

國立交通大學

電機學院 電機與控制學程

碩士論文

逼近速率可調之離散型順滑模態控制器設計

Discrete Sliding Mode Controller Design Based On Adjustable Approaching Rate



研究生：陳建宏

指導教授：陳永平教授

中華民國一百年九月

逼近速率可調之離散型順滑模態控制器設計

Discrete Sliding Mode Controller Design Based On Adjustable Approaching Rate

研究生：陳建宏

Student : Chien-Hung Chen

指導教授：陳永平

Advisor : Yon-Ping Chen



中華民國一百年九月

逼近速率可調之離散型順滑模態控制器設計

學生：陳建宏

指導教授：陳永平 教授

國立交通大學電機學院電機與控制學程碩士班

摘 要

本論文研製逼近速率可調之離散型順滑模態控制器，適用於具有匹配式雜訊干擾的離散型系統，可改善傳統順滑模態控制器設計時必須事先掌握雜訊上限的缺點，並掌控逼近模態之系統軌跡，以避免高頻暫態響應，及減抑控制輸入之高增益需求。此離散型順滑模態控制器包括兩個設計步驟：首先設計適當之超曲面，當受控系統沿此超曲面運動時，可穩定地接近控制目標，再選取順滑函數使系統軌跡在順滑層內，依設定之逼近速率朝此超曲面前進；其次，設計滿足逼近及順滑條件之控制法則，使系統軌跡得以在有限時間內進入順滑層，達到控制目的。最後，為了驗證逼近速率可調之順滑模態控制器的可行性，以線性單輸入二階系統及多輸入四階系統進行數值模擬，由模擬結果可知系統確實對於匹配式外界干擾具有強健性，也可經由逼近速率的選取來調控順滑模態的系統軌跡。

關鍵字：離散型順滑模態控制

Discrete Sliding Mode Controller Design Based On Adjustable Approaching Rate

Student : Chien-Hung Chen

Advisors : Yon-Ping Chen

Degree Program of Electrical and Computer Engineering
National Chiao Tung University

ABSTRACT

This thesis proposes a novel discrete sliding-mode controller with adjustable reaching rate for discrete systems encountering matched disturbance with unknown upper bound. In addition, by suitably designing the approaching mode, high frequency transient response and high gain control input can be avoided. There are two steps to design the discrete sliding-mode control. First, choose an appropriate hyper-surface and the system will reach the control goal when it moves along the hyper-surface. Besides, select sliding functions such that the system trajectory in the sliding layer will move toward hyper-surface under specific reaching rate. Next, design the control algorithms such that the approaching and sliding condition is satisfied, which completes the controller design. Finally, to verify the feasibility of the proposed sliding-mode controller, numerical simulation is adopted for a linear single-input second order system and a multi-input fourth order system. From the simulation results, the controller is indeed robust to the matched disturbance and the system trajectory in the sliding mode can be steered to reach the hyper-surface in a specific reaching rate.

Keywords: Discrete Sliding Mode Control

致 謝

首先誠摯的感謝指導教授 陳永平博士於研究過程細心指導與鞭策，本論文方有今天的成果。在與老師日常討論與互動過程中，深刻感受到老師對教學專業的熱忱，不但適時給予觀念上的引導，指點我正確的方向，更讓我體會到從事研究應有的嚴謹態度以及充分的自主性，讓我在研究所修業期間獲益匪淺。

此外非常感謝口試委員徐保羅教授、梁耀文教授百忙之中撥冗審閱此論文，以及在學位考試時給予的指正與寶貴意見，得以讓本文更加周全。另外這段時間也要感謝同事的協助，讓我在繁忙的課業與工作上得以兼顧，女友姿婷在背後的默默支持，更是本人前進的動力。

最後，謹以此文獻給我摯愛的雙親。

陳建宏 2011.09

目 錄

摘 要	I
ABSTRACT	II
致 謝	III
目 錄	IV
圖 目 錄	V
一、緒論	1
1.1 背景與動機	1
1.2 論文架構	2
二、順滑模態控制	3
2.1 連續型順滑模態控制原理	3
2.2 離散型順滑模態控制原理	6
三、離散型順滑模態控制器設計	13
3.1 系統描述	13
3.2 順滑函數設計	15
3.3 順滑模態控制法則設計	17
3.4 多輸入順滑模態控制	19
四、數值模擬與討論	22
4.1 單輸入二階系統	22
4.2 多輸入系統	33
五、結論與未來展望	41
5.1 結論	41
5.2 未來展望	42
六、參考文獻	43

圖目錄

圖 2.1	順滑模態之系統軌跡運行方式	6
圖 2.3	不穩定之離散型順滑模態	7
圖 2.3	準順滑模態	8
圖 4.1	順滑函數軌跡($q = 8, \gamma = 2, \lambda = 0.7$).....	23
圖 4.2	σ_k 軌跡($q = 8, \gamma = 2, \lambda = 0.7$).....	24
圖 4.3	控制輸入($q = 8, \gamma = 2, \lambda = 0.7$).....	24
圖 4.4	狀態響應($q = 8, \gamma = 2, \lambda = 0.7$).....	25
圖 4.5	順滑模態軌跡($q = 35, \gamma = 2, \lambda = 0.7$).....	26
圖 4.6	σ_k 軌跡($q = 35, \gamma = 2, \lambda = 0.7$).....	26
圖 4.7	控制輸入($q = 35, \gamma = 2, \lambda = 0.7$).....	27
圖 4.8	狀態響應($q = 35, \gamma = 2, \lambda = 0.7$).....	27
圖 4.9	順滑模態軌跡($q = 8, \gamma = 20, \lambda = 0.7$).....	28
圖 4.10	σ_k 軌跡($q = 8, \gamma = 20, \lambda = 0.7$).....	29
圖 4.11	控制輸入($q = 8, \gamma = 20, \lambda = 0.7$).....	29
圖 4.12	狀態響應($q = 8, \gamma = 20, \lambda = 0.7$).....	30
圖 4.13	順滑模態軌跡($q = 8, \gamma = 2, \lambda = 0$).....	31
圖 4.14	σ_k 軌跡($q = 8, \gamma = 2, \lambda = 0$).....	31
圖 4.15	控制輸入($q = 8, \gamma = 2, \lambda = 0$).....	32
圖 4.16	狀態響應($q = 8, \gamma = 2, \lambda = 0$).....	32
圖 4.17	順滑模態軌跡($q_1 = q_2 = 1, \gamma_1 = \gamma_2 = 15, \lambda_1 = \lambda_2 = 0.7$).....	35
圖 4.18	σ_k 軌跡($q_1 = q_2 = 1, \gamma_1 = \gamma_2 = 15, \lambda_1 = \lambda_2 = 0.7$).....	35
圖 4.19	控制輸入($q_1 = q_2 = 1, \gamma_1 = \gamma_2 = 15, \lambda_1 = \lambda_2 = 0.7$).....	36
圖 4.20	狀態響應($q_1 = q_2 = 1, \gamma_1 = \gamma_2 = 15, \lambda_1 = \lambda_2 = 0.7$).....	36
圖 4.21	順滑模態軌跡($q_1 = q_2 = 10, \gamma_1 = \gamma_2 = 15, \lambda_1 = \lambda_2 = 0.7$).....	37
圖 4.22	σ_k 軌跡($q_1 = q_2 = 10, \gamma_1 = \gamma_2 = 15, \lambda_1 = \lambda_2 = 0.7$).....	37
圖 4.23	控制輸入($q_1 = q_2 = 10, \gamma_1 = \gamma_2 = 15, \lambda_1 = \lambda_2 = 0.7$).....	38

圖 4.24 狀態響應($q_1 = q_2 = 10$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 15$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.7$).....	38
圖 4.25 順滑模態軌跡($q_1 = q_2 = 1$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 15$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$).....	39
圖 4.26 σ_k 軌跡($q_1 = q_2 = 1$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 15$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$).....	39
圖 4.27 控制輸入($q_1 = q_2 = 1$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 15$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$).....	40
圖 4.28 狀態響應($q_1 = q_2 = 1$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 15$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$).....	40



一、緒論

1.1 背景與動機

順滑模態控制 (Sliding Mode Control) 早在 1970 年代即被前蘇聯的 V. I. Utkin 和幾位共同研究者提出[1]，其基本概念就是迫使系統狀態進入預先設計穩定的超空間，也就是所謂的順滑平面，一旦進入後即被限制在此空間內，並且滑向控制目標點。眾所週知，順滑模態控制的穩定性並不會受到外界干擾信號或系統參數的變化所影響，也就是說，順滑模態控制具有非常良好的穩健性(Robustness)，此外，順滑模態控制尚有快速響應，以及良好的暫態反應等優點。在過去數十年間，SMC 已被成功應用於各種實體控制系統，如：機器手臂、飛機、水中載具、撓性臂、電動馬達、電力系統...等。順滑模態控制本身也有一些限制，例如：實際的切換裝置會有延遲效應，無法在極短瞬間完成切換條件，導致在順滑平面附近會有切跳的現象，而此切跳現象會激發高頻的部分，進而影響整個系統的反應；再者，不合理的高增益輸入(high gain)問題、系統狀態變數可量測的假設，以及不確定訊號(uncertainty)須具備匹配的特性，通常無法存在於實際系統，雖然已經有學者提出使用輸出回授(output feedback)取代原有的狀態回授(state feedback)，但卻會引發另外所謂“非最小相位”(non-minimal phase)的問題。

近年來，由於計算機科學之突飛猛進，已有越來越多控制理論採用微處理機來實現，因此開始有學者致力於離散型順滑模態控制(Discrete-time Sliding Mode Control)之研究，並且已獲得許多研究成果[2]-[10]。然而，離散型系統在取樣頻率受限制的情況下，儘管可利用切換的手段迫使系統狀態朝向順滑面逼近，並且接觸到順滑面，但是系統受到連續型雜訊干擾時，由於控制輸入只有在取樣點上才有意義，取樣點之間的時段控制法則卻無從介入，使得系統狀態在接觸到順滑面後便隨即離開，而無法停留在順滑面上。換句話說，離散型系統想要達到理想順滑模態是不可能的。Gao 等人於 1995 年即提出“準順滑模態”(quasi-sliding mode, QSM)的設計概念[11]，並且利用

迫近法(reaching law)來設計控制法則，迫使系統軌跡在有限時間內接觸到順滑面，當軌跡接觸到順滑面後，即沿著順滑面以鋸齒式運動(zigzag motion)朝向控制目標前進。使用迫近法的好處在於順滑模態之動態軌跡可直接以設定參數的方式預先規劃，但必須事先得知干擾訊號之上界，但實務上卻難以準確估測。

綜上所述，傳統的離散型順滑模態控制器設計方式，通常必須先掌握系統不確定參數量或外界干擾訊號之上限值，並且使用非常快速的逼近速率以避開雜訊的干擾，但是快速的逼近速率通常需要高增益控制輸入，而高增益控制輸入的可能會使系統變得不穩定。基於這些理由，本論文以迫近法為基礎，藉由干擾訊號的變化率，來取代對干擾訊號上限的估測，並且設法導入濾波器的概念，使得系統軌跡進入順滑模態時之逼近速率亦可掌控，藉此抑制順滑層的切跳現象。

1.2 論文架構

本論文編排方式共分成五個章節，第一章為緒論，介紹離散型順滑模態控制理論的發展沿革，並說明本論文的研究動機；第二章為離散型順滑模態原理，將介紹所謂離散型順滑模態控制之迫近條件及順滑條件，並且說明準順滑模態之迫近條件以及迫近法；第三章為逼近速率可調之離散型順滑模態控制器設計，此章將介紹離散型順滑模態之設計步驟，並且將濾波器的概念導入迫近法，以此方式來設計控制法則；第四章將分別以單輸入系統及多輸入系統之數學模式作為範例，提出數值模擬結果；第五章為結論。

二、 順滑模態控制

順滑模態控制是屬於可變結構控制 (Variable Structure Control, VSC) 的一種，所謂可變結構控制，是指以控制手段刻意加入切換條件 (switching condition)，使受控系統產生兩個以上的子結構，並將系統切換於各子結構之間，以達成控制的目標。

針對連續型受控系統，在設計順滑模態控制時，必須先選定一個穩定的順滑函數 (sliding function)，接著設計滿足迫近順滑條件之控制法則 (control law)，使系統於有限時間內進入順滑模態，且系統一旦進入後即不再脫離，持續朝控制目標前進。

當受控系統轉換為離散型系統時，由於取樣時間的影響，其迫近順滑條件必須有所修正。在本章第 1 節中將利用數學模式來探討連續型順滑模態控制，在第 2 節中，則說明離散型順滑模態控制必須滿足之條件，以及不同於連續型系統之受控行為。

2.1 連續型順滑模態控制原理

在設計連續型順滑模態控制時，系統的動態行為必須以狀態變數來描述，其一般數學模式表示如下：

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (2-1)$$

其中 $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T \in \mathbf{R}^n$ 為系統狀態， $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_m]^T \in \mathbf{R}^m$ 是控制輸入。

根據順滑模態原理，系統若要產生順滑模態，則必須具備兩個重要條件：迫近條件 (approaching condition) 與順滑條件 (sliding condition)，當系統滿足迫近條件時，其軌跡可在有限時間內進入所規劃的超空間—順滑模態，此過程稱為迫近模態 (reaching mode)；當系統軌跡進入順滑模態後，若滿足順滑條件，則將沿著順滑模態滑向控制的目標點，此過程稱為順滑模態 (sliding mode)。

通常設計順滑模態控制器時，必須依循兩個主要步驟，首先在步驟一中選擇適當

的順滑函數，亦即順滑模態，讓系統軌跡在順滑模態的過程中得以成功滑向控制目標；其次在步驟二中設計滿足迫近條件及順滑條件之控制法則，以使系統軌跡於有限時間內進入順滑模態，並確保順滑模態的產生，底下將針對(2-1)之連續型系統設計順滑模態控制器。

由於系統(2-1)具有 m 個控制輸入，因此在步驟一中，必須選擇 m 個適當的順滑函數 $s_i(\mathbf{x})$ ， $i=1,2,\dots,m$ ，並組合成順滑向量(sliding vector)如下：

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = [s_1(\mathbf{x}) \quad s_2(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad s_m(\mathbf{x})]^T \quad (2-2)$$

亦即系統存在 m 個順滑面 $s_i(\mathbf{x})=0$ ，而這些順滑面的交集 $\mathbf{s}(\mathbf{x})=\mathbf{0}$ 即順滑模態。通常將順滑向量設定為

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (2-3)$$

其中 $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ，設計 \mathbf{C} 時必須使系統之特徵值在複數平面的左半面上，亦即使系統的穩定性獲得保證。

順滑向量設計完成後，第二步驟即設計具有切換條件之控制輸入 \mathbf{u} ，表示式為

$$u_i = \begin{cases} u_i^+(\mathbf{x}, t) & \text{if } s_i(\mathbf{x}) > 0 \\ u_i^-(\mathbf{x}, t) & \text{if } s_i(\mathbf{x}) < 0 \end{cases} \quad \text{for } i = 0, 1, 2, \dots, m \quad (2-4)$$

其中 $u_i^+ \neq u_i^-$ ，下標 i 代表 \mathbf{u} 向量的第 i 個元素，使受控系統滿足迫近條件與順滑條件，當系統未進入順滑模態時，必須滿足迫近條件，以使系統軌跡能在有限時間內進入順滑模態，通常採用之迫近條件如下：

$$\mathbf{s}^T(\mathbf{x})\dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) < -\rho\|\mathbf{s}(\mathbf{x})\| \quad \text{for } \mathbf{s}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0} \quad (2-5)$$

一旦進入順滑模態後，則必須滿足順滑條件，其充分必要條件如下：

$$\lim_{\mathbf{s}(\mathbf{x}) \rightarrow 0} \mathbf{s}^T(\mathbf{x})\dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) < 0 \quad \text{for } \mathbf{s}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0} \quad (2-6)$$

觀察以上二式可知，當狀態變數 \mathbf{x} 滿足(2-5)時，亦必同時滿足(2-6)式，換句話說，僅需使用(2-5)即可同時滿足順滑條件與迫近條件，故稱(2-5)為迫近順滑條件，這是在設計順滑模態控制時最常使用的切換條件。

在此進一步利用 Lyapunov 定理來說明(2-5)式如何保證系統於有限時間內可處於
 順滑模態，首先選取 Lyapunov 函數為

$$V = \mathbf{s}^T(\mathbf{x})\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{s}(\mathbf{x})\|^2 \quad (2-7)$$

將(2-7)對時間 t 微分，並根據(2-5)可得

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = 2\mathbf{s}^T(\mathbf{x})\dot{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) < -2\rho\|\mathbf{s}(\mathbf{x})\| = -2\rho\sqrt{V} < 0 \quad (2-8)$$

顯然地， $V > 0$ 且 $\dot{V} < 0$ ，故 V 確實為 Lyapunov 函數，呈現遞減收斂趨勢，由於 $\sqrt{V} > 0$
 和 $dt > 0$ ，因此將(2-8)整理為

$$dV < -2\rho\sqrt{V}dt \quad (2-9)$$

經積分運算後可得

$$\int_{V(0)}^{V(t)} \frac{dV}{\sqrt{V}} = 2\sqrt{V} \Big|_{V(0)}^{V(t)} = 2\sqrt{V(t)} - 2\sqrt{V(0)} < -2\rho t \quad (2-10)$$

即

$$0 \leq \sqrt{V(t)} < \sqrt{V(0)} - \rho t \quad (2-11)$$

由此式可知當 $t = \frac{\sqrt{V(0)}}{\rho}$ 時， $V(t)$ 將收斂至 0，即系統會在有限時間內進入順滑模態

$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ，滿足迫近條件。

有關於連續型順滑模態控制原理大致介紹至此，在接下來的章節裡，將由離散型
 順滑模態系統之迫近條件切入，進一步說明”取樣行為”對於順滑模態的影響，最後再
 介紹迫近法(reaching law approach)及離散型順滑模態控制之原理。

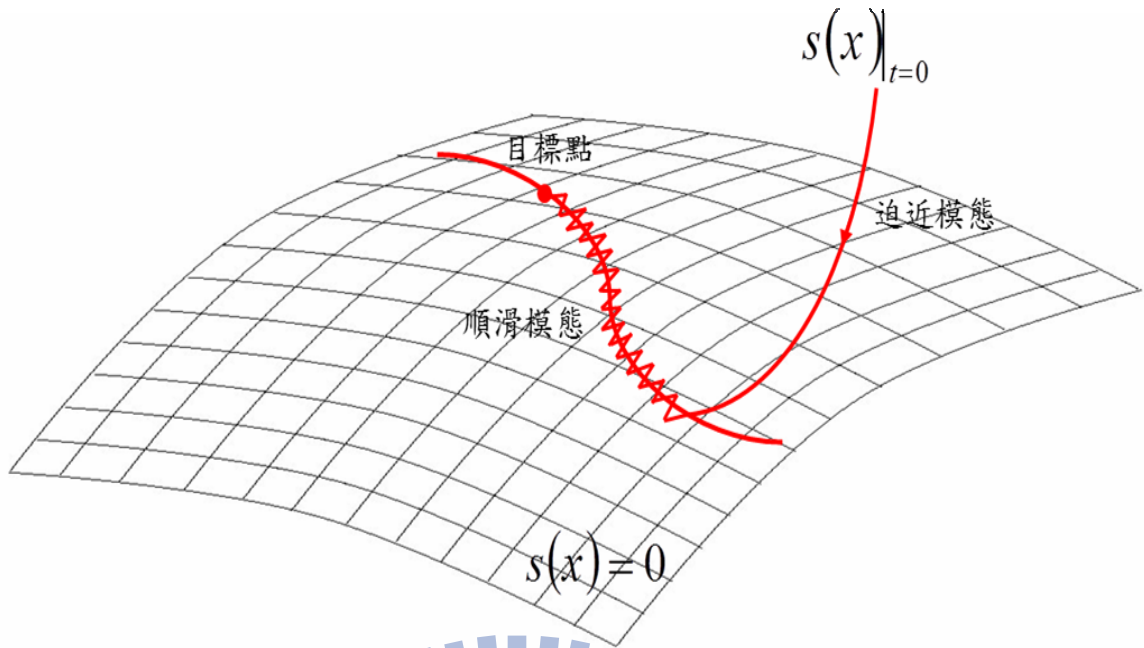


圖 2.1 順滑模態之系統軌跡運行方式



2.2 離散型順滑模態控制原理

前一節已介紹有關連續型順滑模態系統的迫近條件與順滑條件，或者是結合式的迫近順滑條件，在本節中將介紹有關離散型順滑模態控制原理，並探討產生準順滑模態(quasi-sliding mode)的條件與行為。

針對離散型系統之順滑條件，最直覺的想法就是將(2-6)式轉換為離散型，即

$$\mathbf{s}_k^T (\mathbf{s}_{k+1} - \mathbf{s}_k) < 0 \quad \text{for } \mathbf{s}_k \neq \mathbf{0}, k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2-12)$$

其中 $\mathbf{s}_k = \mathbf{s}(kT)$ ， T 為取樣時間(sampling time)。此式雖然可保證每一取樣點之軌跡方向均朝向順滑模態，但是卻無法保證系統之穩定性，如圖 2.2 所示，其軌跡雖然滿足(2-12)，但是卻呈現不穩定之發散情況。

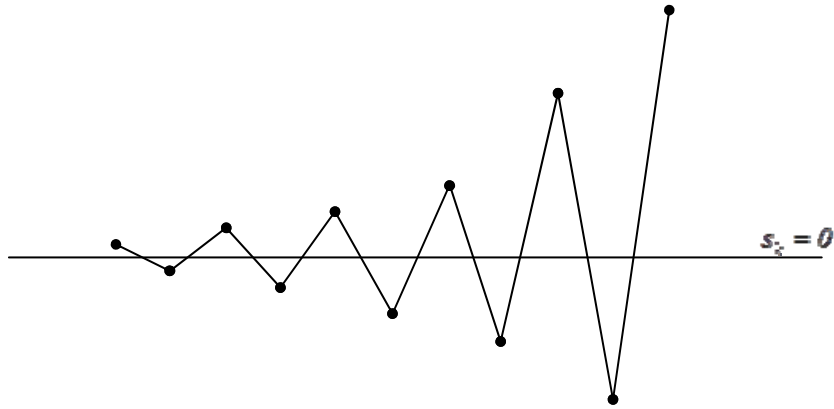


圖 2.2 不穩定之離散型順滑模態

為了解決圖 2.2 之發散問題，Sarpturk 等人認為除了(2-12)式以外，應再加入另一輔助條件

$$\mathbf{s}_k^T (\mathbf{s}_{k+1} + \mathbf{s}_k) > 0 \quad \text{for } \mathbf{s}_k \neq 0 \quad (2-13)$$

因為只要將(2-12)式及(2-13)式相乘，便可得

$$\|\mathbf{s}_{k+1}\| < \|\mathbf{s}_k\| \quad (2-14)$$

亦即保證 $\|\mathbf{s}_k\|$ 會隨著時間而遞減，然而這個修正方式只能確保 $\|\mathbf{s}_k\|$ 收斂至某個固定常數，卻無法保證收斂至 $\mathbf{s}_k = 0$ ，也就是說，(2-12)與(2-13)兩式仍然無法確保順滑模態的存在。其後，Furuta 再提出修正條件如下：

$$\mathbf{s}_k^T (\mathbf{s}_{k+1} - \mathbf{s}_k) < -\frac{1}{2} \|\mathbf{s}_{k+1} - \mathbf{s}_k\|^2 \quad (2-15)$$

事實上，此式與 Sarpturk 之修正條件是等效的，還是無法解決順滑模態的存在性問題。針對此問題，W. B. Gao 提出準順滑模態(quasi-sliding mode)來加以解決，其系統軌跡如圖 2.3 所示。

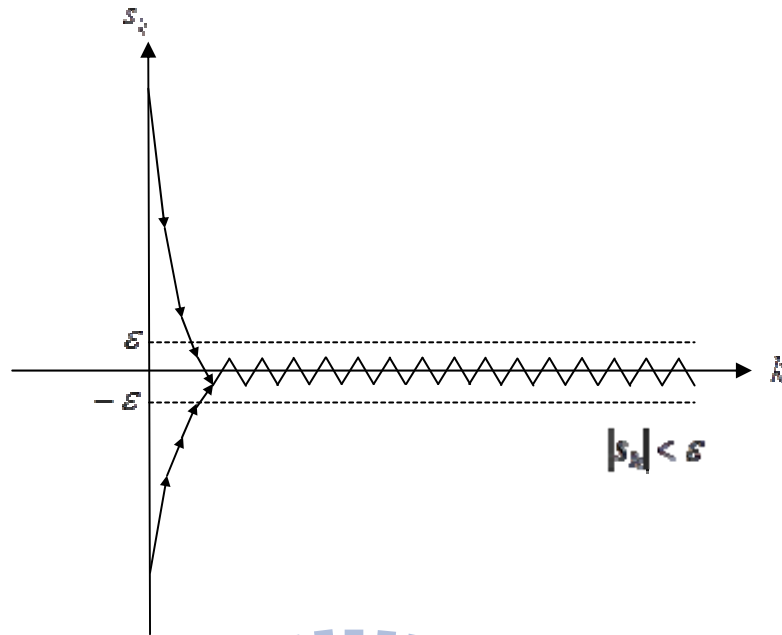


圖 2.3 準順滑模態

W. B. Gao 提出利用迫近法則 (Reaching Law) 來設計連續型順滑模態系統[14]，如下所示

$$\dot{s}(t) = -\varepsilon \operatorname{sgn}(s(t)) - qs(t) \quad (2-16)$$

其中 $\varepsilon > 0$ ， $q > 0$ ， $\operatorname{sgn}(\cdot)$ 為符號函數，由此式可知 $s(t)$ 在有限時間內將由初值 $s(0)$ 收斂至 $s(t_s) = 0$ ，其中

$$t_s = \frac{1}{q} \ln \frac{q|s(0)|}{\varepsilon} \quad (2-17)$$

也就是說(2-17)式可滿足迫近條件，並且藉由設定 ε 和 q 可調整系統接近順滑平面過程中的動態行為。W. B. Gao 再進一步將(2-15)式直接修改為離散型[11]，亦即

$$s_{k+1} - s_k = -qTs_k - \varepsilon T \operatorname{sgn}(s_k) \quad (2-18)$$

其中 $\varepsilon > 0$ ， $q > 0$ ， $1 - qT > 0$ 且 T 為取樣時間，當系統狀態遠離順滑平面 $s_k = 0$ 時，即 $|s_k|$ 夠大時，系統軌跡以近乎 $-qTs_k$ 之衰減速率朝向順滑平面移動，隨著軌跡逐漸逼近順滑平面時，則改以 $-\varepsilon T$ 之速率逼近，並於有限時間內進入順滑層 $|s_k| < \rho$ ，其

寬度為 $\rho = \frac{\varepsilon T}{1 - qT}$ ，且不再脫離此區間。事實上，根據(2-18)式可歸納出兩個重要性質，分別以底下之 Lemma 2-1 及 Lemma 2-2 兩定理來表示，並提出簡略之證明。

Lemma 2-1 當 $|s_k| > \rho = \frac{\varepsilon T}{1-qT}$ 且系統滿足 $s_{k+1} - s_k = -qTs_k - \varepsilon T \operatorname{sgn}(s_k)$ 時，則軌跡會在有限時間內進入順滑層 $|s_k| < \rho$ 。

證明：

假設 $s_k > \rho > 0$ ，也就是說 s_k 位在順滑層外，利用差分方程求解技術可由(2-18)式解得

s_k 為

$$s_k = \left(s_0 + \frac{\varepsilon}{q} \right) (1-qT)^k - \frac{\varepsilon}{q} \quad (2-19)$$

其中 $s_0 = s_k|_{k=0}$ ，則由於 $0 < 1-qT < 1$ ，使得 s_k 會隨著 k 的增加而遞減，且當

$k > \log_{(1-qT)} \frac{\varepsilon}{(1-qT)(qs_0 + \varepsilon)} > 0$ 時，

$$s_k = \left(s_0 + \frac{\varepsilon}{q} \right) (1-qT)^k - \frac{\varepsilon}{q} < \left(s_0 + \frac{\varepsilon}{q} \right) \frac{\varepsilon}{(1-qT)(qs_0 + \varepsilon)} - \frac{\varepsilon}{q} = \frac{\varepsilon}{q(1-qT)} - \frac{\varepsilon}{q} = \frac{\varepsilon T}{1-qT} = \rho \quad (2-20)$$

其中 $\infty > \log_{(1-qT)} \frac{\varepsilon}{(1-qT)(qs_0 + \varepsilon)} > 0$ ，故由(2-20)可知 s_k 會在有限的時間內穿過界面

$s_k = \rho$ ，使得 $|s_{k+1}| < \rho$ 或 $s_{k+1} \leq -\rho$ ，亦即只存在進入順滑層或穿過順滑層兩種情形，

進一步假設 s_k 穿過順滑層，即

$$s_{k+1} = \left(s_0 + \frac{\varepsilon}{q} \right) (1-qT)^{k+1} - \frac{\varepsilon}{q} \leq -\frac{\varepsilon T}{1-qT} \quad (2-21)$$

此式兩邊同除 $(1-qT)$ 可得

$$\left(s_0 + \frac{\varepsilon}{q} \right) (1-qT)^k - \frac{\varepsilon}{q(1-qT)} \leq -\frac{\varepsilon T}{(1-qT)^2} \quad (2-22)$$

使得

$$\begin{aligned}
s_k &= \left(s_0 + \frac{\varepsilon}{q} \right) (1-qT)^k - \frac{\varepsilon}{q} \\
&\leq -\frac{\varepsilon}{q} + \frac{\varepsilon}{q(1-qT)} - \frac{\varepsilon T}{(1-qT)^2} \\
&= \frac{\varepsilon T}{1-qT} - \frac{\varepsilon T}{(1-qT)^2} < \frac{\varepsilon T}{1-qT} = \rho
\end{aligned} \tag{2-23}$$

與假設 $s_k > \rho > 0$ 不合，故 $|s_{k+1}| < \rho$ ， s_k 會在有限的時間內進入順滑層。同理可證當

$s_k < -\frac{\varepsilon T}{1-qT} < 0$ 時， s_k 亦會在有限的時間內進入順滑層 $|s_k| < \frac{\varepsilon T}{1-qT}$ 。

Lemma 2-2 當 $|s_k| < \frac{\varepsilon T}{1-qT}$ ， s_{k+1} 必穿越順滑平面 $s_k = 0$ ，且 $|s_{k+1}| < \frac{\varepsilon T}{1-qT}$ 。

證明：

首先討論的是 s_k 軌跡進入順滑層後，系統軌跡之方向性質，將(2-18)式乘上 s_k 後，可得到

$$s_{k+1}s_k = (1-qT)|s_k|^2 - \varepsilon T|s_k| \tag{2-24}$$

由於 $|s_k| < \frac{\varepsilon T}{1-qT}$ ，所以將上式表示成

$$s_{k+1}s_k < (1-qT) \left(\frac{\varepsilon T}{1-qT} \right)^2 - \varepsilon T \frac{\varepsilon T}{1-qT} = 0 \tag{2-25}$$

也就是說當軌跡處於順滑層內時， s_k 的動態行為是在順滑平面上來回切跳，至於切跳之幅度是否可能使 s_k 跳脫至順滑層外，將(2-18)式取絕對值可得到其長度性質，即

$$\begin{aligned}
|s_{k+1} - s_k| &= T(q|s_k| + \varepsilon) \\
&< T \left(\frac{q\varepsilon T}{1-qT} + \varepsilon \right) = \frac{\varepsilon T}{1-qT}
\end{aligned} \tag{2-26}$$

又因為 $s_{k+1}s_k < 0$ ，所以 $|s_{k+1} - s_k| = |s_{k+1}| + |s_k|$ ，(2-26)可改寫為

$$|s_{k+1}| + |s_k| < \frac{\varepsilon T}{1-qT} \tag{2-27}$$

故 $|s_{k+1}| < \frac{\varepsilon T}{1-qT}$ ，即系統軌跡進入順滑層後其切跳幅度被限制於 $\left| \frac{\varepsilon T}{1-qT} \right|$ 範圍內。

瞭解了迫近法則之性質後，接著以單輸入且受到雜訊干擾之離散型系統為例，利用迫近法則來設計順滑模態控制器，此受控系統之數學模式可表示如下：

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_k)(u_k + d_k) \quad (2-28)$$

其中 $\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^n$ 為系統狀態， $u_k \in R$ 為控制輸入， $d_k \in R$ 為外來的雜訊干擾，首先應設計適當的離散型順滑模態，必須保證系統在進入順滑模態時能達到控制目標，通常將順滑函數定義為

$$s_k \equiv \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)\mathbf{x}_k \quad (2-29)$$

其中 $\mathbf{h}(\mathbf{x}_k) \in \mathbf{R}^n$ 且 $\mathbf{h}(\mathbf{x}_k)\mathbf{g}(\mathbf{x}_k) \neq 0$ ，為了方便通常適當選取 $\mathbf{h}(\mathbf{x}_k)$ 使得 $\mathbf{h}(\mathbf{x}_k)\mathbf{g}(\mathbf{x}_k) = 1$ ，有關順滑函數 $s(\mathbf{x}_k)$ 之設計尚須考慮系統穩定度，其設計步驟將於第 3.2 節中詳細描述。接著由(2-28)式及(2-29)式求得 s_k 之變化量如下：

$$\begin{aligned} s_{k+1} - s_k &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1})\mathbf{x}_{k+1} - s_k \\ &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1})(\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_{k+1})(u_k + d_k)) - s_k \\ &= \mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1})\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1}) + u_k + d_k - s_k \end{aligned} \quad (2-30)$$

假設已知匹配式雜訊 d_k 之極大值 D_U 與極小值 D_L ，亦即

$$D_L < d_k < D_U \quad (2-31)$$

利用(2-31)進一步將 d_k 拆解成明確部份(nominal part) \hat{d}_k 與不確定部份(uncertainty part) \tilde{d}_k ，也就是

$$d_k = \hat{d}_k + \tilde{d}_k \quad (2-32)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{d}_k &= \frac{D_U + D_L}{2} \\ |\tilde{d}_k| &\leq \phi = \frac{D_U - D_L}{2} \end{aligned}$$

控制法則 u_k 設計如下：

$$u_k = -\mathbf{h}(\mathbf{x}_{k+1})\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1}) + (1 - qT)s_k - \varepsilon T \text{sgn}(s_k) - \hat{d}_k - \phi \text{sgn}(s_k) \quad (2-33)$$

將 u_k 代入(2-30)式可得到

$$s_{k+1} - s_k = -qTs_k - \varepsilon T \operatorname{sgn}(s_k) + \tilde{d}_k - \phi \operatorname{sgn}(s_k) \quad (2-34)$$

很明顯的 s_k 在逼近的過程中仍然會受到雜訊的干擾，但不影響系統軌跡朝向順滑平面 $s_k = 0$ 逼近，第四章將有數值模擬範例。

在這篇論文裡，我們將濾波器的觀念融入上述控制策略中，並使用 u_k 的變化量來設計控制法則，藉此降低控制輸入之增益值，並改善設計控制器時必須事先掌握雜訊上界的缺點。



三、離散型順滑模態控制器設計

3.1 系統描述

一般的實際系統大都是屬於連續型系統，傳統上所採用的控制器也是以連續型的控制法則為主，但是目前因微處理器之取樣時間迅速，已有許多的連續型控制法則被轉換為離散型式，順滑模態控制即為其中一例，為了採用離散型控制法則，首先必須將連續型系統之數學模式轉換為離散型式，今以單控制輸入之連續型線性非時變系統為例作說明，其數學模式如下：

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_c (u(t) + d(t)) \quad (3-1)$$

其中 $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 為系統狀態， $u(t) \in R$ 為控制輸入， $d(t) \in R$ 為匹配式雜訊， $A_c \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 與 $\mathbf{b}_c \in \mathbf{R}^n$ 分別為系統矩陣，且 (A_c, \mathbf{b}_c) 為可控(controllable)，利用微分方程式之求解技術可得

$$\mathbf{x}(t) = e^{A_c t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{A_c(t-\tau)} \mathbf{b}_c [u(\tau) + d(\tau)] d\tau, \quad t \geq 0 \quad (3-2)$$

其中 $\mathbf{x}(0)$ 為初始狀態。由於離散型控制法則在 $kT \leq t < (k+1)T$ 區間所使用的輸入為定值，令

$$u(t) = u_k, \quad kT \leq t < (k+1)T \quad (3-3)$$

其中 T 為系統之取樣時間(sampling time)。當 $t = kT$ 時，由(3-2)式可得

$$\mathbf{x}_k = e^{A_c kT} \mathbf{x}(0) + \int_0^{kT} e^{A_c(kT-\tau)} \mathbf{b}_c [u(\tau) + d(\tau)] d\tau \quad (3-4)$$

其中 $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(kT)$ ，而當 $t = (k+1)T$ 時，可得

$$\mathbf{x}_{k+1} = e^{A_c(k+1)T} \mathbf{x}(0) + \int_0^{(k+1)T} e^{A_c((k+1)T-\tau)} \mathbf{b}_c [u(\tau) + d(\tau)] d\tau \quad (3-5)$$

進一步將以上兩式相減後整理成為

$$\mathbf{x}_{k+1} - e^{A_c T} \mathbf{x}_k = \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A_c((k+1)T-\tau)} \mathbf{b}_c [u(\tau) + d(\tau)] d\tau \quad (3-6)$$

即

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi \mathbf{x}_k + \Gamma \mathbf{u}_k + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A_c((k+1)T-t)} \mathbf{b}_c d(t) dt \quad (3-7)$$

其中 $\Phi = e^{A_c T}$ ， $\Gamma = \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A_c((k+1)T-t)} \mathbf{b}_c dt$ ，於 $kT \leq t < (k+1)T$ 時匹配式雜訊 $d(t)$ 可分解成

$$d(t) = d_k + \tilde{d}(t), \quad kT \leq t < (k+1)T \quad (3-8)$$

其中， $d_k = d(kT)$ ， $\tilde{d}(t)$ 表示取樣週期內 $d(t)$ 的變化量。將(3-8)式代入(3-7)式可得

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi \mathbf{x}_k + \Gamma(\mathbf{u}_k + d_k) + \mathbf{d}_r \quad (3-9)$$

其中， $\mathbf{d}_r = \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A_c((k+1)T-t)} \mathbf{b}_c \tilde{d}(t) dt$ 。很明顯地，由(3-9)式可知原本受匹配式雜訊 $d(t)$ 干擾之連續系統，經過離散化處理後，除了匹配式雜訊 d_k 外，還產生非匹配式雜訊項 \mathbf{d}_r 。對於實際的離散系統而言，由於取樣時間的存在，控制輸入只有在取樣點上才有作用，系統在取樣點以外的時間仍然受雜訊影響，由匹配式觀點來看，系統面對的是屬於非匹配式雜訊。本文所要探討的重點以消除匹配式雜訊為主，因此以系統取樣時間夠快為前提，將 \mathbf{d}_r 忽略不計，也就是將(3-9)式改寫如下：

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi \mathbf{x}_k + \Gamma(\mathbf{u}_k + d_k) \quad (3-10)$$

此外，不論是連續型或離散型系統，為了消除雜訊對系統的影響，通常都有高增益控制輸入的需求，但不合理的高增益輸入，往往會引發無法預估的高頻響應，甚至激發出未模式化的系統，因此設計離散型順滑模態控制器時，應設法避免使用高增益輸入，本文嘗試於控制策略中融入濾波器的概念，藉由調整系統軌跡的逼近速率，以降低控制輸入增益。

離散型順滑模態系統之設計程序大致與連續型系統相同，一般分為兩個步驟：(1) 首先選定順滑模態(sliding mode) $s_k = 0$ ，使得系統軌跡處於順滑模態時能到達控制目標，(2) 設計控制法則 \mathbf{u}_k ，使系統軌跡在滿足逼近條件的情況下，於有限時間內進入順滑模態，進而被約束在順滑模態上，並朝向控制目標前進。有關步驟(2)控制法則的設計，是第 3.3 節的主要內容，在下一節中先介紹第一步驟之順滑模態設計。

3.2 順滑函數設計

在設計 DSMC 控制器時，第一個步驟必須選定適當的順滑模態，以保證系統軌跡在順滑模態下能達到控制目標。考慮如(3-10)式之線性非時變系統，傳統的順滑模態設計方式，通常是將順滑函數 σ_k 定義為：

$$\sigma_k = \mathbf{c}\mathbf{x}_k \quad (3-11)$$

其中 $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^{1 \times n}$ ，且 $\mathbf{c}\mathbf{\Gamma} \neq 0$ 。在此步驟中，必須先假設系統已成功地被控制在順滑平面 $\sigma_k = 0$ 上，且不再離開此平面。根據 $\mathbf{\Gamma}$ ，選定一個適當的轉換矩陣 $\mathbf{T} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ [4]，使其滿足下式：

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{T}\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0_{n-1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3-12)$$

且存在反矩陣 \mathbf{T}^{-1} ，接著定義新的狀態變數

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{T}\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_k \\ \mathbf{v}_k \end{bmatrix} \quad (3-13)$$

其中 $\mathbf{z}_k \in \mathbf{R}^n$ ， $\mathbf{w}_k \in \mathbf{R}^{n-1}$ ， $\mathbf{v}_k \in \mathbf{R}$ ，經變數變換可將原系統(3-10)式進一步改寫為

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{M}\mathbf{z}_k + \bar{\mathbf{b}}(u_k + d_k) \quad (3-14)$$

其中 $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{m}_{12} \\ \mathbf{m}_{21} & \mathbf{m}_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}$ ，亦即

$$\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{M}_{11} \mathbf{w}_k + \mathbf{m}_{12} \mathbf{v}_k \quad (3-15)$$

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{m}_{21} \mathbf{w}_k + \mathbf{m}_{22} \mathbf{v}_k + u_k + d_k \quad (3-16)$$

接著再將(3-11)式改寫為

$$\sigma_k = \mathbf{c}\mathbf{x}_k = \mathbf{c}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{z}_k = \mathbf{c}_T \mathbf{z}_k \quad (3-17)$$

其中 $\mathbf{c}_T = \mathbf{c}\mathbf{T}^{-1}$ ，再令

$$\mathbf{c}_T = [\bar{\mathbf{c}}_T \quad 1] \quad (3-18)$$

則

$$\mathbf{c}\boldsymbol{\Gamma} = (\mathbf{c}_T \mathbf{T}) \left(\mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n-1} \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 1 \neq 0 \quad (3-19)$$

可滿足 $\mathbf{c}\boldsymbol{\Gamma} \neq 0$ 的條件，此外，進一步將順滑函數表為

$$\sigma_k = \mathbf{c}\mathbf{x}_k = \mathbf{c}_T \mathbf{z}_k = \bar{\mathbf{c}}_T \mathbf{w}_k + v_k \quad (3-20)$$

由於系統於順滑模態時，(3-15)式將由 $\sigma_{k+1}|_{u_k=u_{eq}} = 0$ 取代，故系統必須滿足 $\sigma_k = 0$ ，

即 $v_k = -\bar{\mathbf{c}}_T \mathbf{w}_k$ ，將其代入(3-15)式可得

$$\mathbf{w}_{k+1} = (\mathbf{M}_{11} - \mathbf{m}_{12} \bar{\mathbf{c}}_T) \mathbf{w}_k \quad (3-21)$$

接著只要設定特徵根(eigenvalues)，使(3-17)式成為穩定的系統，也就是極點位置落在單位圓(unit cycle)內，即可經由(3-17)式解得 $\bar{\mathbf{c}}_T$ ，故

$$\sigma_k = \mathbf{c}\mathbf{x}_k = \mathbf{c}_T \mathbf{T}\mathbf{x}_k = [\bar{\mathbf{c}}_T \quad 1] \mathbf{T}\mathbf{x}_k \quad (3-22)$$

經由傳統方式設計的順滑函數 σ_k ，至此已設計完畢。

一般離散型順滑模態控制器之設計方式，均著重於如何滿足迫近條件及順滑條件，事實上，掌握迫近模態之系統軌跡亦非常重要。為了確保系統對雜訊之穩健性，順滑模態控制通常需要利用高增益控制輸入來消除雜訊的影響，以保證順滑模態存在，於離散型順滑模態控制系統亦是如此，但高增益控制輸入除了很難於實際系統實現外，還會引發極快速的迫近模態，並且不合理的切跳(chattering)現象將隨之產生，因此底下將針對極快速迫近模態問題，利用一階濾波器的概念來設計離散型系統順滑函數。

首先考慮離散型線性非時變系統如(3-10)式所示，一般的順滑函數形式為 $\sigma_k = \mathbf{c}\mathbf{x}_k$ ，其中 $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^{1 \times n}$ ， $\mathbf{c}\boldsymbol{\Gamma} = 1$ 。本文提出具一階濾波器架構之順滑模態控制，將順滑函數 s_k 定義為

$$s_k = \sigma_k - \lambda \sigma_{k-1} \quad (3-23)$$

其中 σ_k 即為一般的順滑函數，重要的是，當 s_k 逼近順滑模態時， σ_k 亦會逐漸向 $\sigma_k = 0$ 收斂，達到控制目的。令 s_k 為輸入信號，而 σ_k 為輸出信號，將(3-23)式進一步以 z 轉換表示其轉移函數如下

$$h(z) = \frac{\sigma(z)}{s(z)} = \frac{1}{1 - \lambda z^{-1}} \quad (3-24)$$

顯然地，只要(3-24)式滿足 $0 < \lambda < 1$ ，則 $h(z)$ 即為一階低通濾波器之表示式。當 s_k 以極快速的迫近速率逼近順滑模態 $s_k = 0$ 時，低通濾波器將迫近模態軌跡的高頻成分去除，使 σ_k 得以緩慢的速率接近順滑模態，避免高增益控制輸入之需求，在接下來的章節裡，將說明有關順滑模態控制法則之設計，以及如何消除匹配式雜訊。

3.3 順滑模態控制法則設計

順滑模態平面已於前一節設計完畢，為了避免高增益控制輸入，於設計順滑模態平面時，加入了一階低通濾波器，藉由 λ 來調整系統軌跡於迫近模態的逼近速率，在這一節中將討論第二個步驟：設計滿足迫近及順滑條件之控制法則 u_k ，使系統於有限時間內進入順滑模態。

考慮(3-10)式之線性非時變系統，且雜訊 d_k 為匹配式的，設計控制法則時，通常都會假設雜訊之大小有其上下限，如(2-26)式所示，進一步將雜訊分解為明確部分及不確定部分，再於控制法則加入常數項及切換函數項來抵消雜訊的影響，但此方法通常使控制器存在較多無謂的耗能，且系統軌跡進入順滑模態後，往往會面臨切跳現象的困擾，其切跳的幅度與切換函數的大小有關，而造成過高的控制誤差，因此本文設計控制法則時，係假設雜訊信號的變化是平滑且不會急遽變動的，即

$$\frac{|d_k - d_{k-1}|}{T} < \eta, \quad \text{for } k \geq 0 \quad (3-25)$$

其中 η 為 d_k 變化率之最大值， T 為取樣時間。

接下來進行順滑模態控制法則設計前，需注意的是在設計順滑向量 c 時，已考慮 $cb=1$ ，因此接下來的設計過程中將直接引用此結果。由(3-10)式及(3-11)式先求得

σ_k 的變化量為

$$\sigma_{k+1} - \sigma_k = \mathbf{c}\Phi\Delta\mathbf{x}_{k-1} + u_k - u_{k-1} + d_k - d_{k-1} \quad (3-26)$$

其中 $\Delta\mathbf{x}_{k-1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}$ 為系統狀態之變化量。接著利用(3-23)式計算 s_k 之差值如下

$$s_{k+1} - s_k = \sigma_{k+1} - \sigma_k - \lambda(\sigma_k - \sigma_{k-1}) \quad (3-27)$$

將(3-26)式代入(3-27)式可得

$$s_{k+1} - s_k = -\lambda(\sigma_k - \sigma_{k-1}) + \mathbf{c}\Phi\Delta\mathbf{x}_{k-1} + u_k - u_{k-1} + d_k - d_{k-1} \quad (3-28)$$

由於(3-11)式可得到 $\Delta\sigma_{k-1} = \sigma_k - \sigma_{k-1} = \mathbf{c}\Delta\mathbf{x}_k$ ，因此將(3-28)式進一步表示為

$$s_{k+1} - s_k = -\mathbf{c}(\lambda\mathbf{I}_n - \Phi)\Delta\mathbf{x}_{k-1} + u_k - u_{k-1} + d_k - d_{k-1} \quad (3-29)$$

將控制法則 u_k 設計如下：

$$u_k = u_{k-1} + \mathbf{c}(\lambda\mathbf{I}_n - \Phi)\Delta\mathbf{x}_{k-1} + v_k \quad (3-30)$$

將 u_k 代入(3-29)式可得

$$s_{k+1} - s_k = v_k + (d_k - d_{k-1}) \quad (3-31)$$

其中 v_k 除了用來消除雜訊 d_k 的影響外，同時必須滿足(2-19)式之迫近順滑條件，故選

取 v_k 為

$$v_k = -qTs_k - (\eta + \gamma)T\text{sgn}(s_k) \quad (3-32)$$

其中 $q > 0$ ， $1 - qT > 0$ ， $\gamma > 0$ 。將(3-32)式代入(3-31)式可得

$$s_{k+1} - s_k = -qTs_k - \varepsilon T\text{sgn}(s_k) \quad (3-33)$$

其中

$$\varepsilon = \eta + \gamma - \left(\frac{d_k - d_{k-1}}{T} \right) \text{sgn}(s_k) \quad (3-34)$$

亦即

$$\varepsilon \geq \gamma > 0 \quad (3-35)$$

故所設計之順滑模態控制器可滿足迫近順滑條件。

3.4 多輸入順滑模態控制

在前面的章節中考慮的是單輸入系統，底下要探討的是多輸入系統之設計方式，對於具有 m 個控制輸入之離散型系統而言，其表示式如下

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}(\mathbf{u}_k + \mathbf{d}_k) \quad (3-45)$$

其中 $\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^n$ ， $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ， $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times m}$ ， $\mathbf{u}_k \in \mathbf{R}^m$ ， $\mathbf{d}_k \in \mathbf{R}^m$ ，並假設雜訊分量 $d_{k,i}$ 之變化率上限為

$$\frac{|d_{k,i} - d_{k-1,i}|}{T} < \eta_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3-46)$$

由於每一個輸入都可以控制一個順滑面的產生，多輸入系統可選擇與其控制輸入數量相同的順滑函數，將這些順滑函數組合起來就成為順滑向量，因此設計順滑模態控制器時，必須先選擇 σ_k 如下

$$\sigma_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k \quad (3-47)$$

其中 $\sigma_k = [\sigma_{k,1} \quad \sigma_{k,2} \quad \dots \quad \sigma_{k,m}]^T$ ， $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ ，滿足 $\mathbf{C}\mathbf{B} = \mathbf{I}_m$ ，並且假設 $\sigma_k = \mathbf{0}$ 時系統之穩定性已得到保證。接著定義 m 個具有濾波器結構之順滑函數如下：

$$s_{k,i} = \sigma_{k,i} - \lambda_i \sigma_{k-1,i}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3-48)$$

其中 $0 < \lambda_i < 1$ ，若將上式表示成向量型式則為

$$\mathbf{s}_k = \sigma_k - \mathbf{A}\sigma_{k-1} \quad (3-49)$$

其中

$$\mathbf{s}_k = [s_{k,1} \quad s_{k,2} \quad \dots \quad s_{k,m}]^T,$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_m \end{bmatrix}$$

接著只需設計控制法則，使(2-19)式逼近順滑條件成立即可，將此條件重新表示如下：

$$s_{k+1,i} - s_{k,i} = -qTs_{k,i} - \varepsilon T \text{sgn}(s_{k,i}) \quad (3-50)$$

若寫成向量型式則為

$$s_{k+1} - s_k = -qT s_k - \varepsilon T \operatorname{sgn}(s_k) \quad (3-51)$$

其中 $\varepsilon > 0$ ， $q > 0$ ， $1 - qT > 0$ 。經由(3-45)、(3-47)及(3-49)等式計算 s_k 的差值如下

$$\begin{aligned} s_{k+1} - s_k &= \sigma_{k+1} - \sigma_k - \Lambda(\sigma_k - \sigma_{k-1}) \\ &= C(x_{k+1} - x_k) - \Lambda(\sigma_k - \sigma_{k-1}) \\ &= CA(x_k - x_{k-1}) + u_k - u_{k-1} + d_k - d_{k-1} - \Lambda(\sigma_k - \sigma_{k-1}) \end{aligned} \quad (3-52)$$

選取控制法則為

$$u_k = u_{k-1} - CA(x_k - x_{k-1}) + \Lambda(\sigma_k - \sigma_{k-1}) + v_k \quad (3-53)$$

代入(3-51)式，則

$$s_{k+1} - s_k = v_k + (d_k - d_{k-1}) \quad (3-54)$$

若以分量表示即為

$$s_{k+1,i} - s_{k,i} = v_{k,i} + (d_{k,i} - d_{k-1,i}) \quad (3-55)$$

令

$$v_{k,i} = -qTs_{k,i} - (\eta_i + \gamma_i)T \operatorname{sgn}(s_{k,i}) \quad (3-56)$$

其中 $\gamma_i > 0$ ，可用來調整系統軌跡於非常接近 $s_{k,i} = 0$ 時之逼近速率。將 $v_{k,i}$ 代入(3-55)

式可得

$$s_{k+1,i} - s_{k,i} = -qTs_{k,i} - \varepsilon_i T \operatorname{sgn}(s_{k,i}) \quad (3-57)$$

其中

$$\varepsilon_i = \eta_i + \gamma_i - \left(\frac{d_{k,i} - d_{k-1,i}}{T} \right) \operatorname{sgn}(s_{k,i}) \quad (3-58)$$

由(3-5)可知

$$\varepsilon_i \geq \gamma_i > 0 \quad (3-59)$$

故所設計之 v_k 滿足迫近順滑條件。

接下要討論的是(3-47)式中 C 的設計方式，同樣地必須先假設系統已被控制在順滑模態 $\sigma_k = 0$ 上，接著選擇轉換矩陣 T 滿足

$$TB = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n-m) \times m} \\ I_m \end{bmatrix} \quad (3-60)$$

則系統經過變數變換後可成為

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{M}\mathbf{z}_k + \mathbf{T}\mathbf{B}(\mathbf{u}_k + \mathbf{d}_k) \quad (3-61)$$

其中

$$\mathbf{z}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_k \\ \mathbf{v}_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_k = [\mathbf{z}_{k,1} \quad \cdots \quad \mathbf{z}_{k,n-m}]^T,$$

$$\mathbf{v}_k = [\mathbf{z}_{k,n-m+1} \quad \cdots \quad \mathbf{z}_{k,n}]^T, \quad \mathbf{M} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix}$$

進一步將(3-61)式化為

$$\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{M}_{11}\mathbf{w}_k + \mathbf{M}_{12}\mathbf{v}_k \quad (3-62)$$

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{M}_{21}\mathbf{w}_k + \mathbf{M}_{22}\mathbf{v}_k + \mathbf{u}_k + \mathbf{d}_k \quad (3-63)$$

由於進入順滑模態時(3-63)式將由 $\sigma_{k+1}|_{u_k=u_{eq}} = 0$ 取代，與系統穩定性無關，因此設計順滑模態時只需考慮(3-62)式，使得系統(3-62)式成為一個穩定系統。令

$$\sigma_k = \mathbf{v}_k + \Psi\mathbf{w}_k \quad (3-64)$$

只要順滑模態產生，就可以保證 $\sigma_k = 0$ ，亦即 $\mathbf{v}_k = -\Psi\mathbf{w}_k$ ，將 \mathbf{v}_k 代入(3-62)式可得到

$$\mathbf{w}_{k+1} = (\mathbf{M}_{11} - \mathbf{M}_{12}\Psi)\mathbf{w}_k \quad (3-65)$$

經由指定 $(\mathbf{M}_{11} - \mathbf{M}_{12}\Psi)$ 的特徵根，使其均位在複數平面的單位圓(unit cycle)內，即可解得 Ψ 。再將(3-64)式改寫成

$$\sigma_k = \begin{bmatrix} \Psi & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_k \\ \mathbf{v}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \mathbf{T}\mathbf{x}_k \quad (3-66)$$

亦即

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \Psi & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \mathbf{T} \quad (3-67)$$

順滑模態 \mathbf{C} 至此設計完成。

四、數值模擬與討論

4.1 單輸入二階系統

在取樣時間 $T=0.01$ 秒之條件下，考慮以下具匹配式雜訊之二階離散型系統

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{b}(u_k + d_k) \quad (4-1)$$

其中 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1.2 & 0.1 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix}$ ， $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，且雜訊為 $d(t) = 0.5\cos(2\pi t)$ ，其頻率為 1Hz，經取樣後可得

$$d_k = 0.5\cos(2\pi kT) = 0.5\cos(0.02k\pi) \quad (4-2)$$

首先根據 3.2 節的方式選取 σ_k ，令

$$\sigma_k = \mathbf{c}\mathbf{x}_k \quad (4-3)$$

其中 $\mathbf{c} = [c_1 \ 1]$ ，且 $\mathbf{c}\mathbf{b} = 1$ 。當系統處於順滑模態時 $\sigma_{k+1} \Big|_{u_k=u_{eq}} = 0$ ，由(4-1)式可得

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \mathbf{c}\mathbf{x}_k \\ &= c_1 x_{k,1} + x_{k,2} = 0 \end{aligned} \quad (4-4)$$

則 $x_{k,2} = -c_1 x_{k,1}$ ，代入 $x_{k+1,1}$ 可得

$$x_{k+1,1} = (1.2 - c_1)x_{k,1} \quad (4-5)$$

考慮系統穩定性將 (4-4) 之特徵根設計為 0.95，可得 $c_1 = 0.25$ ，即

$\sigma_k = \mathbf{c}\mathbf{x}_k = [0.25 \ 1]\mathbf{x}_k$ ，其次令順滑函數為

$$s_k = \sigma_k - \lambda\sigma_{k-1} \quad (4-6)$$

其中 $0 < \lambda < 1$ ，用來調整系統軌跡之逼近速率。依據(3-30)式將控制法則設計為

$$u_k = u_{k-1} + \mathbf{c}(\lambda \mathbf{I}_2 - \Phi)(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}) + v_k \quad (4-7)$$

其中

$$v_k = -qTs_k - (\eta + \gamma)T\text{sgn}(s_k) \quad (4-8)$$

由於 $|d_k - d_{k-1}| \approx 3.14T < \eta T$ ，故選定 $\eta = 3.5$ ，由(3-34)可知

$$\varepsilon = 3.5 + \gamma - \left(\frac{d_k - d_{k-1}}{T} \right) \text{sgn}(s_k) \quad (4-9)$$

當 $|s_k|$ 夠大時，系統軌跡以近乎 $-qTs_k$ 之衰減速率朝向順滑平面移動，隨著系統軌跡逐漸逼近順滑平面時，則改以 $-\varepsilon T$ 之速率逼近，並於有限時間內進入順滑層 $|s_k| < \rho$ ，其寬度為

$$\rho = \frac{\varepsilon T}{1-qT} \leq (7+\gamma) \frac{T}{1-qT} \quad (4-10)$$

接下來的數值模擬中，將個別改變 λ 、 q 及 γ ，以驗證各參數對於控制器效能之影響性。

【Case I-1】 $q=8$ ， $\gamma=2$ 、 $\lambda=0.7$

條件：在此先選定 $q=8$ ， $\gamma=2$ 、 $\lambda=0.7$ ，作為後續模擬結果之比較對象，令初始

條件為 $x_0 = [3 \quad -6]^T$ ，利用 MATLAB 進行模擬。

結果：模擬結果如圖 4.1~圖 4.4，在有外界干擾的情況下， s_k 由初始狀態朝向順滑模態逼近，並且可在有限時間內進入順滑層 $|s_k| < \rho$ ，同時將 σ_k 帶進 $|\sigma_k| < \rho$ 。

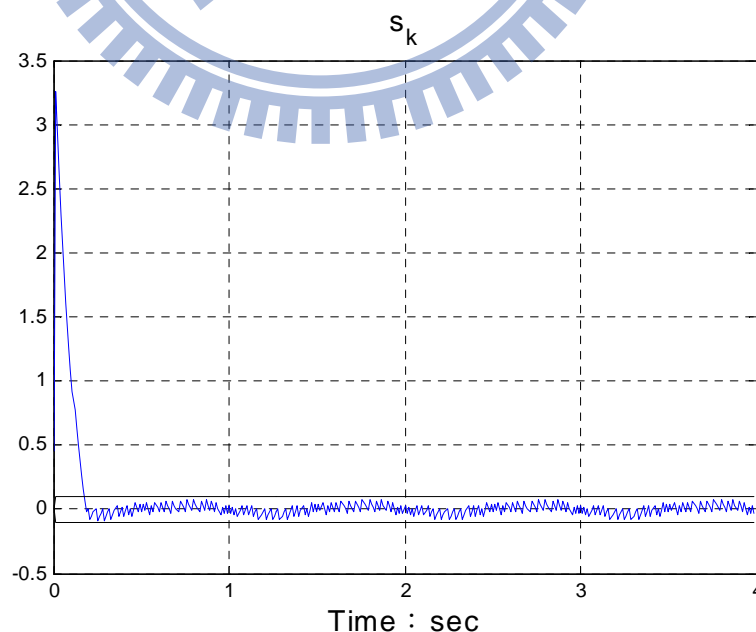


圖 4.1 順滑函數軌跡($q=8$ ， $\gamma=2$ 、 $\lambda=0.7$)

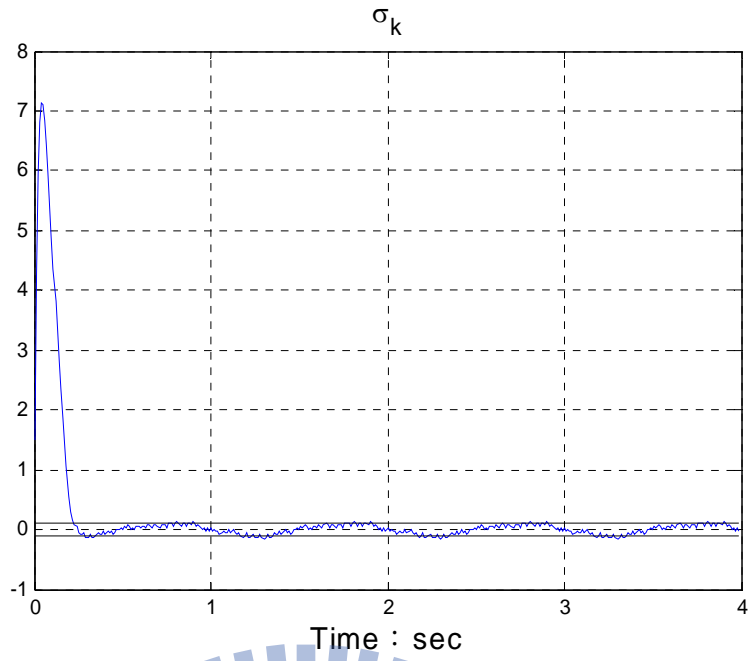


圖 4.2 σ_k 軌跡($q=8, \gamma=2, \lambda=0.7$)

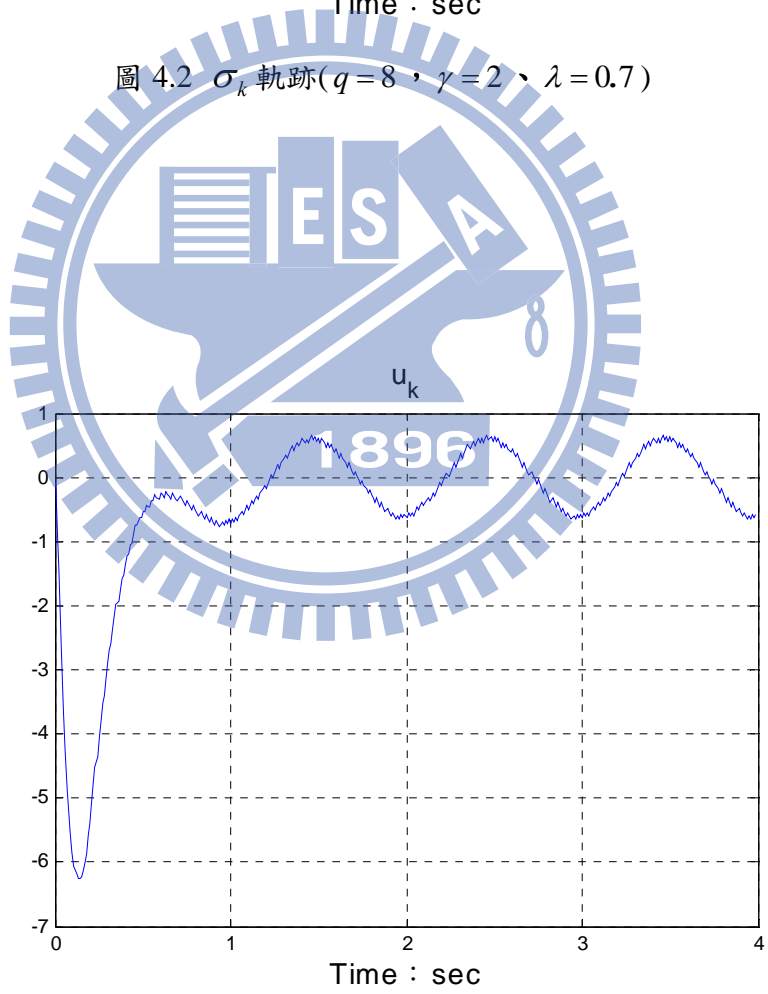


圖 4.3 控制輸入($q=8, \gamma=2, \lambda=0.7$)

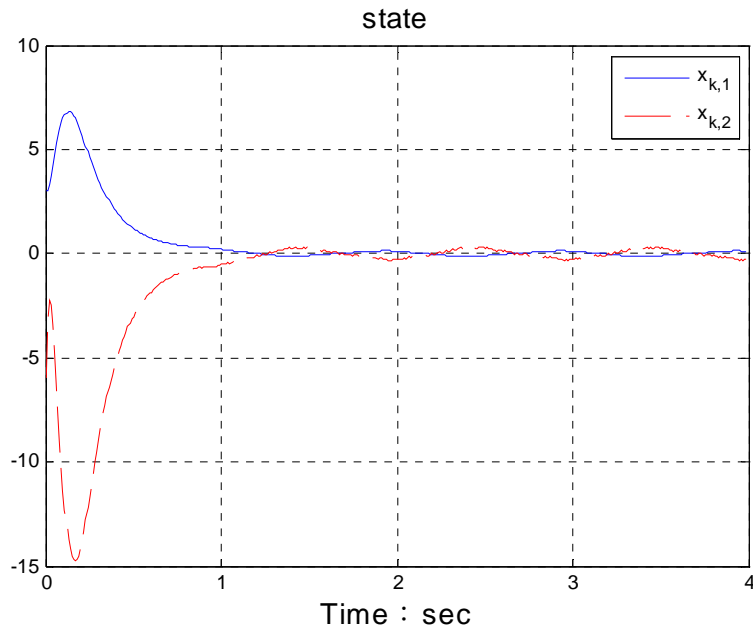


圖 4.4 狀態響應($q=8$, $\gamma=2$ 、 $\lambda=0.7$)

【Case I-2】 $q=35$, $\gamma=2$ 、 $\lambda=0.7$

條件：由(2-19)式可知，當 $|s_k|$ 夠大時，系統軌跡以近乎 $-qTs_k$ 之衰減速率朝向順滑平面移動，即 q 愈大則衰減速率愈快；此外，順滑層寬度為 $\rho \leq (7+\gamma)\frac{T}{1-qT} \approx 0.14$ ，也就是 q 愈大則 ρ 的寬度愈大，以下利用 MATLAB

模擬驗證 q 參數可調整順滑層 ρ 的寬度以及 s_k 之衰減速率。

結果：模擬結果如圖 4.5~圖 4.8。比較圖 4.5 與圖 4.1，將 q 參數由 8 增加至 35，可看出逼近模態時 s_k 之衰減速率明顯地加快，且順滑層 ρ 的寬度亦隨之增加。

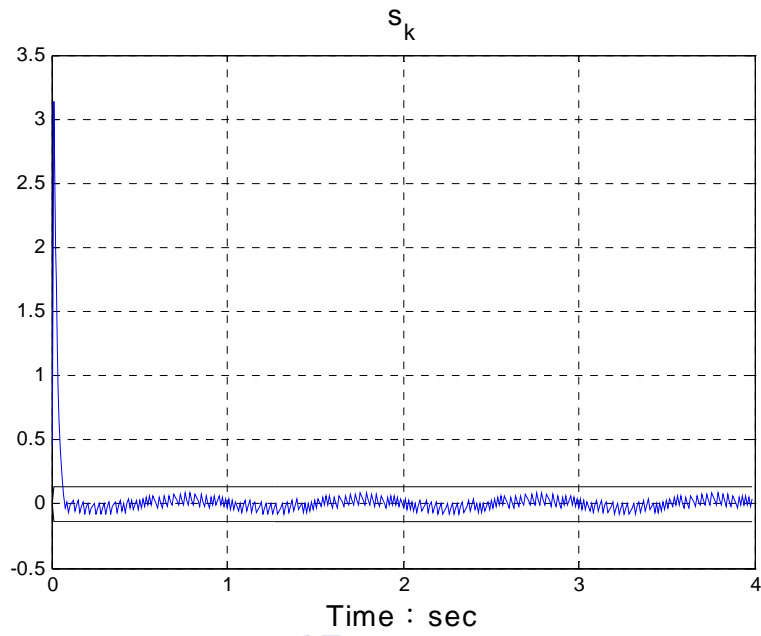


圖 4.5 順滑模態軌跡($q=35$, $\gamma=2$ 、 $\lambda=0.7$)

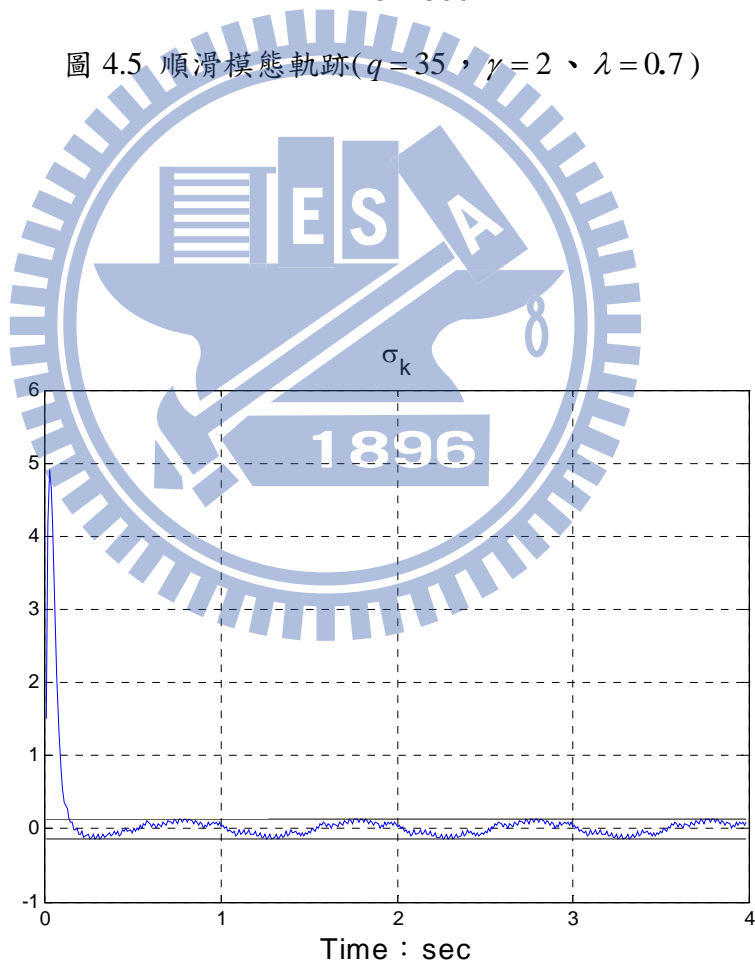


圖 4.6 σ_k 軌跡($q=35$, $\gamma=2$ 、 $\lambda=0.7$)

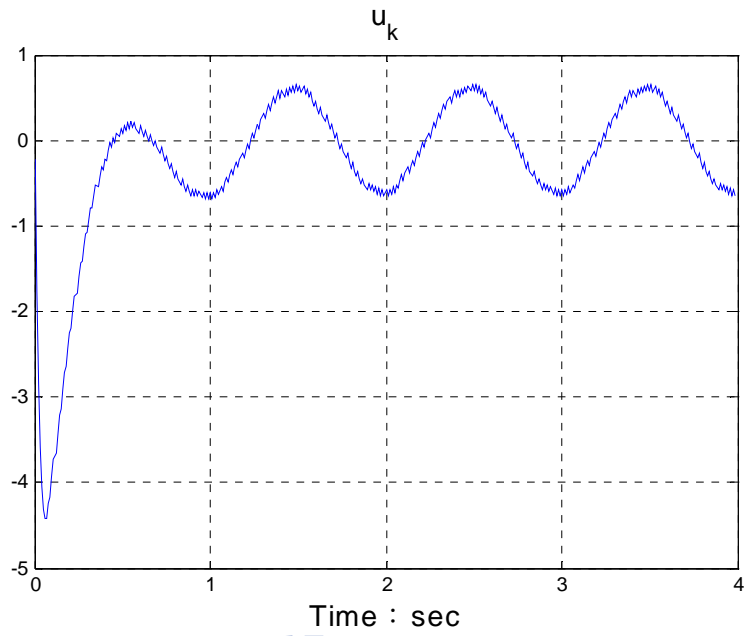


圖 4.7 控制輸入($q=35$, $\gamma=2$, $\lambda=0.7$)

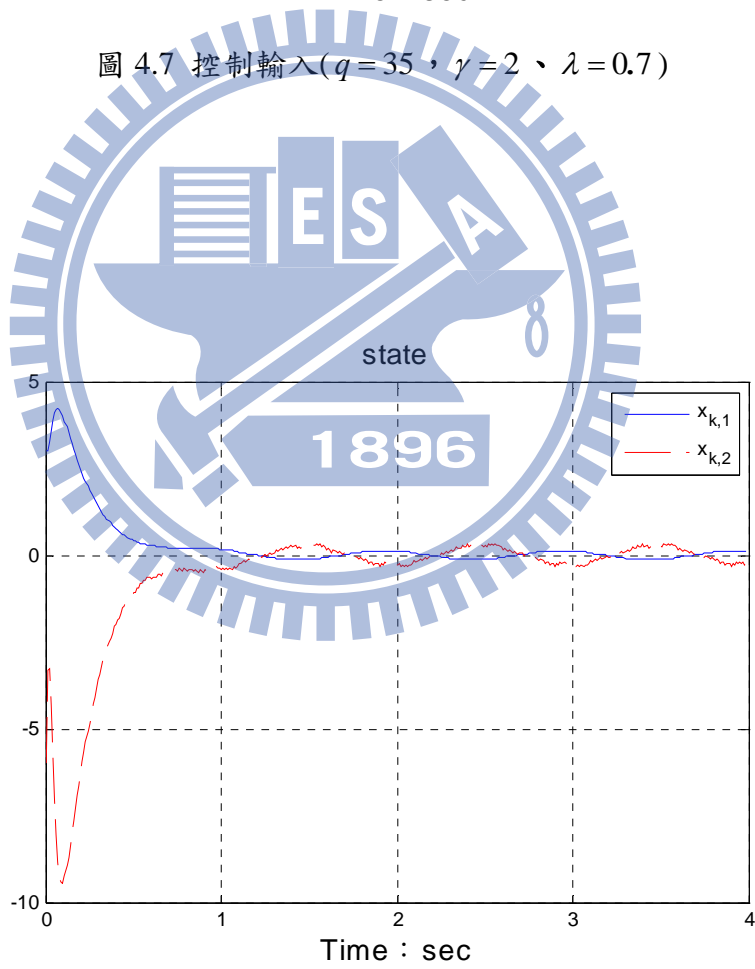


圖 4.8 狀態響應($q=35$, $\gamma=2$, $\lambda=0.7$)

【模擬 I-3】 $q=8$, $\gamma=20$ 、 $\lambda=0.7$

條件：由(4-9)式可知 ε 與 γ 成正比，且由(2-19)式之迫近順滑條件可看出，當 s_k 接近順滑平面 $s_k=0$ 時，系統軌跡將以近乎 $-\varepsilon T$ 之衰減速率朝向順滑平面移動，且 ε 愈大則衰減速率愈快，也就是 γ 愈大則 s_k 之衰減速率愈快；此外，由(4-10)可知 γ 愈大則順滑層寬度 ρ 愈大，以下利用 MATLAB 模擬來驗證 γ 參數可調控順滑層 ρ 的寬度以及 s_k 之逼近速率。

結果：模擬結果如圖 4.9~圖 4.12。比較圖 4.9 與圖 4.1 可看出，由於 γ 由 2 加大至 20，則順滑層 ρ 的寬度由 $\rho=0.0978$ 增加為 $\rho=0.2935$ ，加大 s_k 之切跳幅度；同時可看出 γ 確實影響 s_k 在接近順滑層附近時之衰減速率因此而加快。

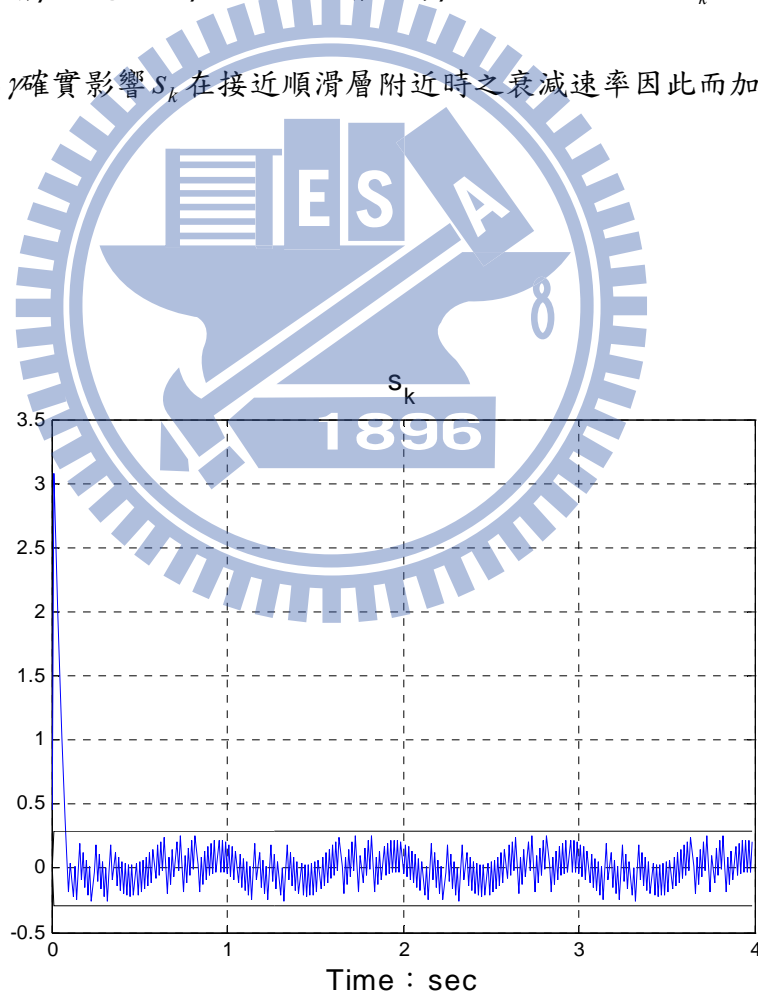


圖 4.9 順滑模態軌跡($q=8$, $\gamma=20$ 、 $\lambda=0.7$)

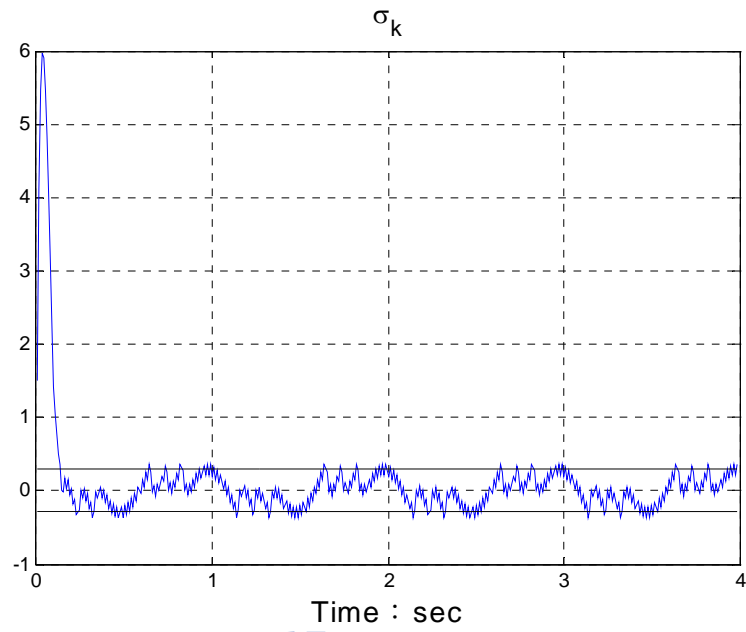


圖 4.10 σ_k 軌跡($q=8$, $\gamma=20$ 、 $\lambda=0.7$)

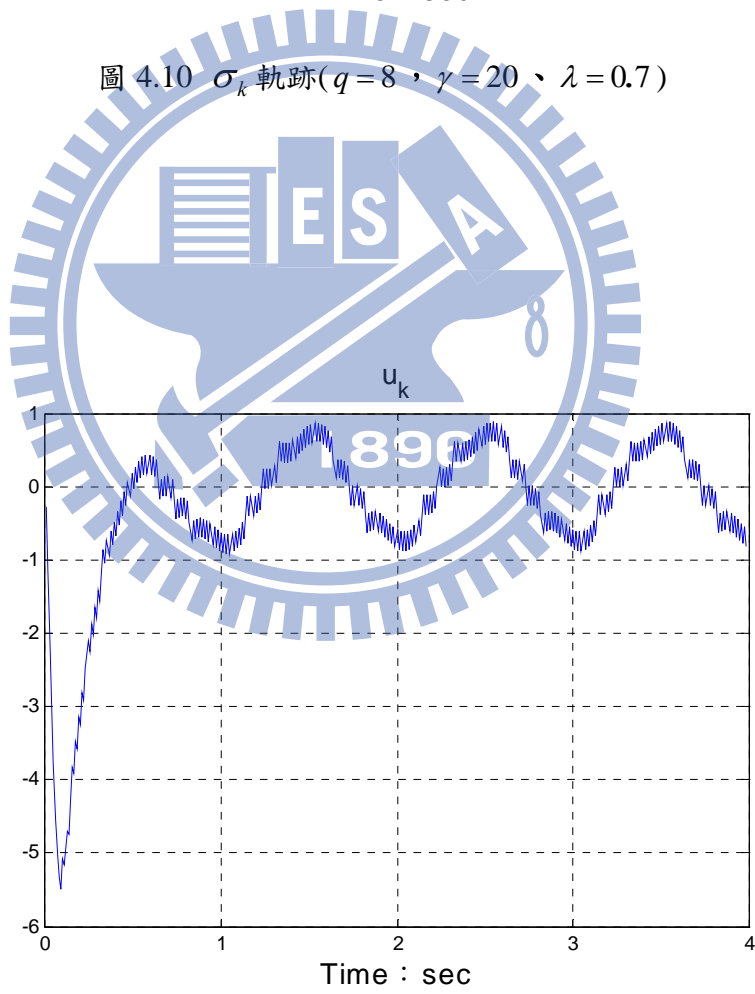


圖 4.11 控制輸入($q=8$, $\gamma=20$ 、 $\lambda=0.7$)

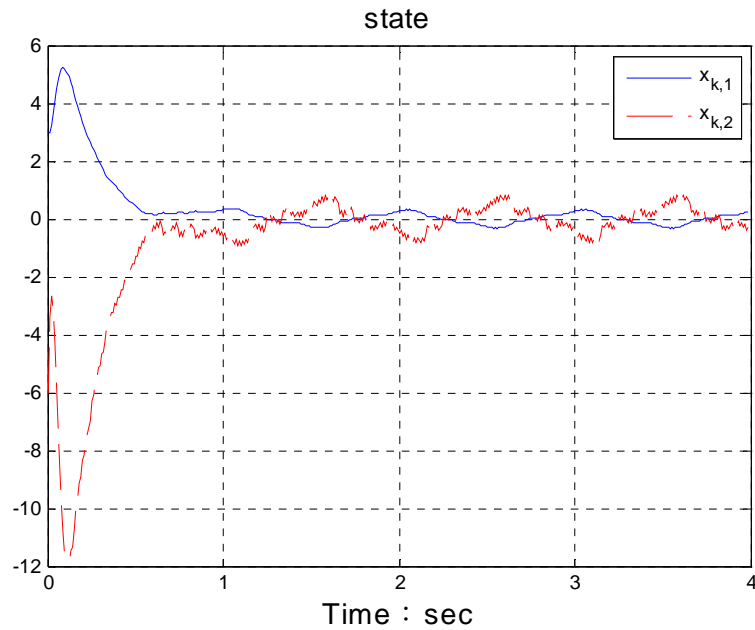
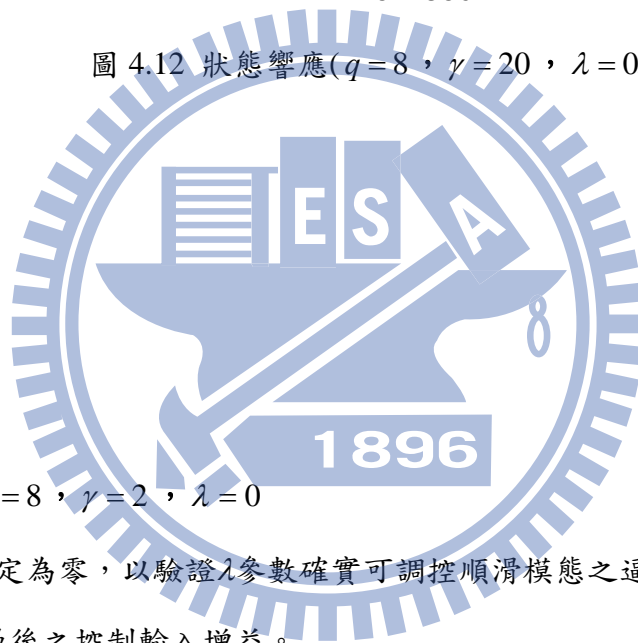


圖 4.12 狀態響應($q=8$, $\gamma=20$, $\lambda=0.7$)



【模擬 I-4】 $q=8$, $\gamma=2$, $\lambda=0$

條件：將 λ 設定為零，以驗證 λ 參數確實可調控順滑模態之逼近速率，藉此調降進入順滑層後之控制輸入增益。

結果：模擬結果如圖 4-13~圖 4-16。由圖 4-13 和圖 4-14 可知，當 λ 愈小則 σ_k 的軌跡愈近似 s_k ；隨著 λ 增加，由圖 4-14 可看出 σ_k 進入 $|\sigma_k| < \rho$ 的逼近速率明顯變慢；此外比較圖 4-15、圖 4-3 可知當系統進入順滑層後，控制輸入之差異值 $|u_k - u_{k-1}|$ 隨著 λ 的增加而降低，由此驗證 λ 參數確實可控制逼近模態之逼近速率，並且調整控制輸入增益。

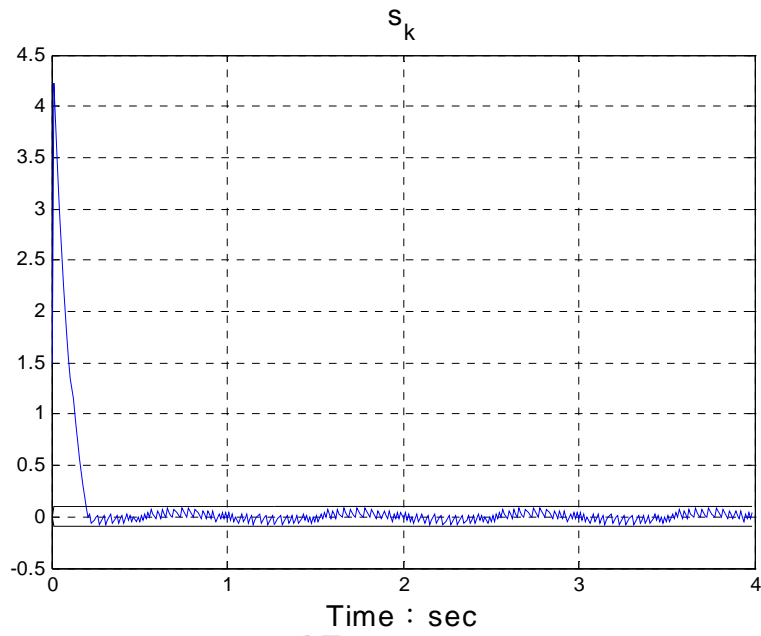


圖 4.13 順滑模態軌跡($q=8, \gamma=2, \lambda=0$)

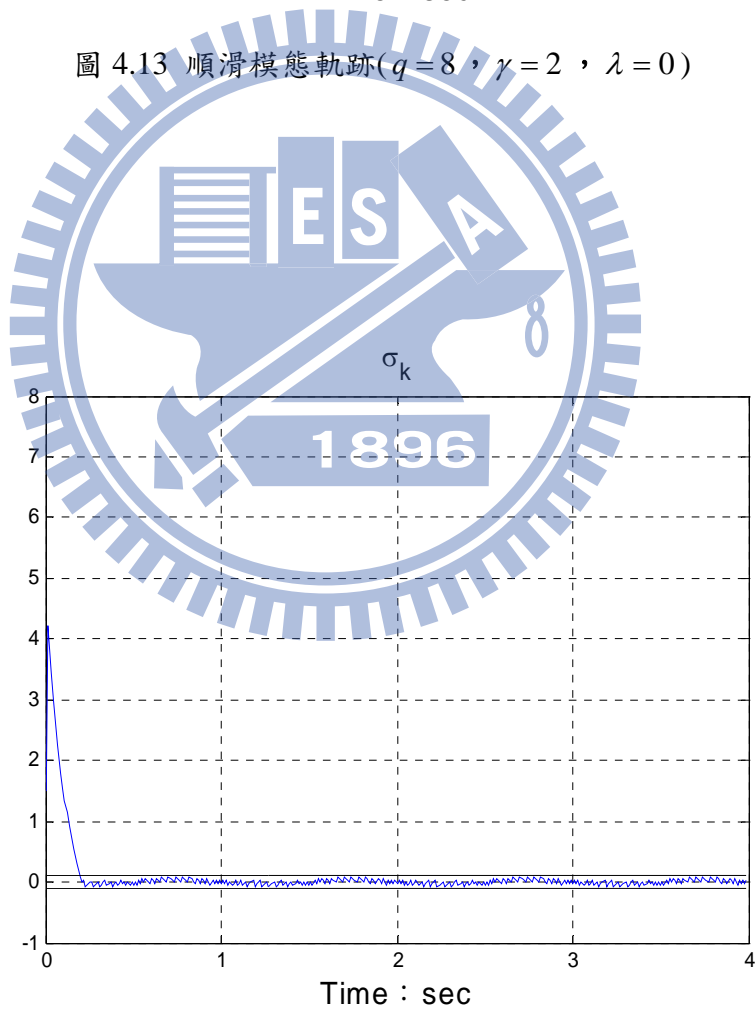


圖 4.14 σ_k 軌跡($q=8, \gamma=2, \lambda=0$)

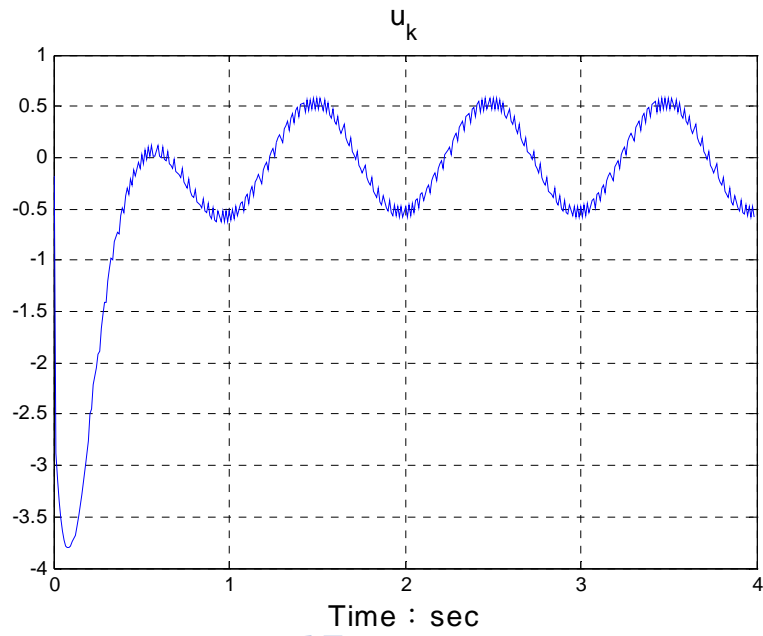


圖 4.15 控制輸入($q=8, \gamma=2, \lambda=0$)

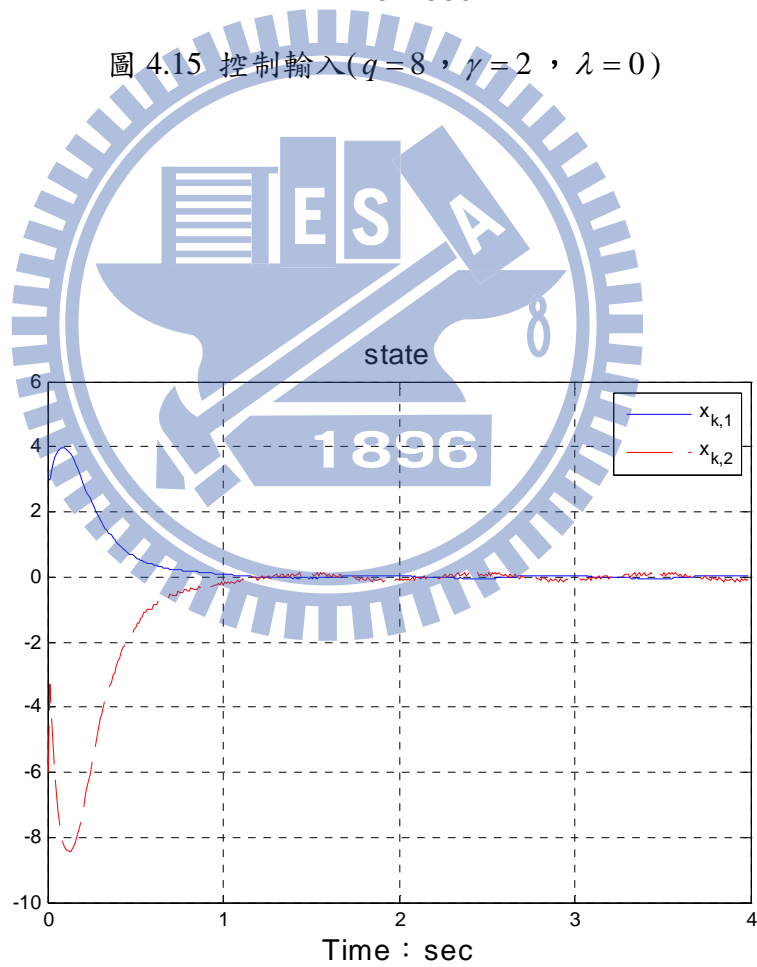


圖 4.16 狀態響應($q=8, \gamma=2, \lambda=0$)

4.2 多輸入系統

考慮以下離散型四階系統(取樣時間： $T=0.01$ 秒)

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}[\mathbf{u}_k + \mathbf{d}_k] \quad (4-9)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.9995 & 0 & -0.0100 & 0.0024 \\ -0.0073 & 0.9867 & 0.0037 & 0 \\ 0.0001 & 0.0011 & 0.9967 & 0 \\ 0 & 0.0099 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.0005 & -0.0001 \\ 0.0126 & -0.2017 \\ -0.0206 & 0.0132 \\ 0.0001 & -0.0010 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}_k = \begin{bmatrix} 0.2\cos(0.1\pi k) \\ 0.15\cos(0.1\pi k) \end{bmatrix}$$

首先選定滿足(3-60)式之轉換矩陣 T 為

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.0254 & 0.2355 \\ 0 & 1 & -0.3926 & -206.8828 \\ 0 & 0 & -51.8672 & -684.6473 \\ 0 & 0 & -5.1867 & -1068.4647 \end{bmatrix} \quad (4-10)$$

接著利用變數變換將(4-9)式轉換成

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_{k+1} &= \mathbf{TAT}^{-1}\mathbf{z}_k + \mathbf{TB}(\mathbf{u}_k + \mathbf{d}_k) \\ &= \mathbf{Mz}_k + \mathbf{TB}(\mathbf{u}_k + \mathbf{d}_k) \end{aligned} \quad (4-11)$$

其中 $\mathbf{z}_k = \mathbf{T}\mathbf{x}_k$ ， $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix}$ ，且

$$\mathbf{M}_{11} = \begin{bmatrix} 0.9995 & 0.0024 \\ -0.0073 & -1.0619 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{12} = \begin{bmatrix} 0.0002 & -0.0006 \\ -0.0261 & 0.4159 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{21} = \begin{bmatrix} -0.0052 & -6.8351 \\ -0.0005 & -10.5835 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_{22} = \begin{bmatrix} 0.9103 & 1.3809 \\ -0.1337 & 3.1349 \end{bmatrix}$$

再根據(3-65)式，將受控系統 $(\mathbf{M}_{11} - \mathbf{M}_{12}\Psi)$ 的特徵根指定為 0.95 與 0.99，可解得

$$\Psi = \begin{bmatrix} 58.4519 & -3.0951 \\ 3.6506 & -5.0317 \end{bmatrix} \quad (4-12)$$

利用(3-67)式可求得

$$C = \begin{bmatrix} 58.4519 & -3.0951 & -49.1664 & -30.5639 \\ 3.6506 & -5.0317 & -3.1183 & 26.6342 \end{bmatrix} \quad (4-13)$$

則 $\sigma_k = Cx_k$ 至此完成設計。接下來令順滑函數為

$$s_k = \sigma_k - A\sigma_{k-1} \quad (4-14)$$

其中 $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ ， $0 < \lambda_i < 1$ ， $i = 1, 2$ 。將控制法則設計為

$$u_k = u_{k-1} - CA(x_k - x_{k-1}) + A(\sigma_k - \sigma_{k-1}) + v_k \quad (4-15)$$

且

$$v_{k,i} = -q_i T s_{k,i} - (\eta_i + \gamma_i) T \operatorname{sgn}(s_{k,i}) \quad , \quad i = 1, 2 \quad (4-16)$$

其中 $0 < q_i T < 1$ ， $\gamma_i > 0$ 。由於

$$|d_{k,1} - d_{k-1,1}| \approx 6.26T < \eta_1 T \quad , \quad (4-17)$$

$$|d_{k,2} - d_{k-1,2}| \approx 4.69T < \eta_2 T \quad (4-18)$$

故設定 $\eta_1 = 6.3$ ， $\eta_2 = 4.7$ ，則

$$\varepsilon_1 = 6.3 + \gamma_1 - \left(\frac{d_{k,1} - d_{k-1,1}}{T} \right) \operatorname{sgn}(s_{k,1}) \quad , \quad (4-19)$$

$$\varepsilon_2 = 4.7 + \gamma_2 - \left(\frac{d_{k,2} - d_{k-1,2}}{T} \right) \operatorname{sgn}(s_{k,2}) \quad (4-20)$$

可得順滑層寬度為

$$\rho_1 = \frac{\varepsilon_1 T}{1 - qT} \leq (12.6 + \gamma_1) \frac{T}{1 - qT} \quad (4-21)$$

$$\rho_2 = \frac{\varepsilon_2 T}{1 - qT} \leq (9.4 + \gamma_2) \frac{T}{1 - qT} \quad (4-22)$$

以下為此節之數值模擬結果。

【Case II-1】 $q_1 = q_2 = 1$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 15$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.7$

條件：在此先選定 $q_1 = q_2 = 1$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 15$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.7$, 作為後續模擬結果之比較對象，令初始條件為 $\mathbf{x}_0 = [0.8 \ 0.7 \ 0.7 \ -0.2]^T$ 。

結果：模擬結果如圖 4.17~圖 4.20。模擬結果如圖 4.1~圖 4.4，在有外界干擾的情況下， s_k 由初始狀態朝向順滑模態逼近，並且可在有限時間內進入順滑層

$$|s_{k,1}| < \rho_1 = 0.2778 \text{ , } |s_{k,2}| < \rho_2 = 0.2465 \text{ 。$$

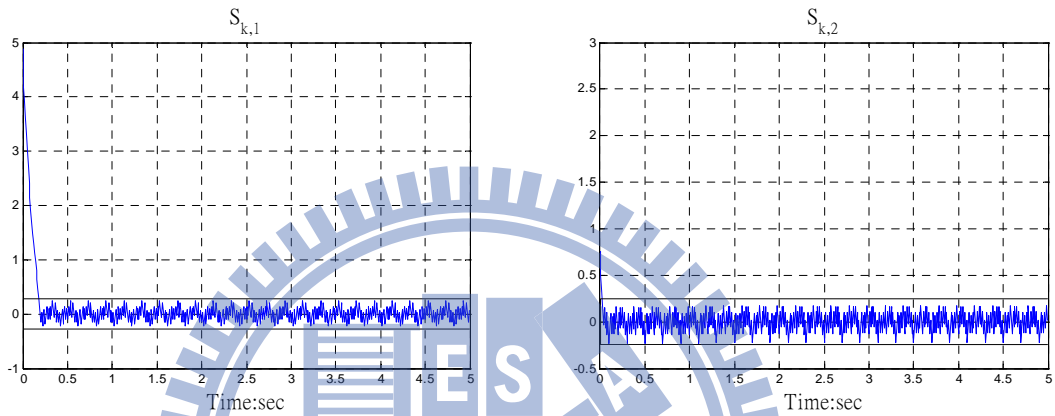


圖 4.17 順滑模態 s_k 軌跡($q_1 = q_2 = 1$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 15$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.7$)

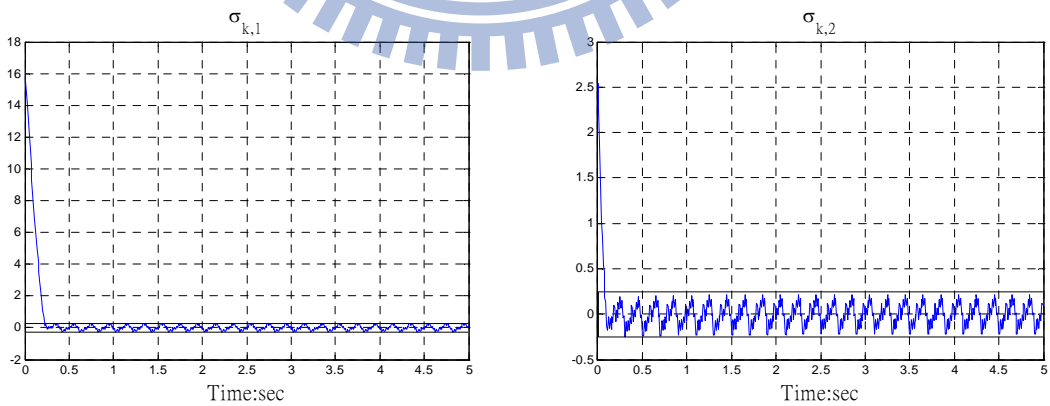


圖 4.18 σ_k 軌跡($q_1 = q_2 = 1$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 15$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.7$)

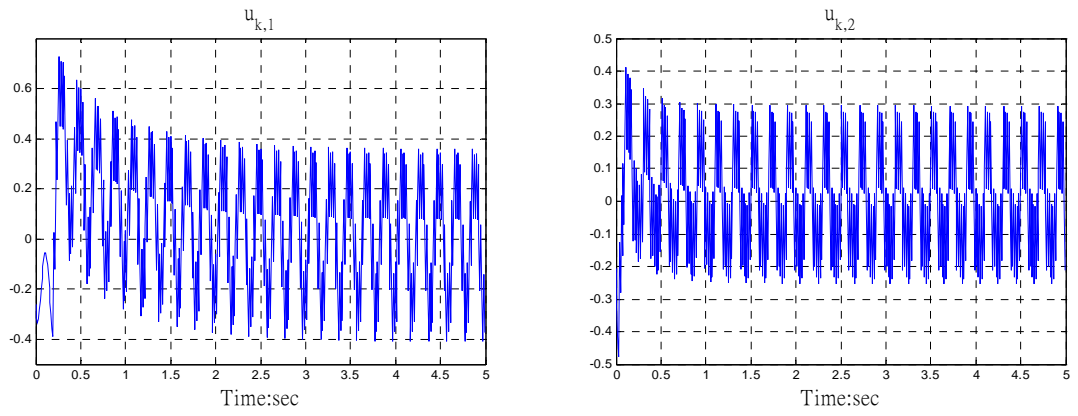


圖 4.19 控制輸入 ($q_1 = q_2 = 1$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 15$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.7$)

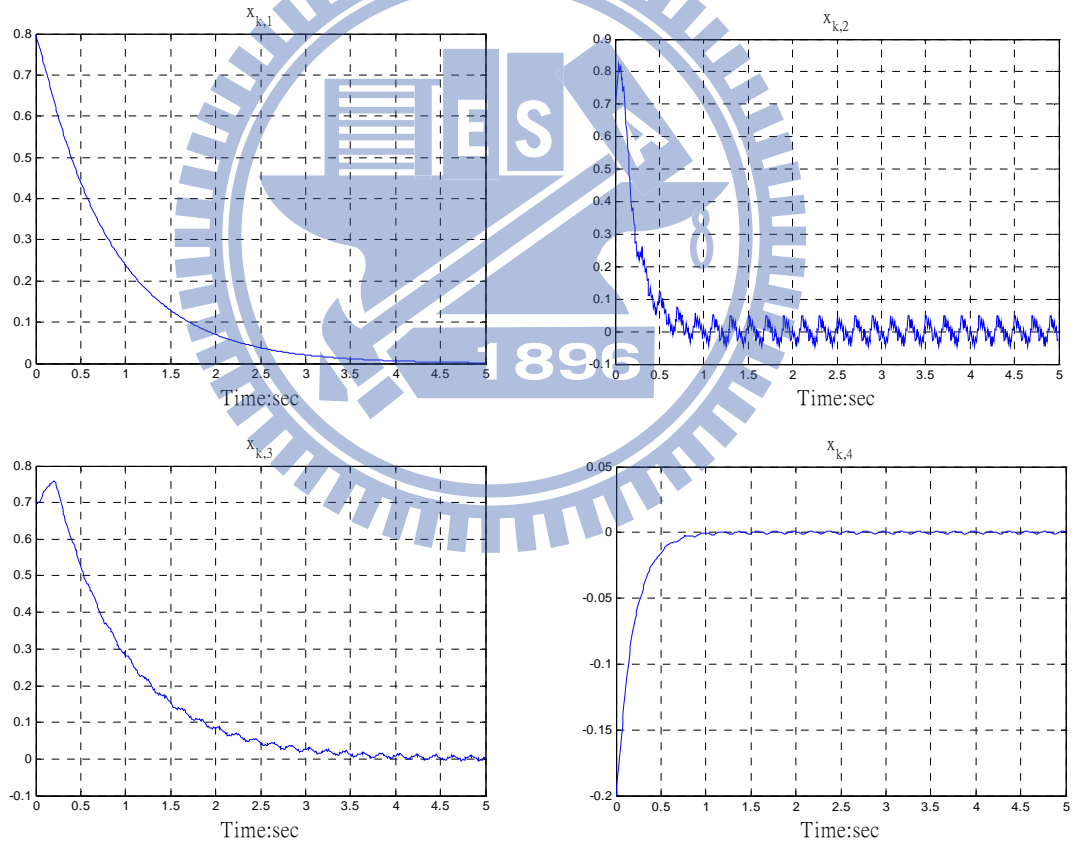


圖 4.20 狀態響應 ($q_1 = q_2 = 1$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 15$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.7$)

【Case II-2】 $q_1 = q_2 = 10$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 15$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.7$

條件：此模擬將參數 $q_1 = q_2 = 1$ 改為 $q_1 = q_2 = 10$, 主要驗證 s_k 在迫近模態之衰減速率將隨著 q 參數增加而變得較為快速。

結果：模擬結果如圖 4.21~圖 4.24。比較圖 4.17($q_1 = q_2 = 1$)以及圖 4.21 ($q_1 = q_2 = 10$) 可明顯看出當 q 由 1 調整為 10 時, s_k 於迫近模態之軌跡以較為快速之衰減速度逼近順滑層, 且順滑層之寬度因此擴大為 $|s_{k,1}| < \rho_1 = 0.3056$,

$|s_{k,2}| < \rho_2 = 0.2711$ 。

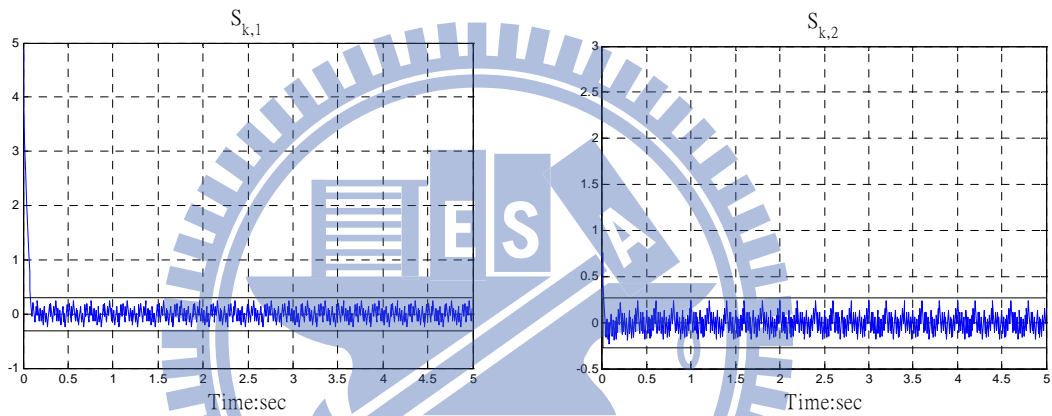


圖 4.21 順滑模態 s_k 軌跡($q_1 = q_2 = 10$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 15$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.7$)

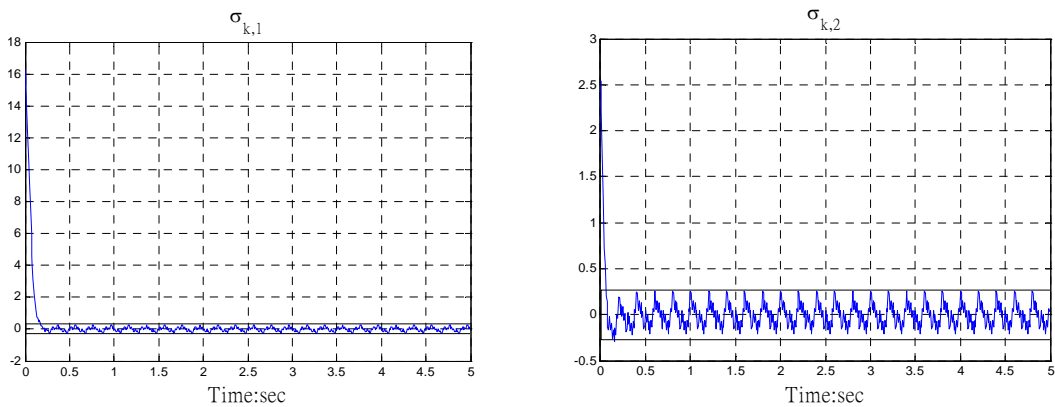


圖 4.22 σ_k 軌跡($q_1 = q_2 = 10$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 15$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.7$)

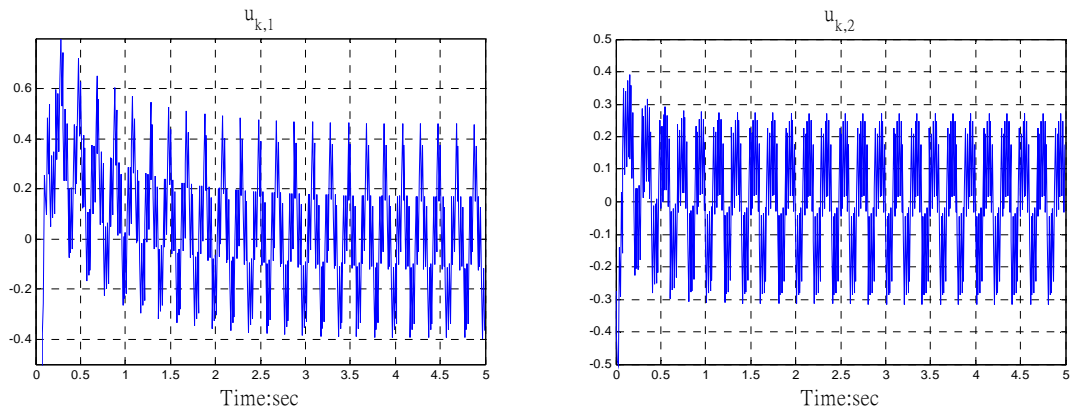


圖 4.23 控制輸入($q_1 = q_2 = 10$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 15$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.7$)

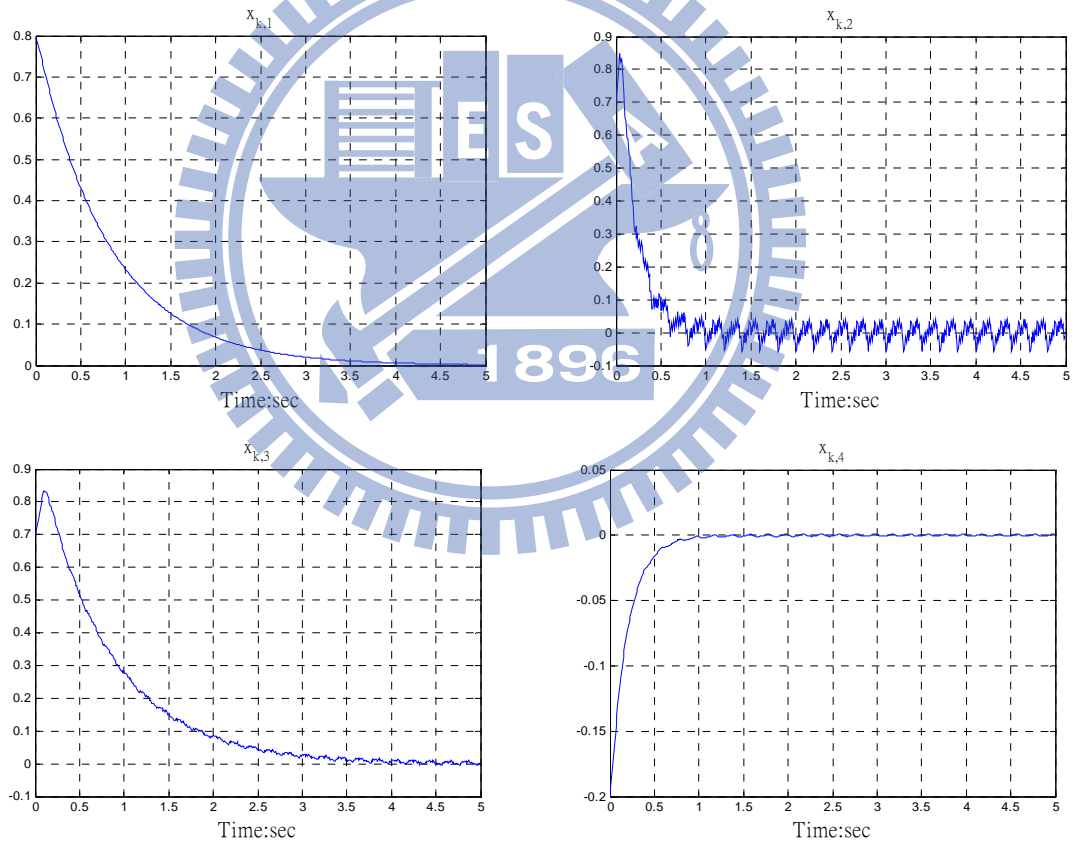


圖 4.24 狀態響應($q_1 = q_2 = 10$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 15$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.7$)

【Case II-3】 $q_1 = q_2 = 1$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 15$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

條件：此模擬令 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, 並將模擬結果與 Case II-1 對比, 主要驗證 λ 可用來調節當系統處於順滑模態時之逼近速率, 並藉此縮小控制輸入增益。

結果：模擬結果如圖 4.25~圖 4.28。圖 4.27 與圖 4.19 分別為 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 及 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.7$ 之控制輸入波形, 可明顯地看出, 若 λ_1 、 λ_2 設定為零, 則系統進入順滑模態時之 $u_{k,1}$ 與 $u_{k,2}$ 大於 λ_1 、 λ_2 設定為 0.7 之情況, 驗證本文提出之理論。

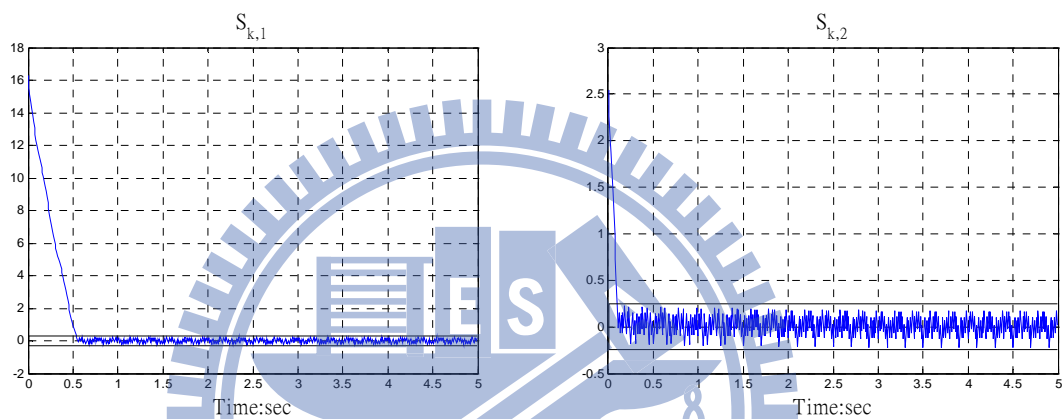


圖 4.25 順滑模態 s_k 軌跡 ($q_1 = q_2 = 1$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 15$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$)

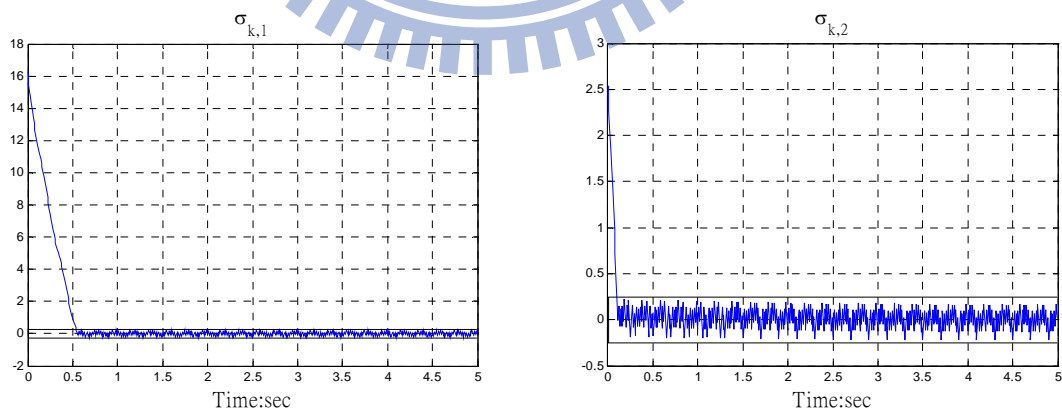


圖 4.26 σ_k 軌跡 ($q_1 = q_2 = 1$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 15$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$)

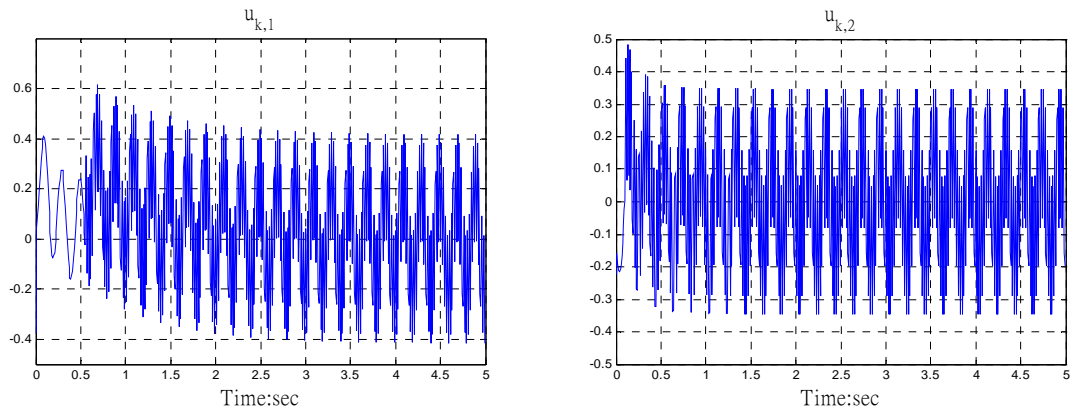


圖 4.27 控制輸入($q_1 = q_2 = 1$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 15$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$)

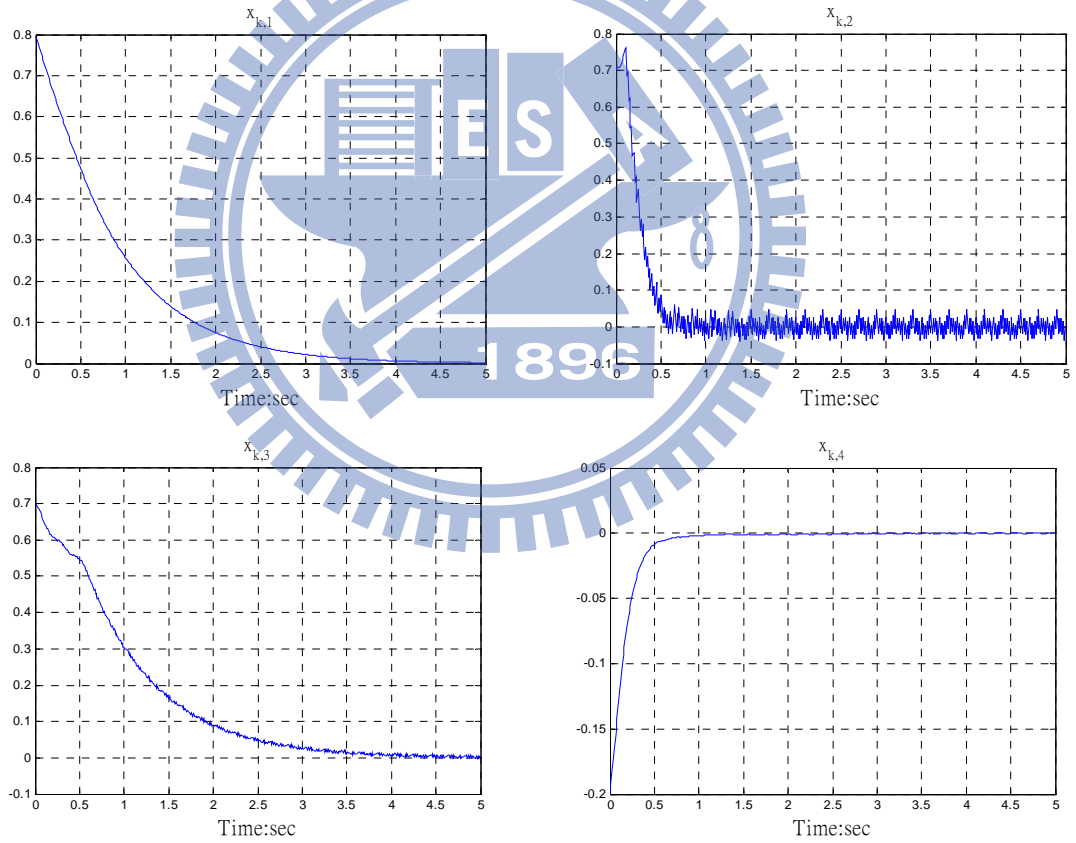


圖 4.28 狀態響應($q_1 = q_2 = 1$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 15$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$)

五、結論與未來展望

5.1 結論

本論文提出逼近速率可調之離散型順滑模態控制器，適用於具有匹配式雜訊干擾之單輸入或多輸入離散型系統，改善傳統順滑模態控制器設計時必須事先掌握雜訊上限的缺點，並藉由掌控逼近模態之系統軌跡，以避免高頻暫態響應，並減抑高增益控制輸入需求。在本文中，首先說明準順滑模態之逼近順滑條件以及逼近法，其次介紹設計離散型順滑模態控制器之兩個設計步驟，首先設計適當的超曲面，當受控系統沿此超曲面運動時，可穩定地接近控制目標，再選取順滑函數使系統軌跡在順滑層內，依設定之逼近速率朝此超曲面前進；其次設計滿足逼近及順滑條件之控制法則，使系統軌跡得以在有限時間內進入順滑層，達到控制目的。最後，為了驗證此控制器之可行性，以線性單輸入二階系統及多輸入四階系統進行數值模擬，由模擬結果可知系統確實對於匹配式外界干擾具有強健性，也可經由逼近速率的選取來調控順滑模態的系統軌跡。

本文提出順滑模態控制器之 q 與 γ 參數影響系統逼近模態之效能和順滑層之寬度，而 λ 參數影響系統進入順滑模態時之逼近速率，可調整控制輸入增益。總結第四章的數值模擬結果，以下摘述各種假定情況的數值模擬結果：

(I) 由 Case I-2 可知，選取較大之 q 值，將使得順滑函數 s_k 較快逼近到順滑模態

$s_k = 0$ ，且加大順滑層 ρ 的寬度。

(II) 由 Case I-3 可知，選取較大的 γ 值，亦同時增加 ε 值，使得順滑函數 s_k 收斂到

順滑模態附近時，以更快的收斂速度接近 $s_k = 0$ ；此外， γ 值越大則加大順滑

層寬度 ρ ，連帶使得順滑模態內受雜訊干擾而引起的切跳現象更加嚴重，並

且加大控制輸入增益，相反的，若是為了限縮順滑層寬度 ρ ，而一昧的選取

較小的 γ 值，將會發現為了消除雜訊干擾而設定的 η 將發生效應，使得 γ 值的

效果無法明顯發揮。

(III) 由 Case I-4 可知，極端的將 λ 值設定為零，可看出 σ_k 之收斂速度 s_k 一致，並且系統在進入順滑模態後控制輸入增益確實增加，亦即適當的設定 λ 值可降低控制輸入增益。

(IV) 由 Case II-2 可知，將本控制器設計延伸至多輸入系統，系統狀態及順滑函數 s_k 均可在有限時間內逼進到順滑層裡面，與單輸入系統之模擬結果相同，選取較大的 q 值，可加快 s_k 的收斂速度，但卻加大順滑層寬度，使得切跳現象更為嚴重。

(V) 由 Case II-3 可知，在多輸入系統之應用中，若將 λ 選定為零，仍可以達到控制目標，但選定適當的 λ 值，確實可降低控制輸入增益，避免高頻暫態響應。

5.2 未來展望

對於具有匹配式雜訊干擾的離散型系統，本文研製逼近速率可調之離散型順滑模態控制器確實展現良好成效，除了改善傳統順滑模態控制器設計時必須事先掌握雜訊上限的缺點，可掌控系統於逼近模態的軌跡，亦解決高增益輸入與高頻暫態響應的問題。由第三章的推導過程可知，具有匹配式雜訊之連續型系統經過離散化處理後，除了匹配式雜訊外，還產生非匹配式雜訊項，其影響系統的程度與取樣時間有極大的關係，也就是取樣時間愈快，則離散化過程產生的非匹配式雜訊愈小。本文在設計控制器過程中，已假設取樣時間相當快，而將取樣過程中產生之非匹配式雜訊影響忽略不計，但此問題仍存在於實際系統中，因此未來可將取樣時間對於離散型順滑模態系統穩定度之影響列為重要之研究議題。

六、 參考文獻

- [1] V.I.Utkin, "Variable structure systems with sliding modes," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol.22, pp.212-222, 1977.
- [2] S. Z. Sarpturk, Y. Istefanopulos, and O. Kaynak, "On the stability of discrete-time sliding mode systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol.32, no. 10, pp. 930-932, Oct. 1978.
- [3] K. Furuta, "Sliding mode control of a discrete system," *Syst. Control Lett.*, vol. 14, pp. 144-152, 1990.
- [4] W. C. Su et al. , "An $O(T^2)$ Boundary Layer in Sliding Mode for Sampled-Data Systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol.45, no. 3, pp. 482-485, Mar. 2000.
- [5] C. M. Saaj, B. Bandyopadhyay, and H. Unbehauen, "A new algorithm for discrete-time sliding-mode control using fast output sampling feedback," *IEEE Trans. Ind. Electro.*, Vol. 49, no. 3, pp. 518-523, Mar. 2002.
- [6] Xinkai Chen, Toshio Fukuda and K.David Young, "Adaptive Quasi-Sliding-Mode Tracking Control for Discrete Uncertain Input-Output Systems," *IEEE Trans. Ind. Electro.*, Vol. 48, no. 1, pp. 216-224, Feb. 2001.
- [7] Xinghuo Yu and Guanrong Chen, "Discretization Behaviors of Equivalent Control Based Sliding-Mode Control Systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol.48, no. 9, pp. 1641-1646, Sep. 2003.
- [8] S. Janardhanan and B. Bandyopadhyay, "Discrete Sliding Mode Control of Systems With Unmatched Uncertainty Using Multirate Output Feedback," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol.51, no. 6, pp. 1030-1035, Jun. 2006.
- [9] Khalid Abidi, Jian-Xin Xu and Yu Xinghuo, "On the Discrete-Time Integral Sliding-Mode Control," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol.52, no. 4, pp. 709-715, Apr. 2007.
- [10] Y. Xia, G. P. Liu, P. Shi, J. Chen, D. Rees and J. Liang, "Sliding mode control of uncertain linear discrete time systems with input delay," *IET Control Theory Appl.*, Vol. 1, no. 4, pp.1169-1175, July 2007.
- [11] W. Gao, Y. Wang, and A. Homaifa, "Discrete-Time Variable Structure Control Systems", *IEEE Trans. Ind. Electro.*, Vol. 42, Apr. 1995.
- [12] Bartoszewicz A., "Discrete-time quasi-sliding-mode control strategies," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, Vol.45, no. 4, pp. 633-637, Aug. 2007.
- [13] J. Y. Hung, W. Gao and J. C. Hung, "Variable structure control: a survey," *IEEE Trans. Industrial Electronic*, Vol. 40, No. 1, pp. 2-22, 1993.
- [14] W. B. Gao and J. C. Hung, "Variable structure Control of Nonlinear Systems: A New Approach," *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, Vol. 40, Feb. 1993.
- [15] Xinghuo Yu and Guanrong Chen, "Discretization Behaviors of Equivalent Control Based Sliding-Mode Control Systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol.48, no. 9, pp. 1641-1646, Sep. 2003.

- [16] Gutman, S. ,”Uncertain Dynamical Systems—A Lyapunov Min-Max Approach”, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol.AC-24, pp.437-443, JUN. 1979.
- [17] Y. Xia et al., “Sliding mode control of uncertain linear discretetime systems with input delay”, IET Control Theory Appl., Vol. 1, no. 4, pp.1169-1175, July 2007.
- [18] K. Abidi et al., “On the Discrete-Time Integral Sliding-Mode Control”, IEEE Trans. on Automatic Control, VOL. 52, no. 4, pp.709-715, Apr. 2007.
- [19] J. L. Chang and Y. P. Chen, 1998, Mar., “Force Control of A Single-Link Flexible Arm Using Sliding-Mode Theory,” Journal of Vibration and Control, vol.4, pp.187-200. (SCI: ENGINEERING, MECHANICAL) 2/1 0.38 66/106
- [20] Y. P. Chen and S. C. Jen, 1998, "Rank-Based Varying Population Size Genetic Algorithm with Sizing Strategy," Journal of Control Systems and Technology, vol.6, no.4, pp.243-251. (EI)
- [21] Y. P. Chen and J. L. Chang, 1998, "On Discrete Pseudo-Sliding Control," Journal of Control Systems and Technology, vol.6, no.4, pp.253-257. (EI)
- [22] Y. P. Chen, J. L. Chang and S. R. Chu, 1999, Aug., "PC-Based Sliding-Mode Control Applied to Parallel-Type Double Inverted Pendulum System," Mechatronics, vol. 9, no. 5, pp.553-564. (SCI: AUTOMATION & CONTROL SYSTEMS) 26/51 0.745 (2/1)
- [23] Y. P. Chen, J. L. Chang, and K. M. Lai, 1999, "Stability Analysis and Bounded Sliding-Mode Control of A Class of Multi-Input Bilinear Systems," The Japan Society of Mechanical Engineers, Series C, vol.42, no.4, pp.865-870. (SCI: ENGINEERING, MANUFACTURING) 31/36
- [24] Y. P. Chen and Z. Z. Lu, 1999, June, "Force/Position Sliding-Mode Control of Robot Manipulator for Non-Rigid Environment," Asian Journal of Control, Vol.1, No.2, pp.122-127. (EI)
- [25] Y. P. Chen and J. L. Chang, 2000, Mar., "Integral Sliding control for Disturbance Matched to Part of The Inputs," The Japan Society of Mechanical Engineers, Series C, vol.43, no.1, pp.55-59. (SCI: ENGINEERING, MANUFACTURING) 31/36
- [26] J. L. Chang and Y. P. Chen, 2000, "Bounded Robust Controller Design for Mismatched State-Dependent Uncertainty," Asian Journal of Control, Vol.2, No.3, pp.198-203. (EI)
- [27] Y. P. Chen and J. L. Chang, 2000, Apr., "A New Method for Constructing Sliding Surfaces of Linear Time-Invariant Systems," Journal of Systems Science, vol.31, NO.4, pp.417-420. (SCI: AUTOMATION & CONTROL SYSTEMS) 2/0 0.343 43/51
- [28] Y. P. Chen, J. L. Chang, and K. M. Lai, 2000, Nov., "Stability Analysis and Bang-Bang Sliding Control of A Class of Single-Input Bilinear Systems," IEEE Trans. on Automatic Control, vol.45, no.11, pp.2150-2154. (SCI: AUTOMATION & CONTROL SYSTEMS) 2/1 2.772 1/51
- [29] Y. P. Chen and H. T. Hsu, 2001, Jul., "Regulation and Vibration Control of an FEM-Based Single-Link Flexible Arm Using Sliding-Mode Theory," Journal of

- Vibration and Control, vol.7, No.5, pp.741-752. (SCI: ENGINEERING, MECHANICAL) 4/0 0.380 66/106
- [30] Y. P. Chen, J. L. Chang, and K. T. Li, 2001, Sep., "Output Feedback Sliding-Mode Controller Design for Minimum Phase Linear Systems," The Japan Society of Mechanical Engineers, Series C, vol.44, no.3, pp.682-685. (SCI: ENGINEERING, MANUFACTURING) 31/36
- [31] Jeang-Lin Chang, Keh-Tsong Li and Yon-Ping Chen, 2002, "Sliding Control with Genetic Algorithm for Mismatched Disturbance," Asian Journal of Control, vol.4, no.2, pp.186-192. (EI)
- [32] Keh-Tsong Li and Yon-Ping Chen, 2004, "Sliding-Mode Controller Design with Grey Prediction for Matched Disturbance," International Journal of Fuzzy Systems, vol. 6, no. 1, pp.1-8. (EI)
- [33] Keh-Tsong Li and Yon-Ping Chen, "Predictor Design of A Novel Grey Model PGM21 Using Pseudo Second-Order Information," JSME, Series C: Mechanical Systems, Machine Elements and Manufacturing, vol. 49, no.2, pp.395-400, 2006. (SCI: ENGINEERING, MANUFACTURING) (NSC 91-E-FA06-4-4) 31/36
- [34] Jian-Feng Tsai, Yon-Ping Chen, 2006, Sep., "Design and Performance Analysis of An Axial-Flux Disk-Type Switched Reluctance Motor for Hybrid Scooters," JSME, Series C, vol.49 No.3, pp. 882-889. (SCI: ENGINEERING, MANUFACTURING) (NSC 94-2213-E-009-047-) 31/36
- [35] Jian-Feng Tsai, Yon-Ping Chen, 2007, Mar., "Sliding Mode Control and Stability Analysis of Buck DC-DC Converter," International Journal of Electronics, vol. 94 no. 3, pp. 209-222. (SCI: ENGINEERING, ELECTRICAL & ELECTRONIC) (NSC 94-2213-E-009-047-) 0/0 141/206 0.459
- [36] H. C. Ting, J. L. Chang, C. H. Yeh, and Y. P. Chen, 2007, Sep., "Discrete Time Sliding-Mode Control Design with Grey Predictor," International Journal of Fuzzy
- [37] 陳永平、張浚林，"可變結構控制設計(修訂版)"，全華，2002。