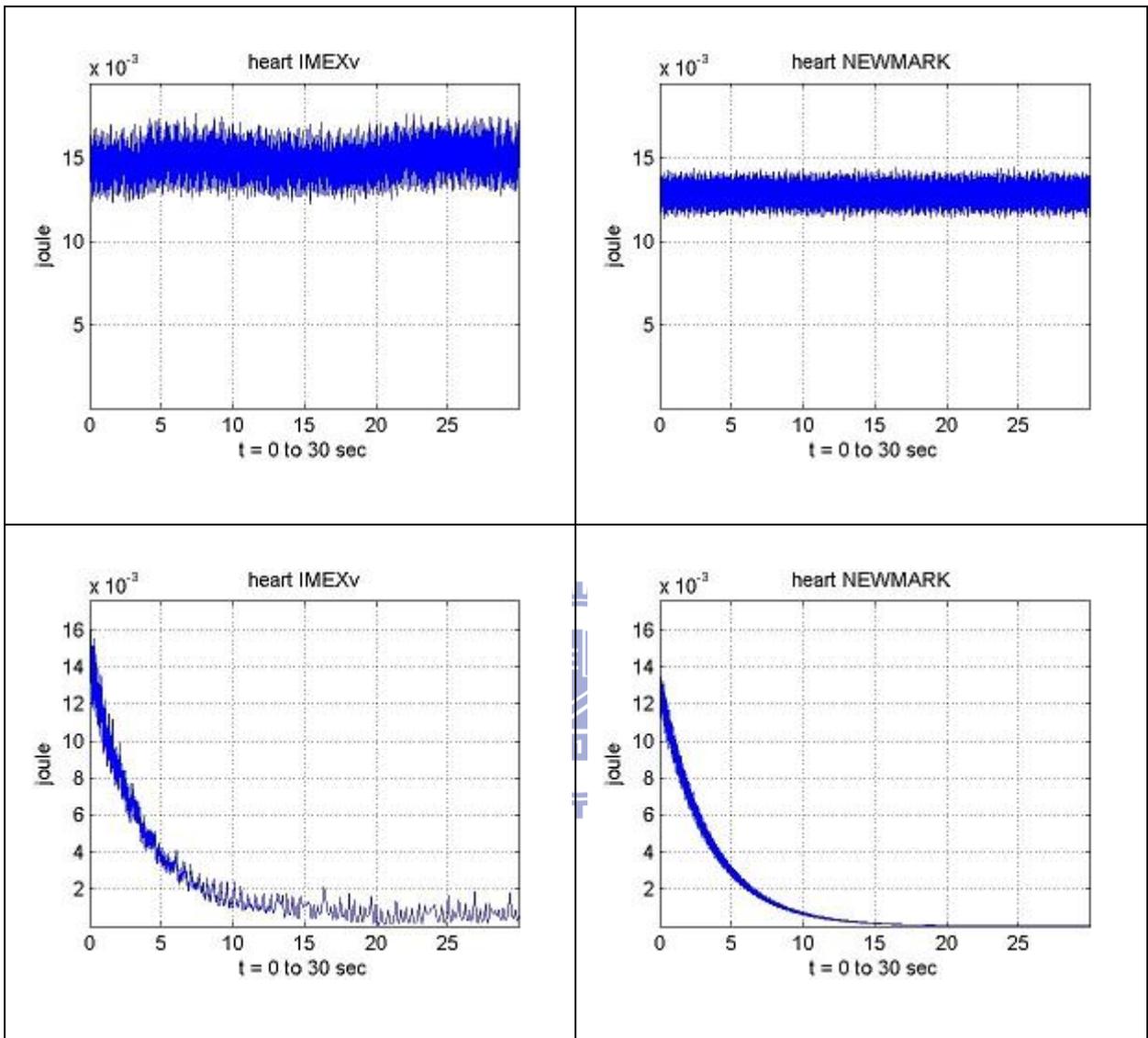


圖 33 heart 衝擊力能量圖

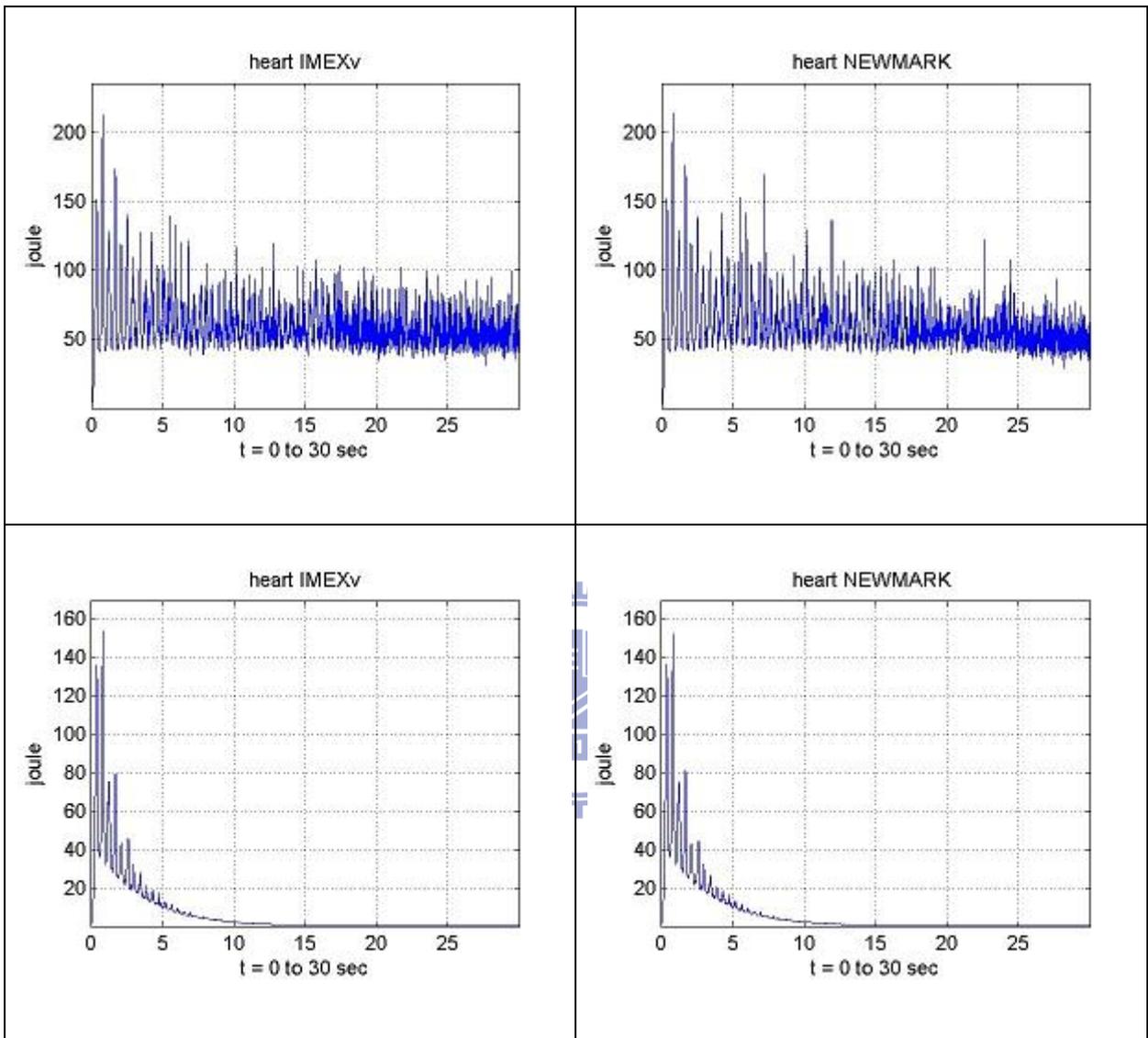


圖 34 heart 固定時間施力能量圖

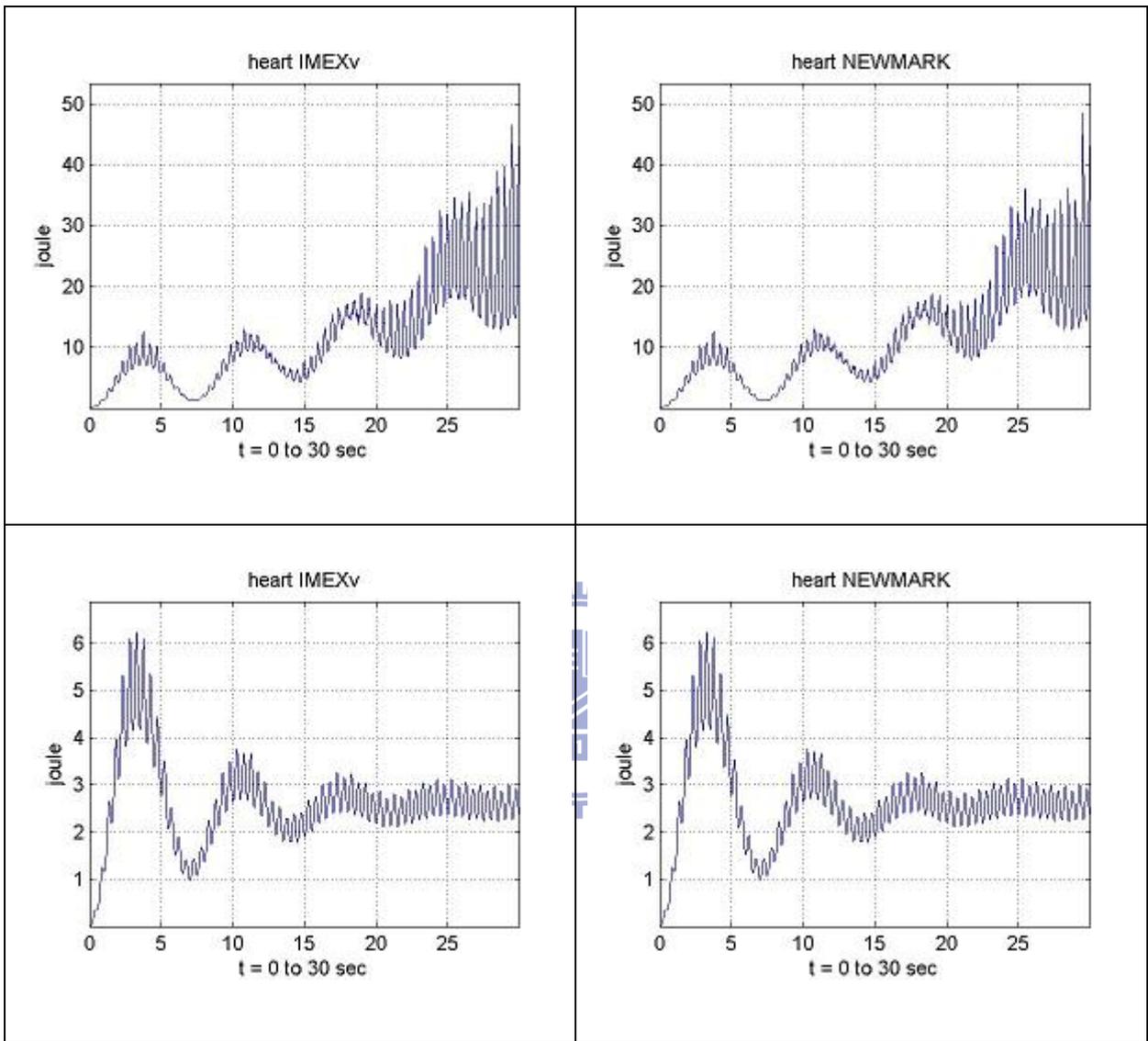


圖 35 heart 週期性施力能量圖



## 附錄三 效能數據

以下是 IMEXv 和 NEWMARK 效能比較的詳細數據:

表 4 IMEXv vs NEWMARK 有阻尼加速比較表

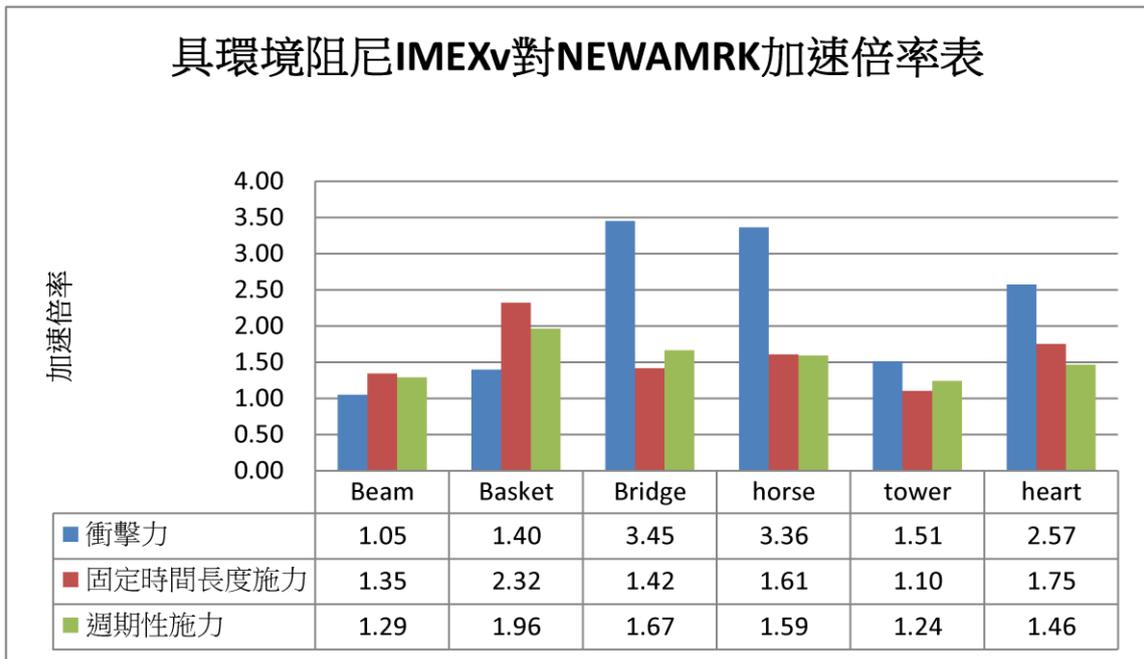


表 5 無阻尼衝擊力，效能比較表

無阻尼固定時間施力					
模型	計算時間(秒)		平均迭代數量		加速倍率
	IMEXv	NEWMARK	IMEXv	NEWMARK	
Beam	1.89	2.84	1.0	2.1	1.50
Basket	2.62	4.89	1.0	2.1	1.87
Bridge	1.55	2.56	1.0	2.1	1.65
horse	2.64	4.16	1.0	2.1	1.58
tower	3.50	4.94	1.0	2.1	1.41
heart	5.68	13.44	0.7	2.1	2.37

表 6 無阻尼固定時間施力，效能比較表

無阻尼固定時間施力					
模型	計算時間(秒)		平均迭代數量		加速倍率
	IMEXv	NEWMARK	IMEXv	NEWMARK	
Beam	1.89	2.84	1.0	2.1	1.50
Basket	2.62	4.89	1.0	2.1	1.87
Bridge	1.55	2.56	1.0	2.1	1.65
horse	2.64	4.16	1.0	2.1	1.58
tower	3.50	4.94	1.0	2.1	1.41
heart	5.68	13.44	0.7	2.1	2.37

表 7 無阻尼週期性施力，效能比較表

無阻尼週期性施力					
模型	計算時間(秒)		平均迭代數量		加速倍率
	IMEXv	NEWMARK	IMEXv	NEWMARK	
Beam	2.26	2.84	1.1	2.1	1.25
Basket	2.85	4.89	1.0	2.1	1.71
Bridge	1.93	2.56	1.0	2.1	1.33
horse	1.99	4.16	1.0	2.1	2.09
tower	4.78	4.94	1.0	2.1	1.03
heart	6.12	13.44	1.0	2.1	2.19

表 8 具阻尼衝擊力，效能比較表

具阻尼衝擊力					
模型	計算時間(秒)		平均迭代數量		加速倍率
	IMEXv	NEWMARK	IMEXv	NEWMARK	
Beam	2.26	2.37	2.0	2.1	1.05
Basket	2.71	3.78	1.0	2.1	1.40
Bridge	1.61	5.57	1.0	2.1	3.45
horse	1.89	6.34	1.0	2.1	3.36
tower	3.39	5.12	1.0	2.1	1.51
heart	5.39	13.86	0.3	2.1	2.57

表 9 具阻尼固定時間施力，效能比較表

具阻尼固定時間施力					
模型	計算時間(秒)		平均迭代數量		加速倍率
	IMEXv	NEWMARK	IMEXv	NEWMARK	
Beam	1.88	2.53	1.0	2.1	1.35
Basket	2.96	6.87	1.0	2.0	2.32
Bridge	1.83	2.60	1.0	1.7	1.42
horse	2.12	3.41	1.0	2.1	1.61
tower	9.05	9.98	1.0	2.1	1.10
heart	12.69	22.25	0.8	2.1	1.75

表 10 具阻尼週期性施力，效能比較表

具阻尼週期性施力					
模型	計算時間(秒)		平均迭代數量		加速倍率
	IMEXv	NEWMARK	IMEXv	NEWMARK	
Beam	2.12	2.73	1.0	2.1	1.29
Basket	2.88	5.65	1.0	2.0	1.96
Bridge	1.77	2.94	1.0	1.7	1.67
horse	2.11	3.36	1.0	2.1	1.59
tower	13.59	16.88	1.0	2.1	1.24
heart	17.47	25.59	1.0	2.1	1.46