

國立交通大學

電機學院 電信學程

碩士論文



研究生：詹榮吉

指導教授：吳文榕 教授

中華民國一百年一月

重返大氣層之彈道飛彈追蹤與彈道係數估計

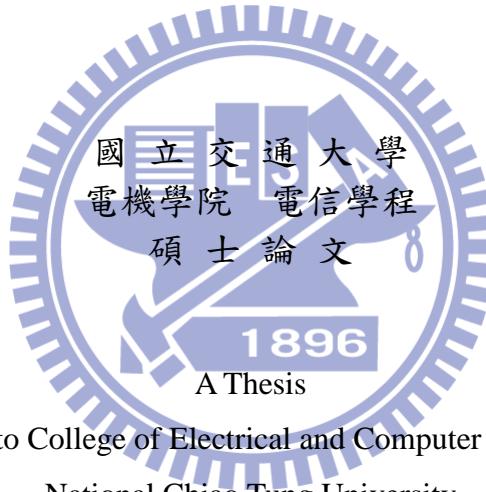
Re-entry Ballistic Missile Tracking and Ballistic Coefficient Estimation

研究 生：詹榮吉

Student : Jung-Chi Chan

指導 教授：吳文榕

Advisor : Wen-Rong Wu



Submitted to College of Electrical and Computer Engineering

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master of Science

in

Communication Engineering

January 2011

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一百年一月

重返大氣層之彈道飛彈追蹤與彈道係數估計

研究生：詹榮吉

指導教授：吳文榕 博士

國立交通大學 電機學院 電信學程碩士班

摘要

眾所皆知，重返大氣層之彈道飛彈追蹤是一個非常複雜的問題。現有的方法通常是使用擴展式卡爾曼濾波器或者 unscented 卡爾曼濾波器來處理此問題。在這些方法中，目標之彈道係數都被假設為常數，且已經事先得知。不過，在實際上彈道係數是跟目標之物理特性有關而且是速度的一個函數，通常我們是無法事先得知。在本篇論文裡，我們提出一種方法來解決這個問題，我們假設目標的彈道係數是目標速度的一個線性函數，而將其未知參數納入目標狀態方程式，因此擴展式卡爾曼濾波器或者 unscented 卡爾曼濾波器能同時估計彈道係數和目標狀態。模擬結果顯示我們所提出的演算法能適當地估計彈道係數，並且達到令人滿意的追蹤性能。

Re-entry Ballistic Missile Tracking and Ballistic Coefficient Estimation

Student: Jung-Chi Chan

Advisor: Dr. Wen-Rong Wu

Degree Program of Electrical and Computer Engineering
National Chiao Tung University

ABSTRACT

It is known that the re-entry ballistic missile tracking is a highly complex problem. Existing approaches often use extended Kalman filter (EKF) or the unscented Kalman filter (UKF) to tackle the problem. In these methods, the ballistic coefficient of the tracked target is assumed to be a constant and its value is known. However, in reality the ballistic coefficient is related to target's physical properties and is a function of the target speed. In general, it cannot be known in advance. In this thesis, we propose a method to overcome the problem. We assume that the ballistic coefficient of the target is a linear function of the target speed, and include the unknown parameters into the state equation. Then, the EKF or the UKF can simultaneously estimate the ballistic coefficient and the target states. Simulations show that the proposed algorithm can properly estimate the ballistic coefficient and achieve satisfactory tracking performance.

誌謝

在交大研究所這幾年的求學過程是我人生中最最重要的一段學習旅程。就這樣秉持著不懂不慚愧，不學才內疚的學習態度，我，終於能畢業了。

首先得由衷的感謝 吳文榕指導教授不僅僅在課業上指導和學識上的啟迪，更在生活上給予許多的關心和幫助。指導教授學識淵博，處處為學生著想，堪稱為人師表之最佳典範。

再來感謝交通大學 林清安教授、陳紹基教授及中央大學 張大中教授擔任學生論文的口試委員，在百忙之中仍抽空審業學生的論文，並提出相當多寶貴意見，使學生的論文能夠更臻完善。

另外得感謝實驗室許兆元學長，在學業上給予莫大的幫助。最後更要感謝我的家人，尤其是妻子周秀賢全力的相挺與支持，兒女們不時貼心的鼓勵，讓我也能絲毫無後顧之憂的勇往直前順利完成學業。

真的非常謝謝你們陪我人生中最精采的一段旅程！



目錄

摘要	i
ABSTRACT	ii
誌謝	iii
目錄	iv
表目錄	vi
圖目錄	vi
第一章 簡介	1
第二章 彈道飛彈系統模型	3
2.1 再入段狀態方程式模型	3
2.1.1 彈道狀態方程式	3
2.1.2 飛彈飛行時所受的各種作用力	6
2.1.3 空氣密度	7
2.1.4 彈道係數	8
2.2 雷達量測方程模型	9
2.2.1 相列雷達追蹤飛彈原理	9
2.2.2 雷達量測方程式	10
第三章 卡爾曼濾波器	12
3.1 Recursive Bayesian 估計	12
3.2 標準型卡爾曼濾波器	13
3.2.1 標準型卡爾曼濾波器原理推導	13
3.2.2 標準型卡爾曼濾波器演算法流程	16
3.3 擴展式卡爾曼濾波器	17
3.3.1 擴展式卡爾曼濾波器原理推導	18
3.3.2 擴展式卡爾曼濾波器演算法流程	20
3.4 Unscented 卡爾曼濾波器	21
3.4.1 UT 轉換	22
3.4.2 Unscented 卡爾曼濾波演算法原理及流程	22
第四章 所提之目標追蹤演算法	25
4.1 彈道狀態方程式	25
4.2 雷達量測方程式	27
第五章 模擬結果	35
5.1 已知彈道係數下 EKF 對二維彈道追蹤	36
5.2 已知彈道係數下 UKF 對二維彈道追蹤	39

5.3	未知彈道係數下 EKF 對三維彈道追蹤	41
5.4	未知彈道係數下 UKF 對三維彈道追蹤	47
5.5	彈道係數的探討	52
第六章	結論與未來工作	55
參考文獻	56	
自 傳	58	



表目錄

表 1 模擬二維彈道相關系統參數	36
表 2 模擬三維彈道相關系統參數	42
表 3 EKF 估測 TBM A 的位置和速度之均方根誤差	45
表 4 EKF 估測 TBM B 的位置和速度之均方根誤差	47
表 5 UKF 估測 TBM A 的位置和速度之均方根誤差	50
表 6 UKF 估測 TBM B 的位置和速度之均方根誤差	52
表 7 TBM A 彈道係數之均方根誤差值	54

圖目錄

圖 1 目標物參考座標系統	4
圖 2 作用在飛彈上的力	7
圖 3 高度與空氣密度關係	8
圖 4 KF 動作流程圖	17
圖 5 EKF 動作流程圖	21
圖 6 UT 轉換概念圖	22
圖 7 雷達所觀測到目標物的座標	25
圖 8 TBM 軌跡	36
圖 9 TBM 的速度和加速度	37
圖 10 目標和雷達量測及 EKF(估測及預測)彈道追蹤示意圖	37
圖 11 EKF 估計彈道之誤差均值	38
圖 12 EKF 估計彈道之誤差標準差	38
圖 13 EKF 估計彈道之均方根誤差	39
圖 14 目標和雷達量測及 UKF(估測及預測)彈道追蹤示意圖	39
圖 15 UKF 估計彈道之誤差均值	40
圖 16 UKF 估計彈道之誤差標準差	40
圖 17 UKF 估計彈道之均方根誤差	40
圖 18 TBM A 和雷達量測及 EKF(未知彈道係數)估測和預估彈道追蹤圖	42
圖 19 TBM A 速度	43
圖 20 EKF 估測(已知和未知彈道係數)彈道之誤差均值	43
圖 21 EKF 估測(已知和未知彈道係數)彈道之誤差標準差	44

圖 22 EKF 估測(已知和未知彈道係數)彈道之均方根誤差	44
圖 23 TBM B 和雷達量測及 EKF(未知彈道係數)估測和預估彈道追蹤圖	45
圖 24 EKF 估測(已知和未知彈道係數)彈道之誤差均值	46
圖 25 EKF 估測(已知和未知彈道係數)彈道之誤差標準差	46
圖 26 EKF 估測(已知和未知彈道係數)彈道之均方根誤差	47
圖 27 TBM A 和雷達量測及 UKF(未知彈道係數)估測和預估彈道追蹤圖	48
圖 28 UKF 估測(已知和未知彈道係數)彈道之誤差均值	48
圖 29 UKF 估測(已知和未知彈道係數)彈道之誤差標準差	49
圖 30 UKF 估測(已知和未知彈道係數)彈道之均方根誤差	49
圖 31 TBM B 和雷達量測及 UKF(未知彈道係數)估測和預估彈道追蹤圖	50
圖 32 UKF 估測(已知和未知彈道係數)彈道之誤差均值	50
圖 33 UKF 估測(已知和未知彈道係數)彈道之誤差標準差	51
圖 34 UKF 估測(已知和未知彈道係數)彈道之均方根誤差	51
圖 35 EKF 估測 TBM A 的彈道係數之 a 值均方根誤差	52
圖 36 EKF 估測 TBM A 的彈道係數之 b 值均方根誤差	52
圖 37 UKF 估測 TBM A 的彈道係數之 a 值均方根誤差	53
圖 38 UKF 估測 TBM A 的彈道係數之 b 值均方根誤差	53
圖 39 目標彈道係數和 EKF 及 UKF 所估出的彈道係數	54



第一章 簡介

彈道飛彈是目前戰爭中最先進的遠距型攻擊性武器。彈道飛彈具有射程遠、速度快、精度高、突防能力強等優點，其主要是攻擊重要軍事目標和機場跑道等。雖然彈道飛彈不一定能決定一場戰爭的最終勝敗，但其造成的設施破壞，心理威脅，以及士氣的影響卻可以有效的給予對方重大的打擊。今年(2010)初，美國國防部公布年度中國軍力報告，此報告指出一到 2009 年底，大陸對台佈署一千零五十枚至一千一百五十枚短程戰術性彈道飛彈 (Tactical Ballistic Missile, TBM)，因此如何能對 TBM 有效的攔截是我國防上很重要的問題。

雷達是 TBM 防禦系統中不可或缺的角色，目前最先進的雷達-相列雷達，雖然可量測飛彈的相對位置、速度等相關信息，但接收到的訊號常常夾雜著許多雜訊。所以如何濾除雜訊的干擾，然後判別目標物真正的位置，便是一重要的課題，在文獻上將執行此動作的單元稱之為追蹤濾波器。追蹤濾波器的可分成兩類，一類是最小誤差(minimum error)濾波器，此類屬於傳統的追蹤濾波器，以 $\alpha-\beta$ 濾波器為代表。另一類則是最小誤差變異數(minimum error covariance)，以卡爾曼濾波器(Kalman Filter, KF)為代表。

TBM 的有一項是無法從雷達量測得知的參數—彈道係數。「彈道係數」是決定飛彈加速度運動特性的最主要指標，彈道係數主要是由飛彈的質量、形狀、迎風之截面積所決定，而這些都是我們無法事先的得知，要準確的估測彈道係數並不是一件容易的事，然而彈道係數卻是追蹤濾波器所需要的參數。由於飛彈的運動方程式並非線性，KF 並不能直接用於目標追蹤上，Farinac 等人[1]針對再入段(再入段是指 TBM 重返大氣層開始起算至落地點終了)彈道目標追蹤介紹了四種非線性濾波器：Extended Kalman Filter (EKF)，Covariance Analysis Describing Function Technique (CADET)，Unscented Kalman Filter (UKF)，Particle Filter (PF)，並對其進行估計性能和模擬計算量比較。模擬結果表明四種濾波器的估計都是基本無偏(unbiased)且誤差標準差(errors standard deviation)都能接近 Cramer -Rao lower bounds (CRLB)，但 EKF 計算量遠小於其他濾波器，因此總體效能 EKF 最優，然而在此文獻中彈道係數是假設已知且為一個固定常數。在文獻[14]中 Bruno 和 Pavalov 利用一種分佈輔助的 PF 演算法來估測彈道係數，但使用 PF 粒子點數需高達 6000 點，性能才能接近 CRLB，其計算量很大在工程上不易實現，另一缺點是彈道係數也是假設為一個定值。然而由於飛彈在飛行的過程中，飛彈質量、迎風截面積，空氣密度等參數值都會一直改變，彈道係數受這些參數的影響也會一直改變，彈道係數並非是一個常數。

本論文旨在研究 TBM 之追蹤以及彈道係數之估計。如前所述彈道係數並非是一個常數，其實際的變動函數跟 TBM 本身的特性與速度有關，而 EKF 和 UKF 又需使用彈道係數，為了解決此問題我們提出了一個新的作法，我們將彈道係數函數併入狀態方程式一起由 EKF 和 UKF 估計，為簡單起見我們假設彈道係數的變動是速度的線性函數，如此一來我們只需兩個參數就可描述及估計彈道係數。本論文安排共分六章，每一章內容說明如下：首先，第一章為緒論，說明本研究之動機及目的，並介紹相關文獻回顧。第二章是介紹 TBM 系統模型，首先是飛彈再入段狀態方程模型，並列舉影響此模型的相關參數。再來

則是雷達量測模型，內容有飛彈追蹤基本簡介，並詳盡說明雷達測量方程式的由來及座標轉換和相對應的共變異數矩陣(Covariance Matrix)的推導。第三章是介紹各種 KF，有標準性的 KF、非線性的 EKF 和 UKF，每一種濾波器都說明其基本原理及動作流程。第四章則是所提之目標追蹤演算，如前所述，我們假設彈道係數的變動是速度的線性函數，並進一步將此線性函數之參數視為狀態讓 KF 一併的估計。第五章是模擬的結果，我們以硬體較易實現的 EKF 和 UKF 來進行模擬，首先模擬在彈道係數為已知且為固定值時的效能，結果發現兩者濾波器都有很好的追蹤效果。再來假設在實際的彈道下，在未知彈道係數下進行彈道估測，並和已知彈道係數下互相比較濾波性能，最後針對彈道係數對彈道的影響做一個討論。第六章為結論與未來工作。



第二章 彈道飛彈系統模型

一般而言 TBM 的飛行可分成三個階段：

1. 動力飛行(Power flight)階段：由飛彈發射點到燃料燃燒完畢或推力終了為止，也就是說飛彈發射後到主發動機停止工作的這一段軌道，在此一階段通常包括推力及導引控制飛行，動力學特性複雜，且質量一直在改變，因此很難建立精確的動力學模型。
2. 自由飛行(free-flight)階段：通常是指在大氣層外之真空飛行，飛彈處於稀薄空氣中，運動特性相當簡單，彈道一般是橢圓軌道。
3. 再入(re-entry)階段：為飛彈重返大氣層起至落地點為止，此階段空氣阻力和重力成為影響飛彈運動特性的主要因素，而飛行距離遠小於地球半徑，可以看成是一個範圍很小的區域運動。

本論文的重點在於 TBM 的攔截，因此只需考慮再入階段 TBM 之系統模型。

2.1 再入段狀態方程式模型

KF 為目標狀態估計一種常用的方法，要使用此方法需先建立數學模型來描述有關於目標移動有關物理現象，而透過模型之事先信息，KF 可以有效提高估計精度。狀態向量因要求某一時刻的狀態向量表示為前一時刻狀態向量的函數，所以具有顯示出目標移動的相關數據的優點，而模型的精確與否將會直接影響目標追蹤性能。目標模型通常有兩種描述：一是對目標運動的描述，也就是目標的動力學方程式(也稱為狀態方程)；另一種是對目標量測值的描述，也就是目標的量測方程式。

2.1.1 彈道狀態方程式

為方便說明，我們先考慮二維的環境(如圖一所示)。TBM 的運動軌跡離散時間的狀態方程式(state equation)為非線性，其表示法如下[1]：

$$\mathbf{s}(k+1) = \Phi \mathbf{s}(k) + \mathbf{G} f(\mathbf{s}(k)) + \mathbf{G}[0, -g]^T + \mathbf{w}(k) \quad (2-1-1)$$

$\mathbf{s}(k)$ 為在時間為 t_k 的狀態向量， $\mathbf{s}(k) = [x_k, \dot{x}_k, y_k, \dot{y}_k]^T$ ，令 x_k 及 y_k 分別為目標物在時間 t_k 的橫座標及縱座標所在的位置， \dot{x}_k 及 \dot{y}_k 則是目標物在時間為 t_k 的橫座標速度及縱座標速度。 g 為重力加速度，其值為 $9.8(\text{m/s}^2)$ 。矩陣 Φ 及 \mathbf{G} 分別定義如下：

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-1-2)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} T^2/2 & 0 \\ T & 0 \\ 0 & T^2/2 \\ 0 & T \end{bmatrix} \quad (2-1-3)$$

在(2-1-2)式中， T 為雷達量測目標的時間間距。而 $f(s(k))$ 為大氣層的空氣阻力對目標物狀態產生的阻力，空氣阻力方向與目標物重返大氣層的速度方向相反，此空氣阻力對目標物所造成的阻力加速度強度等於 $f(s(k)) = 0.5 \times (g / \beta) \times \rho(y_k) \times v^2$ 。
 β 為彈道係數， v 為飛彈速度， $\rho(y_k)$ 為空氣密度，其值為： $\rho(y_k) = \rho_0 e^{-\varepsilon y_k}$ 。

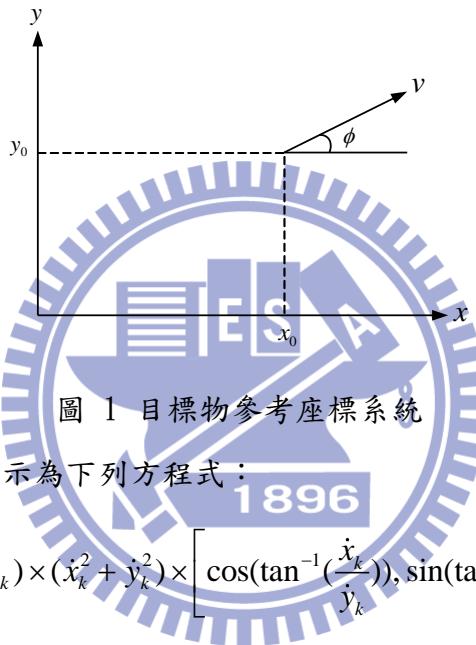


圖 1 目標物參考座標系統

非線性函數 $f(s(k))$ 則可表示為下列方程式：

$$f(s(k)) = -0.5 \frac{g}{\beta} \times \rho(y_k) \times (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2) \times \left[\cos(\tan^{-1}(\frac{\dot{x}_k}{\dot{y}_k})), \sin(\tan^{-1}(\frac{\dot{x}_k}{\dot{y}_k})) \right]^T \quad (2-1-4)$$

根據下列等式

$$\cos(\tan^{-1}(\frac{\dot{x}_k}{\dot{y}_k})) = \frac{\dot{x}_k}{\sqrt{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2}} \quad (2-1-5)$$

$$\sin(\tan^{-1}(\frac{\dot{x}_k}{\dot{y}_k})) = \frac{\dot{y}_k}{\sqrt{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2}} \quad (2-1-6)$$

我們進一步將 $f(s(k))$ 表示為：

$$f(s(k)) = -0.5 \frac{g}{\beta} \times \rho(y_k) \times \sqrt{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2} \times [\dot{x}_k, \dot{y}_k]^T \quad (2-1-7)$$

而狀態方程式的雜訊項 $\mathbf{w}(k)$ 是用來模擬此狀態方程式模型與實際狀態的誤差，令

$\mathbf{w}(k) = [w_x(k), w_{\dot{x}}(k), w_y(k), w_{\dot{y}}(k)]^T$ ，且每一個維度的雜訊模型相同且不相關，亦即 $[w_x(k), w_{\dot{x}}(k)]^T$ 和 $[w_y(k), w_{\dot{y}}(k)]^T$ 互不相關。雜訊項的每一元素可以從其相關的連續時間訊號積分而得，以雜訊 $[w_x(k), w_{\dot{x}}(k)]^T$ 為例，我們可以有下面的結果[2]：

$$w_x(k) = \int_0^T (T - \tau) \tilde{w}(kT + \tau) d\tau \quad (2-1- 8)$$

$$w_{\dot{x}}(k) = \int_0^T \tilde{w}(kT + \tau) d\tau \quad (2-1- 9)$$

此處， $\tilde{w}(k)$ 的統計特性為： $E\{\tilde{w}(k)\} = 0$ 且 $E\{\tilde{w}(j)\tilde{w}(k)\} = q_1 \times \delta(j - k)$ 。令 $\mathbf{R}_w = E\{[w_x(k), w_{\dot{x}}(k)]^T [w_x(k), w_{\dot{x}}(k)]\}$ 為 $[w_x(k), w_{\dot{x}}(k)]^T$ 的共變異矩陣(covariance matrix)，則 \mathbf{R}_w 的元素可以表示如下：

$$\begin{aligned} E\{w_x(k)w_x(k)\} &= \int_0^T \int_0^T (T - \tau)(T - \lambda) E[\tilde{w}(kT + \tau)\tilde{w}(kT + \lambda)] d\lambda d\tau \\ &= \int_0^T q_1 (T - \tau)^2 d\tau \\ &= -\frac{(T - \tau)^3}{3} \Big|_0^T \\ &= q_1 \frac{T^3}{3} \end{aligned} \quad (2-1- 10)$$

$$\begin{aligned} E\{w_{\dot{x}}(k)w_{\dot{x}}(k)\} &= \int_0^T \int_0^T E[\tilde{w}(kT + \tau)\tilde{w}(kT + \lambda)] d\lambda d\tau \\ &= \int_0^T q d\tau \\ &= q_1 T \end{aligned} \quad (2-1- 11)$$

$$\begin{aligned}
E\{w_x(k)w_{\dot{x}}(k)\} &= \int_0^T \int_0^T (T-\tau) E[\tilde{w}(kT+\tau)\tilde{w}(kT+\lambda)] d\lambda d\tau \\
&= \int_0^T q_1(T-\tau) d\tau \\
&= -\frac{(T-\tau)^2}{2} \Big|_0^T \\
&= q_1 \frac{T^2}{2}
\end{aligned} \tag{2-1- 12}$$

我們假設二維彈道之狀態方程式的雜訊項 [$w_x(k), w_{\dot{x}}(k), w_y(k), w_{\dot{y}}(k)$] 之機率分佈被假設為高斯，均值(mean)為 0，其共變異數矩陣可表示如下：

$$\mathbf{R}_w = E\{[w_x, w_{\dot{x}}, w_y, w_{\dot{y}}][w_x, w_{\dot{x}}, w_y, w_{\dot{y}}]^T\} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{R}}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{R}}_n \end{bmatrix} \tag{2-1- 13}$$

$$\bar{\mathbf{R}}_n = q_1 \times \begin{bmatrix} \frac{T^3}{3} & \frac{T^2}{2} \\ \frac{T^2}{2} & T \end{bmatrix} \tag{2-1- 14}$$

$q_1[2]$ 是連續時間過程雜訊強度，為雜訊能量的相關變數之功率頻譜密度，它是用來描述在狀態方程式模型中的加速度過程雜訊(processing noise)項之大小。

2.1.2 飛彈飛行時所受的各種作用力

TBM 的飛行運動軌跡(彈道)是由作用在飛彈上的外力所決定的。作用力的大小和方向不同，飛彈的彈道也就不同。飛彈在飛行中所受到的作用力共有：

1. **推力 P**:是指由飛彈自身攜帶的推進劑在火箭發動機中燃燒後，噴射出高速運動的燃氣所產生的反作用力。
2. **重力 g**:是指飛彈所受地球的地心引力，重力作用的方向指向地心。
3. **空氣動力 R** :是指飛彈在空氣介質中相對運動時，飛彈的整個表面上所受到的一種力。分布在飛彈表面的空氣動力，可以歸納成為一個作用於飛彈壓力中心(center of pressure)的合力和一個質心(center of mass)的合力矩，飛彈在飛行的過程中因受到空氣而產生在飛彈本體壓力，而這些壓力可總歸成一點，就是壓力中心，簡稱壓心。空氣動力可分解為阻力和升力兩大部分，阻力與速度方向相反，升力與速度方向垂直。於是空氣動力 R 更進一步分解成為垂直於速度 v 方向的升力 Y 和平行於速度方向的阻力 X，如圖 2 所示。空氣阻力在飛彈再入段中具有支配者的角色，空氣阻力方向與目標速度向量相反，阻力的大小與大氣密度、目標阻力係數、目標速

度的平方成正比，由此可知再入彈道追蹤的關鍵是由測量信息準確估計彈道係數或空氣動力加速度。

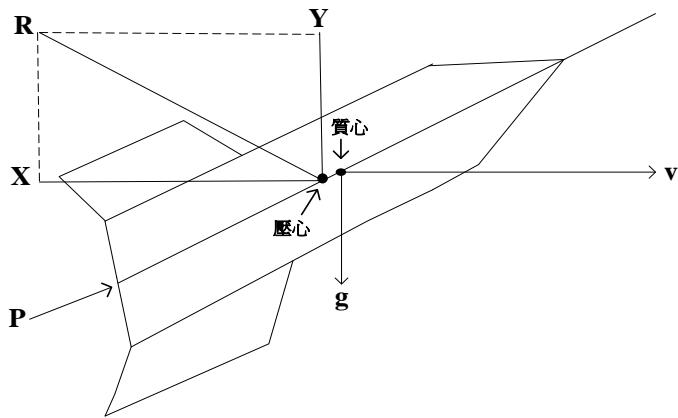


圖 2 作用在飛彈上的力

另外由於再入段飛行時間較短，離地面較短，可以忽略地球自轉和公轉的影響。而地球扁率造成的重力異常和由地球旋轉造成的牽連力與哥氏力相對於重力和空氣阻力來說影響甚微，所以不予考慮。所以對再入段 TBM 主要作用的力為重力和空氣阻力，因此在動力學模型只需考慮重力和空氣阻力這兩項即可。

2.1.3 空氣密度

精確的彈道模擬和估計需要精確的大氣密度模型，一般大氣密度模型是採用美國標準大氣所提供的模型(USSA_1976)[11]。但由於大氣密度模型相當複雜，所以在我們的模擬中，我們採用了為一個近似的函數，其表示式如下：

$$\rho(y) = \rho_0 e^{-\varepsilon y} \quad (2-1-15)$$

其中 ρ_0 和 ε 是已知常數。 $\rho(y)$ 為空氣密度大小，單位 slug/m^3 ，空氣密度的大小與目標物所在高度有關。 ρ_0 和 ε 的實際值可近似如下，假如飛彈所在高度 $y < 9144 \text{ m}$ ，則

$\rho_0 = 1.227$ 及 $\varepsilon = 1.093 \times 10^{-4}$ ；若是飛彈所在高度 $y \geq 9144 \text{ m}$ ，則 $\rho_0 = 1.754$ 及 $\varepsilon = 1.49 \times 10^{-4}$ 。其精確模型和近似模型如圖 3 所示。從此圖中可知近似誤差很小。

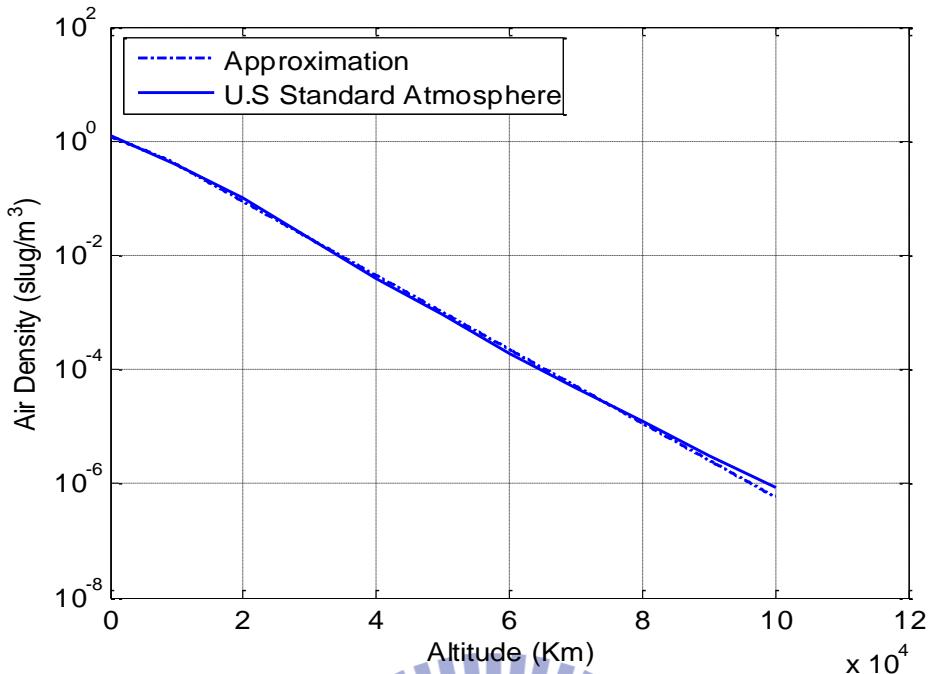


圖 3 高度與空氣密度關係

2.1.4 彈道係數

TBM 當飛行在大氣層內時，由於空氣動力學上的阻力將導致飛彈速度變慢降低了機動能力，TBM 重返大氣層時的阻力 F_D 可以被表示為：

$$F_D = m \times \frac{dv}{dt} = -F_{drag} = -QS_{ref}C_{D0} \quad (2-1-16)$$

其中負號代表是阻力， S_{ref} 是參考面積(reference area)，是指飛彈本體橫截面積與飛彈實際特性有關。 C_{D0} 是零升阻力係數(zero-lift drag coefficient)，是指飛彈速度和空氣動力學上模型的函數。 Q 是動力壓力(Dynamic Pressure)，而動力壓力是一個空氣密度 ρ 和速度 V 的函數， Q 被定義為：

$$Q = \frac{\rho V^2}{2} \quad (2-1-17)$$

由(2-1-16)式得知 TBM 加速度變化是因為阻力所造成的，其關係如下式：

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{QS_{ref}C_{D0}}{m} = \frac{-0.5\rho v^2 S_{ref} C_{D0}}{m} \quad (2-1-18)$$

假若定義初始阻力減速度 a_{D0} 為：

$$a_{D0} = \frac{QS_{ref}C_{D0}}{m} = \frac{\rho v^2 S_{ref} C_{D0}}{2m} \quad (2-1-19)$$

如此，我們可以定義彈道係數 β 為：

$$\beta = \frac{mg}{S_{ref}C_{D0}} = \frac{W}{S_{ref}C_{D0}} \quad (2-1-20)$$

彈道係數是一個重要的參數，因為這一參數實際上表示再入體質量和沿速度向量上有效阻力面積之比。彈道係數經常是被用來作為目標類型識別。由定義得知彈道係數的單位 kg / ms^2 ，此彈道係數與飛行速度、目標外型有關，一般來說飛彈速度愈大則彈道係數

愈大，因為彈道係數愈大所產生的阻力就愈小。從零升阻力係數 C_{D0} 來看，若目標彈道係數愈大，則零升阻力係數愈小，由此得知減少零升阻力係數 C_{D0} 及降低飛彈之直徑大小，便可降低飛彈的阻力，讓飛彈飛得更快，那就是為什麼飛彈要做得又細又長的原因。綜合本節所論，我們有了以下的結論：

1. 當彈道係數發生改變時，會對阻力減速度產生影響。TBM 從大氣層至落地為至，所受到的阻力一直在改變，所以在彈道係數是一個變數。
2. 在同一高度下，彈道係數愈大所產生的空氣阻力對目標物所造成的阻力加速度強度就會愈小。
3. 彈道係數愈大，所受到阻力愈小，飛彈的速度就愈快，飛彈之快速機動性能愈好。

2.2 雷達量測方程模型

飛彈的位置是由雷達所測量，在極座標系下完成，但是飛彈的狀態方程式是在直角坐標系中建立如此便可以使用線性來表示，如(2-1-1)式所示，因此我們必須將極座標所測量的資料轉為直角坐標，使得狀態方程式和量測方程式都在同一種座標系下，這樣才方便地進行估計和預測。

2.2.1 相列雷達追蹤飛彈原理

相列雷達為世界上目前最先進雷達之一，天線場型像是 pencil beam，具有將天線所發射能量集中於某一點，所以可以看得又高又遠。雷達首先在空中隨機但又有規則性搜索，回波信號經由低雜訊、高靈敏接收機接收，轉成數位信號經脈波壓縮，經過一連串的數位信號處理，最後會導出一個信號，當此信號的強度超過門檻(threshold)就斷定為目標，此時會連續打幾個脈沖信號來加以確認，確認是目標的話，則進入到追蹤模式，追蹤模式會一直持續且緊密打脈沖信號，以防止目標脫鎖(Loss Track)。

2.2.2 雷達量測方程式

雷達是根據脈沖波發射出去信號到接收時間來估計飛彈的距離(指徑向距離)，而陣列天線場型(pattern)所指的方向若是有目標的話，那便是目標的角度。假設用來量測飛彈位置的雷達座落於 $(x_R, y_R) = (0, 0)$ ，也就是原點，目標物真正的距離和角度(不是經由雷達所量測得到的)分別表示為：

$$\begin{aligned}\hat{r}_k &= \sqrt{x_k^2 + y_k^2} \\ \hat{\phi}_k &= \tan^{-1} \frac{y_k}{x_k}\end{aligned}\quad (2-2- 1)$$

因為有雜訊的存在和干擾，所以經由雷達所量測的信息與實際會有所偏差，所以雷達量測到的距離和角度分別表示為：

$$\begin{aligned}r_k &= \sqrt{x_k^2 + y_k^2 + \mu_k} \\ \phi_k &= \tan^{-1} \frac{y_k}{x_k} + \delta_k\end{aligned}\quad (2-2- 2)$$

此處， μ_k 及 δ_k 分別代表量測距離與角度的誤差。利用(2-2-1)式，雷達量測資料可以更進一步表示為：



$$\begin{aligned}r_k &= \hat{r}_k + \mu_k \\ \phi_k &= \hat{\phi}_k + \delta_k\end{aligned}\quad (2-2- 3)$$

我們必須將雷達所量測到的資料信息，轉成和狀態方程式一樣的直角座標系，直角座標系的橫座標及縱座標 d_k 及 h_k 分別可表示為：

$$\begin{aligned}d_k &= r_k \cos \phi_k \\ &= (\hat{r}_k + \mu_k) \cos(\hat{\phi}_k + \delta_k) \\ &= (\hat{r}_k + \mu_k) (\cos \hat{\phi}_k \cos \delta_k - \sin \hat{\phi}_k \sin \delta_k) \\ &\approx (\hat{r}_k + \mu_k) (\cos \hat{\phi}_k - \delta_k \sin \hat{\phi}_k) \\ &\approx \hat{r}_k \cos \hat{\phi}_k - \hat{r}_k \delta_k \sin \hat{\phi}_k + \mu_k \cos \hat{\phi}_k \\ &= x_k - \hat{r}_k \delta_k \sin \hat{\phi}_k + \mu_k \cos \hat{\phi}_k \\ &= x_k + v_{x,k}\end{aligned}\quad (2-2- 4)$$

$$\begin{aligned}
h_k &= r_k \sin \phi_k \\
&= (\hat{r}_k + \mu_k) \sin(\hat{\phi}_k + \delta_k) \\
&= (\hat{r}_k + \mu_k) (\sin \hat{\phi}_k \cos \delta_k + \cos \hat{\phi}_k \sin \delta_k) \\
&\approx (\hat{r}_k + \mu_k) (\sin \hat{\phi}_k + \delta_k \cos \hat{\phi}_k) \\
&= \hat{r}_k \sin \hat{\phi}_k + \hat{r}_k \delta_k \cos \hat{\phi}_k + \mu_k \sin \hat{\phi}_k \\
&= y_k + v_{y,k}
\end{aligned} \tag{2-2-5}$$

此處， $v_{x,k} = -\hat{r}_k \delta_k \sin \hat{\phi}_k + \mu_k \cos \hat{\phi}_k$ ， $v_{y,k} = \hat{r}_k \delta_k \cos \hat{\phi}_k + \mu_k \sin \hat{\phi}_k$ 。因此，我們便可將雷達量測方程式表示為：

$$z(k) = Hs(k) + v(k) \tag{2-2-6}$$

此處， z_k 為雷達所量測到的信息，有橫座標及縱座標位置的信息，其中

$$z(k) = [r_k \cos \phi_k, r_k \sin \phi_k]^T, \quad v(k) = [v_{x,k}, v_{y,k}]^T, \quad \text{量測矩陣 } H \text{ 被表示為:}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2-2-7}$$

在上式量測矩陣 H 的第一列第一行和第二列第三行都是 1，是代表雷達只有量測橫座標及縱座標的位置信息，而沒有速度的信息。 v_k 為此量測方程式的雜訊項，通常假設其分佈為高斯分佈，均值為 0，共變異數矩陣為 $R_v = E\{v_k v_k^T\}$ 。此共變異數矩陣的元素分別計算如下：

$$\begin{aligned}
R_v(1,1) &= E[v_{x,k} v_{x,k}^H] \\
&= \hat{r}_k^2 \sin^2 \hat{\phi}_k E[\delta_k^2] + E[\mu_k^2] \cos^2 \hat{\phi}_k \\
&= \hat{r}_k^2 \sigma_\delta^2 \sin^2 \hat{\phi}_k + \sigma_\mu^2 \cos^2 \hat{\phi}_k
\end{aligned} \tag{2-2-8}$$

$$\begin{aligned}
R_v(1,2) &= R_v(2,1) = E[v_{x,k} v_{y,k}^H] \\
&= -\hat{r}_k^2 E[\delta_k^2] \sin \hat{\phi}_k \cos \hat{\phi}_k + E[\mu_k^2] \sin \hat{\phi}_k \cos \hat{\phi}_k \\
&= (\sigma_\mu^2 - \hat{r}_k^2 \sigma_\delta^2) \sin \hat{\phi}_k \cos \hat{\phi}_k
\end{aligned} \tag{2-2-9}$$

$$\begin{aligned}
R_v(2,2) &= E[v_{y,k} v_{y,k}^H] \\
&= \hat{r}_k^2 \cos^2 \hat{\phi}_k E[\delta_k^2] + E[\mu_k^2] \sin^2 \hat{\phi}_k \\
&= \hat{r}_k^2 \sigma_\delta^2 \cos^2 \hat{\phi}_k + \sigma_\mu^2 \sin^2 \hat{\phi}_k
\end{aligned} \tag{2-2-10}$$

第三章 卡爾曼濾波器

傳統濾波器是建立在信號和雜訊頻率分離的基礎上，通過將雜訊所在頻率區域衰減來達到提高訊雜比，於是就產生了低通、高通、帶通等濾波器。而 KF 不是建立在頻域上，而是通過隨機過程的數學手段，對雜訊和信號的統一特性在時域上描述，然後通過合適的數學方式，來提供最佳訊雜比之輸出。它使用狀態方程式來描述系統，所以它能夠對平穩和非平穩的隨機信號進行估計。為了獲取目標運動參數，使用量測方式測量目標運動(位置、速度)狀態，但量測值不僅只是系統狀態的線性組合，而且還包含量測雜訊，為了解決此問題，KF 通過量測值的處理，輸出統計意義上估計誤差最小的狀態估計值。

Wiener 提出一種最佳化之線性濾波，其主要優點為可估計與有效信號之有關的多種信息，同時它也可提供一個完整的濾波器傳遞函數的解析答案，但其所在問題是估計值和測量值都必須是平穩的隨機過程，必須把所有時間上的全部資料做整批處理，而所解出的濾波器轉移函數在工程是不容易被實現，而且也只能用於線性系統。

雷達跟蹤彈道最新技術是採用 KF，KF 可以輕而易舉對付快速移動的飛彈，更能對目標位置做最好的估計。一般雷達在測量位置、速度，這些測量值都包含量測位置和角度的偏差和加上雷達本身的雜訊干擾，KF 利用目標動態信息，設法濾除掉雜訊的干擾，進而得到最佳的估計值。而這個估計值是當前目標位置的估計(濾波值)，也可以對下一個位置進行估計(預測值)。KF 是解決最小均方誤差線性濾波問題之最佳解。在實現上具有以下特點：

1. 若系統是線性且非時變，則卡爾曼增益和方差可在觀測值取得之前獨立處理，因為他與觀測值無關，這樣可以減少線上的計算量，其性能和(Infinite Impulse Response; IIR)濾波器是同一等級。
2. 他引入了狀態空間的概念，借助系統的狀態估計值和目前時刻的觀測值，以遞迴的方式產出新的狀態估計值。

KF 理論上只適用於線性系統，對於非線性系統 KF 不能直接使用，本章中除了說明標準之 KF 原理外也介紹了兩個相關非線性演算法，一是 EKF，另一則是 UKF。

3.1 Recursive Bayesian 估計

貝斯估計是根據目標狀態和雜訊的事先信息來建構目標的機率密度函數。考慮離散系統的狀態估計問題，令系統的狀態方程式和觀測方程是分別為：

$$\begin{aligned}s_{k+1} &= f_k(s_k, w_k) \\ z_k &= h_k(s_k, v_k)\end{aligned}\tag{3-1-1}$$

這裡 $s_k \in R^{n_s}$ 為 k 時刻系統的狀態向量， $z_k \in R^{n_z}$ 為 k 時刻系統的觀測向量。假如 f 和 h

是已知的確定函數，且狀態雜訊和觀測雜訊是可加性的白雜訊，系統是非時變的，則上式可變為

$$\begin{aligned}s_{k+1} &= f(s_k) + w_k \\ z_k &= h(s_k) + v_k\end{aligned}\quad (3-1- 2)$$

貝斯準則下的目標狀態估計是條件均值，即 $\hat{s}_{k|k} = E\{s_k | \mathbf{Z}_k\}$ ，其中 $\mathbf{Z}_k = \{z_1, \dots, z_k\}$ ，而事後 pdf 為 $p\{s_k | \mathbf{Z}_k\}$ ，也就是給了 z_k 後，對輸出狀態進行修正。假設已知時刻 $k-1$ 的機率分佈為 $p\{s_{k-1} | \mathbf{Z}_{k-1}\}$ ，利用已知的信息，就可以給出下一時刻 k 的事後分佈 $p\{s_k | \mathbf{Z}_k\}$ 。其遞迴計算過程如下：

1. 首先計算目標狀態預測值的機率分佈 $p\{s_k | \mathbf{Z}_{k-1}\}$

$$p\{s_k | \mathbf{Z}_{k-1}\} = \int p\{s_k, s_{k-1} | \mathbf{Z}_{k-1}\} ds_{k-1} \quad (3-1- 3)$$

利用 Bayes' 規則

$$p\{s_k, s_{k-1} | \mathbf{Z}_{k-1}\} = p\{s_k | s_{k-1}, \mathbf{Z}_{k-1}\} p\{s_{k-1} | \mathbf{Z}_{k-1}\} \quad (3-1- 4)$$

應用 Chapman-Kolmogorov 方程式，預測值可以被表示如下：

$$p\{s_k | \mathbf{Z}_{k-1}\} = \int p\{s_k | s_{k-1}\} p\{s_{k-1} | \mathbf{Z}_{k-1}\} ds_{k-1} \quad (3-1- 5)$$

2. 根據所獲得的觀測值，計算修正的機率分佈 $p\{s_k | \mathbf{Z}_k\}$

$$p\{s_k | \mathbf{Z}_k\} = \frac{p\{s_k, z_k, \mathbf{Z}_{k-1}\}}{p\{z_k, \mathbf{Z}_{k-1}\}} \quad (3-1- 6)$$

利用 Bayes' 規則

$$p\{s_k | \mathbf{Z}_k\} = \left(\frac{p\{z_k | s_k, \mathbf{Z}_{k-1}\}}{p\{z_k | \mathbf{Z}_{k-1}\}} \right) \times p\{s_k | \mathbf{Z}_{k-1}\} \quad (3-1- 7)$$

我們可以把它看成是一個事前的機率分佈函數乘上一係數，而得到修正的機率分佈函數。

3.2 標準型卡爾曼濾波器

KF 是一個線性的濾波器，可以被使用在時變的系統，假設雜訊和初始值若是高斯分布，則 KF 是最佳濾波器，它是在線性無偏(unbiased)下最小方差估計原理下推導得出的一種最佳遞迴濾波方法。

3.2.1 標準型卡爾曼濾波器原理推導

現在進行 KF 推導，首先，將狀態方程式和量測方程式表示如下：

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{k+1} &= \mathbf{F}\mathbf{s}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{z}_k &= \mathbf{H}\mathbf{s}_k + \mathbf{v}_k \end{aligned} \quad (3-2- 1)$$

其中， \mathbf{F} 是狀態轉移方程式矩陣， \mathbf{H} 是量測方程式矩陣，其中 $E\{\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T\} = \mathbf{Q}_k$ ，
 $E\{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T\} = \mathbf{R}_k$ ， $E\{\mathbf{w}_k \mathbf{v}_k^T\} = \mathbf{0}$ ，假設有一個狀態預測 $\hat{\mathbf{s}}_{k|k-1}$ ，是指時間在 $k-1$ 時對時間 k 的狀態預測，它是利用感測器所測量的值 $\{z_0, z_1, \dots, z_{k-1}\}$ ，量測時間只有到 $k-1$ 。現在要利用新的測量值 z_k 來更新估計值，一個線性的表示如下：

$$\hat{\mathbf{s}}_{k|k} = \hat{\mathbf{s}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k (z_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{s}}_{k|k-1}) \quad (3-2- 2)$$

$\hat{\mathbf{s}}_{k|k}$ 表示為在 k 時間的濾波估計，是指濾波器在 k 時間的輸出。 $\hat{\mathbf{s}}_{k|k-1}$ 表示時間由 $k-1$ 到 k 時間的預測估計，這些估測值是經由量測值線性函數經過一系列濾波器權重係數分配所得到的結果，並將此權重的均方誤差最小化，此權重為卡爾曼增益 \mathbf{k}_k (Kalman Gain)。
 $(z_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{s}}_{k|k-1})$ 稱為新息 (Innovation)，它包含兩個信息，一是新的資訊成分，另一個則是雜訊成分。

接下來是如何找到 \mathbf{k}_k 。首先定義狀態估計的共變異數 $\mathbf{P}_{k|k}$ 和狀態預測的共變異數 $\mathbf{P}_{k|k-1}$ ，分別如下：

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{k|k} &= E\left\{[\mathbf{s}_k - \hat{\mathbf{s}}_{k|k}][\mathbf{s}_k - \hat{\mathbf{s}}_{k|k}]^T\right\} \\ &= E\left\{[\mathbf{s}_k - \hat{\mathbf{s}}_{k|k-1}] - \mathbf{k}_k [\mathbf{H}\mathbf{s}_k + \mathbf{v}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{s}}_{k|k-1}]\right\} \times \\ &\quad \left\{[\mathbf{s}_k - \hat{\mathbf{s}}_{k|k-1}] - \mathbf{k}_k [\mathbf{H}\mathbf{s}_k + \mathbf{v}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{s}}_{k|k-1}]^T\right\} \\ &= E\left\{[(\mathbf{I} - \mathbf{k}_k)\mathbf{H}][\mathbf{s}_k - \hat{\mathbf{s}}_{k|k-1}] + \mathbf{k}_k \mathbf{v}_k\right\} \times \\ &\quad \left\{[(\mathbf{I} - \mathbf{k}_k)\mathbf{H}][\mathbf{s}_k - \hat{\mathbf{s}}_{k|k-1}] + \mathbf{k}_k \mathbf{v}_k\right\}^T \\ &= [\mathbf{I} - \mathbf{k}_k \mathbf{H}] \mathbf{P}_{k|k-1} [\mathbf{I} - \mathbf{k}_k \mathbf{H}]^T + \mathbf{k}_k \mathbf{R}_k \mathbf{k}_k^T \\ &= \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{k}_k \mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^T \mathbf{k}_k^T + \mathbf{k}_k [\mathbf{H} \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_k] \mathbf{k}_k^T \end{aligned} \quad (3-2- 3)$$

其中， $\mathbf{P}_{k|k-1} = E\{[\mathbf{s}_k - \hat{\mathbf{s}}_{k|k-1}][\mathbf{s}_k - \hat{\mathbf{s}}_{k|k-1}]^T\}$ 。我們現在利用最小均方 (Minimum Mean Square Error, MMSE) 法則，其數學式表示為：

$$\underset{\mathbf{K}_k}{\text{Minimize}} \sum_{i=1}^N E\left\{[\mathbf{s}_{i(k)} - \hat{\mathbf{s}}_{i(k|k)}]^2\right\} = \text{Trace}\{\mathbf{P}_{k|k}\} \quad (3-2- 4)$$

接下來我們利用簡單偏微分公式：

$$\begin{aligned}
\frac{d[\text{trace}(\mathbf{AB})]}{\partial \mathbf{A}} &= \mathbf{B}^T \quad (\mathbf{AB} \text{ must be square}) \\
\frac{d[\text{trace}(\mathbf{ACA}^T)]}{\partial \mathbf{A}} &= 2\mathbf{AC} \quad (\mathbf{C} \text{ must be symmetric}) \\
\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{A}} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{a}_{11}} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{a}_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{a}_{m1}} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{a}_{mn}} \end{pmatrix} \quad (3-2-5)
\end{aligned}$$

利用上式，將 $\text{trace}(\mathbf{P}_{k|k})$ 對 k_k 偏微分並令其值為零，於是得到了：

$$\begin{aligned}
\frac{d[\text{trace}(\mathbf{P}_{k|k})]}{\partial k_k} &= -2(\mathbf{HP}_{k|k-1})^T + 2k_k(\mathbf{HP}_{k|k-1}\mathbf{H}^T + \mathbf{R}_K) = 0 \\
k_k &= \mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}^T(\mathbf{HP}_{k|k-1}\mathbf{H}^T + \mathbf{R}_K)^{-1} \quad (3-2-6)
\end{aligned}$$

帶回上式得

$$\mathbf{P}_{k|k} = [\mathbf{I} - k_k \mathbf{H}] \mathbf{P}_{k|k-1} \quad (3-2-7)$$

從上式我們不難看出 KF 的處理是一個遞迴(recursive)形式。接下來從狀態方程式中，我們可以得到：

$$\hat{\mathbf{s}}_{k+1|k} = \mathbf{F}(\hat{\mathbf{s}}_{k|k}) \quad (3-2-8)$$

其中 $\hat{\mathbf{s}}_{k+1|k}$ 代表 KF 的下一步預測，在此為何沒有加上雜訊，因為我們無法預測下一次的雜訊值，而且雜訊的均值為零。下一步預測誤差共變異數矩陣被定義為：

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{k+1|k} &= E\{[\mathbf{s}_{k+1|k+1} - \hat{\mathbf{s}}_{k+1|k}][\mathbf{s}_{k+1|k+1} - \hat{\mathbf{s}}_{k+1|k}]^T\} \\
&= E\{[\mathbf{F}(\mathbf{s}_{k|k} - \hat{\mathbf{s}}_{k|k}) + \mathbf{w}_k][\mathbf{F}(\mathbf{s}_{k|k} - \hat{\mathbf{s}}_{k|k}) + \mathbf{w}_k]^T\} \\
&= \mathbf{FP}_{k+1|k+1}\mathbf{F}^T + \mathbf{Q}_k \quad (3-2-9)
\end{aligned}$$

KF 方程式歸納如下：

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_k &= \mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}^T \left[\mathbf{HP}_{k|k-1}\mathbf{H}^T + \mathbf{R}_k \right]^{-1} \\
\mathbf{a}_k &= \mathbf{z}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{s}}_{k|\mathbf{z}_{k-1}} \\
\hat{\mathbf{s}}_{k|\mathbf{z}_k} &= \hat{\mathbf{s}}_{k|\mathbf{z}_{k-1}} + \mathbf{k}_k \mathbf{a}_k \\
\hat{\mathbf{s}}_{k+1|\mathbf{z}_k} &= \mathbf{F}\hat{\mathbf{s}}_{k|\mathbf{z}_k} \\
\mathbf{P}_{k|k} &= [\mathbf{I} - \mathbf{k}_k \mathbf{H}] \mathbf{P}_{k|k-1} \\
\mathbf{P}_{k+1|k} &= \mathbf{FP}_{k|k}\mathbf{F}^T + \mathbf{Q}_k \quad (3-2-10)
\end{aligned}$$

3.2.2 標準型卡爾曼濾波器演算法流程

在 KF 要啟動之前不要忘記還要給初始值 \hat{S}_0 和 \mathbf{P}_0 ，假設初始狀態統計特性為：

$$\begin{aligned} E[s_0] &= \hat{s}_0 \\ \text{Var } s_0 &= E\{(s_0 - \hat{s}_0)(s_0 - \hat{s}_0)^T\} = \mathbf{P}_0 \end{aligned} \quad (3-2-11)$$

並且 s_0 與 $\{w_k\}$ 、 $\{v_k\}$ 都不相關，即：

$$\begin{aligned} E\{s_0, w_k\} &= 0 \\ E\{s_0, v_k\} &= 0 \end{aligned} \quad (3-2-12)$$

狀態預測方程式根據 k 時刻的狀態，估計 $k+1$ 時刻預測狀態估計的方法，預測估計值誤差共變異數矩陣是將預測的質量優劣使用定量來描述，它代表了 $\hat{S}_{k+1|k}$ 估計精度。增益矩陣，用來反映新信息對估計的重要程度，也就是用信號和系統雜訊密度之間關係。濾波估計值，利用量測值 z_{k+1} 修正一步預測值 $\hat{S}_{k+1|k}$ 所產生的輸出。濾波估計值誤差共變異數矩陣則代表估計的精度。

從整個濾波方程中可以看出，在一個濾波週期內，從 KF 在使用系統信息和量測信息的先後次序來看，KF 具有兩個信息更新過程：時間更新過程和量測更新過程。時間更新過程，由時間 k 推進到 $k+1$ ，計算中僅使用了與系統動態特性有關的信息，如轉移矩陣，系統雜訊矩陣。而量測更新過程用來計算對時間更新值的修正量，該修正量由時間更新質量優劣 $\mathbf{P}_{k+1|k}$ 、量測信息的 \mathbf{R}_k 、量測與狀態的關係 \mathbf{H} 以及具體的量測值 z_k 所決定，所以這一過程描述了 KF 的量測更新過程。

KF 動作流程，詳如圖 4，具體步驟如下：

- 首先必須給出一個初始條件狀態 $\hat{s}_{1|0}$ 及共變異數矩陣 $\mathbf{P}_{1|0}$ ，整個濾波器才能開始工作。
- 由公式計算濾波增益矩陣 \mathbf{K}_1 。
- 在 t_1 時刻進行了觀測以後，獲得了 z_1 ，於是按照公式可以獲得 t_1 時刻的適時最佳估計 $\hat{s}_{1|1}$ 。
- 按照公式計算 $\mathbf{P}_{1|1}$ 。
- 根據公式計算得到 $\hat{s}_{2|1}$ 。
- 由公式計算得到 $\mathbf{P}_{2|1}$ 。
- 在獲得了 $\hat{s}_{2|1}$ 與 $\mathbf{P}_{2|1}$ 後，重回第二步，開始下一步濾波，然後依序上述步驟即可獲得個觀測時刻狀態向量的最優適時估計值。

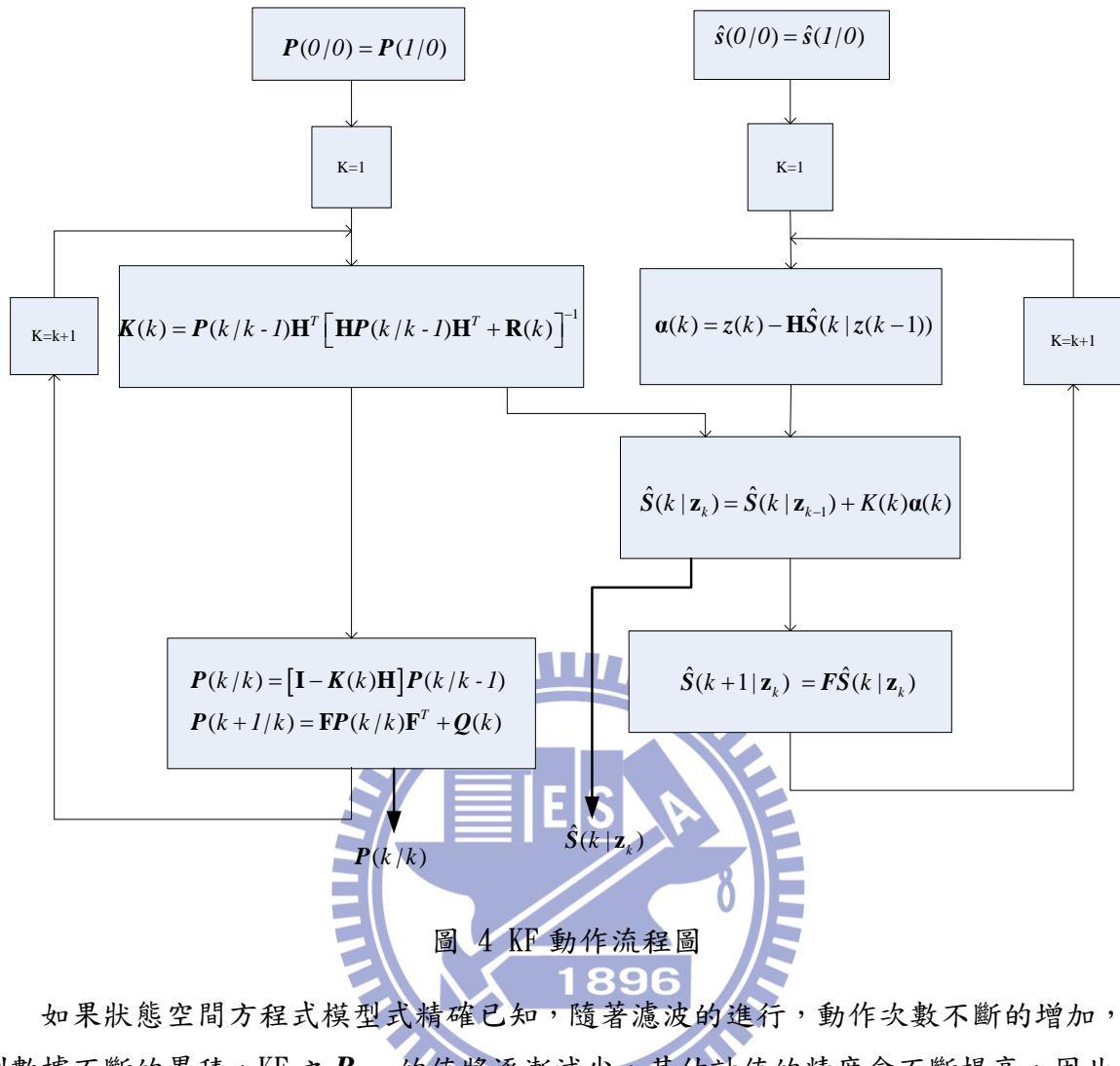


圖 4 KF 動作流程圖

如果狀態空間方程式模型式精確已知，隨著濾波的進行，動作次數不斷的增加，觀測數據不斷的累積，KF 之 $P_{k|k-1}$ 的值將逐漸減少，其估計值的精度會不斷提高，因此卡爾曼增益值逐漸降低，也就是用新息來改善預測估計值所占的比例逐漸下降，此時估值誤差的方差(Variance)將不斷縮小，新的觀測值有對狀態的修正作用逐漸遞減弱。然而在實際應用中，一個精確的動力學模型是不易獲得，如果把近似模型當作精確模型進行濾波，雖然計算出的誤差方差會不斷的減小，然而實際的估測值的誤差卻可能不斷地增大，進而造成濾波器發散。當濾波器增益達到穩定時，由於隨機雜訊干擾，估計精度將不會再進一步提高。量測值與新信息值之間的關係，稱之為系統狀態的相似函數，由此結果可以做為評估 KF 系統好壞。

3.3 擴展式卡爾曼濾波器

通常在飛行軌跡、目標物追蹤問題中，空間狀態方程式是非線性的。非線性模型線性化是解決非線性濾波的基本方法。EKF 使用線性化的空間狀態方程式，是次佳非線性濾波器。基本的做法是先將狀態方程式和觀測方程式在前一次狀態估計值上逕行做線性

化處理，將非線性函數展開成泰勒級數，然後再取泰勒級數的低次項來逼近它們，忽略了高次項。

利用卡爾曼濾波器做目標物的追蹤，透過其卡爾曼增益的適應性調整機制，將目標物移動曲線的估測完整描繪出來。但是標準型 KF 只適合目標物線性運動。然在實際追蹤過程中，空間狀態方程式絕大部分是非線性的形式，若要使用最佳非線性濾波器 (Optimal nonlinear filter) 來達到追蹤的目的，則會出現難以實現的缺點，次佳選擇就是利用逼近線性模式的方式來解決非線性所帶來的難題。

在線性轉換之下，隨機變數的分佈函數類型是不會改變，只是分佈參數發生變化，但是對於非線性系統來說，分佈函數類型可能發生變化，而且變化後的分佈函數無法準確得到。即使在常態(Normal)雜訊假設下，系統條件機率密度函數(Condition pdf)也不是常態的。在這種情況下，真正的最佳的非線性濾波器是具有無限維度結構。

3.3.1 擴展式卡爾曼濾波器原理推導

非線性狀態方程式和量測方程是分別表示如下：

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{k+1} &= \Phi \mathbf{s}_k + \mathbf{G} f(\mathbf{s}_{k,k}) + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{z}_k &= \mathbf{h}(\mathbf{s}_{k,k}) + \mathbf{v}_k \end{aligned} \quad (3-3-1)$$

在(3-3-1)式中， $f(\cdot)$ 和 $\mathbf{h}(\cdot)$ 為非線性函數表示式，為了可以實現非線性運動方程式和計算方便，必須將非線性函數轉為線性函數，所以為了得到預測狀態 $\hat{\mathbf{s}}_{k+1|k}$ ，對(3-3-1)式中非線性函數在 $\hat{\mathbf{s}}_{k|k}$ 附近泰勒展開，取第一階項，定義矩陣 $\bar{\mathbf{F}}_k$ 作為 f_k 在最近估計值 $\hat{\mathbf{s}}_{k|k}$ 處的 Jacobian 矩陣：

$$\bar{\mathbf{F}}_{k+1|k} = \frac{\partial f(\mathbf{s}_k)}{\partial \mathbf{s}_k} \Big|_{\mathbf{s}_k = \hat{\mathbf{s}}_{k|k}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{s}_k)}{\partial s_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{s}_k)}{\partial s_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{s}_k)}{\partial s_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{s}_k)}{\partial s_n} \end{pmatrix} \quad (3-3-2)$$

其中 s_1 、 s_2 、 \dots 、 s_n 是 n 維度狀態向量 $\mathbf{s}_{k|k}$ 的元素。

同樣的情況，定義 \mathbf{H}_k 是在 \mathbf{h}_k 的預測值 $\hat{\mathbf{s}}_{k+1|k}$ 處的 Jacobian 矩陣：

$$\mathbf{H}_k = \frac{\partial h(\mathbf{s}_k)}{\partial \mathbf{s}_k} \Big|_{\mathbf{s}_k = \hat{\mathbf{s}}_{k+1|k}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1(\mathbf{s}_k)}{\partial \mathbf{s}_1} & \dots & \frac{\partial h_1(\mathbf{s}_k)}{\partial \mathbf{s}_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial h_m(\mathbf{s}_k)}{\partial \mathbf{s}_1} & \dots & \frac{\partial h_m(\mathbf{s}_k)}{\partial \mathbf{s}_n} \end{pmatrix} \quad (3-3-3)$$

其中 h_1, h_2, \dots, h_m 是 m 維度狀態向量 \mathbf{h}_k 的元素， \mathbf{H}_k 是一個 $m \times n$ 的矩陣。

同樣地我們對此非線性狀態方程式中的非線性函數為 $f(\mathbf{s}_k)$ 線性化，因此我們使用一階線性泰勒展開式來近似非線性函數 $f(\mathbf{s}_k)$ ，其近似值[7]如下所示：

$$f(\mathbf{s}_k) \approx f(\hat{\mathbf{s}}_{k|\mathbf{z}_k}) + \bar{\mathbf{F}}_{k+1|k} [\mathbf{s}_k - \hat{\mathbf{s}}_{k|\mathbf{z}_k}] \quad (3-3-4)$$

此處， $\hat{\mathbf{s}}_{k|\mathbf{z}_k}$ 為給定量測資料 \mathbf{z}_k 對 \mathbf{s}_k 的估計值。

$$\begin{aligned} f(\mathbf{s}_k) &\approx f(\hat{\mathbf{s}}_{k|\mathbf{z}_k}) + \bar{\mathbf{F}}_{k+1|k} [\mathbf{s}_k - \hat{\mathbf{s}}_{k|\mathbf{z}_k}] \\ &= \bar{\mathbf{F}}_{k+1|k} \mathbf{s}_k + [f(\hat{\mathbf{s}}_{k|\mathbf{z}_k}) - \bar{\mathbf{F}}_{k+1|k} \hat{\mathbf{s}}_{k|\mathbf{z}_k}] \\ &= \bar{\mathbf{F}}_{k+1|k} \mathbf{s}_k + \bar{\mathbf{d}}_k \end{aligned} \quad (3-3-5)$$

而 $\bar{\mathbf{d}}_k = f(\hat{\mathbf{s}}_{k|\mathbf{z}_k}) - \bar{\mathbf{F}}_{k+1|k} \hat{\mathbf{s}}_{k|\mathbf{z}_k}$ 為一定值。因此，藉由上式，我們可以將非線性狀態方程式線性化為下式：

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{k+1} &= \Phi \mathbf{s}_k + \mathbf{G} f(\mathbf{s}_k) + \mathbf{w}_k \\ &= \Phi \mathbf{s}_k + \mathbf{G} [\bar{\mathbf{F}}_{k+1|k} \mathbf{s}_k + \bar{\mathbf{d}}_k] + \mathbf{w}_k \\ &= [\Phi + \mathbf{G} \bar{\mathbf{F}}_{k+1|k}] \mathbf{s}_k + \mathbf{G} \bar{\mathbf{d}}_k + \mathbf{w}_k \\ &= \bar{\mathbf{F}}_{k+1|k} \mathbf{s}_k + \mathbf{d}_k + \mathbf{w}_k \end{aligned} \quad (3-3-6)$$

此處， $\mathbf{F}_{k+1|k} = \Phi + \mathbf{G} \bar{\mathbf{F}}_{k+1|k}$ 為此狀態方程式中的線性轉換矩陣， $\mathbf{d}_k = \mathbf{G} \bar{\mathbf{d}}_k$ 。此時我們已經將狀態方程式線性化，目標物軌跡的追蹤問題可以使用 KF 演算法來解決。需要特別注意的是此線性化狀態方程式(3-3-6)有一個常數項 \mathbf{d}_k ，因此在計算估計 $\hat{\mathbf{s}}_{k+1|\mathbf{z}_k}$ 的時候，必須將此常數項加入，於是下一步狀態預測變成下式：

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}}_{k+1|\mathbf{z}_k} &= \bar{\mathbf{F}}_{k+1|k} \hat{\mathbf{s}}_{k|\mathbf{z}_k} + \mathbf{d}_k \\ &= \bar{\mathbf{F}}_{k+1|k} \hat{\mathbf{s}}_{k|\mathbf{z}_k} + \mathbf{G} \bar{\mathbf{d}}_k \\ &= [\Phi + \mathbf{G} \bar{\mathbf{F}}_{k+1|k}] \hat{\mathbf{s}}_{k|\mathbf{z}_k} + \mathbf{G} [f(\hat{\mathbf{s}}_{k|\mathbf{z}_k}) - \bar{\mathbf{F}}_{k+1|k} \hat{\mathbf{s}}_{k|\mathbf{z}_k}] \\ &= \Phi \hat{\mathbf{s}}_{k|\mathbf{z}_k} + \mathbf{G} f(\hat{\mathbf{s}}_{k|\mathbf{z}_k}) \end{aligned} \quad (3-3-7)$$

3.3.2 擴展式卡爾曼濾波器演算法流程

EKF 動作流程，詳如圖 5，具體步驟如下：

1. 首先也是需要一個初始條件狀態 $\hat{\mathbf{s}}_{1|0}$ 及共變異數 $\mathbf{P}_{1|0}$ ，濾波器才能開始工作。
2. 計算 t_1 時刻的觀測轉移矩陣 \mathbf{H}_1 。
3. 計算增益矩陣 \mathbf{K}_1 。
4. 在 t_1 時刻進行了觀測以後，獲得了 \mathbf{z}_1 ，於是按照公式可以獲得 t_1 時刻的適時最佳狀態估計 $\hat{\mathbf{s}}_{1|1}$ 。
5. 計算最佳估計誤差的方差矩陣 $\mathbf{P}_{1|1}$ 。
6. 計算 t_1 時刻的狀態預測轉移矩陣 $\bar{\mathbf{F}}_{2|1}$ 。
7. 根據公式計算得到 $\hat{\mathbf{s}}_{2|1}$ 。
8. 由公式計算得到 $\mathbf{P}_{2|1}$ 。
9. 在獲得了 $\hat{\mathbf{s}}_{2|1}$ 與 $\mathbf{P}_{2|1}$ 後，重回第二步，開始下一步濾波，重複上述步驟即可獲得個觀測時刻狀態向量的最優適時估計值。

EKF 將非線性函數的狀態方程式在當前位置進行線性化處理，通過求 Jacobian 矩陣得到狀態轉移矩陣，在此狀態轉移矩陣僅僅用於狀態方差預測。

EKF 是基於某時刻狀態估值進行線性化的，然而在實際運算中，線性化參考點是隨時間而變化的，當前時刻線性化總是以前一時刻的估值為參考點。由此可知，每一步的估值精度不僅與該此步的線性化有關，而且與初值精度關係很大。

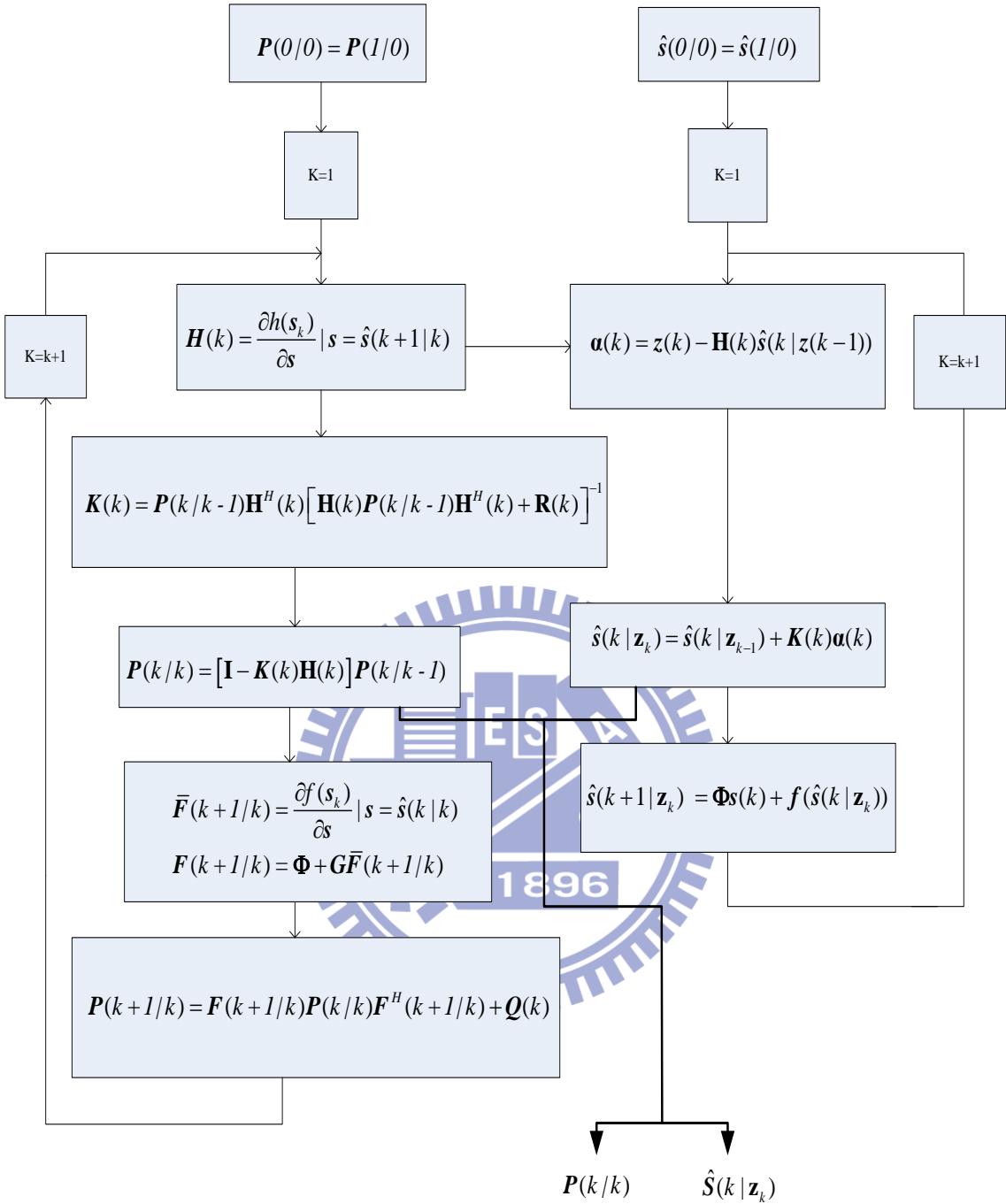


圖 5 EKF 動作流程圖

3.4 Unscented 卡爾曼濾波器

UKF 使用一組代表均值(mean)和方差(variance)分布的取樣點來對非線性系統進行非線性計算。Unscented 濾波技術是一種基於 Unscented Transform (UT)的非線性濾波方法，UKF 只需要通過 UT 就能獲得分布經非線性轉換後的期望值和方差。UT 用於計算一隨機變數經非線性轉換後之一階及二階統計特性。對一個非線性函數，如果輸入之隨

機變數的一、二階統計特性為已知，我們可以此變數進行大量取樣，並讓這些樣本經過此非線性函數轉換，便可計算轉換後之統計特性，但這種方法勢必花費大量時間。而 UT 就是對這一方法進行改進，其想法是在一隨機變數的分布函數中選擇若干特定的點稱 sigma 點，這些點有一特性，亦即由這些點所計算出的一、二階統計特性與原先的分布相同。將這些 sigma 點經非線性轉換後所計算出之一、二階統計特性將可近似於原先隨機變數經轉換後之一、二階統計特性。

遞迴(recursive)貝式(Bayesian)估計的重點即是在精準的計算 $P(s_k | Z_k)$ ，然而這在非線性系統中是難以實現的。Julier 和 Uhlmann 等利用 UT 方法發展出 UKF，以一組取樣點來近似 $P(s_k | Z_k)$ 。UKF 使用原來的非線性狀態方程式和觀測方程式來估算狀態向量的機率密度函數，如前所述 UKF 所選取的點為 sigma 點，這些 sigma 點可以捕捉 $P(s_k | Z_k)$ 經非線性函數轉換後的狀態向量的機率分佈之均值及共變異數矩陣。

3.4.1 UT 轉換

UT 是一種用來計算隨機變數經非線性函數轉換後其統計特性的方法，它用確定量(deterministic)的參數去近似一個分布。在原先狀態分布中按某一規則取一些點，使這些點的均值和共變異數等於原狀態分布的均值和共變異數，將這些點代入非線性函數中，相對應得到非線性函數值點集合，通過這些點集合得以求取變換後的均值和共變異數。使用此法非線性函數無需線性化，沒有忽略其高階項的問題，所估計出來的均值和共變異數準度可以比 EKF 高。UT 初看似乎是一種 Monte-Carlo 方法，其實不然，它不是隨機地從給定的分布中進行抽樣，而是只取少數固定的 sigma 點，因此不能將其理解為抽樣統計。UT 轉換圖如圖 6 所示。

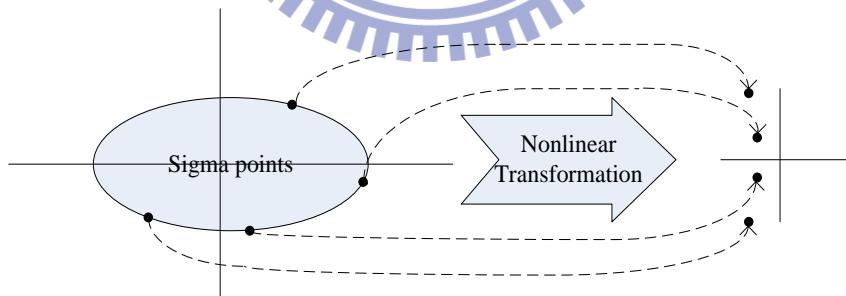


圖 6 UT 轉換概念圖

3.4.2 卡爾曼濾波演算法原理及流程

假設有一隨機向量 s ，其均值為 \bar{s} ，共變異數為 P_s ，令 y 為 s 經一非線性函數 $g(\cdot)$ 轉換後之向量，其數學表示式為：

$$y = g(s) \quad (3-4-1)$$

令 \mathbf{y} 的均值為 $\bar{\mathbf{y}}$ 、共變異數為 \mathbf{P}_y 。Unscented 濾波的關鍵問題是 sigma 點的選擇，如果 sigma 點不能準確傳遞非線性函數的一、二階矩(Moment)信息，這將導致使該演算法產生誤差。 $\bar{\mathbf{y}}$ 、 \mathbf{P}_y 的計算是利用經 $\mathbf{g}(\cdot)$ 轉換後 sigma 點，點數通常為 $2n+1$ 點，我們用 $\chi_i (i=0 \cdots 2n+1)$ 來表示，其相對應的 χ_i 和設計法則如下：

$$\begin{aligned}\chi_i &= \bar{\mathbf{s}} & i = 0 \\ \chi_i &= \bar{\mathbf{s}} + (\sqrt{(n+\kappa)\mathbf{P}_s})_i & i = 1, \dots, n \\ \chi_i &= \bar{\mathbf{s}} - (\sqrt{(n+\kappa)\mathbf{P}_s})_i & i = n+1, \dots, 2n\end{aligned}\quad (3-4-2)$$

此處 $(\sqrt{(n+\kappa)\mathbf{P}_s})_i$ 表示此矩陣平方根第 i 行向量，其定義如下：首先將 $(n+\kappa)\mathbf{P}_s$ 經 Cholesky 分解成 $(\sqrt{(n+\kappa)\mathbf{P}_s}) = \mathbf{A}\mathbf{A}^T$ ，則 $(\sqrt{(n+\kappa)\mathbf{P}_s})_i$ 為 \mathbf{A} 矩陣的第 i 行向量。每一 sigma 點有一相對應的係數，其定義如下：

$$\begin{aligned}w_i &= \frac{\kappa}{(n+\kappa)} & i = 0 \\ w_i &= \frac{1}{2(n+\kappa)} & i = 1, \dots, 2n\end{aligned}\quad (3-4-3)$$

其中 $\kappa = \alpha^2(n+\lambda) - n$ ， α 決定 sigma 點的散布程度，通常取一小的正值(如 0.01)。 λ 通常取為 0。 κ 提供一個微調高階矩(Moment)的特殊自由度，可以用來降低近似誤差， κ 的具體值雖然沒有明確規定，但要確保矩陣 $(n+\kappa)\mathbf{P}_s$ 為半正定性(positive semi-definite)。而 sigma 點通過非線性函數 $\mathbf{g}(\cdot)$ 的傳播為：

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{g}(\chi_i) \quad i = 0, 1, \dots, 2n \quad (3-4-4)$$

由此可得：

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{y}} &= \sum_{i=0}^{2n} w_i \mathbf{y}_i \\ \mathbf{P}_y &= \sum_{i=0}^{2n} w_i (\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})(\mathbf{y}_i - \bar{\mathbf{y}})^T\end{aligned}\quad (3-4-5)$$

將 Kalman 濾波器中均值和變異數用 UT 求得即是 UKF，其具體步驟如下：

- 給定的 $\hat{\mathbf{s}}_{k|k}$, $\mathbf{P}_{k|k}$ 來計算以求得 sigma 點，用 $\xi_{k|k}$ 來表示，和給定相對應係數。
- 利用狀態方程式傳播 sigma 點，表示如下：

$$\xi_{k+1|k}(i) = \mathbf{g}[\xi_{k|k}(i)] \quad (3-4-6)$$

- 利用轉換後的 sigma 點 $\xi_{k+1|k}(i)$ 和加權係數 w_i 來計算狀態預測的均值 $\hat{\mathbf{s}}_{k+1|k}$ 和共變異數

$\mathbf{P}_{k+1|k}$ ，表示如下：

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{s}}_{k+1|k} &= \sum_{i=0}^{2n} w_i \xi_{k+1|k}(i) \\ \mathbf{P}_{k+1|k} &= \sum_{i=0}^{2n} w_i [\xi_{k+1|k}(i) - \hat{\mathbf{s}}_{k+1|k}] [\xi_{k+1|k}(i) - \hat{\mathbf{s}}_{k+1|k}]^T + \mathbf{Q}_k\end{aligned}\quad (3-4- 7)$$

4. 利用測量方程式來進一步轉換 sigma 點，如下表示：

$$\zeta_{k+1|k}(i) = \mathbf{H} \xi_{k+1|k}(i) \quad (3-4- 8)$$

5. 觀測預測均值和相關共變異數因此可表示如下：

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{z}}_{k+1|k} &= \sum_{i=0}^{2n} w_i \zeta_{k+1|k}(i) \\ \mathbf{P}_{zz} &= \sum_{i=0}^{2n} w_i [\zeta_{k+1|k}(i) - \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k}] \cdot [\zeta_{k+1|k}(i) - \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k}]^T + \mathbf{R}_{k+1} \\ \mathbf{P}_{sz} &= \sum_{i=0}^{2n} w_i [\xi_{k+1|k}(i) - \hat{\mathbf{s}}_{k+1|k}] [\zeta_{k+1|k}(i) - \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k}]^T\end{aligned}\quad (3-4- 9)$$

其中 \mathbf{P}_{zz} 是測量方差矩陣， \mathbf{P}_{sz} 是測量值與狀態向量相互共變異數矩陣。

6. 計算 UKF 增益和更新狀態向量及共變異數矩陣，如下表示：

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{k+1} &= \mathbf{P}_{sz} \mathbf{P}_{zz}^{-1} \\ \hat{\mathbf{s}}_{k+1|k+1} &= \hat{\mathbf{s}}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{z}_{k+1} - \hat{\mathbf{z}}_{k+1|k}) \\ \mathbf{P}_{k+1|k+1} &= \mathbf{P}_{k+1|k} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{P}_{zz} \mathbf{K}_{k+1}^T\end{aligned}\quad (3-4- 10)$$

由這些具體步驟可知，UKF 演算法也是一種遞迴貝氏估計方法，該演算法適用於任意非線性模型，它不需要估算 Jacobian 矩陣和 Hessian 矩陣，對大部分非線性系統皆能獲取精確到一、二階的狀態均值和共變異數，其特點為實現比其他非線性估測法簡單，預測精度可以比 EKF 高，特別適合於目標追蹤系統。

第四章 所提之目標追蹤演算法

一般而言彈道係數為未知，彈道係數可能會影響追蹤效能，因此如何同時估計目標物彈道係數以及其運動狀態便成是一重要的課題，在本章中我們提出一方法來克服此問題，主要的想法是將彈道係數視為狀態之一讓KF一併的估計，從一些實驗數據中，我們得知在高空中彈道係數是速度的一線性函數，係數可視為固定，但在接近地面時斜率會變小，為簡單起見我們以一線性函數來描述彈道係數，使用線性模型的好處是未知參數較少，利用KF可以比較容易被估計。因此我們令 $\beta_k = a \times t_k + b$ ，其中 t_k 代表速度，因此狀態向量會多了兩個參數 a 和 b 。

4.1 彈道狀態方程式

考慮一三維參考座標 (x, y, z) ，令 (x_0, y_0, z_0) 為目標物在時間為 t_0 的座標， ϕ 為目標物的運動方向與 x - y 平面之間的夾角， θ 為目標物的運動方向投影在 x - y 平面上與 x 軸之間的夾角，如圖 7 所示：

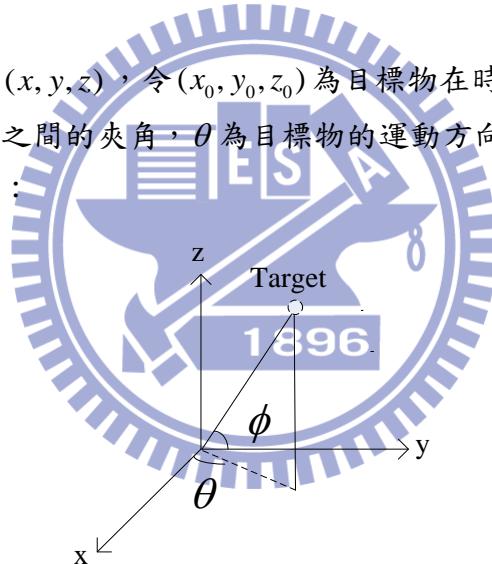


圖 7 雷達所觀測到目標物的座標

TBM 的運動軌跡離散時間之三維狀態方程式其表示法如下：

$$s(k+1) = \Phi s(k) + Gf(s(k)) + G[0, 0, -g]^T + w(k) \quad (4-1-1)$$

此處 $s(k)$ 為在時間為 t_k 的狀態向量，我們將其表示為 $s(k) = [x_k, \dot{x}_k, y_k, \dot{y}_k, u_k, \dot{u}_k, a_k, b_k]^T$ 。其中， x_k 、 y_k 及 u_k 分別為目標物在時間為 t_k 的各維度座標位置， \dot{x}_k 、 \dot{y}_k 及 \dot{u}_k 乃是目標物在時間為 t_k 的各維度座標速度， a 、 b 為彈道係數的係數值，與當時飛彈的速度組合，就成為彈道係數。從一些實驗數據中，我們得知彈道係數在追蹤的過程中跟速度有一線性的關係，因此我們以一線性函數來近似彈道係數，在三維情況下，分別假設有 TBM A 和 TBM B，如此，我們便可以進一步將 TBM A 和

TBM B 之彈道係數分別表示如下：

$$\begin{aligned}\beta_{A,k} &= a_A \times \sqrt{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{u}_k^2} / v_a + b_A \\ \beta_{B,k} &= a_B \times \sqrt{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{u}_k^2} / v_a + b_B\end{aligned}\quad (4-1-2)$$

其中， $\sqrt{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{u}_k^2}$ 為三軸所合成的速度， v_a 為音速。使用我們所提出的方法，彈道係數估測的問題，就變成兩個係數估測的問題，只要適時估出 a 和 b ，然後給定當時相對應的速度 $\sqrt{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{u}_k^2}$ ，便可以估出彈道係數，在上述的實驗數據中，當 $\sqrt{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{u}_k^2} / v_a$ 大於 3 時， a 與 b 值和馬赫數之間的斜率較大，而當 $\sqrt{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{u}_k^2} / v_a$ 小於等於 3 時， a 與 b 值和馬赫數之間的斜率較小。矩陣 Φ 及 \mathbf{G} 分別定義如下：

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-1-3)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} T^2/2 & 0 & 0 \\ T & 0 & 0 \\ 0 & T^2/2 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & T^2/2 \\ 0 & 0 & T \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-1-4)$$

非線性方程式 $f(s(k))$ 可以表示為下列方程式：

$$f(s(k)) = \frac{-0.5g\rho(u_k)(\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{u}_k^2)}{a_k \times (\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{u}_k^2)^{1/2} / v_a + b_k} [\cos(\phi)\cos(\theta), \cos(\phi)\sin(\theta), \sin(\phi)]^T \quad (4-1-5)$$

根據下列等式：

$$\begin{aligned}
 \cos(\phi)\cos(\theta) &= \frac{\sqrt{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2}}{\sqrt{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{u}_k^2}} \times \frac{\dot{x}_k}{\sqrt{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2}} = \frac{\dot{x}_k}{\sqrt{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{u}_k^2}} \\
 \cos(\phi)\sin(\theta) &= \frac{\sqrt{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2}}{\sqrt{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{u}_k^2}} \times \frac{\dot{y}_k}{\sqrt{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2}} = \frac{\dot{y}_k}{\sqrt{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{u}_k^2}} \\
 \sin(\phi) &= \frac{\dot{u}_k}{\sqrt{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{u}_k^2}}
 \end{aligned} \tag{4-1- 6}$$

我們可以進一步表示為：

$$f(\mathbf{s}(k)) = -0.5 \frac{g\rho(u_k)\sqrt{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{u}_k^2}}{a_k \times \sqrt{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{u}_k^2} / v_a + b_k} [\dot{x}_k, \dot{y}_k, \dot{u}_k]^T \tag{4-1- 7}$$

類似二維一樣， $\mathbf{w}(k)$ 的共變異矩陣可以表示如下：

$$\mathbf{R}_w = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{R}}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{R}}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{R}}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{R}}_{ab} \end{bmatrix} \tag{4-1- 8}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{R}}_n &= q_1 \begin{bmatrix} \frac{T^3}{3} & \frac{T^2}{2} \\ \frac{T^2}{2} & T \end{bmatrix} \\
 \bar{\mathbf{R}}_{ab} &= q_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4-1- 9} \tag{4-1- 10}$$

同樣的， q_2 類似於 q_1 是彈道係數的過程雜訊(processing noise)項的強度，此處假設彈道係數的 a_k 和 b_k 互相沒有關聯性，而兩個係數自己本身的相關度被正規化為 1。

4.2 雷達量測方程式

雷達座落於 $(x_R, y_R, z_R) = (0, 0, 0)$ ，也就是原點，目標物真正的距離、仰角和方位角(不是經由雷達所量測得到的)分別表示為：

$$\begin{aligned}
 \hat{r}_k &= \sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2} \\
 \hat{\phi}_k &= \tan^{-1} \left(\frac{z_k}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}} \right) \\
 \hat{\theta}_k &= \tan^{-1} \left(\frac{y_k}{x_k} \right)
 \end{aligned} \tag{4-2- 1}$$

因為有雜訊的存在和干擾，所以經由雷達所量測的信息與實際會有所偏差，所以雷達量

測到的距離、仰角和方位角角度分別表示為：

$$\begin{aligned}
 r_k &= \sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2} + \mu_k \\
 \phi_k &= \tan^{-1} \left(\frac{z_k}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}} \right) + \delta_k \\
 \theta_k &= \tan^{-1} \left(\frac{y_k}{x_k} \right) + \eta_k
 \end{aligned} \tag{4-2- 2}$$

此處， μ_k 、 δ_k 及 η_k 分別為量測距離、仰角和方位角的誤差。所以雷達量測資料可以更進一步表示為：

$$\begin{aligned}
 r_k &= \hat{r}_k + \mu_k \\
 \phi_k &= \hat{\phi}_k + \delta_k \\
 \theta_k &= \hat{\theta}_k + \eta_k
 \end{aligned} \tag{4-2- 3}$$

我們必須將雷達所量測到的資料信息，轉成和狀態方程式一樣的直角座標系，雷達量測到的 x-y-z 座標分量可以分別表示為：

$$\begin{aligned}
 z_{x,k} &= r_k \cos \phi_k \cos \theta_k \\
 &= (\hat{r}_k + \mu_k) \cos(\hat{\phi}_k + \delta_k) \cos(\hat{\theta}_k + \eta_k) \\
 &= (\hat{r}_k + \mu_k) (\cos \hat{\phi}_k \cos \delta_k - \sin \hat{\phi}_k \sin \delta_k) (\cos \hat{\theta}_k \cos \eta_k - \sin \hat{\theta}_k \sin \eta_k) \\
 &\approx \hat{r}_k \cos \hat{\phi}_k \cos \hat{\theta}_k - \hat{r}_k \eta_k \cos \hat{\phi}_k \sin \hat{\theta}_k - \hat{r}_k \delta_k \sin \hat{\phi}_k \cos \hat{\theta}_k + \mu_k \cos \hat{\phi}_k \cos \hat{\theta}_k \\
 &= x_k + v_{x,k}
 \end{aligned} \tag{4-2- 4}$$

$$\begin{aligned}
 z_{y,k} &= r_k \cos \phi_k \sin \theta_k \\
 &= (\hat{r}_k + \mu_k) \cos(\hat{\phi}_k + \delta_k) \sin(\hat{\theta}_k + \eta_k) \\
 &= (\hat{r}_k + \mu_k) (\cos \hat{\phi}_k \cos \delta_k - \sin \hat{\phi}_k \sin \delta_k) (\sin \hat{\theta}_k \cos \eta_k + \cos \hat{\theta}_k \sin \eta_k) \\
 &\approx \hat{r}_k \cos \hat{\phi}_k \cos \hat{\theta}_k + \hat{r}_k \eta_k \cos \hat{\phi}_k \cos \hat{\theta}_k - \hat{r}_k \delta_k \sin \hat{\phi}_k \sin \hat{\theta}_k + \mu_k \cos \hat{\phi}_k \cos \hat{\theta}_k \\
 &= y_k + v_{y,k}
 \end{aligned} \tag{4-2- 5}$$

$$\begin{aligned}
 z_{z,k} &= r_k \sin \phi_k \\
 &= (\hat{r}_k + \mu_k) \sin(\hat{\phi}_k + \delta_k) \\
 &= (\hat{r}_k + \mu_k) (\sin \hat{\phi}_k \cos \delta_k + \cos \hat{\phi}_k \sin \delta_k) \\
 &\approx (\hat{r}_k + \mu_k) (\sin \hat{\phi}_k + \delta_k \cos \hat{\phi}_k) \\
 &\approx \hat{r}_k \sin \hat{\phi}_k + \hat{r}_k \delta_k \cos \hat{\phi}_k + \mu_k \sin \hat{\phi}_k \\
 &= z_k + \hat{r}_k \delta_k \cos \hat{\phi}_k + \mu_k \sin \hat{\phi}_k \\
 &= z_n + v_{z,k}
 \end{aligned} \tag{4-2- 6}$$

此處， $v_{x,k}, v_{y,k}, v_{z,k}$ 分別表示如下：

$$\begin{aligned} v_{x,k} &= -\hat{r}_k \eta_k \cos \hat{\phi}_k \sin \hat{\theta}_k - \hat{r}_k \delta_k \sin \hat{\phi}_k \cos \hat{\theta}_k + \mu_k \cos \hat{\phi}_k \cos \hat{\theta}_k \\ v_{y,k} &= \hat{r}_k \eta_k \cos \hat{\phi}_k \cos \hat{\theta}_k - \hat{r}_k \delta_k \sin \hat{\phi}_k \sin \hat{\theta}_k + \mu_k \cos \hat{\phi}_k \cos \hat{\theta}_k \\ v_{z,k} &= \hat{r}_k \delta_k \cos \hat{\phi}_k + \mu_k \sin \hat{\phi}_k \end{aligned} \quad (4-2-7)$$

因此，我們可以將雷達量測方程式表示為下式：

$$z(k) = \mathbf{Hs}(k) + \mathbf{v}(k) \quad (4-2-8)$$

此處， $z(k) = [r_k \cos \phi_k \cos \theta_k \ r_k \cos \phi_k \sin \theta_k \ r_k \sin \phi_k]^T$ ， $\mathbf{v}(k) = [v_{x,k} \ v_{y,k} \ v_{z,k}]^T$ ，而量測矩

陣表示為：

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-2-9)$$

在上式量測矩陣 \mathbf{H} 的第一列第一行、第二列第三行和第三列第五行都是 1，是分別代表三維的位置信息。 $\mathbf{v}(k)$ 為此量測方程式的雜訊，均值為 0，共變異數矩陣為 $\mathbf{R}_v = E[\mathbf{v}(k)\mathbf{v}^H(k)]$ 。此共變異數矩陣的元素分別計算如下：

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_v(1,1) &= E[v_{x,k}v_{x,k}^H] \\ &= \hat{r}_k^2 \sigma_\eta^2 \cos^2 \hat{\phi}_k \sin^2 \hat{\theta}_k + \hat{r}_k^2 \sigma_\delta^2 \sin^2 \hat{\phi}_k \cos^2 \hat{\theta}_k + \sigma_\mu^2 \cos^2 \hat{\phi}_k \cos^2 \hat{\theta}_k \end{aligned} \quad (4-2-10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_v(2,2) &= E[v_{y,k}v_{y,k}^H] \\ &= \hat{r}_k^2 \sigma_\eta^2 \cos^2 \hat{\phi}_k \cos^2 \hat{\theta}_k + \hat{r}_k^2 \sigma_\delta^2 \sin^2 \hat{\phi}_k \sin^2 \hat{\theta}_k + \sigma_\mu^2 \cos^2 \hat{\phi}_k \sin^2 \hat{\theta}_k \end{aligned} \quad (4-2-11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_v(3,3) &= E[v_{z,k}v_{z,k}^H] \\ &= \hat{r}_k^2 \sigma_\delta^2 \cos^2 \hat{\theta}_k + \sigma_\mu^2 \sin^2 \hat{\theta}_k \end{aligned} \quad (4-2-12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_v(1,2) &= \mathbf{R}_v(2,1) = E[v_{x,k}v_{y,k}^H] \\ &= -\hat{r}_k^2 \sigma_\eta^2 \cos^2 \hat{\phi}_k \cos \hat{\theta}_k \sin \hat{\theta}_k + \hat{r}_k^2 \sigma_\delta^2 \sin^2 \hat{\phi}_k \cos \hat{\theta}_k \sin \hat{\theta}_k \\ &\quad + \sigma_\mu^2 \cos^2 \hat{\phi}_k \cos \hat{\theta}_k \sin \hat{\theta}_k \end{aligned} \quad (4-2-13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_v(1,3) &= \mathbf{R}_v(3,1) = E[v_{x,k}v_{z,k}^H] \\ &= -\hat{r}_k^2 \sigma_\eta^2 \sin \hat{\phi}_k \cos \hat{\phi}_k \cos \hat{\theta}_k + \sigma_\mu^2 \sin \hat{\phi}_k \cos \hat{\phi}_k \cos \hat{\theta}_k \end{aligned} \quad (4-2-14)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_v(2,3) &= \mathbf{R}_v(3,2) = E[v_{y,k} v_{z,k}^H] \\ &= -\hat{r}_k^2 \sigma_\eta^2 \sin \hat{\phi}_k \cos \hat{\phi}_k \sin \hat{\theta}_k + \sigma_\mu^2 \sin \hat{\phi}_k \cos \hat{\phi}_k \cos \hat{\theta}_k\end{aligned}\quad (4-2- 15)$$

假如使用 EKF，我們則須計算 Jacobian 矩陣，但若使用 UKF 則不需計算狀態方程式內非線性函數 $f(\mathbf{s}_k)$ 的 Jacobian 矩陣。 $\bar{\mathbf{F}}_{k+1|k}$ 之 Jacobian 矩陣定義為 $f(\mathbf{s}_k)$ 對 \mathbf{s}_k 做偏微分則可得：

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{F}}_{k+1|k} &= \frac{\partial f(\mathbf{s}_k)}{\partial \mathbf{s}_k} \Big|_{\mathbf{s}_k=\mathbf{s}_k|\mathbf{z}_k} \\ \frac{\partial f(\mathbf{s}_k)}{\partial \mathbf{s}_k} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_k} & \frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}_k} & \frac{\partial f_1}{\partial y_k} & \frac{\partial f_1}{\partial \dot{y}_k} & \frac{\partial f_1}{\partial u_k} & \frac{\partial f_1}{\partial \dot{u}_k} & \frac{\partial f_1}{\partial a_k} & \frac{\partial f_1}{\partial b_k} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_k} & \frac{\partial f_2}{\partial \dot{x}_k} & \frac{\partial f_2}{\partial y_k} & \frac{\partial f_2}{\partial \dot{y}_k} & \frac{\partial f_2}{\partial u_k} & \frac{\partial f_2}{\partial \dot{u}_k} & \frac{\partial f_2}{\partial a_k} & \frac{\partial f_2}{\partial b_k} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_k} & \frac{\partial f_3}{\partial \dot{x}_k} & \frac{\partial f_3}{\partial y_k} & \frac{\partial f_3}{\partial \dot{y}_k} & \frac{\partial f_3}{\partial u_k} & \frac{\partial f_3}{\partial \dot{u}_k} & \frac{\partial f_3}{\partial a_k} & \frac{\partial f_3}{\partial b_k} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (4-2- 16)$$

此外， $\frac{\partial f(\mathbf{s}_k)}{\partial \mathbf{s}_k}$ 的各個元素分別計算如下：

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_k} = 0 \quad (4-2- 17)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}_k} = -0.5 \times \frac{g}{\beta_k} \times \rho(u_k) \times \left[-\frac{a_k \dot{x}_k^2}{v_a \beta_k} + \frac{\dot{x}_k^2}{v_k} + v_k \right] \quad (4-2- 18)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_k} = 0 \quad (4-2- 19)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \dot{y}_k} = -0.5 \times \frac{g}{\beta_k} \times \rho(u_k) \times \dot{x}_k \times \dot{y}_k \times \left[-\frac{a_k}{v_a \beta_k} + \frac{1}{v_k} \right] \quad (4-2- 20)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_k} = -0.5 \times \frac{g}{\beta_k} \times \rho(u_k) \times (-\varepsilon) \times \dot{x}_k \times v_k \quad (4-2- 21)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \dot{u}_k} = -0.5 \times \frac{g}{\beta_k} \times \rho(u_k) \times \dot{x}_k \times \dot{y}_k \times \left[-\frac{a_k}{v_a \beta_k} + \frac{1}{v_k} \right] \quad (4-2- 22)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial a_k} = -0.5 \times \frac{g}{\beta_k^2} \times \rho(u_k) \times \dot{x}_k \times v_k \times \left(-\frac{v_k}{v_a} \right) \quad (4-2- 23)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial b_k} = -0.5 \times \frac{g}{\beta_k^2} \times \rho(u_k) \times \dot{x}_k \times v_k \quad (4-2- 24)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_k} = \mathbf{0} \quad (4-2- 25)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \dot{x}_k} = -0.5 \times \frac{g}{\beta_k} \times \rho(u_k) \times \dot{x}_k \times \dot{y}_k \times \left[-\frac{a_k}{v_a \beta_k} + \frac{1}{v_k} \right] \quad (4-2- 26)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y_k} = 0 \quad (4-2- 27)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \dot{y}_k} = -0.5 \times \frac{g}{\beta_k} \times \rho(u_k) \times \left[-\frac{d_1 \dot{y}_k^2}{v_a \beta_k} + \frac{\dot{y}_k^2}{v_k} + v_k \right] \quad (4-2- 28)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial u_k} = -0.5 \times \frac{g}{\beta_k} \times \rho(u_k) \times (-\varepsilon) \times \dot{y}_k \times v_k \quad (4-2- 29)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \dot{u}_k} = -0.5 \times \frac{g}{\beta_k} \times \rho(u_k) \times \dot{y}_k \times \dot{u}_k \times \left[-\frac{a_k}{v_a \beta_k} + \frac{1}{v_k} \right] \quad (4-2- 30)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial a_k} = -0.5 \times \frac{g}{\beta_k^2} \times \rho(u_k) \times \dot{y}_k \times v_k \times \left(-\frac{v_k}{v_a} \right) \quad (4-2- 31)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial b_k} = -0.5 \times \frac{g}{\beta_k^2} \times \rho(u_k) \times \dot{y}_k \times v_k \quad (4-2- 32)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_k} = 0 \quad (4-2- 33)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial \dot{x}_k} = -0.5 \times \frac{g}{\beta_k} \times \rho(u_k) \times \dot{x}_k \times \dot{u}_k \times \left[-\frac{a_k}{v_a \beta_k} + \frac{1}{v_k} \right] \quad (4-2- 34)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y_k} = 0 \quad (4-2- 35)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial \dot{y}_k} = -0.5 \times \frac{g}{\beta_k} \times \rho(u_k) \times \dot{y}_k \times \dot{u}_k \times \left[-\frac{a_k}{v_a \beta_k} + \frac{1}{v_k} \right] \quad (4-2- 36)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial u_k} = -0.5 \times \frac{g}{\beta_k} \times \rho(u_k) \times (-\varepsilon) \times \dot{u}_k \times v_k \quad (4-2- 37)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial \dot{u}_k} = -0.5 \times \frac{g}{\beta_k} \times \rho(u_k) \times \left[-\frac{a_k \dot{u}_k^2}{v_a \beta_k} + \frac{\dot{u}_k^2}{v_k} + v_k \right] \quad (4-2- 38)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial a_k} = -0.5 \times \frac{g}{\beta_k^2} \times \rho(u_k) \times \dot{u}_k \times v_k \times \left(-\frac{v_k}{v_a} \right) \quad (4-2- 39)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial b_k} = -0.5 \times \frac{g}{\beta_k^2} \times \rho(u_k) \times \dot{u}_k \times v_k \quad (4-2- 40)$$

從(4-2-18)到(4-2-40)式中 $v_k = \sqrt{\dot{x}_k^2 + \dot{y}_k^2 + \dot{u}_k^2}$ 。

初始值的準確性直接影響濾波的精確度，嚴重的話甚至導致濾波器發散。若能夠得知彈道係數 a 值和 b 值的初始值，那所有問題將可迎刃而解。但由於係數 a 值和 b 值無法由雷達所量測的任何信息有關，所以估計出 a 值和 b 值是一件相當困難的工作，至此，我們無法得知 a、b 的初始值，在此我們提出一種方法，假設初始值 a_0 採用一個區間分

布即 $a_0 \in [a_L, a_u]$ ，同樣的，初始值 b_0 也採用一個區間分布即 $b_0 \in [b_L, b_u]$ ，再取其中間值，也就是 $a_0 = (a_L + a_u)/2$ 、 $b_0 = (b_L + b_u)/2$ 。

當給定參數 a_U, a_L, b_U, b_L 後，利用公式就可以分別得到 a_0, b_0 的均值和標準差估計值，

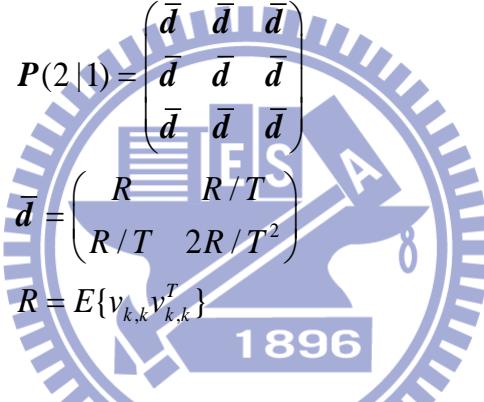
分別作為 a_0, b_0 的狀態初始值和共變異數值的初始值。接下來，我們需要初始值 $\hat{s}(2|\mathbf{z}_1)$ 及 $\mathbf{P}(2,1)$ ，為了確保濾波器初始值的理論與實際的一貫性，一種較為合理作法是在 $k=1$ 和 $k=2$ 兩個時刻都取量測值，這叫做兩點差分法[4]，這裡是使用雷達量測值來初步估計 $\hat{s}(2|\mathbf{z}_1)$ 此處，令 $\mathbf{z}(k) = [z_{x,k}, z_{y,k}, z_{u,k}]^T$ ，則 $\hat{s}(2|\mathbf{Z}_1)$ 的估計值可以表示如下：

$$\hat{s}(2|\mathbf{z}_1) \approx \hat{s}(2|\mathbf{z}_2) = \left[z_{x,2}, \frac{z_{x,2} - z_{x,1}}{T}, z_{y,2}, \frac{z_{y,2} - z_{y,1}}{T}, z_{u,2}, \frac{z_{u,2} - z_{u,1}}{T}, E(a_0), E(b_0) \right]^T \quad (4-2-41)$$

此處， $E(a_0)$ 為彈道係數之 a 係數初始估計均值為 $E(a_0) = (a_L + a_u)/2$ ， $E(b_0)$ 為彈道係數之 b 係數初始估計均值為 $E(b_0) = (b_L + b_u)/2$ 。 $\mathbf{P}(2|1)$ 利用兩點差分法所定義的初始共變異數矩陣是：

$$\mathbf{P}(2|1) = \begin{pmatrix} \bar{d} & \bar{d} & \bar{d} \\ \bar{d} & \bar{d} & \bar{d} \\ \bar{d} & \bar{d} & \bar{d} \end{pmatrix}$$

$$\bar{d} = \begin{pmatrix} R & R/T \\ R/T & 2R/T^2 \end{pmatrix}$$

$$R = E\{v_{k,k}v_{k,k}^T\}$$


(4-2-42)

$$\begin{aligned} \mathbf{\epsilon}(2,1) &= s(2) - \bar{s}(2|\mathbf{z}_1) \\ &= \left[x_2, \frac{x_2 - x_1}{T}, y_2, \frac{y_2 - y_1}{T}, u_2, \frac{u_2 - u_1}{T}, E(a_0), E(b_0) \right]^T \\ &= \left[z_{x,2}, \frac{z_{x,2} - z_{x,1}}{T}, z_{y,2}, \frac{z_{y,2} - z_{y,1}}{T}, z_{u,2}, \frac{z_{u,2} - z_{u,1}}{T}, E(a_0) + v_{a2}, E(b_0) + v_{b2} \right]^T \\ &= \left[-v_{x,2}, \frac{-v_{x,2} + v_{x,1}}{T}, -v_{y,2}, \frac{-v_{y,2} + v_{y,1}}{T}, -v_{u,2}, \frac{-v_{u,2} + v_{u,1}}{T}, -v_{a2}, -v_{b2} \right]^T \end{aligned} \quad (4-2-43)$$

在此假設彈道係數的過程雜訊 (process noise) 和位置、速度雜訊沒有相關。

$\mathbf{P}(2,1) \neq E[\mathbf{\epsilon}(2|\mathbf{z}_1)]$ 可以表示成下式：

$$P(2,1) = \begin{bmatrix} \sigma_{v_x v_x}^2 & \frac{\sigma_{v_x v_x}^2}{T} & \sigma_{v_x v_y}^2 & \frac{\sigma_{v_x v_y}^2}{T} & \sigma_{v_x v_z}^2 & \frac{\sigma_{v_x v_z}^2}{T} & 0 & 0 \\ \frac{\sigma_{v_x v_x}^2}{T} & 2 \frac{\sigma_{v_x v_x}^2}{T^2} & \frac{\sigma_{v_x v_y}^2}{T} & 2 \frac{\sigma_{v_x v_y}^2}{T^2} & \frac{\sigma_{v_x v_z}^2}{T} & 2 \frac{\sigma_{v_x v_z}^2}{T^2} & 0 & 0 \\ \sigma_{v_x v_y}^2 & \frac{\sigma_{v_x v_y}^2}{T} & \sigma_{v_y v_y}^2 & \frac{\sigma_{v_y v_y}^2}{T} & \sigma_{v_y v_z}^2 & \frac{\sigma_{v_y v_z}^2}{T} & 0 & 0 \\ \frac{\sigma_{v_x v_y}^2}{T} & 2 \frac{\sigma_{v_x v_y}^2}{T^2} & \frac{\sigma_{v_y v_y}^2}{T} & 2 \frac{\sigma_{v_y v_y}^2}{T^2} & \frac{\sigma_{v_y v_z}^2}{T} & 2 \frac{\sigma_{v_y v_z}^2}{T^2} & 0 & 0 \\ \sigma_{v_x v_z}^2 & \frac{\sigma_{v_x v_z}^2}{T} & \sigma_{v_y v_z}^2 & \frac{\sigma_{v_y v_z}^2}{T} & \sigma_{v_z v_z}^2 & \frac{\sigma_{v_z v_z}^2}{T} & 0 & 0 \\ \frac{\sigma_{v_x v_z}^2}{T} & 2 \frac{\sigma_{v_x v_z}^2}{T^2} & \frac{\sigma_{v_y v_z}^2}{T} & 2 \frac{\sigma_{v_y v_z}^2}{T^2} & \frac{\sigma_{v_z v_z}^2}{T} & 2 \frac{\sigma_{v_z v_z}^2}{T^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma^2(a_0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma^2(b_0) \end{bmatrix} \quad (4-2-44)$$

在本章所提的演算法是利用 EKF 和 UKF 進行估算彈道和彈道係數，狀態方程式和量測方程式及其相關變數，EKF 和 UKF 皆一體適用，主要的差別是 UKF 不需計算 Jacobian 矩陣以及濾波方程式稍有不同。



第五章 模擬結果

本章節使用 Matlab 軟體程式進行 Monte - Carlo 方法模擬，分別使用 EKF、UKF 在二維和三維下進行彈道模擬並對追蹤效能做評估，在二維情景下，假設彈道係數是已知，且為一個固定常數。而在三維情景下，我們將彈道係數加入估測，並且和已知彈道係數的情境做性能比較。

在預測統計分析中，一般需定義一些誤差指標，作為評價和比較各種預測模型和預測方法的依據，我們使用濾波誤差的平均值(error mean)、濾波誤差的標準差(error standard deviation)和估計精度均方根誤差(Root Mean Square Error, RMSE)作為效能指標。

在我們的系統模型中存有多變數高斯雜訊(具有均值為零和特定共變異數)，為產生此雜訊我們使用 Cholesky 分解法。首先產生一不相關隨機變數向量高斯純量序列 $\{d_i | i = 1, 2, 3, \dots\}$ 具有零均值和一個單位共變異數。

$$E\{d_i\} \in N(0,1) \quad \text{for all } i, \text{ and}$$

$$E\{d_i, d_j\} = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq j \\ 1 & \text{if } i = j \end{cases} \quad (5-1)$$

接著我們利用上式這些來產生 n 個高斯向量 \mathbf{u}_k 具有零均值和等對角共變異數矩陣。

$$\mathbf{u}_k = [d_{k+1}, d_{k+2}, \dots, d_{k+n}]$$

$$E\{\mathbf{u}_k\} = \mathbf{0}$$

$$E\{\mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T\} = \mathbf{I}_n \quad (5-2)$$

最後將這些向量用來產生 n 個向量 \mathbf{w}_k 使其具有零均值和共變異數矩陣為 \mathbf{P} 。其做法如下，令

$$\mathbf{C}\mathbf{C}^T = \mathbf{P} \quad (5-3)$$

使用 Cholesky 分解 \mathbf{P} 我們可得 \mathbf{C} ，依據下列準則我們可產生 n 個向量 \mathbf{w}_k ：

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{C}\mathbf{u}_k \quad (5-4)$$

我們很容易驗證，這些 $\{\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-1}\}$ 具有均值為零和共變異數為 \mathbf{P} 。

$$E\{\mathbf{w}_k\} = \mathbf{C}E\{\mathbf{u}_k\} = \mathbf{0}$$

$$E\{\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T\} = E\{(\mathbf{C}\mathbf{u}_k)(\mathbf{C}\mathbf{u}_k)^T\} = \mathbf{C}\mathbf{I}_n \mathbf{C}^T = \mathbf{P} \quad (5-5)$$

5.1 已知彈道係數下 EKF 對二維彈道追蹤

在本節中，我們將模擬 TBM 在二維的再入段飛行，然後使用 EKF 追蹤彈道，各項濾波誤差性能指標將由模擬顯示，假設彈道係數為已知的固定常數，其系統相關參數分別設定如下：

表 1 模擬二維彈道相關系統參數

參數	值(單位)	參數	值(單位)
β	$40000(kg/ms^2)$	x_0	100(km)
T	2(sec)	y_0	245(km)
q_1	$1(m^2/s^3)$	v_0	2290(m/s)
σ_u	10 (m)	ϕ_0	190(度)
σ_δ	0.01(radian)	M	100(次)
T_{tr}	126(sec)		

上表中， β 為彈道係數，T 為相列雷達對 TBM 追蹤間隔時間， q_1 為目標模型的過程

(Process)雜訊強度， σ_u 為相列雷達量測距離的標準差， σ_δ 為相列雷達量測角度的標準

差， T_{tr} 為相列雷達總共追蹤的時間，其追蹤的時間是由大氣層至落地點為止。 x_0 、 y_0 、
 v_0 為 TBM 初始的位置和速度， ϕ_0 為 TBM 初始的方向與水平軸之間的角度，M 為模擬的總
 次數。

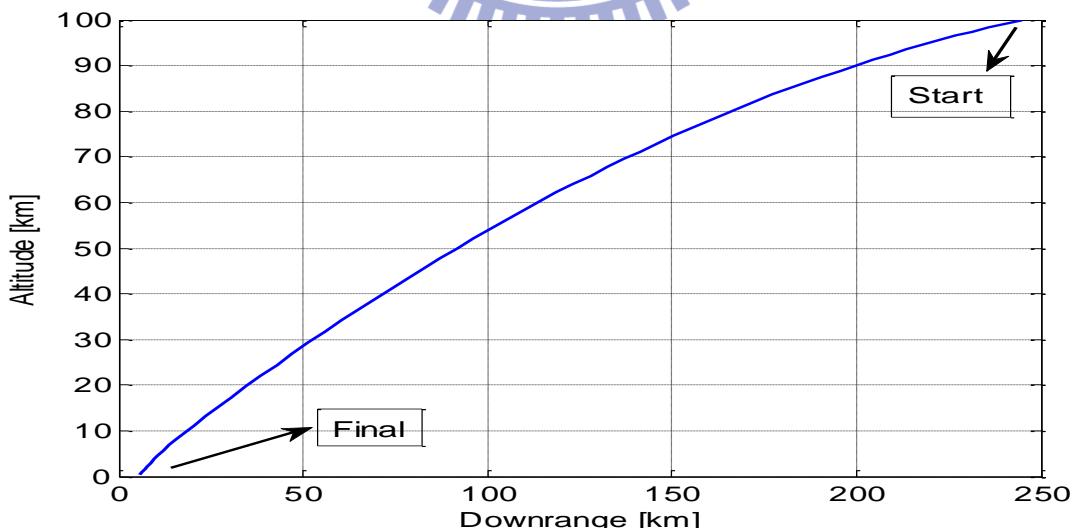


圖 8 TBM 軌跡

圖 8 為模擬的軌跡，Downrange 代表在 X 軸飛行的距離，Y 軸代表 TBM 所在的高度，在右上角的軌跡代表是 TBM 追蹤的起始點，而左下角則代表 TBM 飛行終了。由此圖可知，

我們是模擬 TBM 從大氣層進入，大約是 100km 的高度，往攻擊目標(左下角)飛行，至落地點為止。

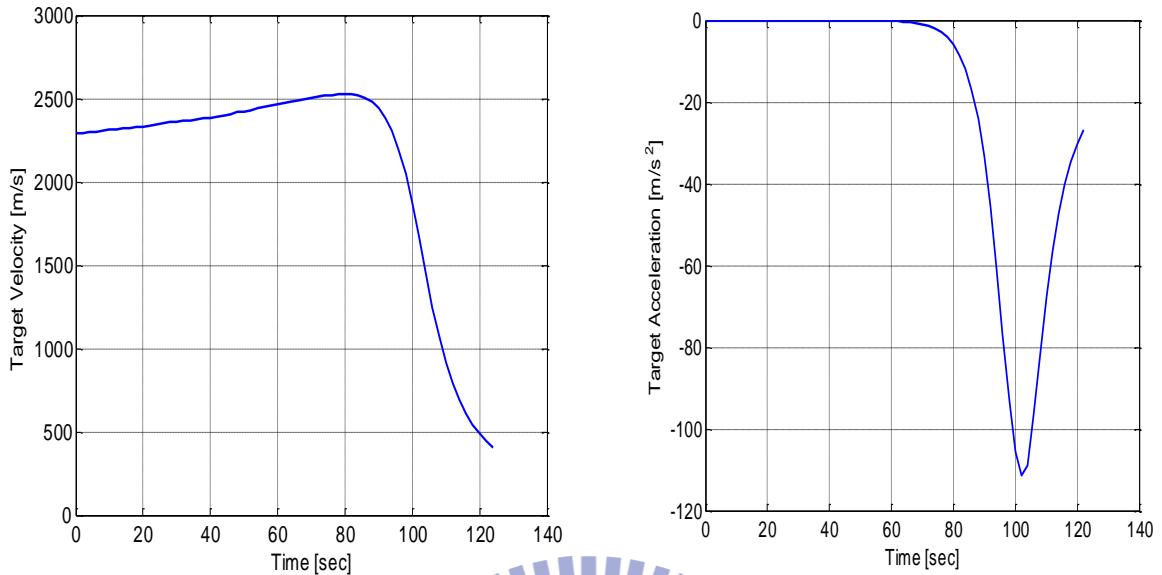


圖 9 TBM 的速度和加速度

圖 9 分別顯示 TBM 速度和加速度的變化，在速度方面，由於 TBM 處於高空中，空氣稀薄，空氣阻力小，所以速度愈來愈快。但 TBM 高度愈低時空氣阻力愈來愈大，所以速度就變慢。至於在加速度方面，剛開始沒有甚麼加速度，但由於高度降低，大氣密度和彈道係數逐漸有影響，加速度愈來愈快，快要接近地面時，受到空氣阻力增大的緣故，使得加速度愈來愈慢。

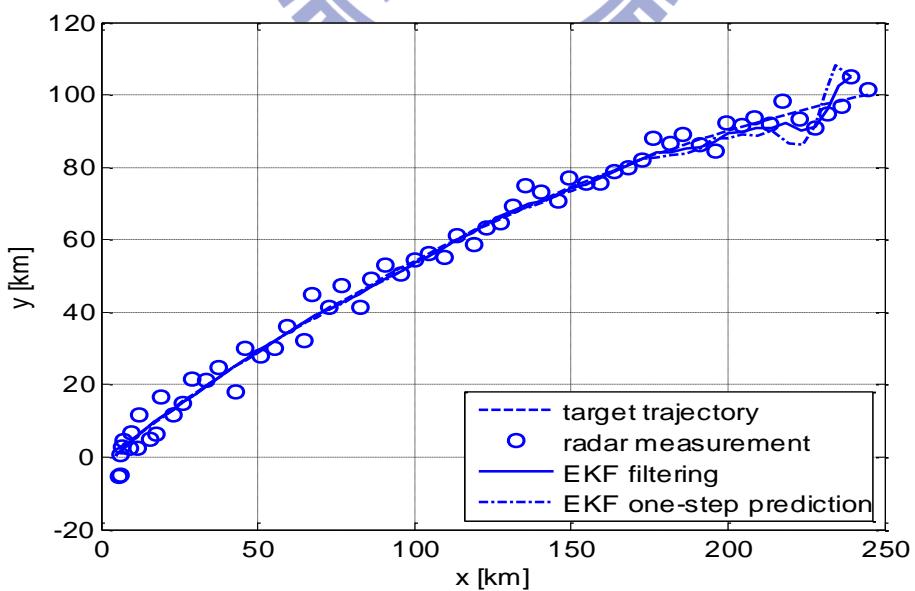


圖 10 目標和雷達量測及 EKF(估測及預測)彈道追蹤示意圖

圖 10 顯示 TBM 目標的軌跡，雷達所量測的位置有加上量測的誤差，以及 EKF 估測及預測的軌道，在圖 11 中虛線代表飛行軌跡，“o”則代表雷達所量測到的 TBM 的位置，因

為有考慮有雷達量測上的誤差，所以量測到的軌跡線會有不規則的上下移動，實線代表 EKF 濾波輸出，也就是追蹤的軌跡，在圖右上角我們可以發現 EKF 再開始追蹤誤差值很大，不過經一段時間，EKF 便可完全鎖定目標物，一直到落地點為止。長短虛線表示 EKF 一階的預測值，從圖中我們可以看出跟 EKF 濾波輸出差不多。

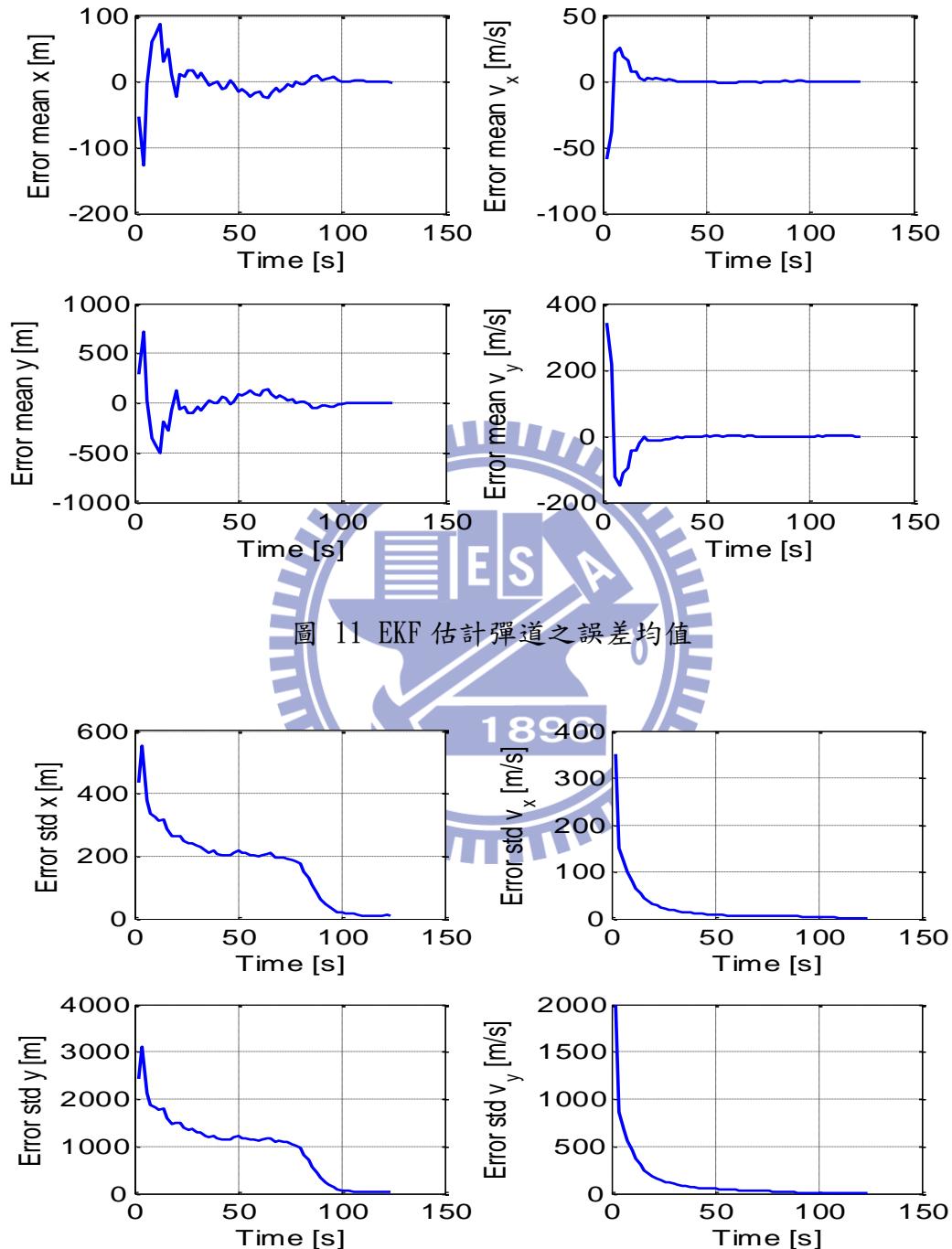


圖 12 EKF 估計彈道之誤差標準差

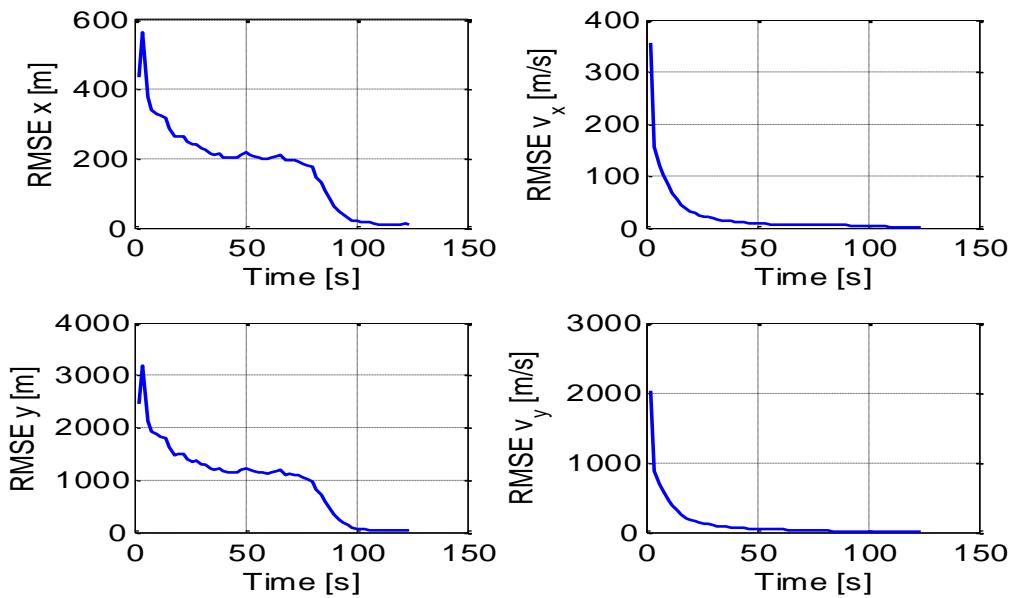


圖 13 EKF 估計彈道之均方根誤差

由圖 11 至圖 13 分別顯示位置和速度濾波誤差的平均值、濾波誤差的標準差和估計精度均方根誤差，從這些指標可以看出 EKF 的濾波性能。誤差的平均值經過不斷的誤差修正，誤差均值最後會趨近於 0。標準差也會隨著時間的變化，其值愈來愈小，最後慢慢趨近於 0。均方根誤差，也和其他兩者一樣，到最後也會趨近於 0。

5.2 已知彈道係數下 UKF 對二維彈道追蹤

為了方便比較，參數設定完全和 EKF 一樣，圖 14 至圖 18 為 UKF 模擬結果。

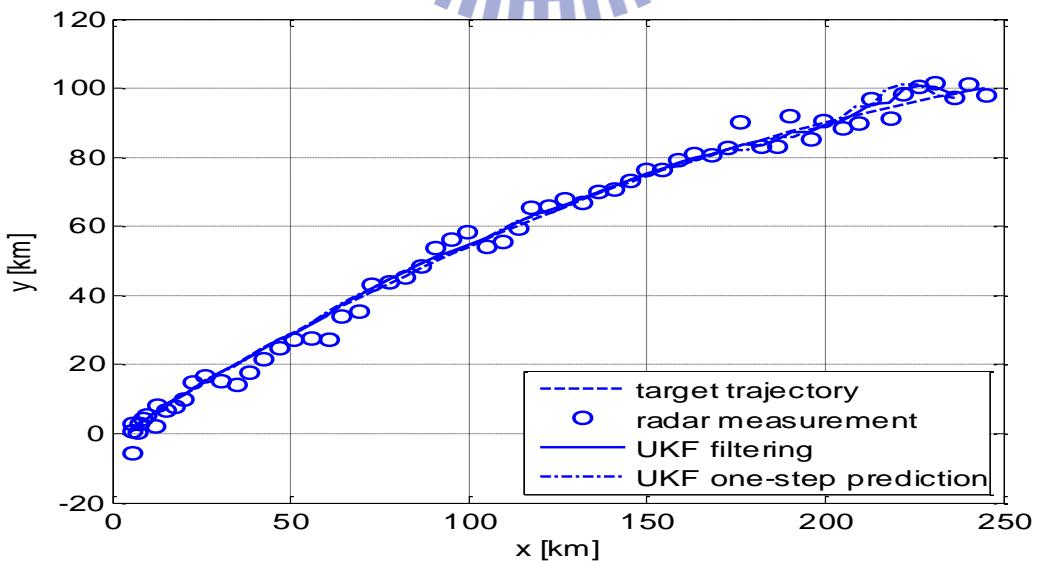


圖 14 目標和雷達量測及 UKF(估測及預測)彈道追蹤示意圖

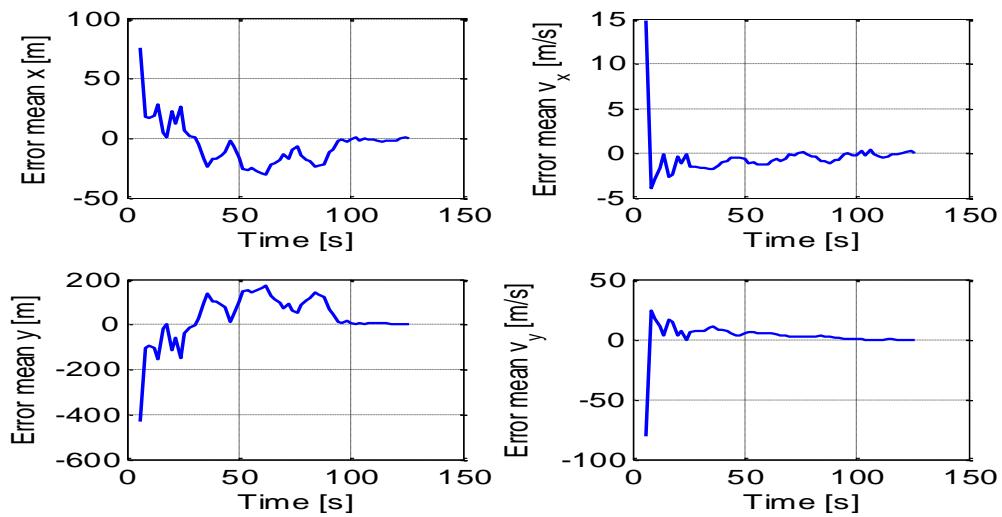


圖 15 UKF 估計彈道之誤差均值

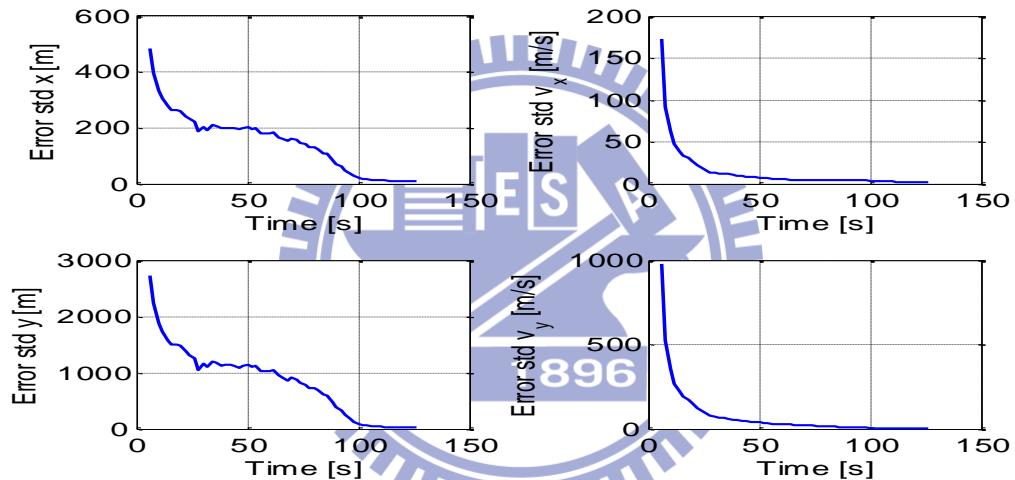


圖 16 UKF 估計彈道之誤差標準差

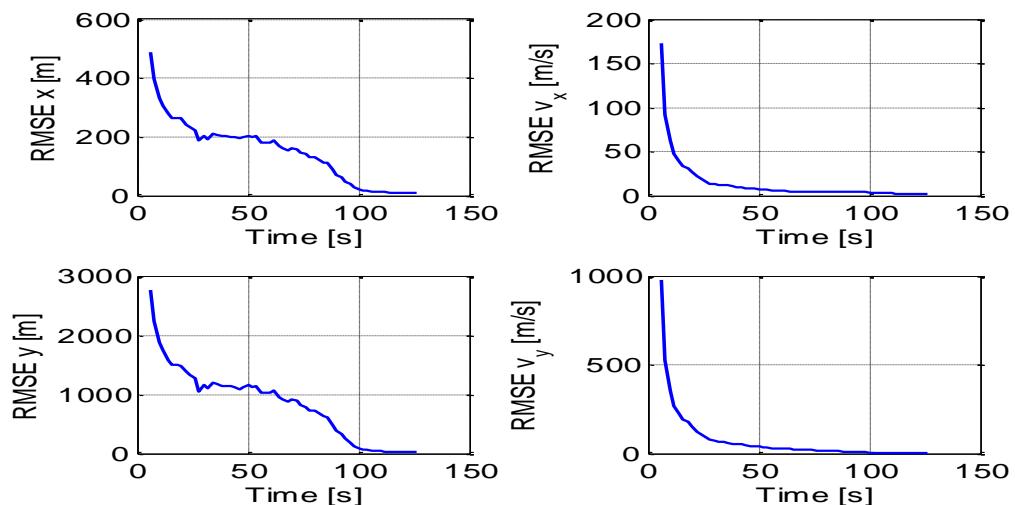


圖 17 UKF 估計彈道之均方根誤差

由這些圖中我們可以看出 UKF 和 EKF 兩者性能比較差不多。在已知固定彈道係數下，不管 UKF 和 EKF 都有很好的表現。

5.3 未知彈道係數下 EKF 對三維彈道追蹤

由於實際的彈道是在三個維度且彈道係數是未知的，在此章節和下一個章節裡，我們將分別使用 EKF 和 UKF 模擬在三維度下的彈道並且假設彈道係數是未知的情況，然後對彈道係數進行估測及彈道追蹤，其模擬彈道追蹤是從大氣層平均高度約 100 公里至約 20 公里處，因為 TBM 只要進入高度 30 公里處以下，便是反 TBM 擋截範圍。最後並和假設在已知彈道係數情況下兩者互相比較其濾波輸出誤差性能。我們模擬了兩種不同彈道係數之 TBM 稱之為 TBM A 和 TBM B，而在未知彈道係數的情況下，我們使用 EKF 及 UKF 分別 TBM A 和 TBM B 之彈道係數做估計並對其狀態做追蹤，其相關參數如表 2，在表中，

各參數所代表意義為： q_2 為目標模型的過程(Process)雜訊強度， σ_u 為相列雷達量測距離的標準差， σ_ϕ 為相列雷達量測仰角的標準差， σ_δ 為相列雷達量測方位角的標準差，

x_0 、 y_0 、 z_0 和 v_0 為 TBM 初始的位置和速度， ϕ_0 為 TBM 初始仰角角度， θ_0 為 TBM 初始水平角角度。由於接近地面時速度和馬赫數斜率會變小，所以我們假設 TBM 的速度之馬赫數大於等於 3 時，TBM A 的 a 值為 5884，b 值為 6950，而 TBM B 的 a 值為 8118，b 值為 13450。當 TBM 的速度之馬赫數小於 3 時(接近地面)，TBM A 的 a 值為 392，b 值為 16642，TBM B 的 a 值為 541，b 值為 35450。一般 TBM 進入大氣層的速度大約是 9、10 馬赫左右，我們也以大約快接近 10 馬赫(300 m/s)的初始速度來進行模擬。

1. 情況一：分別假設在已知和未知彈道係數情況下，皆使用 EKF 估計 TBM A 的彈道，然後進行兩者(已知和未知)濾波性能比較。

圖 18 為已知 TBM A 彈道係數所畫出的彈道圖，由虛線表示。未知彈道係數下為 EKF 所估出的彈道由實線表示，而下一取樣時間的彈道預測由長短虛線表示。圓圈則代表雷達所量測到的位置。圖 19 為 TBM A 速度，圖 20 至 22 為彈道係數為已知和未知之追蹤效能比較圖。

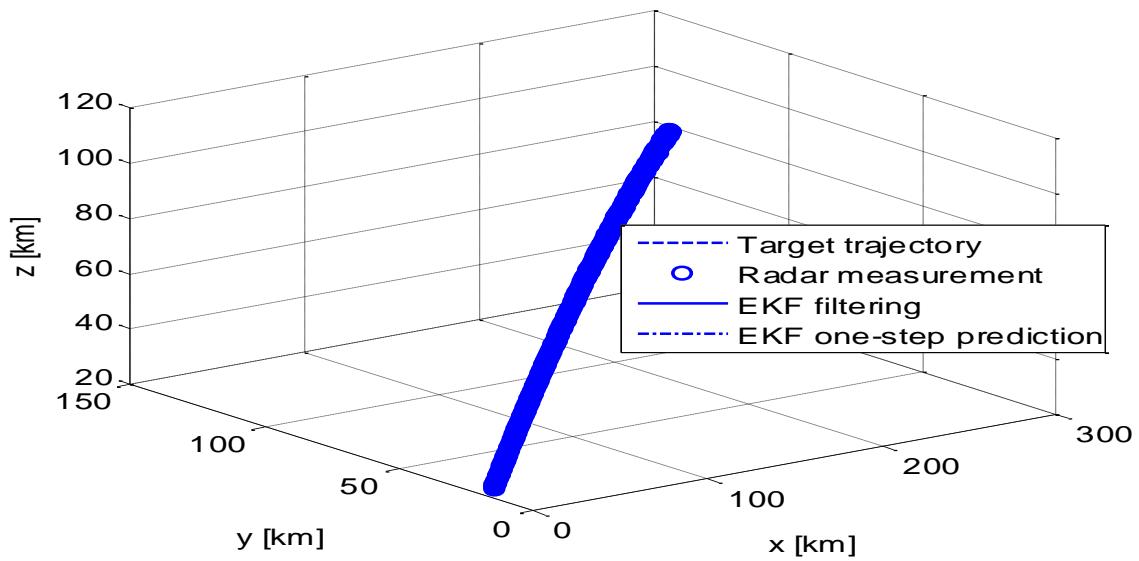


圖 18 TBM A 和雷達量測及 EKF(未知彈道係數)估測和預估彈道追蹤圖

表 2 模擬三維彈道相關系統參數

參數	值(單位)	參數	值(單位)
已知彈道係數	TBM A or TBM B	x_0	232(km)
未知彈道係數	EKF/UKF 估測	y_0	100(km)
T	0.1(sec)	z_0	100(km)
q_1	$1(m^2 / s^3)$	v_0	3000(m/s)
q_2	$1(m^2 / s^3)$	ϕ_0	10(度)
σ_u	10 (m)	θ_0	30(度)
σ_η	0.01(radian)	run	100(次)
σ_δ	0.01(radian)	T_{tr}	83(sec)

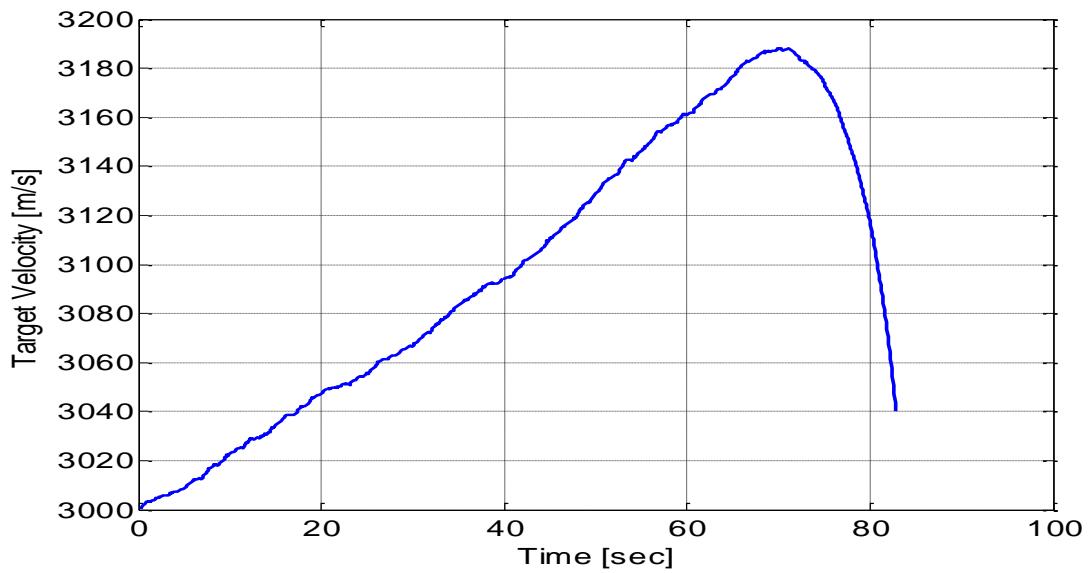


圖 19 TBM A 速度

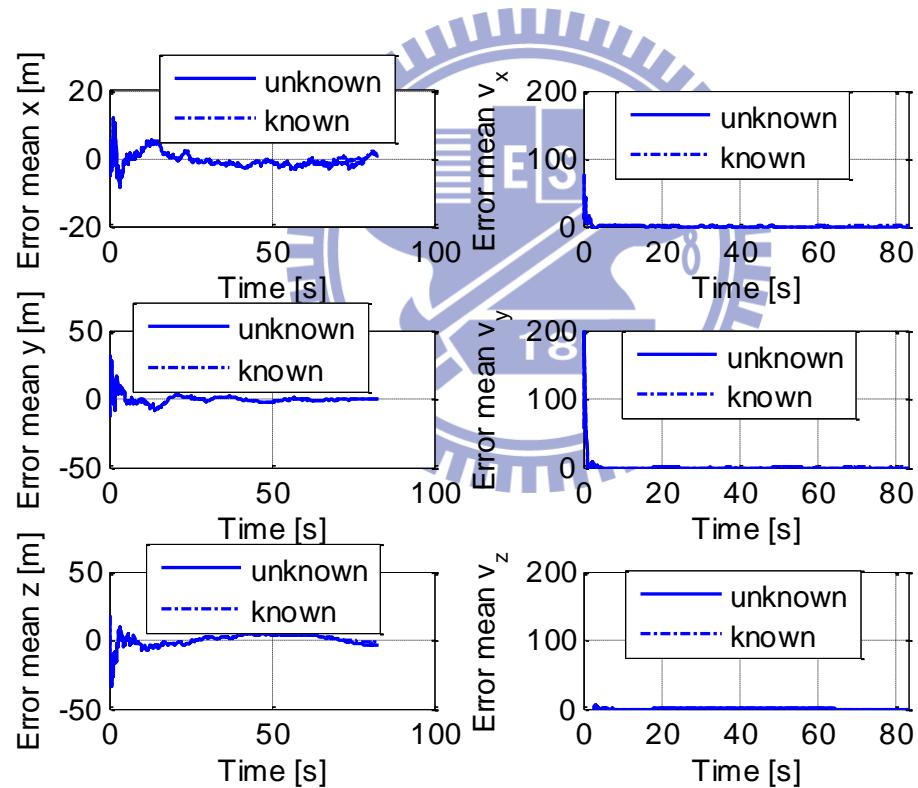


圖 20 EKF 估測(已知和未知彈道係數)彈道之誤差均值

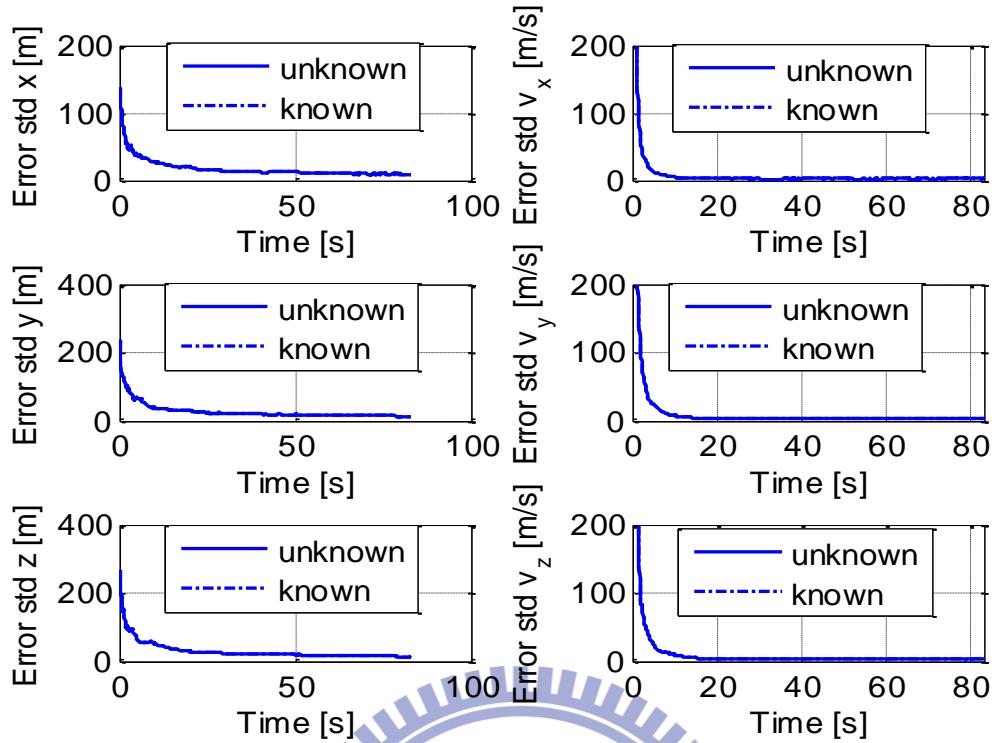


圖 21 EKF 估測(已知和未知彈道係數)彈道之誤差標準差

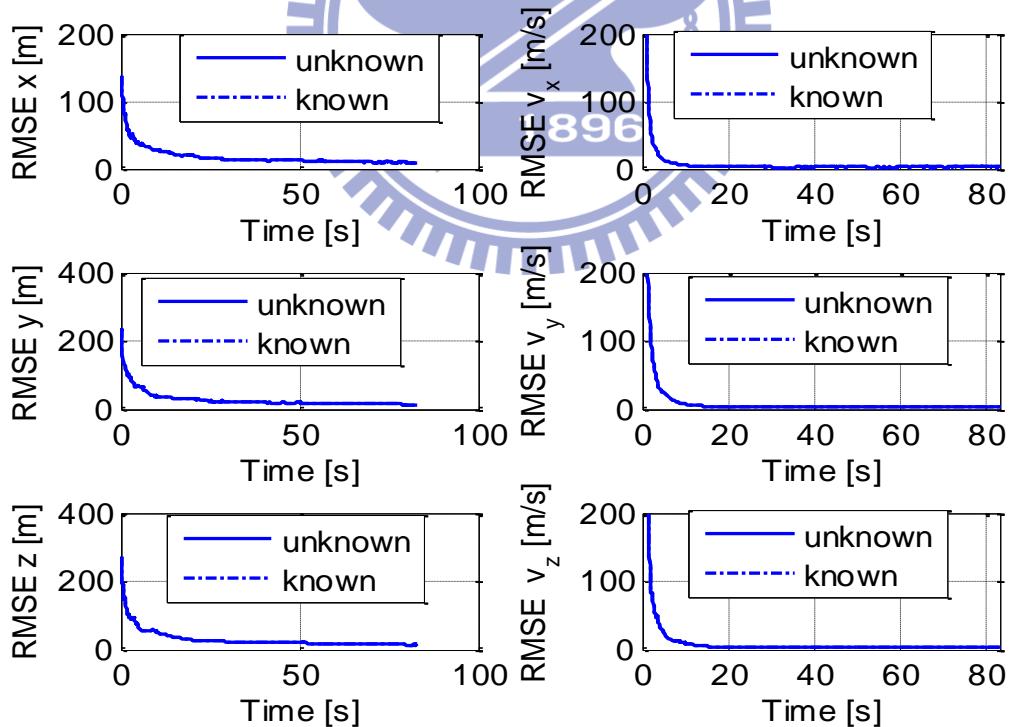


圖 22 EKF 估測(已知和未知彈道係數)彈道之均方根誤差

在圖 20 至圖 22 中實線代表未知彈道係數由 EKF 所估測得到的彈道，點虛線則代表事先已知彈道係數。為了較精確的比較性能，我們計算最後一點的位置和速度之均方根誤差

值，結果如表 3 所示，由此表可知，追蹤性能在彈道係數為已知或未知的情況下幾乎是一樣的。

表 3 EKF 估測 TBM A 的位置和速度之均方根誤差

RMSE	X(m)	Y(m)	Z(m)	V _x (m/s)	V _y (m/s)	V _z (m/s)
Known β	9.6	13.6	14.5	2.5	2.6	2.8
Unknown β	9.6	13.6	14.5	3.0	2.7	3.2

2. 情況二：分別假設在已知和未知彈道係數情況下，皆使用 EKF 估計 TBM B 的彈道，然後進行兩者(已知和未知)濾波性能比較。

圖 23 為已知 TBM B 彈道係數所畫出的彈道圖，由虛線表示。在未知彈道係數下為 EKF 所估出的彈道由實線表示，而下一取樣時間的預測由長短虛線表示。圓圈則代表雷達所量測到的位置。圖 24 至 26 為彈道係數為已知和未知之追蹤效能比較圖。

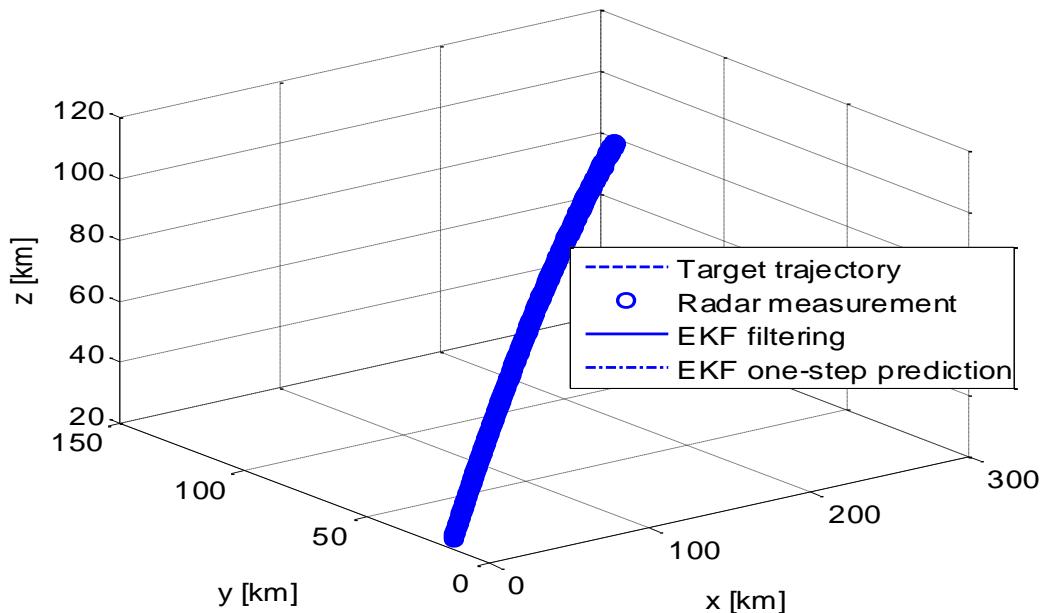


圖 23 TBM B 和雷達量測及 EKF(未知彈道係數)估測和預估彈道追蹤圖

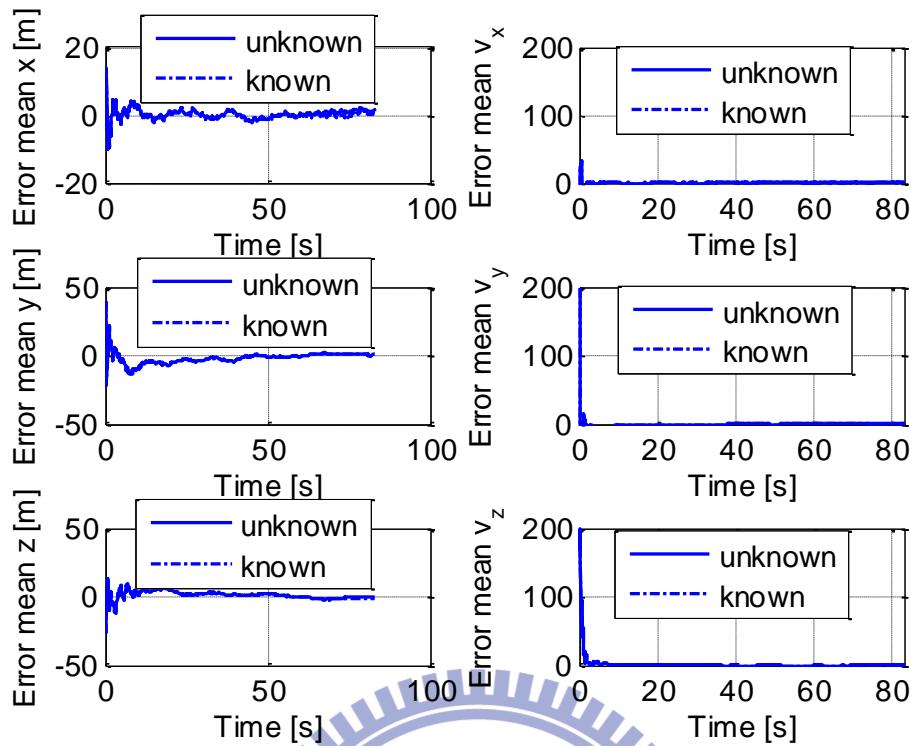


圖 24 EKF 估測(已知和未知彈道係數)彈道之誤差均值

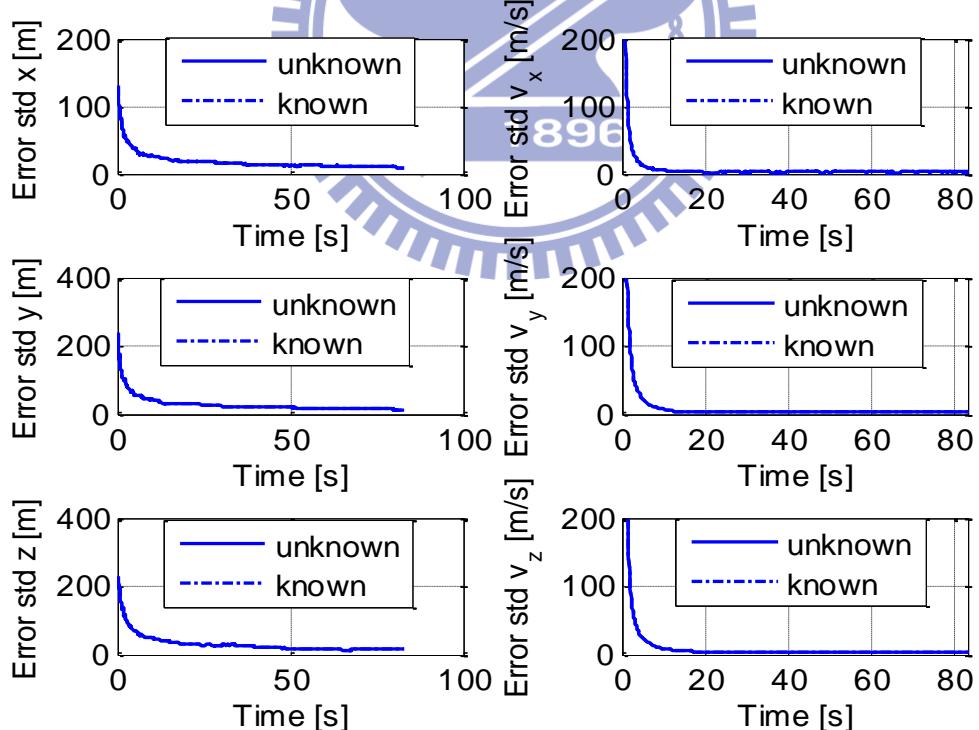


圖 25 EKF 估測(已知和未知彈道係數)彈道之誤差標準差

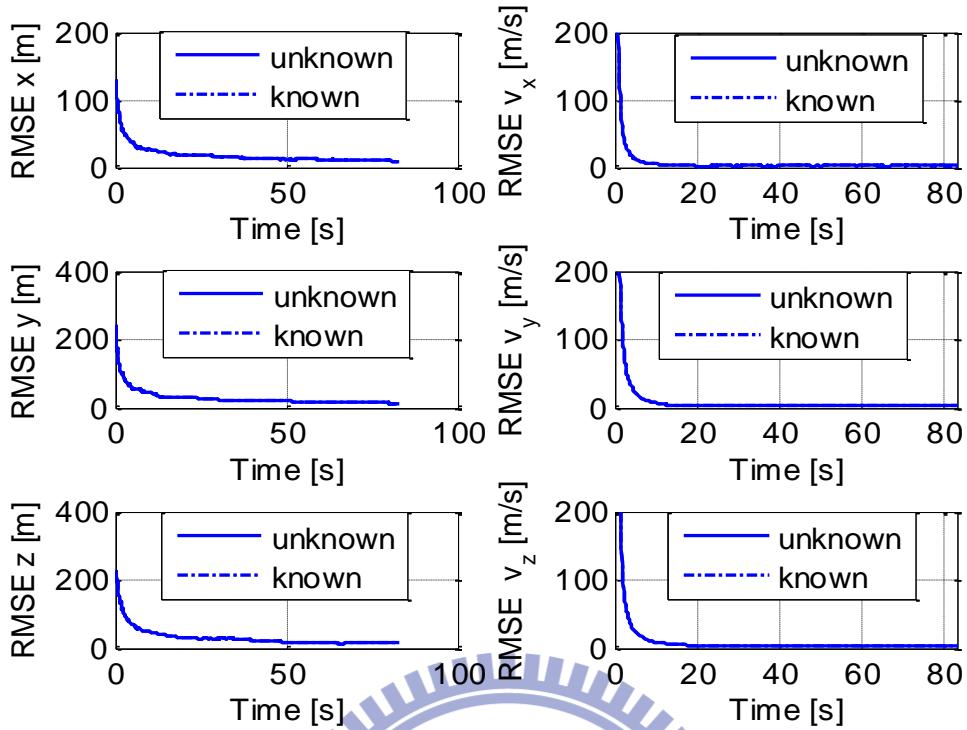


圖 26 EKF 估測(已知和未知彈道係數)彈道之均方根誤差

在此我們也計算最後一點的位置和速度之均方根誤差值，結果如表 4 所示，從表中我們可以發現追蹤性能和 TBM A 是類似的。綜合本節模擬結果，我們可知 EKF 在於事先得知或未知彈道係數兩種情況下，對 TBM A 或 TBM B 的估測性能幾乎是一樣的。

表 4 EKF 估測 TBM B 的位置和速度之均方根誤差

RMSE	X(m)	Y(m)	Z(m)	V _x (m/s)	V _y (m/s)	V _z (m/s)
Known β	9.1	14.2	14.9	2.4	2.8	2.8
Unknown β	9.2	14.2	15.1	3.0	2.8	3.2

5.4 未知彈道係數下 UKF 對三維彈道追蹤

在此章節我們將使用 UKF 來對未知彈道係數情況下對三維彈道進行模擬追蹤。為了方便和 EKF 比較，相關系統參數設定和 EKF 一樣。

1. 情況一：分別假設在已知和未知彈道係數情況下，皆使用 UKF 估計 TBM A 的彈道，然後進行兩者(已知和未知)濾波性能比較。

圖 27 為已知 TBM A 彈道係數所畫出的彈道圖，由虛線表示。在未知彈道係數下為 EKF 所估出的彈道由實線表示和下一步彈道的預測由長短虛線表示。圓圈則代表雷達所量測到的位置。圖 28 至 30 為彈道係數為已知和未知之追蹤效能比較圖。

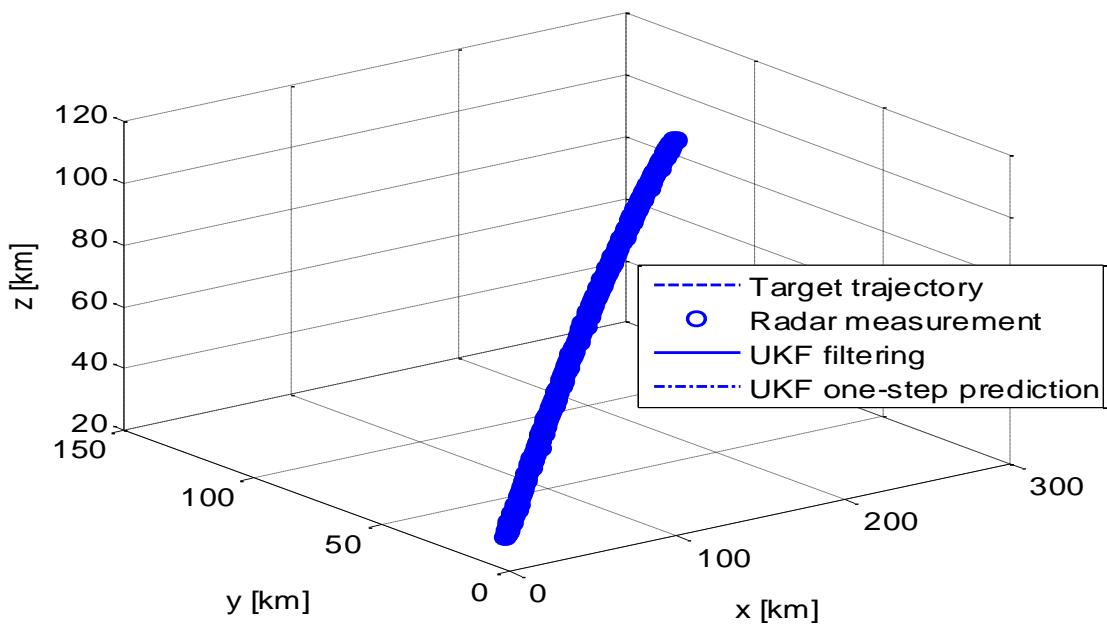


圖 27 TBM A 和雷達量測及 UKF(未知彈道係數)估測和預估彈道追蹤圖

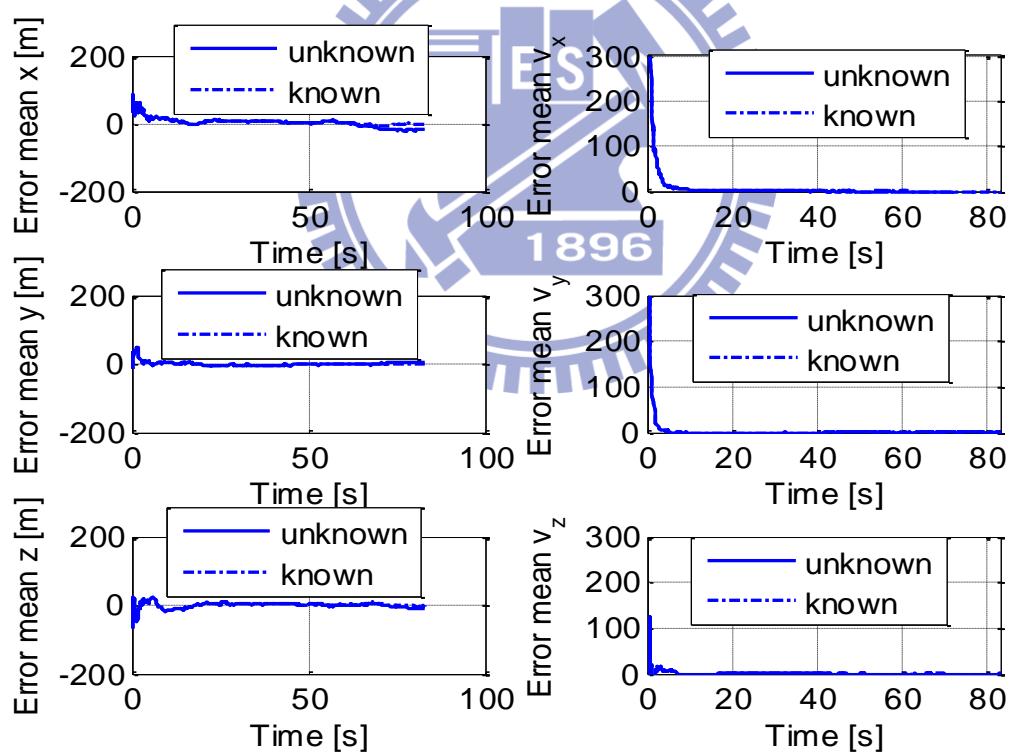


圖 28 UKF 估測(已知和未知彈道係數)彈道之誤差均值

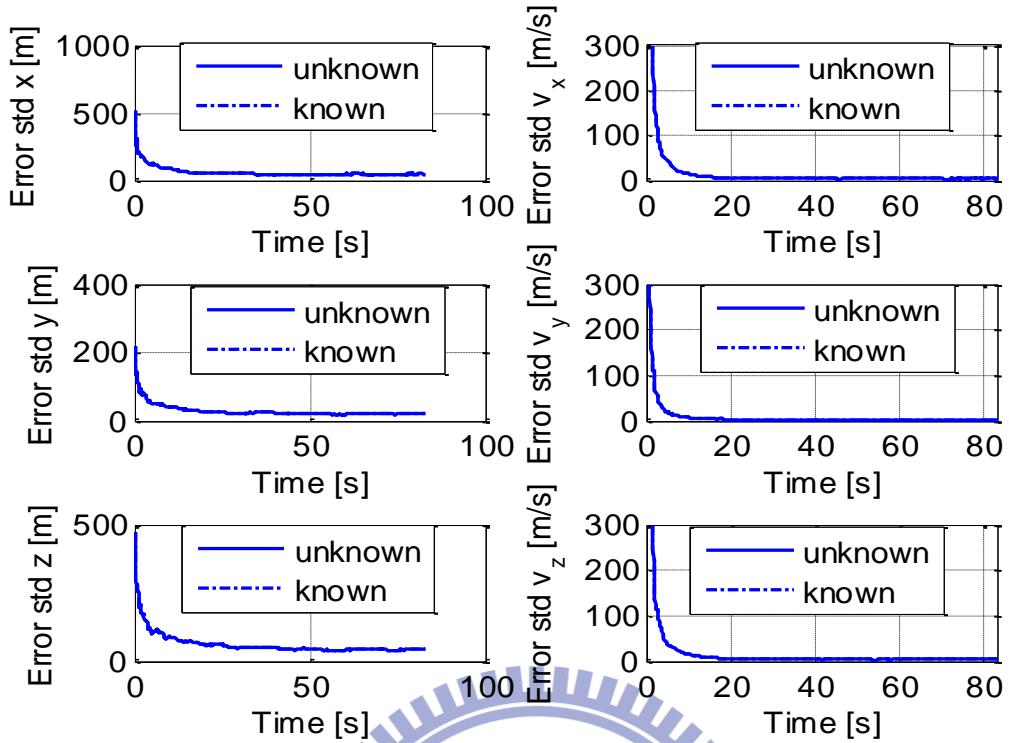


圖 29 UKF 估測(已知和未知彈道係數)彈道之誤差標準差

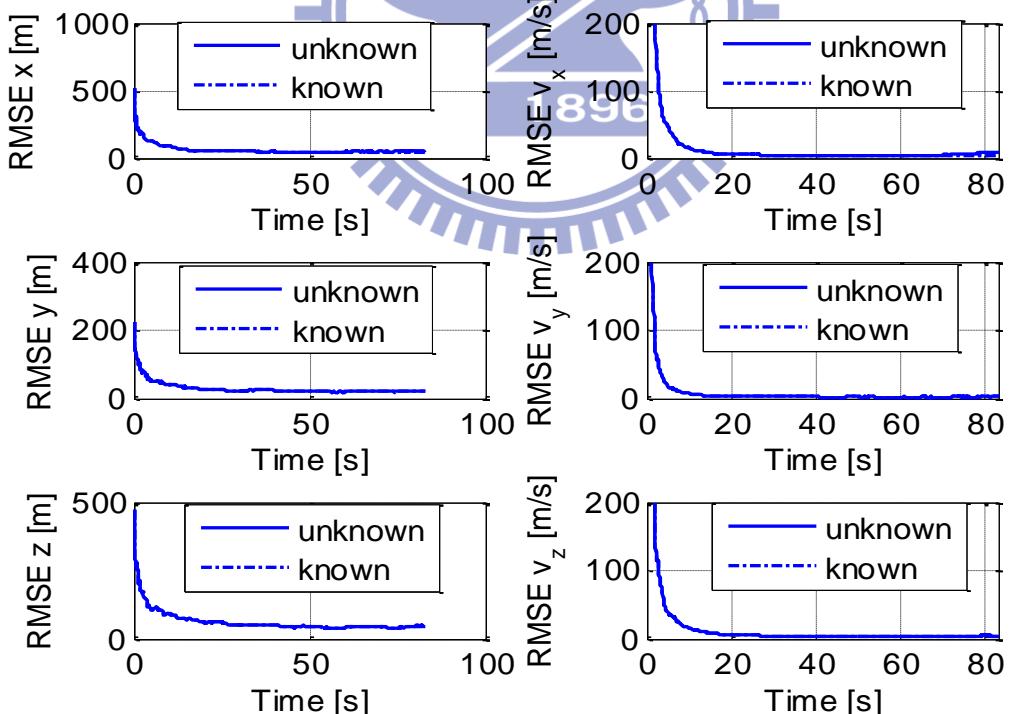


圖 30 UKF 估測(已知和未知彈道係數)彈道之均方根誤差

我們用圖 28 至圖 30 中最後一點的位置和速度之均方根誤差來做分析比較，結果如表 5 所示。進一步和 EKF 相對應比較(TBM A)，我們可以發現 UKF 的追蹤行為類似於 EKF 但

效能較差，在接近地面時誤差有變大的趨勢。

表 5 UKF 估測 TBM A 的位置和速度之均方根誤差

RMSE	X(m)	Y(m)	Z(m)	V _x (m/s)	V _y (m/s)	V _z (m/s)
Known β	45.5	21.8	9.3	3.4	2.6	1.7
Unknown β	56.3	22.3	11.6	11.0	3.6	3.4

2. 情況二：分別假設在已知和未知彈道係數情況下，皆使用 UKF 估計 TBM B 的彈道，然後進行兩者(已知和未知)濾波性能比較。

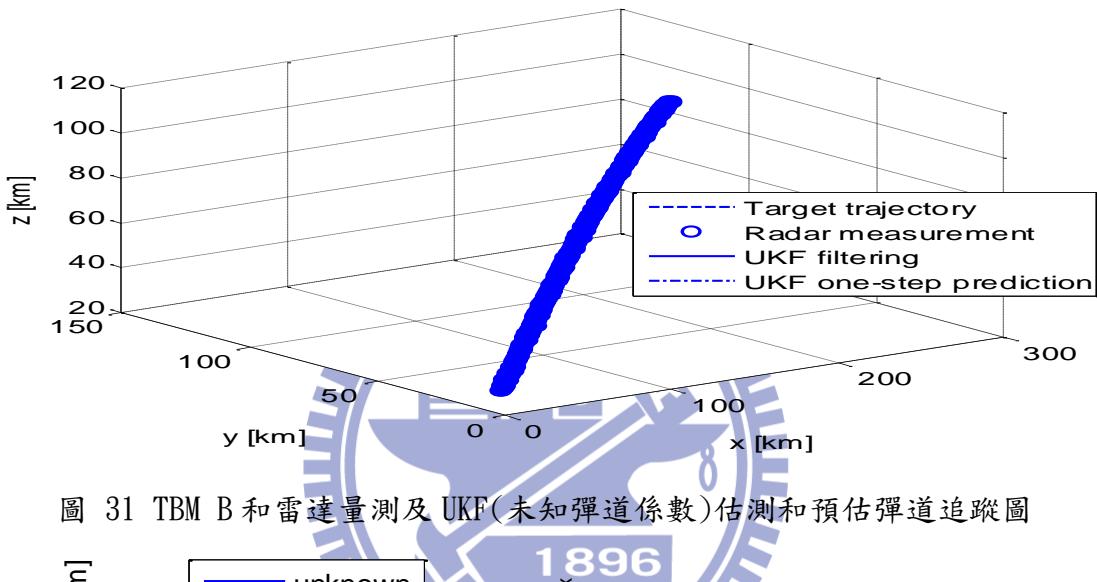


圖 31 TBM B 和雷達量測及 UKF(未知彈道係數)估測和預估彈道追蹤圖

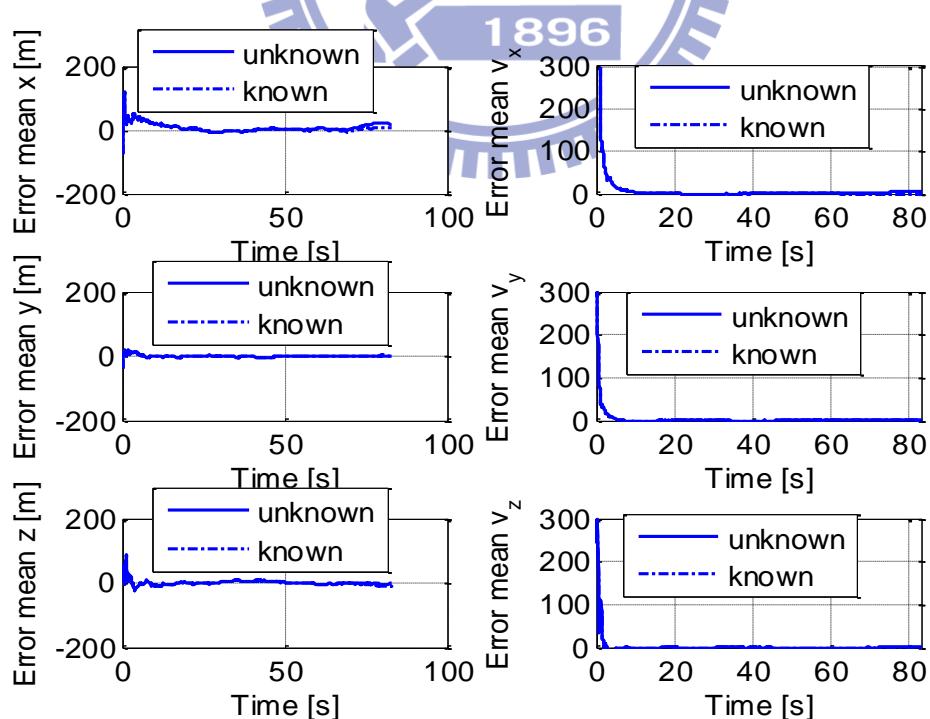


圖 32 UKF 估測(已知和未知彈道係數)彈道之誤差均值

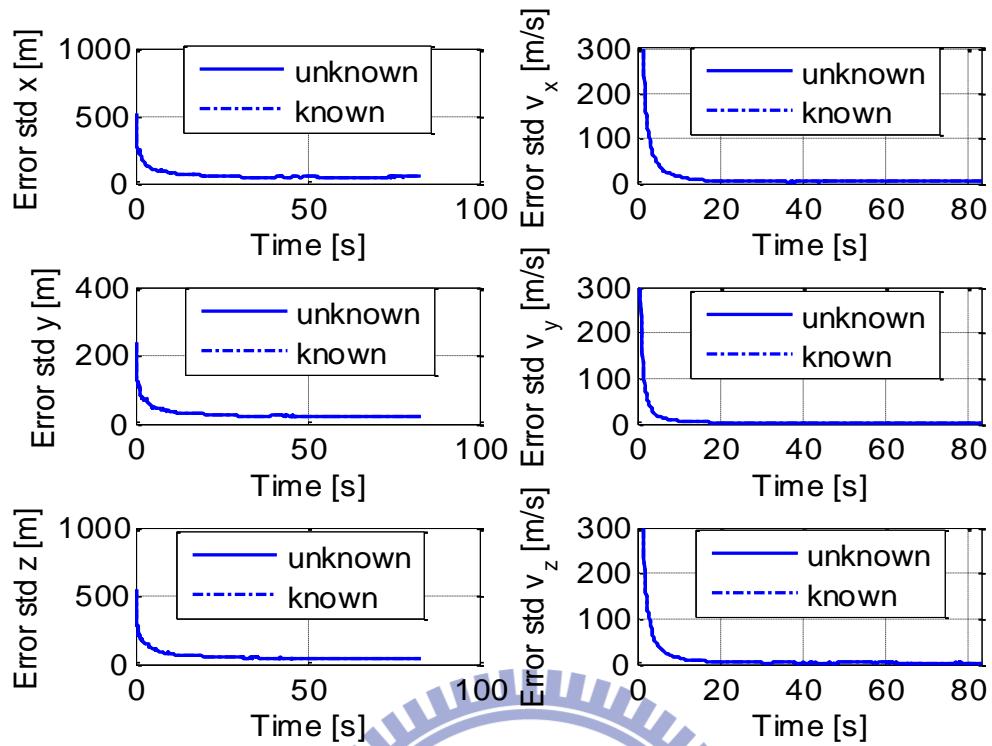


圖 33 UKF 估測(已知和未知彈道係數)彈道之誤差標準差

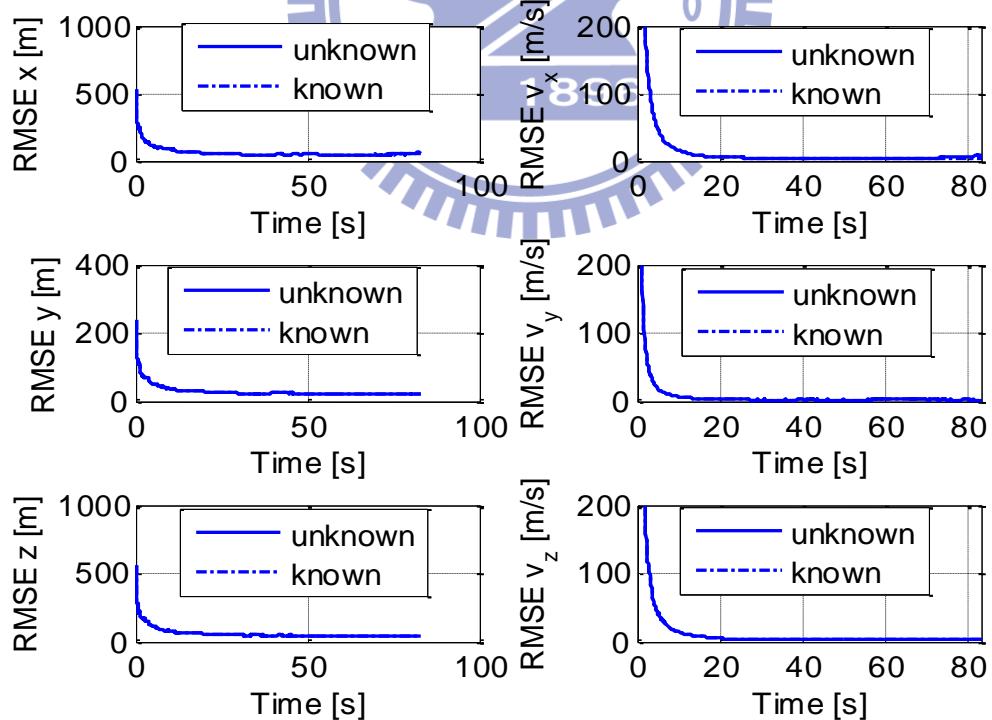


圖 34 UKF 估測(已知和未知彈道係數)彈道之均方根誤差

我們也用圖 32 至圖 34 中最後一點的位置和速度之均方根誤差來做分析比較，結果如表

6 所示。進一步和 EKF 相對應比較(TBM B)，我們可以發現 UKF 的追蹤行為類似於 EKF 但效能較差，在接近地面時誤差一樣有變大的趨勢。

表 6 UKF 估測 TBM B 的位置和速度之均方根誤差

RMSE	X(m)	Y(m)	Z(m)	V _x (m/s)	V _y (m/s)	V _z (m/s)
Known β	45.7	20.9	9.0	4.2	2.5	1.7
Unknown β	55.1	21.1	11.7	10.5	3.2	3.4

5.5 彈道係數的探討

在此章節，我們要對所模擬的結果來進一步探討彈道係數對彈道的影響。本文之彈道係數被表示為(4-1-2)式，而我們的目地是分別要估測出 a 值和 b 值，然後配合當時的速度就可以決定彈道係數。以下就針對 EKF 及 UKF 所估出的 TBM A 彈道係數進行討論，至於 TBM B 也是一樣相同的情形。

圖 35 至圖 38 中的實線是代表我們分別使用 EKF 及 UKF 對 TBM A 彈道係數所估出的 a 值和 b 值與真正 a 值和 b 值的均方根誤差。

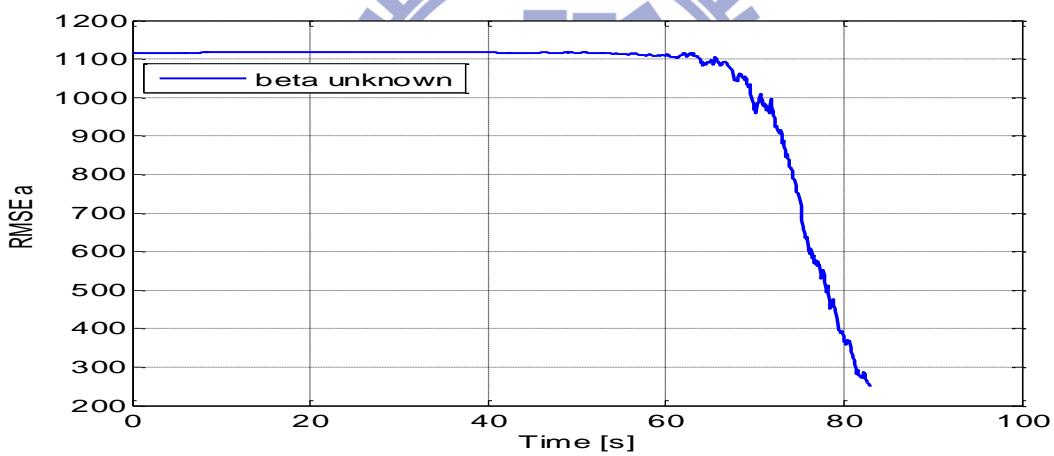


圖 35 EKF 估測 TBM A 的彈道係數之 a 值均方根誤差

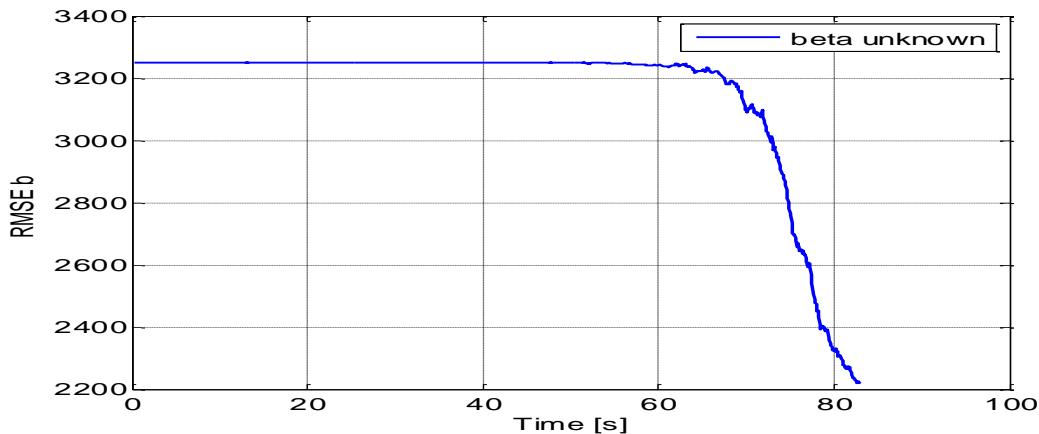


圖 36 EKF 估測 TBM A 的彈道係數之 b 值均方根誤差

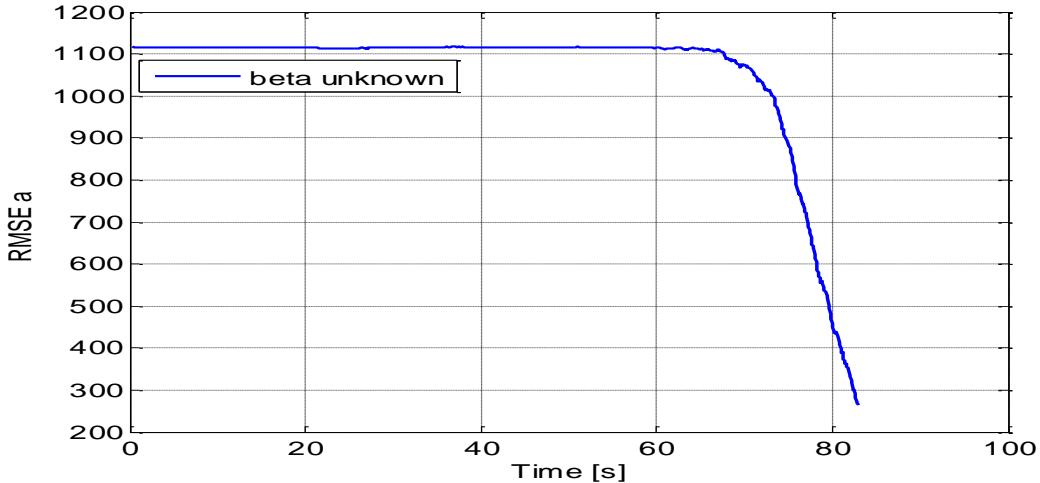


圖 37 UKF 估測 TBM A 的彈道係數之 a 值均方根誤差

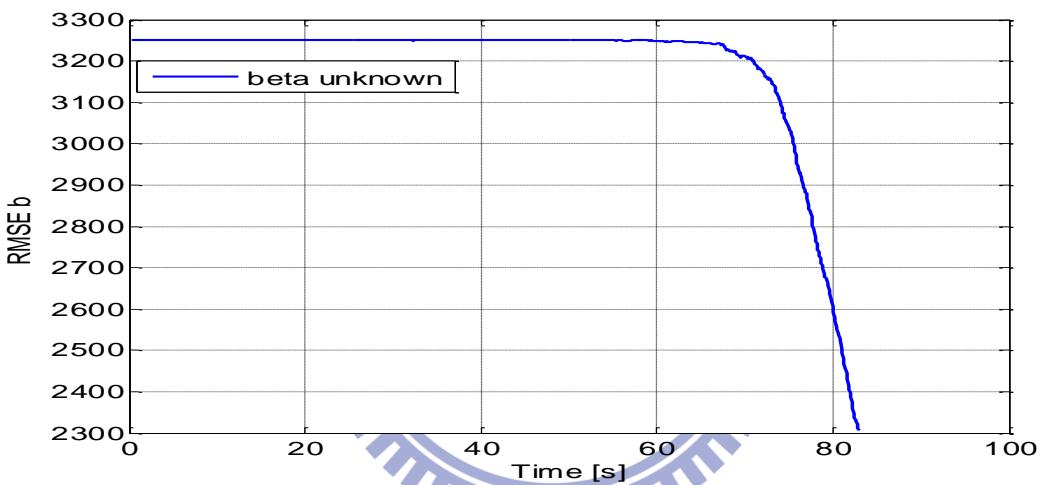


圖 38 UKF 估測 TBM A 的彈道係數之 b 值均方根誤差

觀察圖 35 至圖 38 中，在追蹤初期所不管は UKF 或 EKF 所估出的值大約只做上下少許的變化，這是因為 TBM 處於高空時，TBM 速度快彈道係數對彈道影響較小。到了中後期，也就是 TBM 處於中低空時期，TBM 因空氣阻力的影響速度變慢，彈道係數有對彈道逐漸具有影響，因此 a 值的估測均方根誤差逐漸降低。至於 b 值，由於是位處於彈道係數之常數項的關係，對速度的變化較不敏感，均方根誤差降低的速度也因此較慢。綜合 a 和 b 兩值，可以顯示出 EKF 和 UKF 所估出的彈道係數有愈來愈接近真正的值的趨勢。我們也將所用最後一點的彈道係數之均方根誤差來做分析比較，結果如表 7 所示，從此表中我們可以明顯看出對於彈道係數的估計，EKF 比 UKF 有較好的效果。綜合本章所模擬結果得知，可看出 EKF 和 UKF 雖未很精確估出彈道係數，但我們從位置追蹤的均方根誤差可以看出這樣的估計誤差已足夠，其結果和已知彈道係數情境下是很接近的，這也表示我們所提出的方法能有效的應用在未知彈道係數的 TBM 追蹤。

表 7 TBM A 彈道係數之均方根誤差值

RMSE	a	b
EKF	249.4	2224.1
UKF	264.2	2307.5

將 a 和 b 值配合當時 TBM 的速度，就可以得到估計的瞬時彈道係數。圖 39 所示為真正的彈道係數和 EKF 和 UKF 所估出的彈道係數之比較，從圖中可以明顯發現 EKF 的表現較好，兩者之估計誤差在追蹤最後階段都急劇的下降，而最後一點真正彈道係數 RMSE 值為 65246，EKF 所估出最後一點彈道係數 RMSE 值為 65469，UKF 所估出最後一點彈道係數 RMSE 值為 65634，顯然 EKF 估得較準。

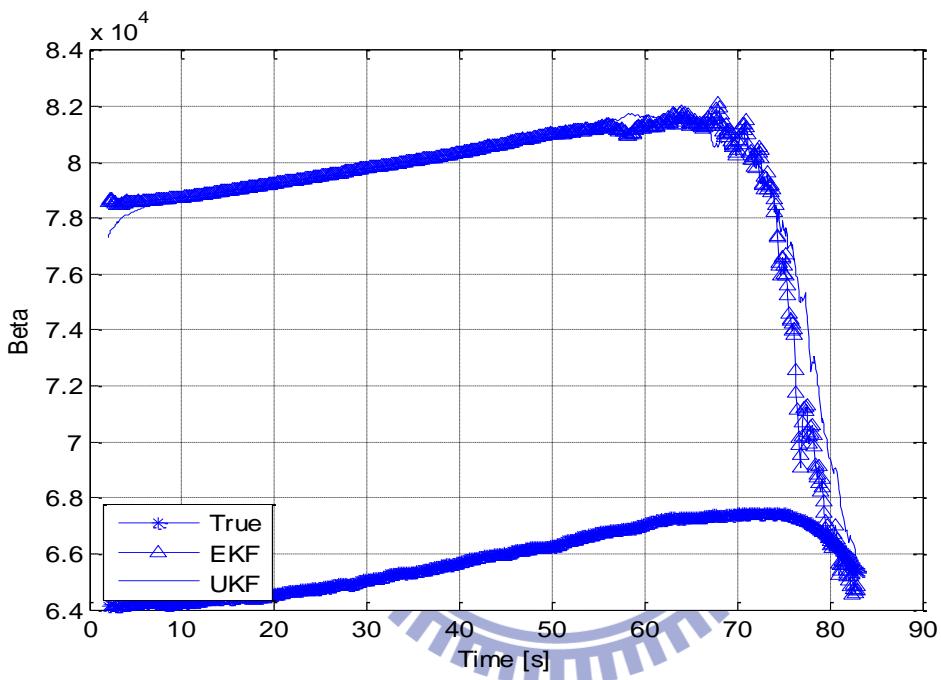


圖 39 目標彈道係數和 EKF 及 UKF 所估出的彈道係數

第六章 結論與未來工作

本文旨在探討 TBM 之追蹤，重點在於追蹤的同時如何有效的估計未知彈道係數，我們提出了使用線性函數來近似彈道係數並將此函數的參數加入狀態方程式，由追蹤演算法一併的估計。為了工程較易實現考量，我們採用了 EKF 和 UKF 作為我們的追蹤演算法。實驗結果顯示在彈道係數已知且為定值的情況下，使用 EKF 和 UKF 對再入段 TBM 彈道進行追蹤，兩者是很好的追蹤濾波器。為了符合實際 TBM 飛行情況，我們進一步做彈道係數是在未知的模擬，如前所述我們將彈道係數視為狀態之一讓 KF 一併的估計。模擬的結果顯示追蹤效能能彈道係數為未知和已知時很接近。本文最後討論彈道係數對再入段 TBM 彈道的影響，從大氣層高空平均高度一百公里至地面高度約四、五十公里處，因空氣密度小飛行阻力較小，這使得彈道係數跟 TBM 的狀態關係較小。由於雷達量測方程式僅觀測到 TBM 的位置狀態，因此從我們無法很精確的估計出彈道係數，不過也正是因為如此，追蹤系統容許較大的彈道係數估計誤差。模擬的結果顯示 EKF 和 UKF 都有不錯的追蹤的效能。當 TBM 接近地面，空氣密度變大飛行阻力較也跟著變大，彈道係數跟 TBM 的狀態關係變得較密切，這時我們可以較準確的估計彈道係數並及時的改善追蹤性能，模擬的結果顯示 EKF 和 UKF 還是有不錯的追蹤的效能，但 EKF 的效能略高於 UKF。

未來可繼續研究方面說明如下：

1. 本文僅以利用 Matlab 軟體來模擬，未來可研究如何將 EKF 和 UKF 演算法以硬體電路實現，而能用在實際的追蹤系統上。
2. 模擬中可發現，只使用 EKF 和 UKF 無法很精準的估計出彈道係數，造成接近地面時追蹤效能的下降，一個可以改善的方法是使用多模式(Multiple model)的追蹤，亦即使用多組的 EKF 和 UKF，此法應可以提高追蹤的效能，但計算複度會大幅的提高。
3. 本文所探討的再入段之彈道目標為非閃躲型(non maneuver)，如何對閃躲型目標進行追蹤是可探討的議題。

參考文獻

- [1] A. Farina, B. Bristic, and D. Benvenuti, "Tracking a ballistic target: comparison of several nonlinear filters," *IEEE Trans. Aerospace and Electronic System*, vol. 38, no. 3, pp. 854--867, July 2002.
- [2] Y. Bar-Shalom and X.-R. Li, *Estimation and Tracking: Principles, Techniques, and Software*, Artech House, 1993.
- [3] B. Ristic, A. Farina, D. Benvenuti, and M S. Arulampalam, "Performance bounds and comparison of nonlinear filters for tracking a ballistic object on re-entry , " *IEE Proc.Radar Sonar Navig.*, Vol.150.No.2,April 2003.
- [4] Farina, A. Studer,F.A. *Radar Data Processing. Introduction and Tracking*, Vol. I.England: Researches Studies Press,May 1985.
- [5] S. Julier, J. Uhlmann, and H.F. Durrant-Whyte, "A new method for the nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators," *IEEE Trans. Automatic Control*, vol. 45, no. 3, pp. 477--482, Mar. 2003.
- [6] P. Zarchan, *Tactical and Strategic Missile Guidance*, 3rd Ed.,AIAA,Progress in Astronautics and Aeronautics, Vol. 176,1997
- [7] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, 4rd Ed., Upper Saddle River, New Jersey, Prentice-Hall, Inc.
- [8] Ristic B, Benvenuti D, Arunampalan M S, *Beyond the Kalman filter Particle filters for tracking applications* ,Artech House,London,2004.
- [9] Julier S J, Uhlmann J K, "Unscented Filtering and Nonlinear Estimation , " *Proceedings of the IEEE*, Vol.92, No.3,March 2004.
- [10] S. Julier and J. Uhlmann, "A new extension of the Kalman filter to nonlinear systems," in *Proc. SPIE – Int. Soc. Opt. Eng.*, vol. 3068, April 1997, pp. 182-193.
- [11] G. M. Siouris, G. Chen, and J. Wang. "Tracking an Incoming Ballistic Missile Using an Extended Interval Kalman Filter., " *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, 33(1):232-240. , 1997.
- [12] L.N.Liard., *Post-flight trajectory reconstruction of a maneuvering reentry vehicle from radar measurements.*, MS Thesis.ADA124805 , 1982.
- [13] S.S. Blackman and R.F. Popoli. , *Design and Analysis of Modern Tracking System*, Artech House , Norwood,MA , 1999
- [14] Marcelo G. S. Bruno and Anton G. Pavlov, "A Density-Assisted Particle Filter Algorithm for Target Tracking with Unknown BallisticCoefficient," *Proceedings IEEE ICASSP 2005*, Philadelphia, PA, USA,March 19-23, 2005.
- [15] 楊谷洋, *TBM 變識與追蹤法則之研究*, 國防科技學術合作協調小組研究計畫成果

報告, 桃園, 2003



自 傳

作者詹榮吉，生於民國五十六年十月六日，籍貫台灣雲林縣，民國七十六年進入私立南台科技大學電子工程科就讀，民國八十一年起任職中山科學研究院，從事於相列雷達之研發，期間獲得數位電子甲、乙級證照及脈波信號自動增益控制方法與專置之專利，民國九十六年起進入國立交通大學攻讀電機學院碩士在職專班電信組碩士。

