國立交通大學

理學院網路學習學程

碩士論文

設計高中數學建模課程之研究

A Study of Designing Mathematical Modeling Curriculum in Senior High School

研 究 生：蘇旭榮

指導教授：傅恆霖 教授

中華民國九十八年六月

設計高中數學建模課程之研究

A Study of Designing Mathematical Modeling Curriculum in Senior High School

研 究 生：蘇旭榮　　　Student：Hsu-Jung Su

指導教授：傅恆霖　　　Advisor：Dr. Hung-Lin Fu

國 立 交 通 大 學

理學院網路學習學程

碩 士 論 文

A Thesis
Submitted to Degree Program of E-Learning of College of Science
National Chiao Tung University
in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master
In

Degree Program of E-Learning

June 2009

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十八年六月

設計高中數學建模課程之研究

研究生：蘇旭榮　　　　　　　　　　　指導教授：傅恆霖 博士

國立交通大學理學院網路學習學程碩士班

摘　　要

迎接嶄新時代的來臨，以數學建模的觀點來提升高中數學教學與學習之發展，是培養學生所需之數學能力與素養的重要方法之一；提升高中數學建模能力，有助於為國家高等教育及科技人才培育奠定穩固的基礎。

本論文主要是探討高中數學建模課程的教材設計，與融入教學活動之教學實驗等兩大主軸。第一部分進行實驗教材之設計示例；第二部分為理論驗證之行動研究，研究方法採實驗教學法與訪談法。

研究結果發現，在教材設計的基準需符合下列原則：兼顧教材的模型建構、學習經驗關聯性、模型共享與重製性。另外，在融入教學活動的歷程中，發現教師本身逐漸重視課本教材與生活經驗的連結，課堂教學方式也由主導講授角色變為兼具引導及參與討論的角色，注重情境多元性的建模策略，且該角色亦提升教師本身設計新的建模教材的能力；再者，建立教材資源基礎的成果，有助於教師參與實作的信心，並促進教師反思與檢討其教學方法，進而發展出一套高中數學建模教學之模式。最後，在學校實施數學建模課程，搭配充足資訊媒材與數學讀物，不僅可提升學生本身建模能力，亦可促進其應用數學知識在已建立模型的比較與連結，進而解決實際的數學問題。

關鍵字：數學建模課程、高中教師專業成長

A Study of Designing Mathematical Modeling Curriculum in Senior High School

Student：Hsu-Jung Su Advisor：Dr. Hung-Lin Fu

Degree Program of E-Learning of College of Science

National Chiao Tung University

ABSTRACT

There is no doubt that mathematics play the most important role in the development of modern technologies. A student with well-trained logic thinking and the ability of modeling a real world problem in senior high school is essential for him or her to face the challenge in the future. Therefore promoting mathematical modeling abilities in senior high school will be able to build up a solid foundation for higher education.

This thesis is mainly to study two topics：(1) Designing mathematical modeling materials, and (2) running the experiment of inserting materials into senior high school teaching. The first part is carrying on designing teaching materials and presentation of solid examples and the second part is the teaching activity inquired by experimentation and interviews. The research finds that the designing standard in the teaching material has to follow Lesh's principles such as Model Construction principle, the Reality Principle, and Construct shareability and reusability principle etc. Besides, in the process, we find that the teacher who gradually values the combination of teaching materials and real-life experience also becomes a role by predominance with leading and participating in a discussion, paying more attention to pluralistic scenario modeling strategies, and also raised to design new modeling teaching materials. Furthermore, the foundation of teaching material resources which contributes to teachers participating in confidentially, also promoting introspection and examination on teaching method, later on, developing teaching patterns of senior high school mathematical modeling. Finally, concerning the school provides students mathematical modeling curriculum which like research curriculum with sufficient IT media and mathematics readings, not only promotes their modeling abilities, but also makes them apply mathematics accomplishment to connect and compare with developed models, then to solve practical mathematical problems.

Keywords：Mathematical Modeling Curriculum, Senior High School Teachers' Professional Development

誌　　　　謝

學業與工作並行的生活即將劃下句點，回首過去數百個日子裡，除了重溫學生時代的種種外，更讓人體會到人間處處是溫情。這一路走來，真要感謝許許多多的貴人協助，才使得這本論文得以完成。

首先要先感謝指導教授暨交大學務長 傅恆霖教授以及應數系 黃大原教授對學生的指導與包容，您們的關心與鼓勵，使學生化阻力為助力而將論文順利完成；感謝口試委員交大應數系 翁志文教授、台中技術學院 陳伯亮教授以及靜宜大學 黃國卿教授(口試召委)在百忙之中撥冗指導與給予建議，使本論文更臻完善。

再來感謝的是研究所的同窗夥伴們，你們的激勵驅使自己得加快腳步完成論文；感謝學校同事們的照應，使自己能將工作與學業兼顧；感謝苗栗縣建台中學數學科陳偉閔老師，協助數學建模的試題編撰與行動研究工作等；感謝好朋友們的陪伴，讓自己能逐一紓解接踵而來的壓力。

最後，要感謝我最愛的家人，爸爸、媽媽、哥哥旭川與親戚們，您們的噓寒問暖是支持我一路走來的最大動力，我愛您們！

感謝的話語無限，未來的人生旅程我將永遠懷抱著這份心繼續走下去！

蘇旭榮　　謹誌於

國立交通大學理學院網路學習學程碩士班

中華民國九十八年六月

目　　　錄

表 目 錄

頁次

圖 目 錄

頁次

一、 緒論

古希臘哲學家 Claudius Ptolemy 在公元二世紀所提出的”地心說”，波蘭天文學家 Nicolaus Copernicus 在公元十五世紀提出的”日心說”，以及法國哲學家 René Descartes 座標的發明與方法論的數學模型法，乃至公元 16 世紀義大利科學家 Galileo Galilei 利用三角形相似定理建立數學模型，進而推導出自由落體的運動定律等，皆成為了數學模型在近代科學的使用先驅，而現代的數學建模(Mathematical Modeling)，更是繼承了偉大科學家與哲學家們的智慧，成為解決各種科學理論與實際問題的最佳選擇。

數學建模（mathematical modeling）不同於傳統的解題只將焦點放在問題的數學表徵化和數學解答，數學建模將焦點從發現解答改變為轉換與詮釋情境資訊、辨別潛在的問題、建立模式、再詮釋數學解答的前提、假設與可能的偏差。有關數學應用與建模的重要議題已引起數學教育界廣泛的回響與探討(Houston, Blum, Huntley & Neill, 1997; Blum, 2002)。

近年來，美國與大陸等地的中學課程中尤其重視學生的建模能力，並開設多元研究型課程與舉辦數學建模競賽等，以培養跨學科領域，具創造力思考的現代人才。國際上也有不少成功的數學建模教學方案，例如俄國以建模課程作為資訊科學學習的延伸，並採用教師教導、小組合作與個別工作循序漸進的教學方式來增強中學生的跨領域的技能(Henner & Stestakov, 1997)。

Ikeda(1997)建議在建模活動中教師應依照個人的建模教學能力來決定教師所扮演的角色，其研究結果發現能夠引導學生注意與討論同儕間不同的數學思維是一個重要的教學策略。但縱觀我國中等數學教育環境，引進建模教學仍存在諸多不利的障礙。大部分的高中數學教學模式是依照下列步驟進行：介紹組織完整的單元概念、示範例題和演算技巧、讓學生練習、學生儘可能提供自己正確的想法、教師提供便捷的解題技巧(Lin & Tsao, 1999)，造成長年來考試領導教學的傳統，不論是教材設計與教學方法，皆是舊的思維與學習模式，也因此產生了龐大的數學學習壓力，並讓數學知識漸漸與真實世界的經驗脫節。

數學建模在數學課程中扮演重要的角色，建模概念的學習對學生在面對現實生活上的問題有很大的幫助，並且能培養學生作假設、分析、推理、解題、圖表分析、歸納、模型

建立、討論分享等科學能力。然而有關數學建模的研究亦不少，但大多數是聚焦在建模教學方式對學習成效的影響。至於在研究中發展教材，且透過原案分析及課室觀察，來探討教師如何將數學建模融入教學活動之歷程，作為高級中學建模教學與學習之指標相關研究為數並不多。因此，本研究想要探討一位高中數學老師如何在已發展的教材基礎上，融入教學活動與學生相互學習成長之歷程，並期望能夠建立相關建模師資培育指標，以提升數學教師的專業成長。

二、 文獻探討

本章文獻探討上主要是針對高中數學建模概念、教材設計原則、建模教學策略、行動研究、教師專業成長等相關研究議題作系統性的介紹，以簡述本研究之相關理論基礎與脈絡。

2-1 高中數學建模

2-1-1 建模課程目的

沈華偉(2002)提到，數學應用和數學建模活動要與現行數學教材有效結合，雖然數學建模的目的是為了解決實際問題，但對於高中生來說，進行數學建模教學的主要目的並不是要他們直接去解決有關經濟、工程等生活中的實際問題，而是要他們培養數學應用的意識，掌握數學建模的方法，為將來的學習與工作打下基礎。

而在高中進行數學建模活動，具體來說可以培養學生以下五點能力(趙杰，2002)：

1. 創造性思維能力
2. 數學素質
3. 合作意識
4. 自學能力與使用文獻的能力
5. 計算機應用能力

而黃樂華(2003)更是提出，大陸南開大學數學科學學院的顧沛教授，認為中學數

學建模學習，可以培養學生以下十種數學能力：

1. 歸納總結的能力
2. 演繹推理的能力
3. 準確計算的能力
4. 提出問題、分析問題、解決問題的能力
5. 抽象思考的能力
6. 聯想思考的能力
7. 學習新知識的能力
8. 口頭與書面的表達能力
9. 創新的能力
10. 靈活運用數學軟體的能力

2-1-2 教材設計原則

建模活動(Model-Eliciting Activities) 在教材設計是為了鼓勵學生建立數學模型，解決複雜問題，以及為教育工作者提供更好的工具來了解學生的思考行為。建模活動是基於六個具體原則(Lesh 等人, 2000) 的發展和實地試驗所建立：

1. 模型建構原則：問題必須在設計上考慮到模型的元素、關係、元素間的操作、模式和處裡這些關係的規則等。
2. 現實原則：問題對於學生，必須是有意義，而且與生活經驗相關。
3. 自我評估原則：學生必須能自我評估或測量他們的解答是否具有可行性。
4. 建構文件原則：學生必須能充分表達他們想法與解答的過程。
5. 建構可分享與可再用性原則：由學生創造的解答應該具有普遍化或容易適用於其它情況。
6. 有效的描述原則：其他人應能容易地解釋解答。

上述可知，為增強教學內容和過程的應用性為目標的教學設計，應處理好理論與實務、知識與能力、邏輯與心理、教學與學習間的相互聯繫，融入知識、方法、應用、創造等元素，充分體現數學課程在培養學生數學素質及其他相關素質間的功

能與價值。

徐菁(2001)在教材設計上提出以下四點原則：

1. 立足教學實際，關注現實生活

泛指客觀世界的現實圖景，有利於豐富發展並增強數學現實的適用性，如人們生活中的經濟活動、運輸過程、人口控制、環境保護、資源開發、科學管理等各方面實際問題。

2. 引入問題，注重探究過程

能引導學生進行問題解決式的問題探究，重視科學認知的一般方法與數學思維的過程，並重視探究意識與能力的養成，與科學價值和人文精神的弘揚。

3. 講授數學模型，擴展應用範圍

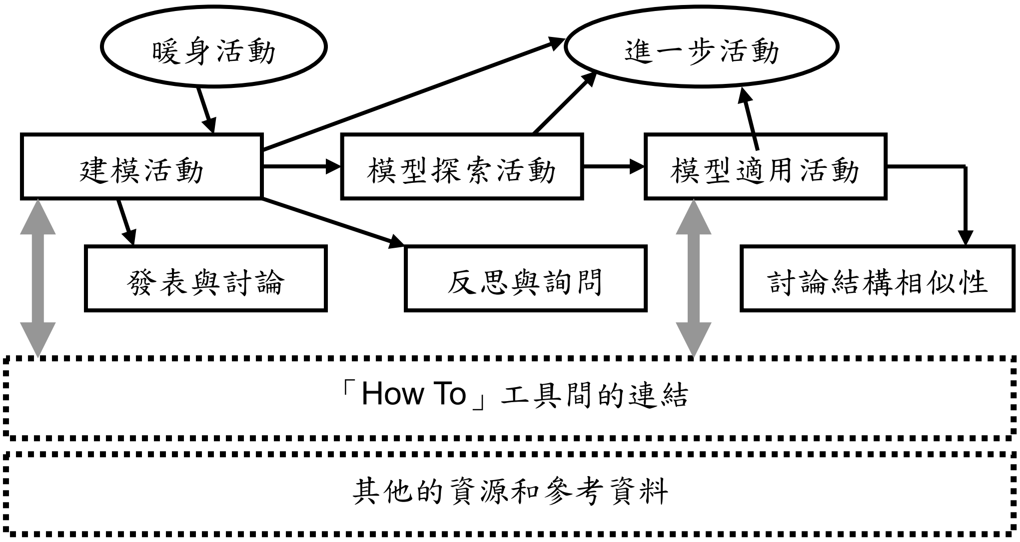
相對於現實來說，數學中的數、式、方程、函數、統計量等皆可視為數學模型，都可採用數學模型法的思維來處理，亦可完全使用在例題、習題等方面，直接作為必修內容在課堂上講授。

4. 運用數學建模，培養實踐能力

數學建模是一個動態的數學過程，不僅可以解決課堂上的理論教學，也可讓學生體驗現實中的數學問題，訓練學生從抽象現實問題轉化為數學問題，得以運用數學思維求解。

2-1-3 建模教學策略

本次建模教學的研究基礎是以 Lesh, Cramer, Doerr, Post 以及 Zawojews（2002）所建立的「模型發展序列（model development sequence）」為架構，並根據 Dienes 的四大原則（建構原則、多重具體物原則、動態原則、感知多變性原則），探索教師如何引導學生，以日常生活經驗與不同的科學能力為背景，取代傳統解題導向，活用跨領域的知識與能力進行合作解題，建立數學模型的脈絡活動。下圖為模型發展序列的流程圖：



【圖 2-1-3-1 模型發展序列流程圖 Lesh, 2002】

當我們初步實施數學建模教學時，可以把教學過程分為三個階段(李有忠，2005)：

1. 初級階段

結合教材改編許多應用題，通過創造問題情境，引導學生積極參與知識建構，著重培養學生的應用意識，培養學生希望透過數學建模來解決實際問題的興趣。

2. 中級階段

i. 選擇貼近生活的數學問題以及與教材有關的典型問題，啟發學生思考並初步掌握數學建模的常用方法。

ii. 引導學生運用數學工具、圖表等多種方式，建構適合的數學模型。

iii. 評價學生建構的數學模型，並進行指導修正，所檢驗的結果如果不符合事實，應補充假設，重新建模。

3. 高級階段

引導學生主動在生活中發掘問題，尋找解題的元素，使其獨立發現問題、提出問題，並能以小組合作的方式處理較複雜的建模問題，提出報告，由師生共同評定其表現，最後再請學生將其過程寫成數學作文(小論文)。

黃樂華(2003)提出”思想實驗法”，其內容是在教學中如何更好表現出”問題背景－建立模型－解釋應用與推廣”的方式，把思考的重點放在以下幾個方面：

1. 模型(概念、公式)的背景有哪些？哪些背景更接近學生的現實生活、更容易激發學生的認知理念？
2. 模型的建構用到哪些數學方法？歸納法、類比法、聯想法？還是其他具體方法？
3. 怎樣將模型進一步地推廣？

由於數學建模教學活動涉及的內容領域廣泛，一位教師不易對這些內容都精通，各領域所組成的教師團隊的專業水準，決定了建模教學成功與否，如數學、物理、化學、生物、資訊等領域的教師所發揮的合作教學效果，必然遠大於數學老師本身所從事的指導教學工作。

2-2 行動研究

2-2-1 行動科學研究

Schon(1983)提出行動科學研究不僅同時考量所追求的目標和達成目標的手段，也要不斷地思考與質疑整體設計，進而在實踐的過程中可以探究與審視個人的價值觀與目的。而張景媛（民 86）則認為：教學評量應是雙向的評量，不只評估學生的學習表現，也應評鑑教師的教學行為。教師是一位質變的學習者，必須不斷思考自己的教學問題。這與過去我們偏重以成績之「量」的評量，在期末才驗收教學成果，以及並未透過學生的反應來調整教學，有所不同。是以本研究基於行動研究基礎上，擬以參與觀察法詮釋研究歷程，記錄研究對象的成長歷程，且研究者本身亦參與教學活動與檢討。

2-2-2 促進教師專業成長策略

談及師資培育或教師專業成長，雖然在培養教學知能與促進成長具有多元策略，但其共同目標包含：更了解學生的學習、能順應學生學習特性的有效教學及追求成長的永續態度(Lin & Cooney, 2001)。也就是說，教師本身順應時代的變革必須改變其教學策略，當教師本身具有投入建模教學的動機時，如何建立有效並永續的專業成長策略，為研究首要目標。Lin(2003)曾指出支撐教師改變的策略可以透過實作研討、內容導向或是資訊科技等方式。

本研究擬透過實作研討，致使教師本身產生「疑惑（doubt）」（Cooney, 2001）這個重要概念。如果教師能對於既有的信念或行動產生疑惑，那原以為理所當然的現象就會受到動搖，如此有助於促進教師的反思。(Lin & Yang, 2005)

Schifter(1993)等人提出師資培育者為了落實「經驗學習者(experiences as learners)」的理念，培育形式採用工作坊(workshop)的方式是合宜且必要的。相關的研究也指出，一個成功的教學創新計畫或是學校改革的關鍵元素是讓教師將他們在暑期班(summer institutes)或工作坊(workshops)中學到的知能得以付諸於課堂中實行。

三、 研究方法與內容

本章擬以高中數學建模教材之實例展演，與其融入教學活動之教學實驗等兩大主軸為主，希望建立教學相關指標與了解現行建模課程學習之不足。

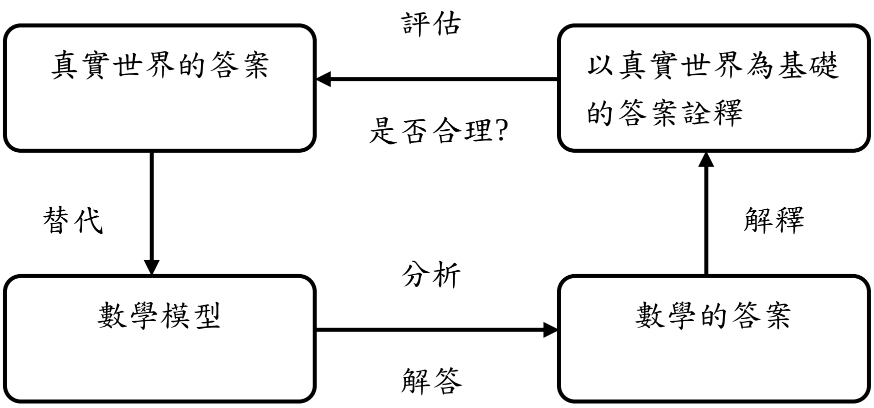
3-1 研究工具

研究工具擬以研究者設計之實驗教材與訪談題目為主要工具，設計不同難易程度之六種題型(以離散數學為主)，於行動研究中實施教學，並記錄教師教學成長歷程；另外，訪談題目配合研究歷程，訪談參與學生在接受數學建模課程後，所具備與缺乏之相關建模發展序列項目，以作為未來建模課程設計與教學環境的參考。

3-1-1實驗教材

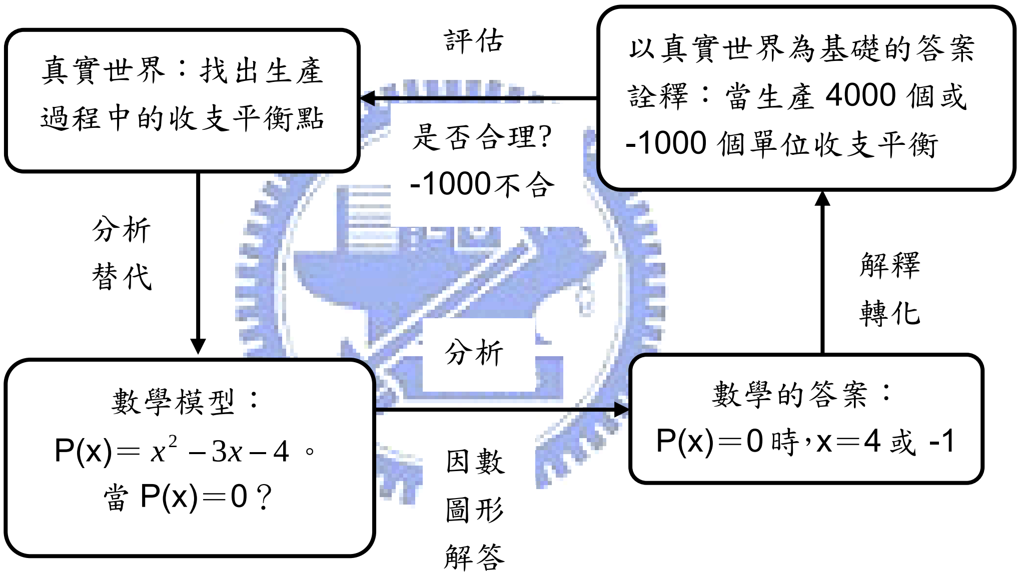
1. 設計基準：

根據美國愛荷華州教育局2007年頒訂的中學數學模型的核心課程標準(Iowa High School Mathematics Model Core Curriculum,2007)，數學建模為應用數學方法解決現實問題的過程，建立普遍化的數學建模課程，主要依據下述建模流程圖：



【圖3-1-1-1 數學建模流程圖】

以收支平衡的問題為例，下述表格為工廠生產過程中，如何使用二次方程式找出收支平衡點：



【圖3-1-1-2 以收支平衡問題為例的數學建模流程圖】

2. 設計方向

根據 Arnold (2003)列舉出近代諸多科學的研究中，需要用數學建立模型的各種領域如下：

i. 人文社會科學領域

a. 人類學或考古學：分類的技巧、碎片或頭顱的重建。

b. 犯罪偵查學：指紋辨識、面貌識別。

c. 金融：風險分析、選擇權的估價。

d. 政治學：選舉的分析。

ii. 生命科學領域

a. 生物學：人類的基因工程、人口動態、物種的演化、疾病的傳播、動植物的培育(遺傳學)。

b. 醫學：輻射治療計畫、X 光片拍攝、血液循環模型。

c. 藥物學：對蛋白質的分子的修飾、新化合物的掃描。

d. 神經系統科學：神經網路、在神經裡的信號發送。

iii. 自然科學領域

a. 天文學：行星的系統的探測、宇宙的起源。

b. 氣象學：天氣預測、氣候預測(全球暖化、什麼引起臭氧洞？)。

c. 物理學：基本粒子追蹤、量子領域理論預測、雷射。

d. 化學：分子模型、電子結構計算。

e. 流體力學：紊流、風的路徑。

iv. 資訊科學領域

a. 計算機科學：影像處理、資料搜尋、比對。

b. 人工智慧：計算機視覺、機器人技術、語音識別。

v. 空間科學領域

a. 航運科學：空中交通、汽車和飛機的自動駕駛儀、軌道計畫、飛行模擬。

b. 建築學：虛擬現實。

vi. 工業工程領域

a. 生產與運作管理：生產計畫與批量問題，庫存管理，物流與供應鏈管理。

b. 決策分析：投資分析、產品開發、市場行銷、可行性研究。

c. 多目標決策：企業經營管理、工程項目管理、交通運輸管理、環境保護與管理、工程設計與工藝、公共事業規劃。

本次設計的實驗教材以離散數學為主，考量目的如下：

i. 離散數學為高中學生較為薄弱且缺乏的重要數學能力，卻扮演與高等教育銜接、資訊科技發展能力等重要角色。

ii. 根據 Arnold (2003)上述列舉的課程相關領域，發現多需要以離散數學為基礎進行運算與模型建立，且高中數學現行教材較為缺乏，故多以此類教材為主。

3. 參考範例

i. Harshbarger & Upshaw (2001)在飯店管理實務上，所設計的問題。下二表為某飯店房間價目、住房率與營收，如何在這些資料中，建立數學模型，得以發現何種房間價位的設計可以獲得最大的住房率與營收？

房間價目	住房率(%)	房間價目	住房率(%)
110	67	119	65
120	47	79	50
100	60	89	52
120	40	69	75
115	38	39	65
75	55	39	45
65	50	45	50
70	52	62	47
44	39	67	47
38	21	36	27

【表3-1-1-1 房間價目與住房率】

房間價目	住房數	每日收益	房間價目	住房數	每日收益
110	134	14,740	119	130	15,470
120	94	11,280	79	100	7900
100	120	12,000	89	104	9256
120	80	9600	69	150	10,350

115	76	8740	39	130	5070
75	110	8250	39	90	3510
65	100	6500	45	100	4500
70	104	7280	62	94	5828
44	78	3432	67	94	6298
38	42	1596	36	54	1944

【表3-1-1-2 房間價目、住房數與每日收益】

ii. 2007美國中學生數學建模競賽試題(HiMCM 2007 contest problems)

a. 租車問題

有些人要從事長途旅行的時候，他們會租一輛汽車。通常他們會選擇節省金錢，即使他們不在乎租車費用，他們也會認為如果車在旅行中故障，是租車公司的事，而這一點使得租金是值得的。分析這種情況，並確定在什麼條件下，租用一輛汽車是一個比較適當的選擇。對自己擁有的汽車，確定里程限制，並確定對於司機和他的家人來說可接受的損益平衡點。

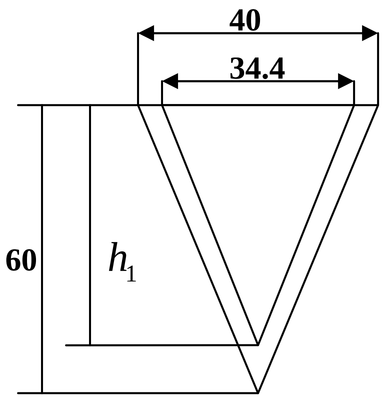
4. 實驗教材示例

於行動研究前，研究者根據教材設計基準、設計方向，以及高級中等學校數學課程綱要等內容，參酌學者題例改寫與自編，並顧及國內學生程度與教材普遍化原則，設計六個實驗教材示例與自編解答如下：

i. 水庫截流工程問題(沈華偉，2002)

Q： 有些水庫在建造的過程中可能要面臨截流的問題，假設 1964 年桃園的石門水庫建造時，需要截斷上游的洪流，截流工程於早上 10:55 開始，當時的缺口水面寬 40m，水深 60m。當 13:50 時，缺口水面寬度改變為 34.4m，到 15:00 時，寬度改變為 31m。試問如何建立合理的數學模型進行估算，並利用上述數據推測出最接近截流工程完工時間？(事實上到了約 17:28 時，截流工程便成功。)

A： 假定截流回填的截面如下圖為等腰三角形，則回填的



【圖 3-1-1-3 截流工程截面圖】

面積 $A=\frac{40\times60}{2}$=1200 ㎡，經過 175 分鐘回填後，寬度改變為 34.4m，此時截面縮小如上圖，水深 h_1 滿足 $\frac{17.2}{h_1}=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$，所以當 h_1 為 51.6m 時，待填滿的截面積 A_1=17.2 × 51.6 = 887.52 ㎡，回填平均速率 $\frac{(1200-887.52)\times60}{175}=107.136$ ㎡/hr；同理可知，13:50 到 15:00 時回填的平均速率為 $\frac{(887.52-720.75)\times60}{70}=143$ ㎡/hr，亦可知回填速度越來越快。

假設回填速度加快的比為 $\frac{143}{107}$=1.336，則從 15:00 至 16:00，回填面積為 143 × 1.336 = 191.048 ㎡，而 16:00 至 17:00，面積為 143×1.336^2=255.24 ㎡。

因此，待填面積為 720 - (191.048 + 255.24) = 274.462 ㎡，需要約 $\frac{274.462}{143\times1.336^3}$≒ 0.8hr≒ 48 分鐘，則可求得完工時間應為 17:48 分，與實際完工時間相差約 20 分鐘，誤差 $\frac{393\min s-373\min s}{393\min s}$≒5.089%，約 5%的信賴區間。

ii. 穩定配對問題(自編，Graph Theory/Algorithm)

Q： 當我們生病的時候，我們會依照自己的喜好選擇不同的醫院進行治療，而相對的不同層級的醫院也希望收到適切的病人(例如醫學中心多接受重症病人)，以維持醫院收益、適切治療與資源合理分配的原則。試問如何建立數學模型說明醫院與病人總是能夠各取所需？

A： 假定我們居住的地方有五間層級不同的醫院，亦各有支持的客群，因

為病人數遠大於醫院數量，所以我們簡化成每五個病人與醫院的關係作為討論，唯一條件是越高層級的醫院不能接受低於該醫院層級的病症病患，而越低層級的醫院亦無法越級治療重症病人。但病人卻有自我喜好的權利選擇不同的醫院，則需要讓每個病人盡可能選擇到最喜好的醫院，兼顧雙方的意願排序，所以我們要在其中找出合理的解以獲得兩造所需。

首先，醫院以 A、B、C、D、E 表示，病人以 a、b、c、d、e 表示，各將對方在自己所需的排名列出來，假設排出來的順序如

下表所示：

A	B	C	D	E
$b_{(4)}$	$a_{(4)}$	$b_{(5)}$	$A_{(3)}$	$e_{(4)}$
$e_{(5)}$	$b_{(3)}$	$c_{(4)}$	$C_{(2)}$	$c_{(5)}$
$a_{(2)}$	$c_{(3)}$	$e_{(3)}$	$B_{(1)}$	$b_{(2)}$
$c_{(1)}$	$d_{(2)}$	$d_{(1)}$	$D_{(3)}$	$a_{(1)}$
$d_{(4)}$	$e_{(2)}$	$a_{(5)}$	$E_{(1)}$	$d_{(5)}$

a	b	c	D	e
$E_{(4)}$	$D_{(3)}$	$A_{(4)}$	$C_{(4)}$	$D_{(5)}$
$A_{(3)}$	$E_{(3)}$	$D_{(2)}$	$B_{(4)}$	$B_{(5)}$
$D_{(1)}$	$B_{(2)}$	$B_{(3)}$	$D_{(4)}$	$C_{(3)}$
$B_{(1)}$	$A_{(1)}$	$C_{(2)}$	$A_{(5)}$	$E_{(1)}$
$C_{(5)}$	$C_{(1)}$	$E_{(2)}$	$E_{(5)}$	$A_{(2)}$

【表 3-1-1-3 醫院與病人喜好排序】

括號中的數字為喜歡的順序，如 A 欄之下的 $b_{(4)}$表示 A 是 b 的第四順位人選。

當然，我們希望產生正確分配，例如(A,a)、(B,b)、(C,c)、(D,d)、(E,e)的配對是不穩定的，以(C,c) 、(D,d)兩對而言，c 比較偏好 D（與 C 相比），d 又比較偏好 C（與 D 相比），所以分配後，這兩組無法進行治療，所以這無法成為正確解。

若以醫院為主，我們先假設讓他與他最需要的病人配對（箭頭上面的數字表示步驟的順序）：$A \xrightarrow{1} b$ ， $B \xrightarrow{2} a$ ， $C \xrightarrow{3} b$

顯然，第三步驟出了衝突，A 和 C 都需要 b 病人，怎麼辦？這時候就徵詢 b 的意見，由上表得知 A 與 C 相比，b 比較喜歡 A，所以 C 只好退而求其次，選擇 c 病人。照這原則下去直到完成分配：

$A \xrightarrow{1} b \xrightarrow{7} e \xrightarrow{9} a$

$B \xrightarrow{2} a \xrightarrow{6} b \xrightarrow{14} c \xrightarrow{15} d$

$C \xrightarrow{3} b \xrightarrow{4} c \xrightarrow{11} e$

$D \xrightarrow{5} a \xrightarrow{10} c$

$E \xrightarrow{8} e \xrightarrow{12} c \xrightarrow{13} b$

經過了 15 個步驟，我們得到的配對結果是(A,a)、(B,d)、(C,e)、(D,c)、(E,b)，雖然兩方都沒有是「第一志願」，但至少這是穩定的，起碼醫院可以進行治療，五個病人選擇到較喜好的醫院，結果雖不滿意但可接受。

那如果用病人的意願來排，會得到相同的結果嗎？

$a \xrightarrow{1} E$ ， $b \xrightarrow{2} D$ ， $c \xrightarrow{3} A$

$d \xrightarrow{4} C$ ， $e \xrightarrow{5} D \xrightarrow{6} B$

結果只花了 6 個步驟就得到不一樣的分配結果：(A,c)、(B,e)、(C,d)、(D,b)、(E,a)。從這裡，我們可以知道，並非只有唯一解，但是，我們以其中一方（病人或醫院）為主，可得到合理解。

【註】：參考文獻 David & Jon (2007); Donald (1997); Knuth(1997).

Definition 2.1:

有 n 男 n 女，每人都按他對（異性）對象的喜好程度按 1 至 n 排列。安排男女結婚，使得沒有一對不是夫婦的男女對對方的喜好程度都較被安排的配偶高（不穩定）。

Theorem 2.1: (Matching in Bipartite Graphs)

使用 G=(X, △, Y) 來表示 bipartite graph G，其中 X, Y 為 vertex set V(G)，△為 edge set E(G)。在 G 的每一組配對皆為 subset M of △，且任意 M 不會同時有兩個 edge 出現。

Theorem 2.2:

必然存在穩定的完全結婚(A stable complete marriage)。即全部的男生與女生都結婚了。

一個穩定的完全結婚，若以女生為主，則女生對於得到配偶的喜愛程度，至少和她在其他 stable complete marriage 得到的配偶一樣，則稱 women-optimal 的 stable complete marriage；同樣地，我們也可以此方式獲得以 men-optimal 的 stable complete marriage。

Theorem 2.3: (Deferred Acceptance Algorithm: 遞延接受演算法)

一開始時，每個女生都被標記成 rejected。當存在 a rejected woman, do:

(1) 每位被標記 rejected 的女生都選擇，沒有 rejected 的男生中、她最喜愛的那個。

(2) 每位男生都挑出，選中他的那些女生中、他沒 reject 的之中、他最喜愛的那個。Defer decision on her，並且 rejected 其他選中他的女生。

(3) 被選到的女生，則拿掉 rejected 的標誌。

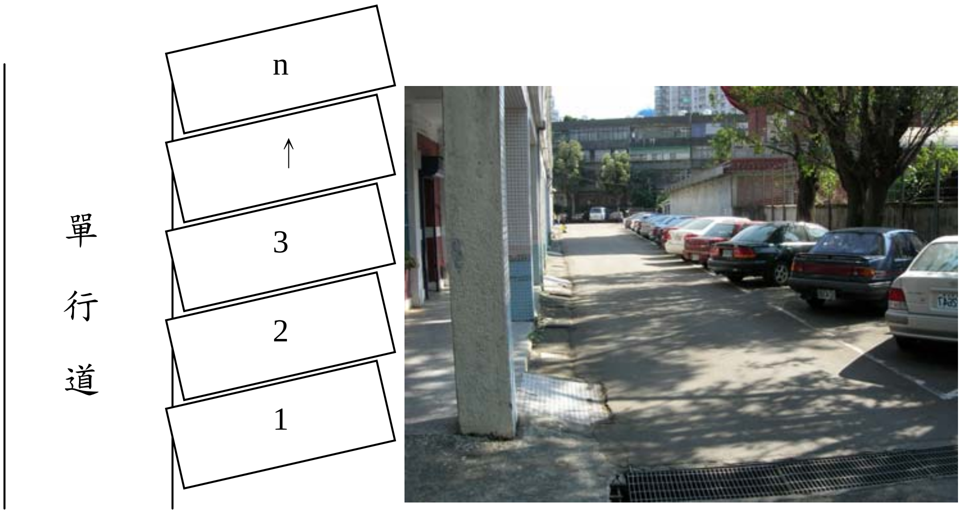
Proof of the above theorem:

在雙方任意的喜愛程度之下，我們總是可以上述的 Deferred Acceptance Algorithm 找到穩定的完全婚姻。已知當 algorithm 停止時，便沒有被標記 rejected 的女生，則可知當演算結束，便能形成完全的婚姻。以女生 A、B 兩人與男生 a、b 兩人配對為例，假定 A 與 a，且 B 與 b 配對，但是 A 喜愛 b 的程度大於 a 。如果 b 不喜愛 A 大於 B，則進行演算時，A 先選擇 b，但因為存在某些 b 更喜愛的女生，A 會被 b reject。之後 A 被 b reject 後，必然知道 b 比較喜愛 B，因此不會存在不穩定的配對，且此完全婚姻必然為穩定。

iii. 停車場設計問題(自編，Discrete Mathematics)

Q： 停車問題一直都是惱人的現代文明病，但開車進入停車場後，司機往往又想挑選自己喜好且方便的車位，常造成繞行油耗與空間使用浪費的問題。試問如何建立數學模型來探討，利用固定面積的場地，達到最具有經濟環保效益的停車場設計原則？

A： 我們從最簡單的單行道單側停車場(如下圖)著手研究。



【圖 3-1-1-4 單行道停車場示意圖】

假設有 n 個司機，駛入單行道中準備停車，單行道內有 n 個呈線狀的停車位：

①每個司機有其偏好的位置，則共有 n^n 種偏好情形。

②當第 i 個司機進來：

a. 司機可停在偏好位置。

b. 當偏好位置已有停車，且後續位置仍有空位時，則停在最接近偏好位置的後續位置。

則稱司機 i 的偏好獲得滿意。反之，則無法獲得滿意。

『符號說明』 n：司機數，停車位數。
F_k：第一個司機偏好第 k 個位置的滿意數。
S_n：所有偏好滿意數。
m_k：偏好第 k 個位置的司機人數共有 m 個。
P_n：滿意比率。

在討論單行道單側有 1~ n 個停車位的情形之下，從一個停車位開始討論起，最後並加以推導公式與推測其正確性。

n = 1，一個停車位只有一種方法。S_1=1，滿意比率 P_1 為 100%。

n = 2，二個停車位所有的偏好情形為(1,1)、(1,2)、(2,1)、(2,2)，滿意數 S_2=3，不滿意數為 1 種，滿意比率 P_2 為 75%。

n = 3，三個停車位的偏好情形共 27 種，可滿意數 $S_3 = C_3^3 + C_2^3 \cdot 2 + C_1^3(C_2^2 + C_1^2)$=16

不滿意數共 11 種，滿意比率 P_3 為 59.26%。

n = 4，四個停車位所有的偏好情形共 256 種，計算後發現滿意數

$S_4 = C_4^4 + C_3^4 \cdot C_1^3 + C_2^4(C_2^2 \cdot C_1^2 + C_1^2 \cdot C_1^2 + C_1^2) + C_1^4(C_3^3 + C_2^3 \cdot C_1^2 + C_1^3(C_1^2 + C_2^2))$ =125，

不滿意數共 131 種，滿意比率 P_4 為 48.83%。

n = 5，五個停車位所有的偏好情形共 3125 種，發現滿意數

$S_5 = C_5^5 + C_4^5 \cdot C_1^4 + C_3^5(C_2^2 \cdot C_1^3 + C_1^2 \cdot C_1^3) +$

$C_2^5((C_3^3 \cdot C_1^2 + C_2^3(C_1^3 + C_1^2) + C_1^3(C_2^3 \cdot C_1^2 + C_2^2 \cdot C_1^2)) +$

$C_1^5(C_1^4(C_3^3 + C_2^3 \cdot C_1^2 + C_1^3(C_2^2 + C_1^2))$ =1296，不滿意數共 1829 種，滿意比率 P_5 為 41.47%。

n = 6，我們繼續討論六個停車位的方法數，同上推論，發現滿意數 S_6=16,807，不滿意數共 29,849 種，滿意比率 P_6 為 36.02%。

n = 7，可得 S_7 =262,144。不滿意數為 561,399 種，滿意比率 P_7 為 31.83%。

我們將單行道單側一到八個停車位數據整理如下：

	停車位數量 n	滿意數 S_n	不滿意數	總偏好數	滿意比率 P_n
單側停車場	1	1	0	1	100.00%
	2	3	1	4	75.00%
	3	16	11	27	59.26%
	4	125	131	256	48.83%
	5	1,296	1,829	3,125	41.47%
	6	16,807	29,849	46,656	36.02%
	7	262,144	561,399	823,543	31.83%
	8	4,782,969	11,994,247	16,777,216	28.51%

【表 3-1-1-4 單行道單側八個停車位數據】

利用上表我們有二項發現：

① S_n 的公式可能為 $(n+1)^{n-1}$ 。

②滿意時，對任意的 k ≤ n，已知 n – k ≥ m_k -1，移項後可得 k + m_k ≤ n + 1。

a. 若獲得滿意，對於任意的 k ≤ n，k + m_k ≤ n +1 均成立。

b. 上述為滿意的必要條件，但不是充分條件。

c. 提供下列充分條件:當 $m_1 > 0$，且 $k + m_k < n + 1$，對任意 $k \le n$ 均成立。

當 $m_1 > 0$，有唯一的 k 使得 $k + m_k = n + 1$，其餘的任意 $j \ne k$ 可滿足

$j + m_j < n + 1$。

另討論單行道雙側共一到八個停車位數據如下：

(在設計上必須考量固定的停車場面積，計算方法則類似單側)

	停車位數量 n	滿意數 S_n	不滿意數	總偏好數	滿意比率 P_n	備註
雙側停車場	2	1	0	1	100.00%	左一右二
	3	4	4	8	50.00%	左一右二
	4	11	5	16	68.75%	左二右二
	4	27	54	81	33.33%	左一右三
	5	81	162	243	33.33%	左二右三
	6	378	351	729	51.85%	左三右三
	6	900	3,196	4,096	21.97%	左二右四
	7	4,292	12,092	16,384	26.20%	左三右四
	7	17,312	60,813	78,125	22.16%	左二右五
	8	33,621	31,915	65,536	51.30%	左四右四
	8	102,801	287,824	390,625	26.32%	左三右五

【表 3-1-1-5 單行道雙側共八個停車位數據】

利用表 3-1-1-4 與表 3-1-1-5 我們有二項發現：

①雙側設計情況下，當獲得滿意時，對任意的 $k \le n$，已知單側 $n - k \ge m_k - 1$，對於任意 n 值，雙側設計的任一邊最多車位，至少小於單側一個車位。則可知 $(n-1) - k \ge m_k - 1$，$k + m_k \le n$ 成立。

a. 上述為滿意的必要條件，但不是充分條件。

b. 提供下列充分條件:當 $m_1 > 0$，且 $k + m_k < n$，對任意 $k \le n$ 均成立。

當 $m_1 > 0$，有唯一 k 使得 $k + m_k = n$，其餘任意 $j \ne k$ 可滿足 $j + m_j < n$。

②發現 n 值越大

a. n = 2k 時，n = k + k。即偶數個車位均分為雙側設計可獲得最大滿意比率。

b. n = 2k +1 時，n = 2k +1。即奇數個車位為單側設計可獲得最大滿意比率。

c. n 值越大，設計偶數個停車位雙側均分，可獲得最大滿意比率。

結論：在固定面積下，採用單行道雙側偶數均分設計，可以獲得最大的經濟效益且兼顧環保低油耗。

【註】：參考文獻 Richard (2008); Robin (2008).

Definition 3.1: (Parking Functions)

定義 f 為單行道上的車輛{1,…, n}映射至停車位{0,…, $n-1$}的函數。車輛依序進入停車，則第i 輛車為第$f(i)$位置。假定先到的車輛已經停走了第i輛車想停的位置，則第i 輛車找下一個空位停或是最後被迫放棄無法停車。假設沒有任何車輛被迫放棄停車，則可稱f 為parking function。

以數學簡述的方式，即任意車輛C_i偏好停車位a_i：當a_i被其他車輛停走，則C_i往下找可停的車位。假設所有車輛皆有車位可停，我們稱$(a_1, a_2, ..., a_n)$ 為n個車位的parking function。

我們使得$\alpha = (a_1, a_2, ..., a_n) \in P^n$，且$b_1 \le b_2 \le ... \le b_n$為$\alpha$的遞增重排，則$\alpha$為parking function if and only if $b_i \le i$。則可推論parking function的每一組排列亦為parking function。

Theorem 3.1: (Parking Function Formula)

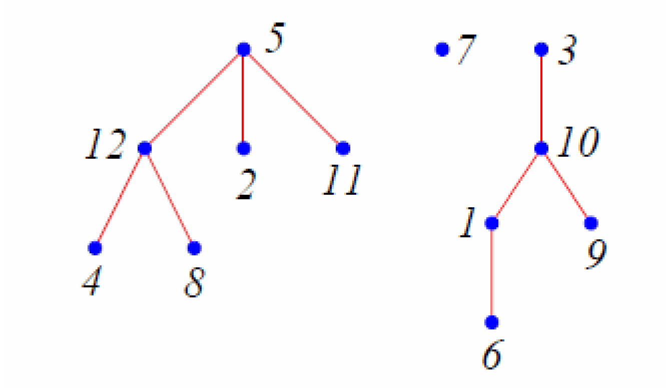
The number of parking functions of order n is $(n+1)^{n-1}$.

Proof

我們增加一個額外的停車位，並將所有停車位排列為圓形，對於所有n輛車而言，這個第n+1個車位也是一個可偏好的車位。

當所有的車都停好，必然會有一個空位，則α為parking function if and only if 這個空位為第n+1個車位。假設 $\alpha=(a_1, a_2, ..., a_n)$ 導致 C_i 停在第 p_i 個停車位，則 $(a_1+j, a_2+j, ..., a_n+j)$(mod n+1)將會使得 C_i 停在第 a_1+j 個車位。因此，準確地說 $(a_1+j, a_2+j, ..., a_n+j)$(mod n＋1) 也是parking function，則 $f(n)=\dfrac{(n+1)^n}{n+1}=(n+1)^{n-1}$。(Cayley's number)

Let F be a rooted forest on the vertex set {1, 2,…, n}, the number of such forests is $(n+1)^{n-1}$. (Sylvester-Borchardt-Cayley)



iv. **賽程安排問題(自編，Graph Theory)**

Q： 2010 年舉辦的世足盃比賽，預賽採用積分制，也就是參賽的所有隊伍，任意兩隊都必須要有賽事產生。但現在面臨的問題就是賽程安排的公平性，對於每個隊伍而言，每兩場賽事間均等的休息間隔是必須的。試問如何建立良好的數學模型，獲得完美的賽程安排？

A： 預賽多以四個與五個隊伍參賽，我們先以四到七隊找出較合理的完美賽程安排，分別作為奇數隊與偶數隊的基本模型並討論。(以 A.B.C.D.等表示參賽隊伍)當我們嘗試各種排法後，發現四隊與六隊的完美賽程中，有相同規律之排法與發現如下：

①完美賽程不一定能夠兼顧到真正的公平均等，當 n=2m 時，可能為 m ≥ 間隔 ≥ m-2。

②四隊與六隊的完美賽程整理如下左右，可看出基本規則：

M_1	{(A,B), (C,D)}	{(A,B), (C,F), (D,E)}
場次	1 2	1 2 3
M_2	{(A,C), (D,B)}	{(A,C), (D,B), (E,F)}
場次	3 4	4 5 6
M_3	{(A,D), (B,C)}	{(A,D), (E,C), (F,B)}
場次	5 6	7 8 9
M_4		{(A,E), (F,D), (B,C)}
場次		10 11 12
M_5		{(A,F), (B,E), (C,D)}
場次		13 14 15

偶數隊完美賽程安排可能為以下假設：(將 A,B,C...以 0,1,2,3...等代表)

M_1= { (0,1) , (2, 2m-1) , (3, 2m-2), (4, 2m-3),...,(m -1, m+2), (m, m+1)}
M_2= { (0,2) , (3,1) , (4, 2m-1), (5, 2m-2),..., (m, m+3) , (m+1, m+2)}
M_3= { (0,3) , (4,2) , (5,1) , (6, 2m-1),..., (m+1, m+4),(m+2, m+3)}
↓
M_{2m-2}= {(0, 2m-2),(2m-1, 2m-3),(1, 2m-4),(2, 2m-5),..., (m-3, m), (m-2, m-1)}
M_{2m-1}= {(0, 2m-1), (1, 2m-2) ,(2, 2m-3),(3, 2m-4),..., (m-2, m+1),(m-1, m)}

我們可以觀察發現②中完美賽程 $M_1 \sim M_{2m-1}$ 具有相同結構，只需考慮相鄰的完美賽程中的關係如下：

M_1={	(0, 1) ,	(2, 2m-1) ,	(3, 2m-2),	(4, 2m-3),...,		(m-1, m+2),	(m, m+1)}
場次	1	2	3	4	...	m-1	m
M_2={	(0, 2) ,	(3, 1)	, (4, 2m-1),	(5, 2m-2),...,		(m, m+3),	(m+1, m+2)}
場次	m+1	m+2	m+3	m+4	...	2m-1	2m

即任意第 m+i 場比賽(i=2,3,...,m-1)，正好是第(i-1)與第(i+1)場比賽中的球隊，此兩隊在第(i+2)~(m+i-1)場比賽中並未出現，皆符合①中 m≥間隔≥m-2 的假設。另我們利用上述方法檢視八隊完美賽程，發現符合假設如下：

	A	B	C	D	E	F	G	H	兩場比賽間相隔場次					
A		1	5	9	13	17	21	25	3	3	3	3	3	3
B	1		20	6	23	11	26	16	4	4	4	3	2	2
C	5	20		24	10	27	15	2	2	4	4	4	3	2
D	9	6	24		28	14	3	19	2	2	4	4	4	3
E	13	23	10	28		4	18	7	2	2	2	4	4	4
F	17	11	27	14	4		8	22	3	2	2	2	4	4
G	21	26	15	3	18	8		12	4	3	2	2	2	4
H	25	16	2	19	7	22	12		4	4	3	2	2	2

【表 3-1-1-6 八個隊伍參賽的完美賽程】

接著我們以相同的方式討論 n = 2m +1 時，奇數隊的完美賽程，可發現五隊與七隊的相同規律排法與發現如下：

當 n = 2m +1 時，可能為 m≥間隔≥m-1。

另奇數隊完美賽程安排可能為以下假設：(將 A,B,C...以 0,1,2,3...等數字代表)

M_1={ (0, 1) , (2, 2m) , (3, 2m-1),(4, 2m-2),...,(m, m+2),(m+1, 0)}

M_2={ (1, 2) , (2m, 3) , (2m-1, 4),(2m-2, 5),...,(m+3, m),(m+2, m+1)}

M_3={ (0, 2) , (3, 1) , (4, 2m) ,(5, 2m-1),...,(m+1, m+3),(m+2, 0)}

M_4={ (2, 3) , (1, 4) , (2m, 5) ,(2m-1, 6),...,(m+4, m+1),(m+3, m+2)}

↓

M_{2m-1}={ (0, m), (m+1, m-1),(m+2, m-2),(m+3, m-3),..., (2m-1, 1) , (2m, 0)}

M_{2m}={ (m, m+1),(m-1, m+2),(m-2, m+3),(m-3, m+4),...,(2m+2, 2m-1),(1, 2m)}

考慮相鄰的完美賽程中的關係如下：

M_1={ (0, 1) , (2, 2m) , (3, 2m-1), (4, 2m-2),..., (m, m+2), (m+1, 0)}

場次 1 2 3 4 ... m m+1

M_2={ (1, 2) , (2m, 3) , (2m-1, 4), (2m-2, 5),..., (m+3, m), (m+2, m+1)}

場次 m+2 m+3 m+4 m+5 ... 2m 2m+1

即第 2m + i 場比賽(i = 3,4,...,m +1)，正好是第(m + i +1)與第(m + i)場比賽中的球隊，此兩隊在第(m + i +2)~(2m + I -1)場比賽中並未出現，皆符合

m ≥ 間隔 ≥ m-1 的假設。

我們利用上述方法檢視九隊完美賽程，發現符合假設如下：

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	兩場比賽間相隔場次						
A		1	10	19	28	5	14	23	32	3	4	3	4	3	4	3
B	1		6	11	16	21	26	31	36	4	4	4	4	4	4	4
C	10	6		15	20	25	30	35	2	3	3	4	4	4	4	4
D	19	11	15		24	29	34	3	7	3	3	3	3	4	4	4
E	28	16	20	24		33	4	8	12	3	3	3	3	3	3	4
F	5	21	25	29	33		9	13	17	3	3	3	3	3	3	3
G	14	26	30	34	4	9		18	22	4	4	3	3	3	3	3
H	23	31	35	3	8	13	18		27	4	4	4	4	3	3	3
I	32	36	2	7	12	17	22	27		4	4	4	4	4	4	3

【表 3-1-1-7 九個隊伍參賽的完美賽程】

【註】：參考文獻 Gross (2006); Wallis (2000).

Definition 4.1: (完全圖)

定義圖G(V , E)，其中頂點集V = { 0 ,1 ,2 ,..., (n - 1) } , 邊集 E ={ (i , j) | i, j∈V } , 稱此圖G(V , E)是完全圖 K_n 。

Theorem 4.1:

當n = 2m時, 比賽圖 K_{2m} 可表示為(2m - 1) 不重複邊的完美配對的圖。

Proof

K_{2m} 的頂點為:0 ,1 ,2 , ..., (2m - 1) 。將0放在正(2m - 1) 邊形的中心, 而將1 ,2 , ⋯, (2m - 1)順次放在正(2m - 1) 邊形的頂點上, 則每條徑向邊(0 ,j) 與垂直於它的各邊一起構成一個完美配對。共有(2m - 1) 個這樣的完美配對 $M_1, M_2, \ldots, M_{2m-1}$ ，其邊是互不相重複的, 並且 K_{2m} 恰好是它們的圖。

Theorem 4.2:

當n = 2m + 1時, 比賽圖 K_{2m+1} 可表示m個不重複邊的Hamilton圈的圖。

Proof

K_{2m+1} 的頂點為:0, 1, 2 ,…, 2m。將0 放在單位圓的圓心, 而將1, 2,..., 2m 順次等距地放在圓周上, 則

C_1 = (0, 1, 2, 2m, 3, 2m - 1 , 4 , 2m - 2 , ..., m , m + 2 , m + 1 , 0)就是 K_{2m+1} 的一個Hamilton圈。考慮將 C_1 繞頂點0 旋轉(m - 1) 次, 可以得到其他的Hamilton圈, 共有m個Hamilton圈: C_1, C_2 ,..., C_m ,其邊是互不相重複的, 並且 K_{2m+1} 恰好是它們的圖。

v. 寵物狗出租問題(自編,Statistics)

Q: 目前新興行業中提供寵物狗出租服務,採會員制,會員每個月最多可以租賃兩次,每次最多可以租賃三種小狗,租期每次為一個月,當然顧客必須在歸還租賃的小狗後,才能有下一次的租賃行為。經營者提供七個品種的寵物狗,而每次同一品種只能租賃一隻,以維護各品種的平均租賃概念。

下表為 96 年 10000 名會員租賃各品種的機率:

	品種 1	品種 2	品種 3	品種 4	品種 5	品種 6	品種 7
會員租賃第 j 品種的機率	0.2	0.1	0.05	0.025	0.01	0.3	0.04

【表 3-1-1-8 96 年會員租賃各品種機率】

已知 60%會員每月租賃兩次,40%會員每月租賃一次。試問如何建立數學模型,計算出經營者需提供各品種的數量而獲得顧客的最大滿意度。

A: 假定這些寵物狗都受到顧客良好的照顧,暫不考慮死亡傷害等因素,

且這些寵物狗都經過基本教養訓練。另可知每個月每隻寵物狗可重複出租次數為 60% × 2 + 40% × 1 = 1.6 次。

『符號說明』　n：會員數。
p_j：租賃第 j 品種的機率。
X_{ij}：第 i 個會員對第 j 品種的租賃狀況。
Y_j：租賃第 j 品種的會員數。
m_j：第 j 品種需要購入的數量。
C_{ij}：第 i 個會員租賃第 j 品種的滿意度。

我們已知每隻寵物狗是否被租賃是隨機的，而且只會發生租賃或是不被租賃兩種情形，則 $X_{ij} = \begin{cases} 1, \text{第 i 個會員租到第 j 品種；} \\ 0, \text{第 i 個會員未租到第 j 品種。} \end{cases}$

則可將隨機變量 X_{ij} 寫作 $P\{X_{ij}=1\}=p_j$；$P\{X_{ij}=0\}=1-p_j$，(j=1,2,3,4,5,6,7。其值如表 3-1-1-12)。

另隨機變量 $Y_j=\sum_{i=1}^{n} X_{ij}$，表示 n 個會員租賃第 j 品種的總數，而 X_{ij} 的兩點分佈與互斥獨立條件，便可讓 Y_j 使用 Laplace 中央極限定理得 $Z_\alpha=\dfrac{Y_j-np_j}{\sqrt{np_j(1-p_j)}}$，當 n 很大時可獲得常態分佈 Z。故我們可以計算出在信賴水準 1-α 下，

$P\left\{\dfrac{Y_j-np_j}{\sqrt{np_j(1-p_j)}}\le Z_\alpha\right\}=1-\alpha$，則其上限 $Y_j=np_j+Z_\alpha\sqrt{np_j(1-p_j)}$。當保證 90% 的會員數可在一個月內租賃到第 j 品種，將 n = 10000，Z_α = 1.65，並依序代入表 3-1-1-12 的機率，可獲得 Y_1 = 2021，Y_2 = 1016，Y_3 = 511，Y_4 = 258，Y_5 = 105，Y_6 = 3032，Y_7 = 404。另已知 $m_j=\dfrac{Y_j}{1.6}\times 90\%$，依序代入 $Y_1 \sim Y_7$，則可得下表：

購入數量 / 1-α 信賴水準	品種 1 Y_1	品種 2 Y_2	品種 3 Y_3	品種 4 Y_4	品種 5 Y_5	品種 6 Y_6	品種 7 Y_7
95%	632	318	160	81	33	948	158
99%	634	320	161	82	34	951	159

【表 3-1-1-9 各品種需購入數量表】

由上表便可計算出當一個月內要保證 9 成以上會員皆可租賃所需時，所需購入的各品種數量。

【註】：參考文獻 Casella and Berger (2002)

Theorem 5.1: (Central Limit Theorem: 中央極限定理)

有時也稱為常態收斂定理，主要是指從平均數為 μ，標準差 σ 為的母體中，隨機地抽取大小為 n 的獨立樣本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$。當樣本數 n 很大時，其樣本平均 $\overline{X_n} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots X_n}{n}$ 減掉平均數 μ 再除以標準差 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$，將會趨近平均數為0，標準差為1的常態分佈(normal distribution)。或者是說當樣本數 n 很大時，樣本和 $S_n = X_1 + X_2 + \ldots X_n$ 減掉平均數 $n\mu$ 再除以標準差 $\sqrt{n}\sigma$，將會趨近平均數為0，標準差為1的常態分佈，即

$\frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} N(0,1)$，或 $\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{n\to\infty} N(0,1)$，$S_n$ 所以的圖形看起來將會很像常態分佈的鐘形。

vi. 警察維安巡邏路線問題(自編，Graph Theory)

Q： 97 年 11 月 4 日大陸海協會陳雲林會長將於台灣進行連續 4 天的訪問活動，而選定下榻的飯店為圓山飯店；為避免維安相關問題產生，必須規劃出飯店附近所有路線與地點，其最佳化的警察巡邏工作。試問基於以下假設情況，如何建立數學模型，規劃一天 24 小時內，最少的巡邏組數、最佳可行路線？

①指揮所設於圓山飯店內，不同組別巡邏不同路線，每組員警 10 名，每次派出一名巡邏，完畢後由下一員警接續相同路線巡邏，24 小時組內所有人皆須出勤，即每人出勤時間須不大於 2.4 小時。

②已知定理：當有 i 組同時巡邏，則相對於 j 組時，當 i≥j，則總路程 $d_i \geq d_j$ 。

③針對各組路線進行差異度的定義，即要求各組總路程 d_i 盡可能相近，則差異度 S ＝ $\dfrac{\max\{d_j\}-\max\{d_i\}}{\bar{d}}$ 越小越好。

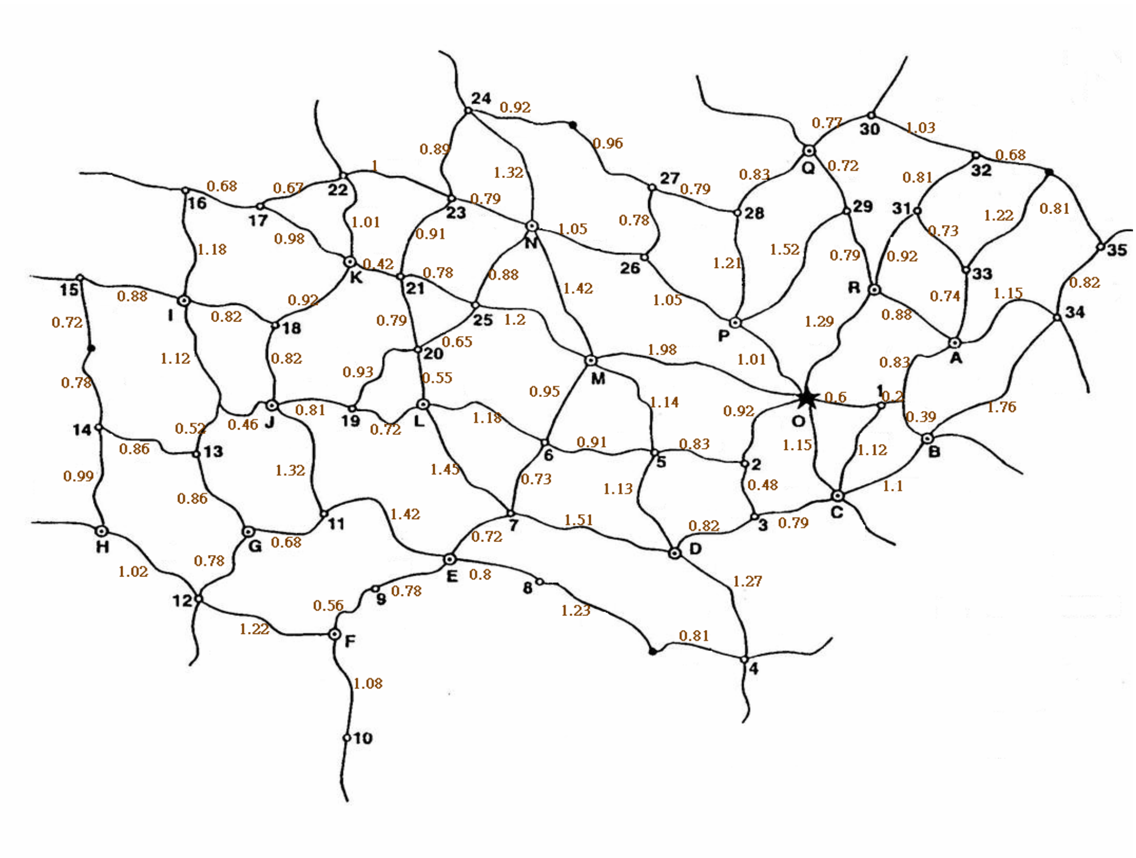
④員警巡邏平均速率為 8.2km/hr，且不考慮各巡邏點的停留時間。

⑤可行路線需通過所有巡邏點，但並不一定要把圖 3-1-1-9 內所有道路皆走過。

⑥已知利用最小生成樹可得一組總路程為 42.27km。

⑦圓山飯店附近所有巡邏點與道路如下圖：

【圖 3-1-1-5 圓山大飯店空照圖】



【圖 3-1-1-6 巡邏點、路線、路程圖】

A： 已知一組的最佳化路線總路程為 42.27km，利用定理②，可知任意 n ≥ 1 時 8.2 × 2.4 × n ≥ 42.27，則 n ≥ 2.2，可得最少組數至少為三組。而平均速率為 8.2km/hr，可知單一路線至多為 19.68km，因此我們先以三組的條件來規劃可行路線，找出 S 值最小的可行路線如下表：

組別	路線	路程	總路程
一	O－C－B－34－35－32－30－Q－28－27－26－P－29－R－31－33－A－1－O	17.9	
二	O－M－N－24－23－21－K－22－17－16－I－15－I－18－J－19－L－20－25－M－O	19.77	58.72 S=0.16
三	O－2－5－6－7－E－11－G－13－14－H－12－F－10－F－9－E－8－4－D－3－2－O	21.05	

【表 3-1-1-10 三組巡邏之可行路線】

利用上表可知在三組時無法獲得最佳解。我們利用總路程較短、且時間較短的表 3-1-1-15 其技巧如下：

①依照組數將整個地圖分為數個區域，原則上雖然點與點之間的距離不等，但各區域的點數量應盡量相等。

②每區域的路線設計以繞行，且點與線盡量不重複的原則。

③當遭遇表 3-1-1-15 的組別二中，**23－21－K－22－17** 先後順序的選擇，則依照最短路程原則調整。

可獲得在四組情形下，S 值最小的兩種可行路線如下：

組別	路線	路程	總路程
一	**O－1－B－34－35－32－30－Q－28－Q－29－R－31－33－A－1－O**	**14.25**	**67.84 S=0.307**
二	**O－P－26－27－24－N－23－22－17－16－17－K－21－25－M－O**	**15.21**	
三	**O－2－5－6－L－20－19－J－18－I－15－14－H－14－13－J－19－L－6－5－2－O**	**19.46**	
四	**O－C－3－D－4－8－E－9－F－10－F－12－G－11－E－7－D－3－2－O**	**18.92**	

【表 3-1-1-11 四組巡邏之可行路線】

以上兩表皆符合最少路程為可行路線，並可找出表 3-1-1-16 為四組最短時間，即每人不多於 2.37 小時便可完成巡邏工作。

另外，若是題目改為派遣至定點的方式，我們最長的最佳路線，為派遣至 H 點路線：**O－2－3－8－7－E－11－Q－12－H**，路線長為 7.75km，則同時派遣任意組至任意定點，0.95 小時為總花費時間。

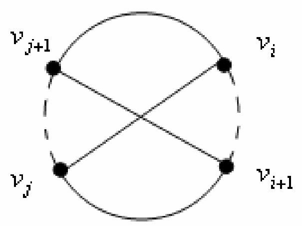
【註】：參考文獻 Gross (2006); Wallis (2000).

我們針對維安巡邏路線問題，可以先簡化成送貨服務問題(Salesman

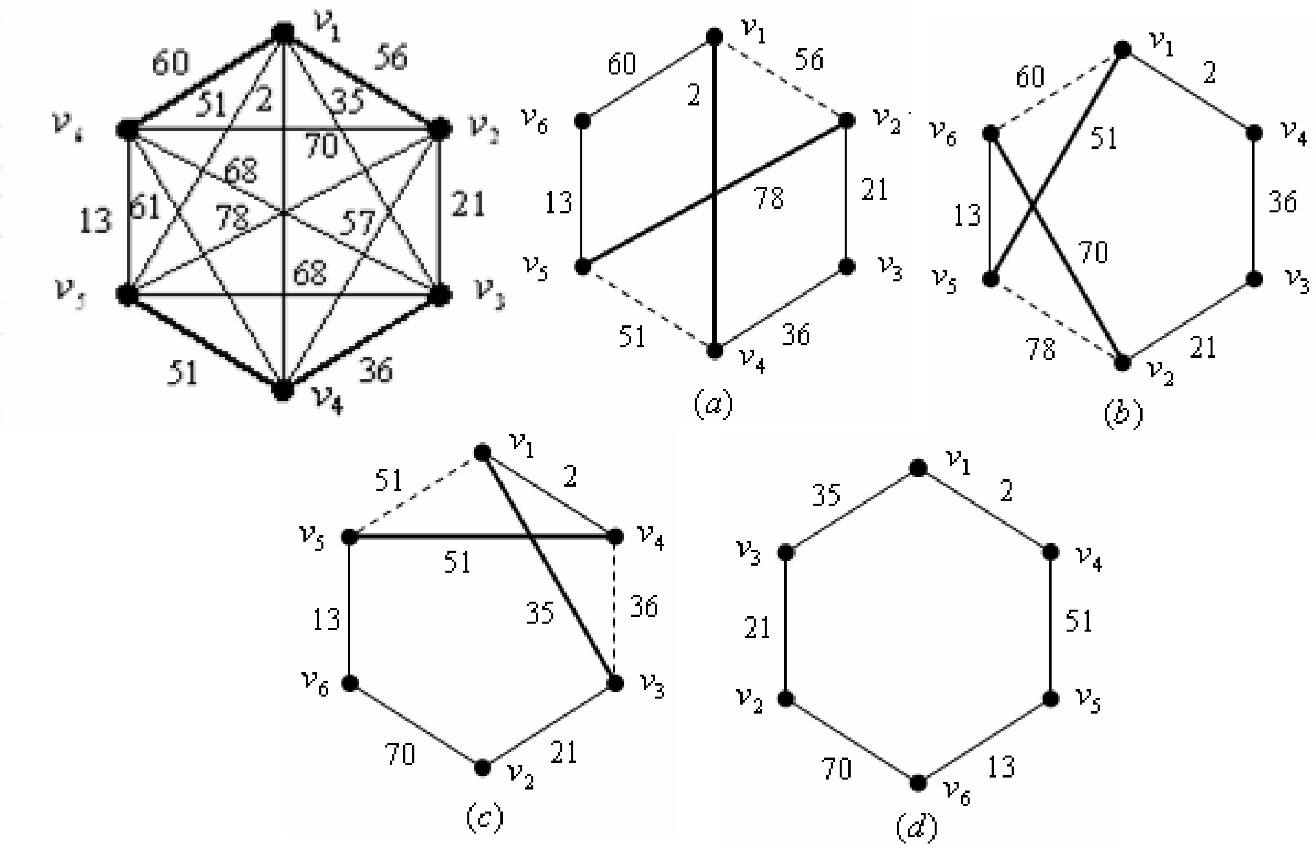
Problem)如下：一個送貨員需要把貨物送至城市裡各個送貨點，如何規劃他的最佳化路線，使他能夠以最短的距離恰好繞行過每一個送貨點一次呢？

這樣的題目也是一個有趣的 Graph Theory 問題，但仍屬於 NP-Hard，不存在多項式時間算式，似乎沒有一個求解的最有效算法，但我們還是可利用相關理論，提供一個想法如下：

假設找到一個原始的 Hamilton 圈 $C = v_1 v_2 ... v_n v_1$，則對於所有符合 $1 < i+1 < j < v$ 的 i 和 j，總可得到一個新的 H 圖：$C_{ij} = v_1 v_2 ... v_i v_j v_{j+1} ... v_{i+1} v_{j+1} v_{j+2} ... v_n v_1$，它是由 C 刪去 $v_i v_{i+1}$ 和 $v_j v_{j+1}$，以及加入邊 $v_i v_j$ 和 $v_{i+1} v_{j+1}$ 而得到，如右圖所示。



For some i、j , $w(v_i v_j) + w(v_{i+1} v_{j+1}) < w(v_i v_{i+1}) + w(v_j v_{j+1})$，則 C_{ij} 為 C 的一個修正 H 圈，經過不斷的修正後，當最後的 H 圈無法被修正，則為最佳解，可參考以下示例：



可知較佳解為$C_3 = v_1v_4v_5v_6v_2v_3v_1$，$W(C_3) = 192$。另上述作法可利用最小生成樹得到最佳H圈的下界，故最優的H圈值應滿足$178 \le w(C) \le 192$。

3-1-2訪談題目

Lesh模型發展序列之項目	符合項目之問題	問題編號
暖身活動	喜歡發掘課外數學問題的程度	1
	具有每週閱讀課外數學讀物的習慣	2
	學校提供數學讀物是否滿足你的需求	3
	使用資訊科技媒材的習慣	4
	學校提供之資訊科技是否足夠使用	5
建模活動	在解題初期有無團隊分工	6
	自我評估在團隊中的定位	7
	問題是否為真實生活的需求	8
	初期是否需要引導者引領思考與分工	9
模型探索活動	了解該模型所需相關數學工具與知識	10
	能設定模型所需條件、變數等	11
	綜合數學工具與條件等建立解題模型	12
模型適用活動	能否發掘已建立之模型之優缺點	13
	將發現的問題或缺失加以修正	14
	該模型是否能處理同質性進階問題	15
討論結構的相似性	已知道三種以上不同數學模型	16
	能比較不同模型間的差異性	17
	能發掘使用相同模型的相關問題	18
	能簡單歸納出適用各類問題的模型	19
發表與討論	說明團隊合作的方式	20

	說明解題歷程	21
	分享自己的想法並討論	22
	接納他人的意見並加以討論	23
	在解題過程中能與組員比較不同的思維與解題方式，並選擇出最佳的方式	24
反思與詢問活動	反思自己在解題歷程中的能力優缺點	25
	能注意到自己與組員們的情緒、感受、反應、需求等	26
	在解題歷程後更勇於自我挑戰	27
進一步活動	引導者是否適時介入引導與課堂概念連結	28
	自己是否能連結傳統課堂知識與解題過程的概念	29
	能否發展出其他生活中可藉由數學建模解決的問題	30
「How To 」工具間的連結/其他高品質的資源和參考資料	在過程中是否使用課外讀物與知識	31
	在過程中是否使用資訊科技媒材	32
	所使用的資訊科技本身是否易於呈現並有助於模型建立	33

【表3-1-2-1 行動研究訪談題目】

3-2 研究對象

研究對象為私立○○高中的數學老師大雄(匿名)，及其擔任導師之班級學生共43名，並依據學生數理科成績平均分配為6組，進行合作解題，於教學實驗結束後進行訪談。受訪學生的選擇則考量其意願與表達能力，採用立意樣本計20名。

3-3 行動研究歷程

行動研究歷程包含教學實驗與訪談兩部分，為期七週：

3-3-1 研究基礎

在教師教學的部分主要紀錄歷程的轉變與成長；而在學生學習的部分則根據 Lesh 等人模型發展序列流程，建立下列研究歷程之基礎，並發展訪談題目進行研究：

1. 暖身活動：為「建模活動」之前的活動，觀察學校及教師提供學生生活中的相關數學資訊，如書報雜誌等幫助學生從事數學閱讀的課外活動。
2. 建模活動：研究者運用建模活動，引發建模活動中的基礎概念，並鼓勵學生在小組中分工合作，學生亦藉由建模活動感受建模活動的主要概念。
3. 模型探索活動：研究學生在進入模型建立初階，如何在活動中運用已具備的數學能力、工具軟體等進行模型建立之過程，並能漸漸地表徵活動中的主要架構與概念。學生應具備高於數學解題相關的概念系統思維，而且能去思考並發展出能運用在模式適用活動中的之基本模型。
4. 模型適用活動：主要是研究學生如何運用與修正在模型探索活動中，所發展出的初階模型來處理更困難的問題。
5. 討論結構的相似性：其研究重點如下
   i. 學生如何觀察與討論各個問題間的概念系統結構相似性和相異性。
   ii. 學生在進行討論的過程中，如何將學生已具備的概念系統思維作為基礎，進而超越這些舊經驗，產出概念清楚的工具物件。
6. 發表與討論：本活動紀錄學生如何說明他們的分工及工作內容，以及模型修正的過程、接納並比較他人不同思維方式的例子與工具物件的發展，了解數學建模活動中，解題的方式可以不只一種。
7. 反思與詢問活動：學生思考他們在模式引出活動或模式適用活動時的經驗，是否能達到有效能的分工合作，並觀察學生對於建模活動反思歷程中，是否能達到自我表達、自我挑戰、自我評估和控制他們自身的情緒、感覺、態度、偏好與主觀意識。

8. 進一步活動：當學生在建模活動中發展出概念，教師必須適時介入幫助他們連結所形成的概念與傳統課堂活動的內容。
9. 「How To 」工具間的連結/其他高品質的資源和參考資料：學生如何藉由上網蒐集相關資料，利用電腦工具或數學軟體，及一些課堂外的基礎或補充資料。

3-3-2 發展過程

本章節依據上述理論基礎，擬將實驗教學過程分為前中後三期記錄如下，最後並呈現訪談相關數據：

1. 前期(第一～二週)：

於課程實施前，得知大雄老師認為實際教學難以符合理想化的模型發展序列流程，在異質分組後，仍暫時先以傳統授課導向方式進行。

在實驗教材的選用上以簡單的為主，以「水庫截流工程問題」與「寵物出租問題」二題進行課程，並同時將實驗教材中的文字敘述、題意與假設方式稍作修正，符合原班級學生的程度，以避免學習習慣上過度的差異。

此時在問題提問的部分較為空泛，或與主題無關，在數學邏輯思考的引導仍為薄弱，多類似傳統解題導向。

結束後研究者與大雄老師進行意見交換，並經由隨機訪談學生的方式，得知學生的學習狀況以及對於建模課程的想法，藉此修正為中期的教學模式。

2. 中期(第三～五週)：

在大雄老師逐漸認同數學建模課程後，即減少講授時間，將課程時間多使用在學生討論與思考上，並鼓勵各組學生發表其想法與解題模型。

此時選用的教材為「穩定配對問題」與「賽程安排問題」，屬中等程度的建模問題，每次 50 分鐘的研究型課程中無法解決單一問題，即使學生使用課餘時間思考，每個問題仍必須使用 2-3 節課，作為完整的討論與分享。

此階段的大雄老師在問題的提問上較能掌握關鍵點的數學表達方式，並提供適當的變因與題意假設，促使學生逐步的思考與建立半開放的解題模型。

結束後可以發現，大雄老師與學生漸漸掌握到建模課程的模式，教師與研究者本身亦能在問題討論的過程中，發現學生的想法與其數學邏輯思維等。而部分學生在接受中期的建模課程同時，亦對於前期一般層次的問題，發展出延伸題型與多種解題方法。

3. 後期(第六～七週)：

在已建立的建模課程模式下，大雄老師選用較為困難的實驗教材，以「停車場設計問題」與「警察維安巡邏問題」為主，逐漸地增加題目解題變因(即減少假設) ，此時每個題目仍只需使用 2-3 節課的時間。

在問題的引導與提問上，以啟發性的問題引導為主，並重複檢驗學生的發表與創造力，增強學生對於開放性的數學模型建立之能力，並鼓勵學生提出相關模型的數學問題與延伸。

課程結束後可以發現學生較樂於發表與分享，並能勇於解決開放性的數學問題；而大雄老師便建立一定程度的建模教學模式，對課程教材熟悉，使其專業能力得以展現，加上多以學生為主的教學模式，重視學生的邏輯思維與解決實際問題能力，尊重並接納學生意見，彼此相互成長，更提升教師對於學生的價值。

4. 訪談

最後於第七週實施立意樣本訪談，以表 3-1-2-1 為主要工具，在訪談過程中，經研究者闡述題意，受訪學生必須要能瞭解訪談題目並清楚回應，方能確認是否達到該指標，以作為實驗教學後，學生相關建模能力的數據統計。

立意樣本共計 20 名，其中 18 名的數學成績在班上為前 50%，顯示有 90%以上的代表性，研究者將訪談狀況分為五個等級 A-E，以等級 A 最為符合，等級 C 以上稱為符合，數據統計如下：

問題編號	符合項目之問題	A	B	C	D	E	符合率
1	喜歡發掘課外數學問題的程度	5	2	3	1	9	50%
2	具有每週閱讀課外數學讀物的習慣	3	4	1	5	7	40&

3	學校提供數學讀物是否滿足你的需求	0	1	5	3	11	30%
4	使用資訊科技媒材的習慣	6	8	3	3	0	85%
5	學校提供之資訊科技是否足夠使用	2	1	6	6	5	45%
6	在解題初期有無團隊分工	2	2	2	6	8	30%
7	自我評估在團隊中的定位	3	4	7	4	2	70%
8	問題是否為真實生活的需求	10	8	2	0	0	100%
9	初期是否需要引導者引領思考與分工	9	7	3	1	0	95%
10	了解該模型所需相關數學工具與知識	1	2	4	6	7	35%
11	能設定模型所需條件、變數等	0	1	2	7	10	15%
12	綜合數學工具與條件等建立解題模型	4	5	6	4	1	75%
13	能否發掘已建立之模型之優缺點	2	3	3	5	7	40%
14	將發現的問題或缺失加以修正	2	2	4	5	7	40%
15	該模型是否能處理同質性進階問題	5	5	7	2	1	85%
16	已知道三種以上不同數學模型	5	6	7	1	1	90%
17	能比較不同模型間的差異性	2	3	3	5	7	40%
18	能發掘使用相同模型的相關問題	1	2	3	7	7	30%
19	能簡單歸納出適用各類問題的模型	4	6	6	3	1	80%
20	說明團隊合作的方式	9	8	2	1	0	95%
21	說明解題歷程	6	7	6	1	0	95%
22	分享自己的想法並討論	9	8	2	1	0	95%
23	接納他人的意見並加以討論	6	6	5	2	1	85%
24	在解題過程中能與組員比較不同的思維與解題方式，並選擇出最佳的方式	3	4	6	5	2	65%
25	反思自己在解題歷程中的能力優缺點	2	3	3	5	7	40%

26	能注意到自己與組員們的情緒、感受、反應、需求等	3	4	3	4	6	50%
27	在解題歷程後更勇於自我挑戰	6	7	6	1	0	95%
28	引導者是否適時介入引導與課堂概念連結	6	8	3	3	0	85%
29	自己是否能連結傳統課堂知識與解題過程的概念	2	3	3	5	7	40%
30	能否發展出其他生活中可藉由數學建模解決的問題	8	7	1	1	3	80%
31	在過程中是否使用課外讀物與知識	5	6	7	1	1	90%
32	在過程中是否使用資訊科技媒材	4	4	6	4	2	70%
33	所使用的資訊科技本身是否易於呈現並有助於模型建立	0	0	2	3	15	10%

【表 3-1-2-2 行動研究訪談結果統計】

四、 研究發現與討論

本章擬針對教學實驗後的發現，建立教師在教材設計與融入建模課程之教學相關指標；並討論與分享學生學習回饋，以及課程實施現況的相關數據呈現。

4-1 教學相關指標

在教材設計方面，經由實驗教學與相關理論配合，驗證出需遵守 Lesh 等人(2000)所發展的六大具體原則；另外在建模教學的基礎概念，配合上述教材設計原則與實驗教學記錄，可歸納出以下五點：

1. 對於建模課程的內容與教材必須熟悉，具備教材設計與修正能力。
2. 能瞭解學生數理相關的先備知識，並熟知高中生的數學學習思考脈絡。
3. 具有建模教學的能力，例如適時的啟發式引導與提問、驗證學生解題模型等。

4. 能針對自己的教學不斷進行反思與修正，採取較佳的教學策略與環境。

5. 在教學上展現專業知能，成為課堂學習的表率與領航者，使學生樂於參與課程。

此外，本次編寫教材多以離散數學為主，學生在課程中不僅學習到數學建模的能力，亦補足到現行高中數學教材不足處，成為本研究另一價值所在。

最後，由於多數高中數學老師對於數學建模課程尚感陌生，所以在融入教學活動時，利用已建立的教材讓老師參考，讓老師瞭解教材的生活實用性、問題情境的流暢以及如何與學生既有的能力經驗相結合等，爾後方能發展教師本身設計教材的能力，與建立其建模教學模式。

4-2 學生學習成效

在學生學習成效的部分分為兩大部分，第一部份為學生學習成果，由學生發展出與課程相關的延伸題型，第二部分為訪談結果的數據分析，希望藉此瞭解當前的數學建模課程設計與教學環境，作為未來改進之建議。

1. 學生學習成果

整理部分學生基於實驗教材的兩個發展題型如下：

i. 高跟鞋與身材的完美比例(學生自編)

Q： 已知女生的腰部至腳底的長度與身高的比例為黃金比例時，我們稱之為完美身材比例，請試著建立數學模型來探討不同身高的女生應該穿幾公分的高跟鞋，才能獲得完美身材比例？

A： 假設女生從腰部到腳底的長度為 x cm，身高為 h cm，穿的高跟鞋高度為 d cm，則可知$\frac{x}{h}$=0.618，且(x＋d)：(h＋d) = (0.618h＋d)：(h＋d)，如果有一個身高 160cm 的女生，建議他可以穿高約 7.6cm 的高跟鞋。

ii. 象棋裡神奇的馬(學生自編，Discrete Mathematics)

Q： 我們知道象棋裡的馬是以日字型的跳法移動，但是你能在移動七步後，讓馬可以跳回原地，亦或是不行？試建立數學模型討論。

A：我們先將棋盤的格子定位為二維直角座標系，並假定這個馬的原始座標

為 M(x_0,y_0)。

根據日字型的跳法規則，M 可能的移動向量為(1, 2)，(1, -2)，(-1, 2)，(-1, -2)，(2, 1)，(2, -1)，(-2, 1)，(-2, -1)等八種，可假設七次的移動向量各為(x_1,y_1)，$(x_2,y_2),(x_3,y_3),(x_4,y_4),(x_5,y_5),(x_6,y_6),(x_7,y_7)$。

當馬跳完七次後的座標為$(x_0,y_0)+(x_1,y_1)+(x_2,y_2)+(x_3,y_3)+(x_4,y_4)+(x_5,y_5)+(x_6,y_6)+(x_7,y_7)$。若能回到原位，則$(x_0,y_0)+(x_1,y_1)+(x_2,y_2)+(x_3,y_3)+(x_4,y_4)+(x_5,y_5)+(x_6,y_6)+(x_7,y_7)=(x_0,y_0)$，即$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)+(x_3,y_3)+(x_4,y_4)+(x_5,y_5)+(x_6,y_6)+(x_7,y_7)=(0,0)$。

我們可以發現八種可能的平移向量任取七種的組合數為8^7，但事實上可以發現，若以橫座標或縱座標來看，奇數個向量相加總是會得到 1、3、5、7…或 -1、-3、-5、-7…等，則可知任意奇數個向量相加恆不等於(0, 0)。

只有當馬跳偶數次時，可以有機會跳回原地。

2. 訪談結果分析

根據表 3-1-2-2，可以歸納出目前在數學建模課程的實施現況不足處如下：

i. 當學校提供的數學讀物不足，學生的閱讀機會便會減少，亦減弱學生發掘課外數學問題的興趣。

ii. 學校提供的資訊教育多重視於電腦文書能力而非跨學科之應用，便容易缺乏資訊媒材協助複雜計算與模型建立的功能。

iii. 傳統解題導向的學習導致學生無法整合相關數學能力與知識，對於模型建立的所需條件、變數、工具等，仍須教師引導思考。

iv. 學生雖然具有足夠的數學知識，但仍缺乏應用在已建立模型的比較與連結。

v. 解題過程中，學生雖樂於分享討論，但對於自我反思與團隊分工能力較薄弱。

五、 結論

針對研究結果與發現，整理出相關結論如下：

1. 學校教學環境

   i. 學校應提供充足數學讀物與設置研究型課程，不僅可培養學生對於開放性問題的興趣與動力，亦提供學生研究、應用數學並提升解決實際問題的建模能力。

   ii. 在資訊教育方面應整合跨領域學科之電腦應用，並提供實用性的數學軟體，以提升學生處理複雜問題與模型建立的能力。

2. 教師教學

   i. 在教材設計的基準需符合 Lesh 等人(2002)的六個設計原則：兼顧教材的模型建構、學習經驗關聯性、模型共享與重製性等。

   ii. 數學建模課程在融入教學活動具有高度意義，教師本身逐漸重視數學問題與生活問題的連結，課堂教學方式也由主導講授角色變為兼具引導及參與討論的角色，並注重情境多元性的建模策略，。

   iii. 建立建模教材資源基礎是必要的，除了有助於教師參與實作的信心，並促進教師反思與檢討其教學方法，亦提升教師本身設計新的建模教材的能力進而發展出一套高中數學建模教學之模式。

3. 學生學習

   i. 學生利用異質分組的合作解題方式，在進行建模課程時學習效益較高，學生可以藉由同儕間互補的數理能力解決開放性的建模問題，但應加強學生自省與分工合作的團隊精神。

   ii. 藉由學生的學習反應與回饋，教材建議以離散數學為主(如圖論、組合數學等)，較符合高中學生的思維邏輯與多次嘗試的解題模式，學生對於相關教材的表現與參與度較高，有助於高等教育的數學課程銜接，對於學生的學習成效與價值較高。

   iii. 高中生已具備解決建模問題的基本能力，且能討論並有所回饋，但仍缺乏應用數學知識在已建立模型的比較與連結。

參考文獻

1. Arnold, Neumaier. http://www.mat.univie.ac.at/~neum/model.html, 2008.
2. Casella, G. and Berger, R. L. (2002). *Statistical Inference.* Australia: Duxbury, pp.624-629.
3. David Easley & Jon Kleinberg. (2007) Bipartite Graphs and Perfect Matchings.
4. Donald, E. K. (1997). Stable Marriage and Its Relation to Other Combinatorial Problems. Providence: AMS Bookstore.
5. Ellington, A.J., and J.R. Hardin. (2006). "The Use of Video Tutorials in A Mathematical Modeling Course Taken by Pre-service Teachers," submitted to *On-Math*.
6. Fu, H. L. http://www.math.nctu.edu.tw/hlfu/course.php, 2009
7. Gross, J. L. (2006). *Graph theory and its applications*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC.
8. Harshbarger, R. J., & Upshaw, J. (2001). The use of mathematical modeling in an interdisciplinary setting.
9. Henner, E. K., & Shestakov, A. P. (1997). The mathematical modelling course for Russia's schools: its aims, methods and content. In S. K. Houston, W. Blum, I. Huntley & N. T. Neill (Eds.) *Teaching and Learning Mathematical Modelling*(pp.203-210). Chichester: Albion Pub.
10. HiMCM: The High School Mathematical Contest in Modeling, 2007 Contest Problems, http://comap-math.com/himcm/, 2008.
11. Houston, S. K., Blum, W., Huntley, I. & Neill, N. T. (Eds.) (1997).Teaching and Learning Mathematical Modelling. Chichester: Albion Pub.
12. Ikeda, T. (1997). A case study of instruction and assessment in mathematical modeling-the delivering problem. In S. K. Houston, W. Blum, Huntley & N. T.

Neill (Eds.), *Teaching and Learning Mathematical Modelling* (pp. 51-62). Chichester: Albion Pub.

13. Iowa Department of Education (2007),*Iowa High School Mathematics Model Core Curriculum*.(pp.73)

14. Knuth, D, E. (1997). *Stable marriage and its relation to other combinatorial problems: An Introduction to the Mathematical Analysis of Algorithm*. Providence, R.I.: American Mathematical Society.

15. Lesh, R., Cramer, K., Doerr, H., Post, T., & Zawojewski, J. (2002). Model Development Sequences. In H. Doerr,& R. Lesh, (Eds.), *Beyond constructivism: models and modeling perspective on mathematical problem solving, learning and teaching.*Mahwah, N.J.:Lawrence Erlbaum.

16. Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., & Post, T. (2000). Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. In A. Kelly & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

17. Lin, F. L. & Yang, K. L. (2006). Exploring the Scaffolding Strategies of Inserting Mathematical Modeling into Teaching of Secondary Mathematics and the Latent Mechanism of Promoting Teachers' Reflection. *Chinese Journal of Science Education, 14*(5), 517-543.

18. Lin, F. L. & Yang, K. L. (2005). Distinctive charateristics of mathematical thinking in a nonmodeling friendly environment. *Teaching Mathematics and its Applications, 24*(2-3), 97-106.

19. Lin, F. L. & Cooney, T. J. (Eds.) (2001). *Making sense of mathematics teacher education.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

20. Lin, F. L. & Tsao, L. C.(1999).Exam Maths re-examined.In C.Hoyles,C. Morgan & G. Woodhouse (Eds.), *Rethinking the mathematics curriculum* (pp. 228-239).

London: Falmer Press.

21. Richard, P. S. http://www-math.mit.edu/~rstan/transparencies/parking.ps, (2008).

22. Robin, Whitty. http://myweb.lsbu.ac.uk/~whittyr/MathSci/TheoremOfTheDay/CombinatorialTheory/Parking/TotDParking.pdf, 2008.

23. Schifter, D. & Fosnot, C. T. (1993). Reconstructing mathematics education: Stories of teachers meeting the challenge of reform. *New York: Teachers College Press*.

24. Schon, D. A. (1983). *The reflective practitioner*. NY：Basic Books.

25. Wallis, W.D. (2000). *A beginner's guide to graph theory*. Birkhauser: Springer.

26. 余秀萍(2004)。中學數學應引入數學建模的教學。*上海中學數學，2005年第3期*，22-23。

27. 李有忠(2005)。中學數學建模教學的初步實踐與認識。*洛陽師範學院學報，2005年第5期*，166-167。

28. 沈華偉(2002)。中學數學建模活動的設計。*數學教學，第4期*，4-14。

29. 孟麗(2008)。我的第一次研究性學習作業。*中學數學月刊，2008年第6期*，20-21。

30. 周平珊(2003)。中學數學建模教學的探討。*現代中小學教育，2003年第2期*，24-27。

31. 徐菁(2001)。中學數學課程應用性設計初探。*漳州師範學院學報(自然科學版)。14*(4)，75-77。

32. 舒心(2006)。函數的應用與數學建模教學。*甘肅聯合大學學報(自然科學版)，20*(1)，74-76。

33. 黃樂華(2003)。中學數學建模的理論與實踐思考。*龍巖師專學報，21*(6)：107-110。

34. 張景媛（1997）。教師教學的自我評量—以批判的自我反省為取向。*測驗與輔導*，143，2950-2951。

35. 趙杰、王家鏵(2002)。中學生數學建模活動與中學數學教育改革。*瀋陽師範學院學報(自然科學版)，20*(2)，152-154。