

國立交通大學

理學院科技與數位學習學程

碩士論文

高中階段數學建模競賽題材之探討

A Study of Contents of Mathematical Modeling Competitions  
for High School Students

研究生：黃舜涵

指導教授：黃大原 教授

中華民國九十九年六月

# 高中階段數學建模競賽題材之探討

## **A Study of Contents of Mathematical Modeling Competitions for High School Students**

研究生：黃舜涵

Student : Shun-Han Huang

指導教授：黃大原

Advisor : Tayuan Huang

國立交通大學

理學院科技與數位學習學程



Submitted to Degree Program of E-Learning College of Science

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

in

Degree Program of E-Learning

June 2009

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十九年六月

# 高中階段數學建模競賽題材之探討

研究生：黃舜涵

指導教授：黃大原 博士

國立交通大學理學院科技與數位學習學程碩士班

## 摘 要

「數學建模」教育近來已受到國際間的重視，如美國、德國、大陸、新加坡已陸續將其精神納入課程綱要之中，掀起一波波教育改革熱潮；而國內亦有相關團體進行推廣數學建模的相關競賽活動。本論文主要研究方向在於因應這股改革熱潮，藉由國際間數學教育改革動態，探討高中數學中融入數學建模活動的重要性（第五章）。針對這項目標，本論文將對美國和台灣近年有關數學建模的競賽活動與試題內容做概括性的介紹與整理（第二章），並分析得獎作品的特色及其與高中數學教材的關連性（第三章）。同時，科技融入教學的時代已經來臨，嘗試著將「資訊科技」應用於「數學建模」活動（第四章），希望能引發學生們願意實踐「做中學」的建模精神，並將其應用於日常生活及各學科之間。

**關鍵字：**數學建模、全美高中數學建模競賽、旺宏科學獎、思源科學創意大賽、全國高中高職數學作文競賽

# **A Study of Contents of Mathematical Modeling Competitions for High School Students**

Student: Shun-Han Huang

Advisor: Dr. Tayuan Huang

Degree Program of E-Learning College of Science  
National Chiao Tung University

## **Abstract**

Recently, mathematical modeling has gained attentions worldwide and has evoked a series of educational reforms. For example, the principle of mathematical modeling has been included in the curriculum of some nations including America, Germany, China and Singapore. Besides, there are also some contests conducted by associated groups in Taiwan.

The purpose of this research aims to respond to this international trend of mathematic educational reforms. The importance of integrating mathematic modeling activities in senior high math courses curriculum will be surveyed in Chapter 5. Another survey of recent mathematical modeling contests conducted in America and Taiwan as well is given in Chapter 2. The features of the awarded works and its connection with the current curriculum senior high mathematical is analyzed in Chapter 3. In addition, how to apply computer-based activities to mathematical modeling will be further studied in Chapter 4 in the hope of motivating students to practice the essence of modeling-learning by doing.

**Keyword: high schools, curriculum, mathematical modeling**

# 誌 謝

兩年的研究所學習生涯裡，感謝專班李榮耀教授、陳明璋教授在專題研討時給予的指導，使得對於問題的思考可更深、更廣；感謝專班所有開課及演講的老師們，讓自己不僅在專業方面有所成長，更欣喜可涉獵其他領域的課程，充實新知、增廣見識。

非常感謝指導教授黃大原教授兩年來的諄諄教誨，不僅在研究方向給予指導外，在論文架構及編排上亦給予許多寶貴的意見，讓我在從事研究的思考方面，獲益良多，並對一再徬徨的我，給予適時的鼓勵，使得論文能夠順利完成，在此致上最誠摯的感謝。

另外，感謝南崁高中胡六金校長及所有同仁們，有了你們的支持與包容，讓我能於工作之餘完成進修，充實自我。

最後，衷心地感謝我的家人—先生盈璋及我偉大的母親，有了你們的全力支持，使我能無後顧之憂地完成學業，願將這份喜悅與你們共同分享。



# 目 錄

	頁次
中文摘要 .....	i
英文摘要 .....	ii
誌謝 .....	iii
目錄 .....	iv
表目錄 .....	vi
圖目錄 .....	vii
<b>第一章 文獻探討.....</b>	<b>1</b>
1.1 近代科學中的建模.....	2
1.2 什麼是數學建模.....	4
1.3 數學建模流程.....	4
<b>第二章 數學建模競賽相關題材.....</b>	<b>8</b>
2.1 全美高中學生數學建模競賽（HIMCM）.....	8
2.2 旺宏科學獎.....	19
2.3 思源科學創意大賽－數學專題.....	20
2.4 台灣數學建模與創意學會－全國高中高職數學作文競賽.....	24
<b>第三章 學生數學建模競賽內容.....</b>	<b>29</b>
3.1 數學建模作品內容摘述.....	29
3.2 數學建模作品的共同特點.....	32
3.3 數學建模競賽探討.....	33
3.4 數學建模作品內容和高中數學教材的關連性.....	35
<b>第四章 資訊軟體在數學建模中的角色.....</b>	<b>39</b>

4.1	資訊融入教學.....	39
4.1.1	LINGO.....	40
4.1.2	SPSS.....	40
4.1.3	GSP.....	41
4.1.4	GEOGEBRA.....	41
4.1.5	EXCEL.....	42
4.2	高中數學利用資訊科技範例.....	42
4.3	交叉表.....	60
<b>第五章</b>	<b>國際間的反思.....</b>	<b>64</b>
5.1	德國數學課程改革動態.....	64
5.2	新加坡數學課程改革動態.....	67
5.2.1	原理.....	67
5.2.2	目標.....	67
5.2.3	數學框架.....	68
5.3	美國數學課程改革動態.....	71
5.4	大陸數學課程改革動態.....	78
5.5	數學建模教育的性質與功能.....	82
5.6	反思.....	83
參考文獻	.....	87
附錄一	2005-2009 全美高中學生數學建模競賽 (HIMCM) .....	90
附錄二	1999-2004 全美高中學生數學建模競賽 (HIMCM) 林國源輯.....	103
附錄三	旺宏科學獎－數學領域得獎名單.....	118

# 表 目 錄

	頁次
表 3-1-1 簡述檢定樂透.....	29
表 3-1-2 簡述鬼謎藏.....	30
表 3-1-3 簡述翻動「棋跡」.....	31
表 3-4-1 得獎作品的數學領域與高中課程對照表(依高中課程分類).....	36
表 3-4-2 得獎作品的數學領域與高中課程對照表(依屆數與題目分類).....	37
表 3-4-3 得獎作品與應用軟體分類表.....	38
表 4-2-1 EXCEL 線性規劃設定.....	44
表 4-2-2 EXCEL 線性規劃解答.....	45
表 4-2-3 原始數據載入 SPSS.....	50
表 4-2-4 SPSS 相關表.....	52
表 4-2-5 刪除變數表.....	54
表 4-2-6 變異數分析.....	55
表 4-2-7 係數.....	56
表 4-2-8 模式摘要.....	56
表 4-2-9 EXCEL 載入數據.....	58
表 4-2-10 EXCEL 報表 1.....	59
表 4-2-11 EXCEL 報表 2.....	60
表 4-3-1 軟體與題型整理表.....	60
表 5-3-1 NCTM 課程標準.....	74



# 圖目錄

	頁次
圖 1-1-1 近代科學中建模過程.....	3
圖 1-3-1 建模流程圖.....	5
圖 1-3-2 七橋問題.....	6
圖 1-3-3 七橋問題簡圖.....	6
圖 4-2-1 Lingo 設定.....	43
圖 4-2-2 Lingo 解答.....	43
圖 4-2-3 EXCEL 參數設定.....	44
圖 4-2-4 GSP 設定.....	45
圖 4-2-5 GSP 動畫求解.....	46
圖 4-2-6 GEOGEBRA 設定.....	46
圖 4-2-7 GEOGEBRA 動畫求解.....	47
圖 4-2-8 選擇分析方法.....	50
圖 4-2-9 選擇【選項】、【統計量】.....	51
圖 4-2-10 排除遺漏值.....	51
圖 4-2-11 統計量設定.....	52
圖 4-2-12 選擇向後法.....	53
圖 4-2-13 選項設定.....	53
圖 4-2-14 統計量設定.....	54
圖 4-2-15 EXCEL 選擇資料分析方法.....	58
圖 4-2-16 EXCEL 選擇變數.....	59
圖 4-3-1 SPSS 分析選單.....	62
圖 4-3-2 迴歸選單.....	62

圖 4-3-3	SPSS 統計圖表選單.....	63
圖 5-2-1	新加坡課程框架.....	68



# 第一章 文獻探討

數學是研究空間與數量的科學，是刻劃自然規律與社會規律的語言和工具。數學是自然科學、技術科學等科學的基礎，亦在經濟、社會及人文科學的發展上有著舉足輕重的影響。數學應用越來越廣，與計算機結合後在社會上許多方面創造價值。數學在人類文化上佔有重要的地位，數學素養是公民必備的基本素質。

科學研究過程是對客觀事物的認識過程，其包含四個階段：發現問題、了解情況、深入思考、實踐驗證，而數學建模是科學研究過程中一個核心環節。簡化來說分為三大步驟：實際問題轉化為理論模型（建模過程）—理論模型求解（求解與計算過程）—理論結果的應用（應用過程）。

數學建模的過程是解決實際問題的過程，實際問題是用大眾語言表達，此時需要將大眾語言化為理論語言，將實際問題化為理論模型，模型求解與計算能力並將結果再化成大眾能理解的語言，使結果能得到大眾充份的應用（趙東方，2007）。

回想起自己身為高中生、大學生的時候，對於書上的定理、公式總是覺得不耐，總在想為什麼愛因斯坦要發明相對論？讓自己在大四那一年選修物理系的「近代物理」時痛不欲生；為什麼高斯發明了高斯符號、高斯矩陣？不了解這些東西到底有什麼用？當一顆蘋果砸到牛頓的頭上，萬有引力就出現了？！伽利略測得光速的過程更是令人覺得突發奇想！而他推翻不同重量物體於同一高度掉下時重物會先著地的精神又是多麼值得讚揚！

在接觸「數學建模」這個名詞之前，總覺得以往的學習是多麼制式與無奈，但進入專班開始接觸一些素材課程以及建模領域後，開始有了不同的想法。

97 學年度下學期專班素材製作的課程裡，有一段影片令我印象深刻：在美國有一位老師要教鐘擺，提出了一個情境：一個人被繩索綁在台上，天花板有一個左右擺動的鐮刀，緩慢下降，請問這個人有多少時間可以逃生？影片中看到每一組的學生開始動手做實驗，記錄數據、並嘗試用計算機去找出規律，進而推出簡諧運動公式。當時覺得美國

的教育真的是從「做中學」！而現在更有了另一層的想法：原來，生活中充滿了數學！

以前念書時，數學老師常說：對數的發明是為了解決天文上精密且龐大計算的困擾！為了解決生活中所需、解釋生活中自然現象，近而發現規律，將之化為模型、公式等等，都是讓現實中的問題逐步邁向數學理論的步驟，而當中的過程，就是「建模」！

現今台灣的數學教育，在教與學當中，漸漸喪失「提出問題」、「假設」、「驗證」等過程，取而代之的是考不完的試、上不完的課，如果能在課堂中安排「探索」的情境並運用現今的科技讓學生增加「做數學」的興趣，這才應該是數學教育的宗旨。

## 1.1 近代科學中的建模

「數學建模」似乎是新崛起的名詞，但它並不是新穎的流派、詞彙，而是從科學發展之初就存在了。當以數學去解決實際問題時一定得用數學的話語、方法去解釋該問題，其表述的過程即為數學建模。

近代的科學家們，雖不了解「數學建模」一詞，但其研究、分析之過程，皆符合建模的精神：

### 一、伽利略—比薩斜塔的落體實驗

古希臘最著名的哲學家—亞里斯多德對於「自由落體」的學說是：「物體自高處自由落下的速度和重量成正比」。然而，伽利略發現了問題，他在比薩斜塔的各樓層安排了實驗者，分別把一對大小不等的重物自由落下，結果，同時接觸到地面。他這種堅持用「實驗科學」的態度，成功地推翻了亞里斯多德的自由落體學說。

### 二、克卜勒—行星運動定律

當科學家在研究天文現象時，常利用望遠鏡作觀測，然而當時以太陽為中心的學說

並未使天文學家能更準確預測行星的運行軌道。克卜勒對火星及地球試了各種大小不同的圓、運動模式後，終於發現橢圓軌道最符合記錄。克卜勒由記錄導出了行星運行模式，此為著名的克卜勒三大行星運動定律。

### 三、阿基米德—浮力

阿基米德在求學後回到故鄉，國王出了一道難題給阿基米德去解決，此為著名的真假皇冠問題：

國王請金匠用純金打造了一頂純金王冠，做好以後，國王懷疑金匠不老實，可能造假摻了「銀」在裡面，但是又不能把王冠毀壞來鑑定。怎樣才能檢驗王冠是不是純金的呢？

有一天，他在洗澡的時候想到：「溢出來的水的體積正好應該等於他身體的體積，所以只要拿與王冠等重量的金子，放到水裡，測出它的體積，看看它的體積是否與王冠的體積相同，如果王冠體積更大，這就表示其中造了假，摻了銀。」果然經過證明之後，王冠中確實含有其他雜質，阿基米德成功的揭穿了金匠的詭計。這個發現奠定了物理學中很重要的浮力理論。

在近代科學發展過程中，雖無「建模」一詞出現，但其原理、定律發現的過程，其實就是「建模」的精神，反覆著從自然界發現問題→經由抽象、歸納等建模過程→得到結論，而此結論可以應用於解釋自然界的現象（如下圖 1-1-1）：

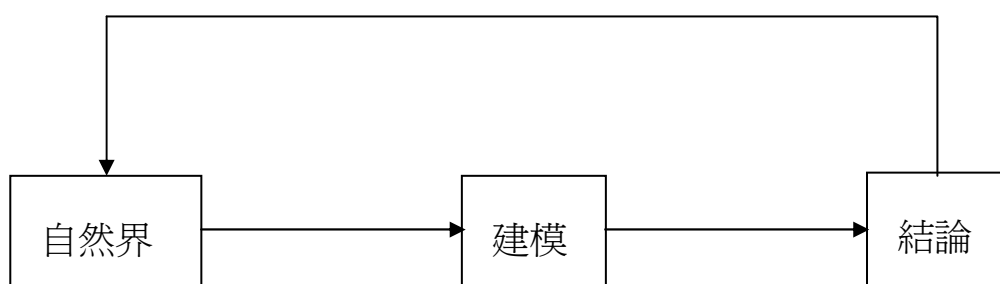


圖 1-1-1 近代科學中建模過程

圖 1-1-1 中的「結論」即為現今的課堂教材，課堂中，常礙於課堂時數、考試壓力、家長期望等等，無法用完整的訓練過程教育學生，只能一味地填鴨，將教材填充於學生的腦袋中，並無時間讓學生理解其發展過程，猶如人們希望身體強健，只一味補充維他命丸，卻不思從基礎運動做起，治標不治本，終究無法得到真正強健的體魄；教育亦同，如不教導學生邏輯思考、數據分析的方法，即使記熟了一千個公式、一萬個定律，所訓練出來的學生亦無法靈活運用既有的知識來解決週遭所遇到的問題。

## 1.2 什麼是數學建模

數學建模 (Mathematical Modeling) 是近幾年隨著計算機的普及而談論得較多的話題。一切現代科技技術的發展也和數學建模聯繫在一起。總地來說，介於數學、計算機科學與實際問題間的技術就是數學建模及數值分析 (王庚、王敏生, 2008)。近年來，美國數學界亦指出：在技術科學中最有用的數學領域是數值分析與數學建模。

什麼是數學建模？雖然近年來才有這個名詞出現，但並非新的東西。當用數學去解決實際問題時就會用到數學方法去表達，而這種表達即為數學模型，而當中的過程就是我們談論的「數學建模」。

## 1.3 數學建模流程

從探究自然界的現象到現今為了解決實際的問題，根據其規律，經由簡化、純化與假設，並選用適當的工具，得到適當的數學模型，這樣的過程即為數學建模，故數學建模就是將現實問題轉換為數學問題的過程。

在《普通高中數學課程標準(實驗)》一書中，數學建模可以透過以下流程來實現

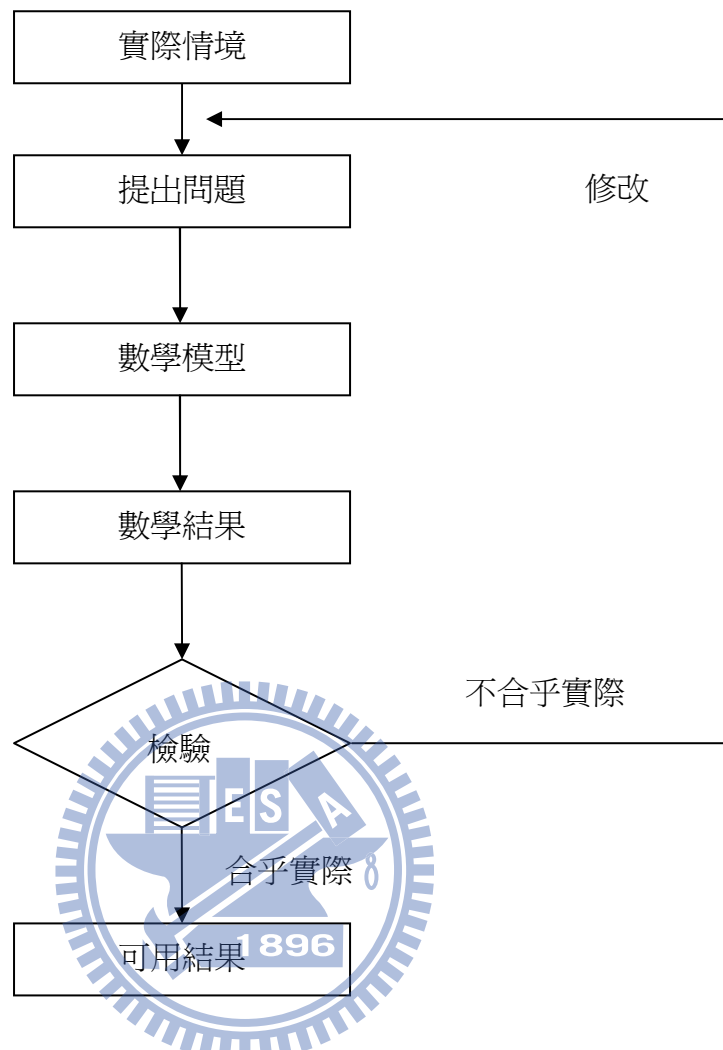


圖 1-3-1 建模流程圖

舉例來說，哥尼斯堡七橋問題，就是一個很有趣的例子：

1. 【實際情境】

在德國，帕瑞格爾河從哥尼斯堡城中穿過，河中有兩個島 A 與 D，河上有七座橋連接這兩個島及河的兩岸 B, C (如圖 1-3-2 所示)，不少居民和遊人經常在這裡散步或遊覽。

2. 【提出問題】

有人提出一個問題：能不能從某地出發走遍七座橋，然後回到出發點，其中每座橋只許經過一次。

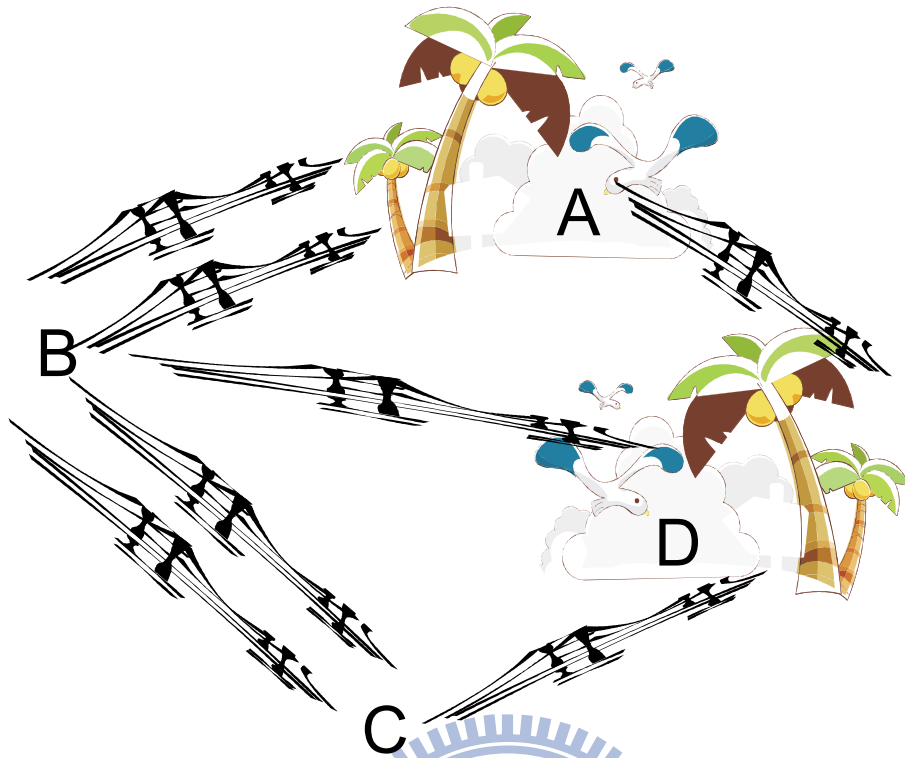


圖 1-3-2 七橋問題

在眾人嘗試卻仍無解時，尤拉進行假設化簡：不管橋的長短、島的大小、地形，而用簡單的圖形表示

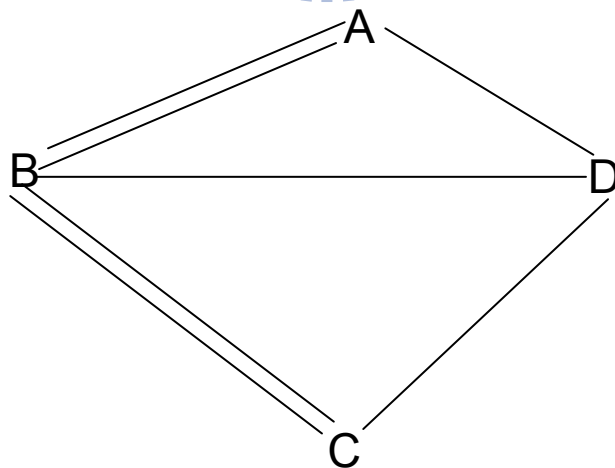


圖 1-3-3 七橋問題簡圖

### 3. 【數學結果】

尤拉指出：不可能無重複地走遍七座橋。



#### 4. 【可用結果】

在一筆畫問題中，對於每一個點必有「進」和「出」兩種線條，故應有偶數條線，但在七橋問題裡，通過每個點的線皆為奇數條，故尤拉才大膽指出：不可能無重複地走遍七座橋。

近年來很多國家已開始著手發展數學建模競賽，培養學生真正從「做中學」的精神，像美國 HIMCM 即為其一（其中 1999~2004 年已由林國源翻譯，並收錄於附錄二，2005 年以後的題目將於第二章中介紹），而國內亦有旺宏科學獎、思源基金會所舉辦的科學創意大賽－數學專題及台灣數學建模與創意學會所舉行的全國高中高職數學作文競賽，將於第二章中詳述。並於第三章分析得獎作品特點及與高中課程的關聯性。另考量到科技日趨發達，故於第四章中嘗試引入資訊軟體協助解決問題。除了數學建模競賽，國際間對數學建模課程亦逐漸重視，且於數學課程綱要中明定及闡述理念，因此，第五章將介紹德國、新加坡、美國、大陸的課程改革動態及數學建模教育的性質與功能，最後將進行教學上的反思，以為未來自身教學時的惕勵！



## 第二章 數學建模競賽相關題材

國內外為何逐漸重視數學建模競賽？因數學建模競賽不但可以培養學生綜合運用知識的能力和創新精神，更可培養學生團結合作與相互協調的能力（周遠清，2003）。

近年來，國際中數學建模競賽已蓬勃發展，如美國早在 1999 年開始舉辦全美高中學生數學建模競賽。國內亦追隨其腳步，許多團體開始投入、發展此類活動。

### 2.1 全美高中學生數學建模競賽（HIMCM）

美國從 1999 年開始辦理全美國高中生的數學建模競賽（The High School Mathematics Contest in Modeling，簡稱 HIMCM），目的是使參賽學生能藉此訓練用數學的方法分析、解決現實生活中的問題，並希望能使學生提高解決問題及寫作能力。



#### 一、比賽規則

1. 參賽隊伍至多四人。
2. 登錄網站後可獲得帳號和密碼，並於競賽開始的 36 小時內登錄指定網站取得題目。
3. 題目分為 A、B 兩題，可擇一回答。
4. 在比賽期間內（11 月 6 日至 23 日），任意連續 36 小時為期限，例如：可從 11 月 10 日上午 8：00 開始，則 11 月 11 日晚上 8：00 即為競賽結束時間。
5. 指導老師必須於期限內，確認沒有任何更改事項後，將學生論文資料交給大會評審。
6. 所有論文必須在 2009 年 12 月 2 日下午 5：00 前繳交。
7. 每個參與的學生需簽署家長／監護人同意書，由學校將原始同意書寄給主辦單位（COMAP），並保留原始同意書的副本。
8. 針對參賽團隊所提出的特別需求（與競賽有關），所屬學校有責任及義務給予協助，

並詳列細節及協助範圍，且視同協助 HIMCM 的相關活動之一。

9. 若於競賽期間學生有學習影響的需求，則依各學校活動課程計劃因應。

## 二、2005—2009 歷屆題目（原文詳見附錄一）

### 2005 Problem A

#### Modeling Ocean Bottom Topography

一艘海洋勘測船藉由使用聲納反射海底的聲波去繪製海底。圖 A 顯示船的位置在海面上的 B 點。船上的聲納裝置能夠釋放可供測量 2 到 30 度的弧形聲波。在二維中，此弧在圖 A 中以  $\angle ABC$  表示，且發出聲波以虛線和實線 BA 和 BC 來顯示。

當聲波碰觸到海底時，聲波像一顆撞球被彈離撞球台一般被彈離海底；即入射角  $\alpha$  等於反射角  $\beta$ ，如圖 B 所示。因為當聲波被釋放出時，船一直在移動，故船將會在圖中的 F 接收到被反射的聲波。而水的實際深度是圖 A 中 BD 的長度。

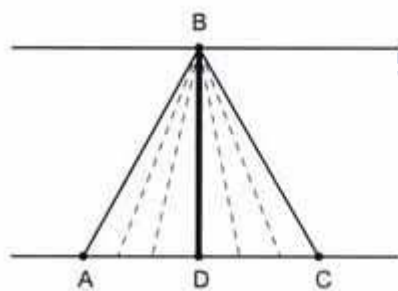


圖 A

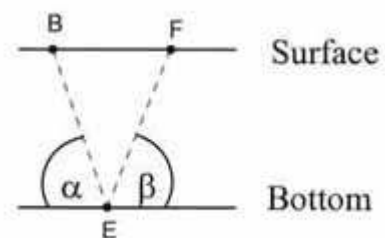


圖 B

有用的資訊：

海洋探測船通常以 2m/s 的速度航行，而軍艦以 20m/s 的速度前進。探測船上的聲納裝置可以發放出可測量 2 到 30 度的弧形聲波。而典型的聲納速度是 1500m/s。

為繪製海底地形設計一個模型。寫一封信給當地報紙的科學編輯簡述你的研究發現。

## 2005 Problem B

### Gas Prices, Inventory, National Disasters, and the Mighty Dollar

從經濟報告中顯示，世界正以供給非常短缺卻又非常需求的程度在使用著汽油。任何風暴的衝擊（更不用說像卡特里娜颶風），影響油價皆非常迅速。讓我們將研究限制在美洲。

過去六年來，加拿大是美國石油的主要國外供應國，包括原油和精煉過的油製品。（看第五頁，為加拿大從 1988 年至今出口到美國的每月石油供給，圖表 S3 為原油和石油產品的進口）

- 加拿大蟬聯美國石油的主要國外供應商於 2004 年時邁入第六年（從 1999 年開始，取代了委內瑞拉至今（包含 2004 年））。
- 在 2002 年，加拿大供應到美國 17% 的原油及精煉後產品—每天供應超過 190 萬桶，遠超過其他國外供應國。
- 加拿大西部的原油由美國中西部和落磯山脈那幾州提供的。
- 加拿大東岸的油卻主要由美國東岸甚至墨西哥灣沿岸各州進口。

許多精算者可以購買到足以滿足目前開車的人需求之油量，但仍不足以存貨。根據華盛頓郵報：「當他們需要時，他們會想買油。」「當他們是對未來不確定時，他們持保留態度。」（「因為戰爭，會減緩原油進口到美國的速度」文獻來自 3/31/03 華盛頓郵報。）

根據美國的用途與消耗，建立一個對公司與消費者都公平且較好的石油工業的模型。根據最高一天的消耗量來建立你的模型。

## 2006 Problem A

### Inflation of the Parachute

降落傘是由輕薄的布料組成，並由帶子和懸掛線支撐著。這些懸掛線稱為降落傘的吊帶，通常會穿過布環或金屬連接器並鏈接在許多強韌帶子的兩端。這些吊帶依序連接到降落傘的背帶使其能負載重量。

## 開傘系統

降落傘的自由落體開傘是將稱做輔助傘的較小降落傘從小容器中拉出來。

直接離開飛機的一種部署降落傘的方法是利用固定拉繩。固定拉繩的一端連接著飛機，另一端連接著降落傘的部署系統。

## 降落傘的種類

### 圓形降落傘



一位美國傘兵使用 MC1 的-1C 型系列的「圓形」降落傘

圓形降落傘是一種純粹的拖曳的裝置（也就是說，它們不像有空壓裝置類型降落傘般有向上提升的作用），通常用於軍事，緊急情況和貨物上的應用。這些是由一個單層布製成的大圓頂形簷篷。有些跳傘者稱之為「水母降落傘」，因為它們看起來像有著圓頂形狀的水母。現在的跳傘者很少使用圓形降落傘。最初的圓形降落傘構造簡單，形狀為扁平的圓形，但是不穩定，所以大多數的現代化圓型傘是某種形式的圓錐形或拋物線形。

有些圓形傘是可操控的，但還不到空壓式降落傘的那種操控程度。照片中傘兵上頭的傘體就是一個可操控的圓形傘，它不是被撕裂或破損，而是有一個「T-U 切口」。這種切口可以允許讓氣流從傘體背面逸出，可限制降落傘的速度。這使跳傘者能夠調整降落傘面使之逆風，以減慢著陸時的水平速度。

### 環形及頂點下拉式降落傘

圓形傘的一種變化型為頂點下拉式降落傘，由法國人 LeMoigne 所發明，自從第一

版模型出來後，在某些圈子裡被稱為「準指揮官式頂棚」。這是一個圓形降落傘，但有一條暫停線連接到頂棚頂點，用於承載並將頂點拉近承載物，使得圓形傘的形狀變的有點扁平。

通常這些設計會將頂端移除一塊布料，以打開一個孔讓空氣逸出，讓頂棚成爲一環形幾何形狀。由於其形狀扁平，他們也有減低水平速度的功能，加上向後開的通風口，可以達到相當快的速度，大約爲每小時 10 英里（15 公里/小時）。

### 帶狀及環形降落傘

帶狀及環形降落傘設計類似環狀設計，可以在速度高達 2 馬赫（2 倍音速）時打開。有環形的頂棚，通常在中心有個大洞以釋放壓力。有時，環形會分爲帶狀並以繩索相連，可以逸出更多空氣。大量的空氣洩漏可將低降落傘的壓力，使降落傘打開時不至於破裂。

通常高速降落傘降低負載速度，然後拉出低速降落傘。這種降落傘序列機制稱做「延遲釋放」或「壓力制動釋放」，取決於在負載減速時的釋放時機是依據時間或壓力減緩。



### 空壓式降落傘

大多數現代的降落傘是屬於自行充氣的「空壓式」翼型，稱爲翼傘，可控制速度及方向，類似滑翔傘。滑翔傘有更大的升力和範圍，但降落傘的設計著重在終端速度上能夠散佈及減輕壓力的分布。所有空壓式翼傘有兩層布料；頂層和底層，透過翼形的布料連接。兩層布料間的空間充滿由翼形前方通風口灌進的高壓空氣。由於布料的形狀以及降落傘負載線的剪裁，鼓脹的布料會膨脹成一個翼型結構。



美國海軍展示「方形」空壓式降落傘著陸

## 預備傘

傘兵和跳傘運動者會攜帶兩個降落傘。主要的降落傘被稱為主傘，第二個稱作預備傘。在主傘無法正常開啓時，跳傘者可使用預備傘。

預備傘在二次世界大戰時由美軍傘兵開始使用，現在幾乎普遍被採用。對於跳傘者，只有緊急跳傘才會使用單一降落傘，而這些往往是舊型的圓形設計，現代的 PEPs（例如 P124A/飛行員）都包含大型且易於操控的空壓式降落傘。

## 開傘部署

備傘通常有個開傘索系統，但大多數現代運動跳傘員所使用的主傘是手動開傘的輔助傘。開傘索系統會拉動一關閉的保險針（有時為多個）以釋放出安裝彈簧的輔助傘並打開容器，輔助傘會被彈簧推入空中並藉由通過氣流所產生的力量將裝有頂棚袋子的引導傘拉出，兩者透過繫帶相接。

手動開傘的輔助傘，一旦進入到空中氣流，將會拉開引導傘上的關閉保險針並開啓容器，相同的力會拉出開傘的袋子。手動開傘的輔助傘有不同形式的變化型，但一般都將系統稱爲「投出系統」。只有手動開傘時，輔助傘在使用控制上升氣流的拉繩開傘後可自動套縮，以減少輔助傘在主傘飛行時產生的拉力。另一方面，預備傘在開傘後



並不保留輔助傘。在預備傘系統中，預備傘的開傘袋和輔助傘並未與降落傘的傘衣相連接，這就是所謂的自由袋架構，相關組件常在備傘開傘後遺失。有時輔助傘可能並未產生足夠的力量去拉動保險針或拉出傘袋，原因可能是跳傘員的輔助傘被亂流尾流纏住了（即所謂的「渦流」），或關閉環上的保險針卡的太緊，或者是輔助傘產生拉力不足，這結果被稱為「輔助傘遲滯」，如果狀況未排除，可能導致完全故障並需要啓用預備傘。

傘兵的主傘通常利用固定拉繩開啓，但保留裝降落傘的傘袋，且不依靠輔助傘來開傘。這種開傘袋的構造被稱為直接傘袋系統且開傘速度快速、一致並且可靠。這樣的開傘方式也在跳傘學員進行固定拉繩式的跳傘上使用，是一種學生訓練課程。

使用建模過程，建立一個上述討論中的開傘數學模型。我們主要著重在降落傘是如何膨脹。用你的模型來解釋降落傘折疊的幾何形狀會如何影響降落傘的膨脹，並且討論我們可能會如何影響降落傘的膨脹速度。



一個南太平洋海島鏈決定將他們其中一個島嶼開發成度假勝地。這個大致成圓形的海島，直徑大約 5 公里，包括涵蓋整個海島的一座山。山大致成圓錐狀，中心大約是 1000 公尺高且結構多數為沙或植被的沙之山丘。有人提議租一些消防船來洗滌並將沙山丘沖入港口。這件工程希望能盡快完成。

建立一個沙山丘數學模型。使用您的模型回答下面問題：

- 在山上，以一個時間函數表示水流應該如何導向？
- 使用一艘消防船，將需要多少時間？
- 使用 2 艘（或 3，4 等等）消防船是否可減少 2 倍（或 3，4 等等）以上的時間？
- 建議度假勝地委員會應該如何進行。



## 2007 Problem A

### Smoke Alarms

火災是意外死亡的主要原因之一。採取充分的預防措施和儘可能準備好因應火災的緊急狀況是非常重要的。

超過一半的致命火災常發生在晚上 10 點到早上 6 點之間，而這段時間內，大部份的人通常在睡覺。煙霧警報器是在您睡覺時可以讓您警覺到火災發生的必需品。但煙霧警報器是否能讓我們有足夠的時間安全地撤離？

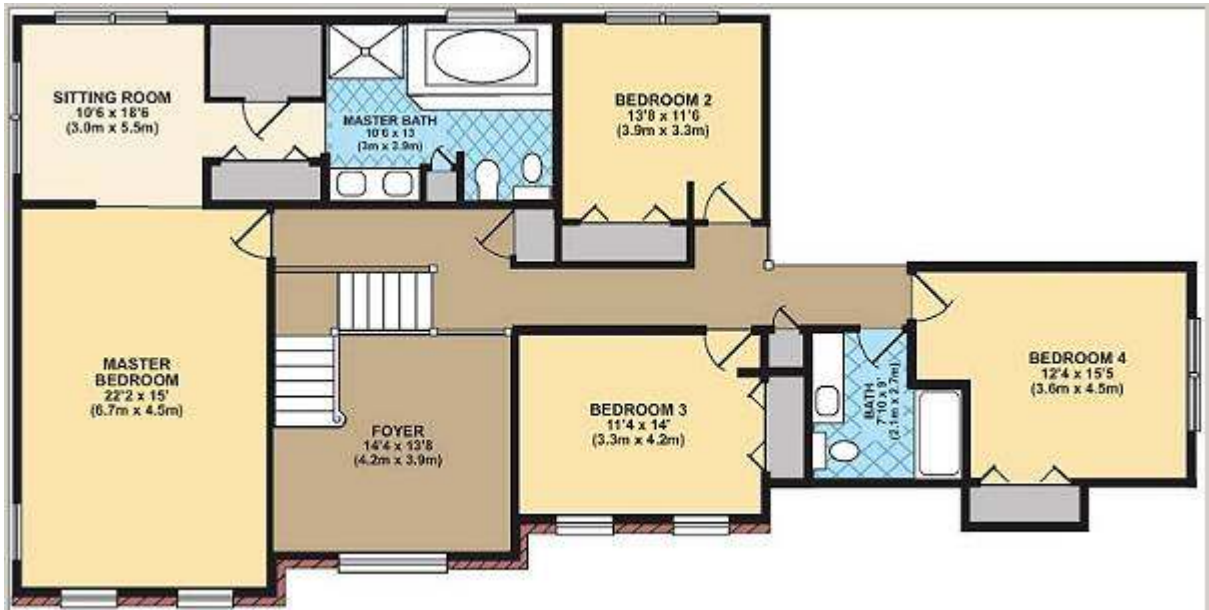
建立一個數學模型來決定裝置煙霧警報器的數量和地點以便能提供最多的撤離時間。模型內也要包括住家中放置隨手可得的滅火器的數量和地點。建立一個數學模型能讓一個家庭從一層和二層的房子撤離。

爲您當地的消防署準備一個宣傳廣告並於社區內發放，廣告內需包含您數學模型的主要結論。



# Two Story Home

## Downstairs



## 2007 Problem B

### Car Rentals

有些人會在做長途旅行時租借汽車，他們確信這是在存錢，即使他們沒有真的存到錢，他們也覺得「如果汽車在旅行途中拋錨，問題是歸屬於汽車租借公司的」，這個觀念讓租車變得有價值。分析並決定在哪些情況下租車是較適當的選擇。決定一個人能在感到舒適、自在的情況下開著自用車並載著家人的哩程數極限。

## 2008 Problem A

### National Debt and National Crisis

數學模型包括兩個同樣重要的步驟－根據現實情況來建立模型並解釋根據現實世界模型所作的預測。這兩個步驟同等重要。

我們從 2008 年美國總統大選開始，辯論的主題一定是國債。作為一個高中生，你一定會特別關注這個議題，因為你是將來必須清償或至少在未來是要處理國債的人。國債利率的改變取決於聯邦收入（主要稅收）與支出之間的差距。你的第一項任務是建立一個可以用來了解國債的模型並依據不同的假設來進行預測。如往常一樣，模型必須在太複雜和太簡單中取得一個平衡點，若太複雜，將導致模型非常難以處理，但若太過簡單，又將讓模型不切實際且毫無價值。您的模型至少要對不同的稅收及及開支政策進行討論。

單純靠數字是無法提供訊息，那些數字必須放在個別狀況或事件中才會有意義。例如，平均人民國債就比總國債要更具意義。另外，一定要注意通貨膨脹。許多分析家將國債與國民生產總值之間的比例當作影響國債的重要指標，而其他的分析師則擔心為了支付國債的利息而所需花費的費用。而這花費不僅視國債的金額大小，並需視政府借錢的利率。你可能會想看看維基百科上的文章，可以參考下列網站上所附有關國債與國民生產總值比率的數據。

( [http://en.wikipedia.org/wiki/National\\_debt\\_by\\_U.S.\\_presidential\\_terms](http://en.wikipedia.org/wiki/National_debt_by_U.S._presidential_terms) )

### 任務：

1. 建立一個可以幫助了解國債的模型並依據不同的假設來進行預測。你必須對模型內各樣的因素提出解釋並需測試你模型對各參數的敏感度。
2. 利用你的模型去比較 2009—2017 年至少兩個替代方案。你的方案應該要是合理且可執行的，並根據不同的稅率和消費政策來制定計劃。使用你的模型去比較你的政策對國債與對全國總體的影響。
3. 準備一封給新總統的信，並向他建議你的模型。

## 2008 Problem B

### Going Green

美國處理國家碳足跡有兩種方式：減少二氧化碳的排放或加速二氧化碳的處理。假設美國二氧化碳的排放量無限制地超過 2007—2008 年的標準，那有什麼方法可以增加二氧化碳的處理，以期能以對經濟及文化造成最小的影響？甚至有可能達到平衡嗎？為你的解決方法建立模型，並指出其可行性、有效性及費用。準備一份簡短的摘要給美國國會，並說服他們採用你的計劃。

## 2009 Problem A

### Water, Water Everywhere

淡水在美國許多地方是有其發展限制的。設計一個有效的、可行的、且有經濟效益的國家水資源政策來因應 2010 年到 2025 年的內需。尤其，要說明在你的政策中，水的儲存、移動、去鹽化及保存這些可能的要素。考慮經濟、物理、文化及環境的影響。並將你的成本，以及為什麼會是對國家最好的選擇的這些想法用條列式的方法，向美國國會提供一份報告。

## 2009 Problem B

### Tsunami ("Wipe Out!")

最近的事件讓我們回想起遠方的或海底的地震的強大破壞力。建立一個模型去比較各種規模的地震及由地震所引起的海嘯對下列的城市造成的破壞：加州的舊金山；夏威夷州大島東岸大城－希洛；洛杉磯的新紐澳良；南卡羅來納州的查里斯頓；紐約；麻省的波士頓及任何你所選擇的城市。準備一篇給當地報社的文章，針對其中一個城市來說明你模型的發現。

## 2.2 旺宏科學獎

與數學建模有關的競賽裡，旺宏電子教育基金會所舉辦的科學獎競賽有其獨特性。在類似的比賽中，雖常有固定的競賽題目，但沒有標準答案，甚至有可能是無解，藉此來訓練學生的創造力及想像力，並讓學生學習互相合作；但在相同的條件下，旺宏科學獎連競賽題目都是『自選』，完全開放給學生發揮想像力，在日常生活中尋找問題、發現問題、進而解決問題，並將結果推廣、應用於現實生活中，這樣的設計，更能啟發學生對自然科學與應用科學的興趣及探索科學的精神與創造發明的潛力。

### 一、比賽規則

1. 競賽題目：自選。
2. 參賽資格：
  - 2-1. 個人，以全國高中及高職在校學生為限。
  - 2-2. 限指導老師乙名，且指導老師需為現任高中、職老師。
3. 評審標準：以高中、職程度為基礎自由發揮想像力與創造力完成之作品。
4. 評審辦法：

#### 4-1. 初賽：

以創意說明書作為評審依據，採書面資料進行評審，由評審採共識決定入圍作品。

#### 4-2. 決賽：

(1) 成果報告書及現場簡報最多 30 頁 Powerpoint (15 分鐘)，評審口試 15 分鐘。由全體評審委員採共識決定名次。

(2) 如有作品需將作品帶至現場，若作品無法帶至決賽展示說明，需保留所有紀錄，評審得視實際需要至研究室評鑑。

## 2.3 思源科學創意大賽－數學專題

爲了讓年輕的學莘能於平常熟悉的事物中做進一步的分析與探討、培養運用數學知識來找出解決問題的方法與步驟、提高科技競爭力，故新竹科學園區思源科技股份有限公司於 2001 年 12 月成立「財團法人思源科技教育基金會」，每年舉辦數學專題競賽，此類競賽中沒有標準答案，在腦力激盪、互相討論的過程中，亦希望參賽者可以從中體會到團隊合作的精神。

### 一、比賽規則

1. 參賽對象：全國高中職學生

2. 競賽評審：

2-1. 初審：以書面審查方式爲之，由評審委員會就下列各項進行審查，以總分擇優錄取十隊參加決賽。

(1) 專題報告書的可讀性 20%。

(2) 解題方法與數學推論 30%。

(3) 建立數學模型的能力 30%。

(4) 相關問題研究與討論 20%。



2-2. 決賽：以口頭報告以及評審問答方式為之，每隊簡報二十分鐘，評審口試十分鐘，共三十分鐘。由評審委員就下列各項進行評審。

- (1) 各隊員的表達能力及臨場應變的能力。
- (2) 各隊員對問題及答案理解的程度。
- (3) 團隊互助合作及回答問題的能力。

2-3. 成績計算：初賽書面審查：40 分，決賽臨場表現：60 分，以總分高低決定名次。

## 二、2006—2008 歷屆試題

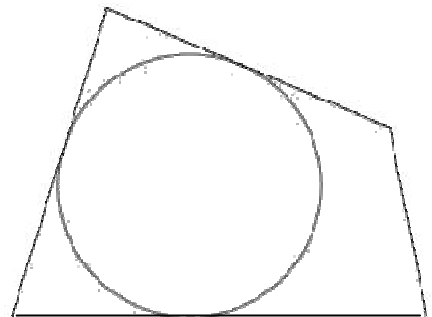
### 2006 年思源科學創意大賽【數學專題】競賽題目

有一家鐵皮工廠經常需要從一多邊形鐵皮上裁剪一片圓形鐵皮，如圖所示：為求材料的有效利用，裁剪的圓要儘量大，請想一想應該怎麼辦？

以下有三個問題，請逐一詳細說明你的方法或策略，儘可能以尺規作圖法描述，並給予證明。

1. 如何在任意的三角形區域內作一個最大的圓？
2. 依序說明如何在任意的平行四邊形、等腰梯形、梯形內作一個最大的圓？
3. 如何在任意的四邊形區域內作一個最大的圓？

能否將你的方法推廣到任意的多邊形區域？



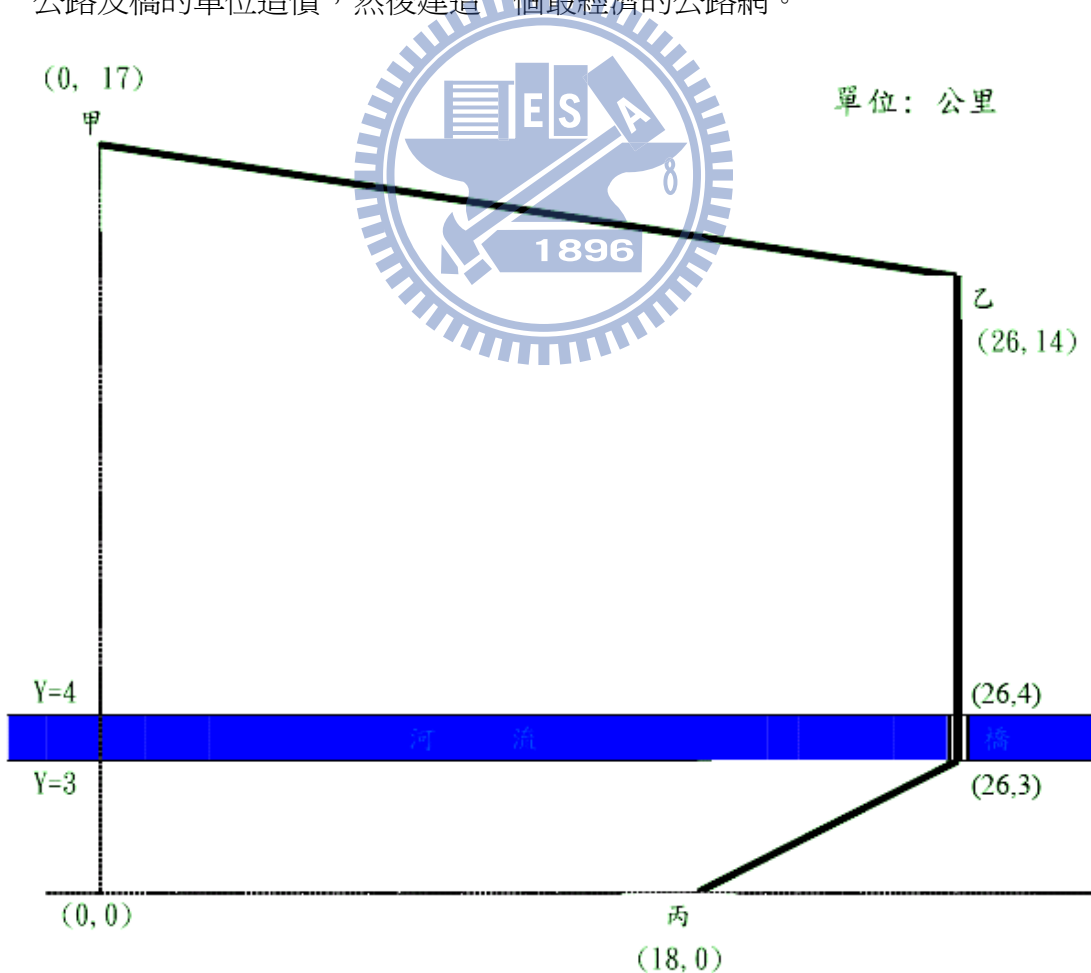
### 2007 年思源科學創意大賽【數學專題】競賽題目

#### 鋪路造橋問題

如果要為甲、乙、丙三城市建造一個公路網，讓甲、乙、丙三城市的人都能互相來往，最經濟的方法是找到『費瑪點』（可利用網路關鍵字搜尋以得更多訊息），由此點

建造三條直線公路分別連接甲、乙、丙三城市。今假設甲、乙、丙三城市分別位於座標  $(0, 17)$ ,  $(26, 14)$ ,  $(18, 0)$ ，但有一條河流將它們隔開。假設公路每公里造價1000 萬，橋樑每公里造價 5000萬。試回答下列問題：

1. 如果河流的兩岸分別是直線  $y=4$  及  $y=3$ ，試精確計算下圖所示公路網的造價。
2. 在 1. 的假設下你能自己設計一個造價更低的公路網嗎？你的造價是多少？
3. 如果河流的兩岸分別是直線  $y=4$  及  $26y-x-52=0$ （如 $x>52$  假設河流消失），你的公路網最低造價是多少？
4. 在 3. 的假設下，如果甲、乙、丙三城市在其它座標，你用什麼策略去建造最經濟的公路網。
5. 請以創意及數學深度兩項標準，自行設定三個城市的位置、河流的位置及寬度變化、公路及橋的單位造價，然後建造一個最經濟的公路網。





## 2008 年思源科學創意大賽【數學專題】競賽題目

### A、基本概念

1. 一個矩形，若長度與寬度的比值為有理數，則稱為有理矩形。如圖 1 中的矩形長寬比為  $4:3$ ，即比值為有理數四分之三，就是有理矩形。



圖 1

2. 有些矩形可以分割成有限個正方形。例如圖 1 中的矩形可分割成 1 個、3 個的正方形，總共 4 個，如圖 2 所示。

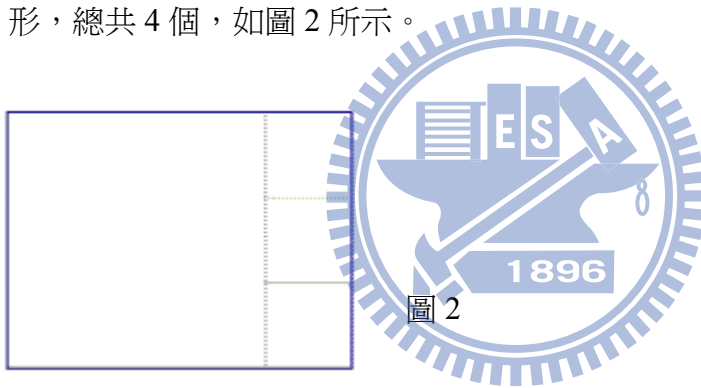


圖 2

### B、競賽題目

1. 說明每一個有理矩形都可用其長度與寬度作輾轉相除，依此將原矩形分割成有限個正方形。
2. 舉一個有理矩形的實例，顯示有非輾轉相除的分割方法所得的正方形個數小於輾轉相除法的個數。
3. 一個  $10:9$  的有理矩形，分割成一些個正方形，其個數的最小值為何？
4. 如何分割一個任意的有理矩形，可使所得的正方形個數最少？
5. 一個矩形，若不是有理矩形，則稱為無理矩形。是否存在無理矩形可分割成有限個正方形？說明你的判斷和理由。

## 2.4 台灣數學建模與創意學會－全國高中高職數學作文競賽

在第一章【圖 1-1-1】中的【結論】一環已成為現在的教材，但在課堂學習中，常只教授固有的知識、定理，而忽略當初事件發生的本質、發展的過程，長期缺乏訓練下，導致現今的學生在遇到真實世界中無固定標準答案甚至沒有答案的問題時，空有一堆數學知識、公式，仍無法發揮創造力來建立數學模型。

因此，台灣數學建模與創意學會與台灣戰略模擬學會決定每年舉辦一個沒有標準答案、可以自由發揮、互相辯證的台灣高中高職數學專題競賽，而這個比賽的題目取自於生活周遭，因沒有標準答案，參賽者可以自由思考，大膽用數學當語言來描述自己的想法與創意，故稱之為「數學的作文比賽」。希望能藉此競賽，讓學生的邏輯思考能力得以訓練、發展。



### 一、比賽規則

#### 1. 參賽資格：

全國各高中、高職對數學有興趣的學生，在老師指導下，組隊參賽。  
(指導老師必須為各校專任或實習教師)

#### 2. 競賽方式：

以「指定題目方向」的方式比賽。

#### 3. 評審方式及審查項目：

3-1. 初審：以書面審查方式為之，由評審委員會就下列各項進行審查。

- (1) 將問題數學模型化的能力，即將問題轉成數學式的能力。
- (2) 解題技巧。
- (3) 將題目推廣的深度。
- (4) 將題目推廣的創意。
- (5) 參考資料的深度、廣度。

初審入選的參賽隊伍，於 9 月 19 日，在輔仁大學（暫定）公開展示入圍作品，向評審委員作簡報並回答問題。

- 3-2. 複審：以口頭報告並回答問題的方式為之，評審委員會就下列各項進行審查。
- (1) 團隊互助合作回答問題的能力。
  - (2) 各隊員對問題及答案理解的程度。
  - (3) 各隊員的表達能力及臨場應變的能力。

上述初審、複審均由 5 位教授組成評審委員會對各項進行評審。

## 二、2006—2009 歷屆試題

### 2006 年第四屆全國高中高職數學作文競賽指定題目

#### 古巴飛彈危機--驚爆十三天危機管理之邏輯架構

說明：

請同學們看電影驚爆十三天或上網查詢：1962 年 10 月間，古巴飛彈危機始末。檢視當時美國甘迺迪政府面對危機之決策過程的邏輯架構，以任何邏輯運算、數字運算、機率運算，或其他任何你想得到的圖表分析，說明你對當時甘迺迪政府決策過程之看法，或者說明如果你是甘迺迪，你會怎麼做？

當然你也可以檢視蘇聯赫魯雪夫政府的決策過程，以任何邏輯運算、數字運算、機率運算，或其他任何你想得到的圖表分析，說明你對當時赫魯雪夫政府決策過程之看法，或者說明如果你是赫魯雪夫，你會怎麼做？為何要挑起古巴飛彈危機？

補充說明：

所謂「創意」必須是在「現實的限制下」所產生的「創意」才有價值，例如：1962 年美國還沒有 F-117 隱形戰機，你就不可以「很有創意的」假設甘迺迪總統派 F-117 隱形飛機轟炸古巴。

### 2007 年第五屆全國高中高職數學作文競賽指定題目

#### 未來中國之研究

說明：

我不必是劉伯溫，我知道未來中國 2008 年會舉辦北京奧運，2010 年會辦上海萬國博覽會，我也不必是諸葛亮，我知道中國舉辦奧運時，全世界的新聞媒體都會派員採訪，舉辦萬國博覽會時，上海的飯店會生意興隆，如果你去參觀，必須注意黑心食品趁

機而入。你可以用數學圖表或其他任何數學工具，預測奧運或萬國博覽會對中國的社會、經濟、政治甚至軍事會有任何影響？當然最重要的是要預測對台灣會有何影響？

今年的題目是個完全自由開放自由發揮的題目，不限於所提出的例題或方向，你可以挑任何一個或者多個中國未來的事件對中國的未來作推測；例如：現在上海人在上海的銀行開戶的個人支票，到北京後是不能用的，但是不久（今年內）後中國的個人的支票將可以全國流通，你可以算算看未來中國會有多少芭樂票？金額大概多少？中國政府會不會被迫制定「票據法」？產生多少「票據犯」？中國政府要花多少錢蓋監獄？當然，最重要的是要預測對台商會有何影響？

上網去查，中國未來有太多事件值得研究了，未來長江水壩完工可以全面滿載發電後，電網會怎麼分佈？中國的電價會不會下降？最重要的是台商建的電廠會不會破產關門？

今年的題目只有一個原則：你可以上網尋找挑選任何一個或多個中國未來「確定會發生」的事件，以任何數學工具，估計、預測這些「確定會發生的事件」對中國會有何影響，最重要的是要你以數學工具估計這些事件對台灣會有何衝擊？

附註：

中國的生態環境「確定」很壞，如果你以此推測類似 SARS 的疫情，「可能」再次從中國爆開，而對台灣產生衝擊，前提是「確定」的，那麼你的研究沒問題。中國號稱在做「核融合」（中國稱為核聚變）的「小太陽」計畫，就連他們自己的科學家都對此看法分歧，你「不能確定」2020 年或 2025 年，核融合的反應爐能商業運轉，如果你的研究以「不能確定的」事件作前提，那麼就變成「中國未來之幻想」！

## 2008 年第六屆全國高中高職數學作文競賽題目

### 台灣人口結構少子化與老人化之研究

說明：

從內政部的網站可查得，我國新生兒總數 1991 年為 321,932 人，2001 年為 260,354 人，2007 年為 204,414 人，出生率快速下降。同樣的從內政部的網站也可以查得我國

65 歲以上的老人佔總人口比率，1991 年底為 6.53%，2001 年底為 8.81%，到 2006 年 7 月已達 10.09%。我國人口結構明顯的少子化與老年化現象，已經造成社會、經濟、政治甚至軍事上的影響，未來會有更多問題出現！

請就我國人口少子化與老人化現象未來所可能產生的問題，以任何圖表、程式、符號...等表達出來，透過數學的思維，嘗試尋找解決的方法。例如：小學生人數不足，學校減班，未來老師可能失業，你現在應該如何未雨綢繆？未來可能兵源嚴重不足，你現在應該有何作為？未來老人醫療問題、就養問題將可能讓年輕人負擔很重，你現在應該有何作為？

## 2009 年第七屆全國高中高職數學作文競賽題目公告

### 新型流行性感冒防疫之相關研究

說明：

這個題目早在 2009 年春節前就定好了，原名是「禽流感防疫系統之研究」，因為這一兩年來，世界各國的疾病管制中心（CDC）都針對人傳人的禽流感（NH5N1）提高警戒，沒想到先來的卻是豬流感（N1H1）。這正好顯示出流行性感冒病毒基因突變的不可測，不過，不管來的是何種流行性感冒，WHO 或各國的 CDC 總有一套防範各種流感都適用的標準作業流程（SOP）或者防疫系統。假設你是 CDC 的官員，你會制定什麼樣的流感防疫之 SOP 或防疫系統？請用數學工具，包括圖表、方程式、函數、邏輯、統計...等工具，來說明你的 SOP 或防疫系統的合理性。

範例一：

就連 WHO 都將豬流感警戒分成六級，各國的防疫系統裡的各個單位，例如：海關、衛生署、CDC、地方衛生局、醫院、...等當然也分多個警戒級數，各單位針對不同警戒級數採取不同的行動互相合作，形成多重選擇合作賽局（multi-choice game）或者多重情境協調系統（multi-state coherent system）。你能用這些模型來支持你所設計的流感防疫之 SOP 或防疫系統之合理性嗎？

範例二：

防疫如同作戰，你能借用現今最夯的美軍 DoD AF 或 C4ISR（背後原理當然是數學模型）的戰場觀念來架構你的防疫系統嗎？

範例三：

純屬開玩笑！如果你做得出來就是人類的救星，請建構一個可以預測流行性感冒病毒的 DNA 突變之數學模型，也許是要解 SPDE...，預測下一波流感病毒株的基因排序，提早做好疫苗。



### 第三章 學生數學建模競賽內容

近年來，國內數學建模競賽雖快速發展，但對一般學生而言，初乍看到題目或構思題目時，常有無法界定範疇及不知如何下筆之感，故於本章節中，摘錄部份決賽作品以供大家了解—「生活週遭處處是數學」，而「數學建模」競賽對學生而言，並非是遙不可及、無法踏足的領域。

#### 3.1 數學建模作品內容摘述

以下就國內旺宏科學獎，簡述部份決賽作品內容。

##### 一、第三屆優等 檢定樂透

表 3-1-1 簡述檢定樂透

研究動機與目的	自從民國 91 年發行樂透彩券以來，生活周遭充斥著所謂的「明牌」，又觀察到在前幾期的資料中連續整數與前後兩期出現相同號碼的次數太多，故想探討是否真有「明牌」？ 本作品的目的是在以科學的方法提出數據佐以理論為基礎，推論開獎的公正性，以匡正社會大眾追求明牌的歪風。
研究方法	1. 伯努力二項式分配 2. 期望值、變異數 3. 機率分配散佈圖
結論	1. 接受開獎公正性 2. 建議挑選有連續整數的彩券

	3. 從前一期 6 個中獎的號碼中取一個號碼，再從前一期 36 個未中獎的號碼挑選 5 個號碼比較容易中獎
引用數據	台北銀行第 091001 期到 093025 期樂透彩開獎號碼
應用軟體	EXCEL 的統計函數

## 二、第六屆銀牌 鬼謎藏—抽鬼牌遊戲勝率之探討

表 3-1-2 簡述鬼謎藏

研究動機與目的	<p>從兩人互抽鬼牌探討起：一副撲克牌 52 張，外加兩張鬼牌，平分給兩人，每人各拿 27 張，同點數的牌必須丟出，之後兩人互抽牌，一旦手中有同點數的就丟出，玩到最後，手中沒有牌的就是贏家。想探討不同牌型贏的機率，找出這項遊戲贏的機率函數，並希望求出遞迴數列的一般解。</p>
研究方法	<ol style="list-style-type: none"> <li>若兩人為甲、乙，則因 <math>P(\text{乙贏}) = P(\text{甲輸}) = 1 - P(\text{甲贏})</math>，故要求一般解時，以求甲贏的機率為主。</li> <li>利用樹狀圖分類探討： <ol style="list-style-type: none"> <li>設兩人各擁有一張鬼牌，且甲、乙雙方的牌數摒除鬼牌後各為 <math>k</math> 張，甲贏的機率為 <math>P_k</math>。</li> <li>設甲沒有鬼牌，乙有兩張鬼牌，且摒除鬼牌後兩人牌數各有 <math>k</math> 張，甲贏的機率為 <math>Q_k</math>。</li> <li>設甲有兩張鬼牌，乙沒有鬼牌，且摒除鬼牌後兩人牌數各有 <math>k</math> 張，甲贏的機率為 <math>R_k</math>；</li> </ol> <p>先分別找出三種情況下 <math>k=1</math> 的機率。</p> </li> <li>將摒除鬼牌後兩人牌數 <math>k</math> 從 1 延伸至 13 時，每種情況甲贏的機率。</li> <li>將摒除鬼牌後兩人牌數推至 <math>n</math> 張，找出遞迴式，以求一般解。</li> <li>最後用 EXCEL 解遞迴式，觀察數據的規律性。</li> </ol>



	6. 佐以數學歸納法證明之。
結論	<p>成功計算出不同情況下，甲贏的機率：</p> $P_n = -\frac{1}{4}(-1)^n + \frac{1}{2} + \frac{3}{8(n+1)(n+3)}((-1)^{n+1} - 1)$ $Q_n = \frac{1}{4}(-1)^n + \frac{1}{2} - \frac{3}{8(n+2)(n+3)}(-1)^n + \frac{3(2n+5)}{8(n+2)(n+3)}$ $R_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(-1)^{n-1} + \frac{3}{8(n+1)(n+2)}(-1)^{n-1} - \frac{3(2n+3)}{8(n+1)(n+2)}$
應用軟體	EXCEL

### 三、第三屆旺宏獎 翻動「棋跡」

表 3-1-3 簡述翻動「棋跡」

研究動機與目的	<p>探討 <math>n \times n</math> 的棋盤及 <math>n^2</math> 個兩面棋（一面黑一面白），若規定其中一個棋子翻面時，與此棋相鄰的棋子亦須跟著翻面，則是否所有的棋局皆可翻成同一面？若可，則如何翻才是最簡潔的？並有何規則？</p>
研究方法	<p>將每個 <math>n \times n</math> 的棋局視為以 <math>\{0, 1\}</math> 組成的 <math>n \times n</math> 的矩陣，其中 0 代表白棋，1 代表黑棋，只討論將全部棋子翻成白棋的情形，若需討論全部翻成黑棋，則將 0、1 互換即可。</p>
結論	<p>當 <math>n=2 \sim 30</math> 時，<math>(5n-1) \times (5n-1)</math>、<math>(6n-1) \times (6n-1)</math> 的棋局未必能翻成同一色，其餘皆可。</p>
應用軟體	Mathematica

## 3.2 數學建模作品的共同特點

以下就國內旺宏科學獎、全國高中高職數學作文競賽及思源科技創意大賽三種競賽，分析其部份決賽作品的特點。

### 一、旺宏科學獎

在旺宏科學獎中，因為題目自訂的關係，每份作品的研究方向、探討的現象十分不同，即使同為數學類，也幾乎沒有交集，其中甚至有些題材的內容，遠遠超越高中課程的範疇，但無論作品風格如何迥異，仍有一大共同特徵－「生活化」。

在附錄三裡，挑選出 18 項與數學相關的作品，每一項或多或少都可說是從參賽者身邊發生的事件、接觸過的遊戲引發出興趣，興起探究的欲望，進而將其問題簡化、純化為數學問題，以期用數學的方法尋找到通解，並分析現象，以供未來作預測及參考。故在「生活中」發現數學，意即生活中處處是數學這項特點，在旺宏科學獎作品中最為明顯。



### 二、全國高中高職數學作文競賽及思源科學創意大賽

在參考了第五屆、第六屆數學作文及歷屆思源科學創意大賽作品後，發現以下共同特點：

#### 1. 善用工具

在數學解題中，常以紙筆計算為主，即使引進了電腦，大部份的人也只是利用 word 等文書處理軟體將紙筆算式鍵入電腦內以方便呈現；但現在是科技的時代，許多數學相關的軟體因應而生並為參賽者所運用。像思源競賽中，雖然題目、範圍已訂，所探究問題的方向亦同，但在一片紙筆分析、計算中，仍可看見引用 Mathematica 來簡化繁瑣的計算，利用 GSP 的動態幾何功能讓某些結論可以更為直觀，且易被接受。這種善於利用所學的資訊工具對於數學建模解題至為重要。

## 2. 常作數據分析

無論是問卷、歷年來某些統計資料中，常伴隨著大量、無序且雜亂的數據，要利用人工作數據分析實為不易，故常需引入統計分析軟體，像在部份比賽中（例如數學作文第五屆決賽作品中：奧運對兩岸觀光的影響、人口糧食問題等），皆有數據需要作曲線擬合或尋求各變數間的關聯性的需要，而參賽者往往利用 EXCEL 的內建功能—迴歸、繪圖等功能，來呈現結果，省時且方便。

## 3. 創造力

此點在東吳數學作文競賽中較為明顯，也許因為名稱為數學「作文」，故在作品中，常出現具有架構性的故事，部份更加入了緊張、懸疑的橋段，甚至連福爾摩斯的對頭—羅蘋都跑出現來以增添趣味性；串場則是有像名著「達文西密碼」般有著需要深思的數列或密碼加以編造似加密與解密過程，亦有賽局理論、mod 利用等，在文章中加入數學元素，讓人不禁對參賽者的創意感到讚嘆！



## 3.3 數學建模競賽探討

以下就全國高中高職數學作文競賽、思源科學創意大賽、旺宏科學獎及全美高中學生數學建模競賽的規則及題目的訂定進行探討。

### 一、全國高中高職數學作文競賽

本競賽常以當時社會發生的熱門現象作討論，例：少子化問題、SARS 防疫、H1N1 防疫之研究等，相信每年主辦單位在題目上傷透腦筋！

競賽中，雖每年皆訂有主題，但並不侷限參賽者研究的方向、討論的問題，故在相同主題下，卻有不同題目的產生。像第五屆決賽—「未來中國之研究」的八份決賽作品中，討論問題包羅萬象，例：中國持有美國國庫債券對台灣影響之研究、人口對糧食問

題、人口與貧富關係性、開放兩岸直航後中國大陸來台觀光人數與台灣環境品質的相互影響等多樣化的探討，實為其競賽之一大特色。

## 二、思源科學創意大賽－數學專題

思源科學創意大賽與全國高中高職數學作文競賽最大的不同是：主題不僅固定，連要討論的問題皆相同。在還沒閱讀作品前，曾覺得這樣的方式會不會太死板、制式？但後來發現，大錯特錯！居然忘了一個定理怎麼可能只有一個算式、一種解法？！像畢氏定理的證明，三角函數性質的公式等，皆存在許多不同的證法！而這項比賽，更讓人訝異的是，即使參賽者對於相同的題目，運用相同理論，亦有不同的推導過程，並能應用不同的軟體（例如：GSP、Mathematica）來佐證自己的論點。

## 三、旺宏科學獎

旺宏科學獎的競賽方式感覺很像科展，並且是沒有領域限制的科展，如何評比不同領域的研究成果，對主辦單位而言實為一項艱鉅的任務。從歷屆決賽得獎作品看來，領域橫跨生物、數學、物理等等，例如：第八屆銀牌－「藻類培育－仙后水母與其共生藻」、第六屆金牌－「探究振盪反應」、第五屆優等－「新式國民身份證相片規格驗證浮水印防偽系統」、第三屆優等－「檢定樂透」等，讓人覺得這項競賽較前述兩項更為貼近日常生活，因為比賽題目沒有限制，參賽者必須從日常生活中有興趣的小細節裡發現問題，並抽絲剝繭、應用所學後得到能認同的數學模型與結論，這樣的過程，更可激發學生對問題的想像力與解題的創造力！實在更為符合數學建模的精神！

## 四、全美高中數學建模競賽（HIMCM）

上述的競賽中，個人最喜好的是旺宏科學獎題目不受限制的作法，但若考量到美國HIMCM的歷屆題目，更讓人由衷佩服每年皆可設計出如此貼近生活的問題，例：2005年的石油問題、2007年火災逃生問題、2008年美國國債、2009水資源問題，這些都是日常生活中每個人可能會遭遇到的情況。

HIMCM 雖稱之為數學建模競賽，其實常需要跨領域人材的合作，像 2006 年降落傘就是一個很好的例子。剛開始在閱讀 HIMCM 題目時，有種不太像是「數學問題」的感覺，但在慢慢了解數學建模是在日常生活中發現問題、將之數學化、解決問題、甚至推廣的精神後，再回過頭來看題目，更讓人覺得主辦單位出題的用心！畢竟生活裡，不僅處處隱含著數學條理，更包含了其他領域的知識與現象！

國內數學作文競賽題目雖亦從生活中取材，但主題廣泛，讓參賽者有自由發揮想像的空間，但卻無法將主題聚焦；反觀 HIMCM，雖亦為全面性的主題，但給予較多的資訊，有些甚至會有討論方向的提示，不致讓人覺得無法掌握所需探究的問題核心。

### 3.4 數學建模作品內容和高中數學教材的關連性

在探討建模競賽題目、內容後，讓人不禁有兩個疑問：「是否一定要用很高深的數學理論方能解題？」「國內普通高中的學生有能力、程度朝這方面發展嗎？」為了解除這項疑惑，於本節中就競賽規則最「自由」的旺宏科學獎，列出歷年得獎作品中數學領域的題材（詳見附錄三），並比對其與國內高中數學課程教材內容的關聯性，另外，亦將所應用到的科技軟體加以分類、介紹。

一、旺宏歷屆數學領域之得獎作品與高中課程內容比對

表 3-4-1 得獎作品的數學領域與高中課程對照表（依高中課程分類）

冊數	章節名稱	作品編號（請參考附錄三）
無		1、3
第一冊	數與座標	5、10、11、12、13、15、17
	數學歸納法	8、9、14、16
第二冊	指數對數	9
	三角函數	2、15、
第三冊	平面向量	2、13、15、17、18
	空間向量	2、12、13、17、18
	圓與球	2、12、14、17、18
第四冊	圓錐曲線	7、12
	排列組合	9
	二項式定理	9
	遞迴數列	16
	機率統計 I	6、16
選修數學 I	機率統計 II	6
	矩陣	4、10
	不等式	9
選修數學 II	二階方陣的平面變換	12

表 3-4-2 得獎作品的數學領域與高中課程對照表（依屆數與題目分類）

編號	屆數	獎項	題目	高中範圍
1	1	金牌	經理來了！談一筆劃問題	
2	1	金牌	由三角形到三角錐	三角函數、圓與球、 平面、空間向量
3	2	金牌	挑剔數列	
4	3	旺宏獎	翻動「棋跡」	矩陣
5	3	銀牌	與特殊型質數之倒數關聯的兩 平方總和的整數分解	數與座標
6	3	優等	檢定樂透	機率統計 I、II
7	3	優等	千變萬化的橢圓盡在手中	圓錐曲線
8	4	旺宏獎	勝敗天注定	數學歸納法
9	4	金牌	對稱函數	數學歸納法、指對數、不等式、 排列組合、二項式定理
10	4	金牌	「碼」到成功	數與座標、矩陣
11	4	金牌	分和累乘再現數產生的方法及 其性質探討之推廣與應用	數與座標
12	5	金牌	對角線與方格圖之關係探討與 推廣	數與座標、空間向量、圓與球、 圓錐曲線、二階方陣平面變換
13	5	金牌	史坦納樹之研究	數與座標、平面、空間向量
14	6	旺宏獎	共點圓 共圓點	數學歸納法、圓與球
15	6	金牌	三角形的鏡射變換	數學歸納法、三角函數、 平面向量
16	6	銀牌	鬼謎藏— 抽鬼牌遊戲勝率之探討	數學歸納法、遞迴數列、 機率統計 I

17	7	旺宏獎	空間中的九點圓與尤拉線	數與座標、圓與球、 平面、空間向量
18	8	銀牌	由泡泡接合，探尋孟式定理	平面、空間向量、圓與球

## 二、旺宏歷屆數學領域之得獎作品所應用到的軟體

表 3-4-3 得獎作品與應用軟體分類表

軟體名稱	作品編號（請參考附錄三）
Archimedes Geo3D	18
Basic	1
C 語言	3
Cabri 3D	18
Calgues 3D	18
EXCEL	6、16
GSP	13、15、17
Mathcad	11
Mathematica	4、15
Maple	18
SolidWorks2003 3D	7
SPSS	15
Visual Basic	5

由上述兩個表格，不難看出競賽得獎作品的解題思維取材自高中課程內容佔大量的比例，且應用的大部份是耳熟能詳並經常使用的軟體，故從自身所學出發，即有能力面對這類競賽，盼由這樣對照後，讓學生不再有望數學建模競賽而興嘆之慨了！



## 第四章 資訊軟體在數學建模中的角色

隨著資訊的發展，科技在數學教學及建模上的應用越來越廣泛，本章第一節將介紹資訊融入教學中常用的軟體，並於第二節中介紹前述軟體在高中課程或競賽上的應用與實作。

### 4.1 資訊融入教學

早在 1993 年吳鐵雄即認為電腦輔助教學是突破我國傳統教學，適應學生個別差異，提高教學品質的有效途徑之一，並致力於中小學推廣資訊教育。並在「需在關鍵時刻融入資訊教育」（陳揚盛，2007）中談到：「電腦輔助教學最重要的二個因素缺一不可：一是數位學習內容教材，二是會用的人」。現今國內在數位教學的推廣已漸有成效，老師會自行設計數位教材越來越多，近年來，甚至出現「班班有電腦，校校有電子白板」的政策，這些倡導者皆希望教師能將資訊科技融入「教學」，以激發學生的興趣、增進師生的互動。

但十幾年後的今天，是否應更深入地反向思考—將資訊科技融入學生的「學習」當中！若能廣泛地訓練學生從觀察、發現問題、進行實驗到結論歸納，漸漸培養從「做中學」的能力，相信將能真正激發學生學習的興趣！

「做中學」，是數學建模的中心精神，利用發生在生活週遭的問題，簡化變項、建立模型，在過程中，常有雜亂的數據需要抽絲剝繭，找尋變項間的關係；像第一章提到的克卜勒，在龐大的數據中利用紙筆計算，花費無數時間後，發現了行星運動定律。若在現今，相信只要利用適當的數據分析（一次、二次，或指數函數等多方嘗試），即可發現第三行星運動定律：「各行星繞太陽公轉周期( $T$ )的平方與其橢圓軌道的半長軸( $R$ )

之立方成正比，即「 $\frac{R^3}{T^2}$  為定值」的這項結果，亦減少許多數據處理的時間。以下將簡介幾個常用軟體。

#### 4.1.1 LINGO

Mathematica、Matlab、Lingo 三個軟體常應用於數學建模中，前兩者時有耳聞，而 Lingo 則否。

Lingo 是一種專門用來求解數學規劃與最佳化的軟體，由美國芝加哥大學的 L Schrage 教授創立的 Lindo 系統公司所開發，可以在 Windows 和 Linux 環境下使用。而同一個版次具有不同的版本，如：試用版、學生版、高級版、超級版、工業版、擴展版等等，不同版本對求解問題的規模、變量數目與約束條件的限制皆不同。

Lingo 除了可用於求線性規劃、非線性規劃、二次規劃及整數解等問題，亦可用於求線性與非線性方程式的根。

在自身的使用過程中，覺得操作較 Matlab 簡單，沒有太複雜的語法、規定（不似 C 語言等程式語言般複雜），且執行速度快，非常適合沒有寫程式背景的人使用。編寫簡單程式就能進行最佳化計算是 Lingo 最大的優點。

#### 4.1.2 SPSS

SPSS 是 Statistics Package for Social Science 的縮寫，顧名思義是一套社會科學的統計分析軟體，常利用來分析民調、客戶滿意度，並可根據變項多寡、分析目的，選擇不同的分析方法以建立圖表、分析表，並檢定假設。其部份分析功能與 Excel 類似，但許多功能以表單式呈現，操作簡易，功能強大。

### 4.1.3 GSP

GSP (The Geometer's Sketchpad) 動態幾何繪圖板，是一個可以在視窗下操作的電腦輔助教學軟體，不僅可以減少繪圖時間，並可輔助學生了解較複雜、抽象的空間概念。此軟體有動態模擬、圖形變換、度量等功能。亦提供學生面對圖形改變、參數改變時，重新計算目標函數（舉凡二元一次、面積、長度）的功能。

像三角函數在高一數學中是很多同學無法跨越的障礙，雖然基本定義簡單，但若延伸到圖形甚至其應用時，常無法入手，此時若引入動態幾何繪圖板，讓三角函數的圖形動態呈現其繪製過程，不僅節省課堂上繪圖的時間，學生也能更清楚圖形的由來，故 GSP 在教學及學習上，都是一個極佳的好幫手。

### 4.1.4 GEOGEBRA



Geogebra 是由 Markus Hohenwarter 針對學校教育所研發的軟體，可號稱是高中數學的教學軟體，許多高中數學的方程式皆可直接輸入並繪圖。其操作方式與 GSP 相似但操作介面卻更簡單易入手。

Geogebra 雖不如 GSP 名氣響亮，但因其為 Freeware (自由軟體)，開程式碼，讓大家可以自由使用、自由拷貝、自由散佈，更讓高手自由修改，使其功能更貼近使用者，且經師大物理黃福坤教授將其中文化後，已較廣為人知。目前 Geogebra 中文版已改版到 3.2 版。

## 4.1.5 EXCEL

Excel 為一個試算表軟體，具有強大的計算、分析能力，藉由資料輸入 Excel 的表格中，利用內建的各项工具，依據所需要的目的建立圖表、整理、分類資料及數據分析，可大量減少人工作業的時間。在坊間一些數學建模比賽中，常採用 Excel 進行數據分析，甚至利用迴歸線進行預測。

## 4.2 高中數學利用資訊科技範例

以下將就前述五種軟體於線性規劃及迴歸分析上之應用作介紹。

### 一、線性規劃求解

某工廠用兩種不同原料均可生產同一成品，若採用甲種原料，每噸成本 1000 元，運費 500 元，每天可得產品 90 公斤。若採用乙種原料，每噸成本 1500 元，運費 400 元，每天可得產品 100 公斤。現知每天預算成本總共不得超過 6000 元，運費不得超過 2000 元，問此工廠每天需採用甲、乙兩種原料各多少噸才能生產最多成品？又每天最多可生產成品若干公斤？（完全記入式高中數學乙複習講義）

方程式：假設每天甲種原料的噸數為  $x$ ，乙種原料的噸數為  $y$ ，可得

$$\begin{cases} 1000x + 1500y \leq 6000 \\ 500x + 400y \leq 2000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y \leq 12 \\ 5x + 4y \leq 20 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

目標函數： $90x + 100y$  的極大值

# 1. LINGO

## (1) 設定方程式

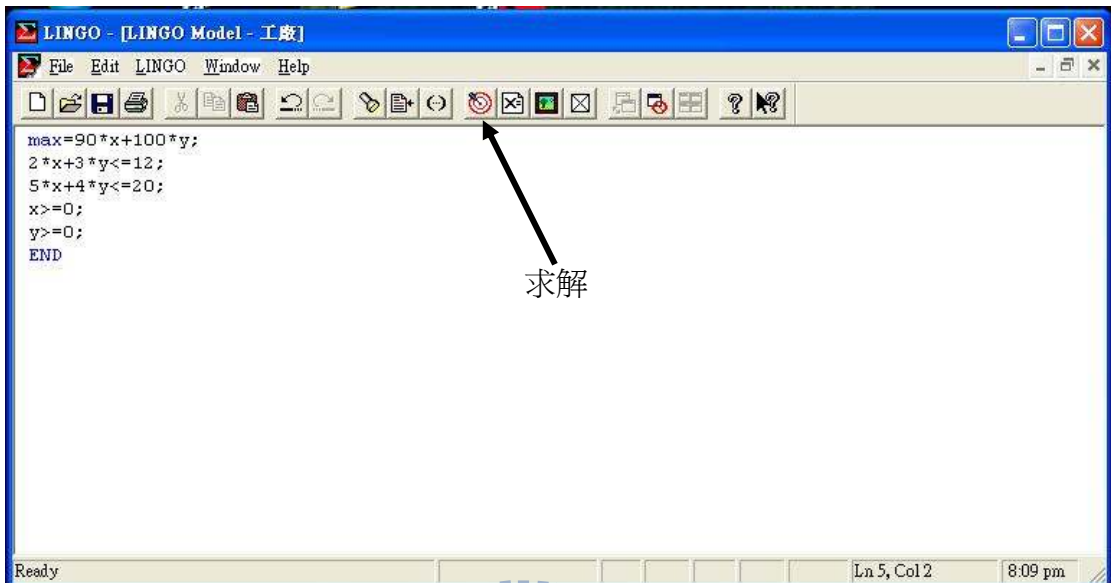


圖 4-2-1 Lingo 設定

## (2) 解答

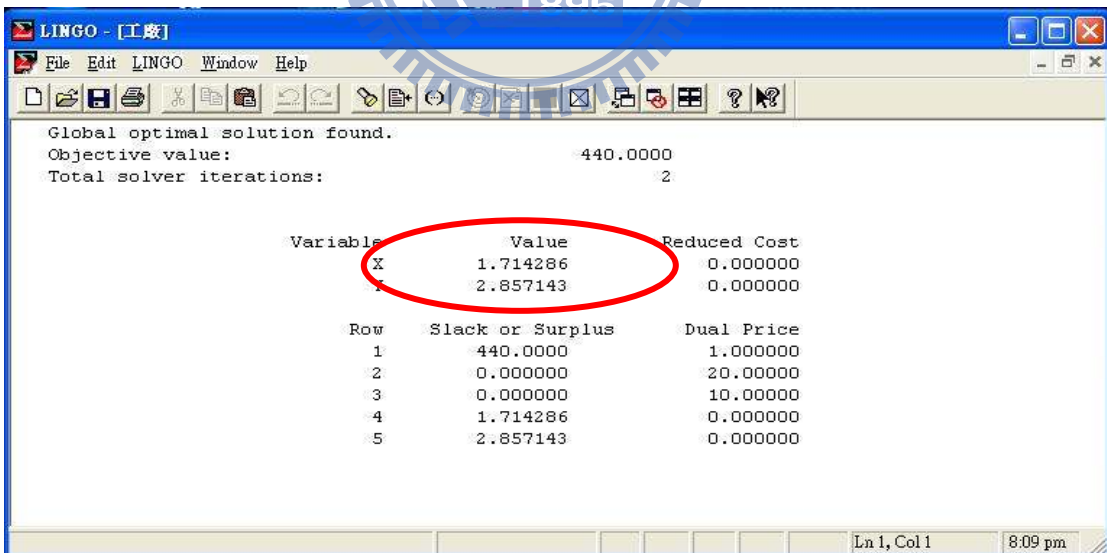


圖 4-2-2 Lingo 解答

## 2. EXCEL

### (1) 設定變數與目標函數

表 4-2-1 EXCEL 線性規劃設定

變數		
每天甲種原料的噸數 (x)	0	
每天乙種原料的噸數 (y)	0	
目標函數 (最多產量)	0	$90*B2+100*B3$
限制	資源使用量	資源上限
成本 ( $1000*B2+1500*B3$ )	0	6000
運費 ( $500*B2+400*B3$ )	0	2000

### (2) 【執行工具】 / 【規劃求解】 / 【參數設定】

The screenshot shows the Excel Solver Parameters dialog box overlaid on a spreadsheet. The spreadsheet contains the following data:

	A	B	C
1	變數		
2	每天甲種原料的噸數(x)	0	
3	每天乙種原料的噸數(y)	0	
4			
5			
6	目標函數(最多產量)	0	$90*B2+100*B3$
7			
8	限制	資源使用量	資源上限
9	成本( $1000*B2+1500*B3$ )	0	6000
10	運費( $500*B2+400*B3$ )	0	2000
11			

The Solver Parameters dialog box is configured as follows:

- 設定目標儲存格:  $\$B\$6$
- 等於:  最大值  最小值  目標值: 0
- 變數儲存格:  $\$B\$2:\$B\$3$
- 限制式:
  - $\$B\$10 \leq \$C\$10$
  - $\$B\$9 \leq \$C\$9$

圖 4-2-3 EXCEL 參數設定

(3) 按【求解】

表 4-2-2 EXCEL 線性規劃解答

變數		
每天甲種原料的噸數 (x)	1.714285714	
每天乙種原料的噸數 (y)	2.857142857	
目標函數 (最多產量)	440	
限制	資源使用量	資源上限
成本	6000	6000
運費	2000	2000

3. GSP 動畫

(1) 設定條件不等式及目標函數直線

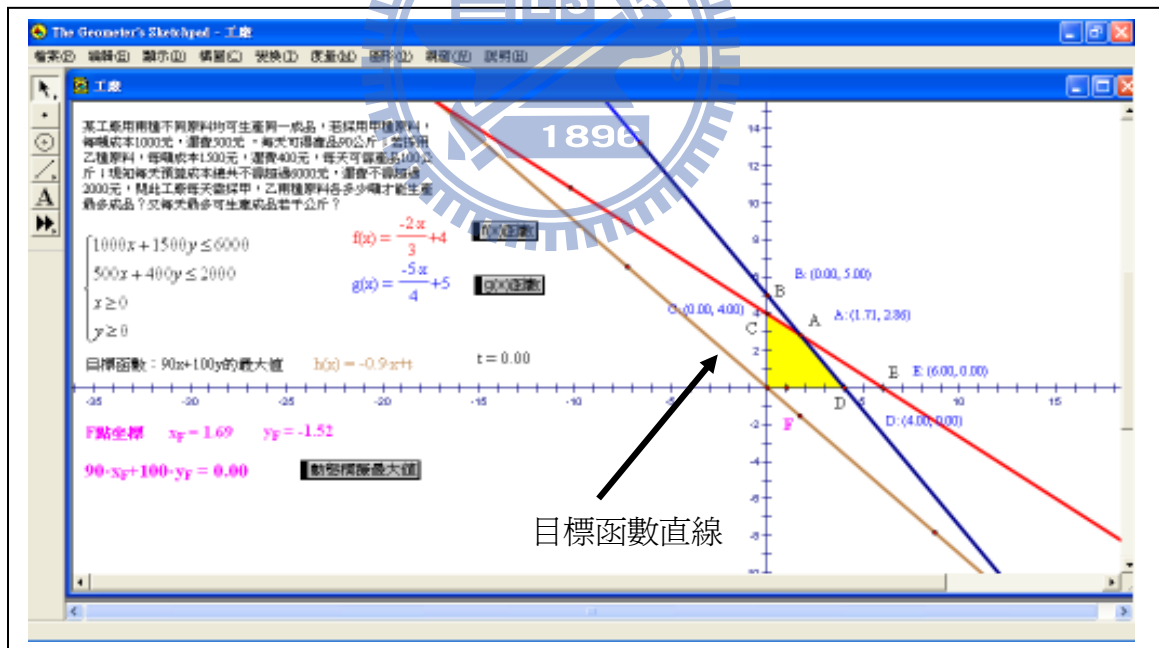


圖 4-2-4 GSP 設定



(2) 目標函數直線在可行解區域內移動以求最大值

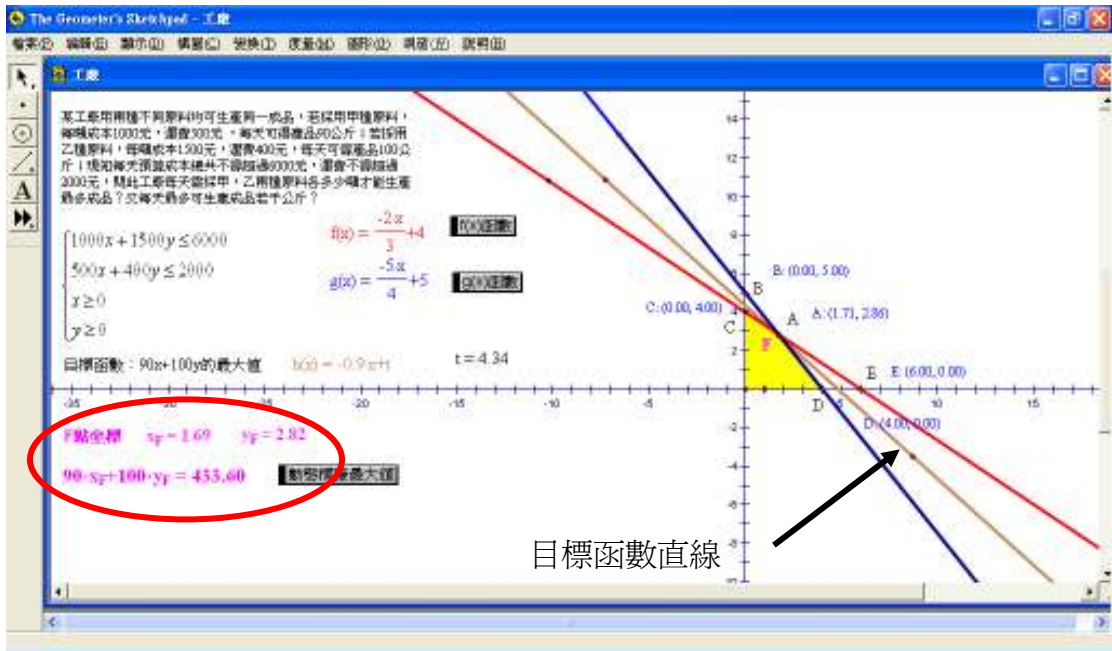


圖 4-2-5 GSP 動畫求解

#### 4. GEOGEBRA 動畫

(1) 設定條件不等式及目標函數直線

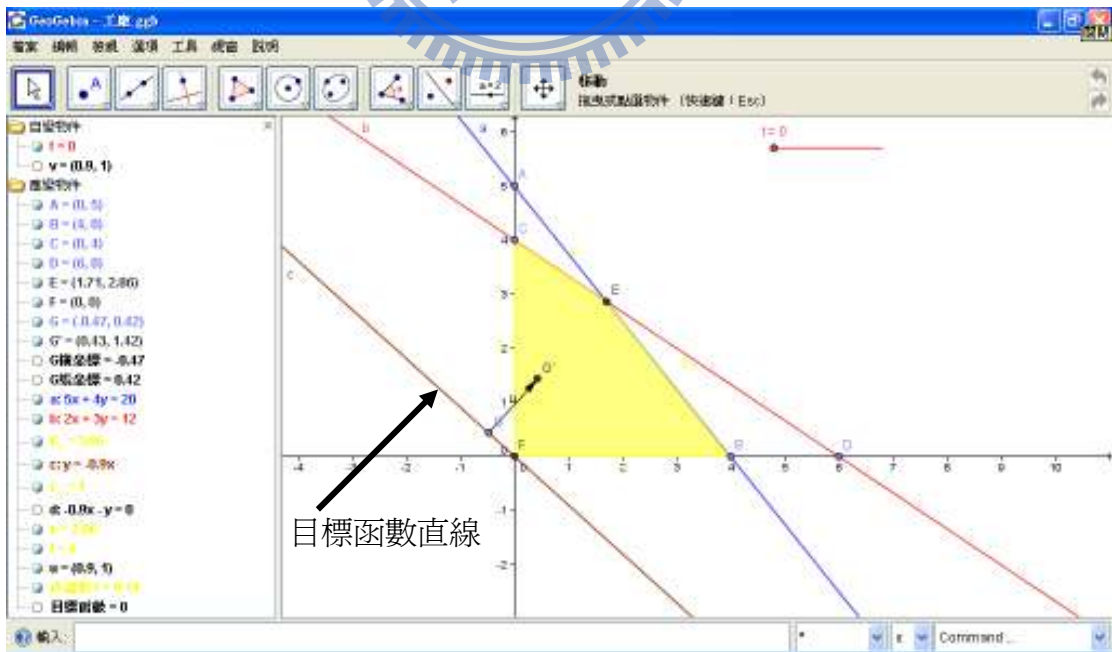


圖 4-2-6 GEOGEBRA 設定



(2) 目標函數直線在可行解區域內移動以求最大值

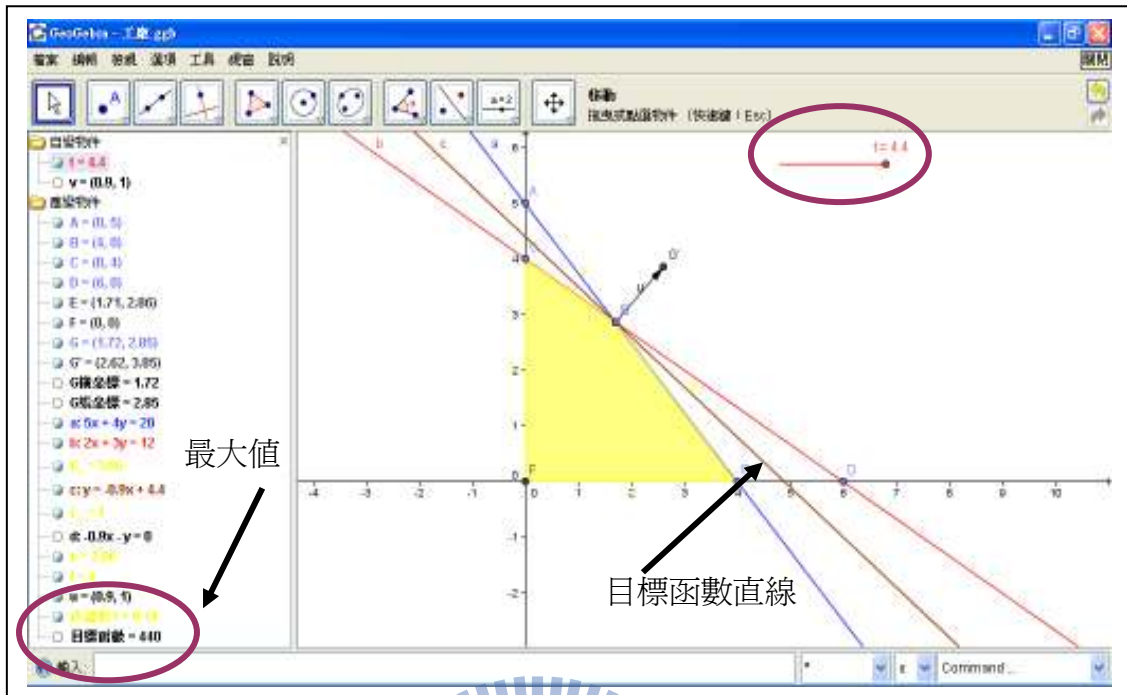


圖 4-2-7 GEOGEBRA 動畫求解

## 二、迴歸分析

在許多競賽及研究中，常遇到大量數據，需對其進行迴歸分析，以下將舉例如何對龐大、無序的數據進行分析。

在此引用 98 學年度上學期交大理學院在職專班社會科學研究法課程的原始問卷、數據（由李秀珠教授提供）進行分析。

### 【原始問卷】

第一部份：媒體使用情形

1. 請問您平均每天看電視多少小時？

- |             |                |                  |
|-------------|----------------|------------------|
| (01) 完全不看   | (02) 很少（不到半小時） | (03) 半小時~不到 1 小時 |
| (04) 1~2 小時 | (05) 3~4 小時    | (06) 5~6 小時以上    |
| (07) 7 小時以上 | (95) 拒答/不知道    |                  |

2. 您家的有線電視畫面品質很好？  
    (01) 非常不同意   (02) 不同意   (03) 普通  
    (04) 同意           (05) 非常同意   (95) 拒答／不知道
3. 您家的有線電視頻道類型很多樣？  
    (01) 非常不同意   (02) 不同意   (03) 普通  
    (04) 同意           (05) 非常同意   (95) 拒答／不知道
4. 您家的有線電視頻道位置安排的很好？  
    (01) 非常不同意   (02) 不同意   (03) 普通  
    (04) 同意           (05) 非常同意   (95) 拒答／不知道
5. 您或您的家人在最近一年內是否曾與府上有線電視系統業者的**客服人員**接觸過？  
    (01) 有→   (02) 沒有→
6. 您家有線電視的**客服人員**服務態度很好？  
    (01) 非常不同意   (02) 不同意   (03) 普通  
    (04) 同意           (05) 非常同意   (95) 拒答／不知道
7. 您家有線電視**客服人員**解決問題的速度很慢？  
    (01) 非常不同意   (02) 不同意   (03) 普通  
    (04) 同意           (05) 非常同意   (95) 拒答／不知道
8. 您或您的家人在最近一年內是否曾跟府上有線電視系統業者申請過**維修服務**？  
    (01) 有→   (02) 沒有→
9. 您家有線電視系統業者安排工程人員去維修的速度很快？  
    (01) 非常不同意   (02) 不同意   (03) 普通  
    (04) 同意           (05) 非常同意   (95) 拒答／不知道
10. 您家有線電視**工程人員**的服務態度不好？  
    (01) 非常不同意   (02) 不同意   (03) 普通  
    (04) 同意           (05) 非常同意   (95) 拒答／不知道
11. 您家有線電視**工程人員**解決問題的速度很快？  
    (01) 非常不同意   (02) 不同意   (03) 普通  
    (04) 同意           (05) 非常同意   (95) 拒答／不知道

12. 您對您家有線電視系統業者的**整體感覺很滿意**？

- (01) 非常不同意 (02) 不同意 (03) 普通  
(04) 同意 (05) 非常同意 (95) 拒答/不知道

第二部分：基本資料

13. 請問您今年幾歲？

- (01) 15-19 歲 (02) 20-24 歲 (03) 25-29 歲 (04) 30-34 歲  
(05) 35-39 歲 (06) 40-44 歲 (07) 45-49 歲 (08) 50-54 歲  
(09) 55-59 歲 (10) 60-64 歲 (11) 65 歲以上 (95) 拒答/不知道

14. 請問您的最高學歷是什麼？

- (01) 小學以下 (02) 國中至高中職 (03) 專科以上

15. 請問您個人每個月的收入大概多少？

- (01) 15000 元以下 (02) 15001-30000 元 (03) 30001-45000 元  
(04) 45001-60000 元 (05) 60001-75000 元 (06) 75001-90000 元  
(07) 90001-100000 元 (08) 100001 元以上 (95) 拒答/不知道

16. 請問您全家每月的總收入大概多少？

- (01) 30000 元以下 (02) 30001-60000 元 (03) 60001-90000 元  
(04) 90001-120000 元 (05) 120001-150000 元  
(06) 150001-180000 元 (07) 180000-210000 元  
(08) 210001 元以上 (95) 拒答/不知道

17. 受訪者性別：

- (01) 男 (02) 女

**【問卷結束】**

## 【軟體應用】

### 1. SPSS

#### (1) 輸入問卷調查結果

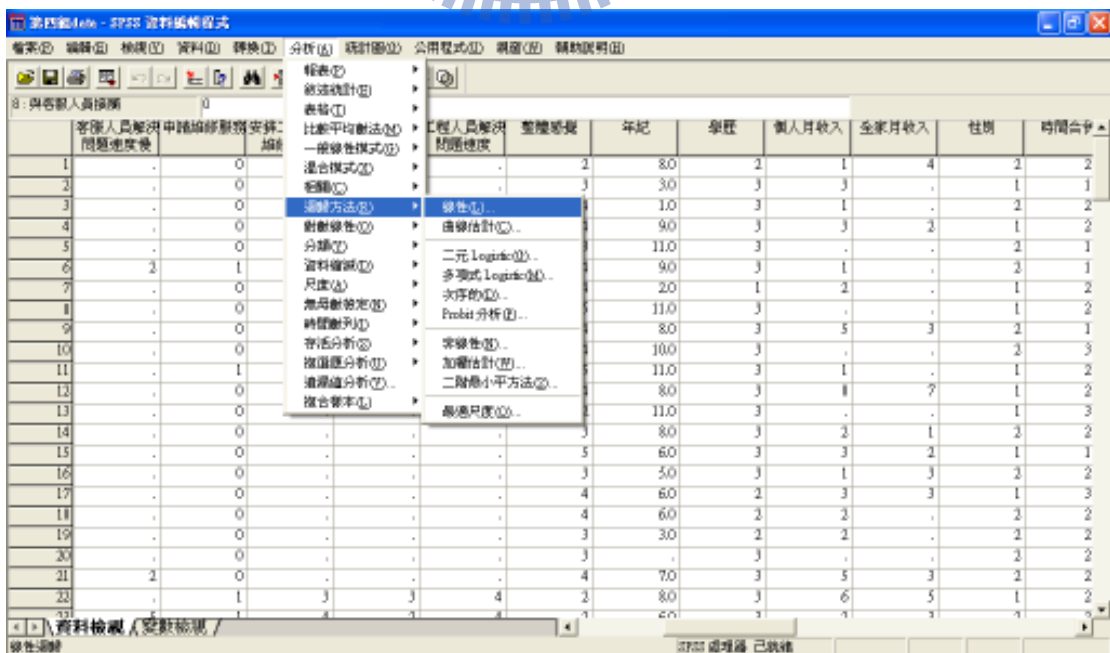


The screenshot shows the SPSS 'Data Entry' window with a table containing 22 rows of data. The columns represent various variables from a survey, including job type, speed, satisfaction, age, education, income, gender, and time. A large circular watermark with 'ES' and '1896' is overlaid on the table.

Case #	客人員解決問題速度	申請維修服務	安排工程師	工程師服務態度	工程師解決問題速度	整體感覺	年紀	學歷	個人月收入	全家月收入	性別	時間合宜
1	.	0	.	.	.	2	80	2	1	4	2	2
2	.	0	.	.	.	3	30	3	3	.	1	1
3	.	0	.	.	.	4	100	3	1	.	2	2
4	.	0	.	.	.	4	90	3	3	2	1	2
5	.	0	.	.	.	3	110	3	.	.	2	1
6	2	1	3	2	5	4	90	3	1	.	2	1
7	.	0	.	.	.	4	20	1	2	.	1	2
8	.	0	.	.	.	5	110	3	.	.	1	2
9	.	0	.	.	.	4	80	3	5	3	2	1
10	.	0	.	.	.	4	100	3	.	.	2	3
11	.	1	4	5	4	5	110	3	1	.	1	2
12	.	0	.	.	.	4	80	3	8	7	1	2
13	.	0	.	.	.	2	110	3	.	.	1	3
14	.	0	.	.	.	3	80	3	2	1	2	2
15	.	0	.	.	.	5	60	3	3	2	1	1
16	.	0	.	.	.	3	50	3	1	3	2	2
17	.	0	.	.	.	4	60	2	3	3	1	3
18	.	0	.	.	.	4	60	2	2	.	2	2
19	.	0	.	.	.	3	30	2	2	.	2	2
20	.	0	.	.	.	3	.	3	.	.	2	2
21	2	0	.	.	.	4	70	3	5	3	2	2
22	.	1	3	3	4	2	80	3	6	5	1	2

表 4-2-3 原始數據載入 SPSS

#### (2) 選擇【分析】/【迴歸方法】/【線性】



The screenshot shows the SPSS 'Analyze' menu open, with 'Linear' selected under 'Regression Methods'. The background shows the same data table as in the previous screenshot, with the 'Analyze' menu options visible on the left side.

圖 4-2-8 選擇分析方法

(3) 選擇【依變數】—整體感覺

【自變數】—畫面品質、頻道類型、客服人員服務態度、工程人員服務態度

【方法】—強迫進入變數法

【選項】—完全排除遺漏值

【統計量】—估計值、模式適合度、R 平方改變量、描述性統計量

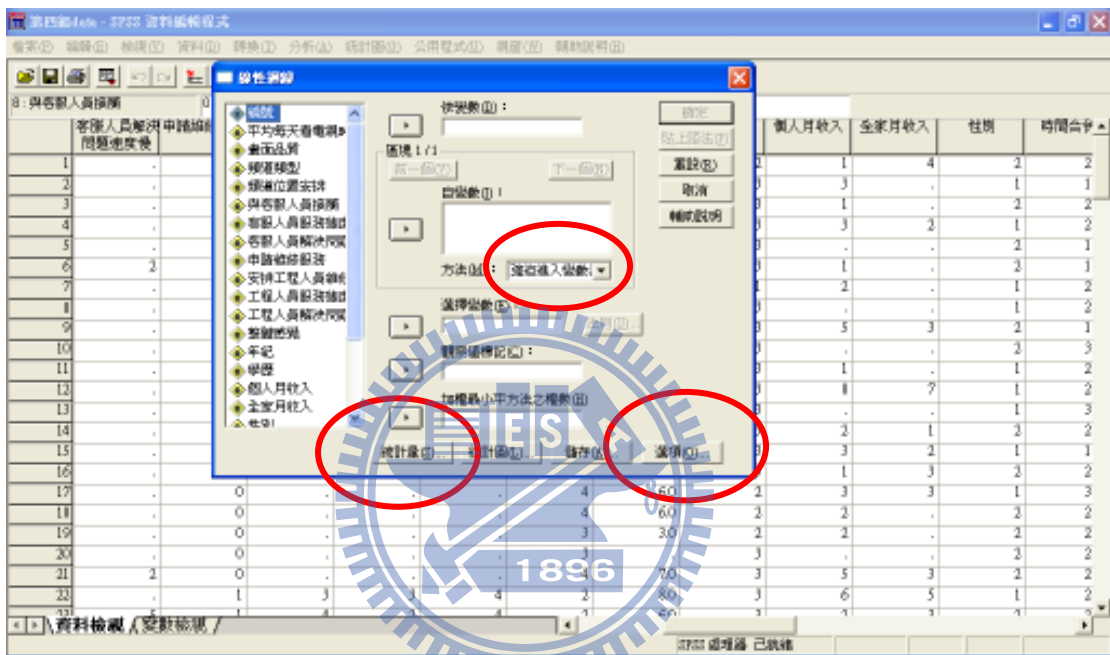


圖 4-2-9 選擇【選項】、【統計量】



圖 4-2-10 排除遺漏值



圖 4-2-11 統計量設定

(4) 按【確定】

表 4-2-4 SPSS 相關表

		相關				
		整體感覺	頻道類型	畫面品質	客服人員服務態度	工程人員服務態度
Pearson 相關	整體感覺	1.000	.000	.405	.768	.000
	頻道類型	.000	1.000	-.177	-.280	-.250
	畫面品質	.405	-.177	1.000	.395	-.354
	客服人員服務態度	.768	-.280	.395	1.000	-.280
	工程人員服務態度	.000	-.250	-.354	-.280	1.000
顯著性(單尾)	整體感覺	.	.500	.123	.005	.500
	頻道類型	.500	.	.313	.217	.243
	畫面品質	.123	.313	.	.129	.158
	客服人員服務態度	.005	.217	.129	.	.217
	工程人員服務態度	.500	.243	.158	.217	.
個數	整體感覺	10	10	10	10	10
	頻道類型	10	10	10	10	10
	畫面品質	10	10	10	10	10
	客服人員服務態度	10	10	10	10	10
	工程人員服務態度	10	10	10	10	10

首先就相關係數來看變數之間的關係，發現整體感覺和客服人員的服務態度的相關係數高達 0.768，所以表示這兩個變數之間存在的正相關；整體感覺和畫面品質也存在著 0.405 的正相關。



試利用往後消去法來選取我們要的模型，選取變數的標準為SL-stay=0.2（由取此筆資料的遺漏值較多，所以放寬常用的SL-stay=0.1標準），發現利用此標準在選模的時候，將畫面品質這一個變數刪除了。



圖 4-2-12 選擇向後法



圖 4-2-13 選項設定



圖 4-2-14 統計量設定

表4-2-5 刪除變數表

選入/刪除的變數 (b)

模式	選入的變數	刪除的變數	方法
1	工程人員服務態度, 頻道類型, 畫面品質, 客服人員服務態度 (a)		選入
2		畫面品質	往後消去法 (準則: F-刪除的機率 $\geq .200$ )。

a 所有要求的變數輸入。

b 依變數: 整體感覺



表4-2-6 變異數分析

變異數分析 (c)

模式		平方和	自由度	平均平方和	F 檢定	顯著性
1	迴歸	4.916	4	1.229	5.192	.050 (a)
	殘差	1.184	5	.237		
	總和	6.100	9			
2	迴歸	4.547	3	1.516	5.858	.032 (b)
	殘差	1.553	6	.259		
	總和	6.100	9			

a 預測變數：(常數)，工程人員服務態度，頻道類型，畫面品質，客服人員服務態度

b 預測變數：(常數)，工程人員服務態度，頻道類型，客服人員服務態度

c 依變數：整體感覺

$$H_0 : all \beta_i = 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \text{至少有一個} \beta_i \neq 0$$

選擇顯著水準0.05，因為兩個模型的p-value<0.05，拒絕  $H_0$ ，所以兩個模型皆顯著，資料足以說明頻道類型的多樣性、畫面品質、客服人員服務態度、工程人員服務態度會影響整體感覺。

表4-2-7 係數

模式		未標準化係數		標準化係數	t	顯著性
		B 之估計值	標準誤	Beta 分配		
1	(常數)	-3.556	2.059		-1.728	.145
	頻道類型	.363	.195	.416	1.857	.122
	畫面品質	.351	.281	.284	1.249	.267
	客服人員服務態度	.878	.223	.900	3.935	.011
	工程人員服務態度	.796	.405	.456	1.963	.107
2	(常數)	-2.237	1.847		-1.211	.271
	頻道類型	.316	.200	.362	1.575	.166
	客服人員服務態度	.947	.226	.970	4.192	.006
	工程人員服務態度	.632	.401	.362	1.575	.166

a 依變數：整體感覺

表4-2-8 模式摘要

模式	R	R 平方	調過後的 R 平方	估計的 標準誤	變更統計量				
					R 平方 改變量	F 改變	分子自由度	分母自由 度	顯著性 F 改變
1	.898 (a)	.806	.651	.487	.806	5.192	4	5	.050
2	.863 (b)	.745	.618	.509	-.060	1.559	1	5	.267

a 預測變數：(常數)，工程人員服務態度，頻道類型，畫面品質，客服人員服務態度

b 預測變數：(常數)，工程人員服務態度，頻道類型，客服人員服務態度

c 依變數：整體感覺

不管從R-squares或是adjust R-squares來看這兩個模型，都會發現其實兩個模型的R-squares或是adjust R-squares皆相差不大，但是模型二少了畫面品質這一個變數，所以模型會較為穩定，於是我們選擇模型二。

從我們建立的模型來看：

整體感覺 =  $-2.237 + 0.316 \times \text{頻道類型} + 0.947 \times \text{客服人員服務態度} + 0.632 \times \text{工程人員服務態度}$ ；

而工程人員服務態度、頻道類型、客服人員服務態度這三個變數的係數都是正的：

- (1) 工程人員的服務態度係數為0.632，發現當客戶對工程人員的服務態度越滿意的時候，則客戶的整體感覺的好感度會提升。
- (2) 頻道類型的係數為0.316，發現當頻道的類型越多樣化的時候，則客戶的整體感覺得好感度會提升。
- (3) 客服人員服務態度為0.947，發現當客戶對客服人員的服務態度的好感度提升一個等級，則客戶的整體感覺的好感度會提升，且此變數較其他變數影響較大。

此模型的R-squares=0.745且adjust R-square=0.618，表示這個模型解釋能力還不錯。



## 2. EXCEL

(1) 輸入 data，需先手動將無效資料刪除

表 4-2-9 EXCEL 載入數據

	A	B	C	D	E	F
1	編號	整體感覺	畫面品質	頻道類型	客服人員服務態度	工程人員服務態度
2	200803	4	3	5	3	2
3	200807	2	3	4	2	2
4	200819	3	3	4	3	2
5	200808	4	3	5	4	2
6	200819	5	4	4	4	2
7	200814	4	4	3	5	1
8	200810	4	3	2	4	3
9	200807	4	3	5	4	2
10	200810	3	2	4	3	2
11	200810	4	2	4	4	2

(2) 【工具】／【資料分析】／【迴歸】



圖 4-2-15 EXCEL 選擇資料分析方法

(3) 選擇自變數與應變數範圍



圖 4-2-16 EXCEL 選擇變數

(4) 按【確定】

表 4-2-10 EXCEL 報表 1

迴歸統計									
R 的倍數	0.89775577								
R 平方	0.80596543								
調整的 R 平方	0.65073778								
標準誤	0.48654103								
觀察值個數	10								
ANOVA									
	自由度	SS	MS	F	顯著值				
迴歸	4	4.91638913	1.22909728	5.19215106	0.0500003				
殘差	5	1.18361087	0.23672217						
總和	9	6.1							
	係數	標準誤	t 統計	P-值	下限 95%	上限 95%	下限 95.0%	上限 95.0%	
截距	-3.55609115	2.05850708	-1.7275098	0.14465499	-8.84765205	1.73546975	-8.84765205	1.73546975	
X 變數 1	0.35056968	0.28078147	1.24834989	0.26710356	-0.37120207	1.07234143	-0.37120207	1.07234143	
X 變數 2	0.36283961	0.19538245	1.85707369	0.12243039	-0.13940697	0.8650862	-0.13940697	0.8650862	
X 變數 3	0.87817704	0.22314249	3.93549902	0.01100943	0.30457101	1.45178306	0.30457101	1.45178306	
X 變數 4	0.79579316	0.40535846	1.96318382	0.10685173	-0.24621392	1.83780025	-0.24621392	1.83780025	

其中發現變數 1（畫面品質）的 P-value 太大，決定將此變數刪除，再以剩下三個變數做一次迴歸分析，即得與 SPSS 相同的結論。

表 4-2-11 EXCEL 報表 2

迴歸統計								
R 的倍數	0.86340618							
R 平方	0.74547023							
調整的 R 平方	0.61820535							
標準誤	0.5086963							
觀察值個數	10							
ANOVA								
	自由度	SS	MS	F	顯著值			
迴歸	3	4.54736842	1.51578947	5.85762712	0.03243163			
殘差	6	1.55263158	0.25877193					
總和	9	6.1						
	係數	標準誤	t 統計	P-值	下限 95%	上限 95%	下限 95.0%	上限 95.0%
截距	-2.23684211	1.84707975	-1.21101545	0.27142033	-6.75648343	2.28279922	-6.75648343	2.28279922
X 變數 1	0.31578947	0.00044387	1.57545085	0.16622171	-0.17467902	0.80625797	-0.17467902	0.80625797
X 變數 2	0.94736842	0.22599426	4.19200207	0.00573649	0.39438038	1.50035646	0.39438038	1.50035646
X 變數 3	0.63157895	0.40088775	1.57545085	0.16622171	-0.34935804	1.61251593	-0.34935804	1.61251593

### 4.3 交叉表



以下將前述各軟體於二題型中的應用製成表格，可更顯示出其使用狀況。

表 4-3-1 軟體與題型整理表

題型/軟體	LINGO	EXCEL	GSP	GEOGEBRA	SPSS
線性規劃	○	○	○	○	
迴歸分析		○			○

在線性規劃的題目中，使用了 Lingo、Excel 作為解題工具，但在動態表現上，使用了 GSP、Geogebra 來呈現。剛開始在建模軟體的書籍中看到常使用的軟體有 Mathematica、Matlab 及 Lingo，前兩者是著名的數學軟體，可繪圖、解數學式，具有強大的功能，但也伴隨著些許語法，對於初學者而言，想要解題需要花時間先了解制式化的語法後方能進行。後來，發現了軟體 Lingo，不但語法很數學、不繁瑣，亦不需規定變數格式，只需將題目的意思轉換為數學式子即可求解，再加上網路上亦有試用版可供

下載，就方便性及簡單性而言，在線性規劃的解題上，對於高中生是一套比較容易上手的應用軟體。

Excel 在線性規劃的使用是在查詢 Lingo 使用方法過程中意外發現的，雖然早已知 Excel 有強大的計算功能，但並未聯想過能與適用於線性規劃，其語法設定簡單、易操作，且軟體隨手可得更是它最大的優點。

但對於高中生而言，線性規劃的計算不僅是高三選修數學中很重要的一部份，在可行解區域中為何端點會是極值的所在的認知亦為重要，平時在表達上只能佐以代入法、或利用法向量的方向來判斷等方式呈現給學生，後來接觸到 GSP 及 Geogebra 後，開始思考能否將其應用在此類題目並以動態方式來呈現，希望能讓學生的學習達到最好的效果。在嘗試的過程當中，覺得 GSP 雖功能強大，但方程式需以函數來呈現，稍降低其方程式擴充的可能性，畫二次函數圖形時需佐以相關數學知識導入才能繪圖，且因學校需購買正式版方得合法使用。故在教導學生進入數學建模領域時，較建議引入 Geogebra，因其對於變數的定義、方程式的繪圖皆是高中生所學的數學形式，而且對於動態的呈現，亦有圖象式的數值滑桿供學生選擇，對於中等程度的學生，相信較 GSP 容易入手與學習，更何況，Geogebra 為免費軟體，在校園內使用、教授，較無侵權問題。

第二個題組所選擇的是數據分析—以線性迴歸來呈現，生活中，常需面對龐大且雜亂的原始數據（例如使用問卷調查後的數據處理），如何分析各變數彼此之間的關聯性，常需要藉助合適的統計軟體！在此選擇了統計分析軟體 SPSS 及耳熟能詳的 Excel 來使用。

在參考國內有關數學建模比賽的決賽作品中，只要有關數據處理的，幾乎所選擇的皆是 Office 內建的 Excel，因其易取得、免費且在【工具】／【增益集】／【資料分析】中有許多數據分析的選項，只要選擇適當的方法，初步的簡單分析、迴歸皆可做到，簡單的呈現清楚易懂！

至於 SPSS 是在專班的社會科學研究法課程中學習到的，在【分析】選項的分類非常仔細，例如平時用到的 T 檢定、迴歸，都有不同種類的選項可供選擇；







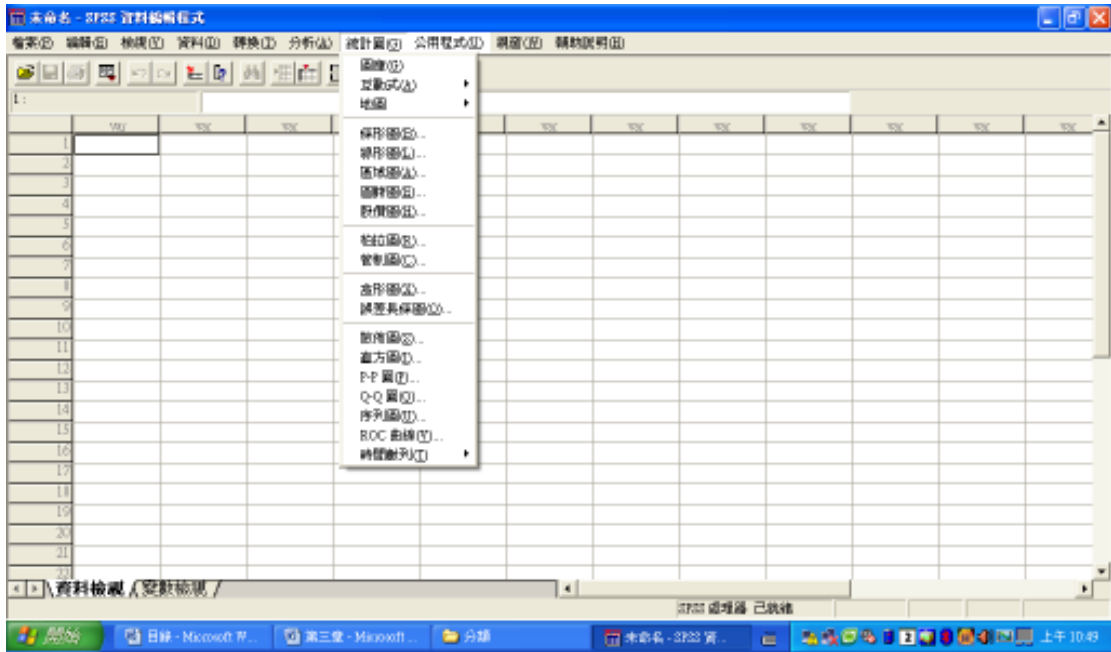


圖 4-3-3 SPSS 統計圖表選單

若是簡單的數據分析，其實 Excel 即可達到目的，但就分析功能的多樣性、工具操作的便利性，及希望能以較多分析角度來得到更精準的結果時，較建議使用統計分析軟體 SPSS。



## 第五章 國際間的反思

中等數學包括了初等代數、幾何、三角、初等微積分、機率統計等，若能有適當的教法與邏輯推理，則可構成中學數學的知識系統。數學的教學不應僅是老師講述、學生學習，若忽略運用其理論、方法解決實際問題，則將無法培養學生具用數學應用能力。（沈文選、楊清桃，2008）

1990 年開始，世界各地紛紛開始對數學課程作重整，雖然基礎課程的內容，萬變不離其宗，但其定位、取向與著眼處卻為重點。參考國際間數學教育的目標，亦可作為本國的借鏡。

本章中一至四節分別介紹德國、新加坡、美國、大陸四國課程於近年來的改革，並於第五節中審視數學建模「教育」的性質與功能，最後在第六節中以於各項能力發展方面重新對自己教學作一探究與反思為結尾



### 5.1 德國數學課程改革動態

從 2003 年開始，德國頒佈了全聯邦性的教育標準，這對原本教育自主的各聯邦而言，無疑是一項衝擊，而所謂的教育標準，並非死板規定教學內容細項，而是頒佈一個原則，一個在該年級的學生應學到且應具備的知識與技能。

在這一波教育改革中的數學教育標準而言（針對十年級畢業生）是一種能力導向的標準，並提出了六大數學能力：

#### 一、數學論證能力

將數學思想與數學的邏輯證明結合並能理解、能評斷各種形式的數學證明，例：假設的證明、數學公式的證明等等，期望學生能達到應用常見的證明過程（利用已知的定

理、公式去推論)、理解或提出直觀的證明過程、使用或提出複雜的證明過程的能力，而這種能力的培養應貫穿整個數學基礎教育。

## 二、數學地解決問題能力

此項能力指的不僅僅是單純的數學計算能力，而是包括能選用適當的數學原則、工具去解決問題的能力。希望學生在數學教學活動中能學習到：從自身的經驗中選出較直觀、簡單並適當的策略來解決問題、進而能用較多步驟的方法來解決問題，最後能學習到用嚴謹的數學過程、策略來完成題目甚至可以判斷並檢驗各種不同策略。

## 三、數學建模能力

此項能力強調用數學的方法去觀察、認識生活週遭的問題，並提出解決方法。在這過程中，對於現實世界的問題，常會先簡化，只考慮某些因素，便於處理問題，如同在第一章所提到的七橋問題。

在德國的教育標準中，數學建模過程分為以下幾個步驟：

- 理解現實問題情境。
- 簡化並結構化所描述的情境。
- 將被簡化的現實情境轉化為數學問題。
- 用數學手段解決所提出的數學問題。
- 根據具體的現實情境解讀並檢驗結果。

在做上述步驟訓練學生建模能力的同時，希望學生能達到判斷可利用的已知模型，並將現實情況轉化為數學問題，進而在有條件限制的情況下進行建模、分析，或調整模型以適合現實情況，最後能針對複雜的現況建立模型這三種不同層次的能力。

## 四、數學表徵的應用能力

所謂的表徵意即表達、表示，並不限於所謂的數學公式，而是廣泛地指所有可以表示數學概念的物件：統計圖表、分析圖、照片、程式語言等等。而數學表徵能力是能理

解、應用並表達數學意念的能力。因為只有當學生能用某些表達方式來表達數學時，才能真正培養其應用能力。故增進學生對情境提出表示方式並加以利用、解釋或改變表達形式、更進一步能理解並應用不熟悉的數學表徵這三種不同的數學表達層次。

## 五、數學符號、公式及技巧的熟練能力

在遇到問題時能使用適當的數學符號、公式來表達，代表清楚知道相關的數學知識，而能熟用數學技巧，例如算式運算等等，意即了解如何解題。

這項能力具體要素如下：

- 數學定義、規則、算法或公式的認識與應用。
- 變量、項、等式或函數的形式化應用。
- 按照特定步驟，檢驗答案與過程。
- 幾何基本構造的利用。
- 輔助工具的使用。

此項能力常與其他能力一起發揮作用，例如上述數學建模能力中將現實情境轉化為數學問題時，亦需要運用到此項能力。在此教育標準中，從使用基本數學公式、符號、工具解決問題；能應用數學方法，熟練並能選擇適當函數、變量及數學工具；進行學習複雜的數學方法來解答及檢驗過程，並能進行數學工具應用的反思，希望學生藉由學習，達到此三種不同的數學層次。

## 六、數學交流能力

所謂的交流能力，除了對書籍、文章的理解外，亦包括能對數學的思維過程、解題過程、解題結果清楚而詳細地表達，不限書面或口頭。若能適當地表達，代表對於數學問題可有正確的理解及判斷。在訓練過程中，希望學生能學習表達簡單的事情及訊息；表達解題中的思維過程與結果；爾後可完整呈現複雜題目的解決過程。

## 5.2 新加坡數學課程改革動態

90 年代中期以來，新加坡中小學在第三次國際數學和科學研究（TIMSS）中有亮眼的成績，新加坡的數學教育引起了大家的注意。而 1990 年新加坡教育部對數學大綱進行了修訂，將發展學生數學問題解決能力列為數學課程的基本目標，並首次提出數學課程框架五邊形模型，而數學問題解決被定位為框架的核心。目前最新的中學數學教學大綱已於 2006 年 9 月在新加坡教育部網站上公佈，於 2007 年開始實施。現就其精神與框架簡介如下。

### 5.2.1 原理



數學對於發展及增進學生邏輯推理、空間概念、分析及抽象思維能力的好工具。學生藉由學習及應用數學可以發展其計算、推理及思考技巧的能力。這些能力不僅在科學及技術上有價值，在日常生活及工作中亦有其意義。科技的高度發展是需要很強的數學基礎，故重視數學教育是增加擁有挑戰 21 世紀的競爭人力。

數學也可以看成是一門有趣的科目，讓學生有機會進行創造力的活動。這些活動可以增加學生的洞察力並鼓勵學生進行數學課堂外的活動。

### 5.2.2 目標

數學教育的目標是希望學生達到以下八點：

1. 獲得日常生活需要和繼續學習數學及其他相關學科所需的基本數學概念。
2. 發展可獲得及應用數學概念及技巧過程的技能。

3. 發展數學思維及問題解決技巧並應用這些能力去說明及解決問題。
4. 認識及利用不同的數學的思維及數學與其他學科之間的關係。
5. 發展對數學的積極態度。
6. 在數學的學習及應用上能有效使用不同的數學工具（包括資訊及通訊技術工具）。
7. 提出由數學思維引發的創造力及想像力。
8. 發展邏輯推理能力、數學表達能力及合作學習與獨立學習。

### 5.2.3 數學框架

這個框架顯示出：一個好的數學大綱的基本原則應適用於自小學以上各種年級，並對數學的教、學及評價均給予指導。



圖 5-2-1 新加坡課程框架

數學學習的核心是數學問題解決，包括在非常規、開放及現實世界的各種情形下獲得及應用數學的概念及技巧。數學問題解決能力的發展需要五種相關的要素：概念、技能、過程、態度及元認知。

## 一、概念

數學概念包含數值、代數、幾何、統計、機率及分析的概念。學生應探究及發展對數學更深入、更全面的了解，並讓數學知識成爲一整體而非片段的知識。

應提供學生多樣的學習經驗以幫助他們發展對數學概念更深層的了解，讓他們理解不同的數學概念、並理解彼此之間的關聯與應用，以期能積極地學習數學並能更有自信地探索、應用數學。對學生而言，操作、實際的工作及技術的使用都是一種學習經驗。

## 二、技能

數學技能包括數值計算、代數操作、空間視覺、資料分析、測量、使用數學工具及估計的過程技能。

對學生而言，在數學的學習及應用裡，這些技能的精熟是必須的。雖然學生會越來越了解不同的數學技能，但應避免在不了解數學原則的基本概念下過份重視技巧過程。

技巧熟練包括能確信地使用適當的技術來進行探索及問題解決的能力。在熟練技能發展的過程中思考技巧與解題策略的整併是同樣重要的。

## 三、過程

數學過程是指在獲得與應用數學技能的過程中所涉及到的知識技能（或過程技能），這包括推理、通訊交流與連接、思考技巧、解題策略及應用與建模。

### 1. 推理及交流與連結

(1) 數學推理是指分析數學情況及架構邏輯論點的能力。

(2) 交流是指運用數學語言去精確、簡潔及邏輯地表達數學想法及論證的能力。它能幫助學生增進他們對數學的理解及對數學思維的敏銳度。

(3) 連結是指能了解或將不同的數學思維、數學與其他科目之間及數學與日常生活產生關聯的能力。它能幫助學生理解他們在數學學習過程中學到了什麼。

數學推理、交流與連結的訓練應遍及自小學以上的各種年級。



## 2. 思考技巧與解題策略

學生應利用不同的思考技巧與解題策略來解決數學問題。思考技巧可以運用在思維過程，例如：分類、比較、排序、部份分析與整體分析、識別模型、關係、歸納、演繹與空間視覺。以下整理了使用解題策略的四種類型，並列舉一些例子：

### (1) 給予一個表示法：

例如：畫圖表、列清單、使用方程式。

### (2) 作計算猜想：

例如：猜想與檢驗、尋找模型、作推測。

### (3) 解題過程：

例如：實作、逆向操作並使用前後想法。

### (4) 改變問題：

例如：重新設定問題、簡化問題及部份解題。

## 3. 應用與建模

應用與建模對於數學的理解非常重要。學生運用數學問題解決技巧及推理技能去處理包含現實世界的各種問題是很重要的。

數學建模是能讓數學模型改善並公式化的過程，以期能表達及解決現實世界的問題。經由數學建模，學生能學習運用不同的表達方式，並在解決現實世界問題時選擇、應用適當的數學方式與工具。處理數據及使用數學工具來進行數據分析的機會應為各種不同年齡、程度學習上一部份。

## 4. 態度

態度指的是在數學學習的情感方面，例如：

- (1) 對數學及其益處的信念。
- (2) 學習數學的興趣與樂趣。
- (3) 欣賞數學的力與美。
- (4) 自信地運用數學。
- (5) 有毅力地解決問題。



學生對數學的學習態度是由其學習經驗所形成。若能讓學習數學是有趣、有意義的，將培養對這學科正向積極的態度。對於學生的學習活動應給予關注與關心，以建立、增進其對學科的信心與欣賞。

#### 5. 元認知

指的是對自身思考過程的認識與控制，尤其是對問題解決策略的選擇及使用，它包含對自我思考的監控及自我學習的管理。

元認知經驗的提供對幫助學生發展問題解決問題的能力是必須的。下列的活動可被用來發展學生對元認知的認識及增進其對元認知的經驗：

- (1) 讓學生能接觸一般解決問題的技巧、思考的技巧及解題策略，並如何將這些技能運用在解決問題上。
- (2) 鼓勵學生能表達出在解決特殊問題時所使用的策略與方法。
- (3) 提供學生解題前需要規劃的問題及解題後需要計算的問題。
- (4) 鼓勵學生去尋找對同樣的問題但不同的解題方式，並檢驗答案的適當性與合理性。
- (5) 允許學生討論如何解決特殊的問題及解釋他們在解決問題時所運用的不同方法。

### 5.3 美國數學課程改革動態

美國的教育發展，從 20 世紀初推行的「兒童中心」，到 60 年代倡導的對傳統教育進行現代化改造的「新數運動」，70 年代因學生基礎知識普遍下降而提出「回到基礎」(Back to basics) 的口號，以及從 80 年代末開始始到今天推行的「大眾教育」，強調培養學生問題解決的能力。

其中，1975 年全國數學督導員議會提出十個基本數學領域，為所有公民應達到的標

準：

1. 解答在陌生情況之下所產生的數學問題。
2. 應用數學知識到日常生活裡。
3. 審察所得到的答案是否合理。
4. 估計數量、長度、距離、重量等的近似值。
5. 進行整數、小數、分數和百分率的四則運算。
6. 認識簡單幾何圖形的性質。
7. 以公制和英制量度各種分量。
8. 製作和理解簡單圖表。
9. 認識機率在預測偶然事件發生的用途。
10. 認識計算機在社會上的各種用途，並且知道計算機所能做到的和所不能做到的事情 (NCSM, 1977；梁鑑添, 1980)。

在以上十個領域中已包含了問題解決、應用和驗證 (NCSM, 1977, P.2)。並提出「學習解決問題是研習教學之主要目的」，可說是美國全國數學教師協會以「問題解決」為八十年代學校數學教育之焦點的先聲 (NCTM, 1980a, 1980b)

1989 年，美國數學教師協會 (NCTM) 公佈了美國第一個國家性「學校數學課程與評價標準」，不僅是有大綱及教學範圍，更提供了不少切實的教學建議：

自幼兒園至十二級的「新」目標為：

1. 學生應當學會重視數學。
2. 學生建立有能力做數學之信心。
3. 學生成為數學解難者。
4. 學生學會以數學方式溝通。
5. 學生學會以數學方式理解。

另外更提到，數學教育的目的是培養具有下列五項素養的公民：

1. 懂得數學的價值。
2. 對自己的數學能力有信心。

3. 有解決數學問題的能力。
4. 學會數學交流。
5. 學會數學推理。

在「學校數學之重整」中提到：「我們教授數學期以達到幾個甚為不同之目的，以反映數學於社會中所扮演的多元化角色：實用目的—協助個人解決日常生活的問題；公民目的—讓公民能智性地參與公民性活動；專業目的—為學生將來的職業與專業作準備；文化目的—延續人類文化的主要部份」(NRC, 1990, P.7.)

爾後，美國數學教師協會又先後發行了「數學教學的職業標準」與「學校數學的評定標準」。

美國總統爲了加強數學教育，使學生能夠有面對 21 世紀的工具與技能，於 2006 年下令組成國家數學諮詢小組。諮詢小組將在最佳使用數學學習與教學的研究上，給予相關建議。2008 年美國教育部長說：「我們期待收諮詢小組的報到，我們也希望報告能夠形成如何改善數學教育的藍圖。我們的學生能夠在低年級就接受扎實的數學教育，爲他們日後能夠接受並成功學習代數及在中學裡順利應對課程挑戰做準備，這一點非常重要。」部長強調當今高中畢業生需有扎實的數學技能。

以下將介紹美國全國數學教師協會 NCTM (The National Council of Teachers of Mathematics) 組織，並簡述 9—12 年級數學課程標準課程標準。

## 一、NCTM 前言

學生應積極地學習一般數學思考及應用的基礎，數學理解對於打算進入職場工作或是打算追求更高深的數學或科學的人同等重要。所有的學生進入高中以後四年間都應該學習數學。

因爲學生的興趣與志向在高中或者高中畢業後可能會改變，所以他們的數學教育要保證讓他們能夠面對未來的職業及教育的選擇。他們應該會有很多代數、幾何、統計、機率與離散數學相關的經驗。學生必須了解函數的數學基本概念、函數的關係、不變性及變化型。他們應善於能想像並描述現象，且以數學條列式分析。高中數學應從低年級

開始發展數學的技巧及理解。

高中全體學生至少可從三方面來學習更深入的數學。第一種是包含學校所有的課程及將基本概念加深、加廣的部份；另外二種是利用補充課程：入學後所有學生希望的外加課程、當學生完成三年部份課程後，可加選其他的數學課程，不論哪種狀況，學生都可以選擇像計算機概論、科學數學、統計與微積分的課程。這些方法對所有的學生而言都可以學到相同的數學基礎，但對部份學生而言，如果他們希望，亦能學到補充的數學。

這個數學標準對高中學生而言是積極的。這些標準的要求是需要高中老師們專業地持續推動及行政單位的大力支持。

## 二、NCTM 的任務

美國全國數學教師協會是數學教育界裡大眾的聲音，支持教師經由觀察力、領導才能及專業的發展與研究，讓所有學生能有最高品質的數學學習。

## 三、NCTM 的展望

美國全國數學教師會在數學教育界裡具有總體的領導地位，它保證所有的學生有機會擁有數學教與學的最高品質。協會希望能建立一個對數學充滿興趣的世界，了解數學的價值與美。

以下將簡介 9—12 年級的學生於各領域中應培養的能力：

表 5-3-1 NCTM 課程標準

領 域	標 準
數與運算 (Number & Operations)	<ol style="list-style-type: none"><li>1. 加強對很大及很小的數更進一步的了解並知道它們不同的表示法。</li><li>2. 比較數值與數系的性質，包括有理數、實數，並了解複數是二次方程式中非實根的解。</li><li>3. 了解向量及矩陣有部份實數系的性質。</li></ol>

	<ol style="list-style-type: none"> <li>4. 用數論證明所有數值彼此之間的關係。</li> <li>5. 判斷如：乘、除法、次方及根在運算數值上面的結果。</li> <li>6. 加強對向量及矩陣加法及乘法性質與表示方式的了解。</li> <li>7. 加強對排列組合計算的了解。</li> <li>8. 對簡單及稍複雜的題目熟練實數、向量與矩陣心算或筆算的技巧。</li> <li>9. 判斷數值計算及其結果的合理性。</li> </ol>
<p style="text-align: center;">代數 (Algebra)</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 清楚明白地歸納出遞迴函數的模型。</li> <li>2. 了解函數的關係並選擇及使用不同的表現方式。</li> <li>3. 利用調查變化率、截距、漸近線及局部與全域的作用來分析單變數函數。</li> <li>4. 了解並完成在較複雜的算式中，運用技巧將算術整併、並將常用的函數轉換。</li> <li>5. 了解並比各種函數的特性，包括指數函數、多項函數、對數函數及週期函數。</li> <li>6. 說明雙變數函數式。</li> <li>7. 了解等式與不等式的意義與關係。</li> <li>8. 列出等式、不等式及方程組，並心算或筆算熟練地解答。</li> <li>9. 使用代數去表達與解釋數學關係式。</li> <li>10. 使用不同的符號來表示遞迴與參數式的函數與關係。</li> <li>11. 判斷符號運算結果的意義、功用與合理性。</li> <li>12. 確認某情況下基本測量的關係，並決定可能建立關係模型的類型。</li> <li>13. 使用符號表達不同領域的關係。</li> <li>14. 對已建模的情況提出合理的結論。</li> </ol>

	15. 從圖形及大量的數據解釋其變化率。
幾何 (Geometry)	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 分析與確定二維與三維空間物體的特性。</li> <li>2. 探究在二維與三維幾何物體的關係(包括全等及相似),推測並解決相關問題。</li> <li>3. 用演繹法及其他方法來證明幾何推論。</li> <li>4. 利用三角法的關係來做長度與角度的測量。</li> <li>5. 運用三維或其他坐標系統,諸如航海系統、極坐標、球系,來分析幾何情況。</li> <li>6. 利用三維坐標系統來檢查並解決有關二維與三維物體的問題。</li> <li>7. 利用簡圖、向量、函數、矩陣來了解平面上物體的平移、鏡射、旋轉與伸縮。</li> <li>8. 利用不同的表達方法來幫助了解其簡單變換。</li> <li>9. 利用不同的工具繪出二維與三維空間的幾何圖形。</li> <li>10. 從不同的透視法呈現出三維空間物體,並分析範圍。</li> <li>11. 利用頂一邊圖形來建模及解決問題。</li> <li>12. 利用幾何模型觀察並回答其他數學領域的問題。</li> <li>13. 利用幾何思維去觀察並解決像藝術、建築等其他有興趣領域的問題。</li> </ol>
測量 (Measurement)	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 決定不同測量問題的單位及刻度。</li> <li>2. 分析測量的準確度及可能的誤差。</li> <li>3. 了解並運用包括圓錐體、球體與柱面幾何圖形的面積、表面積與體積公式。</li> <li>4. 應用測量中連續型近似值、上界、下界與極限值的概念。</li> <li>5. 運用單位分析檢查測量計算結果。</li> </ol>
資料分析與機率	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 了解不同種類研究的差異性,並知道哪些類型可以從彼此之間</li> </ol>

<p>(Data analysis &amp; Probability)</p>	<p>合理地推論。</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>2. 了解已設計好的研究，包括調查與實驗時隨機的特性。</li> <li>3. 了解測量、分類數據，單變數及雙變數數據及其變數的意義。</li> <li>4. 了解直方圖、平行箱圖及散佈圖，並用這些圖形來表示數據。</li> <li>5. 計算基礎統計並了解統計量及對參數之間的差異。</li> <li>6. 對單變量測量的數據能顯示其分佈，描繪其圖形，並選擇與計算出約略的統計量。</li> <li>7. 對雙變量測量的數據能顯示其散佈圖、描繪其圖形並利用工具決定迴歸係數、迴歸方程式、相關係數。</li> <li>8. 顯示並討論其中一個變量已確定類別的雙變量數據。</li> <li>9. 看出單變數資料在線性轉換如何影響其形狀、中心及伸縮。</li> <li>10. 確認雙變數資料的趨勢並找到可建立這些數據模型的函數或轉換數據使其能被建模。</li> <li>11. 由已知的母體中模擬探索樣本統計的變化，並建立樣本分佈。</li> <li>12. 了解樣本統計如何呈現出母群體參數值並利用樣本分析為推論的基礎。</li> <li>13. 評估根據數據已通過審查研究設計、數據分析適當性及推論有效性的公開報告。</li> <li>14. 了解基礎統計技術如何被用在工作場所中的監控過程。</li> <li>15. 了解樣本空間及機率分佈的概念，並在簡單的實例中建立樣本空間及分佈。</li> <li>16. 運用模擬去建立、觀察機率分佈。</li> <li>17. 計算及預測在簡單實例中隨機變數的期望值。</li> <li>18. 了解條件機率及獨立事件的概念。</li> <li>19. 了解如何計算複合事件的機率。</li> </ol>
--	---



問題解決 (Problem Solving)	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 經由問題解決，建立數學新知。</li> <li>2. 解決源自於數學及其他領域的問題。</li> <li>3. 應用不同適合的策略去解決問題。</li> <li>4. 監控並反映出數學問題解決的過程。</li> </ol>
推論與證明 (Reasoning & Proof)	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 了解推論與證明是數學的基礎。</li> <li>2. 調查數學的推測。</li> <li>3. 發展並評估數學理論與證明。</li> <li>4. 選擇並使用不同的推理與證明的方法。</li> </ol>
交流、傳達 (Communication)	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 將經由交流的數學思維組織並融合為一體。</li> <li>2. 將數學思維有條理地、清楚地傳給同儕、老師與其他人。</li> <li>3. 分析並評估數學思維及其他策略。</li> <li>4. 使用數學語言去精確地表示數學觀念。</li> </ol>
連繫、關係 (Connections)	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 認出不同數學觀念彼此間的關係。</li> <li>2. 了解如何將不同的數學觀念結合並將其連貫。</li> <li>3. 在數學外的領域中認出並應用數學。</li> </ol>
表達 (Representation)	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. 運用不同的表示方式來組織、紀錄並交流數學觀念。</li> <li>2. 在數學表示法中，選擇、應用與轉換以解決問題。</li> <li>3. 利用表示法去建模及說明物理、社會及數學的現象。</li> </ol>

## 5.4 大陸數學課程改革動態

在「九年義務教育全日制初級中學數學教學大綱」(中華人民共和國國家教育委員會, 1992b) 提到初中數學的教學目的是:「使學生學好當代社會中每一個公民適應日常生活、參加生產和進一步學習所必需的代數、幾何的基礎知識與基本技能, 進一步培養



運算能力，發展邏輯思考能力和空間觀念，並能夠運用所學知識解決簡單的實際問題。」

「能夠解決實際問題，是指能夠解決帶有實際意義和相關學科中的數學問題，以及解決生產和日常生活中的實際問題。在解決實際問題中，要使學生受到把實際問題抽象成數學問題的訓練，逐步培養他們分析問題和解決問題的能力，形成用數學的意識。」

而後，於 1996 年頒布高中數學課程，近年來，更制訂了普通高中數學課程標準（實驗），其課程的基本理念簡述如下：

1. 構建共同基礎，提供發展平台

高中數學教育為基礎教育，為學生適應現代生活和未來發展提供更高水平的數學基礎，並為學生進一步的學習提供必要的數學準備。

2. 提供多樣課程，適應個性選擇

高中數學課程應具多樣性及選擇性，讓不同的學生在數學上得到不同的發展，亦可促進學生個性發展及對未來人生規劃的思考。

3. 倡導積極主動，勇於探索的學習方式

學生的學習不應再是傳統地接受、記憶、模仿與練習，高中數學課程應倡導自主探索、動手實踐、合作交流、閱讀自主等學習的方式。同時，高中數學課程設立「數學探究」、「數學建模」等學習活動，為學生形成積極主動、多樣的學習方式創造有利的條件，以激發學生對數學的學習興趣，並鼓勵學生在學習的過程中，養成獨立思考、積極探索的習慣。高中數學應力求學生經由不同形式的學習活動，讓學生體驗數學發現和創造的歷程，發展他們的創新意識。

4. 注重提高學生的數學思維能力

提高學生數學思維能力是數學教育基本目標之一。在學習、運用數學解決問題時，常經由直觀、觀察、發現、歸納、想像、符號表示、運算求解、數據處理、證明、反思與建構等思維過程，這些都是數學思維能力的具體表現，並有助於學生面對客觀事物時進行思考與判斷。

5. 發展學生的數學應用意識

20 世紀後期，數學和計算機技術的結合使得數學創造了許多社會的價值。近年來，

大學、中學數學建模的實踐中提到，發展符合數學應用的教學活動，有利提高學生學習數學的興趣，並能拓展學生的視野。

高中數學課程應提供基本內容的實際背景，反映數學的應用價值，發展「數學建模」的學習活動。讓學生體驗數學在解決實際問題中的作用以及與其他學科的關係，促使學生形成數學應用意識，提高實踐能力。

#### 6. 與時俱進地認識「雙基」

傳統的數學教學具有重視基礎知識教學、基本技能訓練與能力培養，新世紀口中數學課程應發揚這種傳統。隨著時代的發展，對數學的廣泛應用、計算機技術與現代信息技術的發展，數學課程設置和實施應重新審視基礎知識、基本技能與能力的內涵，形成符合時代要求的新「雙基」。

#### 7. 強調本質，注意適度形式化

形式化是數學的基本特徵之一。數學教學中，學習形式化的表達是一項基本要求，但不能只著重於此，要強調對數學本質的認識。數學課程要講邏輯推理，通過例子的分析和學生自主探索活動，使學生理解數學概念、結論形成的過程，體會其中的思考方式，將數學的學術形態轉化為學生較易接受的教育形式。

#### 8. 體現數學的文化價值

數學課程應幫助學生了解數學在人類文明發展中的作用，以形成正確的數學觀。

#### 9. 注重信息技術與數學課程的整合

信息技術與數學課程的整合有助於學生認識數學的本質。高中數學課程應提倡利用信息技術來呈現以往教學中難以呈現的課程內容，並保證筆算訓練的前提下，儘可能使用科學型計算器及各種數學教育技術平台，加強數學教學與信息技術的結合，鼓勵學用運用計算機等進行探索與發現。

#### 10. 建立合理、科學的評價體系

高中數學課程應建立合理、科學的評價體系，包括評價理念、內容、形式和體制等方面。而對於數學探究、數學建模等學習活動，應建立相應的過程評價內容與方法。

除了課程的基本理念外，在大陸的課程標準中對數學建模的內容標準更提出了六大要求：

1. 在數學建模中，問題是關鍵。數學建模問題應來自於學生的日常生活、現實世界、其他學科等多方面。同時解決問題時所涉及的知識、方法應與高中數學課程內容有關聯。
2. 通過數學建模，學生應體驗解決實際問題的過程，並了解數學與日常生活及其他的關係，更加感受到數學的實用價值，增加應用意識，提高實踐能力。
3. 每個學生可根據自己的生活經驗發現並提出問題，即使對同樣的問題，亦可以不同的角度、方法，獲得運用知識和方法解決實際問題的經驗，發揮創意。
4. 學生在發現和解決問題的過程中，應學會通過查詢資料等方法獲得訊息。
5. 學生在數學建模中應學習各種合作方式解決問題，培養與人交流、溝通的習慣。
6. 高中階段至少應將課內與課外結合起來為學生安排一次數學建模活動。

綜觀以上各地區數學課程的目標，以基礎教育階段而言，其目標非常相近，大約可歸為：實用知識、學科知識及文化素養三方面（NCTM, 1970；蕭文強，1983；Siu, Siu, & Wong, 1993）：

1. 實用目的

包括了以數學方式解決日常生活遇到的問題、提供將來大部份職業所需的數學訓練、為將來升讀理科及有關學科所需的數學奠下基礎。

2. 學科目的

數字、符號及其他數學對象的運算能力；數字感、符號感、空間感、度量感及結構與規律之意識；推理與邏輯思維；以數學構作與解決問題之能力；以數學方式表達及傳遞意念。

3. 文化目的

欣賞數學之美；認識古今數學在各地文化中之角色及與其他學理關係。（黃毅英，1995b）

由前述幾節可知，不論是德國、新加坡、美國、大陸皆已明白點出「數學建模」的能力培養至為重要。而國內部份團體已開始著手深耕，盼爾後亦能引入於本國教學大網之中。

## 5.5 數學建模教育的性質與功能

數學教育是教育的一部份，它形成人們認識世界的態度並推動著社會進步與發展。數學教育在學校教育中佔有特殊的地位，它不僅讓學生掌握數學的基本概念、技能，使學生能有條理、清晰地表達，亦能訓練學生實事求是、鍥而不捨的態度與精神，並讓學生能以數學的思維邏輯來解決問題、認識世界。故在現今社會中，數學教育可謂是終身教育。在國際間對數學建模教育日趨重視，主要因為建模教育有三大特質及三項功能：

### 一、數學建模教育的性質

#### 1. 面對未來的基礎教育

數學建模重視讓學生學會運用數學的思考邏輯、方法去解決實際問題的能力，就本質而言是一種訓練學生面對未來的基礎教育。

#### 2. 培養能力的素質教育

在現實生活中，不是所有的問題都有標準答案，也因此，常難以找到適合的數學形式來表達。藉此訓練學生能有數學思維的習慣並去觀察、將實際問題抽象化、從客觀事物中建立起恰當的數學模型的能力，此為數學建模教育的主要目的。

#### 3. 生動活潑的學校教育

在學校中發展建模教育，不僅可培養學生運用數學更可以培養學生對數學的興趣。

「做數學」是近年來國際數學教育界掀起的浪潮，而數學建模就是一種做數學的過程並是達成運用數學意識的重要步驟。

## 二、數學建模教育的功能

### 1. 培養五大能力功能

- (1) 將實際問題翻譯為數學語言表達成數學模型的能力。
- (2) 靈活運用所學過數學知識、方法的能力，並在必要時學習新的數學知識。
- (3) 發展想像、聯想能力，可讓問題能有不同面向的思考與解題方式。
- (4) 把握問題的本質，發展洞察能力。
- (5) 培養熟練使用技術手段的能力。

### 2. 激勵功能

每一個實際問題的建模過程完成都是參與者實現自我的表現。興趣是最好的老師，若學生在數學建模的過程，體會到尋找模型的艱辛、靈感如閃電般降臨時的驚喜、發現結果的成就，相信更可以激勵學生對研究的興趣，畢竟，興趣、熱情是每一項事業成功的原動力。

### 3. 導向功能

數學建模教育具有培養人材的教育導向；教育改革中進行素質的教學導向；再者，學校常以課本為範本進行數學訓練，但書本中的問題都是經由人工加工過，已非實際問題的面貌，有時尚需要整理才能看出問題的數學架構，故加強學校數學建模教育亦具有對學生能力培養的導向。

## 5.6 反思

在前所述大陸課綱中提到了十項理念、美國更提出五大新目標、而新加坡的五邊形框架中，提出了以概念、技能、態度、元認知、過程為五邊，數學問題解決為核心的想法，在這五種規範、學習中，所有的精神皆指向希望能夠運用數學來達到解決生活週遭的現象。另在德國的教育標準中，提出了十年級畢業生應具備的六大能力，其中更直接

地談到「數學建模」一詞，將建模的概念引入了教學當中。此外，因本身於普通高中任教數學，覺得此六項能力的要求與希望達到的能力水平，非常貼近教學現場。在整理四國教育改革的資料當中，開始思考自己的上課方式、活動是否足夠、適當？並開始回想起在教學中學生及自我常出現的盲點，以下將就德國的六大能力進行反思：

### 一、反思 1— 在數學論證能力方面

在數學論證能力方面，深覺現今的高中生的確急需加強！回憶自己國三時，老師們對於數學證明的要求非常嚴格，像證明三角形的全等 SSS、SAS 等性質，或利用這些條件去證明其他的應用問題，在過程中，邏輯上的推論、步驟化的條列都有規定，剛開始一直不了解為什麼一定要這麼制式？只要證的出來，為何每個步驟都得規定如此嚴謹？但經過那一年的訓練後，發現自己不僅在數學上，甚至後來對於生活中的事件，開始會有自己一套邏輯標準去面對、處理。

爾後，當自己開始實習時，赫然發現數學證明不再被強調，而由直觀取代，如直接用量角器確認等角、用尺量邊長進而表達方位不同的三角形是全等的，如今，國中的證明已為填充式或淪為選擇題的選項，在論證方面的訓練似乎不再重視。如今，在高一教導數學歸納法時，學生對於證明的第二至第三步驟：如何利用  $n=k$  成立的式子，證明  $n=k+1$  時亦成立，且證明完後，進而可似骨牌效應般得到原式皆成立的這個概念有非常多的困擾（這只是高中數學證明中小小的一環而已，更惶論其他諸如反證法等等的證明）。

另外，以往在高中課程裡，第一冊從第 0 章—集合概論開始，其中提到命題、逆命題、否逆命題，甚至有真偽表，學生雖然剛開始無法接受真偽表中的邏輯概念，但對之後的相關應用證明問題卻較能進入狀況！後來於課綱中將此部份刪去後，學生對於反證法，最後論述因矛盾，導致假設錯誤，以及後續的推導上，甚有困難。

證明，在數學教育中佔有重要的地位，一步一步的過程需要經過縝密的思考，並合乎邏輯的推導，方可完成。在此過程中，學生學習到的不僅是形式上、制式化的步驟，更重要的是可以訓練邏輯上思考過程的嚴謹與紮實。



## 二、反思 2— 在數學地解決問題及數學建模能力方面

在以數學地解決問題及數學建模能力方面，深覺自身平時於課堂中對此項能力的培養較為不足，目前的數學課堂大多仍處於傳統老師講解、告知、證明，而鮮有讓學生「做中學」的活動；之前參加數學學科中心舉辦的研習裡，建中繆老師有與大家心得分享：建中近來開始進行「數學活動」，到校外實地堪察、學習數學軟體、選擇適當的題目讓同學們實作、討論，雖然一週的課堂時數並不多，但仍能激發學生的創造力、想像力及應用工具的能力。故於未來想於自己的課堂中進行此類課程小活動！

## 三、反思 3— 在數學表徵能力及符號、公式及技巧應用方面

在數學表徵及符號、公式及技巧應用方面，乍看似乎不難，但當面對問題時，要將其圖像化、或數據分析化，常會有不知如何著手的感覺。有時一個小小的問題於課堂中拋出來後，詢問學生想如何表達、解釋？或能否畫個簡圖？或詢問某某公式的定義，變化後可得到何結論？在一個普通的班級內，能清楚表達的人並不多；這似乎不是單一的問題，就數學而言，在思考邏輯上的訓練應從小開始。隨著時代的進步，如何從小將數學紮根，這將是一個數學教育上很重要的概念與課題！

## 四、反思 4— 在數學交流方面

最後，在數學交流方面，不管對學生，或老師，其實都有其挑戰，畢竟了解與解說 是兩回事，當老師想告知學生某個定理時，如何引導較能協助學生進入狀況？對學生而言，知道一個數學觀念、公式很容易（無論了不了解），但要能有正確的理解、應用，甚至正確地表達，有時似乎就是有道鴻溝無法跨越。在課堂上，有時喜歡問「是什麼」及「為什麼」；問「是什麼」，想讓學生思考問題的本身到底要表達什麼意念？問「為什麼」是想了解為何選用某些方法來解題？若學生能真正了解這兩個問題的意義，相信對其自身在數學能力上的培養必有幫助。

教書十年，深深感到不論對學生的學習或對自己的教學而言，數學的課堂中不該只有老師「教」與學生「學」，學生在學習不同的內容時，應該需要不同的教學活動，進



而方能將數學思維進行連結、整合，甚至透過活動產生對生活週遭現況的理解，進而分析並深入探索；同時，亦需要進行「數學表達」的訓練：藉由不同的活動來增進其上述每種能力的不同層次，否則未來訓練出來的學生只會一味地運用所學得的數學公式、解題技巧來解題，但卻無法將數學的精神真正融入於日常生活當中！



## 參考文獻

中文部份（依作者姓氏筆劃順序排列）

王庚、王敏生（2008）。現代數學建模方法。北京：科學出版社。

中華人民共和國國家教育委員會（1996）。全日制普通高級中學數學教學大綱。北京：人民出版社。

中華人民共和國國家教育委員會（1992b）。九年義務教育全日制中學數學教學大綱。北京：人民出版社。

中華人民共和國教育部（2003）。普通高中數學課程標準（實驗）。北京：人民教育出版社。

台北市縣立錦和高級中學數學科網站。取自：<http://learn.jhsh.tpc.edu.tw/~smath/>

台灣數學建模與創意學會。取自：<http://modeling.math.scu.edu.tw/>。

巫和懋、夏珍（2002）。賽局高手—全方位策略與應用。台北市：時報文化出版社。

沈文選、楊清桃（2008）。數學建模導引。哈爾濱：哈爾濱工業大學出版社。

李正雄（2003）。完全記入式高中數學乙複習講義。高雄：晟景文化事業股份有限公司。

肖華勇（2008）。實用數學建模與軟件應用。西安：西北工業大學出版社。

旺宏電子教育基金會。取自：<http://www.mxeduc.org.tw/ScienceAward/9th/main.html>。

林國源（2005）。高中數學建模課程理論與實踐之研究。國立交通大學碩士論文。

思源科技教育基金會。網址：<http://www.seed.org.tw/mainpage.aspx>。

徐斌艷（2009）。數學課程改革與教學指導。上海：華東師範大學出版社。

桃園縣自由軟體交流網。取自：<http://fs.tyc.edu.tw>。

陳禾凱。Geogebra 簡介。取自：

[http://learn.jhsh.tpc.edu.tw/~smath/mathcenter/geogebra\\_introduce.doc](http://learn.jhsh.tpc.edu.tw/~smath/mathcenter/geogebra_introduce.doc)。

曹亮吉（1988）。數學導論。台北：科學月刊社。

- 陳揚盛 (2000) 。吳鐵雄：需在關鍵時刻融入資訊教育。階梯雜誌，第 59 期。
- 梁鑑添 (1980) 。評論近二十年來中學數學課程改革。抖擻雙月刊，第 38 期，54—57。
- 黃毅英 (1995b) 。香港數學課程改革：迷失於十字路口？香港數學教育：轉變的時機？  
專題研討發表論文。香港：香港中文大學。
- 黃毅英、黃家鳴 (1997) 。十地區數學教育課程標準。數學傳播季刊，第 21 卷，第 2 期。
- 趙東方 (2007) 。21 世紀大學數學精品教材—數學模型與計算。北京：科學出版社。
- 維基百科。阿基米德浮力論。取自：<http://zh.wikipedia.org>。
- 蕭文強 (1983) 。數學、數學史、數學教師。抖擻雙月刊，第 53 期，67-72。

英文部份(依作者姓氏筆劃順序排列)

KMK. *Bildungsstandards im Fach Mathematik fuer den Mittleren Schulabschluss* [D]. 2003.

P15.

National Council of Teachers of Mathematics (1970), *A History of Mathematics Education in the United States and Canada (32nd Yearbook)*, Washington, DC: NCTM.

National Research Council (1990), *Reshaping School Mathematics*, Washington, DC: National Academy Press.

Press Releases, President Establishes National Mathematics Advisory Panel, April 18, 2006, from the World Wide Web:

<http://www.ed.gov/news/pressreleases/2006/04/04182006a.html>.

Secondary Mathematics Syllabuses, from the World Wide Web:

<http://www.moe.gov.sg/education/syllabuses/sciences/files/maths-secondary.pdf>.

Siu, F. K., Siu, M. K. & Wong, N. Y. (1993), *The changing times in mathematics education: The need of a scholar-teacher*, In C. C. Lam & Y. W. Fung (Eds.), *Proceedings of the International Symposium on Curriculum Changes for Chinese Communities in Southeast*

*Asia: Challenge of 21st Century*, 223-226, Hong Kong: Department of Curriculum and Instruction, The Chinese University of Hong Kong.

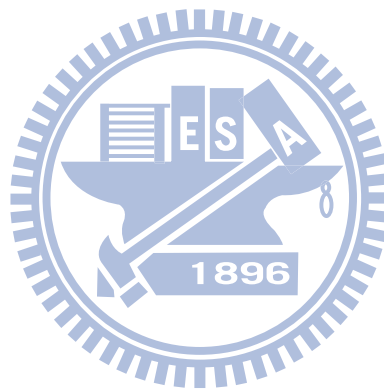
The High School Mathematics Contest in Modeling, from the World Wide Web:

<http://www.comap.com/highschool/contests/himcm/index.html>.

The National Council of Teachers of Mathematics, from the World Wide Web:

<http://standards.nctm.org>.

W. Blum & C. Druke-Neo. *Bildungsstandards Mathematik: konkret*. Cornelsen: Berlin. 2006.  
P33-52.



2005 Problem A

Modeling Ocean Bottom Topography

Background:

A marine survey ship maps ocean depth by using sonar to reflect a sound pulse off the ocean floor. **Figure A** shows the ship's location at B on the surface of the ocean. The sonar apparatus aboard the ship is capable of emitting sound pulses in an arc measuring from 2 to 30 degrees. In two dimensions this arc is shown within **Figure A** by  $\angle ABC$ , and the emanating sound pulses are displayed by the dashed lines and the solid lines BA and BC.

When a sonar sound pulse hits the bottom of the ocean, the pulse is reflected off the ocean bottom the same way a billiard ball is reflected off a pool table; that is, the angle of incidence  $\alpha$  equals the angle of reflection  $\beta$ , as illustrated in **Figure B**. Since the ship is moving when the sound pulse is emitted, it will pick up a reflected sound pulse at location F in this picture. The actual depth of the water is the length of BD in **Figure A**

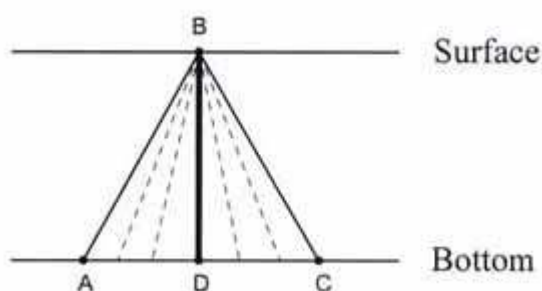


Figure A

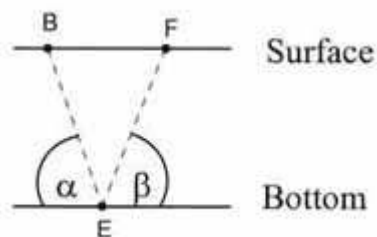


Figure B

Useful Information:

Oceanography vessels usually travel at a speed of 2m/s while Navy vessels travel at 20m/s. The sonar apparatus aboard these ships is capable of emitting sound pulses in an arc

measuring from 2 to 30 degrees. The typical speed at which a sonar sound pulse is emitted is 1500m/s.

Devise a model for mapping the topography of the ocean bottom. Write a letter to the science editor of your local paper summarizing your findings.

## 2005 Problem B

### Gas Prices, Inventory, National Disasters, and the Mighty Dollar

It appears from the economic reports that the world uses gasoline on a very short supply and demand scale. The impact of any storm, let alone Hurricane Katrina, affects the costs at the pumps too quickly. Let's restrict our study to the continental United States.

Over the past six years, Canada has been the leading foreign supplier of oil to the United States, including both crude and refined oil products. (*Petroleum Supply Monthly*, Table S3 - **Crude Oil and Petroleum Product Imports, 1988-Present**. See page 5 for Canadian exports to the United States.)

- Canada was the largest foreign supplier of oil to the United States again in 2004, for the sixth year running (from 1999, when the country displaced Venezuela, to 2004 inclusive).
- In 2002, Canada supplied the United States with 17 percent of its crude and refined oil imports — more than any other foreign supplier at over 1.9 million barrels per day.
- Western Canadian crude oil is imported principally by the U.S. Midwest and the Rocky Mountain states.
- Eastern Canada's offshore oil is imported principally by the U.S. East Coast states, and even by some Gulf Coast states.

Many refiners are buying enough to serve motorists' current needs, but not enough to rebuild stocks. "They are looking to buy the oil when they need it," according to *The*

*Washington Post*. "When they are uncertain about the future, they hold back." (*The Washington Post: Crude Oil Imports to U.S. Slow With War 3/31/03.*)

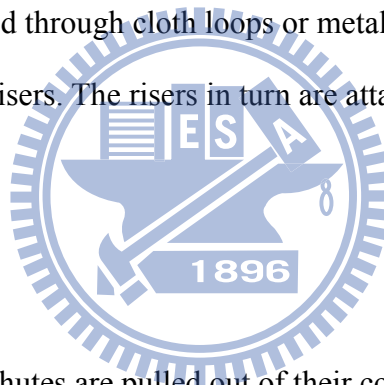
Build a better model for the oil industry for its use and consumption in the United States that is fair to both the business and the consumer. You can build your model based on a *peak* day.

Write a letter to the President's energy advisor summarizing your findings.

## **2006 ProblemA**

### **Inflation of the Parachute**

A parachute is made from thin, lightweight fabric, support tapes and suspension lines. The lines are usually gathered through cloth loops or metal connector links at the ends of several strong straps called risers. The risers in turn are attached to the harness containing the load.



#### **Deployment systems**

Freefall deployed parachutes are pulled out of their containers by a smaller parachute called a pilot chute.

A way of deploying a parachute directly after leaving the aircraft is the static line. One end of the static line is attached to the aircraft, and the other to the deployment system of the parachute container.



## **Types of parachutes**

### **Round parachutes**



An American paratrooper using an MC1-1C series 'round' parachute

Round parachutes, which are pure drag devices (i.e., they provide no lift like the ram-air types), are used in military, emergency and cargo applications. These have large dome-shaped canopies made from a single layer of cloth. Some skydivers call them "jellyfish 'chutes" because they look like dome-shaped jellyfish. Rounds are rarely used by skydivers these days. The first round parachutes were simple, flat circulars, but suffered from instability, so most modern round parachutes are some sort of conical or parabolic.

Some round parachutes are steerable, but not to the extent of the ram-air parachutes. An example of a steerable round is provided in the picture of the paratrooper's canopy; it is not ripped or torn but has a "T-U cut". This kind of cut allows air to escape from the back of the canopy, providing the parachute with limited forward speed. This gives the jumpers the ability to steer the parachute and to face into the wind to slow down the horizontal speed for the landing.

### **Annular & pull down apex parachutes**

A variation on the round parachute is the pull down apex parachute invented by a Frenchman named LeMoigne-- referred to as a Para-Commander-type canopy in some circles, after the first model of the type. It is a round parachute, but with suspension lines to the

canopy apex that apply load there and pull the apex closer to the load, distorting the round shape into a somewhat flattened or lenticular shape.

Often these designs have the fabric removed from the apex to open a hole through which air can exit, giving the canopy an annular geometry. They also have decreased horizontal drag due to their flatter shape, and when combined with rear-facing vents, can have considerable forward speed around 10 mph (15 km/h).

### **Ribbon and ring parachutes**

Ribbon and ring parachutes have similarities to annular designs and they can be designed to open at speeds as high as Mach 2 (two times the speed of sound). These have a ring-shaped canopy, often with a large hole in the center to release the pressure. Sometimes the ring is broken into ribbons connected by ropes to leak air even more. The large leaks lower the stress on the parachute so it does not burst when it opens.

Often a high speed parachute slows a load down and then pulls out a lower speed parachute. The mechanism to sequence the parachutes is called a "delayed release" or "pressure detent release" depending on whether it releases based on time, or the reduction in pressure as the load slows down.

### **Ram-air parachutes**

Most modern parachutes are self-inflating "ram-air" airfoils known as a Para foil that provide control of speed and direction similar to Para gliders. Para gliders have much greater lift and range, but parachutes are designed to handle, spread and mitigate the stresses of deployment at terminal velocity. All ram-air Para foils have two layers of fabric; top and bottom, connected by airfoil-shaped fabric ribs. The space between the two fabric layers fills with high pressure air from vents that face forward on the leading edge of the airfoil. The fabric is shaped and the parachute lines trimmed under load such that the ballooning fabric

inflates into an airfoil shape.



A U.S. NAVY display jumper landing a 'square' ram-air parachute

## Reserves

Paratroopers and sports parachutists carry two parachutes. The primary parachute is called a main parachute, the second, a reserve parachute. The jumper uses the reserve if the main parachute fails to operate correctly.

Reserve parachutes were introduced in World War II by the US Army paratroopers, and are now almost universal. For human jumpers, only emergency bail-out rigs have a single parachute and these tend to be of round design on older designs, while modern PEPs (i.e P124A/Aviator) contain large, docile ram-air parachutes.

## Deployment

Reserve parachutes usually have a ripcord deployment system, but most modern main parachutes used by sports parachutists use a form of hand deployed pilot chute. A ripcord system pulls a closing pin (sometimes multiple pins) which releases a spring-loaded pilot chute and opens the container, the pilot chute is propelled into the air stream by its spring then uses the force generated by passing air to extract a deployment bag containing the parachute

canopy, to which it is attached via a bridle.

A hand deployed pilot chute, once thrown into the air stream, pulls a closing pin on the pilot chute bridle to open the container, then the same force extracts the deployment bag. There are variations on hand deployed pilot chutes but the system described is the more common throw-out system. Only the hand deployed pilot chute may be collapsed automatically after deployment by a kill line reducing the in-flight drag of the pilot chute on the main canopy. Reserves on the other hand do not retain their pilot chutes after deployment. The reserve deployment bag and pilot chute are not connected to the canopy in a reserve system, this is known as a free bag configuration and the components are often lost during a reserve deployment. Occasionally a pilot chute does not generate enough force to either pull the pin or extract the bag, causes may be that the pilot chute is caught in the turbulent wake of the jumper (the "burble"), the closing loop holding the pin is too tight, or the pilot chute is generating insufficient force, this effect is known as "pilot chute hesitation" and if it does not clear it can lead to a total malfunction requiring reserve deployment.

Paratroopers' main parachutes are usually deployed by static lines which release the parachute yet retain the deployment bag which contains the parachute without relying on a pilot chute for deployment. In this configuration the deployment bag is known as a direct bag system and the deployment is rapid, consistent and reliable. This kind of deployment is also used by student skydivers going through a static line progression, a kind of student program.

**Using the modeling process, build a mathematical model for the opening of the parachutes discussed above. We are concerned with how the parachute inflates. Use your model to explain how the geometry of the folding of the parachute affects the inflation and then discuss how we might affect the rate of inflation of the parachute.**

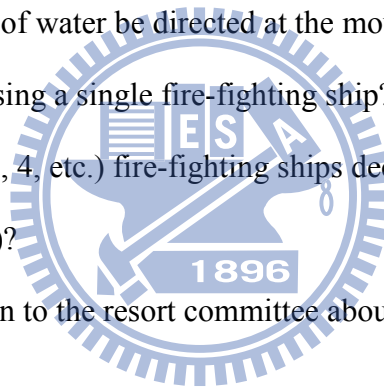
## 2006 Problem B

### A South Sea Island Resort

A South Sea island chain has decided to transform one of their islands into a resort. This roughly circular island, about 5 kilometers across, contains a mountain that covers the entire island. The mountain is approximately conical, is about 1000 meters high at the center, appears to be sandy, and has little vegetation on it. It has been proposed to lease some fire-fighting ships and wash the mountain into the harbor. It is desired to accomplish this as quickly as possible.

Build a mathematical model for washing away the mountain. Use your model to respond to the questions below.

- How should the stream of water be directed at the mountain, as a function of time?
- How long will it take using a single fire-fighting ship?
- Could the use of 2 (or 3, 4, etc.) fire-fighting ships decrease the time by more than a factor of 2 (or 3, 4, etc.)?
- Make a recommendation to the resort committee about what to do.



## 2007 Problem A

### Smoke Alarms

Fire is one of the leading causes of accidental deaths. It is important for everyone to take every preventative measure and precaution possible to be ready to deal with a fire emergency.

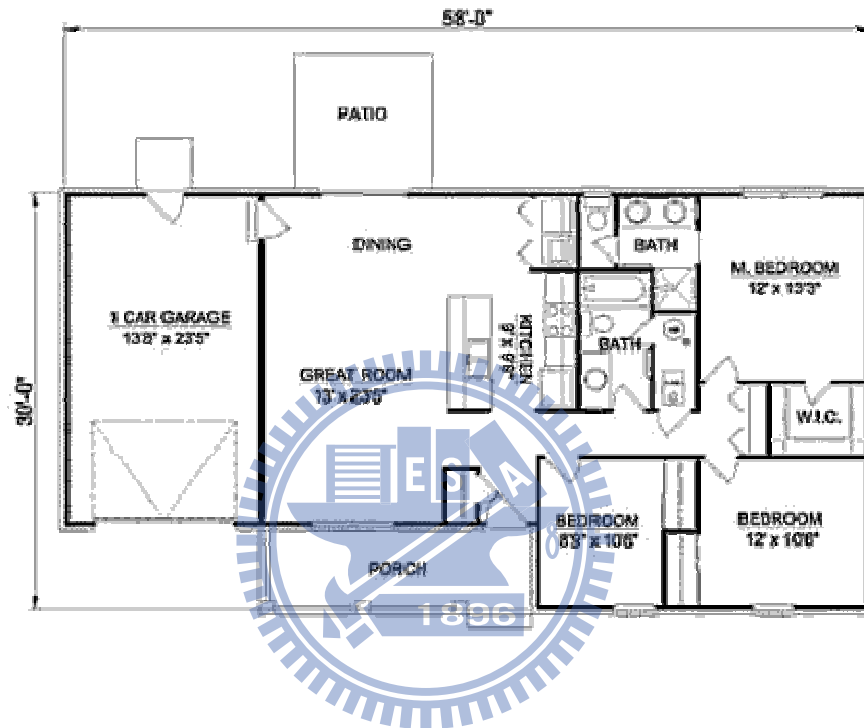
More than half of all fatal fires occur between 10 p.m. and 6 a.m. when everyone in the home is usually asleep. Smoke alarms are necessary to alert you to fires when you sleep. Will smoke alarms allow enough time to evacuate safely?

Build a mathematical model to determine the number and locations of smoke alarms to provide the maximum time for evacuation. Also include a model to determine the number and

location of at-home fire extinguishers to have available. Build a mathematical model for evacuation of a family from both one and two story homes.

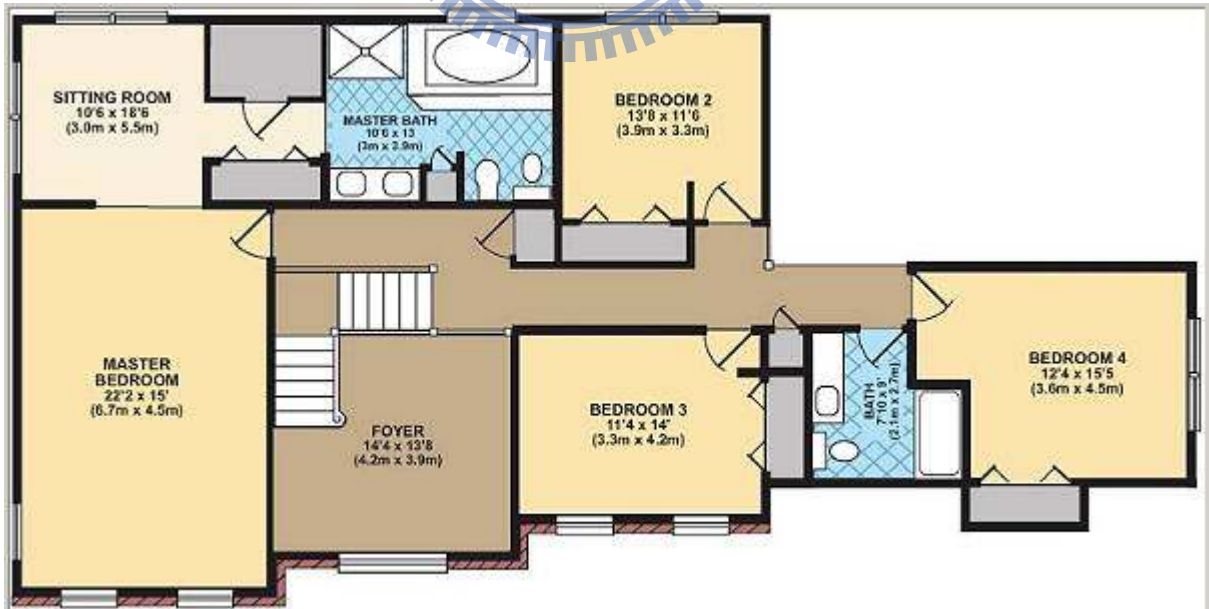
Prepare an advertisement for your local fire department to pass out to the community that includes the main results of your mathematical models.

### One Story Home



# Two Story Home

## Downstairs



## **2007 Problem B**

### **Car Rentals**

Some people rent a car when they are going on a long trip. They are convinced they save money. Even if they do not save money, they feel that the knowledge that "if the car breaks down on the trip, the problem is the rental company's" makes the rental worth it. Analyze this situation and determine under what conditions renting a car is a more appropriate option. Determine mileage limits on one's own car and a break-even value of "ease of mind" for the driver and her family.

## **2008 Problem A**

### **National Debt and National Crisis**

Mathematical modeling involves two equally important steps – building models based on real world situations and interpreting predictions made by those models back in the real world. This problem places equal emphasis on both steps.

We are at the start of the 2008 U.S. presidential elections, and one important area of debate is sure to be the national debt. As high school students, you have a particular interest in this subject since you are the people who will pay off or at least manage the national debt in the future. The rate at which the national debt changes depends on the difference between federal income (primarily taxes) and federal expenditures. Your first task is to build a model that can be used to help understand the national debt and make forecasts based on different assumptions. As usual, modeling involves a balance between so much complexity that the model may be intractable and so little complexity that it is unrealistic and useless. Your model needs, at the very least, to allow you to consider different tax policies and different expenditure policies.

As usual, raw numbers don't carry much information. Those numbers must be placed in context. For example, total national debt is less meaningful than national debt per capita. In



addition, you must be careful about inflation. Many analysts look at the ratio between national debt and gross domestic product as a good indicator of the impact of the national debt. Others worry about the cost of servicing the national debt. This cost is affected by both the size of the national debt and the interest rate the government must pay to borrow money. You may want to look at the Wikipedia article

**[http://en.wikipedia.org/wiki/National\\_debt\\_by\\_U.S.\\_presidential\\_terms](http://en.wikipedia.org/wiki/National_debt_by_U.S._presidential_terms)**

for some figures involving the ratio between national debt and gross domestic product.

### **TASKS:**

1. Build a model that can be used to help understand the national debt and make forecasts based on different assumptions. You must provide justification for the various elements of your model and you must also test the sensitivity of your model to various parameters.
2. Use your model to compare at least two alternative plans for the years 2009-2017. Your plans should be based on different tax and spending policies that are reasonable and politically feasible. Use your model to compare the impact on the national debt and then impact on the nation in general of your policies.
3. Prepare a letter to the new president advising him of your model.

## **2008 Problem B**

### **Going Green**

The United States can address its national carbon footprint in two ways: by reducing carbon dioxide emissions or by increasing carbon dioxide consumption (sequestration). Assume that the total U.S. carbon dioxide emissions are capped at 2007-2008 levels indefinitely. What should the U.S. do to increase carbon dioxide consumption to achieve national carbon neutrality with minimal economic and cultural impact? Is it even possible to achieve neutrality? Model your solution to show feasibility, effectiveness, and costs. Prepare a short summary paper for the U.S. Congress to persuade them to adopt your plan.

## **2009 Problem A**

### **Water, Water Everywhere**

Fresh water is the limiting constraint for development in much of the United States. Devise an effective, feasible, and cost-efficient national water strategy for 2010 to meet the projected needs of the United States in 2025. In particular, address storage and movement, de-salinization, and conservation as some of the possible components of your strategy. Consider economic, physical, cultural, and environmental effects. Provide a position paper for the United States Congress outlining your approach, its costs, and why it is the best choice for the nation.

## **2009 Problem B**

### **Tsunami ("Wipe Out!")**

Recent events have reminded us about the devastating effects of distant or underwater earthquakes. Build a model that compares the devastation of various-sized earthquakes and their resulting Tsunamis on the following cities: San Francisco, CA; Hilo, HI; New Orleans, LA; Charleston, SC; New York, NY; Boston, MA; and any city of your choice. Prepare an article for the local newspaper that explains what you discovered in your model about one of these cities.

## 附錄二：1999-2004 全美高中學生數學建模競賽(HIMCM)(林國源,2005)

### 1999 Problem

#### Traffic Lights

Major thoroughfares in big cities are usually highly congested. Traffic lights are used to allow cars to cross the highway or to make turns onto side streets. During commuting hours, when the traffic is much heavier than on any cross street, it is desirable to keep traffic flowing as smoothly as possible. Consider a two-mile stretch of a major thoroughfare with cross streets every city block. Build a mathematical model that satisfies both the commuters on the thoroughfare as well as those on the cross streets trying to enter the thoroughfare as a function of the traffic lights. Assume there is a light at every intersection along your two-mile stretch.

First, you may assume the city blocks are of constant length. You may then wish to generalize to blocks of variable length.

在都會區裡上下班尖峰期間的主幹線道路經常壅塞，而交通號誌用以維持往來街道與幹線間的車流順暢；假設市區內各個街道的十字路口前均有一2哩長的主幹線通過，請建立一數學模型來適當控制各個十字路口交通號誌的秒差，以使得來往於街道與主幹線上的車輛都能獲得相對公平的等待與通過時間。

首先，你可以先假設各個街道的十字路口都是固定的距離；而後再依據所建立之模型進一步推論出不同距離的十字路口其交通號誌秒差控制的模型。

### 2000 ProblemsA

#### Bank Robbers

The First National Bank has just been robbed (the position of the bank on the map is marked). The clerk pressed the silent alarm to the police station. The police immediately sent out police cars to establish road blocks at the major street junctions leading out of town. Additionally, 2 police cars were dispatched to the bank.

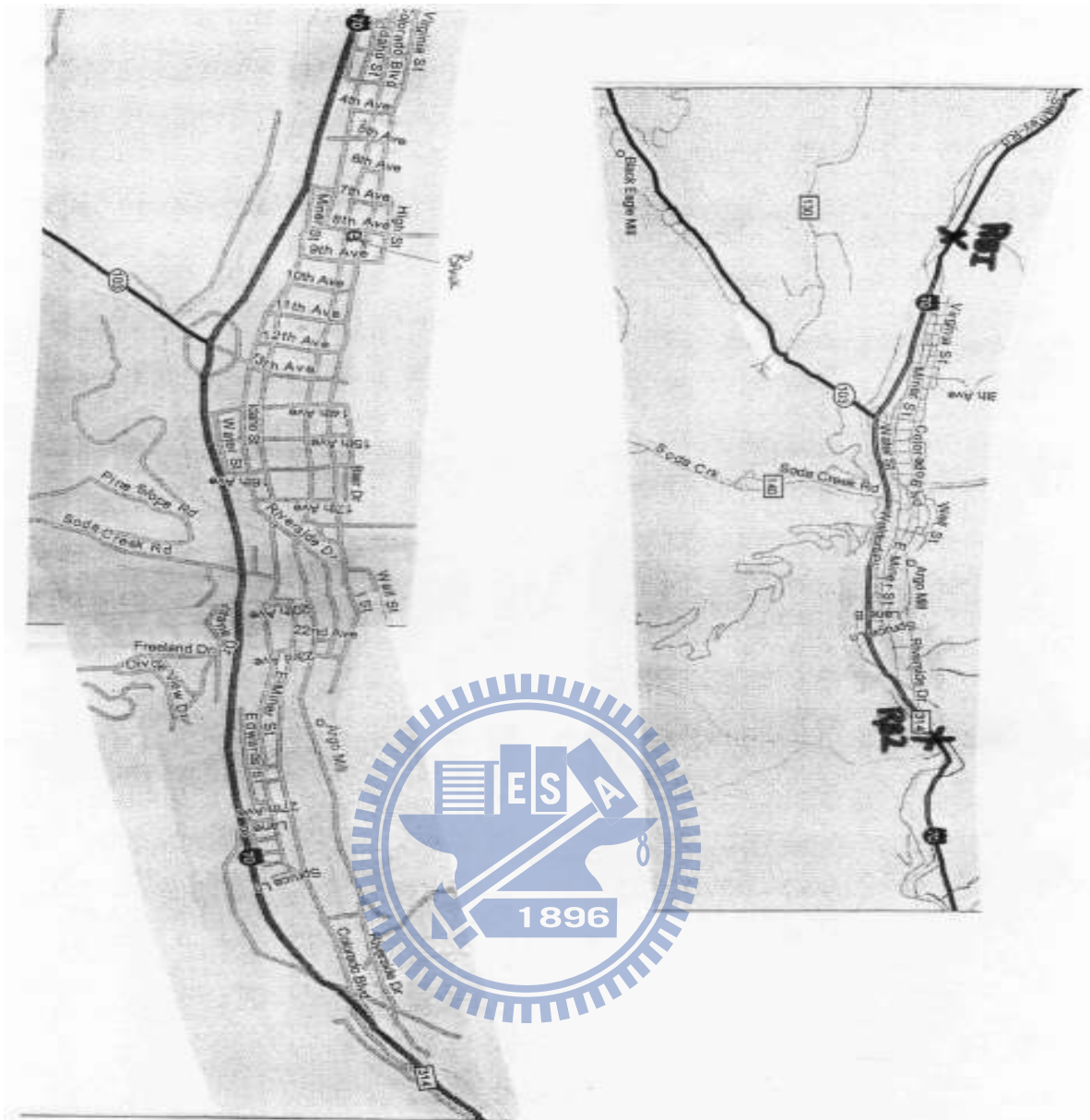
Map information : (See the series of two maps below).

- The Bank is located at the corner of 8th Ave. and Colorado Blvd. and is marked with the letter B. The main exits where the two road blocks are set up are at the intersection of Interstate 70 and Colorado Blvd, and Interstate 70 (past Riverside Drive). These are marked with a RB1 and RB2 symbol.
- Assume the robbers left the bank just before the police cars arrived. Develop an efficient algorithm for the police cars to sweep the area in order to force the bank robbers (who were fleeing by car) into one of the established road blocks.
- Assume that no cars break down during the chase or run out of gas. Further assume that the robbers do not decide to flee via other transportation means.

第一銀行（地理位置如下圖中【左】標明部分）遭歹徒搶劫，銀行職員按下緊急通知鈴，警察局於第一時間內通令轄下分局封鎖銀行週邊主要聯外道路，同時火速派遣兩組警網趕赴現場。

搶案現場相關位置：（如下圖所示）

- 銀行位於科羅拉多大道第八街，如圖以字母B表示；另外兩條主要聯外道路（科羅拉多大道與70號洲際公路交叉處、河堤便道與70號洲際公路交叉處）分別以RB1、RB2 標示，並設立路障。
- 假設搶匪於警網趕赴現場之前已駕車逃逸，請建立一個區域掃蕩系統，有效地迫使搶匪受困於警方所設立的路障區域之內。
- 假設警匪於追逐期間，雙方車輛不會發生油料用盡與故障情形。
- 進一步假設搶匪不會藉由其他運輸工具逃離。
- 請依相關假設，建立你的數學模型，以有效打擊搶匪。



## 2000 Problem B

### Elections

It is almost election time and it is time to revisit the electoral vote process. The constitution and its amendments have provided a subjective method for awarding electoral votes to states. Additionally, a state popular vote, no matter how close, awards all electoral votes to the winner of that plurality. Create a mathematical model that is different than the current electoral system. Your model might award fractional amounts of electoral votes or change the methods by which the number of electoral votes are awarded to the states.

Carefully describe your model and test its application with the data from the 1992 election. Justify why your model is better than the current model.

又逢總統選舉屆臨，讓我們重新審視每次選舉投票的過程。憲法及修正案訂定了各州選舉人票的計算方式；然而，於同一州內即便各候選人得票數非常接近，可是獲得多數選票的勝方都將囊括該州所有的選舉人票。能否建立一個有別於現今選舉制度的數學模型，例如：依照各候選人的得票比例來計算其獲取的選舉人票數，甚或其他計票模式。請詳細描述你所建立的數學模型，並利用所附之1992年的選舉資料來驗證你的模型，同時證明為何你所建立的數學模型會優於現今的制度？

### 1992 Election Summary

State	Electoral Vote			Popular Vote		
	Clinton	Bush	Perot	Clinton	Bush	Perot
AL	0	9	0	668146	797477	180209
AK	0	3	0	57264	73683	50034
AZ	0	8	0	521736	543876	339307
AR	6	0	0	495150	331867	97549
CA	54	0	0	4812317	3338942	2144856
CO	8	0	0	625402	557408	362506
CT	8	0	0	681081	574738	348028
DE	3	0	0	125997	102436	59061
DC	3	0	0	186301	19813	9284
FL	0	25	0	2051205	2131263	1040953
GA	13	0	0	1002433	985682	306489
HI	4	0	0	178893	136430	52863
ID	0	4	0	136249	201787	129897
IL	22	0	0	2378873	1717736	832307
IN	0	12	0	839227	978627	451858
IA	7	0	0	583937	503338	251040
KS	0	6	0	386168	443314	312670
KY	8	0	0	661059	617419	203587
LA	9	0	0	815305	729880	210604
ME	4	0	0	261859	207122	205076
MD	10	0	0	941979	671609	271198
MA	12	0	0	1315016	803974	630440
MI	18	0	0	1854603	1585251	819931
MN	10	0	0	994843	734845	549517
MS	0	7	0	391911	478878	83950
MO	11	0	0	1051328	810058	517918
MT	3	0	0	153899	143702	106735
NE	0	5	0	214106	338646	171938
NV	4	0	0	185401	171378	129532
NH	4	0	0	207264	199623	120029
NJ	15	0	0	1361088	1303686	504152
NM	5	0	0	255558	209467	90653
NY	33	0	0	3244562	2240050	1028607
NC	0	14	0	1103716	1122608	353845
ND	0	3	0	97546	133911	69805
OH	21	0	0	1964842	1876445	1024319
OK	0	8	0	473066	592929	319978
OR	7	0	0	524161	393273	307244
PA	23	0	0	2233810	1777372	895563
RI	4	0	0	198877	121864	94717
SC	0	8	0	475313	572031	137598
SD	0	3	0	124861	136671	73297
TN	11	0	0	933618	840897	199787
TX	0	32	0	2278912	2460201	1349644
UT	0	5	0	182590	320462	202578
VT	3	0	0	125803	85512	61510
VA	0	13	0	1033825	1146909	344840
WA	11	0	0	855710	609912	470239
WV	5	0	0	324009	236526	105652
WI	11	0	0	1035942	926245	542610
WY	0	3	0	67863	79558	51209
<b>TOTALS</b>	<b>370</b>	<b>168</b>	<b>0</b>	<b>43682624</b>	<b>38117331</b>	<b>19217213</b>

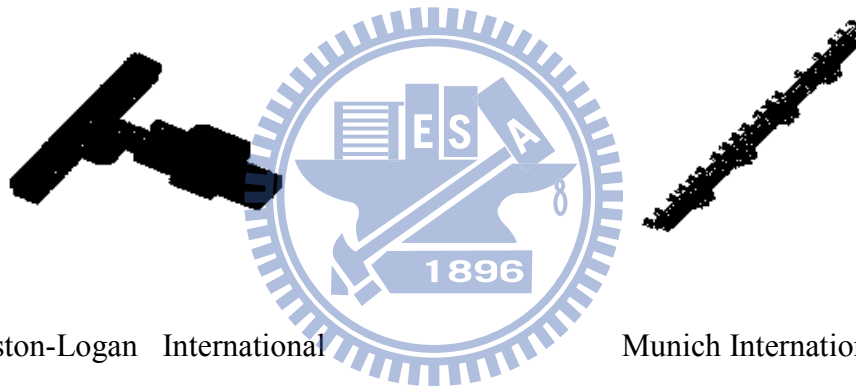
## January 2001 ProblemA

### Design of an Airline Terminal

The design of airline terminals varies widely. The sketches below show airline terminals from several cities. The designs are quite dissimilar. Some involve circular arcs; others are rectangular; some are quite irregular. Which is optimal for operations?

Develop a mathematical model for airport design and operation. Use your model to argue for the optimality of your specified design. Explain how it would operate.

下面附圖是幾個主要城市的航站大廈草圖，有圓弧形、長條形、甚或不規則形狀，顯示各個城市的航站大廈設計形色多樣且差異顯著，然究竟哪一種設計才是符合航站運作方式的最佳設計？請你設計一個理想機場航站的「模型」，藉由你的具體設計提出合理的解釋，並說明它是如何的運作？



Boston-Logan International

Munich International



Charlotte/Douglas International



Ronald Reagan Washington National



Pittsburgh International



## January 2001 Problem B

### Forest Service

Your team has been approached by the Forest Service to help allocate resources to fight wildfires.

In particular, the Forest Service is concerned about wildfires in a wilderness area consisting of small trees and brush in a park shaped like a square with dimensions 80 km on a side. Several years ago, the Forest Service constructed a network of north-south and east-west firebreaks that form a rectangular grid across the interior of the entire wilderness area. The firebreaks were built at 5 km intervals.

Wildfires are most likely to occur during the dry season, which extends from July through September in this particular region. During this season, there is a prevailing westerly wind throughout the day. There are frequent lightning bursts that cause wildfires.

The Forest Service wants to deploy four fire-fighting units to control fires during the next dry season. Each unit consists of 10 firefighters, one pickup truck, one dump truck, one water truck (50,000 liters), and one bulldozer (w/ truck and trailer). The unit has chainsaws, hand tools, and other fire-fighting equipment. The people can be quickly moved by helicopter within the wilderness area, but all the equipment must be driven via the existing firebreaks. One helicopter is on standby at all times throughout the dry season.

Your task is to determine the best distribution of fire-fighting units within the wilderness area. The Forest Service is able to set up base camps for those units at sites anywhere within the area. In addition, you are asked to prepare a damage assessment forecast. This forecast will be used to estimate the amount of wilderness likely to be burned by fire as well as acting as a mechanism for helping the Service determine when additional fire-fighting units need to be brought in from elsewhere.

以下資料是林務局針對撲滅森林大火各項救治與資源分配方案，你的團隊可以加以參考。



每年七至九月的乾旱季節期間，是荒野區域內森林野火的好發期，因為在這段時間裡荒野中整天吹著西風更不時夾雜著閃電出現。

在一片面積廣達80平方公里的荒野中，特別令人擔憂的是那些遍佈矮小灌木叢與小樹林的區域；若干年前，林務局在這片荒野森林內，每隔5公里的間距分別開闢了東西向與南北向的網狀防火林道。

為防範未然，林務局計劃於明年乾季來臨之前部署四個抗災小組，每一小組配置10名消防隊員、一輛小貨車、一輛大型清運車、一輛裝載5萬公升水量的水車和一輛推土機；各單位並配有手提電鋸、各式工具及其他的滅火裝備，同時配有直昇機負責森林區內救災人員的運送，但是各種的救災工具與裝備則必須經由現有的防火林道運抵現場，另配有一輛全時待命的直昇機。

林務局有能力於森林區內的任一地點搭建抗災小組所需的營地供救災指揮與相關人員、工具調度使用；現在請你規劃出抗災小組的最佳區域佈置，並列出火災評估預測用以估計森林野火所可能造成的波及總量，此外，預測中也請同時針對在災區中他處增設救災小組的額外情形給予評估。



You are working temporarily for the Department of Health and Environmental Control. The director is concerned about the issue of teenage pregnancy in their region. You have decided that your team will analyze the situation and determine if it is really a problem in this region. You gather the following 2000 data. Build a mathematical model and use it to determine if there is a problem or not. Prepare an article for the newspaper that highlights your result in a novel mathematical relationship or comparison that will capture the attention of the youth.

未婚少女懷孕情形令人關注，此一議題也引起美國環境管制局與國民健康管理部門的憂心，針對轄下行政區內未婚少女的懷孕情形是否日趨嚴重，進而造成社會問題，這裡蒐集了2000份的相關資料。

請你建立一個數學模型用以判定此一問題是否所言屬實，同時將你的相關評論投稿

報章雜誌，用數學的關係性解釋你的結論，期能引起青少年們對此一問題的關注。

County	Age 10-14 Pregnant	Age 15-17 Pregnant	Age 18-19 Pregnant	10-14 births	15-17 births	18-19 births	10-14 births- unmarried	15-17 birth- unmarried	18-19 births- unmarried
1	29	350	571	17	281	437	16	164	193
2	24	303	567	13	206	466	13	151	233
3	40	422	691	29	307	546	28	251	366
4	21	201	356	18	184	326	15	137	180
5	16	156	357	11	109	254	10	99	161
6	44	523	970	33	442	803	32	293	396
7	17	263	434	9	201	345	7	113	168
8	23	330	427	16	256	444	14	160	210
9	13	123	221	10	113	199	9	78	106
10	41	467	950	24	446	686	22	279	331
11	28	421	713	18	343	615	15	219	328
12	9	179	311	8	145	261	7	114	162

**1998**

**1999**

**Age      Pregnancies      Births**

**Age      Pregnancies      Births**

10-14	320	231
15-17	4041	3222
18-19	6387	5164

10-14	309	208
15-17	3882	3048
18-19	6714	5391

## November 2001 Problem B

### Skyscrapers

Skyscrapers vary in height , size (square footage), occupancy rates, and usage. They adorn the skyline of our major cities. But as we have seen several times in history, the height of the building might preclude escape during a catastrophe either human or natural (earthquake, tornado, hurricane, etc). Let's consider the following scenario. A building (a skyscraper) needs to be evacuated. Power has been lost so the elevator banks are inoperative except for use by firefighters and rescue personnel with special keys.

Build a mathematical model to clear the building within  $x$  minutes. Use this mathematical model to state the height of the building, maximum occupation, and type of evacuation methods used. Solve your model for  $x = 15$  minutes, 30 minutes, and 60 minutes.

都會區裡形形色色的摩天大樓高聳雲際、櫛比鱗次地將城市的天空點綴的讓人目不暇給，但是許多的歷史經驗告訴我們，無論是天災（地震、龍捲風、暴風雨）或是人禍，由於摩天大樓的逃生不易反而使得每次的大災難中死傷慘烈。

現在模擬以下的狀況發生：

某一摩天大樓於一場意外災害中需迅速撤離大樓人員，且大樓供電系統中斷造成電梯停擺，此時除了依賴消防人員與緊急救難大隊外別無他法。

試著規劃出一個在  $x$ （分鐘）內將大樓淨空的數學模型，並依大樓的樓高、內部最大容納人員數量、撤離的方式等等的條件下給予討論。分別用  $x=15$ ， $x=30$ ， $x=60$ ，3種參數測試你的模型。

## 2002 Problem A

### School Busing

Consider a school where most of the students are from rural areas so they must be bused. The buses might pick up all the students and go to the elementary school and then continue from that school to pick up more students for the high school.

A clear alternative would be to have separate buses for each school even though they would need to trace over the same routes. There are, of course, restrictions on time (no student should be in the bus more than an hour), drivers, equipment, money and so forth.

How can you set up school bus routes to optimize budget dollars while balancing the time on the bus for various school groups? Build a mathematical model that could be used by various rural and perhaps urban school districts. How would you test the model prior to implementation? Prepare a short article to the school board explaining your model, its assumptions, and its results.

某間學校的學生大多數來自鄉村，所以必須藉由校車接送；假設上學期間校車需將學生一一搭載上車送至就讀的學校，隨後再繼續接送其他國中生到校上課。

顯而易見地，我們希望將小學生與國中生分開接送，縱使校車必須重複行駛相同接送路徑；當然，在這樣不得已的選擇條件下也需考量一些其他因素，例如：通車時間限制（最長時間不超過一小時）、司機員額、設備、經費等等。

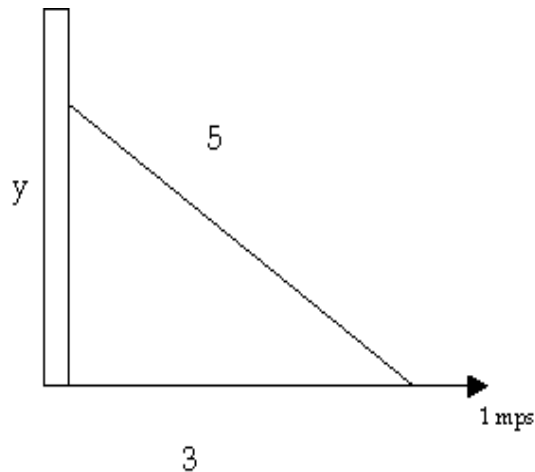
在各種類型的學區環境下（例如：國中小校區相鄰或分開），如何在經費預算與學生通車時間二者兼顧的情形下，設計出校車的最佳接送路線。

建立一個可以適用於鄉間類型（或許也能用於城市學區）學校的數學模型，並說明你是如何測試模型？投書當地的教育委員會告訴他們你的想法與結論。

## **2002 Problem B**

### **The Falling Ladder**

A ladder 5 meters long is leaning against a vertical wall with its foot on a rug on the floor. Initially, the foot of the ladder is 3 meters from the wall. The rug is pulled out, and the foot of the ladder moves away from the wall at a constant rate of 1 meter per second. Build a mathematical model or models for the motion of the ladder. Use your model (or models) to find the velocity at which the top of the ladder hits the floor and the distance the top of the ladder will be from the wall at the moment that it hits the ground.



有長度5公尺的梯子斜靠於一個垂直的牆面上，梯腳落在地板上的小地毯上且與牆腳距離3公尺；現在拉動地毯使梯腳以1公尺/秒的固定速率向外移動。

依據上述情形建立一個（或多個）梯子運動的數學模型。

請計算出當地毯以固定速度拉出，使得梯頂沿牆面下滑脫離牆面而碰觸到地板時的速度與當時梯頂離牆面的距離。



In 1945, Noah Sentz died in a car accident and his estate was handled by the local courts. The state law stated that 1/3 of all assets and property go to the wife and 2/3 of all assets go to the children. There were four children. Over the next four years, three of the four children sold their shares of the assets back to the mother for a sum of \$1300 each. The original total assets were mainly 75.43 acres of land. This week, the fourth child has sued the estate for his rightful inheritance from the original probate ruling. The judge has ruled in favor of the fourth son and has determined that he is rightfully due monetary compensation. The judge has picked your group as the jury to determine the amount of compensation.

Use the principles of mathematical modeling to build a model that enables you to determine the compensation. Additionally, prepare a short one-page summary letter to the court that explains your results. Assume the date is November 10, 2003.

Noah Sentz先生於1945年的一場車禍意外中喪生，其身後所遺留的資產中主要部分有土地75.43英畝，而他的遺產則由地方法院負責接管，所屬的州法律規定Noah Sentz太太可以繼承全部遺產的1/3，剩下的2/3則由其4個子女共同繼承，4年後，其中3位子女個別以總價\$1300元將其所分得的資產賣回給Noah Sentz太太。

本週，Noah Sentz先生排行老四的兒子，對原始遺囑裁決中其合法繼承的遺產提出訴訟，而當地州法庭也做出對其有利之判決，裁定他可以獲得合法之補償；現在，假設你的團隊被選為陪審團的成員，請問你該如何決定出公平的補償金額？

運用數學的原理對補償金額的多寡與公平性建立一個數學模型，同時，提出一頁的摘要論述給州法院解釋你的看法，時間就以2003年11月10日為準。

## 2003 Problem B

### How fair are major league baseball parks to the players?

Consider the following major league baseball parks: Atlanta Braves, Colorado Rockies, New York Yankees, California Angles, Minnesota Twins, and Florida Marlins.

Each field is in a different location and has different dimensions. Are all these parks "fair"? Determine how fair or unfair is each park. Determine the optimal baseball "setting" for major league baseball.

下面是美國職棒大聯盟：亞特蘭大勇士、科羅拉多洛杉磯、紐約洋基、加州天使、明尼蘇達雙城、佛羅里達馬林魚各隊所屬的球場資料。

各球隊所擁有的球場大小規模均不相同，你覺得這樣公平嗎？各球隊的球場要怎樣設置才算公平（或不公平），如何決定出最理想的比賽場地！

Franchise	Outfield Dimensions					Wall Height			Area of Fair Ter
	Left field	Left center	Center field	Right center	Right field	Left Field	Center Field	Right Field	
Angles	330	376	408	361	330	8	8	18	110,000
Braves	335	380	401	390	330	8	8	8	115,000
Rockies	347	390	415	375	350	8	8	14	117,000
Yankees	318	399	408	385	314	8	7	10	113,000
Twins	343	385	408	367	327	13	13	23	111,000
Marlins	330	385	404	385	345	8	8	8	115,000

## 2004 Problem A

### Motel Cleaning Problem

Motels and hotels hire people to clean the rooms after each evening's use. Develop a mathematical model for the cleaning schedule and use of cleaning resources. Your model should include consideration of such things as stay-overs, costs, number of rooms, number of rooms per floor, etc. Draft a letter to the manager of a major motel or hotel complex that recommends your model to help them in the management of their operation.

汽車旅館業者通常在傍晚時雇請清潔人員來進行房間的打掃工作；請你替整個清潔的工作時間表的安排和清潔資源的分配使用建立一個適當的數學模型，你的模型應該考慮包括留宿過夜的房間量、費用、每一層的房間數量、以及房間的總數量□等等這一類因素。將你的數學模型草擬成一份書面資料提供給旅館經營管理人，協助業者做出更有效率的經營與運作。



An art gallery is holding a special exhibition of small watercolors. The exhibition will be held in a rectangular room that is 22 meters long and 20 meters wide with entrance and exit doors each 2 meters wide as shown below. Two security cameras are fixed in corners of the room, with the resulting video being watched by an attendant from a remote control room. They rotate backwards and forwards over the field of vision, taking 20 seconds to complete one cycle.

For the exhibition, 50 watercolors are to be shown. Each painting occupies approximately 1 meter of wall space, and must be separated from adjacent paintings by 1 meter of empty wall space and hang 2 meters away from connecting walls. For security reasons, paintings must be at least 2 meters from the entrances. The gallery also needs to add additional interior wall space in the form of portable walls. The portable walls are available in



5-meter sections. Watercolors are to be placed on both sides of these walls. To ensure adequate room for both patrons who are walking through and those stopped to view, parallel walls must be at least 5 meters apart throughout the gallery. To facilitate viewing, adjoining walls should not intersect in an acute angle.

The diagrams below illustrate the configurations of the gallery room for the last two exhibits. The present exhibitor has expressed some concern over the security of his exhibit and has asked the management to analyze the security system and rearrange the portable walls to optimize the security of the exhibit.

Define a way to measure (quantify) the security of the exhibit for different wall configurations. Use this measure to determine which of the two previous exhibitions was the more secure. Finally, determine an optimum portable wall configuration for the watercolor exhibit based on your measure of security.

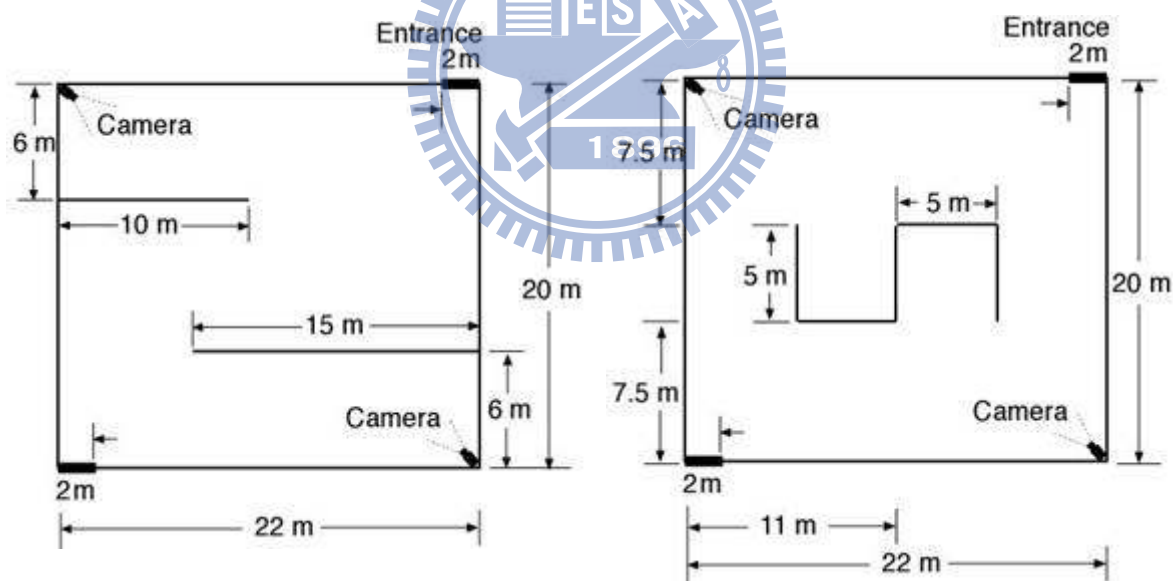


圖 (1) : 展覽牆配置方案(一)

圖 (2) : 展覽牆配置方案(二)

藝術畫廊正舉行一特別的小型水彩的展覽會。展覽會將在A館裡舉行；A館為長22公尺、寬20公尺、入口和出口各有2公尺寬的矩形空間，如上圖(1)所示。兩架由控制室中專人負責遙控監看的保全攝影機則固定在場館的角落上方；以每20秒來回循環的方式在場館上方做現場的即時監視。

此次展覽會共展出50幅的水彩畫作。每幅畫作佔用大約1公尺的展示牆面，並且必

須與相臨畫作間隔1公尺空間的方式懸掛在2公尺高處展示。在顧及安全條件下，畫作至少與入口處相距2公尺以上，考量在畫廊內部增設額外的可拆解式的活動展示牆面，水彩畫作將被懸掛安置在展示牆的兩面上。爲了提供顧客足夠的觀賞空間與參觀動線這些平面展示牆必須有5公尺的寬度；同時爲了方便觀看作品，展示牆面不以尖角方式交叉擺設（如上圖2所示）。

圖（1）與圖（2）分別爲兩種不同的展示配置規劃圖。現在，展出者爲了安全起見與畫廊的經營管理者表示一些關心，要求業者分析系統的安全性並對展示牆面的配置方式重新分析以達到最佳化的安全展覽。

請針對不同展示牆的配置方式給出一個確定的測量方法（量化），藉由這些確定的措施確定出兩個不同方案中的最優選擇。



### 附錄三：旺宏科學獎－數學領域得獎名單

編號	屆數	獎項	題目
1	1	金牌	經理來了！談一筆劃問題
2	1	金牌	由三角形到三角錐
3	2	金牌	挑剔數列
4	3	旺宏獎	翻動「棋跡」
5	3	銀牌	與特殊型質數之倒數關聯的兩平方總和的整數分解
6	3	優等	檢定樂透
7	3	優等	千變萬化的橢圓盡在手中
8	4	旺宏獎	勝敗天注定
9	4	金牌	對稱函數
10	4	金牌	「碼」到成功
11	4	金牌	分和累乘再現數產生的方法及其性質探討之推廣與應用
12	5	金牌	對角線與方格圖之關係探討與推廣
13	5	金牌	史坦納樹之研究
14	6	旺宏獎	共點圓 共圓點
15	6	金牌	三角形的鏡射變換
16	6	銀牌	鬼謎藏－抽鬼牌遊戲勝率之探討
17	7	旺宏獎	空間中的九點圓與尤拉線
18	8	銀牌	由泡泡接合，探尋孟式定理