

國立交通大學

理學院網路學習學程

碩士論文

虛擬教具對於國中學生學習鑲嵌圖形之影響

The Impact of Virtual Manipulatives on Junior High School
Students' Learning of Tessellations

研究生：張玉琪

指導教授：袁媛 教授

陳永富 教授

中華民國九十八年六月

虛擬教具對於國中學生學習鑲嵌圖形之影響
The Impact of Virtual Manipulatives on Junior High School
Students' Learning of Tessellations

研究生：張玉琪

Student : Yu-Chi Chang

指導教授：袁媛

Advisor : Yuan Yuan

陳永富

Yu-Fung Chen

國立交通大學
理學院網路學習學程
碩士論文



Submitted to Degree Program of E-Learning
College of Science

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

in

Degree Program of E-Learning

June 2009

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十八年六月

虛擬教具對於國中學生學習鑲嵌圖形之影響

學生：張玉琪

指導教授：袁 媛 教授

陳永富 教授

國立交通大學理學院網路學習學程碩士班

摘 要

本研究利用系統化教學設計模式，以 AMA 簡報系統和 NLVM 的 Tessellations 為教學輔具設計國中二年級鑲嵌圖形教材，並進一步研究將此教材應用於教學的成效。

本研究採不等組前後測準實驗研究設計，以新竹市一所國中的兩個班級學生為研究樣本，隨機抽取一班為實驗組，一班為控制組。實驗組學生接受以 AMA 簡報系統和 NLVM 的 Tessellations 作為教學輔具的教學，而控制組學生接受以傳統實體教具作為輔具的教學，並以研究者自編的鑲嵌測驗、學習單、心得及感想問卷、教學過程中的觀察紀錄與影片為工具進行學習成效資料之收集。實驗結果主要發現如下：

- 一、使用 AMA 簡報系統和 NLVM 的 Tessellations 為虛擬教具教學和傳統教具教學對於學生學習的效果是一樣的。
- 二、使用 AMA 簡報系統和 NLVM 的 Tessellations 為虛擬教具教學對於高分組學生的學習比傳統教具教學效果好。
- 三、使用 AMA 簡報系統和 NLVM 的 Tessellations 為虛擬教具教學和傳統教具教學對於低分組學生學習的效果是一樣的。
- 四、使用 AMA 簡報系統和 NLVM 的 Tessellations 為虛擬教具教學對於不同性別學生學習的效果是一樣的。
- 五、使用 AMA 簡報系統和 NLVM 的 Tessellations 虛擬教具為學習環境或教學，有利於學生減少錯誤並產生新的數學思維與策略。
- 六、使用 AMA 簡報系統和 NLVM 的 Tessellations 為虛擬教具教學比使用傳統教具在次規則鑲嵌作業上表現好。
- 七、使用 AMA 簡報系統和 NLVM 的 Tessellations 為虛擬教具教學可以提升學生的學習興趣。

關鍵字：數學、虛擬教具、鑲嵌圖形、AMA 簡報系統

The Impact of Virtual Manipulatives on Junior High School Students' Learning of Tessellations

Student : Yu-Chi Chang

Advisor : Dr. Yuan Yuan

Dr. Yu-Fung Chen

Degree Program of E-Learning College of Science
National Chiao Tung University

Abstract

This study applied the ADDIE model, and used Web-based virtual manipulatives, Activate Mind Attention and Tessellations of NLVM, as aids to design instructional materials for the use of teaching junior high school students tessellations. The effect of applying the instructional materials on students' learning was also explored in this study.

A pretest-posttest quasi-experimental design was used. The study involved 72 students in two different classes of a junior high school in Hsinchu city of Taiwan. The classes were randomly assigned to two methods of instruction; a virtual manipulative group and a traditional group. A researcher developed posttest was conducted to measure effect. For an in-depth comparison between the two groups, the classroom climate and interactions among students and teachers were also investigated.

Research results were as following:

1. The learning effect in virtual manipulative group is as effective as in the traditional group.
2. The high-achieving students of virtual manipulative group outperformed the high-achieving students of traditional group.
3. The learning effect of the low-achieving students in virtual manipulative group is as effective as that of the low-achieving students in traditional group.
4. In virtual manipulative group, the learning effect of female students is as effective as that of male students.
5. Activate Mind Attention and Tessellations of NLVM can help students learn mathematics. The students' new mathematical thinking and policies grow.
6. The virtual manipulative group outperformed the traditional group on demi-regular tessellations' homework.
7. By utilizing the virtual manipulatives, the students raise their interest in mathematical learning.

Based on research results and findings, future suggestions were included for reference.

Keywords: mathematics, virtual manipulatives, tessellations, Activate Mind Attention

誌 謝

碩士論文終於完成，這過程中要感謝許多人的協助，第一個要感謝的就是指導教授—袁媛老師。從一下開始構思討論題目，提供了許多中肯的建議和方向，到暑假中更是不辭辛勞的與我們討論各項細節，耐心協助我們修改研究設計，進而逐步完成整個論文。也感謝專班主任—陳永富教授，願意擔任共同指導教授，讓我們能順利完成論文。

再來要感謝專班的導師—陳明璋教授，開發了 AMA2008 簡報系統，讓本研究能以 AMA2008 簡報系統的功能設計虛擬教具進行教學研究，並在過程中提供了許多專業的建議，同時感謝陳教授的學生—蕭慶利老師提供了 AMA2008 簡報系統設計上的專業指導，讓研究更趨嚴謹與完整。

由於在論文研究期間內懷孕了，經歷了安胎等辛苦的過程，更加感謝學校同事們的協助，包括實驗組和控制組配合調課的各科任課老師、幫忙拍攝和錄影的教師、安排教學教學場地和廣播系統設定的資訊組長、協助智力測驗施測的輔導處。因為他們的鼎力協助，研究才能順利進行。

最後，要感謝家人的關心與協助分擔家務，肚子裡的寶寶也乖巧陪伴我讀書與研究，他們的精神支持也是我能順利的完成學業重要力量。

張玉琪 謹致

2009 年 6 月

目 錄

| | | |
|------|--|-----|
| 中文摘要 | | i |
| 英文摘要 | | ii |
| 誌謝 | | iii |
| 目錄 | | iv |
| 表目錄 | | v |
| 圖目錄 | | vi |
| 一、 | 緒論..... | 1 |
| 1.1 | 研究動機..... | 1 |
| 1.2 | 研究目的..... | 3 |
| 1.3 | 研究問題..... | 4 |
| 1.4 | 名詞釋義..... | 5 |
| 1.5 | 研究限制..... | 7 |
| 二、 | 文獻探討..... | 8 |
| 2.1 | 鑲嵌(Tessellation)的探討..... | 8 |
| 2.2 | 虛擬教具和傳統教具的探討..... | 22 |
| 2.3 | 教學系統設計理論..... | 28 |
| 三、 | 研究設計與方法..... | 34 |
| 3.1 | 研究對象..... | 34 |
| 3.2 | 研究架構..... | 35 |
| 3.3 | 研究設計..... | 36 |
| 3.4 | 研究工具..... | 39 |
| 3.5 | 資料分析..... | 41 |
| 3.6 | 虛擬教具設計..... | 43 |
| 四、 | 研究結果與討論..... | 48 |
| 4.1 | 使用 AMA 簡報系統和 NLVM 的 Tessellations 教學後對學生的影響..... | 48 |
| 4.2 | 實驗組與控制組學生學習歷程分析..... | 53 |
| 4.3 | 學生在學習單與心得及感想問卷的質化分析..... | 90 |
| 五、 | 結論與建議..... | 110 |
| 5.1 | 結論..... | 110 |
| 5.2 | 建議..... | 115 |
| 參考文獻 | | 119 |
| 附錄 | | 128 |

表 目 錄

| | | |
|----------|---------------------------------|-----|
| 表 2-1-1 | 鑲嵌研究整理 | 18 |
| 表 2-2-1 | 使用虛擬教具的部份研究結果 | 26 |
| 表 2-3-1 | ADDIE 模式各過程任務內容 | 33 |
| 表 3-1-1 | 研究樣本人數統計表 | 34 |
| 表 3-3-1 | 不等組前後測準實驗 | 36 |
| 表 3-3-2 | 實驗組與控制組教學環境比較 | 37 |
| 表 3-4-1 | 鑲嵌測驗內容與計分方式 | 40 |
| 表 3-4-2 | 給分標準示例 | 40 |
| 表 3-5-1 | 實驗研究假設的統計方法 | 42 |
| 表 4-1-1 | 實驗組與控制組在「鑲嵌測驗」後測表現統計量及差異分析 | 49 |
| 表 4-1-2 | 實驗組與控制組高分組學生在「鑲嵌測驗」後測表現統計量及差異分析 | 49 |
| 表 4-1-3 | 實驗組與控制組低分組學生在「鑲嵌測驗」後測表現統計量及差異分析 | 50 |
| 表 4-1-4 | 實驗組不同性別的學生在「鑲嵌測驗」後測表現統計量及差異分析 | 51 |
| 表 4-3-1 | 教師於展示各式美麗鑲嵌圖形後，學生對於鑲嵌的看法 | 90 |
| 表 4-3-2 | 學生找出三種可以鑲嵌的圖形，但沒將圖形密鋪成 360 度 | 90 |
| 表 4-3-3 | 學生找出可以鑲嵌的正多邊形數目（共有三種） | 91 |
| 表 4-3-4 | 學生列出不能鑲嵌的正多邊形 | 91 |
| 表 4-3-5 | 學生操作過程使用的策略 | 91 |
| 表 4-3-6 | 學生在半規則鑲嵌圖形的命名及畫圖狀況 | 93 |
| 表 4-3-7 | 學生找出正確的半規則鑲嵌種類 | 94 |
| 表 4-3-8 | 學生找出錯誤的半規則鑲嵌種類 | 94 |
| 表 4-3-9 | 學生在半規則鑲嵌操作過程使用的策略 | 96 |
| 表 4-3-10 | 學生找出的不規則鑲嵌圖形 | 98 |
| 表 4-3-11 | 學生找出的次規則鑲嵌種類 | 101 |

圖 目 錄

| | | |
|----------|------------------------------------|----|
| 圖 2-1-1 | 圖案的分類 | 8 |
| 圖 2-1-2 | 二方連續 (帶狀圖案) | 9 |
| 圖 2-1-3 | 四方連續 (壁紙圖案) | 9 |
| 圖 2-1-4 | 具有封閉外形的圖形 | 9 |
| 圖 2-1-5 | 不具有封閉外形的圖形 | 9 |
| 圖 2-1-6 | 鑲嵌圖案的分類 | 12 |
| 圖 2-1-7 | 多邊形鑲嵌圖形命名 | 12 |
| 圖 2-1-8 | 規則鑲嵌的種類 | 14 |
| 圖 2-1-9 | 半規則鑲嵌的種類 | 14 |
| 圖 2-1-10 | 次規則鑲嵌的種類 | 15 |
| 圖 2-1-11 | 不規則鑲嵌 | 16 |
| 圖 2-1-12 | 非多邊形的鑲嵌 | 17 |
| 圖 2-3-1 | ADDIE 教學模式 | 29 |
| 圖 2-3-2 | Dick & Carey 教學設計模式 | 29 |
| 圖 2-3-3 | ASSURE 教學模式 | 30 |
| 圖 2-3-4 | MRK 模式 | 31 |
| 圖 2-3-5 | ADDIE 模式的系統化教學設計 | 32 |
| 圖 3-2-1 | 研究架構 | 35 |
| 圖 3-3-1 | 教學流程簡示 | 38 |
| 圖 3-6-1 | Tessellations 介面 | 43 |
| 圖 3-6-2 | Tessellations 旋轉功能介紹 | 44 |
| 圖 3-6-3 | AMA 簡報系統 2008 開發的虛擬教具-正三角形到正十二邊形 | 45 |
| 圖 3-6-4 | AMA 簡報系統 2008 開發的虛擬教具-正十三邊形到正四十二邊形 | 45 |
| 圖 3-6-5 | AMA 簡報系統 2008 開發的虛擬教具-不規則鑲嵌 | 46 |
| 圖 3-6-6 | AMA 簡報系統 2008 設計的教學投影片 | 46 |
| 圖 3-6-7 | AMA 簡報系統 2008 設計的教學投影片-動態激發式呈現功能 | 47 |
| 圖 4-2-1 | 教師以海報介紹鑲嵌圖形 | 53 |
| 圖 4-2-2 | 教師介紹 Escher 圖案 | 53 |
| 圖 4-2-3 | 教師以黑板復習內角度數 | 54 |
| 圖 4-2-4 | 教師以海報復習概念 | 54 |
| 圖 4-2-5 | 教師發給每位學生教具袋 | 54 |
| 圖 4-2-6 | 教師巡視並指導學生 | 54 |
| 圖 4-2-7 | 學生上課反應和平常差不多 | 55 |

| | | |
|----------|--|----|
| 圖 4-2-8 | 複雜圖形遠處學生不易觀察 | 55 |
| 圖 4-2-9 | 學生打算將所有圖形分類 | 56 |
| 圖 4-2-10 | 不時和同學交頭接耳討論 | 56 |
| 圖 4-2-11 | 學生由最小圖形開始嘗試 | 56 |
| 圖 4-2-12 | 學生任意嘗試，無次序性 | 56 |
| 圖 4-2-13 | 部分圖形未拼貼成 360 度 | 57 |
| 圖 4-2-14 | 學生圍在一起拼湊圖形 | 57 |
| 圖 4-2-15 | 學生桌面空間不夠，無法保留所有圖形 | 57 |
| 圖 4-2-16 | 傳統教具拼貼上容易位移，學生需一再調整 | 57 |
| 圖 4-2-17 | 教師以教學廣播介紹鑲嵌圖形 | 58 |
| 圖 4-2-18 | 教師介紹中國圖案 | 58 |
| 圖 4-2-19 | 教師介紹埃及、龐貝圖案 | 58 |
| 圖 4-2-20 | 教師介紹 Escher 圖案 | 58 |
| 圖 4-2-21 | 教師復習每一個內角度數 | 58 |
| 圖 4-2-22 | 教師以按鈕依序復習概念 | 58 |
| 圖 4-2-23 | 教師示範如何操作拼貼 | 59 |
| 圖 4-2-24 | 教師巡視並指導學生 | 59 |
| 圖 4-2-25 | 教師示範如何旋轉 | 60 |
| 圖 4-2-26 | 學生專注聆聽示範 | 60 |
| 圖 4-2-27 | 學生從最小的開始嘗試 | 60 |
| 圖 4-2-28 | 學生挑選部分圖形嘗試 | 60 |
| 圖 4-2-29 | 學生將正六邊形無限延伸 | 61 |
| 圖 4-2-30 | 部分圖形未拼貼成 360 度 | 61 |
| 圖 4-2-31 | 虛擬教具拼貼不易位移 | 61 |
| 圖 4-2-32 | 學生自行嘗試半規則鑲嵌 | 61 |
| 圖 4-2-33 | 教師講解圖形命名原則 | 63 |
| 圖 4-2-34 | 教師講解錯誤的例子 | 63 |
| 圖 4-2-35 | 教師說明半規則鑲嵌只有一種方式 | 64 |
| 圖 4-2-36 | 教師說明次規則鑲嵌共有二種方式 | 64 |
| 圖 4-2-37 | 教師講解黃色部份命名 | 64 |
| 圖 4-2-38 | 教師講解藍色部份命名 | 64 |
| 圖 4-2-39 | 學生聆聽教師講解少回應 | 65 |
| 圖 4-2-40 | 學生一邊聆聽一邊操作 | 65 |
| 圖 4-2-41 | 學生任意取出圖形嘗試 | 65 |
| 圖 4-2-42 | 排出教師舉例的次規則鑲嵌 | 65 |
| 圖 4-2-43 | 學生排出 (3, 4, 6, 4) 和次規則鑲嵌 (3, 4, 3, 12/3, 12, 12) | 66 |
| 圖 4-2-44 | 學生任意將正十二邊形環狀排列 | 66 |
| 圖 4-2-45 | 學生將正七邊形和正三角形排成太陽形狀 | 66 |

| | | |
|----------|---|----|
| 圖 4-2-46 | 學生排人形、次規則鑲嵌 (3, 3, 3, 4, 4/3, 3, 4, 3, 4) 、亂拼湊和 (4, 6, 12) | 66 |
| 圖 4-2-47 | 學生抄襲同學的圖形..... | 66 |
| 圖 4-2-48 | 學生離開位子與同學討論..... | 66 |
| 圖 4-2-49 | 學生排出 (4, 6, 12) 和錯誤的 (5, 6, 8) | 67 |
| 圖 4-2-50 | 學生排出 (3, 4, 6, 4) 和錯誤的 (3, 12, 15) | 67 |
| 圖 4-2-51 | 學生排錯誤的 (3, 12, 13) | 67 |
| 圖 4-2-52 | 學生排出錯誤的 (3, 9, 19) | 67 |
| 圖 4-2-53 | 學生排出 (4, 6, 12) ，但桌面雜亂，書寫不便..... | 68 |
| 圖 4-2-54 | 學生排出 (3, 4, 6, 4) 和亂拼接的圖形..... | 68 |
| 圖 4-2-55 | 學生排出 (3, 12, 12) | 68 |
| 圖 4-2-56 | 學生排出 (3, 4, 6, 4) 、 (4, 8, 8) 和次規則鑲嵌的 (3, 4, 3, 12/3, 12, 12) | 68 |
| 圖 4-2-57 | 教師講解圖形命名原則..... | 69 |
| 圖 4-2-58 | 教師講解錯誤的例子..... | 69 |
| 圖 4-2-59 | 教師說明半規則鑲嵌只有一種方式..... | 70 |
| 圖 4-2-60 | 教師說明次規則鑲嵌共有二種方式..... | 70 |
| 圖 4-2-61 | 教師講解黃色部份命名..... | 70 |
| 圖 4-2-62 | 教師講解藍色部份命名..... | 70 |
| 圖 4-2-63 | 極少數拼出次規則鑲嵌 (3, 4, 3, 12/3, 12, 12) | 71 |
| 圖 4-2-64 | 極少數拼出次規則鑲嵌 (3, 3, 6, 6/6, 6, 6) | 71 |
| 圖 4-2-65 | 學生使用每一內角度數進行計算再操作驗證..... | 72 |
| 圖 4-2-66 | 學生專注操作自己的教具，未任意走動..... | 72 |
| 圖 4-2-67 | 一位學生排出 (5, 5, 12) 不能組成 360 度的圖形..... | 72 |
| 圖 4-2-68 | 一位學生排出 (3, 4, 3, 11) 不能組成 360 度的圖形..... | 72 |
| 圖 4-2-69 | 部分學生排出 (5, 5, 10) 無法延伸的圖形..... | 72 |
| 圖 4-2-70 | 部分學生排出 (3, 3, 4, 12) 無法延伸的圖形..... | 72 |
| 圖 4-2-71 | 學生排出 (3, 6, 3, 6) 、 (3, 12, 12) 、 (4, 8, 8) | 73 |
| 圖 4-2-72 | 學生排出 (3, 4, 6, 4) 、 (4, 6, 12) | 73 |
| 圖 4-2-73 | 學生排出 (3, 3, 3, 3, 6) 、 (3, 3, 3, 4, 4) | 73 |
| 圖 4-2-74 | 學生排出 (3, 3, 4, 3, 4) | 73 |
| 圖 4-2-75 | 學生沒有密鋪成 360 度..... | 76 |
| 圖 4-2-76 | 教師以矩形說明需 360 度..... | 76 |
| 圖 4-2-77 | 教師以海報說明如何將曲線平移至對邊..... | 76 |
| 圖 4-2-78 | 教師將另一邊曲線也平移到對邊..... | 76 |
| 圖 4-2-79 | 教師以泡棉教具示範平移的方法..... | 77 |
| 圖 4-2-80 | 教師完成基本圖案，加上設計並繪製出連續圖形..... | 77 |
| 圖 4-2-81 | 教師說明以平移方法設計出 Escher 的飛馬..... | 77 |

| | | |
|-----------|-------------------------------|----|
| 圖 4-2-82 | 教師示範如何使用描圖紙複製曲線後平移····· | 77 |
| 圖 4-2-83 | 教師以海報說明如何將曲線旋轉到鄰邊····· | 78 |
| 圖 4-2-84 | 教師以泡棉教具示範旋轉的方法····· | 78 |
| 圖 4-2-85 | 教師說明以旋轉的方法設計出 Escher 的蜥蜴····· | 78 |
| 圖 4-2-86 | 教師示範如何使用描圖紙複製曲線後旋轉····· | 78 |
| 圖 4-2-87 | 部分學生在詢問後將圖形分類以利於分辨····· | 79 |
| 圖 4-2-88 | 多數學生沒有分類，直接拼湊····· | 79 |
| 圖 4-2-89 | 學生關門防止教具被風吹亂····· | 80 |
| 圖 4-2-90 | 學生將三角形相同角拼在一起····· | 80 |
| 圖 4-2-91 | 教具容易位移，學生在操作時重複調整圖形····· | 80 |
| 圖 4-2-92 | 學生放棄操作在位置上發呆····· | 80 |
| 圖 4-2-93 | 學生將等形相同角拼在一起，不能無限延伸····· | 80 |
| 圖 4-2-94 | 學生離開自己的位置任意走動····· | 80 |
| 圖 4-2-95 | 海報張貼不易且耗時，影響學生創作時間····· | 81 |
| 圖 4-2-96 | 學生很專注但創作時間不足····· | 81 |
| 圖 4-2-97 | 教師介紹不規則鑲嵌的各式圖形····· | 82 |
| 圖 4-2-98 | 教師到台下巡視學生操作不規則鑲嵌····· | 82 |
| 圖 4-2-99 | 教師使用動態功能自動畫出曲線····· | 82 |
| 圖 4-2-100 | 使用動態功能將另一邊曲線平移到對邊····· | 82 |
| 圖 4-2-101 | 教師示範如何畫出曲線····· | 83 |
| 圖 4-2-102 | 教師示範如何調整曲線····· | 83 |
| 圖 4-2-103 | 教師示範如何將曲線複製平移到對邊····· | 83 |
| 圖 4-2-104 | 教師將完成的曲線組成基本圖案後移動····· | 83 |
| 圖 4-2-105 | 教師用動態功能說明如何設計 Escher 的飛馬····· | 83 |
| 圖 4-2-106 | 教師以平移方法完成 Escher 的飛馬····· | 83 |
| 圖 4-2-107 | 教師使用動態功能自動畫出曲線並旋轉到鄰邊····· | 84 |
| 圖 4-2-108 | 使用動態功能將另一邊曲線也旋轉到鄰邊····· | 84 |
| 圖 4-2-109 | 教師示範如何畫出曲線並複製旋轉到鄰邊····· | 84 |
| 圖 4-2-110 | 教師完成基本圖案後添加眼睛等設計····· | 84 |
| 圖 4-2-111 | 教師用動態功能說明如何設計 Escher 的蜥蜴····· | 85 |
| 圖 4-2-112 | 教師以旋轉方法完成 Escher 的蜥蜴····· | 85 |
| 圖 4-2-113 | 等腰三角形拼成 360 度，沒有誤差····· | 85 |
| 圖 4-2-114 | 除了梯形以外，其他都只拼成 180 度····· | 85 |
| 圖 4-2-115 | 直角三角形以內角和拼成 360 度····· | 86 |
| 圖 4-2-116 | 直角三角形以四個直角密鋪成 360 度····· | 86 |
| 圖 4-2-117 | 學生將矩形拼成 360 度····· | 86 |
| 圖 4-2-118 | 學生拼出了八種不規則鑲嵌圖形····· | 86 |
| 圖 4-2-119 | 學生使用平移方法創作的圖形····· | 87 |

| | | |
|-----------|----------------------------------|-----|
| 圖 4-2-120 | 學生添加眼睛等設計豐富圖案..... | 87 |
| 圖 4-2-121 | 學生利用元件豐富創作的圖形..... | 87 |
| 圖 4-2-122 | 學生使用旋轉方法設計的圖形..... | 87 |
| 圖 4-3-1 | 圖形沒有密鋪成 360 度..... | 92 |
| 圖 4-3-2 | 學生找到的三種規則鑲嵌圖形..... | 92 |
| 圖 4-3-3 | 不能構成規則鑲嵌的正多邊形..... | 92 |
| 圖 4-3-4 | 實驗組大多數學生能寫出名稱和畫出圖形..... | 96 |
| 圖 4-3-5 | 控制組大多數學生只寫出名稱，沒畫圖形..... | 96 |
| 圖 4-3-6 | 控制組學生的錯誤圖形..... | 97 |
| 圖 4-3-7 | 控制組少數學生拼出次規則鑲嵌..... | 97 |
| 圖 4-3-8 | 實驗組大多數學生能找出不規則圖形..... | 99 |
| 圖 4-3-9 | 控制組學生會以同一個角去拼成一圈，錯誤圖形也較多..... | 99 |
| 圖 4-3-10 | 次規則鑲嵌的種類..... | 99 |
| 圖 4-3-11 | 實驗組學生找出的次規則鑲嵌圖形..... | 102 |
| 圖 4-3-12 | 控制組學生找出的次規則鑲嵌圖形但名稱皆錯誤..... | 102 |
| 圖 4-3-13 | 控制組學生認為合併兩個半規則鑲嵌圖形即是次規則鑲嵌圖形..... | 103 |
| 圖 4-3-14 | 實驗組學生創作的鑲嵌圖形..... | 104 |
| 圖 4-3-15 | 控制組學生創作的鑲嵌圖形..... | 105 |



一、緒論

1.1 研究動機

隨著科技日新月異，身處數位化的時代，迎向知識爆炸的未來，科學之影響力更是與日俱增，而數學為科學之母，重要性更不可小覷。教育部在「九年一貫數學領域課程綱要」中表示，數學是人類最重要的資產之一，數學能力是國民素質的一個重要指標。美國加州教育部門 (California Department of Education) 1997年在其文件中，也認為數學可以訓練我們的分析能力，而這樣的能力正是智慧和精確思考的基礎。儘管學生普遍了解數學的重要性，卻對數學存著恐懼感。大多數的小學生都喜歡數學，且一般在小學六年級前學生均維持樂觀的數學態度，但學生在六年級之後，特別是進入中學之後，學習成功的經驗逐年降低，害怕數學的程度也逐年升高 (Suydam, 1984; Aiken, 1986)。Granger (2000) 也提及身為教師，感受到學生對於學校的感覺是負面的，尤其是數學課，新學年開始的熱忱往往很快地被大量憂慮所取代。因此，數學向來是各國政府重視且投注極大心力研究的一門學科，數學教育的嶄新嘗試和改革步履未曾停歇 (林瑞蘭, 2008)。

在九年一貫課程數學學習領域綱要中，「幾何」為五大主題之一 (教育部, 2003)。美國數學教師協會 (National Council of Teachers of Mathematics, 簡稱NCTM) 2000年在其出版文件中，強調在學校數學課程初期，幾何和空間感的技巧和概念更具有重要性，並在其提出的《學校數學的原則和標準》中，將五項內容標準之一的幾何，從測量中抽離出來，成為獨立的一部份。Clements and Battista (1992) 也指出幾何提供我們如何去闡釋與反映外在物理環境的一種方法，並且可作為學習其他數學和科學題材的工具，若能加強幾何的空間思考，將有助於高層次數學的創造思考。因此，國內外基礎數學教育的潮流，有逐漸重視幾何教育的趨勢。然而隨著時代進步，傳統歐氏幾何的樣式與公式演繹已逐漸不能滿足現代學習上的需求，也許更重要的是直觀的、可視的圖形變換所帶來的幾何觀念 (沙雷金, 2001)。Granger (2000) 也認為應該向學生展現數學之美，數學也可以是藝術，從美麗的藝術中發現數學的樣式與空間推理。

鑲嵌在歷史上從古至今一直扮演著藝術角色，從蘇美人、埃及人、非洲摩爾人、波斯人、希臘人、羅馬人、拜占庭人、阿拉伯人、中國人，都可在他們的文化中發現幾何裝飾藝術。正因為鑲嵌常廣泛出現在藝術、歷史、數學、建築上，生活中處處皆可見其

蹤跡，在數學上能探究鑲嵌圖案如何形成以及尋找樣式的規則性。因此，一些數學教師在幾何單元教學時，尤其是教導多邊形概念或是生活化數學主題時，會考慮進行鑲嵌主題的教學，讓學生去建立發展他們的藝術創造力並能夠加強他們數學上的空間概念

(Giganti & Cittadino, 1990; Johnson & Kashef, 1996; Granger, 2000; Peterson, 2000; Hale, 2003; Furner, Goodman, & Meeks, 2004)。另一個原因是藉由和藝術的結合以及創造，能增加數學課程的趣味性。Giganti and Cittadino (1990) 也指出學生應該去實踐經驗和領略數學之美，而鑲嵌就是結合幾何與藝術的計畫。

國內的數學教育改革，從民國八十二年版的數學課程，到九十二年的九年一貫數學領域課程正式綱要，不再只偏重公理的演繹計算，而是藉著具體運用不同的實物表徵、符號表徵、圖形表徵幫助孩子建立概念，強調數學概念的抽象化過程。實體教具一直是表徵數學概念的重要工具，教師藉由實體教具的操作幫助學生理解抽象概念。Parham (1983) 的研究結果顯示教具的使用確實幫助了學生數學概念的學習。但大量使用教具於數學教學上的狀況並不如預期，其中可能的原因是教具的欠缺及使用者的專業知能的不足 (Dorward, 2002)。部份教師對於使用教具是恐懼的，因為很少使用教具或不知如何使用，擔心讓學生自由使用教具時會遺失或損壞、課堂上秩序會變得混亂 (Moyer & Jones, 2004)。另外的原因在於老師們擔心沒有足夠的教具分配給學生，課後清理收拾教具很費時，以及高年級或中學生會覺得傳統教具是給小孩子玩的 (Moyer, Bolyard & Spikell, 2002)。而Char (1989) 也認為不同學生需要不同的協助，單一類型的教具無法適用於每一個小孩。所幸，隨著科技的進步，數學教具也有了新的變革 (張漢宜, 2002)。

近年來電腦軟體的開發技術日新月異，網際網路的普及，電腦的個人化，許多研究者開始將電腦科技運用於教學。大多學者肯定教具可以操作以及利用其他表徵來教授數學的功用，結合目前新資訊科技的運用，於是有虛擬教具的產生。這是一種結合具體教具和電腦技術且適合國中小學生使用於數學學習的科技輔具 (袁媛, 2007)。虛擬教具是一種電腦技術產生的數位影像，看得到但無法實際觸摸，可以幫助學生建構抽象的數學概念的學習工具，且能呈現傳統教具能呈現或不能呈現的概念，在運用上比傳統教具更有彈性 (王智弘, 2006)。Steen, Brooks, and Lyon (2006) 的研究顯示，使用電腦當作虛擬教具和傳統教具進行幾何教學時，虛擬教具更能深化學生學習，方便學生操弄。目前NCTM正致力於虛擬教具的研發，網站上也有許多豐富的成果，然而國內虛擬教具相關的研究仍屈指可數，有待更多的教學實證研究。

不同多媒體學習中，好的教學設計方法可跨越不同媒介 (Mayer, 2003)。而在數位學習的系統化教學設計上，常運用 ADDIE 模式去設計發展教材，因為 ADDIE 模式能提供

教學設計者一個具體的架構，有效地發展建置課程，ADDIE 模式即分析 (Analysis)、設計 (Design)、發展 (Development)、實施 (Implementation) 與評鑑 (Evaluation) 五個步驟，是可循環反覆的，能說明教學和效能改善間的聯繫，在教學設計上更具有彈性，所以教學活動設計可藉由 ADDIE 過程創造。

基於以上研究動機，研究者擬於國中二年級的數學幾何課程中，將基本的多邊形外角和、內角和觀念加以延伸，將日常生活中瓷磚的鑲嵌概念融入並加以設計成鑲嵌設計活動，採取 ADDIE 模式設計課程，以豐富幾何課程的內涵。本實驗將採取不等組前後測準實驗設計，探討在進行鑲嵌圖形教學時，使用虛擬教具和傳統教具不同的教學環境下，兩組學生在學習態度與過程上的差異性，以及觀察不同教具輔助教學對學生的影響，並進一步提出可能的教學建議，期望在實驗結束後能透過評鑑修正過程，使課程發展更完備，作為日後教學使用。

1.2 研究目的

本研究的主要目的是利用 AMA 簡報系統 2008 (Activate Mind Attention, 簡稱 AMA) 和國家虛擬教具圖書館 (National Library of Virtual Manipulatives, 簡稱 NLVM) 的鑲嵌教具 (Tessellations) 作為教學輔具設計鑲嵌教學活動，比較「操作虛擬教具的教學」與「操作傳統教具的教學」對國二學生學習「鑲嵌圖形」之成效。綜合以上所述，茲將本研究目的分述如下：

1. 分析在鑲嵌圖形單元中，使用虛擬教具的教學環境和傳統實體教具的教學環境之異同。
2. 比較使用虛擬教具的教學環境和傳統實體教具的教學環境，對於國中二年級學生學習鑲嵌圖形之影響。
3. 比較使用虛擬教具的教學環境，對於不同性別的學生學習鑲嵌圖形之影響。
4. 比較使用虛擬教具的教學環境和傳統實體教具的教學環境，對於國中二年級學生學習態度之影響。

1.3 研究問題

根據上述的研究目的，提出下列六個研究問題。

1. 使用虛擬教具的教學環境和傳統實體教具的教學環境有何差異？
2. 使用虛擬教具教學的學生在後測「鑲嵌測驗」的得分是否顯著優於使用傳統實體教具教學的學生？
3. 使用虛擬教具教學高分組的學生在後測「鑲嵌測驗」的得分是否顯著優於使用傳統實體教具教學高分組的學生？
4. 使用虛擬教具教學低分組的學生在後測「鑲嵌測驗」的得分是否顯著優於使用傳統實體教具教學低分組的學生？
5. 使用虛擬教具教學不同性別的學生在「鑲嵌測驗」後測上得分是否有顯著的差異？
6. 使用虛擬教具教學的學生和使用傳統實體教具教學的學生在態度上有何差異？



1.4 名詞釋義

為了使研究更具體明確，本節針對此研究所涉及到的重要名詞說明如下：

1.4.1 國中學生

本研究之國民中學學生，是指97學年度就讀於新竹市某國民中學的二年級學生。

1.4.2 鑲嵌 (Tessellations)

平面上的鑲嵌是數個平面圖形，以邊相鄰拼接後，不重疊且沒有空隙密鋪滿整個平面，可以無限的向四方延展。

1.4.3 K律鑲嵌 (K-uniform tessellations)

由正多邊形構成的鑲嵌圖形，K是圖形內頂點構成方式的種類，若只有一種則稱為一律鑲嵌，又稱為阿基米德鑲嵌；有二種則稱為二律鑲嵌，又稱為次規則鑲嵌、多形鑲嵌。以相同的命名法，可類推至高律鑲嵌。

1.4.4 規則鑲嵌 (Regular tessellations)

是指由相同的數個正多邊形以邊相鄰拼接後，不重疊且沒有空隙密鋪滿整個平面，可以無限的向四方延展，是一律鑲嵌中的一種。

1.4.5 半規則鑲嵌 (Semi-regular tessellations)

是指由兩種或兩種以上的數個正多邊形以邊相鄰拼接後，每個頂點的組成方式只有一種，不重疊且沒有空隙密鋪滿整個平面，可以無限的向四方延展。

1.4.6 次規則鑲嵌 (Demi-regular tessellations)

是指由兩種或兩種以上的數個正多邊形以邊相鄰拼接後，頂點的組成方式共有兩種，不重疊且沒有空隙密鋪滿整個平面，可以無限的向四方延展。

1.4.7 不規則鑲嵌 (Non-regular tessellations)

是指由數個任意的不規則多邊形以邊相鄰拼接後，不重疊且沒有空隙密鋪滿整個平

面，可以無限的向四方延展。

1.4.8 非多邊形鑲嵌 (Nonpolygonal tessellations)

是指由數個任意的非多邊形，可以是曲線，相鄰拼接後，不重疊且沒有空隙密鋪滿整個平面，可以無限的向四方延展。非多邊形鑲嵌可以由多邊形變化而來。

1.4.9 傳統實體教具 (Physical manipulatives)

傳統實體教具是實體的物件，看得到也觸摸得到，可以被實際操作的真實物件，分為平面和立體兩大類，學生可以藉由具體物的操作來了解抽象性的概念。

1.4.10 虛擬教具 (Virtual manipulatives)

虛擬教具是一種新的教具形式，可以看作是一套電腦的程式，利用互動的視覺呈現，看得到但無法實際觸摸，學生可以從電腦環境學習進行虛擬操作模擬真實環境中的操作，如傳統教具般建構數學知識，並可呈現一般傳統實體教具不易做到的操作。認為能提供發現及建構數學原理和關聯的機會，才是真正的虛擬教具 (Moyer, Bolyard, & Spikell, 2002)。使用是否有互動性存在是虛擬教具和非虛擬教具之間最大的差異點，所以除了靜態視覺呈現外，例如：點擊以後出現事先設好的答案和播出已設定好的動畫，只要不允許使用者直接操作或涉入，無法讓使用者扮演主動創造數學意義的角色，都不能納入虛擬教具 (Suh & Moyer, 2005)。

1.4.11 ADDIE模式 (ADDIE model)

一個系統化的教學設計程序。ADDIE模式包含分析 (Analysis)、設計 (Design)、發展 (Develop)、實施 (Implementation)、評鑑 (Evaluation) 五個階段。提供教學設計者一個具體的架構，有效地發展建置課程。

1.4.12 國家虛擬教具圖書館 (National Library of Virtual Manipulatives, 簡稱NLVM)

是美國猶他大學的研究團隊為國科會 (NSF) 贊助的計畫，從1999年起設立的虛擬教具圖書館 (<http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html>)，提供許多以Java Applet 程式撰寫的互動性網路虛擬教具與概念教學任務，讓從幼稚園到高中三年級的學生都能使用這些輔具去學習與理解數學。

1.4.13 AMA簡報系統2008 (Activate Mind Attention, 簡稱AMA)

一個以PowerPoint為平台，外掛增益集所發展的一個媒體設計及展演的環境，兩個主要的功能為激發式動態呈現 (Trigger-based Animation, TA) 及結構式複製繪圖法 (Structural Cloning Method, SCM)。AMA系統是以數學概念所發展出來的教材設計及教學軟體，是一種新的繪圖法，能解決設計教材時定位不易的問題，繪製仿自然山水畫、複雜的對稱構圖以及光點系列等。此系統與PowerPoint結合可以成為一個數位內容設計及展演、繪本寫作及創意的平台。

1.5 研究限制

本研究乃是研究者在教學領域上的實驗研究，取樣採方便樣本，對象為研究者任教學校的國二學生。接受教學的學生就讀之學校採常態編班，入學編班依據入學時的測驗成績做S型編排，故研究結果不宜過度推論到其他地區，但研究結果可供日後從事其他地區研究之參考。另外，考量學校教學進度安排無法任意更動，本研究為延伸課程，旨在將數學融入日常生活中，並非正式課堂必教課程，為了避免壓縮正式課程的教學時間，僅安排三堂課程，因此本實驗教學對於學習成效的結果論定可能造成影響。



二、文獻探討

本章分為三節探討本研究的相關文獻，做為研究的理論基礎，以建立本研究的架構。第一節為鑲嵌(Tessellation)的探討，第二節為虛擬教具(Virtual manipulatives)和傳統教具的探討，第三節為教學系統設計理論。

2.1 鑲嵌(Tessellation) 的探討

本節將分別就「鑲嵌的圖案性質」、「鑲嵌圖案的分類與構成」、「鑲嵌的文獻研究」三個部份來說明探討。

2.1.1 鑲嵌的圖案性質

很早以前人類就懂得利用鑲嵌來裝飾日常生活，例如鋪磚、教堂的花窗玻璃等等，或在數學上探究鑲嵌圖案如何形成，尋找規則性。因此鑲嵌一詞常廣泛出現在生活中，在藝術，歷史，數學，建築上皆可見其蹤跡。

我們先探討鑲嵌在圖案中的分類。丘永福(1990)提出圖案的構成可以分為單獨圖案構成法、二方連續圖案構成法、四方連續圖案構成法。如圖 2-1-1 所示，凌春玉(1998)提出圖案種類可以分為平面圖案和立體圖案兩大類，而平面圖案又可以分為單獨模樣、連續模樣、繪畫模樣，其中連續模樣指的是以連續排列方式展開或是向四方延展的圖案，依方向分為二方連續和四方連續，二方連續圖案因呈現帶狀，也稱為帶狀圖案(Strip pattern)，如圖 2-1-2。四方連續圖案在生活中常見，也稱之為壁紙圖案(Wallpaper pattern)，如圖 2-1-3。

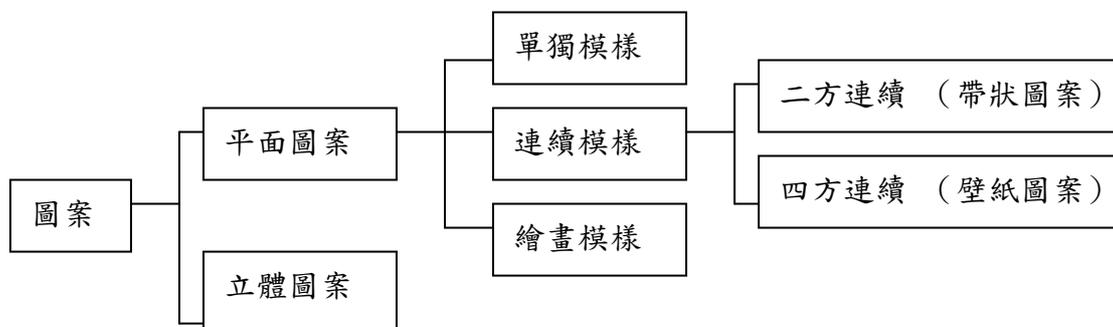


圖 2-1-1 圖案的分類

資料來源：“圖案”，凌春玉，1998，**藝術家雜誌**，273，371 頁。

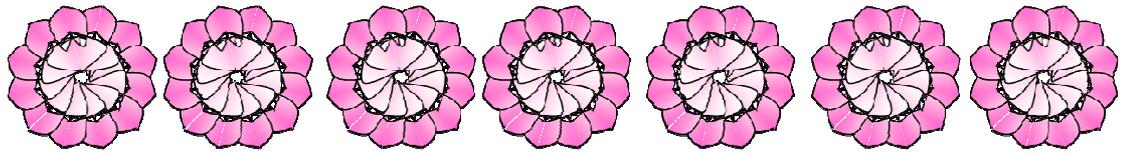


圖 2-1-2 二方連續（帶狀圖案）



圖 2-1-3 四方連續（壁紙圖案）

資料來源：Totally Tessellated 網站 <http://library.advanced.org/16661/>

所以，鑲嵌圖案是一種四方連續(壁紙圖案)的其中一種，除此之外，和普通圖案的區別在於鑲嵌圖案還需具有封閉外形，外形有明確的內側和外側，如圖2-1-4。而普通圖案則不一定具有封閉外形，如圖2-1-5。

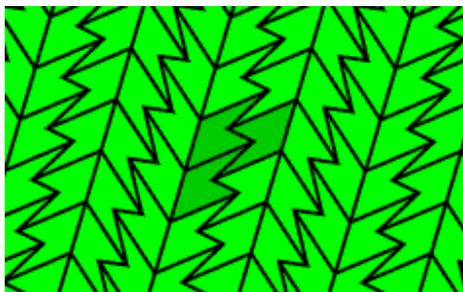


圖 2-1-4 具有封閉外形的圖形
資料來源：Totally Tessellated 網站
<http://library.advanced.org/16661/>

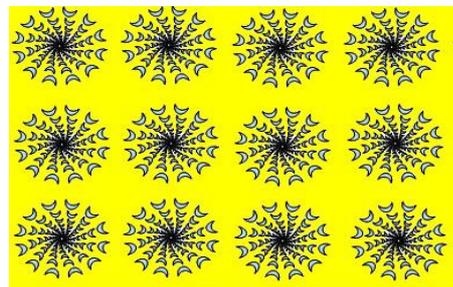


圖 2-1-5 不具有封閉外形的圖形
資料來源：自行繪製

我們還可以發現，這些美麗的圖案，皆被稱為鑲嵌圖案、磚瓦圖飾或馬賽克圖案。除了以鑲嵌 (tessellation) 這個詞彙出現外，在類似的圖案領域中，亦常見到鋪磚 (tiling) 和馬賽克 (mosaic) 這兩個詞彙，這幾個名詞常被混合使用，尤其在中文翻譯下，更常常是混淆不清的，因此探究這些名詞的字義、起源，將有助於我們去釐清研究範圍。

王士彥 (1979) 譯：「mosaic 為眾多藝術表現形式的一種，是指利用細碎材料，如紙張、天然或人造石材、玻璃片等所組合而成的圖畫而言。」大英百科全書指出馬賽克 (mosaic) 通常是用各種顏色的小塊材料如石塊、礦石、玻璃、瓷片、貝殼等緊密地拼集成各種圖案的裝飾工藝。而維基百科亦指出馬賽克 (mosaic) 是一種裝飾藝術，通常使用許多小石塊或有色玻璃碎片拼成圖案，在教堂中的玻璃藝品，又稱為花窗玻璃 (stained glass)。在拜占庭帝國時代，馬賽克隨著基督教興起而發展為教堂及宮殿中的壁畫形式，現今馬賽克泛指這種類型五彩斑斕的視覺效果。所以，馬賽克一詞多用在藝術、建築上，而較少使用在數學上。

維基百科指出鋪磚 (tiling) 有以下幾個意思：實際去鋪磚的行動、數學上的鑲嵌 (tessellation)、迴路編譯器的最佳化。鋪磚 (tiling) 在字典的解釋也是蓋瓦、貼磚、瓦面、磚面。曹亮吉 (2003) 認為平面鋪磚，廣義的說法就是鋪滿整個平面，磚可以任意形狀的。

而鑲嵌 (tessellation) 在字典上解釋為棋盤形嵌石飾，張瑜軒 (2002) 認為它的意思是「任何由不會相互重疊或留下空隙，而覆蓋平面的外形所構成的反覆性圖案」。維基百科認為鑲嵌 (tessellation) 來自於數學上的鋪磚 (tiling)，平面上的鑲嵌或鋪磚是指大量的平面圖形不重疊且沒有空隙密鋪滿整個平面，也可以是指平面或表面的部分鑲嵌，可以推展到高維度。這名詞常出現在 M. C. Escher. 的藝術裡，也遍及歷史、從古代建築學到現代的藝術。在拉丁文裡，"tessella" 是指一塊小的用來做馬賽克的泥塊、石頭或玻璃的立方體。這個字意思就是小方塊，從 "tessera" 轉化而來，在希臘文中的意思是 "數字四"。日常使用的鋪磚 (tiling) 是鑲嵌的應用，也與之相符。由以上所述，鑲嵌和鋪磚似乎是相同。

根據以下幾位學者的看法，他們認為鑲嵌和鋪磚是相同的字彙。Giganti and Cittadino (1990) 認為鑲嵌 (tessellation) 就是鋪磚 (tiling)，由多邊形和其他曲面形狀的重覆使用組成一個沒有縫隙和重疊的平面，就像是廚房或浴室地板的磁磚。Clauss (1991) 認為鑲嵌 (tessellation) 這個字來自於一個拉丁的字義：密鋪磚瓦 (to pave with tiles) 或組成馬賽克 (make a mosaic of)。他認為當多邊形恰好覆蓋滿整個平面，沒有空隙和重疊時，那個模式 (pattern) 構成就叫做鑲嵌 (tessellation)。

Cassidy (1998) 也認為鑲嵌 (tessellation) 就是磚瓦以重複模式 (pattern) 連結。但張瑜軒 (2002) 認為鋪磚 (tiling) 和馬賽克 (mosaic) 這兩個詞彙和鑲嵌 (tessellation) 雖易混淆但仍有區別的，她認為鋪磚 (tiling) 和馬賽克 (mosaic) 通常是指多邊形所構成的圖案，多邊形是由直線段所構成封閉平面外形，而沒有曲線。但是，鑲嵌 (tessellation) 沒有受限於多邊形，任何有機、不規則、彎曲的線條皆可成立。

綜合以上所述，可以界定所謂平面上的鑲嵌是指數個平面圖形，以邊相鄰拼接後，不重疊且沒有空隙密鋪滿整個平面，可以無限的向四方延展。另外，可以發現鑲嵌 (tessellation) 和鋪磚 (tiling) 都是很常用的字詞，大多數會混用並沒有很明顯的區別，但是馬賽克 (mosaic) 較少使用在數學方面去探討圖形的性質，而偏向藝術和建築方面。正因鑲嵌 (tessellation) 一詞在數學上的使用較為廣泛，多邊形及非多邊形組成皆包含在內，涵蓋較廣未有爭議性，且本研究將讓學生先探討多邊形性質後延伸至非多邊形的創作，因此，本研究將使用鑲嵌 (tessellation) 一詞，之後論述也將以鑲嵌 (tessellation) 來統一稱呼。

2.1.2 鑲嵌圖案的分類與構成

平面上的鑲嵌簡單分為兩大類，多邊形鑲嵌 (Polygonal tessellations) 和非多邊形鑲嵌 (Nonpolygonal tessellations)。Grunbaum and Shephard (1986) 將鑲嵌完整分類如下所述，多邊形鑲嵌的可分為不是正多邊形構成的不規則鑲嵌 (Non-regular tessellations)，以及由正多邊形構成的 K 律鑲嵌 (K-uniform tessellations)，K 是圖形內頂點構成方式的種類，若只有一種則稱為一律鑲嵌，有二種則稱為二律鑲嵌，以相同的命名法，可類推至高律鑲嵌。K 律鑲嵌 (k-uniform tessellations) 中最常探討是一律鑲嵌 (1-uniform tessellations) 和二律鑲嵌 (2-uniform tessellations)，這兩種。常見的一律鑲嵌，又稱為阿基米德鑲嵌 (Archimedean tessellations)，包含規則鑲嵌 (Regular tessellations) 圖案、半規則鑲嵌 (Semi-regular tessellations) 圖案兩種。而二律鑲嵌 (2-uniform tessellations) 即次規則鑲嵌 (Demi-regular tessellations)，又稱為多形鑲嵌 (Polymorph tessellations)。林壽福 (2006) 認為半規則鑲嵌中有不只一類頂點的，就是不完全鑲嵌。而有兩類頂點的就是二律不完全鑲嵌，應是將 "demi" 也翻譯為 "半"，而和 "semi" 的 "半" 產生混淆。所以研究者將 "k-uniform tessellations" 直接翻成 "K 律鑲嵌"，而有兩種頂點稱為二律鑲嵌，也就是 "Demi-regular tessellations"，因為 "demi" 有一半、不完全、合成、混合或次等之意，為了避免和半規則鑲嵌或不規則鑲嵌混淆，所以翻譯成次規則鑲嵌。完整

的鑲嵌圖案分類如圖 2-1-6 所示：

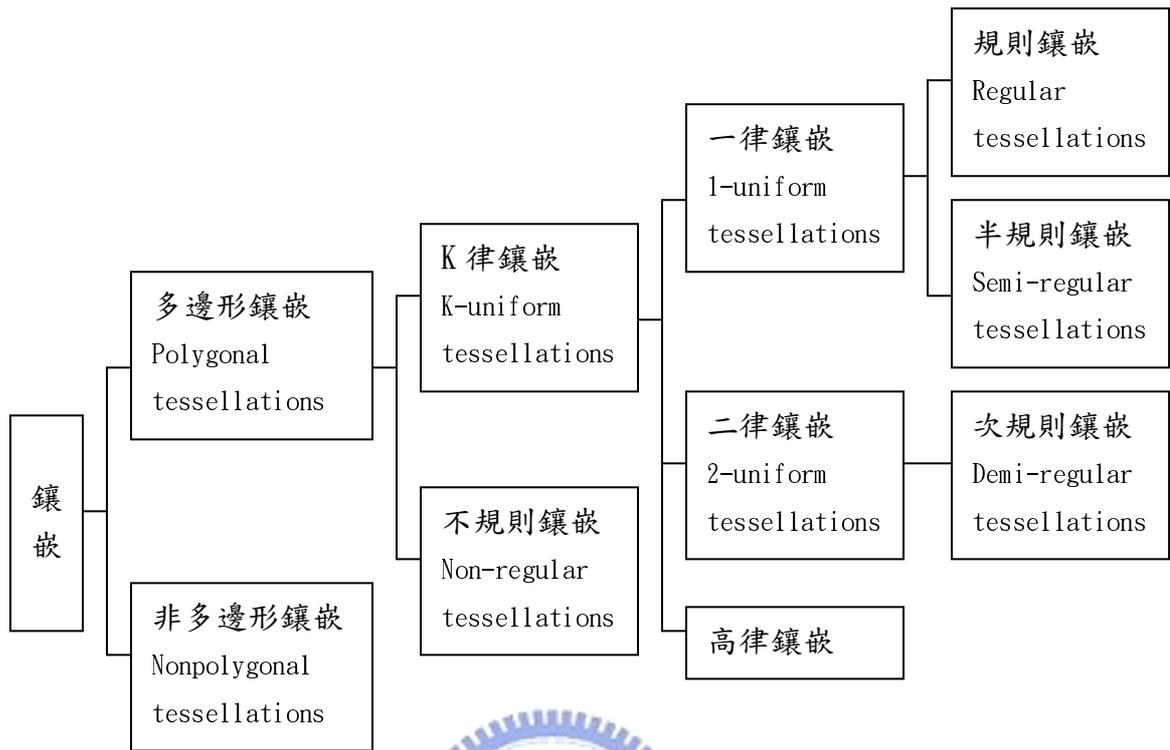
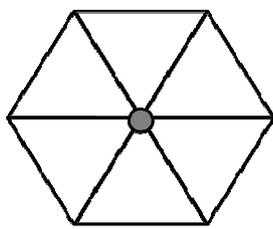


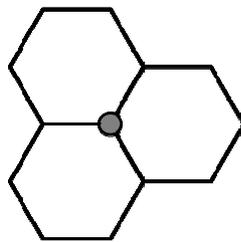
圖 2-1-6 鑲嵌圖案的分類

因為非多邊形的圖案也是來自於多邊形所組成的鑲嵌為骨格 (lattice) 發展而來，像常見的荷蘭畫家 Escher 擅長利用這不規則的線條創作的作品，所以多邊形鑲嵌是重要的基礎。

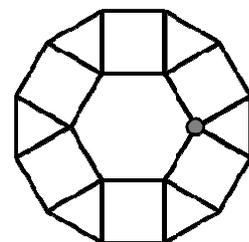
多邊形鑲嵌要沒有縫隙且不重疊，所以多邊形以頂點相接，以此頂點為中心相鄰每個內角加起來需滿足360度。另外，為了標示以及敘述方便，鑲嵌圖案有一定的命名方式，它的原則是任意選擇一個頂點，由與這個頂點接觸的多邊形中邊數最少的開始繞一圈，將所有的多邊形邊數記下，直到回到最先的那個多邊形。如下圖2-1-7所示。



(3, 3, 3, 3, 3, 3)



(6, 6, 6)



(3, 4, 6, 4)

圖 2-1-7 多邊形鑲嵌圖形命名

若圖形為正多邊形，邊數為 n_i ，則其任一內角為 $\frac{(n_i-2)\pi}{n_i}$ ， $\pi=180^\circ$ 。假定有 r 個正多邊形（其邊數分別為 n_1, n_2, \dots, n_r ），將這 r 個正多邊形的邊數以序列 (n_1, n_2, \dots, n_r) 來表示，由於這 r 個正多邊形可以接在同一點，角度和為360度，我們可以列出式子（1）：

$$\frac{(n_1-2)\pi}{n_1} + \frac{(n_2-2)\pi}{n_2} + \dots + \frac{(n_r-2)\pi}{n_r} = 2\pi \quad (1)$$

化簡後，可以得到式子（2）：

$$\frac{(n_1-2)}{n_1} + \frac{(n_2-2)}{n_2} + \dots + \frac{(n_r-2)}{n_r} = 2 \quad (2)$$

可以得到 $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$ 、 $(3, 3, 3, 3, 6)$ 、 $(3, 3, 3, 4, 4)$ 、 $(3, 3, 4, 12)$ 、 $(3, 3, 6, 6)$ 、 $(3, 4, 4, 6)$ 、 $(3, 7, 42)$ 、 $(3, 8, 24)$ 、 $(3, 9, 18)$ 、 $(3, 10, 15)$ 、 $(3, 12, 12)$ 、 $(4, 4, 4, 4)$ 、 $(4, 5, 20)$ 、 $(4, 6, 12)$ 、 $(4, 8, 8)$ 、 $(5, 5, 10)$ 、 $(6, 6, 6)$ 這17種組合。

將這17種組合，整理後可以得到， $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$ 、 $(3, 3, 3, 3, 6)$ 、 $(3, 3, 3, 4, 4)$ 、 $(3, 3, 4, 3, 4)$ 、 $(3, 3, 4, 12)$ 、 $(3, 4, 3, 12)$ 、 $(3, 3, 6, 6)$ 、 $(3, 6, 3, 6)$ 、 $(3, 4, 4, 6)$ 、 $(3, 4, 6, 4)$ 、 $(3, 7, 42)$ 、 $(3, 8, 24)$ 、 $(3, 9, 18)$ 、 $(3, 10, 15)$ 、 $(3, 12, 12)$ 、 $(4, 4, 4, 4)$ 、 $(4, 5, 20)$ 、 $(4, 6, 12)$ 、 $(4, 8, 8)$ 、 $(5, 5, 10)$ 、 $(6, 6, 6)$ 這21組排列。

不過經由實際繪製後，可以發現只有 $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$ 、 $(3, 3, 3, 3, 6)$ 、 $(3, 3, 3, 4, 4)$ 、 $(3, 3, 4, 3, 4)$ 、 $(3, 6, 3, 6)$ 、 $(3, 4, 6, 4)$ 、 $(3, 12, 12)$ 、 $(4, 4, 4, 4)$ 、 $(4, 6, 12)$ 、 $(4, 8, 8)$ 、 $(6, 6, 6)$ ，這十一種能繪製成不同且連續的鑲嵌圖形。這十一種由正多邊形構成的鑲嵌圖形，且每個頂點的組成方式只有單純一種，稱為一律鑲嵌（1-uniform tessellations）。又可以分為規則鑲嵌（Regular tessellations）和半規則鑲嵌（Semi-regular tessellations）兩種。

規則鑲嵌（Regular tessellations），是指由相同的數個正多邊形以邊相鄰拼接後，不重疊且沒有空隙密鋪滿整個平面，可以無限的向四方延展。這邊的正多邊形，指的是每邊長度相同、每個角度數相同的多邊形。所以有 $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$ 、 $(4, 4, 4, 4)$ 、 $(6, 6, 6)$ 三種，如圖2-1-8所示。

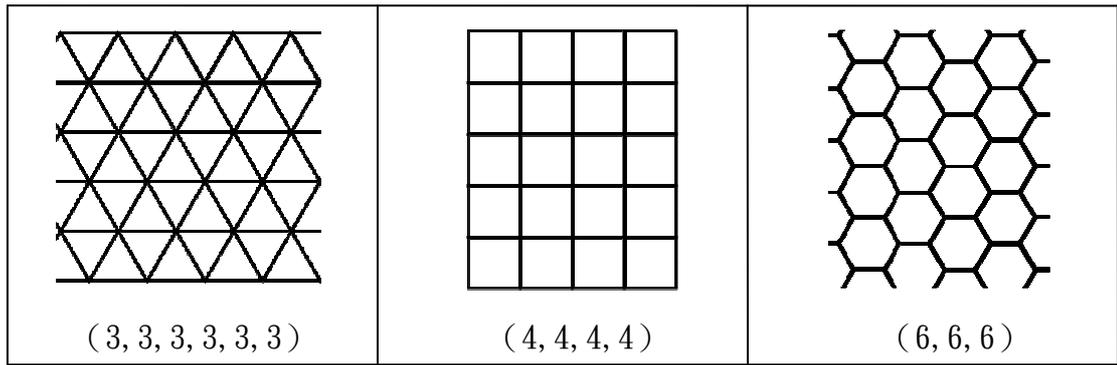


圖 2-1-8 規則鑲嵌的種類

資料來源：運用二維對稱特性建構雙瓦片鋪磚之研究（頁17），蕭慶利，2007，
國立交通大學理學院網路學習學程碩士論文，新竹市。

半規則鑲嵌 (Semi-regular tessellations)，是指由兩種或兩種以上的數個正多邊形以邊相鄰拼接後，每個頂點的組成方式只有一種，不重疊且沒有空隙密鋪滿整個平面，可以無限的向四方延展。有 (3, 3, 3, 3, 6)、(3, 3, 3, 4, 4)、(3, 3, 4, 3, 4)、(3, 6, 3, 6)、(3, 4, 6, 4)、(3, 12, 12)、(4, 6, 12)、(4, 8, 8) 這八種，如圖2-1-9所示。

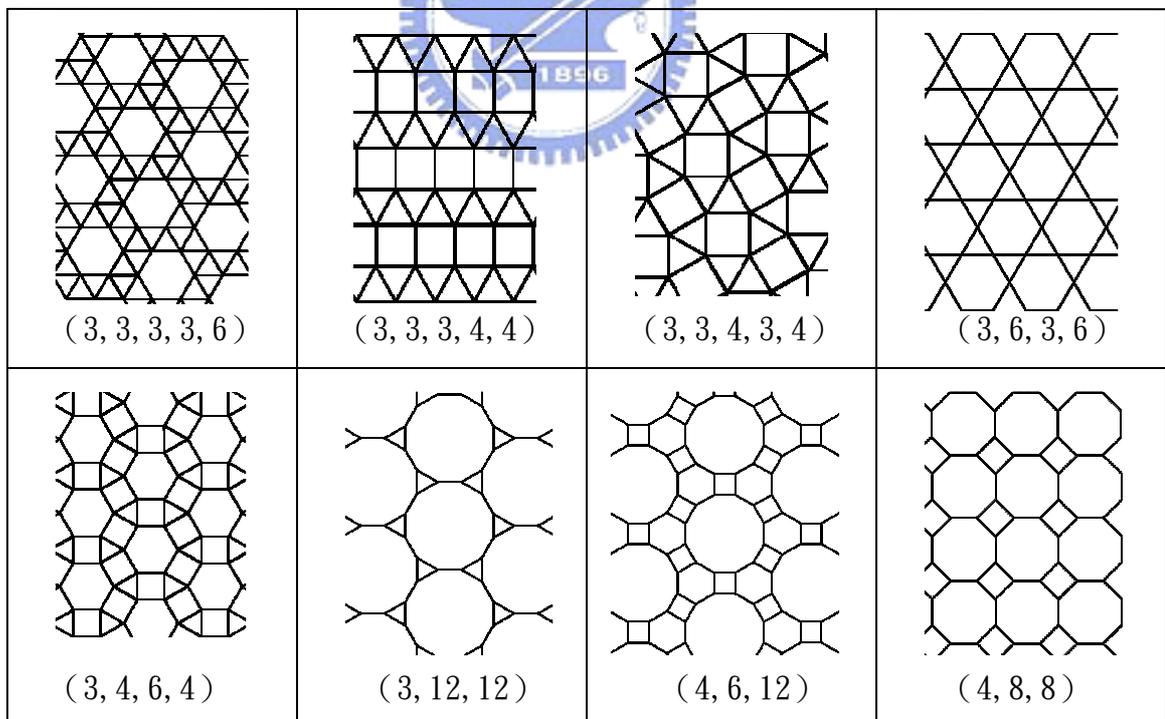
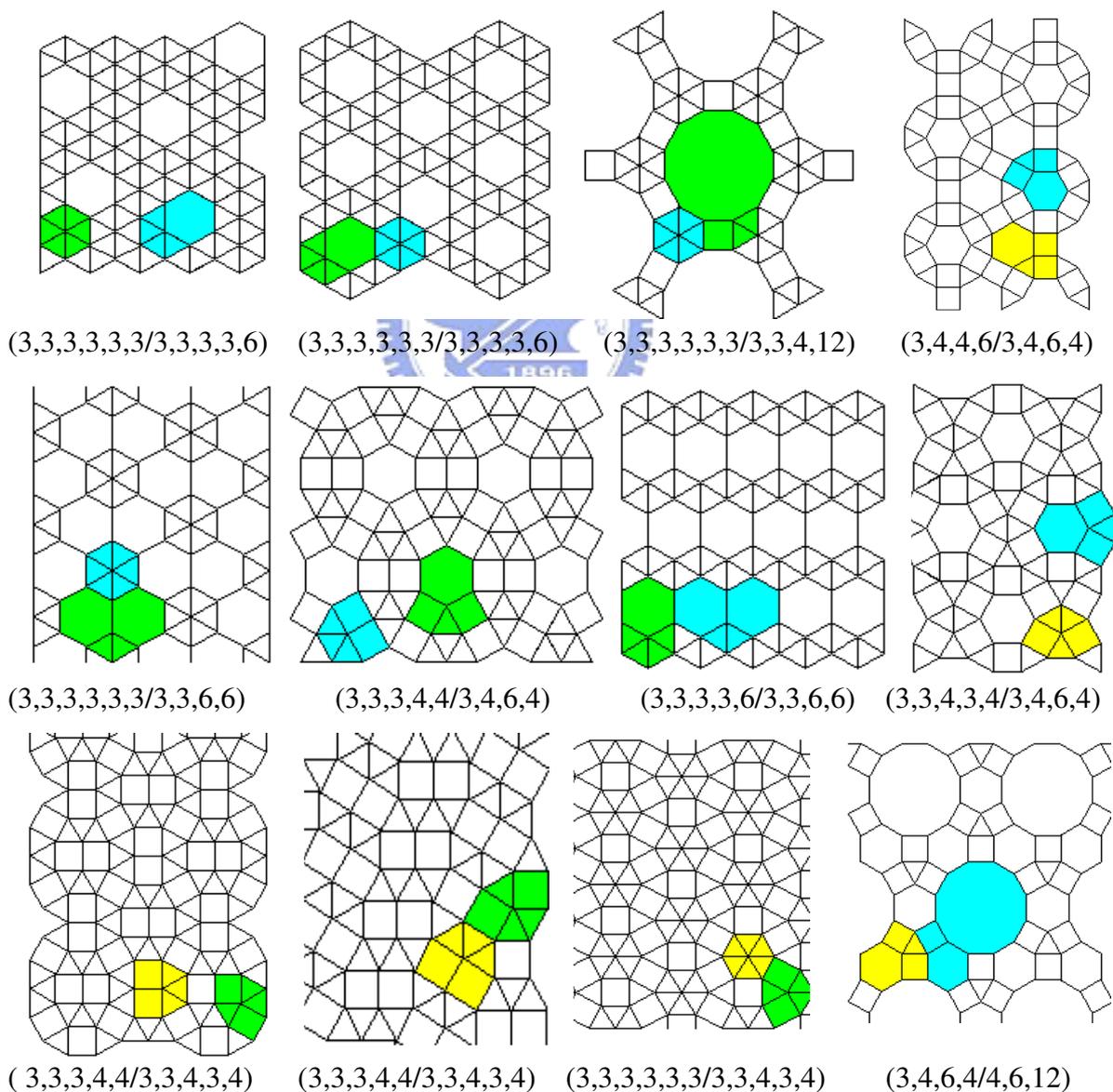


圖 2-1-9 半規則鑲嵌的種類

資料來源：運用二維對稱特性建構雙瓦片鋪磚之研究（頁17），蕭慶利，2007，
國立交通大學理學院網路學習學程碩士論文，新竹市。

二律鑲嵌 (2-uniform tessellations) 即是次規則鑲嵌 (Demi-regular tessellations)，是指由兩種或兩種以上的數個正多邊形以邊相鄰拼接後，頂點的組成方式共有兩種，不重疊且沒有空隙密鋪滿整個平面，可以無限的向四方延展。有

(3, 3, 3, 3, 3, 3/3, 3, 3, 3, 6)、(3, 3, 3, 3, 3, 3/3, 3, 3, 3, 6)、(3, 3, 3, 3, 3, 3/3, 3, 4, 12)、
 (3, 4, 4, 6/3, 4, 6, 4)、(3, 3, 3, 3, 3, 3/3, 3, 6, 6)、(3, 3, 3, 4, 4/3, 4, 6, 4)、
 (3, 3, 3, 3, 6/3, 3, 6, 6)、(3, 3, 4, 3, 4/3, 4, 6, 4)、(3, 3, 3, 4, 4/3, 3, 4, 3, 4)、
 (3, 3, 3, 4, 4/3, 3, 4, 3, 4)、(3, 3, 3, 3, 3, 3/3, 3, 4, 3, 4)、(3, 4, 6, 4/4, 6, 12)、
 (3, 4, 3, 12/3, 12, 12)、(3, 4, 4, 6/3, 6, 3, 6)、(3, 4, 4, 6/3, 6, 3, 6)、(3, 3, 6, 6/3, 6, 3, 6)、
 (3, 3, 3, 4, 4/4, 4, 4, 4)、(3, 3, 3, 4, 4/4, 4, 4, 4)、(3, 3, 3, 3, 3, 3/3, 3, 3, 4, 4)、
 (3, 3, 3, 3, 3, 3/3, 3, 3, 4, 4) 這二十種，如圖 2-1-10 所示。



(續下頁)

(接上頁)

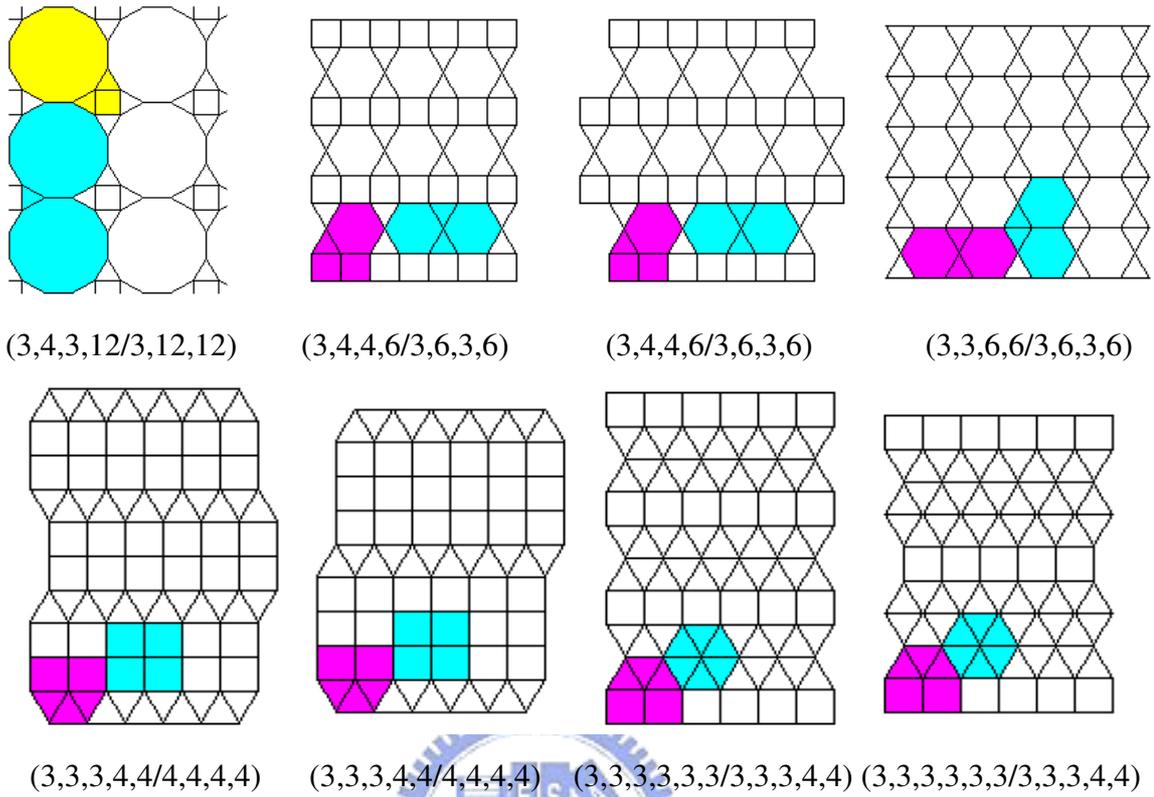


圖 2-1-10 次規則鑲嵌的種類

資料來源：*Uniform Tilings*, by Dutch, S., 1999,
<http://www.uwgb.edu/dutchs/symmetry/uniftil.htm>.

不規則鑲嵌 (Non-regular tessellations)，是指由數個任意的不規則多邊形以邊相鄰拼接後，不重疊且沒有空隙密鋪滿整個平面，可以無限的向四方延展。因不規則鑲嵌的圖形很多，無法一一列舉，僅舉幾個例子，如圖 2-1-11 所示。

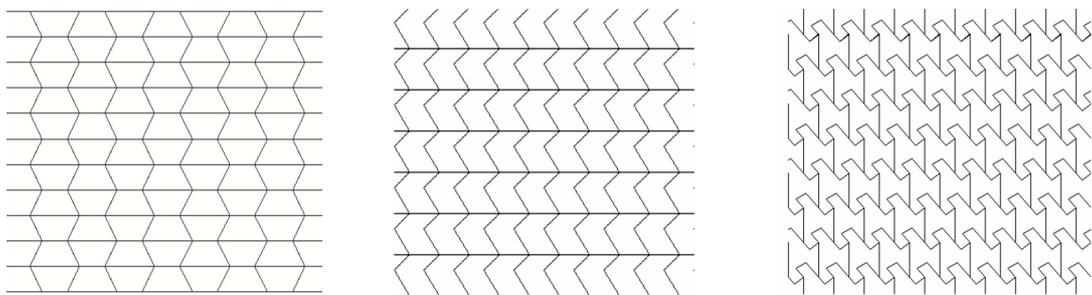


圖 2-1-11 不規則鑲嵌

非多邊形鑲嵌 (Nonpolygonal tessellations)，是指由數個任意的非多邊形，可以是曲線，相鄰拼接後，不重疊且沒有空隙密鋪滿整個平面，可以無限的向四方延展。非多邊形鑲嵌可以由多邊形變化而來，如圖 2-1-12 所示。

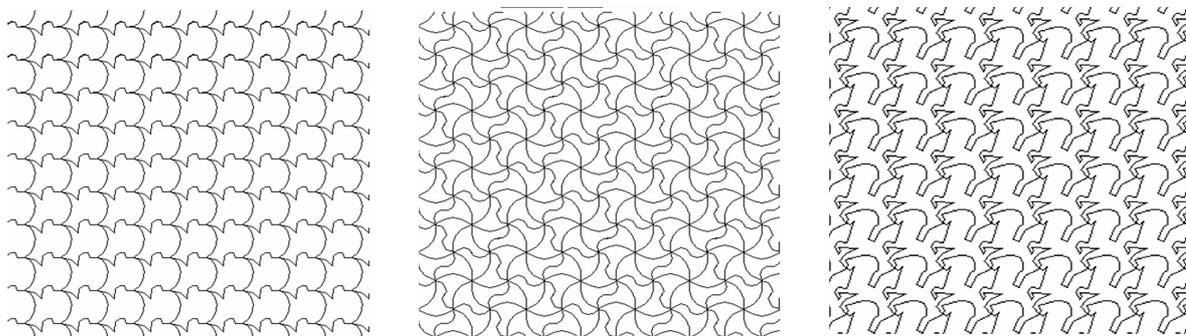


圖 2-1-12 非多邊形的鑲嵌

2.1.3 鑲嵌的文獻研究

鑲嵌在歷史上從古至今一直扮演著藝術角色，從蘇美人、埃及人、非洲摩爾人、波斯人、希臘人、羅馬人、拜占庭人、阿拉伯人、中國人，都可在他們的文化中發現幾何裝飾藝術。最具代表性的是位於西班牙的伊斯蘭回教建築—阿罕布拉 (Alhambra) 宮殿，是十四世紀時非洲摩爾人佔據西班牙後留下的阿拉伯式宮殿遺跡，全殿天花板、地板、牆壁都用這些鑲嵌圖案來裝飾。荷蘭版畫家 Escher 正是造訪了阿罕布拉後，受啟發而利用錯視原理及數學概念，創作出數千幅平面規則分割圖案。其作品文獻相當豐富，其中鑲嵌畫除了在藝術領域外，在數學方面也常被提及，成為平面鑲嵌圖案領域著名的代表人物。在數學領域上，學者提出以群論作為 Escher 鑲嵌圖案構成的理論依據 (Coxeter, Emmer, Penrose, & Teuber, 1986; Grunbaum & Shephard, 1986)。但其複雜的數學專業術語，較不易被普通大眾所理解，因而資料有限 (張瑜軒，2002)。

近年來，正因為鑲嵌在藝術、歷史、數學、建築上廣泛地出現，生活中處處皆可見其蹤跡。而探究鑲嵌圖案如何形成，也能尋找數學上的樣式、對稱性和規則性。因此，一些數學教師在幾何單元教學時，尤其是教導多邊形概念或是生活化數學，會進行鑲嵌教學，讓學生去建立發展他們的藝術創造力並能夠加強他們數學上的空間概念。另一個原因是藉由和藝術的結合以及創造，能增加數學課程的趣味性。Granger (2000) 提及身為一位小學教師，感受到學生對於學校的感覺是負面的，尤其是數學課，新學年開始的熱忱往往很快地被大量憂慮所取代，因此，應該向學生展現數學之美，數學也可以是藝術。Giganti and Cittadino (1990) 也指出學生應該去實踐經驗和領略數學之美，

而鑲嵌就是結合數學與藝術的計畫。基於這些理由，鑲嵌開始出現在數學教學活動中，鑲嵌的教學研究整理如下，如表 2-1-1。

表 2-1-1 鑲嵌研究整理

| 研究者 | 教學對象 | 教學內容結果 |
|----------------------------|-------|---|
| Giganti & Cittadino (1990) | 小學三年級 | 讓學生使用正方形、菱形、三角形、六角形、矩形教具，闡明鑲嵌概念，舉生活實例說明，介紹邊、反射、旋轉等數學術語，並操作驗證五邊形、各種四邊形和正三角形是否能鑲嵌，展示 Escher 作品，並讓學生親自利用平移、旋轉、中點旋轉技巧創造鑲嵌圖形。鑲嵌是任務導向的數學，涵蓋許多數學課程，能協助學生了解多邊形、多邊形的關係以及密鋪平面的的概念和過程。 |
| Clauss (1991) | 中小學生 | 探索非正五邊形鑲嵌，讓學生將各種五邊形鑲嵌好，讓他們測量角度發現規則，學生可以塗色，展示 Escher 作品，讓學生創作設計。學生能從其中發現鑲嵌的點和角度關係，以及覺得數學是有趣的。 |
| Johnson & Kashef (1996) | 任何年級 | 簡單介紹規則鑲嵌、半規則鑲嵌的意義後，利用正三角形、正方形、正六邊形，利用平移和旋轉技巧創作鑲嵌圖形，甚至可以同時反射和旋轉，學生可以用手或電腦繪圖，並加上藝術性。鑲嵌可以提供有趣的課堂活動，讓學生了解對稱性和樣式，結合數學與問題解決技巧，能整合學校課程、數學、藝術和科學課。 |
| Cassidy (1998) | 小學六年級 | 學生在美術課以正方形利用平移技巧創作鑲嵌圖形後，可利用彩色鉛筆在圖形上塗色與作圖。要求學生模仿 Escher 做二維到三維的轉換。學生的美術作品不只建立視覺和良好的動作技巧，且有能力去做機智的連結，產生創造性的問題解決。 |
| Granger (2000) | 小學五年級 | 介紹 Escher 作品引起動機，讓學生看到其中的樣式 (pattern)，介紹利用平移、旋轉創造簡單的鑲嵌，讓孩子動手做，並應用電腦科技設計複雜的鑲嵌，並將作品轉印在衣服上。能提升學生興趣，正向看待數學，不再只是演算，而是認知的一部份。學到不同角度特性、對稱性、鑲嵌條件。 |

(續下頁)

| | | |
|---|-----------|---|
| Peterson (2000) | 中學生 | 從足球場地引起動機，提供正三角形到正十二邊形，讓學生進行規則鑲嵌、半規則鑲嵌、讓學生討論鑲嵌和內角角度的關係，並探討有哪些種類，進一步探索多面體種類。這些活動探討正多邊形內角的測量，連結了鑲嵌，多面體和實際的應用。不需特別計算，結果會引領學生進行討論，可以獲得數學上的概念。 |
| Hale (2003) | 小學四年級和五年級 | 學生以正方形利用平移技巧創作鑲嵌圖形，在不同色紙上複製，並貼在白紙上。藉由鑲嵌他們可以探索對比、維度、錯誤觀念、重複性、變化以及無窮性。 |
| Furner, Goodman & Meeks (2004) | 小學二年級和四年級 | 課程配合四年級程度，但方法變化以適合兩個年級，先看影片介紹日常生活鑲嵌，讓學生探索樣式和如何生成，以影片解釋教學，讓學生動手密鋪平面，父母協助以正方形利用移動技巧創造鑲嵌。之後兩人一組將圖案用粉筆畫在學校人行道上。學生能具體操作抽象概念，教師和孩童對於使用教具、合作學習、問題解決更有自信。 |

以上關於鑲嵌教學研究其實並不多，而且並非完整的教學實驗，亦不嚴謹，而幾乎只是教學活動的設計，部分研究有實際進行教學並簡單記錄下學生的反應以及老師的回饋和感想，部分研究甚至沒有提及是否有實際進行教學。而所有研究的量化數據也未呈現，質化的資料分析也很薄弱，甚至教學設計部分的細節沒有完整。而這些活動設計幾乎是國小階段，認為鑲嵌不是非常需要依賴數字技巧，所有學生都有能力創造美麗的鑲嵌藝術，所以大多以創造性的活動為主，將鑲嵌簡化用淺顯的基礎數學，落實於數學教學實務中。然而如 Johnson and Kashef (1996) 所說的鑲嵌以最簡單的樣式對於年輕的孩童可以當一個應用的數學活動；以最複雜的樣式可以提供數學家 and 藝術家挑戰。所以 Peterson (2000) 的研究亦顯示，鑲嵌對於中學生而言，可以引入更深入的數學概念，如多邊形的內角和鑲嵌需要的幾何條件、探討樣式規則、規則鑲嵌和不規則鑲嵌的種類，也能建構幾何的觀念。

正因鑲嵌活動能夠提升學生數學上的概念和啟發創造性，鑲嵌教學活動也常於國外課堂進行。但完整的研究確實少之又少，通常只著重於最後創造性的活動，這是非常可惜的。而國內這幾年，雖然已可見到鑲嵌活動的蹤跡，如曹亮吉 (2003) 的平面鋪磚、數學真魅 (2008) 的密鋪欣賞，但完整的教學活動仍然有限。即使在國中二年級課本，

關於多邊形的介紹，往往如數學部編版教科書第四冊第二章第二節所述，僅簡短介紹規則鑲嵌的部分，探討正多邊形地磚能否鋪滿地面，甚至也沒提及鑲嵌這個名詞。研究者在教學上也發現這樣的教學內容導致學生易產生只有正多邊形才能鑲嵌，以及大多認為要同一種正多邊形才能鑲嵌的迷思。所幸，林壽福（2006）設計了一個內容較完整的鑲嵌圖形教案，引領學生探索磚瓦（鑲嵌）飾的奧妙。

林壽福（2006）進行兩次實驗教學，第一次在學期中教學，班級組成由各班遴選出入學測驗英數成績優異者、入班測驗優異者或家長推薦數學能力佳者，每週僅一節課，又因各班放學時間不一，大多數常遲到十五分鐘以上，學生心態鬆散，教師不易掌握進度，且人數多達 48 位以致於討論不易，因此在國一上教學並未成功，也沒有學生將八種半規則鑲嵌完整拼出。且紙板製作很花時間，容易有誤差，所以安排了第二次為期一天半的教學。第二次以國一升國二的學生在暑假實施實驗教學，一組 12 人利用紙板為具體教具，另一組 24 人利用電腦上 GSP 軟體的模板，進行五個活動共十一節課的教學。第一個活動由欣賞圖片引起動機，熟習軟體後，引入規則鑲嵌進行正多邊形的鑲嵌，讓學生能找出規律並說明鑲嵌的理由。第二個活動利用因數倍數概念，透過不定方程式求解，並以模板驗證，找出所有半規則鑲嵌的解。第三個活動辨識與操弄半規則鑲嵌和不完全規則鑲嵌的圖形，作出幾何上的解釋，並進行對偶圖形和頂點圖形的探索和分析。第四個活動利用一筆畫原理解決校園步道問題，嘗試可以排出的五邊形和六邊形鑲嵌，利用模版探索任意三角形和四角形鑲嵌的原理。第五個活動嘗試運用平移、旋轉等技巧，創造自己的鑲嵌圖形。但實際上只實驗了前四個活動共九節課，且 GSP 組有兩位學生第二天即請假出國旅遊。

這兩次實驗教學涵蓋國中程度的鑲嵌內容，內容相當多也很豐富，雖然已將第一次活動的缺失修改並進行第二次活動，但仍美中不足，如林壽福（2006）提到原本有意做教學成效分析，但這份教材份量多且深，學生需要較長時間思考蘊釀，而上課時間不足，課程規劃也有些倉卒，又在暑假中進行，來不及收回學生作業與個別晤談，因此無法深入分析。且第五個活動來不及完成，僅稍加介紹平移的鑲嵌作品，其餘當回家作業，課程中設計一個機器人的畫面來進行平移教學，但裝飾過多學生無法發現是利用平移概念。除此之外，尚有可改進之處，我們將整理如下：

1. 樣本選擇非一般班級：課程設計針對數學程度較佳的學生，無法了解到一般程度學生的學習狀況。
2. 反應性問題：由於第二次實驗對象，在學期中已用紙板上過課，在暑假才又分為兩組以不同教具上同樣單元，若以準實驗設計探討兩種教具成效時，可能會影響實驗結果。

3. 實驗組和控制組人數不一：用 GSP 操作教學組 24 人，用紙板操作教學組 12 人，人數差距大且未說明用什麼方法將學生分為實驗組和控制組。
4. 選取樣本不等：未做前測，無法知道實驗組和控制組兩組學生程度是否一致。
5. 活動中學生自由分組，每組程度可能不一。
6. 製作及熟悉教具耗時：前兩節僅進行正則鑲嵌，雖然紙板操作組，已準備部份智慧片，但當場製作紙板教具仍然耗費時間；GSP 操作教學組，讓學生自行畫出正多邊形因有難度也耗費時間。
7. 實施課程時間不佳：在課後第八節或是暑假時間實施，易出現學生不積極、遲到或學生無法配合的問題，例如出國旅遊等。
8. 課程內容過多：教案課程設計堂數較多，時間過長不易實施，所以後面創作部份未完成，很可惜。
9. GSP 創作教學侷限於多邊形鑲嵌：弧線部份以事先做好的動畫為主，親自動手做部分是拉點改變基本圖形的邊，因此侷限於多邊形鑲嵌，而沒有弧線，無法像紙板組可以讓學生畫弧線。

鑲嵌教學活動能引發學生興趣，結合日常生活經驗，探索數學的幾何奧妙，能讓學生由操作中培養數學概念。由以上的文獻可知，鑲嵌教學可深可淺，只要課程內容設計妥當，應可以在國中普通班進行教學，並在學期中實施，而不再只是國小學生的數學創作遊戲或是國中資優生的專利。可以調整授課內容，事先準備好教具以縮短時間，安排讓學生探索規則鑲嵌、半規則鑲嵌、不規則鑲嵌的種類，了解內角和及鑲嵌的條件，再進行創造活動。另外，進行實驗研究應以嚴謹的教學實驗研究設計，兩組人數應該相近，進行前測與後測，控制兩組的教學內容及流程一致，以檢驗使用不同教具的成效，並觀察收集質化資料，讓結果分析更完整，以供日後從事相關內容的研究者參考。

2.2 虛擬教具和傳統教具的探討

本節將分別就「傳統教具(Physical manipulatives)的探討」、「虛擬教具(Virtual manipulatives)的探討」兩個部份來說明探討。

2.2.1 傳統教具(Physical manipulatives)的探討

傳統教具的使用在數學的教與學上已有長遠的歷史，我們將在此節探討什麼是傳統教具。Terry (1995) 認為傳統教具是能被學生和教師操作和安排的物體，促進抽象數學概念的理解。Perl (1990) 認為傳統教具是可以被拿起、旋轉、重新排列，被收集的真實物件。因此，我們可以定義所謂傳統教具是能被學生和教師作拿起、旋轉、重新排列、收集等實際操弄，幫助學生理解抽象的數學概念的真實物件。王智弘 (2006) 更進一步將傳統教具分類為平面教具和立體教具兩種。

國中常見的平面教具有圖卡、圖表、掛圖等，用於幾何圖形、直角座標、統計圖表和機率的教學上，教師通常使用這些平面教具來展示圖形、佈題、標示方位、節省畫圖的時間等，例如教師使用幾何圖形的圖卡來介紹各種四邊形的對角線性質。而常見立體教具有各種立體模型、圓規、三角板、因式分解的拼版、骰子等，用於幾何圖形、尺規作圖、因式分解和機率的教學上，教師通常使用這些立體教具來介紹立體圖形及展開圖、繪製圖形、理解因式分解、實際操作等，例如教師使用圓規繪製任一三角形的全等圖形。

Sobol (1998) 相信課堂經驗應以孩童的主動經驗為基礎，從具體到抽象，從特殊性到一般化的歷程。而教具能透過表徵樣式以簡化抽象理解幫助學生從具體過渡到符號 (Kim, 1993)。Drickey (2000) 也指出教具的使用能幫助學生建構數學抽象世界的意義及提供不同的情境以連結學生已知及未知的知識。因此，在學生學習數學的過程中教具便扮演了重要的角色。許多研究顯示，在數學課室中使用教具學習數學的學生比未使用教具者表現得更好 (Raphael & Wahlstorm, 1989; Sowell, 1989)。

Fennema (1972) 比較十六個關於傳統教具之使用效能的研究後，建議雖然教具不是萬靈藥，但是需要包含在數學教學內，因為教具可以幫助建構有意義的數學抽象世界、提供多種協助知識轉換的情境、增進積極性、協助教師洞察孩童的思考。Parham (1983) 也對六十四個探討小學階段傳統教具使用在成就上之影響的調查研究做過分析，發現使用教具的學生在加州成就測驗上的得分大概是第八十五個百分位數，而沒使用教具的學生大概是第五十個百分位數。這些結果皆支持數學課堂上應使用教具，而且

教具的使用對於學生的學習成就分數有正面的影響。但部分研究者認為單純使用教具並不一定有助於學習 (Moyer, 2001)。

過去有些研究結果指出學生成就水準和老師使用教具上的經驗有關 (Raphael & Wahlstrom, 1989; Sowell, 1989)。Moyer and Jones (2004) 觀察師生在數學課堂上使用教具的方式，結果也顯示教師教具使用經驗、環境安排和控制方式會影響到學生。Mayer (2003) 的研究也顯示，加了動畫或圖等多媒體教具，不一定有助於學習，應該根據如何學習的認知理論設計，才能產生有意義的學習。因此，綜合以上所述，具有經驗和知能的教師若能妥善使用教具去指引學生，應該有助於學生學習數學概念。但大量使用教具於數學教學上的狀況並不如預期，其中可能的原因是教具的欠缺及使用者的專業知能的不足 (Dorward, 2002)。部份教師對於使用教具是恐懼的，因為很少使用教具或不知如何使用，擔心讓學生自由使用教具時會遺失或損壞、課堂上秩序會變得混亂 (Moyer & Jones, 2004)。另外的原因在於老師們擔心沒有足夠的教具分配給學生，課後清理收拾教具很費時，以及高年級或中學生會覺得傳統教具是給小孩子玩的 (Moyer, Bolyard, & Spikell, 2002)。所幸，隨著科技的進步，數學教具也有了新的變革 (張漢宜, 2002)。

2.2.2 虛擬教具 (Virtual manipulatives) 的探討

隨著近年來資訊科技的進步，電腦軟體的開發技術日新月異，網際網路的普及，電腦的個人化，許多研究者開始將電腦科技運用於教學。Char (1989) 指出不同學生需要不同的協助，單一種類的教具無法適用於每一個小孩。且大多學者肯定教具可以操作以及利用其他表徵來教授數學的功用，並結合目前新資訊科技的運用，於是有虛擬教具的產生。這是一種結合具體教具和電腦技術且適合國中小學生使用於數學學習的科技輔具 (袁媛, 2007)。虛擬教具是一種電腦技術產生的數位影像，看得到但無法實際觸摸，可以幫助學生建構抽象的數學概念的學習工具，且能呈現傳統教具能呈現或不能呈現的概念，在運用上比傳統教具更有彈性 (王智弘, 2006)。

是否電腦技術產生的數位影像即是虛擬教具? Spicer (2000) 提出網際網路上有兩種呈現被稱為虛擬教具，一種是具體教具的靜態視覺呈現，另一種是具體教具的動態視覺呈現。靜態視覺呈現是將傳統圖片由電腦技術繪製出來的虛擬影像，被投射在投影布幕或是繪製於黑板上，本質上就是圖片，雖然類似於具體教具，但學生無法以具體教具的方式操作。而動態視覺呈現是在電腦上的視覺圖像，雖然像被投射在投影布幕或是繪製於黑板上的圖片，但本質上是一個物件 (object)，類似於三度空間中以手操作的具體教具，學生可以用滑鼠去做出移動、翻轉、旋轉的動作。雖然目前很多人如 Spicer

一樣把出現在電腦螢幕上的靜態和動態的視覺呈現，只要是用電腦生成的具體教具影像都認為是虛擬教具。然而卻有學者提出不同的看法，認為靜態視覺呈現不是真正的虛擬教具。

Moyer, Bolyard, and Spikell (2002) 認為應該定義虛擬教具是互動的網際網路視覺呈現，可以建構數學知識的動態物件。他們認為如果透過網路取得即是虛擬的，而允許使用者互動使用，能提供發現及建構數學原理和關聯的機會，才是真正的虛擬教具。互動性亦能讓虛擬教具在教學應用時，可以提供學生即時性的回饋 (Clements & McMillen, 1996; Crawford & Brown, 2003; Durmus & Karakirik, 2006; Reimer & Moyer, 2005; Suh & Moyer, 2005)。一些學者認為，虛擬教具的即時回饋性可測知學生是否獲知數學的基礎知識，且能應用在問題解決的教學設計上 (Clements & McMillen, 1996; Durmus & Karakirik, 2006; Jacobs, 2005)。Suh and Moyer (2005) 發現，虛擬教具允許學生在一個安全的環境中實驗和測試假設，具有允許猜測和包容錯誤的特點。因此，使用是否有互動性存在是虛擬教具和非虛擬教具之間最大的差異點，所以除了靜態視覺呈現外，例如：點擊以後出現事先設好的答案和播出已設定好的動畫，只要不允許使用者直接操作或涉入，無法讓使用者扮演主動創造數學意義的角色，都不能納入虛擬教具。

虛擬教具的特色除了互動性外，開發虛擬教具的設計者，能夠在虛擬教具中特別強調出教學所欲傳達的概念 (Leathrum, 2001)。使用虛擬教具的教師可以傳達學科概念，建構知識基模和解決問題 (Heath, 2002)。NCTM (2000) 指出使用虛擬教具可以延伸兒童的具體經驗，能對複雜的觀念如演算法使用發展初步的了解。能使圖形、數字和文字及其它表徵同時出現在螢幕上，讓學生有機會進行符號表徵之間的連結 (Reimer & Moyer, 2005)。袁媛 (2007) 認為虛擬教具可以像視覺圖形表徵一樣豐富學生的視覺印象，也可以像操弄具體物表徵一樣。Steen, Brooks, and Lyon (2006) 提出虛擬教具能讓學生更專注，加強學習品質和提供適當的困難度。可以增加學生學習與教師教學的動機 (Clements & McMillen, 1996; Reimer & Moyer, 2005; Leathrum, 2001)。虛擬教具可能有助於身心障礙學生的學習 (Miller, Brown, & Robinson, 2002; Riley, Beard, & Strain, 2004)。另外，在使用選擇上還具有彈性，可以使用套裝軟體，也可以使用在網址上的虛擬教具，如NCTM、NLVM等，且因網路具有任何時間、地點、人皆可以取得的特性而更加便利。常只需一份虛擬教具軟體就可以提供多人使用，且現在虛擬教具多半可以免費使用。Moyer, Bolyard, and Spikell (2002) 也認為虛擬教具的特色還有以下幾點，例如可以任意加點、加線及塗色，也能複製很多，清理方便，以及高年級學生認為虛擬教具較精緻不俗套。

甚至，部分學者認為虛擬教具是有潛力去克服某些傳統教具的主要缺點(Char, 1989; Dorward, 2002; Perl, 1990; Sarama, Clement & Vukelic, 1996; Schielack, 1991)。Izydorczak (2003) 根據以上幾位學者的研究歸納整理出虛擬教具勝過傳統教具的八大優勢：

1. 虛擬教具可以自動監控學習活動。
2. 虛擬教具比實體教具更有擴展性。例如分數的程式可以將一個圓細分到 $1/100$ 如此細微，但實體教具則受限於物理的特性而無法做到。
3. 虛擬教具能提供新的能力或改變教具的性質。學生可以在軟體獲得某些概念上的輔助，是以前傳統探索上沒有出現的。例如Hands-On Math中算盤的使用，10個1可以被自動轉換為1個10，以至於交換過程可以忽視不考慮。
4. 虛擬教具比實體教具更易於操作。例如學生可以拼得更好，而且不會因為疏忽而弄散已經完成的部分成果，尺寸也更精確。
5. 虛擬教具用於大團體的教學比實體教具更容易操作。
6. 有些虛擬教具透過連結表徵，可以將數學符號及步驟和教具相結合。
7. 虛擬教具可以應付財務資源不足以及專業發展上不足的挑戰。
8. 虛擬教具所產生的班級管理問題較少。

綜合以上所述，既然虛擬教具有許多優點，而且虛擬教具有能力做的一些事情，實體教具常不可能做到，也符合目前資訊教育融入教學的潮流，照理而言，虛擬教具應該廣泛被使用在數學教學上，更是學生學習數學的良好輔助工具，也應該可以逐漸取代傳統教具，成為教具的新主流。然而到目前為止，在教學現場虛擬教具的使用並不普及，且對於是否能真的取代傳統實體教具，學者間也有不同的看法。在課堂上使用虛擬教具教學研究仍有限，探究可能的一個原因是教師欠缺使用虛擬教具從事數學教學的知能(Reimer & Moyer, 2005)。原本在傳統教具上，因為教師的專業知能的不足已影響使用且部份教師對於使用教具是恐懼的(Dorward, 2002; Moyer & Jones, 2004)，更何況是需要使用新科技的虛擬教具，這使得相關的實證研究仍舊很少，使用成效等各項研究結果也極為有限。

近年來國外大型學術單位與美國數學教師協會(NCTM)正致力於虛擬教具的開發及提供教學說明指導，方便現場教師的使用，關於虛擬教具的研究報告也陸續出現。雖然國內在虛擬教具方面的研究起步較晚，但也開始有研究團隊投入這領域的開發，部分研究結果並已在研討會中發表(Yuan, 2005; Yuan & Lee, 2004; Yuan, Lee, & Huang, 2007)。這些國內外的研究報告的出現為使用虛擬教具提供了部份的實證研究結果，如表2-2-1。

表 2-2-1 使用虛擬教具的部份研究結果

| 研究者 | 研究主題 | 研究對象 | 研究結果 |
|---|----------------------|--------------|---|
| Drickey (2000) | 形象化和空間推理技巧 | 219 位六年級學生 | 三組的分數沒有顯著差異，但虛擬教具組專注比率較高。 |
| Moyer, Niezgoda & Stanley (2005) | 探討幼稚園兒童的類型製造活動 | 18 位全日班的兒童 | 兒童使用虛擬教具時，比具體教具以及紙筆另兩種表徵，使用較多積木數，能創作類型較多元及有變化。 |
| Moyer, Niezgoda & Stanley (2005) | 探討使用虛擬十進位積木的成效 | 19 位國小二年級兒童 | 透過虛擬教具的視覺印象後，兒童能解釋 10 個 1 變成 1 個 10 的位值概念，解題策略也趨一致（多用位值及算式，不再用數數）。 |
| Reimer & Moyer (2005) | 探討學習分數概念的成效 | 19 位國小三年級學生 | 概念知識顯著提高但程序計算技能沒有顯著差異。學生認為虛擬教具可以立即回饋、比紙筆快、更喜歡學數學。 |
| Suh (2005) | 分數加法和等號對稱性 | 國小三年級 2 個班 | 虛擬教具組表現較好。學生更清楚分數計算過程，立即回饋性也是學好分數加法的原因。 |
| 王智弘 (2006) | 探討多方塊數問題的表現差異 | 60 位國中小二年級學生 | 兩組沒有顯著差異，但解題策略不同，實驗組使用加一，控制組用減一。且使用虛擬教具較專心、解題想法較多元、方塊重複數目較少。 |
| Steen, Brooks & Lyon (2006) | 探討幾何教學的效果和學習態度、行為、互動 | 31 位國小一年級學生 | 虛擬教具組前測分數低於控制組，但後測超越控制組，有顯著的進步。具有上手快、過程省時間、學生能挑戰適合等級、不須輪流、學生更專注等優點。 |
| 劉賢建 (2006) | 探討數字樣式一般化 | 國中一年級 2 個班 | 使用虛擬計算機和傳統教具一樣好。但虛擬教具能增加延宕效果，提升學習態度與興趣。 |
| 林瑞蘭 (2008) | 探討周長與面積 | 國小三年級 2 個班 | 使用萬用揭示板組學生表現較佳，更具保留學習成效，澄清學習迷思與提升學習的專注度。 |
| 彭健彰 (2008) | 探討重量概念 | 國小四年級 2 個班 | 使用萬用揭示板組學生表現較佳，提升學習興趣，且教師上課中能處理較多事。 |

上述的研究結果，虛擬教具確實扮演了表徵抽象概念的角色，成為具體物、圖形及符號間重要的橋樑。然而在這些研究中，進行實驗教學的教師們經驗豐富並能熟練且有

自信使用這些虛擬教具，加上部分實驗由不同教師進行、樣本太小或是研究時間短，因此，是可能存在一些偏見的。所以，我們僅能肯定虛擬教具確實對於學習數學是有幫助的，但是否真的能取代傳統教具，仍然沒有定論。

在過去比較虛擬教具和傳統教具的研究中，部份研究顯示虛擬教具比傳統實體教具好 (Thompson, 1992; Smith, 1995; Steen, Brooks, & Lyon, 2006)，而部份研究卻顯示虛擬教具和傳統實體教具沒有顯著差異 (Kim, 1993; Nute, 1997; Drickey, 2000; 王智弘, 2006)，也有研究者指出同時使用兩種教具比單獨使用任何一種好 (Terry, 1995)。Suh and Moyer (2007) 研究也顯示使用虛擬或是實體的代數天平來建立學生表徵，成就都一樣顯著，且在轉換和呈現他們理解表徵上顯示出彈性，只是兩者在學生思考上各有不同的特徵。綜合以上結果，我們發現儘管虛擬教具無法肯定是否一定勝過傳統教具，然而卻具有許多優勢，且讓學生有不同的表徵出現，提供了多元的選擇。

綜觀而論，也許因為虛擬教具仍是教具的一種，和過去探討傳統教具使用的諸多研究一樣，在數學教育家及認知心理學家的理論支持下，虛擬教具應該也是有助於數學的學習，但研究本身的設計、教師的經驗、教學的單元、課程設計和使用的虛擬教具不同，都會影響到虛擬教具使用的成效。另外，隨著資訊科技的進步與普及，愈來愈多新的虛擬教具也將陸續開發出來，型態也日益多元，因此，對於這領域我們確實需要更多的了解與探索，也需要對這些虛擬教具進行更多的實證研究來檢測這些工具，並深入了解對學生的影響，亦能作為日後改進的依據。以期新技術能克服更多障礙，提供更充足的使用者資訊，讓更多教師能容易使用於課堂上的教學，而對於數學教育有更實質的幫助。

2.3 教學系統設計理論

本節將分別就「教學系統設計」、「ADDIE模式」兩個部份來說明探討。

2.3.1 教學系統設計

Mayer (2003) 認為不同多媒體學習中，好的教學設計方法是可以跨越不同媒介，在設計上應該回歸人們如何學習的認知理論，以學習者為中心，運用媒體與知識建構的過程彼此作用，深化學習效果。因此，不論使用哪一種媒介進行教學，若需有良好的教學成效，好的教學設計是不可或缺的。

教學設計是整體教學活動中重要的一環，是指所有與教學相關之活動，如規劃、選擇、預備、實踐與評鑑等工作，內容綜合了教學過程中諸如教學目標、教學內容、教學對象、教學策略、教學媒體、教學環境、教學評量等基本要素（張祖忻、朱純，1995）。而Simth and Ragan (1993) 認為教學設計是將學習與教學的原則轉至教學活動與教材規劃的系統過程。簡而言之，教學設計即是提供教學者具體的架構，考量教學目標、學習者需求等相關要素，以安排教學活動和教材規劃進行有效的教學的系統過程。因此，以系統化步驟進行教學設計，將能更有效規畫教學課程與發展教學活動。而教學系統設計模式的概念也應運而生。

教學系統設計模式 (ISD) 的基本概念可以追溯至1970年代中期美國軍方所提出的模型，含分析、設計、發展、實施等階段，並於每個階段中進行評量工作。Branson (1978) 敘述佛羅里達州立大學教育技術中心和美國軍隊合作發展出一個教學模型 (IPISD)，這是為不同軍種設計的教學系統設計模式，目的為改善軍事訓練的效能，包含分析、設計、發展、實施、控制五個階段。教育專家們自1970年代以後，幾乎依循此系統法則陸續提出了各種教學設計模式，以下將舉出幾個常見的教學系統設計模式例子，並探究其步驟。

1. ADDIE教學模式，並非由特定作者所提出，而是不拘形式的從口語演變而來，是普通教學系統設計的主要過程的首字縮寫 (Molenda, 2003)。即分析 (Analysis)、設計 (Design)、發展 (Development)、實施 (Implementation)、評鑑 (Evaluation) 五個階段。先分析學習者先備知識、教學目標與教學內容後，進一步設計組織教材內容、決定教學方式、使用的教具與選擇評量方式，並根據設計發展教材與評量題目，實施教學活動，最後透過評鑑以修正教學過程，每一個過程是可以循環的。設計模式流程如圖 2-3-1。

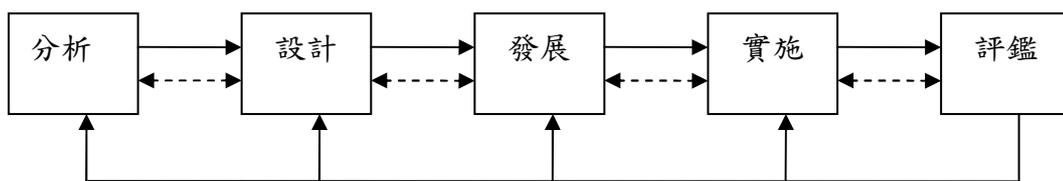


圖 2-3-1 ADDIE 教學模式

2. Dick and Carey (1978, 1985, 1990, 1996) 提出的教學設計模式，包含界定教學總目標、教學分析、界定起點行為與學習者特性、編寫學習目標、發展測驗項目的準則、發展教學策略、發展及選擇教學材料、設計及實施形成性評鑑、設計及實施總結性評鑑九個階段。在界定教學總目標後，進行教學內容的分析與了解學習者的先備知識與特性，進一步編寫預計達到的學習目標，並依據學習目標發展測驗準則、教學策略、選擇教學適合的教材，在實施過程中進行形成性評量，並在每一階段中，不斷依據現況修正教學，讓課程設計更趨於完善，最後進行總結性評鑑。設計模式流程如圖2-3-2。

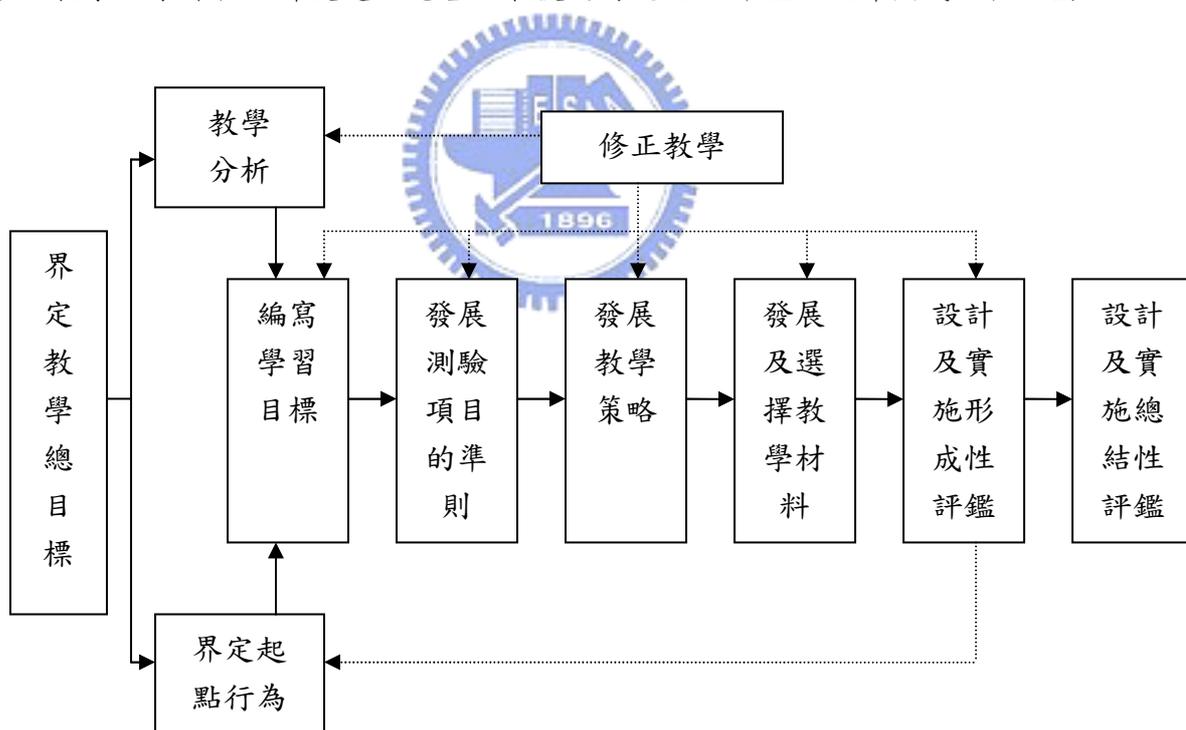


圖 2-3-2 Dick & Carey 教學設計模式

資料來源： “The dick and carey model: Will it survive the decade?,”by Dick, W. , 1996, , *Educational Technology Research and Development*, 44(30), 55-63.

3. Heinich, Molenda, Russell, and Smaldino (2002) 的ASSURE教學模式，包含分析學習者特質 (Analyze Learners)、陳述學習目標 (State Objectives)、選擇方法、媒體與教材 (Select Methods, Media, and Materials)、運用教材 (Utilize Materials)、要求學習者參與 (Require Learner Participation)、評量與修正 (Evaluate and Revise) 六個階段。先分析學習者特質與先備知識、陳述預計達到的學習目標後，進一步選擇方法媒體與教材，並運用教材實施教學活動，要求學習者參與，最後進行評量與修正。設計模式流程如圖2-3-3。

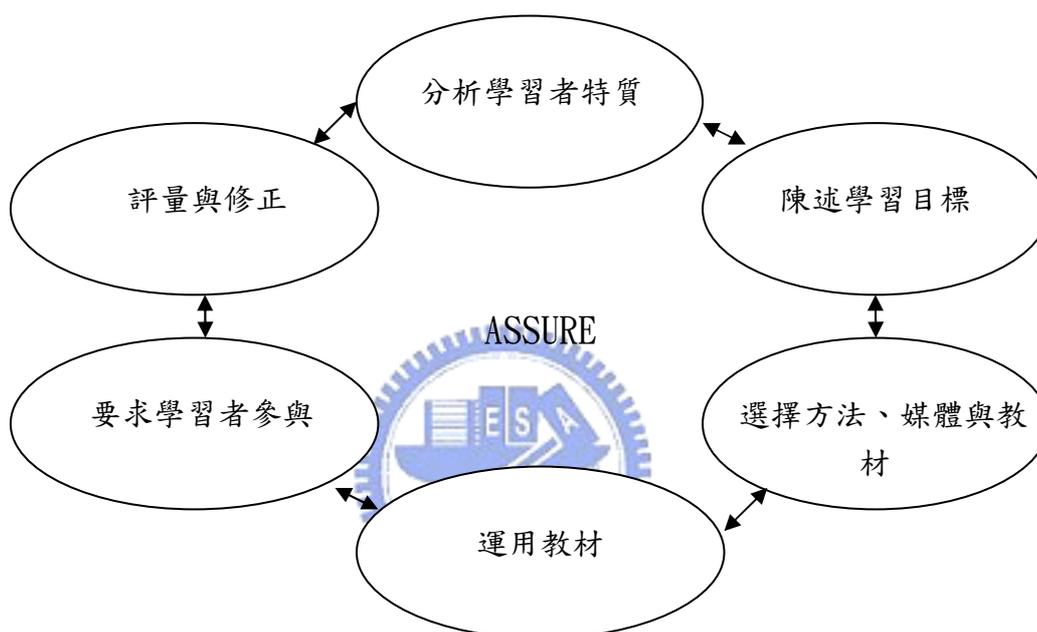


圖 2-3-3 ASSURE 教學模式

資料來源：*Instructional media and technologies for learning*(p. 54), by Heinich, R. , Molenda, M. , Russell, J. D. , & Smaldino, S. , 2002, 7th ed, Columbus:Merrill/Prentice Hall

4. Morrison, Ross, and Kemp (2004) 的MRK模式，包含界定教學設計問題並確認適當的目標 (identifying instructional design problems and specifying relevant goals)、調查學習者特性 (examining learner characteristics)、界定主題內容與分析所有與教學目標有關之任務 (identifying subject content and analyzing task components that are related to instructional goals)、說明對於學習者的教學目標 (stating instructional objectives for the learners)、調整每個教學單元的內容以符合邏輯順序 (sequencing content within each unit to sustain logical learning)、設計教學策略使學習者可掌握學習目標 (designing instructional

strategies for each learner to master the objectives)、規劃教學訊息傳達方式 (planning instructional delivery)、發展評鑑工具 (developing evaluation instruments)、選擇資源以支援學習活動評估 (selecting resources to support learning activities) 九個元素，此模型是環狀而非線性的，九個元素各自獨立列出，並沒有先後次序，使用者可以自行運用。另外有兩步驟是藉由回饋修正教學及總結性的評鑑。如圖2-3-4。

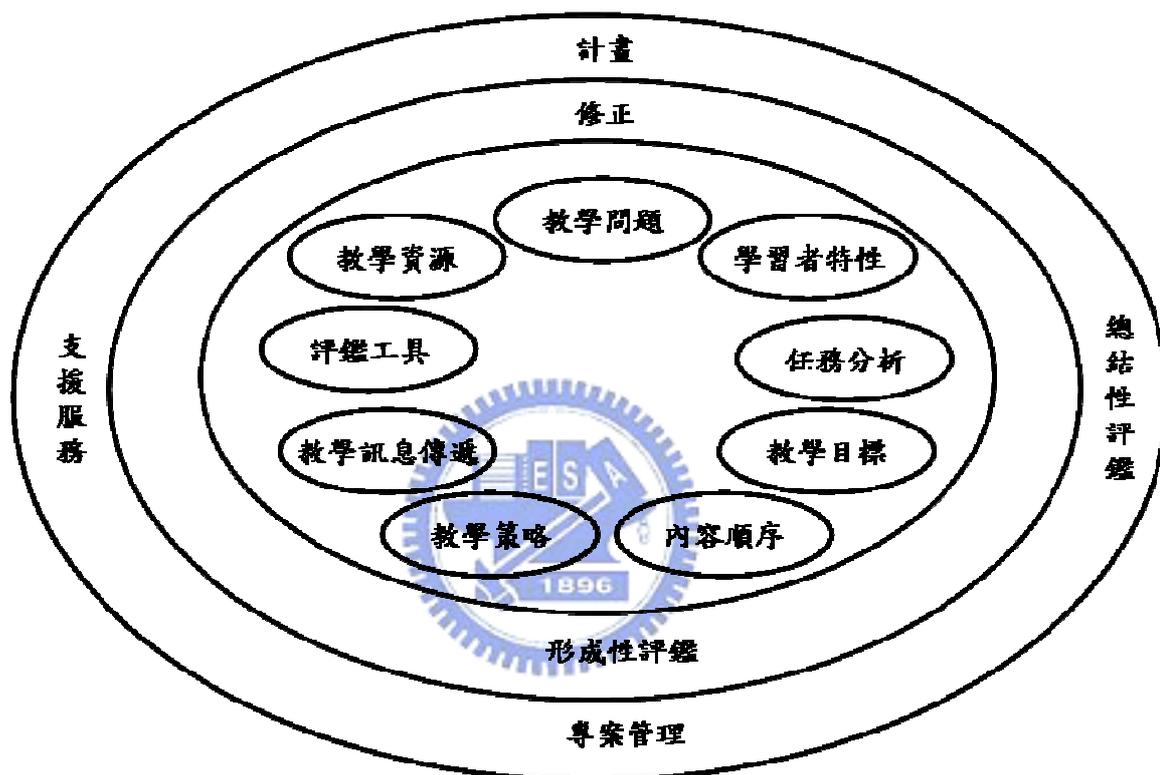


圖 2-3-4 MRK 模式

資料來源：*Designing effective instruction*, by Morrison, G. R., Ross, S. M., & Kemp, J.E., 2004, 4th edition, New York, NY: John Wiley & Sons Inc.

綜合以上這些教學模式所述，雖然不同模式間的步驟有差異，但是詳細探究其內容卻有共通點，皆可整理歸納為分析、設計、發展、實施、評鑑五個步驟，與常被運用於數位學習的系統化教學設計的 ADDIE 模式相符，因此本實驗將採取 ADDIE 模式進行系統化的教學設計。

2.3.2 ADDIE 模式

ADDIE 模式時常運用在數位學習的系統化教學設計上，提供教學設計者一個具體的架構，有效地發展建置課程。Molenda (2003) 研究顯示 ADDIE 模式並非由特定作者所提出，也沒有充分闡述的原始模型，而是不拘形式的從口語演變而來，是普通教學系統設計的主要過程的首字縮寫，即分析(Analysis)、設計(Design)、發展(Development)、實施(Implementation)、評鑑(Evaluation)。Molenda, Pershing, and Reigeluth(1996) 也認為目前對於 ADDIE 模式的共識是當成一個口頭討論常聽到的系統化教學設計方法，只是將概念推向新的應用。ADDIE 模式逐漸被使用者擴展描述並精緻化，每個使用者都在根據教學設計的基本過程建立自己的 ADDIE 模式。

Molenda (2003) 認為分析、設計、發展、實施、評鑑這五個過程，是連續且反覆的，能說明教學和效能改善間的聯繫。林佳蓉與劉新白 (1999) 亦說明這五步驟是循環式的，由教學內容設計者決定由哪一個階段為起點。因 ADDIE 模式是可循環反覆的，所以在教學設計上更具有彈性。因此，研究者為了設計適合的教學過程，將採取此模式，如圖 2-3-5，並期望在實驗結束後能透過評鑑修正過程，發展更適合的課程，作為日後教學使用。

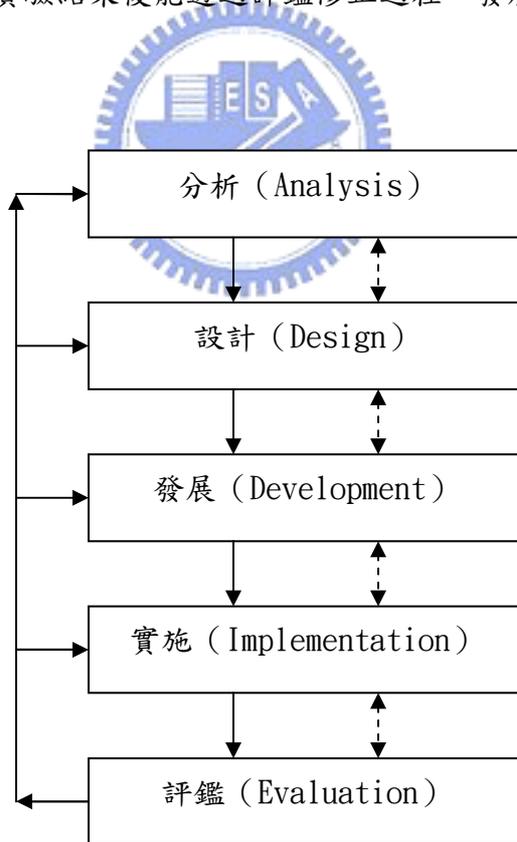


圖 2-3-5 ADDIE 模式的系統化教學設計

所以，研究者採取 ADDIE 模式進行系統化教學設計，五個過程所應完成的任務和內

容，分別描述整理如表 2-3-1 所示。

表 2-3-1 ADDIE 模式各過程任務內容

| 階段 | 任務和內容 |
|------------------------|--|
| 分析 (Analysis) | 分析學習者背景與先備知識、環境及資源分析、需求分析、教學內容分析、教學目標。 |
| 設計 (Design) | 組織教材內容、決定教學方式和教具使用、選擇評量方式、形成合宜的教學架構。 |
| 發展 (Development) | 根據設計開發教材、教學腳本撰寫、程式撰寫、介面設計、設計評量題目等製作各式教學資源。 |
| 實施 (Implementation) | 安排好學習環境、進行教學活動。 |
| 評鑑 (Evaluation) | 蒐集相關資料進行統計及質性分析、評估各步驟是否須修正、評鑑教學成效是否達預期標準、對日後相關課程規劃的建議。 |

資料來源：本研究整理

綜合以上所述，本研究以 ADDIE 模式的五個過程進行鑲嵌圖形教學的設計，分析國二學生的學習背景與先備知識，選擇 AMA2008 簡報系統及 NLVM 的 Tessellations 為虛擬教具設計教學內容，發展教材與評量，安排教學環境以實施教學活動，最後蒐集相關資料進行統計及質性分析，評鑑教學成效並對日後相關課程規劃提出建議。

三、研究設計與方法

本章分為六節探討本研究的設計與方法，第一節為研究對象，第二節為研究架構，第三節為研究設計，第四節為研究工具，第五節為資料分析，第六節為虛擬教具設計。

3.1 研究對象

本研究之國民中學學生，是以研究者在新竹市市立國民中學任教的二班學生為實驗研究對象，學校採取常態編班且男女合班的模式教學，研究者由任教的國二班級中隨機選取一個班級為實驗組，另一個班級為控制組。以下為實驗組和控制組的班級學生人數和男女學生人數，如表3-1-1。

表 3-1-1 研究樣本人數統計表



| 組別 | 男生人數 | 女生人數 | 總人數 |
|-----|------|------|-----|
| 實驗組 | 18 | 18 | 36 |
| 控制組 | 18 | 18 | 36 |
| 合計 | 36 | 36 | 72 |

為了避免不同教師教學對實驗產生干擾，本實驗研究教學實驗組及控制組教師由同一位教師教學，即為研究者本人，研究對象的實驗組學生和控制組學生於進行此研究前，均接受教師指引，熟悉該組教具的操作方式。

3.2 研究架構

本研究先蒐集資料，確認研究主題為探討虛擬教具對國中生在學習鑲嵌圖形的影響，以 ADDIE 模式先分析學習者背景與先備知識、環境及資源、需求、教學內容與目標，設計教材內容、教學方式、評量、教案，發展教具、研究工具，再實施前測、進行教學、後測，最後進行資料分析及評鑑。如圖 3-2-1 所示。



圖 3-2-1 研究架構

3.3 研究設計

由於本實驗由研究者進行教學，受限於任教班級無法隨機選取受試學生，將採取便利樣本，即本研究者任教的二年級學生中選取兩個班級，隨機把兩班學生分成實驗組和控制組。因此本實驗將採取不等組前後測準實驗設計，如表 3-3-1。

表 3-3-1 不等組前後測準實驗

| 自變項 | 前測 | 實驗處理 | 後測 |
|-----|----|------|-------|
| 實驗組 | T1 | x | T2 T3 |
| 控制組 | T1 | | T2 T3 |

註：T1 為國民中學智力測驗，T2 為鑲嵌測驗，T3 為心得及感想問卷。

進行實驗教學前兩組皆接受前測（T1 國民中學智力測驗），僅選取和幾何教學有關的數量推理、圖形推理二部份成績，將二部份分數作加總為依據，了解學生在教學前的初始幾何能力，利用 Levene 檢定兩組變異數的同質性，分析兩組成績差異。並且為避免兩組學生在實驗前能力是不相等狀況，所以將統計 α 值（顯著水準）設定為 .05，以反應出真正的差異情形。

當進行教學時，兩班學生皆依照研究者事先設計의 相同教學內容和流程進行，並使用相同的學習單，差別僅在於實驗組在電腦教室中採用虛擬教具，利用電腦軟體「數學簡報系統 AMA」進行，而控制組在一般教室中使用傳統實體教具教學，利用紙做的多邊形教具輔助探索，傳統教具由教師事先製作準備好，並觀察學生在使用不同教具下，課堂上的行為和表現。因為 Moyer and Jones (2004) 的研究顯示，當教學場景安排不佳，如座位以每行分組或是分小組，使得教具放置無法讓學生方便取得，與部份學生在分組使用教具時會扮演嚴厲的角色，不准其他學生任意使用，這兩種狀況皆會影響學生使用教具。以及根據研究者過去曾以實體教具分組探討不規則鑲嵌課程的教學經驗，部份學生確實無法真正操作到教具，學習成就低的學生往往被分配到剪紙的工作，而無法自行操作教具建立數學概念。因此，為了確保每位同學能自由使用教具，實驗組和控制組的每一位學生將有一套的教具。

實驗課程結束後一周，兩班學生進行後測（T2 鑲嵌測驗），並在兩天後再進行後測（T3 心得及感想問卷）。進行鑲嵌測驗了解學生在教學後對鑲嵌的了解與策略表現，而心得及感想問卷了解學生對於實施本課程的心得及意見。施測完畢之後，以學生的智力測驗的分數為共變數，鑲嵌測驗後測分數為依變數，利用共變數分析考驗（ANCOVA），

分析兩班學生、兩班高分組、兩班低分組和實驗組不同性別的學生在後測成績上是否有顯著差異外；另外，從教學過程中所蒐集的學習單、心得及感想問卷，和以數位攝錄影機（DV）、數位相機詳實紀錄的學生課堂表現，做質性的研究分析，藉以深入了解使虛擬教具和具體教具教學時，對於學生學習鑲嵌圖形產生的影響。

本實驗設計主要是以常態編班的學生為主，研究一般學生對於使用虛擬教具和傳統教具進行教學的差異與影響，為了避免第八節或假日實施時學生不夠積極，並期望鑲嵌教學能融入一般教學，將於學期中正常課程時間實施。而鑲嵌內容可深可淺，因此，本實驗課程設計共 3 節課，以國中目前幾何概念設計適合常態學生程度的課程，探索主要的規則鑲嵌、半規則鑲嵌、次規則鑲嵌簡介、不規則鑲嵌和學生創作活動，讓學生由操作中了解數學概念，以及激發學習興趣。另外，兩組的教學過程，除了教具樣式不同外，活動安排是一致的，使用相同學習單和進行相同的教學活動，讓實驗更嚴謹，控制不必要的干擾。實驗組與控制組的教學環境比較，如表 3-3-2 所示。

表 3-3-2 實驗組與控制組教學環境比較

| 項目 | 實驗組 | 控制組 |
|------|-------------------------------|-----------------------------|
| 教具樣式 | 研究者先以 AMA 做好各式多邊形虛擬教具，一人一台電腦。 | 研究者先以紙做好各式多邊形傳統教具，一人一份實體教具。 |
| 前測方式 | 國民中學智力測驗 | 國民中學智力測驗 |
| 使用教材 | 教師自編教材、教案、學習單 | 教師自編教材、教案、學習單 |
| 教學時間 | 3 節課 | 3 節課 |
| 教學方式 | 教師引導、具體操作、兩人一組討論 | 教師引導、具體操作、兩人一組討論 |
| 作業型態 | 學習單 | 學習單 |
| 後測時間 | 鑲嵌測驗 40 分鐘、心得及感想問卷 15 分鐘 | 鑲嵌測驗 40 分鐘、心得及感想問卷 15 分鐘 |

本實驗設計的教學流程由鑲嵌的文獻探討可以得知鑲嵌圖形須由基本的多邊形而來，並分為規則鑲嵌、半規則鑲嵌、次規則鑲嵌和不規則鑲嵌。因此，教學上將展示日常生活中常見的美麗鑲嵌圖形，引發學生學習動機後，讓學生了解正多邊形的每一內角度數等基本特性，先探討正多邊形規則鑲嵌種類，後探討半規則鑲嵌種類，簡介次規則鑲嵌，再探索不規則鑲嵌的條件，最後，應用已學得的知識，使用平移、旋轉的技巧，設計非多邊形的鑲嵌，並請學生設計屬於自己的鑲嵌圖形。

進行實驗教學前，此單元的先備知識為多邊形的內角和，並能計算出每一正多邊形內角度數，以便於鑲嵌教學的進行，因此於實驗前兩組皆先進行先備知識的教學，而實驗教學當天僅需簡單複習每一個內角度數。另外，考量實驗時間的完整性及一致性，避免其他變數的干擾，如課程分散與課程集中、早上或下午精神可能不一致等，研究者將實驗組的課程調整配合控制組，讓兩組皆能在下午進行教學，連續於三節課完成教學。

實驗教學結束後，因為次規則鑲嵌種類繁多且具變化性，將當作業讓學生回家挑戰，並輔以作業單確保學生完成。雖然可以上網免費下載安裝 AMA 簡報系統，並配合新竹市教學網班級網頁下載教師設計的 AMA 虛擬教具，但考量讓實驗組學生更容易取得，且課程中已讓學生發現兩種以上的正多邊形需密鋪平面時，只能是正三角形、正方形、正六邊形、正八邊形、正十二邊形，不需要其他正多邊形，因此，讓學生連結到 NLVM 的 Tessellations (http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_163_g_1_t_3.html) 使用虛擬教具。而控制組則讓學生直接帶回紙做的正多邊形教具包，在家使用傳統教具完成作業。至於創作部份，將讓兩組學生自行設計作品並展示，並請美術老師協助，使數學創作結合藝術與人文。教學流程簡示如圖 3-3-1。

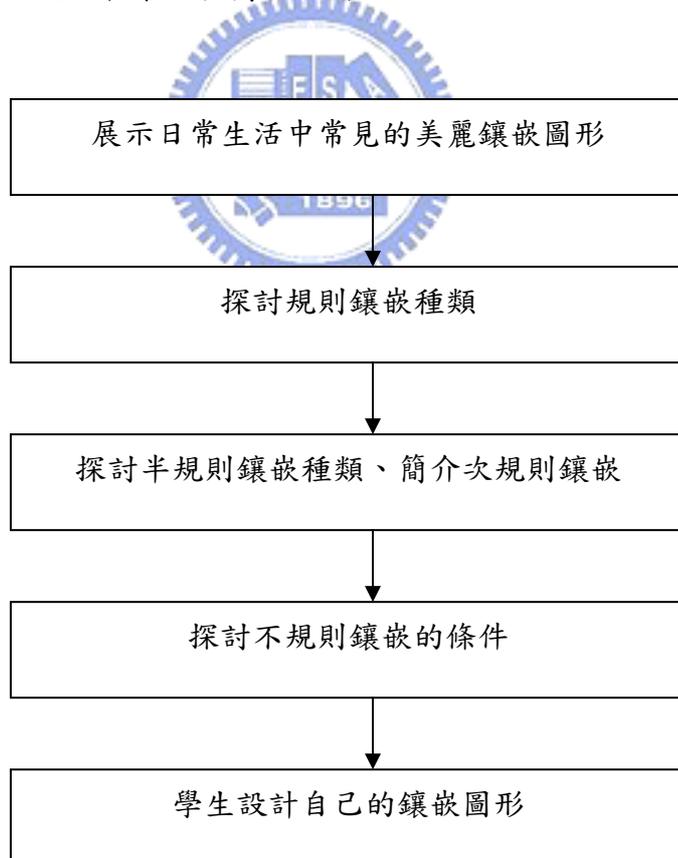


圖 3-3-1 教學流程簡示

3.4 研究工具

本研究的研究工具除了鑲嵌測驗、智力測驗，以SPSS進行資料分析外。另外，也將以心得及感想問卷、學習單、數位攝錄影機（DV）、數位相機，詳實紀錄上課情形，進一步分析學生學習上的差異。

3.4.1 國民中學智力測驗

本測驗是陳榮華博士編製，於民國九十三年由中國行為科學社出版，旨在於測量國民中學學生的一般智力水準，以供學校常態編班、分組、補救教學之參考。折半信度為.82～.87，重測信度為.42～.91，與國民中學智力測驗（第三種）的相關係數為.59～.74。本測驗由學校輔導處安排於課堂中施測，測驗時間為40分鐘。本研究中將以智力測驗的數學部分，包含數量推理、圖形推理的量表分數加總，以其做為共變量進行共變數分析，以了解學生的學習成效。

3.4.2 鑲嵌圖形教案設計與學習單（見附錄一）

本課程構思配合數學學習領域中的「數學的 pattern」課題，設計鑲嵌圖形教案和學習單，透過實作，結合日常生活中鑲嵌圖形的應用，讓學生觀察欣賞幾何圖形的美，啟發學生的組織力和整合分析能力，並能實際應用所學設計鑲嵌圖案。上課時間為三節課，共135分鐘。內容為鑲嵌圖形欣賞、規則鑲嵌、半規則鑲嵌、次規則鑲嵌、不規則鑲嵌、非多邊形鑲嵌創作，引導學生利用教具探索鑲嵌圖形的奧妙，主動建構數學概念。

3.4.3 鑲嵌測驗（見附錄二）

測驗目的在於了解學生在鑲嵌圖形課程實施後的觀念和學習成效，測驗時間為40分鐘。題目內容主要參考Tilings and Patterns (Grunbaum and Shephard, 1986)、From tessellations to polyhedra (Peterson, 2000)、數學樂園－從胚騰Pattern學好數學（林壽福，2006）、高中數學乙教科書下冊（康熙圖書，2005）。研究者針對教學目標和學習內容，為了瞭解學生解題思維編制而成的，初稿完成後，分別請指導教授及數學領域教師給予專家意見，進行修改。題目涵蓋所有學習內容，包含規則鑲嵌、半規則鑲嵌、次規則鑲嵌、不規則鑲嵌、非多邊形鑲嵌，並要求學生說明理由。本測驗每個答案各二分，總分為六十四分，理由部分若回答不完整，則給予一分。本測驗要求學生繪出圖形，而非只寫出命名法或敘述圖形種類，旨在了解學生除了明白鑲嵌的種類外，是否有將圖形平面化的重要能力，因此僅要求能繪出各式鑲嵌圖形，但不用過於精美。其中規則鑲嵌與半規則鑲嵌部分，為瞭解學生判斷種類是否有重複的現象，於測驗卷上設計

了多餘的答案格，以了解學生的觀念是否清楚，做為質性分析的資料，因此，多答並不予以扣分。次規則鑲嵌和不規則鑲嵌部份因為種類繁多，目的僅了解學生是否明白其意義，所以只要求各自繪出兩種即可，讓學生能有足夠時間充分作答。鑲嵌測驗內容及計分方式和給分標準示例分別如表3-4-1、表3-4-2所示。

表 3-4-1 鑲嵌測驗內容與計分方式

| 內容 | 種類數目 | 答案格數目 | 計分 |
|---------|-------------|--------------|-----|
| 規則鑲嵌 | 3種（含理由共6格） | 5種（含理由共10格） | 12分 |
| 半規則鑲嵌 | 8種（含理由共16格） | 10種（含理由共20格） | 32分 |
| 次規則鑲嵌 | 2種（含理由共4格） | 2種（含理由共4格） | 8分 |
| 不規則鑲嵌 | 2種（含理由共4格） | 2種（含理由共4格） | 8分 |
| 非多邊形的鑲嵌 | 1種（含方法共2格） | 1種（含方法共2格） | 4分 |

表 3-4-2 給分標準示例

| | | | |
|--|---|-------------------|-----------|
| <p>題目：2. 請找出所有半規則鑲嵌的圖形，並解釋找出的半規則鑲嵌圖形符合的理由。</p> | | | |
|  | | | |
| 學生答案 | 因為 $60^{\circ}+90^{\circ}+120^{\circ}+90^{\circ}=360^{\circ}$ ，而且可以無限延伸 | 合起來 360° | 未作答或理由錯誤 |
| 給分標準 | 二分 | 一分 | 不給分 |
| 給分理由 | 理由完整 | 理由不完整 | 理由未說明或不正確 |

3.4.4 學生心得及感想問卷（見附錄三）

問卷目的在於了解學生對於實施鑲嵌圖形教學後的心得及感想，以及對於數學態度的影響。題目內容主要參考Symmetry in mathematics and art: an exploration of an art venue for mathematics learning (Stylianou, D. A. and Grzegorzczuk, I., 2005) 和多方塊虛擬教具的開發與教學研究（王智弘，2006）。初稿完成後，分別請指導教授及數學領域教師給予專家意見，進行修改，以使問卷具有內容效度。題目內容包含操作是否困難、從課程中學習到的內容和解題幫助、是否願意繼續進行數學電子軟體（或具體教具）教學的課程、對於數學課的看法、是否喜歡數學課、是否願意思考數學、對數學的了解，根據學生的撰寫內容，分析學生對於使用不同教具作為教學輔具進行鑲嵌圖形教學的看法和影響。

3.5 資料分析

本研究採取「不等組前後測準實驗研究」設計，後以統計分析量化資料，並蒐集質性資料，了解使用「AMA 簡報系統 2008」和「NLVM 的 Tessellations」為虛擬教具設計之實驗教材運用於鑲嵌圖形的教學情形。以量化和質化資料分析，比較出實驗組和控制組在學習態度、教學成效、教學環境、思考策略差異之處。以下分為量化與質化資料分析部份進行說明。

3.5.1 量化資料的蒐集與分析

本實驗採取準實驗設計，已盡量使用實驗控制法來控制無關的干擾變項，然而研究者採便利樣本，選取任教的兩個班級，雖然屬於常態分班，但為了避免兩組學生在實驗前的數學能力是不相等的狀況，所以仍以國民中學智力測驗的數學分數為共變數進行統計控制，增加實驗的內在效度。

進行實驗教學前兩組皆接受前測（T1 國民中學智力測驗），國民中學智力測驗僅選取和幾何教學有關的數學部份，即數量推理和圖形推理的分數做加總，利用 Levene 檢定兩組變異數的同質性，將統計 α 值（顯著水準）設定為 .05，以反應實驗前兩組差異情形。

實驗課程結束後，兩班學生進行後測（T2 鑲嵌測驗）。施測完畢之後，以學生的國民中學智力測驗數學部分的分數為共變數，後測的鑲嵌測驗分數為依變數，先檢定組內迴歸係數同質性之假定，將統計 α 值（顯著水準）設定為 .05，考驗原分組前測成績和後測成績間是否有顯著的交互作用，若交互作用檢定結果未達顯著，代表未違反組內迴歸係數同質性的檢定，才能進行共變數分析。

利用共變數分析考驗（ANCOVA），以學生的國民中學智力測驗數學部分的分數為共變數，後測的鑲嵌測驗分數為依變數，分析兩組後測成績是否有顯著差異。另外，分別將實驗組和控制組後測的鑲嵌測驗成績前三分之一一定為高分組，後三分之一一定為低分組，以國民中學智力測驗數學部分的分數為共變數，後測鑲嵌測驗分數為依變數，比較兩組的高分組以及兩組低分組是否有顯著差異。並將實驗組不同性別學生的國民中學智力測驗數學部分的分數為共變數，後測的鑲嵌測驗分數為依變數，利用共變數分析考驗（ANCOVA），分析不同性別學生後測成績是否有顯著差異。整理如表 3-5-1。

表 3-5-1 實驗研究假設的統計方法

| 研究假設 | 統計方法 |
|---|--|
| 接受以「AMA 簡報系統 2008」和「NLVM 的 Tessellations」作為教學輔具之實驗組學生在後測「鑲嵌測驗」的得分顯著優於控制組。 | 以鑲嵌測驗後測分數為依變數，以前測國民中學智力測驗圖形推理部分得分的數學分數為共變數，進行共變數分析考驗 (ANCOVA)。 |
| 接受以「AMA 簡報系統 2008」和「NLVM 的 Tessellations」作為教學輔具之實驗組高分組學生在後測「鑲嵌測驗」的得分顯著優於控制組高分組學生。 | 以鑲嵌測驗後測分數為依變數，智力測驗的數學分數為共變數，進行共變數分析考驗 (ANCOVA)。 |
| 接受以「AMA 簡報系統 2008」和「NLVM 的 Tessellations」作為教學輔具之實驗組低分組學生在後測「鑲嵌測驗」的得分顯著優於控制組低分組學生。 | 以鑲嵌測驗後測分數為依變數，智力測驗的數學分數為共變數，進行共變數分析考驗 (ANCOVA)。 |
| 接受以「AMA 簡報系統 2008」和「NLVM 的 Tessellations」作為教學輔具之實驗組不同性別的學生在「鑲嵌測驗」後測得分沒有顯著差異。 | 以鑲嵌測驗後測分數為依變數，智力測驗的數學分數為共變數，進行共變數分析考驗 (ANCOVA)。 |

3.5.2 質化資料的蒐集與分析

從教學過程中所蒐集的學習單、後測的心得及感想問卷和教學者紀錄的學生課堂表現，做質性的研究分析，藉此了解研究假設是否成立。了解使用虛擬教具「AMA 簡報系統 2008」和「NLVM 的 Tessellations」的教學環境和傳統實體教具的教學環境是否有差異。以及使虛擬教具和具體教具為教學輔具的環境中，對於實驗組與控制組學生在學習上的狀況、數學學習態度的影響。

3.6 虛擬教具設計

本研究採取「NLVM 的 Tessellations」和「AMA 簡報系統 2008」作為教學輔具，其中「NLVM 的 Tessellations」是以 Java Applet 程式撰寫的軟體，使用便利，然而它提供的正多邊形有限以及未提供不規則的部份，不敷本研究使用。而「AMA 簡報系統 2008」外掛在 Microsoft Powerpoint 上，檔案小且安裝便利，設計者不需撰寫程式碼或複雜的操作，即能簡便地繪圖且能同時製作教學簡報。所以，研究者選擇「AMA 簡報系統 2008」作為設計鑲嵌圖形教學的軟體。以下將分別說明兩者介面及功能。

3.6.1 NLVM 的 Tessellations

NLVM 是 National Library of Virtual Manipulatives 的簡稱，為 NSF 贊助的計畫，從 1999 年起設立了虛擬教具圖書館 (<http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html>)，提供許多以 Java Applet 程式撰寫的互動性網路虛擬教具與概念教學任務，讓從幼稚園到高中三年級的學生都能使用這些輔具去學習與理解數學。其中 Tessellations 包含正三角形、正方形、正六邊形、正八邊形和正十二邊形，可以提供學生學習規則鑲嵌與次規則鑲嵌，如圖 3-6-1 和圖 3-6-2。



圖 3-6-1 Tessellations 介面

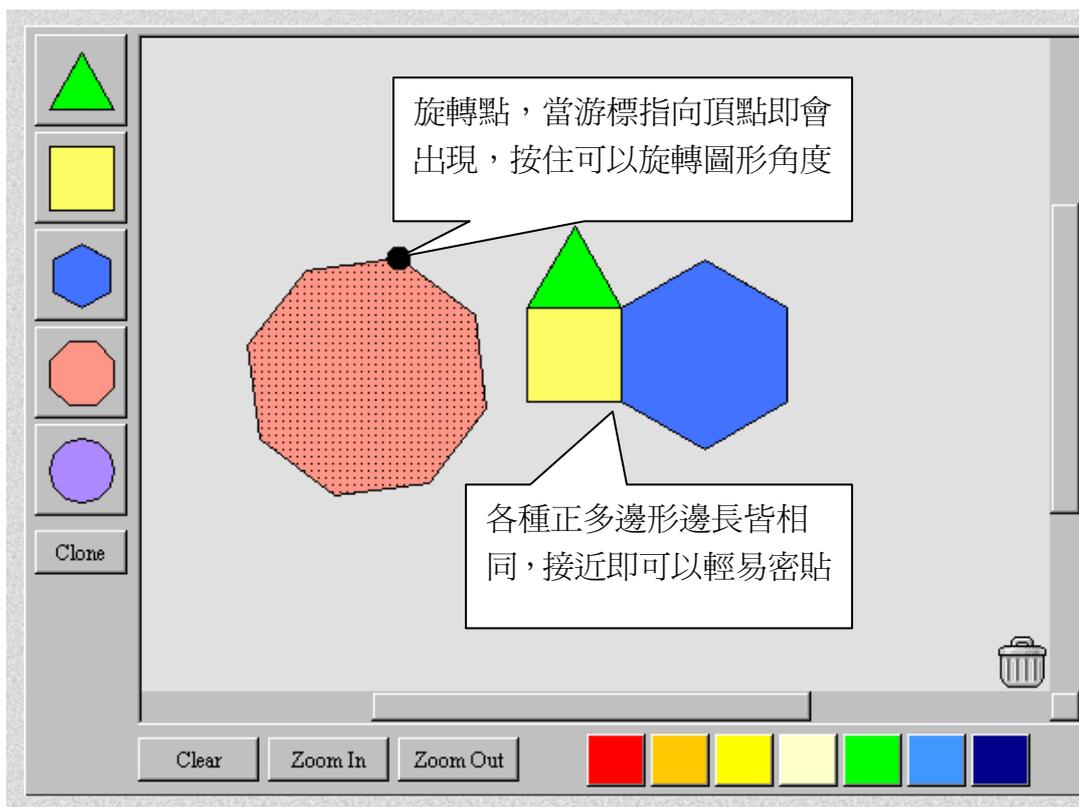


圖 3-6-2 Tessellations 旋轉功能介紹

3.6.2 AMA 簡報系統 2008

陳明璋（2008）指出AMA是一個以PowerPoint為平台，外掛增益集，所發展的一個媒體設計及展演的環境，主要功能有激發式動態呈現(Trigger-based Animation, TA)、及結構式複製繪圖法 (Structural Cloning Method, SCM)。AMA系統是以數學概念所發展出來的教材設計及教學軟體，是一種新的繪圖法，能解決設計教材時定位不易的問題，繪製仿自然山水畫、複雜的對稱構圖以及光點系列等。與PowerPoint結合可以成為一個數位內容設計及展演、繪本寫作及創意的平台。因AMA有強大的定位繪圖功能，能設計各式鑲嵌圖形的繪製、旋轉與貼合，而且亦是一個良好的教學展演平台，所以選擇用AMA來設計鑲嵌圖形。

本研究以AMA簡報系統2008開發鑲嵌圖形虛擬教具，包含規則鑲嵌、半規則鑲嵌和次規則鑲嵌需要的正三角形到正四十二邊形，如圖3-6-3、圖3-6-4，不規則鑲嵌需要的各式三角形和四邊形，如圖3-6-5。並以AMA為教學平台，設計教學投影片進行實驗組的教學，利用激發式動態呈現的功能，以一個物件當按鈕來控制一連串的動態呈現，協助教學者適時的呈現數位內容，吸引學習者注意力與引導學習，進而降低學習者的認知負荷，如圖3-6-3到圖3-6-7。

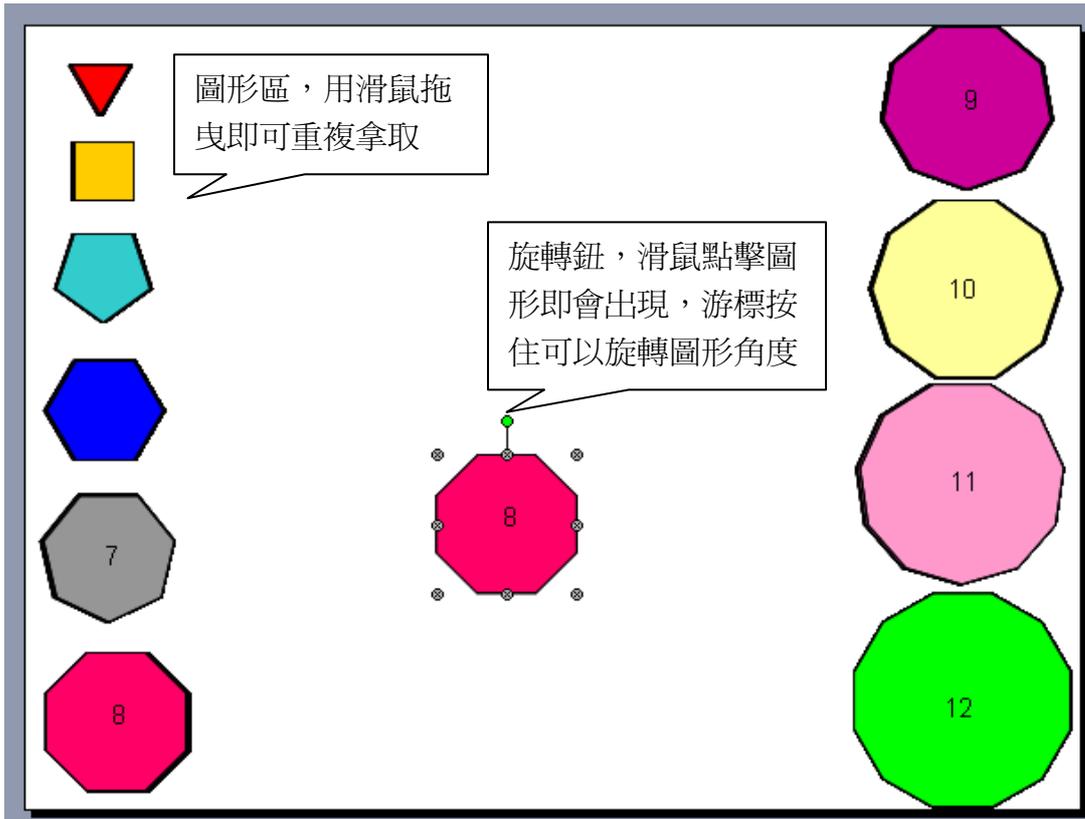


圖 3-6-3 AMA 簡報系統 2008 開發的虛擬教具-正三角形到正十二邊形

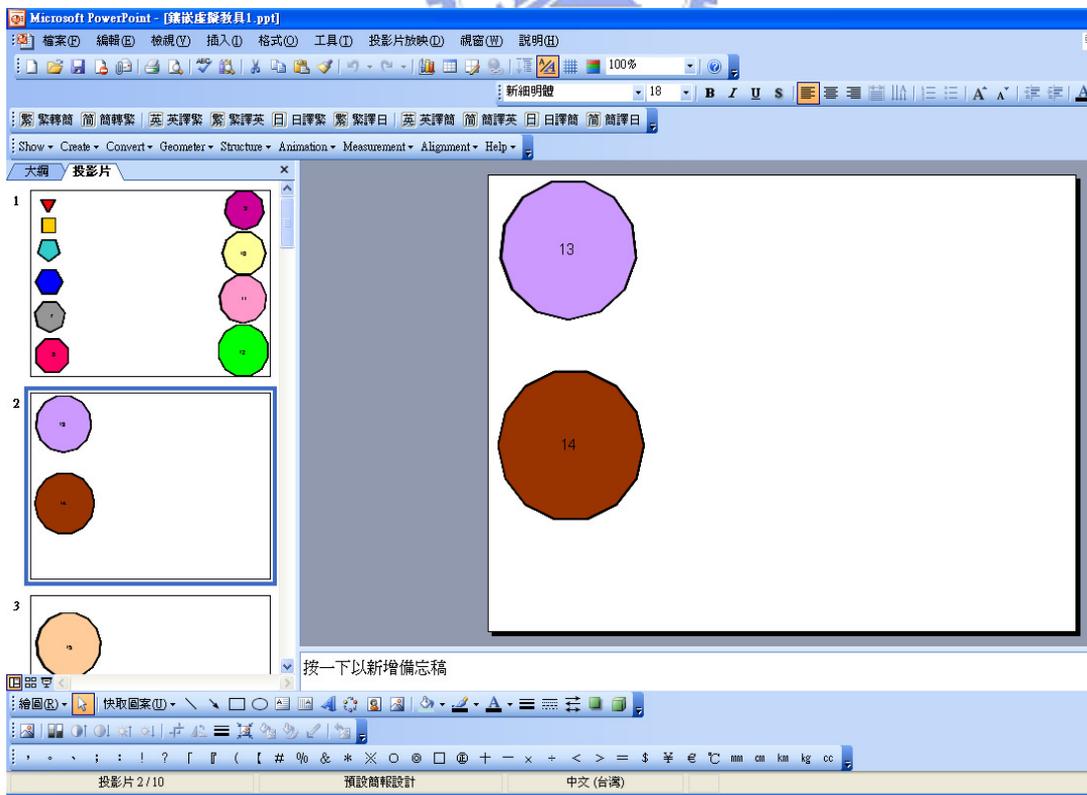


圖 3-6-4 AMA 簡報系統 2008 開發的虛擬教具-正十三邊形到正四十二邊形

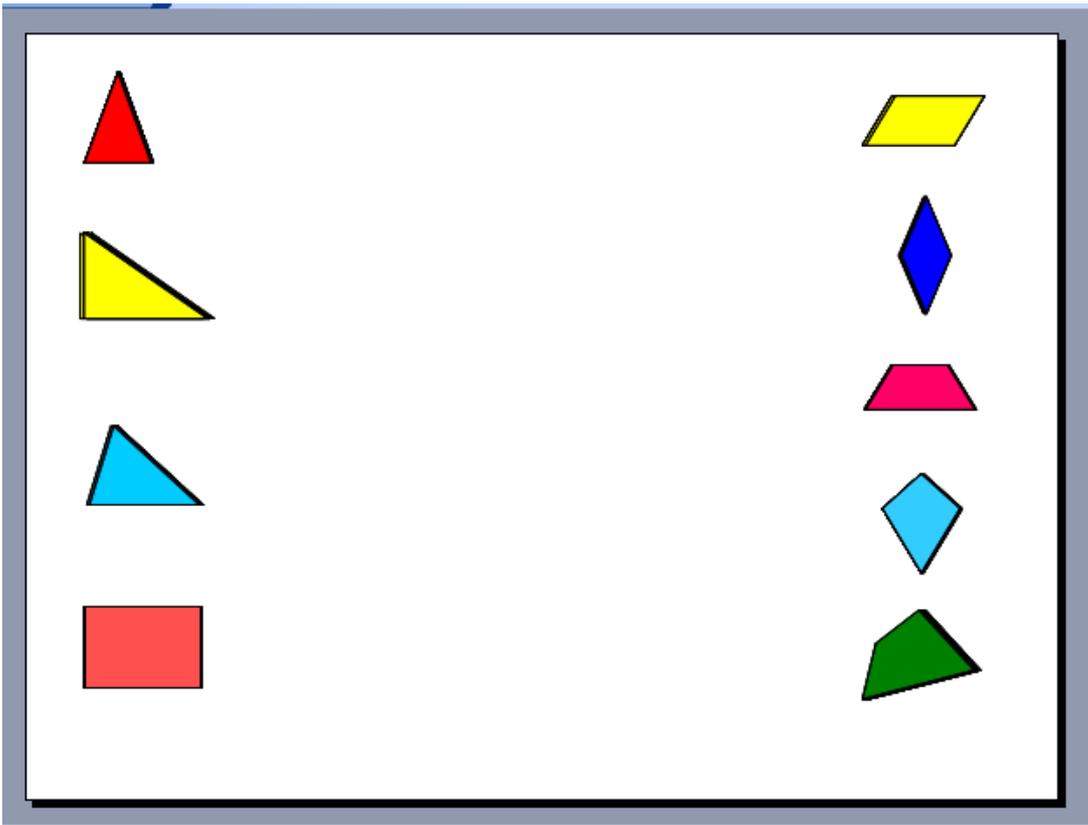


圖 3-6-5 AMA 簡報系統 2008 開發的虛擬教具-不規則鑲嵌

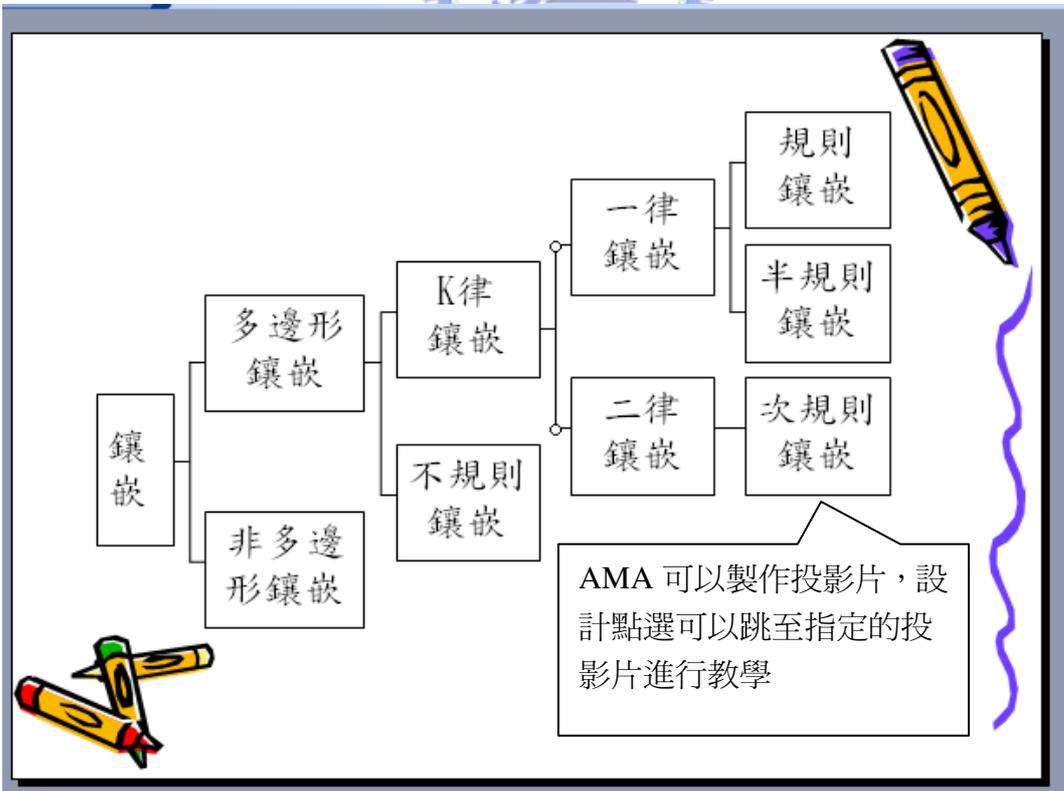


圖 3-6-6 AMA 簡報系統 2008 設計的教学投影片

二、複習正多邊形內角(3)

| 正多邊形 | 每一個內角度數 |
|--------|---|
| 正十六邊形 | |
| 正十七邊形 | |
| 正十八邊形 | $180^\circ \times 16 \div 18 = 160^\circ$ |
| 正十九邊形 | |
| 正二十邊形 | |
| 正二十四邊形 | |
| 正三十邊形 | |
| 正三十六邊形 | |
| 正四十邊形 | |
| 正四十二邊形 | |

點選按鈕，即可出現右方動作，或一整列的連續動作

Logo

圖 3-6-7 AMA 簡報系統 2008 設計的教學投影片-動態激發式呈現功能

四、研究結果與討論

本章分為三節探討本研究的結果，第一節為說明使用 AMA 簡報系統和 NLVM 的 Tessellations 教學後對於學生的影響，第二節為實驗教學過程中，實驗組與控制組學生學習歷程分析，第三節為學生在學習單與心得及感想問卷的質化分析。

4.1 使用 AMA 簡報系統和 NLVM 的 Tessellations 教學後對學生的影響

本研究的目的是在於比較使用虛擬教具的教學環境和傳統實體教具的教學環境，對於國中二年級學生學習鑲嵌圖形之影響，以及比較使用虛擬教具的教學環境，對於不同性別的學生學習鑲嵌圖形之影響。在教學實驗前，實驗組與控制組的學生皆接受前測「國民中學智力測驗」，國民中學智力測驗僅選取和幾何教學有關的數學部份，即數量推理和圖形推理的分數做加總，利用 Levene 檢定兩組變異數的同質性，將統計 α 值（顯著水準）設定為 .05，研究結果顯示未達顯著（ $F=.000, p=.998 > .05$ ），表示實驗前這兩組的變異數是具有同質性的。在教學課程結束後一週實施後測「鑲嵌測驗」。施測完畢之後，以學生的國民中學智力測驗數學部分的分數為共變數，後測的鑲嵌測驗分數為依變數，進行共變數分析。以下根據本實驗的研究假設逐項分析與討論研究結果。

4.1.1 研究假設：實驗組的學生在後測「鑲嵌測驗」的得分顯著高於控制組的學生。

本研究假設的依變數為兩班學生後測「鑲嵌測驗」的得分，共變量為兩班學生國民中學智力測驗數學部分（數量推理、圖形推理）的分數，於教學實驗後進行共變數分析（ANCOVA）。在進行共變數分析前須先檢定組內迴歸係數同質性之假定，將統計 α 值（顯著水準）設定為 .05，考驗原分組前測成績和後測成績間是否有顯著的交互作用，檢定結果顯示未達顯著（ $F=1.798, p=.184 > .05$ ），接受虛無假設，表示兩組的迴歸線的斜率相同，代表兩組的共變項（前測成績）與依變項（後測成績）之間的關係，不會因為實驗各處理水準的不同而有所差異，符合共變數分析中組內迴歸係數同質性的檢定，所以繼續進行共變數分析，分析實驗組的學生在後測「鑲嵌測驗」的得分是否顯著高於控制組的學生，如表 4-1-1。

表 4-1-1 實驗組與控制組在「鑲嵌測驗」後測表現統計量及差異分析

| 組別 | 個數 | 平均 | 標準差 | 調整後平均數 | F 值 | P |
|-----|----|-------|--------|--------|------|------|
| 實驗組 | 36 | 25.94 | 20.508 | 25.543 | .307 | .581 |
| 控制組 | 36 | 23.03 | 15.417 | 23.429 | | |

兩組學生在後測「鑲嵌測驗」的共變數分析的平均數各為 25.94 與 23.03，在排除智力測驗數學部分分數此共變量的影響後各為 25.543 與 23.429，由表 4-1-1 可知實驗組與控制組在後測「鑲嵌測驗」的表現並無顯著差異 ($F=.307, p=.581 > .05$)，也就是使用 AMA 簡報系統和 NLVM 的 Tessellations 為虛擬教具教學和傳統教具教學對於學生學習的效果是一樣的。

4.1.2 研究假設：實驗組高分組的學生在後測「鑲嵌測驗」的得分顯著高於控制組高分組的學生。

本研究的依變數為兩組高分組學生後測「鑲嵌測驗」的得分，共變量為兩組高分組國民中學智力測驗數學部分（數量推理、圖形推理）的分數，先檢定組內迴歸係數同質性之假定，將統計 α 值（顯著水準）設定為 .05，考驗兩組高分組前測成績和後測成績間是否有顯著的交互作用，檢定結果顯示未達顯著 ($F=1.821, p=.192 > .05$)，接受虛無假設，表示兩組的迴歸線的斜率相同，代表共變項（前測成績）與依變項（後測成績）之間的關係，不會因為自變項實驗各處理水準的不同而有所差異，符合共變數分析中組內迴歸係數同質性的檢定，繼續進行共變數分析，分析實驗組高分組的學生在後測「鑲嵌測驗」的得分是否顯著高於控制組高分組的學生，如表 4-1-2。

表 4-1-2 實驗組與控制組高分組學生在「鑲嵌測驗」後測表現統計量及差異分析

| 組別 | 個數 | 平均 | 標準差 | 調整後 平均數 | F 值 | P | 淨相關 Eta 平方 |
|--------|----|---------|--------|------------|-------|------|---------------|
| 實驗組高分組 | 12 | 51.3333 | 10.334 | 50.573 | 5.842 | .025 | .218 |
| 控制組高分組 | 12 | 41.7500 | 6.690 | 42.510 | | | |

由表 4-1-2 可知實驗組與控制組高分組的學生在後測「鑲嵌測驗」的共變數分析的平均數各為 51.3333 與 41.7500，在排除智力測驗數學部分分數此共變量的影響後各為 50.573 與 42.510，由表 4-1-3 可知實驗組高分組的學生在後測「鑲嵌測驗」的得分顯著高於控制組高分組的學生 ($F=5.842$, $p=.025 < .05$)，而且效果量也大於高度效果量 ($\eta^2=.218 > .138$)，顯示實驗組高分組與控制組高分組在後測「鑲嵌測驗」的差異不但具有統計意義，而且在臨床顯著性也有其實質意義。

相較於控制組高分組學生要花較多時間在教具的操作上，實驗組高分組學生因為虛擬教具的操作較便利，可能因此能夠有充分的時間思考，所以產生新的策略與思維來建構數學概念。因此，本研究發現使用 AMA 簡報系統和 NLVM 的 Tessellations 為虛擬教具教學對於高分組學生學習比使用傳統教具教學有較佳的效果。

4.1.3 研究假設：實驗組低分組的學生在後測「鑲嵌測驗」的得分顯著高於控制組低分組的學生。

本研究的依變數為兩組低分組後測「鑲嵌測驗」的得分，共變量為兩組低分組國民中學智力測驗數學部分（數量推理、圖形推理）的分數，先檢定組內迴歸係數同質性之假定，將統計 α 值（顯著水準）設定為 .05，考驗兩組低分組前測成績和後測成績間是否有顯著的交互作用，檢定結果顯示未達顯著 ($F=2.182$, $p=.155 > .05$)，接受虛無假設，表示兩組的迴歸線的斜率相同，代表共變項（前測成績）與依變項（後測成績）之間的關係，不會因為自變項實驗各處理水準的不同而有所差異，符合共變數分析中組內迴歸係數同質性的檢定，繼續進行共變數分析，分析實驗組低分組的學生在後測「鑲嵌測驗」的得分是否顯著高於控制組低分組的學生，如表 4-1-3。

表 4-1-3 實驗組與控制組低分組學生在「鑲嵌測驗」後測表現統計量及差異分析

| 組別 | 個數 | 平均 | 標準差 | 調整後平均數 | F 值 | P |
|--------|----|--------|---------|--------|------|------|
| 實驗組低分組 | 12 | 5.3333 | 3.98482 | 5.494 | .812 | .378 |
| 控制組低分組 | 12 | 7.3333 | 5.21071 | 7.173 | | |

由表 4-1-3 可知實驗組與控制組低分組的學生在後測「鑲嵌測驗」的共變數分析的平均數各為 5.3333 與 7.3333，在排除智力測驗數學部分分數此共變量的影響後各為 5.494 與 7.173，可知雖然實驗組低分組的學生在後測「鑲嵌測驗」的平均低於控制組低分組的學生，但是實驗組低分組的學生在後測「鑲嵌測驗」的得分與控制組低分組的

學生並沒有顯著差異 ($F=.812, p=.378 > .05$)。研究結果顯示使用 AMA 簡報系統和 NLVM 的 Tessellations 為虛擬教具教學和傳統教具教學對於低分組學生的學習效果是一樣的。

4.1.4 研究假設：實驗組不同性別的學生在「鑲嵌測驗」後測上得分有顯著的不同。

本研究假設的依變數為實驗組不同性別學生後測「鑲嵌測驗」的得分，共變量為實驗組不同性別學生國民中學智力測驗數學部分（數量推理、圖形推理）的分數，先檢定組內迴歸係數同質性之假定，將統計 α 值（顯著水準）設定為 .05，考驗實驗組不同性別學生在前測成績和後測成績間是否有顯著的交互作用，檢定結果顯示未達顯著 ($F=0.819, p=.372 > .05$)，接受虛無假設，表示兩組的迴歸線的斜率相同，代表共變項（前測成績）與依變項（後測成績）之間的關係，不會因為自變項實驗各處理水準的不同而有所差異，符合共變數分析中組內迴歸係數同質性的檢定，繼續進行共變數分析，分析實驗組不同性別的學生在「鑲嵌測驗」後測上得分是否有顯著的不同，如表 4-1-4。

表 4-1-4 實驗組不同性別的學生在「鑲嵌測驗」後測表現統計量及差異分析

| 組別（實驗組） | 個數 | 平均 | 標準差 | 調整後平均數 | F 值 | P |
|---------|----|---------|----------|--------|------|------|
| 男生組 | 18 | 24.8889 | 19.89351 | 23.427 | .726 | .400 |
| 女生組 | 18 | 27.0000 | 21.62787 | 28.462 | | |

實驗組不同性別的學生在後測「鑲嵌測驗」的共變數分析的平均數各為 24.8889 與 27.0000，在排除智力測驗數學部分分數此共變量的影響後各為 23.427 與 28.462，雖然實驗組的男生在後測「鑲嵌測驗」的平均低於實驗組的女生，但由表 4-1-5 可知實驗組不同性別的學生在後測「鑲嵌測驗」的表現並無顯著差異 ($F=.726, p=.400 > .05$)，研究結果顯示使用 AMA 簡報系統和 NLVM 的 Tessellations 為虛擬教具教學，對於不同性別的學生學習的效果是一樣的。

本節針對實驗成效作分析後，若排除智力測驗數學部分分數此共變量的影響後，研究結果發現使用 AMA 簡報系統和 NLVM 的 Tessellations 為虛擬教具教學和傳統教具教學的效果是一樣的。以虛擬教具教學的實驗組高分組學生與以傳統教具教學的控制組高分組學生表現有顯著差異，且效果量大於高度效果量，在臨床顯著性有其實質意義，這

表示使用虛擬教具教學對於高分組學生學習而言確實比使用傳統教具教學有較佳的效果。然而以虛擬教具教學的實驗組低分組學生與以傳統教具教學的控制組低分組學生表現沒有顯著差異，這表示虛擬教具教學和傳統教具教學對於低分組學生效果是一樣的。另外，在虛擬教具教學上，實驗組不同性別的學生表現沒有顯著差異，顯示使用虛擬教具教學，對於不同性別的學生學習的效果是一樣的。



4.2 實驗組與控制組學生學習歷程分析

本研究中的控制組為使用實體教具之教學環境，實驗組為使用 AMA 簡報系統 2008 和 NLVM 的 Tessellations 虛擬教具輔助之教學環境，本研究欲透過教室內教學者行為和學習者行為的歷程描述，以期了解並分析不同教學環境對於相同學習課程所產生的影響。以下內容將分別針對每一節課堂及主題，分別描述控制組與實驗組內教學者和學習者的行為，並做綜合分析。

4.2.1 第一節展示日常生活中常見的美麗鑲嵌圖形與探討規則鑲嵌的種類

1. 控制組的學習歷程描述

(1) 教學者行為

教師使用事先準備好的海報，介紹生活中的鑲嵌圖形，讓每一位同學皆能清楚看到各式各樣圖形，因為大張海報張貼不易，需要數位學生協助花費一些時間。教師以生活中常見的六角形地磚與人行道圖案引入，並依序展示由八邊形、四邊形與三角形構成的中國圖案、四角形構成的埃及與龐貝圖案、六角形、正方形與三角形構成的拜占庭圖案，詢問學生看到哪些正多邊形，是不是有拼在一起等。接下來教師介紹由非正多邊形構成的阿罕布拉宮的鑲嵌圖案，引導學生思考似乎不是正多邊形的其他多邊形也可以拼在一起。之後教師繼續展示荷蘭版畫家 Escher 的作品蜥蜴、鳥、魚與飛馬，讓學生了解非多邊形的圖形仍然可以是鑲嵌圖案。如圖 4-2-1、圖 4-2-2。

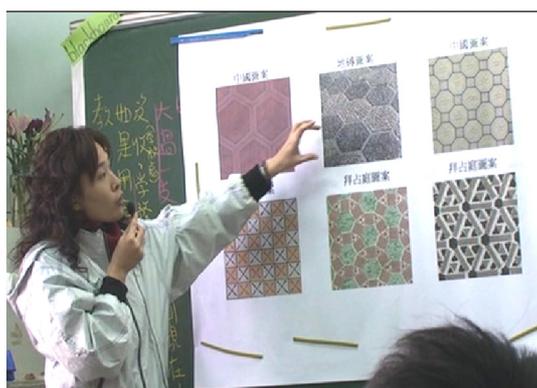


圖 4-2-1 教師以海報介紹鑲嵌圖形



圖 4-2-2 教師介紹 Escher 圖案

以生活中的各式圖案引發學生學習動機後，教師更換上正多邊形每一個內角度數的海報，並輔以黑板複習正多邊形的每一個內角度數的概念，教師在海報張貼過程較手忙腳亂，所以也請學生協助。但此部份為複習，因此正六邊形之後的正多邊形僅以表格顯

示計算結果。另外，因為正多邊形邊數愈大後會趨近圓形，所以從正二十邊形後，僅列出正二十四、三十、三十六、四十、四十二邊形，並要求學生將度數填寫在學習單上，以利於之後活動的進行。如圖 4-2-3、圖 4-2-4。

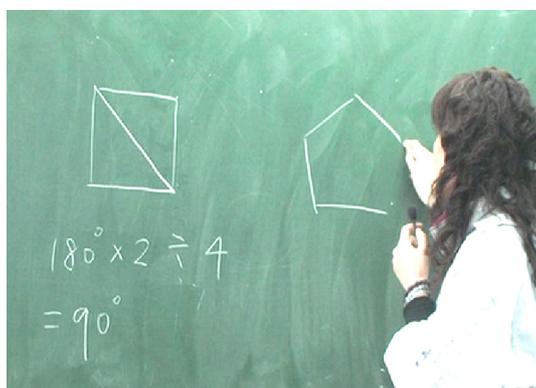


圖 4-2-3 教師以黑板復習內角度數



圖 4-2-4 教師以海報復習概念

複習結束後，教師發放教具袋給每一位學生，教具袋內有各式教學所須用到的正多邊形和裝有不規則圖形的信封袋，教師說明教具的使用，並要求學生以同一種正多邊形嘗試鑲嵌，將結果填寫在鑲嵌學習單 1 的部份。可以的圖形填寫邊數並且畫出圖形於學習單 1 的第二頁，不能鑲嵌的圖形填寫邊數並列舉部份於第三頁。確認學生了解如何操作後讓學生實際操作，教師則開始巡視觀察學生的操作情形。在學生操作完畢後，要求學生寫下以何種方法嘗試，並思考可以鑲嵌的理由，進行討論與分享哪些正多邊形可以鑲嵌，完成第一堂規則鑲嵌的課程。如圖 4-2-5、圖 4-2-6。



圖 4-2-5 教師發給每位學生教具袋



圖 4-2-6 教師巡視並指導學生

(2) 學習者行為

控制組學生在教室內上數學反應和平常差不多，當教師使用事先準備好的海報介紹

生活中的鑲嵌圖形時，因為大張海報張貼不易，有數位學生上台協助張貼。雖然海報已將圖形盡量放大，但是對於遠處的學生來說，複雜的圖形仍較不易觀察，如圖 4-2-7、圖 4-2-8。當老師詢問是否看過這些地磚時，學生們陸續回答：「有在地板、人行道看過。」教師開始依序展示圖片並詢問有哪些形狀時，學生會依序討論圖片中包含哪些形狀。而當介紹拜占庭圖案時，學生除了能指出每一個圖案外，也回答拼好的形狀像圓形。隨著阿罕布拉宮的不規則鑲嵌圖案出現，學生立刻有人說：「不規則。」，並發現即使不是正多邊形，但是每一個圖案是相同的。之後當教師展示荷蘭版畫家 Escher 的作品蜥蜴，詢問圖形有沒有相同時，遠處少部分學生因為無法很快看仔細，一開始認為圖形應該是不同的，所以出現了不同的回答。陸續展示了 Escher 的鳥、魚與飛馬，學生的驚訝聲此起彼落，對於這些圖形有許多不同的看法與想像。



圖 4-2-7 學生上課反應和平常差不多



圖 4-2-8 複雜圖形遠處學生不易觀察

接下來教師利用黑板複習正多邊形的每一個內角度數的概念。此部份為複習，因此正六邊形之後的正多邊形僅以表格顯示計算結果，學生將度數填寫在學習單上，作為之後操作的參考以及分析哪些種類的正多邊形能夠鑲嵌。因為使用海報，所以資訊是全部呈現的，因此教師需要逐一說明，讓學生能夠跟著教師的教學程序，而不被其他多餘資訊干擾。複習結束後，教師發放教具袋給每一位學生，教具袋內有各式教學所需用到的正多邊形和裝有不規則圖形的信封袋，教師說明教具的使用，並要求學生以同一種正多邊形嘗試鑲嵌，將結果填寫在鑲嵌學習單 1 的部份。因為教具袋內的圖形種類繁多，因此可以看見部分學生在教師示範與說明過程中，對於教具袋內各式圖形感到好奇，會分心玩弄教具，甚至想將所有圖形分類。雖然每一種圖形已準備許多個數，但學生仍必須在教具袋中翻找需要的圖形，因此學生仍一再發問圖形種類是否足夠，並不時和同學交頭接耳討論不同的正多邊形分別是什麼顏色。如圖 4-2-9、圖 4-2-10。



圖 4-2-9 學生打算將所有圖形分類



圖 4-2-10 不時和同學交頭接耳討論

控制組學生在整個操作過程中，因為教具袋中圖形種類繁多，有的學生由最小的開始一個一個嘗試，部分學生則任意從教具袋中取出哪一種正多邊形就拿來嘗試，較無次序性，有些甚至將正六邊形無限向四方延伸並表示圖形跟蜂窩一樣，甚至未專心操弄自己的教具，而是圍在一起無限拼湊圖形。有部分學生僅考慮邊密合，忽略了需要密貼鋪成 360 度，圖形僅完成部份。而且大多數同學對於自己拼貼的圖形似乎沒有信心，不停的彼此詢問哪些圖形可以，哪些圖形不行。

由於傳統教具在拿取上較不便利，而且在拼貼過程中會任意位移，學生必須一再調整，無法很迅速看出圖形是否能鑲嵌，所以學生在操作過程中時間拉長，延誤下課十分鐘才完成。另一方面因為桌面空間不夠，所以學生僅能保留部分拼好的圖形，無法保留所有嘗試過的圖形，也會影響學習單的書寫，造成控制組學生較無充分時間自己思考，所以是藉由彼此討論，逐漸溝通了何謂鑲嵌的條件，哪些正多邊形可以構成規則鑲嵌，並了解和正多邊形每一個內角度數是有關係的。最後討論出只有正三角形、正四邊形、正六邊形三種可以構成規則鑲嵌，因為它們的每一個內角度數是 360 度的因數，所以它們能合成 360 度，而正七邊形以上是不可能的，拼貼會出現縫以致於無法構成 360 度。如圖 4-2-11 到圖 4-2-16。

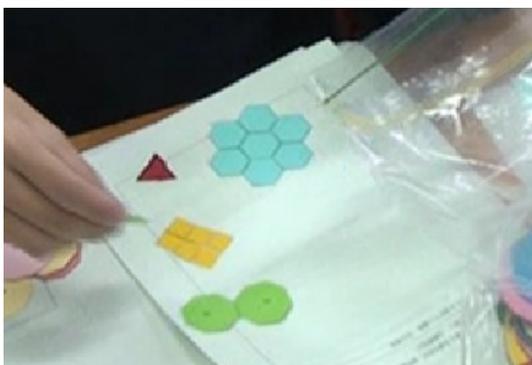


圖 4-2-11 學生由最小圖形開始嘗試



圖 4-2-12 學生任意嘗試，無次序性

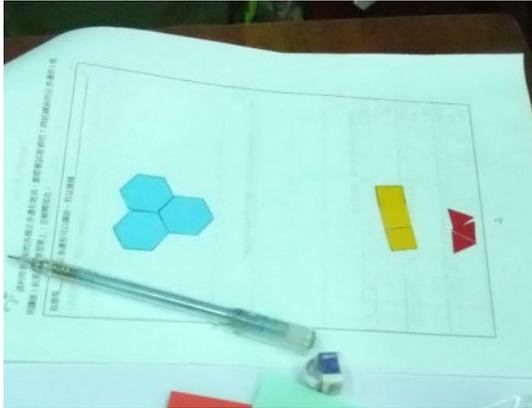


圖 4-2-13 部分圖形未拼貼成 360 度



圖 4-2-14 學生圍在一起拼湊圖形

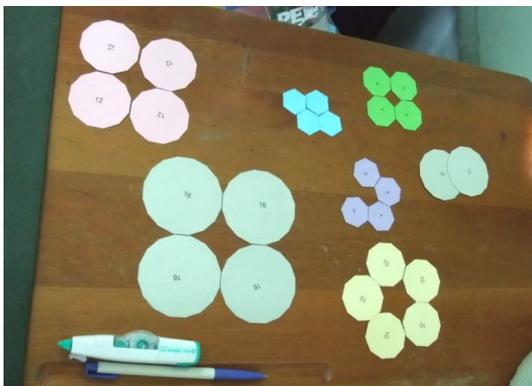


圖 4-2-15 學生桌面空間不夠，無法保留所有圖形



圖 4-2-16 傳統教具拼貼上容易位移，學生需一再調整

2. 實驗組的學習歷程描述

(1) 教學者行為

教師使用事先以 AMA 簡報系統 2008 設計好的簡報，介紹生活中的鑲嵌圖形，利用教學廣播系統傳送至每一位同學面前的螢幕，讓每一位同學皆可清楚看到詳細的教學步驟與圖片，並聆聽老師的解說。教師以生活中常見的六角形地磚與人行道圖案引入，並依序展示由八邊形、四邊形與三角形構成的中國圖案、四角形構成的埃及與龐貝圖案、六角形、正方形與三角形構成的拜占庭圖案，詢問學生看到哪些正多邊形，是不是有拼在一起等。接下來教師介紹由非正多邊形構成的阿罕布拉宮的鑲嵌圖案，引導學生思考似乎不是正多邊形的其他多邊形也可以拼在一起。之後教師繼續展示荷蘭版畫家 Escher 的作品蜥蜴、鳥、魚與飛馬，讓學生了解非多邊形的圖形仍然可以是鑲嵌圖案。如圖 4-2-17 到圖 4-2-20。



圖 4-2-17 教師以教學廣播介紹鑲嵌圖形

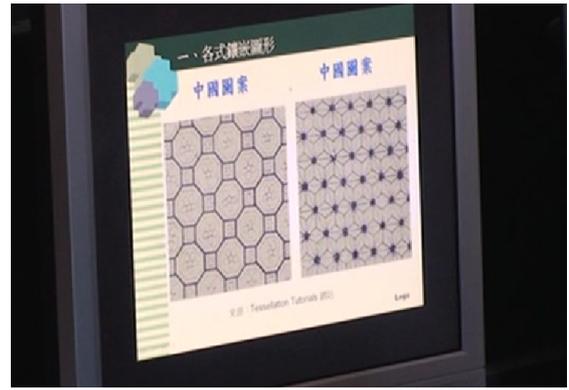


圖 4-2-18 教師介紹中國圖案

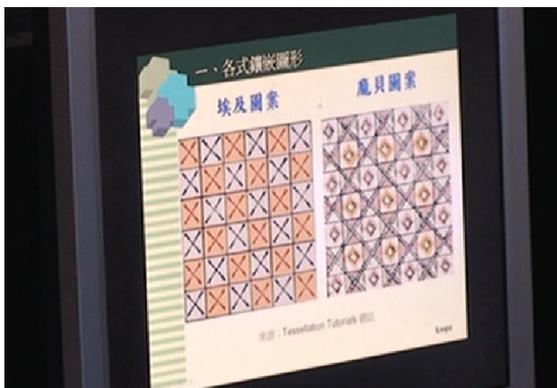


圖 4-2-19 教師介紹埃及、龐貝圖案

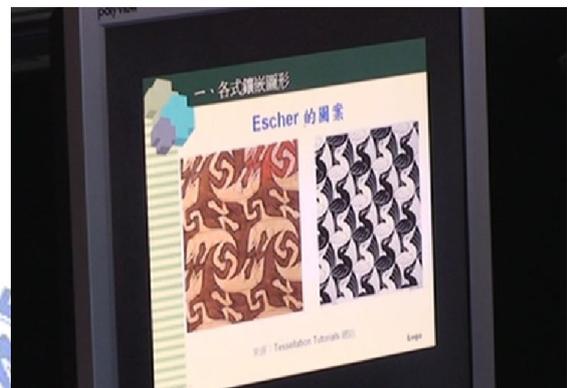


圖 4-2-20 教師介紹 Escher 圖案

以生活中的各式圖案引發學生學習動機後，教師使用 AMA 簡報系統 2008 的激發式動態學習功能進行教學，依序利用按鈕複習正多邊形的每一個內角度數的概念。此部份為複習，因此正六邊形之後的正多邊形僅以表格顯示計算結果。另外，因為正多邊形邊數愈大後會趨近圓形，所以從正二十邊形後，僅列出正二十四、三十、三十六、四十、四十二邊形，並要求學生將度數填寫在學習單上，以利於之後活動的進行。如圖 4-2-21、圖 4-2-22。

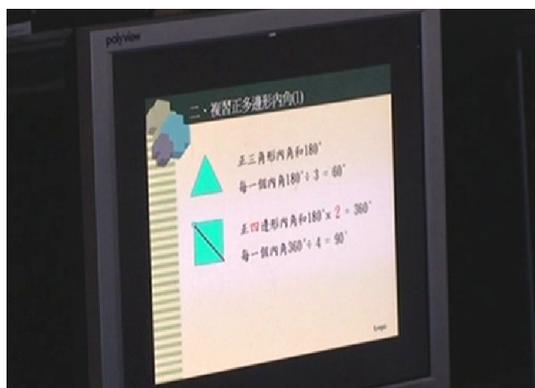


圖 4-2-21 教師復習每一個內角度數

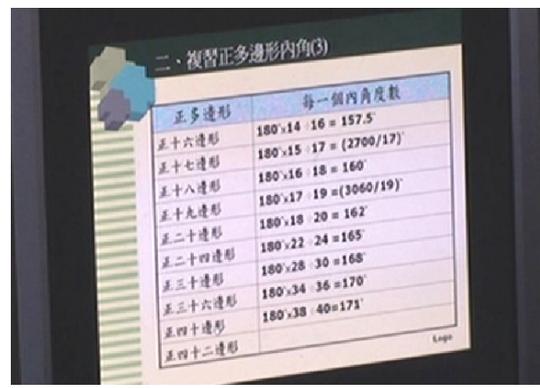


圖 4-2-22 教師以按鈕依序復習概念

複習結束後，教師示範虛擬教具的使用，如何以滑鼠移動、旋轉與拼接，並要求學生以同一種正多邊形嘗試鑲嵌，將結果填寫在鑲嵌學習單 1 的部份。可以的圖形填寫邊數並且畫出圖形於學習單 1 的第二頁，不能鑲嵌的圖形填寫邊數並列舉部份於第三頁。確認學生了解如何操作後，將畫面切換讓學生實際操作，教師則開始巡視觀察學生的操作情形。在學生操作完畢後，要求學生寫下以何種方法嘗試，並思考可以鑲嵌的理由，進行討論與分享哪些正多邊形可以鑲嵌，完成第一堂規則鑲嵌的課程。如圖 4-2-23、圖 4-2-24。



圖 4-2-23 教師示範如何操作拼貼

圖 4-2-24 教師巡視並指導學生

(2) 學習者行為

實驗組學生對於進電腦教室上數學十分興奮，當教師以廣播系統切換畫面，並請同學關閉燈光後，學生們皆專注看畫面與聆聽老師介紹。當老師詢問是否看過這些地磚時與是不是有拼在一起時，學生們異口同聲回答：「有。」教師開始依序展示圖片並詢問有哪些形狀時，學生會依序討論圖片中包含哪些形狀。在介紹埃及圖案時，有學生還回答正方形內有染色體，引發一陣笑聲，而當介紹拜占庭圖案時，學生除了能指出每一個圖案外，甚至回答拼好的形狀是正十二邊形。隨著阿罕布拉宮的不規則鑲嵌圖案出現，學生認為像釘子，並發現即使不是正多邊形，但是每一個圖案是相同的。之後當教師展示荷蘭版畫家 Escher 的作品蜥蜴、鳥、魚與飛馬時，學生的驚訝聲此起彼落，對於這些圖形有許多不同的看法與想像。

接下來教師依序利用按鈕複習正多邊形的每一個內角度數的概念。此部份為複習，因此正六邊形之後的正多邊形僅以表格顯示計算結果，學生將度數填寫在學習單上，作為之後操作的參考以及分析哪些種類的正多邊形能夠鑲嵌。因為採取激發式動態的功能，所以學生能夠專心的跟著教師的教學程序，而不被其他多餘資訊干擾，也能適時反應是否有跟上步伐。複習結束後，教師示範虛擬教具的使用，當畫面出現時，學生認為很新奇、很酷，迫不及待詢問老師如何操作，當教師說明點取圖形上像天線的東西即可

旋轉時，台下學生們還哄堂大笑，紛紛表示會操作了。在示範與說明過程中，學生皆十分專注聆聽教師說明並不時發問確認如何填寫學習單，當教師將畫面切換讓學生實際操作時，學生歡呼且躍躍欲試。如圖 4-2-25、圖 4-2-26。

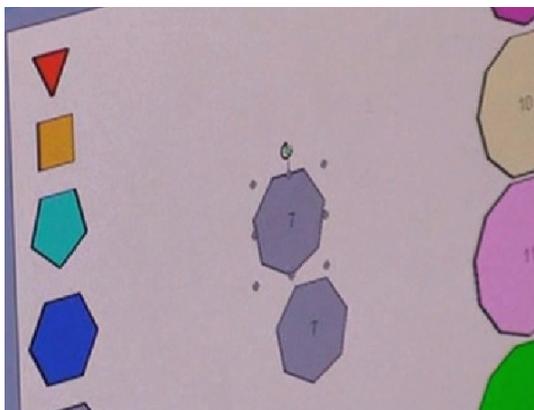


圖 4-2-25 教師示範如何旋轉



圖 4-2-26 學生專注聆聽示範

實驗組學生在整個操作過程中，自創性相當高，有的學生由最小的開始一個一個嘗試，有些則依據之前正多邊形每一個內角角度，挑選部份正多邊形做嘗試，有些甚至將正六邊形無限向四方延伸並表示圖形跟蜂窩一樣。有部分學生僅考慮邊密合，忽略了需要密貼鋪成 360 度，圖形僅完成部份。但在嘗試與討論中，學生逐漸溝通了何謂鑲嵌的條件，哪些正多邊形可以構成規則鑲嵌，並了解和正多邊形每一個內角度數是有關係的。由於電腦上的教具種類在拿取上十分便利，旋轉拼貼時也不會任意位移，以及可以很精準看出圖形間是否能鑲嵌。所以學生很快就完成了規則鑲嵌的活動並有充分時間思考，紛紛表示只有正三角形、正四邊形、正六邊形三種可以構成規則鑲嵌，因為它們的每一個內角度數是 360 度的因數，所以它們能合成 360 度，而正七邊形以上是不可能的，拼貼會出現縫以致於無法構成 360 度。甚至有部份學生已經自行動手嘗試第二節課的半規則鑲嵌。如圖 4-2-27 到圖 4-2-32。

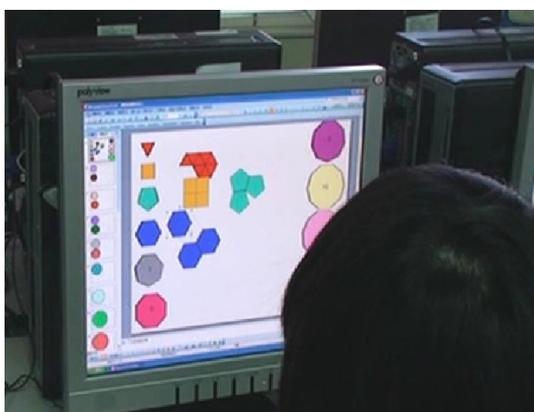


圖 4-2-27 學生從最小的開始嘗試

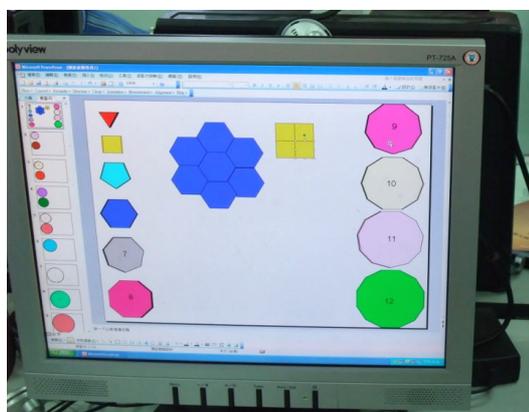


圖 4-2-28 學生挑選部分圖形嘗試

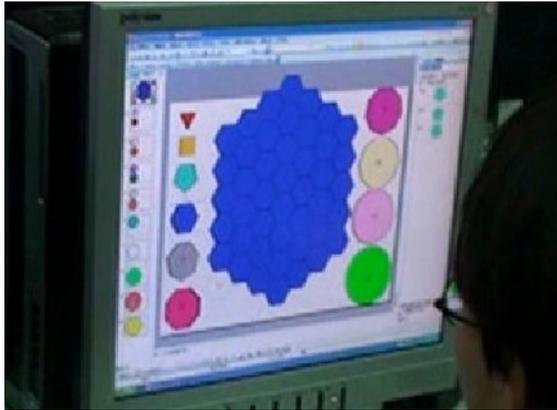


圖 4-2-29 學生將正六邊形無限延伸

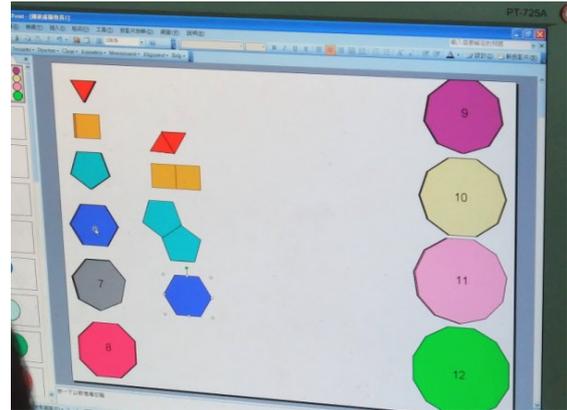


圖 4-2-30 部分圖形未拼貼成 360 度

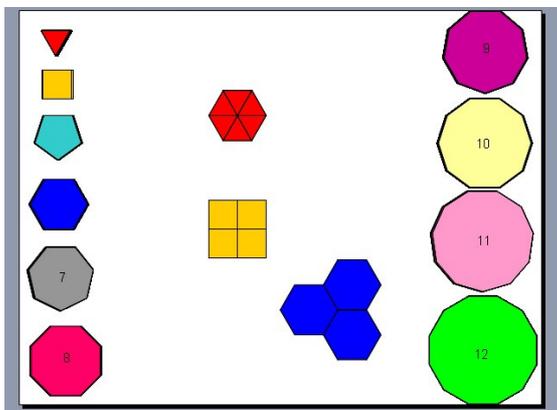


圖 4-2-31 虛擬教具拼貼不易位移



圖 4-2-32 學生自行嘗試半規則鑲嵌

3. 綜合分析

在規則鑲嵌的教學上，控制組和實驗組在教學設計上皆是採用教師自編教材，教學內容和步驟是一致的，也使用相同的學習單，兩組僅在教具的使用上不同，因此在教材上沒有差異性存在。但實驗組採用虛擬教具以廣播系統教學，教師能透過電腦更清楚掌握學生的學習狀況，這與 Izydorczak(2003)認為虛擬教具可以自動監控學習活動符合。

控制組學生對於教師以傳統實體教具進行教學，雖然每個人皆可以實際操作傳統實體教具，卻如平常教學般較一板一眼，對於自己拼貼的圖形似乎沒有信心，不停的彼此詢問哪些圖形可以，哪些圖形不行，較缺乏自主性行為。反觀實驗組學生對於教師以電腦進行教學，每個人都能實際操作虛擬教具而感到十分興奮，對於自己拼貼的圖形相當有信心，展現了自主性的數學探索與思維能力，而且上課動機強。

控制組採用傳統實體教具進行教學，為了力求視覺清晰，需要大型的海報，在製作時確實耗費相當多心力與時間，然而仍侷限於黑板大小，對於後面的學生而言，清晰度還是略顯不足。另外，在張貼大型海報時，需要許多磁鐵加以固定，以及數名學生協助

才能順利張貼，也相當不便。而實驗組採用虛擬教具進行教學，以廣播系統使用 AMA 簡報系統 2008 進行教學，製作時不需耗費太多心力與時間，而且每一位學生不受限於教室的位置，皆能夠清楚看見所有的圖形。另外，在切換畫面時，教師僅需以滑鼠點選，過程十分快速。這也反應了 Izydorczak (2003) 所認為的虛擬教具在操作上比傳統實體教具更適合大團體教學，因為實體教具的尺寸無法讓遠距離的學習者看得十分清楚，而且對於教學者而言，在操作上也較為不便。

控制組利用黑板和大型海報，複習正多邊形的每一個內角度數的概念，除了製作費心力與清晰度的問題外，因為資訊是全部呈現的，雖然教師已經逐一說明，讓學生能夠跟著教師的教學程序，但仍容易被其他多餘資訊干擾。而實驗組教師利用 AMA 簡報系統 2008 的激發式動態性學習功能，依序以按鈕複習概念，所以學生能夠專心的跟著教師的教學程序，而不被其他多餘資訊干擾，也能適時反應是否有跟上步伐。這反應了陳明璋 (2008) 所認為以激發式動態呈現的功能，以一個物件當按鈕來控制一連串的動態呈現，能協助教學者適時的呈現數位內容，吸引學習者注意力與引導學習，進而降低學習者的認知負荷。

控制組的傳統教具在拿取上較不便利，而且在拼貼過程中會任意位移，學生必須一再調整，無法很迅速看出圖形是否能鑲嵌，所以操作過程中時間拉長，且因為桌面空間不夠，所以學生僅能保留部分拼好的圖形，也會影響學習單的書寫。而實驗組因虛擬教具種類在拿取上十分便利，旋轉拼貼時也不會任意位移，可以很精準看出圖形間是否能鑲嵌。所以學生很快就完成了規則鑲嵌的活動並有充分時間思考，甚至部分學生已經自行動手嘗試第二節課的半規則鑲嵌。這也反應了 Izydorczak (2003) 所認為的虛擬教具比實體教具更易於操作。因為學生可以拼得更好，而且不會因為疏忽而弄散已經完成的部分成果，尺寸也更精確。

綜合以上所述，在第一堂課的規則鑲嵌活動中，對教學者而言，實驗組使用 AMA2008 教學比控制組使用黑板和海報製作方便，清晰度較好，且利用激發式動態呈現功能降低學生認知負荷。對學習者而言，實驗組使用虛擬教具在拿取上方便，拼貼旋轉也不易位移，比控制組的傳統教具容易操作，節省較多時間，因此實驗組學生較有信心，且部分同學已自行嘗試下一堂的活動。

4.2.2 第二節探討半規則鑲嵌種類與簡介次規則鑲嵌

1. 控制組的學習歷程描述

(1) 教學者行為

教師利用下課時間先請數名學生協助張貼事先準備好的海報，以節省張貼時間及讓

每一位同學皆能清楚看見圖形舉例。在第二堂課開始，教師強調規則鑲嵌是由同一種正多邊形所組成後，再次詢問學生第一堂課規則鑲嵌有哪些正多邊形及原因，將討論結果做個總結，並請學生回想第一堂課剛開始所展示的各種美麗的鑲嵌圖形，其中部分圖形並非由同一種正多邊形所組成的而是由混合兩種或兩種以上正多邊形所組成的，引入第二堂課所要介紹的半規則鑲嵌圖形，與第一堂的規則鑲嵌區別並強化學生學習動機。教師介紹所謂的半規則鑲嵌圖形是由兩種或兩種以上的正多邊形以同一種方式所組成，以半規則鑲嵌的(3, 4, 6, 4)為例子詢問學生此圖形中有哪些正多邊形，並講解鑲嵌圖形的命名原則是在圖形中任意選擇一個頂點，由與這個頂點接觸的多邊形中邊數最少的開始繞一圈，將所有的多邊形邊數記下，直到回到最先的那個多邊形。接下來強調鑲嵌圖形必須要能無限的向四方延展密鋪滿整個平面，因此舉出(3, 9, 18)這一個常見的錯誤例子讓學生了解，雖然正三角形、正九邊形、正十八邊形的角度可以合成360度，但是延伸後會出現縫隙，不能無限的向四方延展，因此不是鑲嵌圖形。如圖4-2-33、圖4-2-34。



圖 4-2-33 教師講解圖形命名原則



圖 4-2-34 教師講解錯誤的例子

接下來教師講解半規則鑲嵌與次規則鑲嵌的差異，再度以半規則鑲嵌的(3, 4, 6, 4)為例說明，無論以圖形中的哪一個頂點開始，都是以同一種方式所組成，只有一種命名。教師以另一張次規則鑲嵌(3, 4, 4, 6/3, 4, 6, 4)的海報進行說明，並以兩種顏色標出圖形中兩種不同的組成方式，黃色部份中心的頂點命名方式是(3, 4, 4, 6)，而藍色部份中心的頂點命名方式是(3, 4, 6, 4)，讓學生了解所謂次規則鑲嵌雖然同樣是由兩種或兩種以上的數個正多邊形以邊相鄰拼接，但是圖形中頂點共由兩種方式組成，因此有兩種命名。教師跟學生說明因為次規則鑲嵌種類繁多，將不在課堂上進行操作，而以作業的方式讓學生回家自行挑戰。在本堂課中只探討半規則鑲嵌，要求學生以兩種或兩種以上的正多邊形嘗試鑲嵌，將找到的半規則鑲嵌的圖形填寫出命名，並且將圖形繪於學習單2的第一頁和第二頁。講解完畢之後讓學生用教具袋中的圖形實際操作，教師則開始巡視觀察學生的操作情形。等學生操作完畢，教師要求學生於學習單2的第三頁寫下以何種

方法嘗試，並思考可以鑲嵌的理由，進行討論與分享哪些正多邊形可以構成半規則鑲嵌，完成第二堂半規則鑲嵌的課程。如圖 4-2-35 到圖 4-2-38。

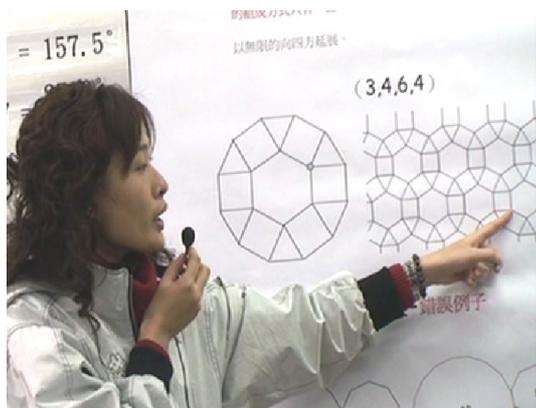


圖 4-2-35 教師說明半規則鑲嵌
只有一種方式

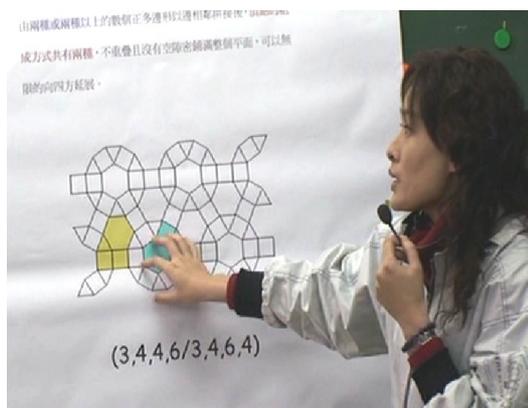


圖 4-2-36 教師說明次規則鑲嵌
共有二種方式



圖 4-2-37 教師講解黃色部份命名

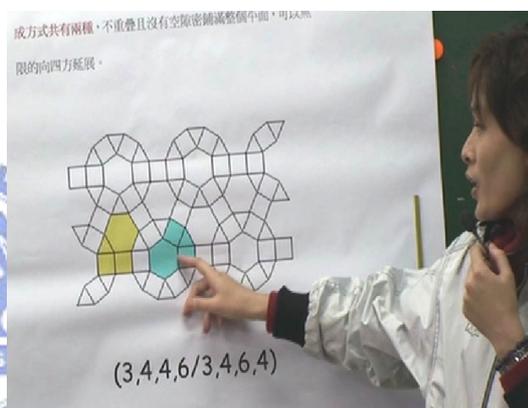


圖 4-2-38 教師講解藍色部份命名

(2) 學習者行為

在第二堂課開始，教師強調第一堂的規則鑲嵌是由同一種正多邊形所組成後，詢問學生規則鑲嵌有哪些正多邊形，學生回答：「正三角形、正方形、正六邊形。」並詢問是否能找到其他的圖形，學生回答：「沒有了。」教師進一步詢問學生原因，學生回答：「角度要拼成 360 度。」教師進一步引導為什麼這三種正多邊形可以，學生回答：「因為是 360 度的因數。」在問答過程中，可以發現回答的學生並不多，而且部份回答不完整，因此教師只好一再深入詢問並引導，將討論結果做個總結。

隨後教師請學生回想第一堂課展示的各種美麗的鑲嵌圖形，引入第二堂課所要介紹的半規則鑲嵌圖形，介紹半規則鑲嵌圖形是由兩種或兩種以上的正多邊形以同一種方式所組成，並以半規則鑲嵌的 (3, 4, 6, 4) 為例子詢問學生圖形中有幾種正多邊形以及哪些正多邊形時，學生並沒有回答，因此教師自行回答有三種並依序說明正多邊形種類。當教師講解鑲嵌圖形的命名原則，並舉出 (3, 9, 18) 這一個常見的錯誤例子說明時，控制組學生亦是安靜聆聽沒有回應教師的提問。直到教師詢問學生 (3, 9, 18) 為什麼不行，

才有一位學生簡單回答：「18。」因答案不完整，教師以圖形進一步說明並引導詢問延伸後會出現什麼狀況，同一位學生回答：「裂掉了。」似乎大部分學生無法確實掌握概念，因此教師只能再度詳細說明。接下來教師講解半規則鑲嵌與次規則鑲嵌的差異時，學生依舊是選擇聆聽而沒有回應，少數學生則一邊聆聽教師說明一邊操作教具。如圖 4-2-39、圖 4-2-40。



圖 4-2-39 學生聆聽教師講解少回應



圖 4-2-40 學生一邊聆聽一邊操作

控制組學生在整個操作過程中，因為教具袋中圖形種類繁多，顯得手足無措，大部分學生任意從教具袋中取出正多邊形就拿來嘗試，較無次序性。不少同學仍然排出兩種組成方式的次規則鑲嵌，甚至是教師之前所舉的例子，可見概念仍不清楚。部分同學則是任意組合圖形，例如：將正十二邊形環狀排列、將正七邊形和正三角形排成太陽形狀、排成人形、任意亂拼接的。甚至少數同學未專心操弄自己的教具，而是抄襲他人拼好的圖形。而且大多數同學對於自己拼貼的圖形似乎沒有信心，不停的彼此詢問哪些圖形可以，哪些圖形不行，因此有些同學開始離開位子，與其他同學討論。如圖 4-2-41 到圖 4-2-48。



圖 4-2-41 學生任意取出圖形嘗試

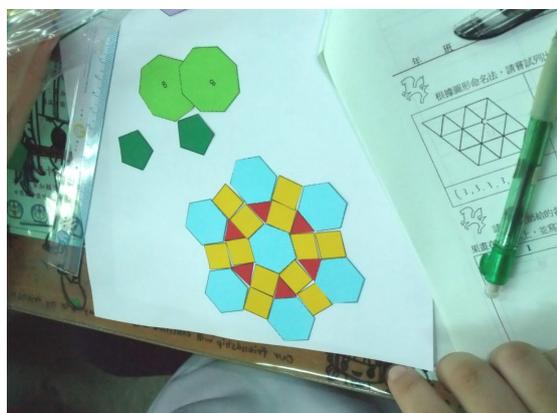


圖 4-2-42 排出教師舉例的次規則鑲嵌



圖 4-2-43 學生排出 (3, 4, 6, 4) 和次規則鑲嵌 (3, 4, 3, 12/3, 12, 12)



圖 4-2-44 學生任意將正十二邊形環狀排列

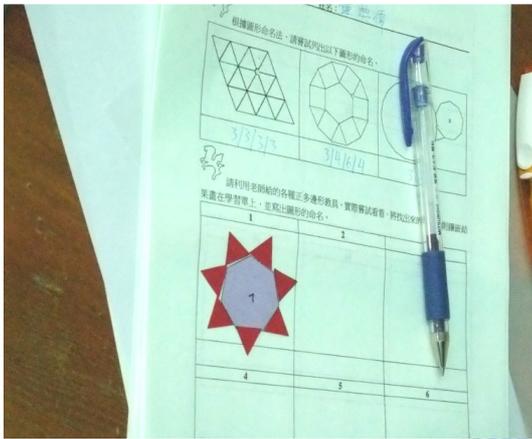


圖 4-2-45 學生將正七邊形和正三角形排成太陽形狀

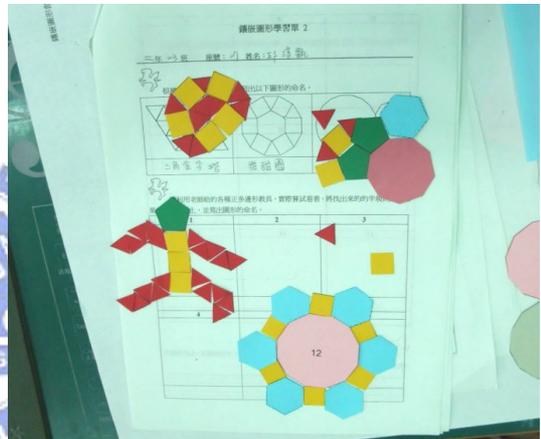


圖 4-2-46 學生排人形、次規則鑲嵌 (3, 3, 3, 4, 4/3, 3, 4, 3, 4)、亂拼湊和 (4, 6, 12)



圖 4-2-47 學生抄襲同學的圖形



圖 4-2-48 學生離開位子與同學討論

由於傳統教具在拿取上較不便利，而且在拼貼過程中會任意位移，學生需一再調整，無法很迅速看出圖形是否能鑲嵌，所以不少學生都拼出不能組合成 360 度的錯誤圖形，例如： $(5, 6, 8)$ 、 $(3, 9, 19)$ 、 $(3, 12, 13)$ 、 $(3, 12, 15)$ 等，尤其是 $(5, 6, 8)$ 是最常出現的錯誤，且在操作過程中時間拉長，延誤到下課十五分鐘。另一方面因為桌面空間不夠，所以學生僅能保留部分拼好的圖形，無法保留所有嘗試過的圖形，桌面雜亂也會影響學習單的書寫。絕大多數控制組學生都能拼出教師上課中舉例的 $(3, 4, 6, 4)$ 和 $(4, 6, 12)$ ，然而其他圖形卻常包含次規則鑲嵌及各種錯誤的例子，僅有少部分學生排出的圖形完全正確。教具的操作不易讓學生較無充分時間思考，所以是藉由彼此討論，互相討論了哪些正多邊形可以構成半規則鑲嵌。最後全班學生仍找不齊 $(3, 3, 3, 3, 6)$ 、 $(3, 3, 3, 4, 4)$ 、 $(3, 3, 4, 3, 4)$ 、 $(3, 6, 3, 6)$ 、 $(3, 4, 6, 4)$ 、 $(3, 12, 12)$ 、 $(4, 6, 12)$ 、 $(4, 8, 8)$ 這八種半規則鑲嵌圖形。如圖 4-2-49 到圖 4-2-56。



圖 4-2-49 學生排出 $(4, 6, 12)$ 和錯誤的 $(5, 6, 8)$

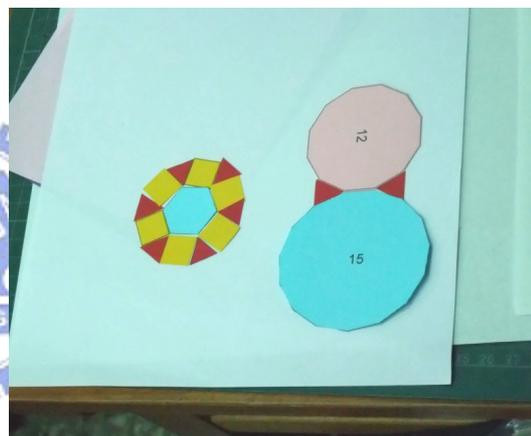


圖 4-2-50 學生排出 $(3, 4, 6, 4)$ 和錯誤的 $(3, 12, 15)$



圖 4-2-51 學生排錯誤的 $(3, 12, 13)$



圖 4-2-52 學生排出錯誤的 $(3, 9, 19)$



圖 4-2-53 學生排出 (4, 6, 12) ,
但桌面雜亂, 書寫不便



圖 4-2-54 學生排出 (3, 4, 6, 4) 和
亂拼接的圖形

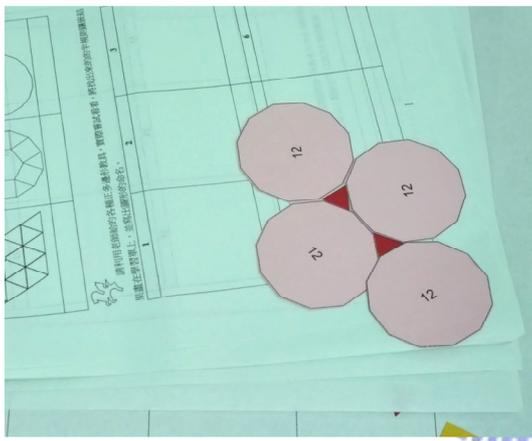


圖 4-2-55 學生排出 (3, 12, 12)

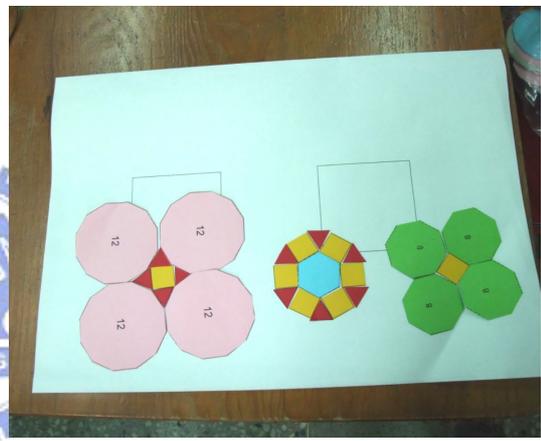


圖 4-2-56 學生排出 (3, 4, 6, 4)、
(4, 8, 8) 和次規則鑲嵌
的 (3, 4, 3, 12/3, 12, 12)

2. 實驗組的學習歷程描述

(1) 教學者行為

教師在第二堂課開始同樣對實驗組學生強調規則鑲嵌是由同一種正多邊形所組成後, 再次詢問學生第一堂課規則鑲嵌有哪些正多邊形及原因, 將討論結果做個總結, 並請學生回想第一堂課剛開始所展示的各種美麗的鑲嵌圖形, 其中部分圖形並非由同一種正多邊形所組成的而是由混合兩種或兩種以上正多邊形所組成的, 引入第二堂課所要介紹的半規則鑲嵌圖形, 與第一堂的規則鑲嵌區別並強化學生學習動機。之後教師以 AMA 簡報系統 2008 設計好的簡報, 利用教學廣播系統傳送至每一位同學面前的螢幕, 讓每一位同學皆可清楚看到詳細的教學步驟與圖片。教師解說半規則鑲嵌圖形是由兩種或兩種以上的正多邊形以同一種方式所組成, 以 (3, 4, 6, 4) 為例子詢問學生此圖形中有哪

些正多邊形，並講解鑲嵌圖形的命名原則是在圖形中任意選擇一個頂點，由與這個頂點接觸的多邊形中邊數最少的開始繞一圈，將所有的多邊形邊數記下，直到回到最先的那個多邊形。接下來強調鑲嵌圖形必須要能無限的向四方延展密鋪滿整個平面，因此舉出 $(3, 9, 18)$ 這一個常見的錯誤例子讓學生了解，雖然正三角形、正九邊形、正十八邊形的角度可以合成 360 度，但是延伸後會出現縫隙，不能無限的向四方延展，因此不是鑲嵌圖形。如圖 4-2-57、圖 4-2-58。

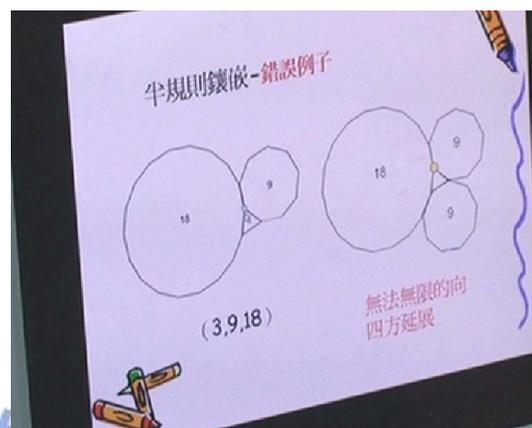
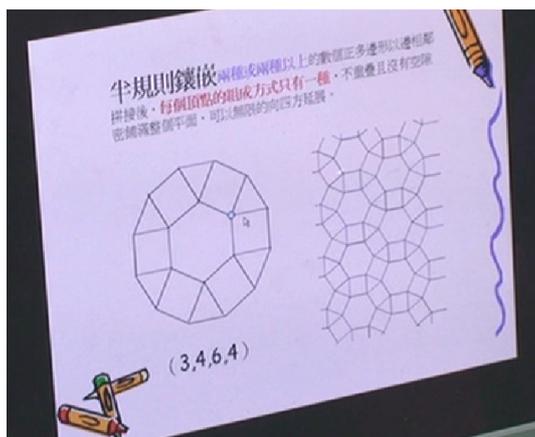


圖 4-2-57 教師講解圖形命名原則

圖 4-2-58 教師講解錯誤的例子

接下來教師講解半規則鑲嵌與次規則鑲嵌的差異，以半規則鑲嵌的 $(3, 4, 6, 4)$ 為例說明，無論以圖形中的哪一個頂點開始，都是以同一種方式所組成，只有一種命名。之後教師以次規則鑲嵌 $(3, 4, 4, 6/3, 4, 6, 4)$ 進行說明，並以兩種顏色標出圖形中兩種不同的組成方式，黃色部份中心的頂點命名方式是 $(3, 4, 4, 6)$ ，而藍色部份中心的頂點命名方式是 $(3, 4, 6, 4)$ ，讓學生了解所謂次規則鑲嵌雖然同樣是由兩種或兩種以上的數個正多邊形以邊相鄰拼接，但是圖形中頂點共由兩種方式組成，因此有兩種命名。教師跟學生說明因為次規則鑲嵌種類繁多，將不在課堂上進行操作，而以作業的方式讓學生回家自行挑戰。在本堂課中只探討半規則鑲嵌，要求學生以兩種或兩種以上的正多邊形嘗試鑲嵌，將找到的半規則鑲嵌的圖形填寫出命名，並且將圖形繪於學習單 2 的第一頁和第二頁。講解完畢之後讓學生使用虛擬教具實際操作，教師則開始巡視觀察學生的操作情形。等學生操作完畢，教師要求學生於學習單 2 的第三頁寫下以何種方法嘗試，並思考可以鑲嵌的理由，進行討論與分享哪些正多邊形可以構成半規則鑲嵌，完成第二堂半規則鑲嵌的課程。如圖 4-2-59 到圖 4-2-62。

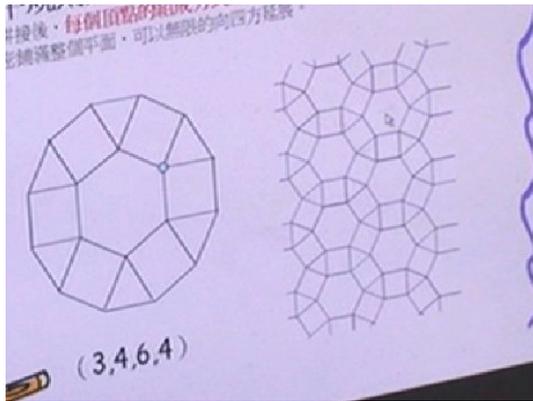


圖 4-2-59 教師說明半規則鑲嵌
只有一種方式

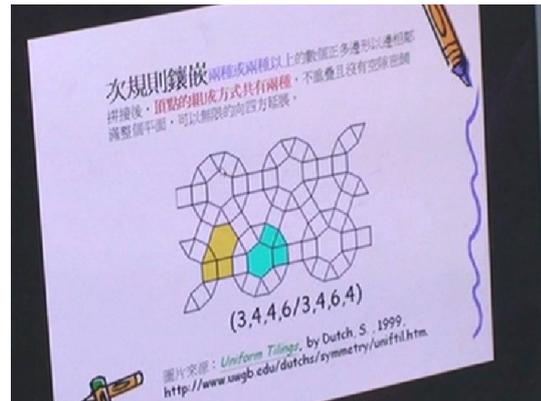


圖 4-2-60 教師說明次規則鑲嵌
共有二種方式

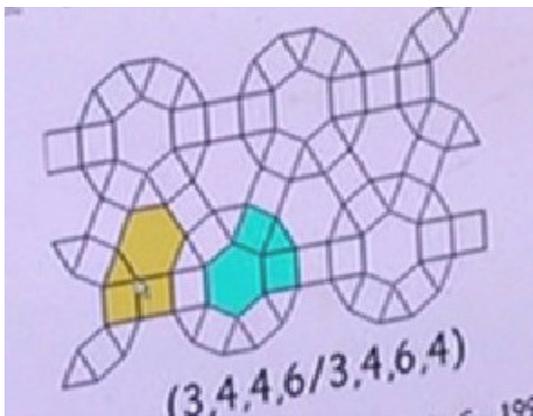


圖 4-2-61 教師講解黃色部份命名

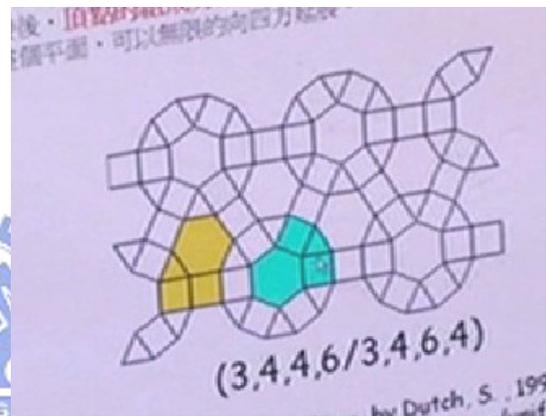


圖 4-2-62 教師講解藍色部份命名

(2) 學習者行為

在第二堂課開始，教師強調第一堂的規則鑲嵌是由同一種正多邊形所組成後，詢問實驗組學生規則鑲嵌有哪些正多邊形，學生紛紛大聲回答：「只有正三角形、正方形、正六邊形。」在問答過程中，可以發現回答的學生很多，而且很有自信，因此教師直接將討論結果做個總結。

隨後教師請學生回想第一堂課展示的各種美麗的鑲嵌圖形，引入第二堂課所要介紹的半規則鑲嵌圖形，介紹半規則鑲嵌圖形是由兩種或兩種以上的正多邊形以同一種方式所組成。當螢幕畫面出現半規則鑲嵌的 $(3, 4, 6, 4)$ 為例子時，部分學生發出驚呼聲，當教師詢問學生圖形中有哪些正多邊形時，學生回答：「正方形、三角形、正六邊形。」教師詢問是否兩種以上時，學生很高興回答：「對。」，教師說明有三種時，學生同樣回答：「對。」當教師講解鑲嵌圖形的命名原則，學生依序跟著教師滑鼠指向的圖形回答出正多邊形的名稱。以 $(3, 9, 18)$ 這一個常見的錯誤例子說明時，教師詢問學生 $(3, 9, 18)$ 為什麼不行，學生們陸續回答：「兩個九邊形中間沒有連到。」、「兩個九邊形中間沒救

了。」可見學生應該已明白原因，但因為敘述不夠精確，教師進一步說明兩個九邊形無法相連出現縫隙，而且已無法塞入正十八邊形。

接下來教師以次規則鑲嵌的 $(3, 4, 4, 6/3, 4, 6, 4)$ 為例，講解與半規則鑲嵌的差異，並在次規則鑲嵌圖形中以兩種顏色標出圖形中兩種不同的組成方式。當教師詢問黃色部份中心的頂點命名方式時，原本預計以滑鼠依序引導學生回答，結果學生就先回答：「 $(3, 4, 4, 6)$ 」。隨後教師將滑鼠指向藍色部份中心的頂點尚未詢問時，學生就搶先回答：「 $(3, 4, 6, 4)$ 」，教師同樣再說明一次藍色部分命名方式。可見資訊讓視覺學習不受限制，所以學生能立即學習並予以回饋，教師僅扮演提問的角色，讓學生主動思考，最後僅需將學生的發現作個總結。因為學習效果不錯，同學們在操作時對於半規則鑲嵌和次規則鑲嵌的區別較清楚，只有極為少數同學排出次規則鑲嵌中 $(3, 4, 3, 12/3, 12, 12)$ 和 $(3, 3, 6, 6/6, 6, 6)$ 。如圖 4-2-63、圖 4-2-64。

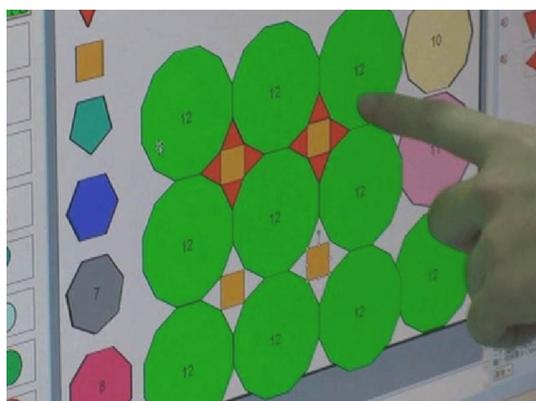


圖 4-2-63 極少數拼出次規則鑲嵌
 $(3, 4, 3, 12/3, 12, 12)$

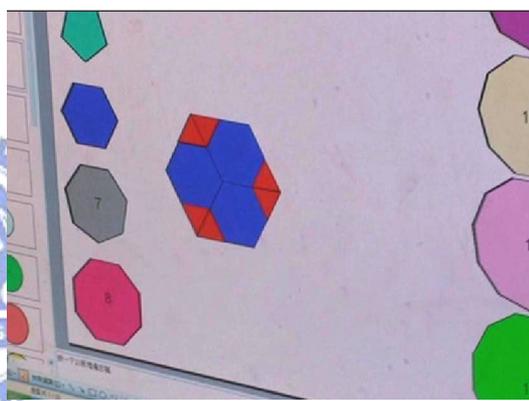


圖 4-2-64 極少數拼出次規則鑲嵌
 $(3, 3, 6, 6/6, 6, 6)$

實驗組學生在整個操作過程中，因為虛擬教具的圖形已分類好，僅需以滑鼠即可任意拿取較方便，雖然大部分學生任意取正多邊形嘗試較無次序性，但是顯得較有自信與積極，另外部分學生使用內角度數計算哪些正多邊形可以組合成 360° ，再拼貼圖形驗證是否能夠延伸。實驗組學生較專注操作自己的教具，相鄰位子的學生會彼此討論發現，但不會任意走動。由於虛擬教具在拿取上便利，在拼貼過程中不會任意位移，學生容易發現圖形是否能密貼，而能判斷圖形是否能鑲嵌，所以較少學生拼出不能組合成 360° 的錯誤圖形，例如： $(5, 5, 12)$ 、 $(3, 4, 3, 11)$ 等。但部份學生會拼出可組合成 360° 但無法延伸錯誤例子，如： $(5, 5, 10)$ 、 $(3, 3, 4, 12)$ 。雖然虛擬教具在操作時方便拼貼，但時間上似乎仍然不夠，大多數學生找到了 $(3, 4, 6, 4)$ 、 $(3, 12, 12)$ 、 $(4, 6, 12)$ 、 $(4, 8, 8)$ 這四種，也有學生找到了七種，最後全班已將八種半規則鑲嵌圖形找齊。如圖 4-2-65 到圖 4-2-74。

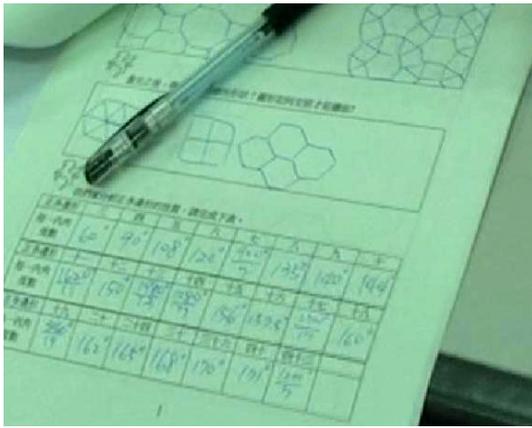


圖 4-2-65 學生使用每一內角度數進行計算再操作驗證



圖 4-2-66 學生專注操作自己的教具，未任意走動

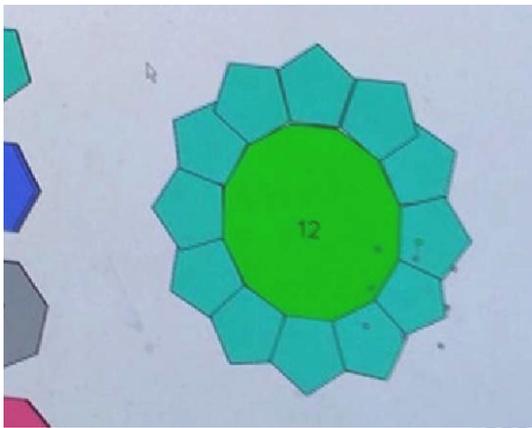


圖 4-2-67 一位學生排出 (5, 5, 12) 不能組成 360 度的圖形

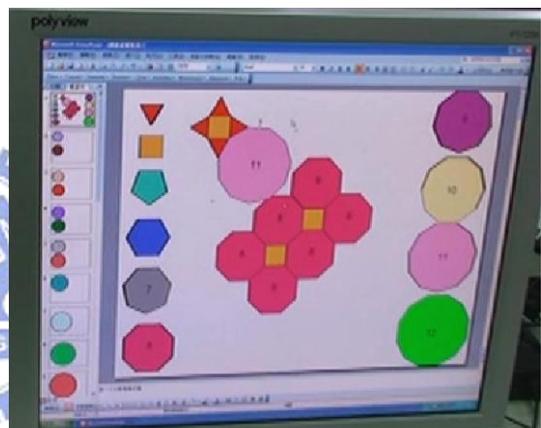


圖 4-2-68 一位學生排出 (3, 4, 3, 11) 不能組成 360 度的圖形

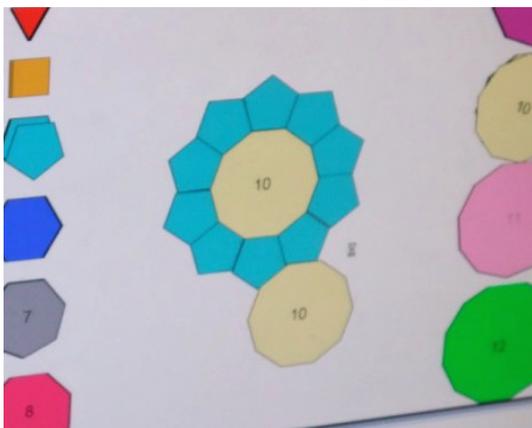


圖 4-2-69 部分學生排出 (5, 5, 10) 無法延伸的圖形

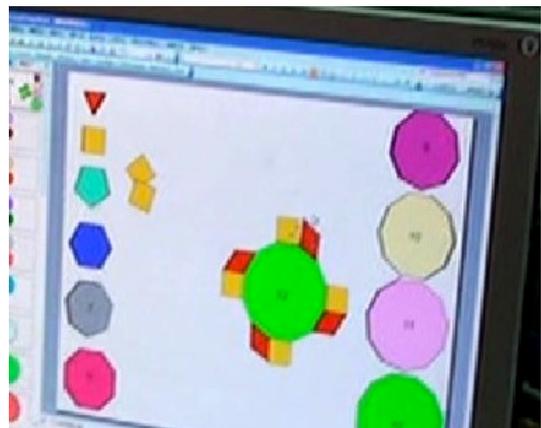


圖 4-2-70 部分學生排出 (3, 3, 4, 12) 無法延伸的圖形

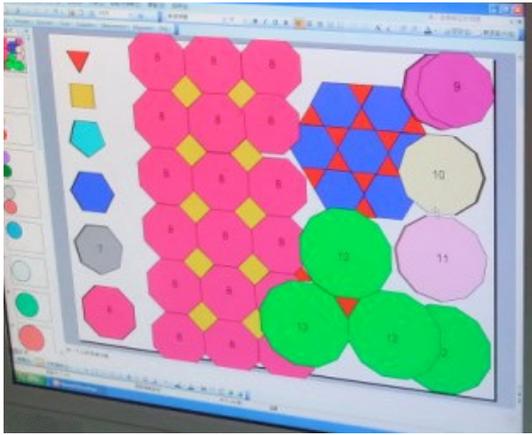


圖 4-2-71 學生排出 (3, 6, 3, 6)、
(3, 12, 12)、(4, 8, 8)

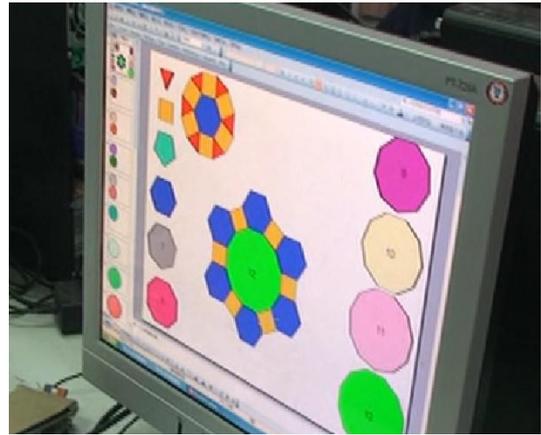


圖 4-2-72 學生排出 (3, 4, 6, 4)、
(4, 6, 12)

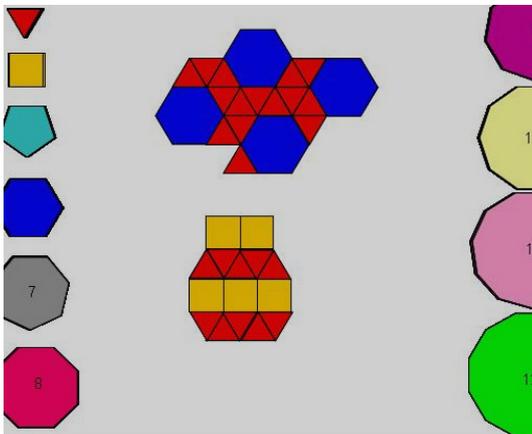


圖 4-2-73 學生排出 (3, 3, 3, 3, 6)
(3, 3, 3, 4, 4)

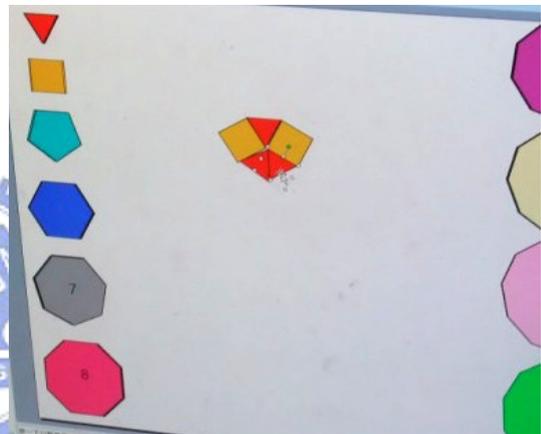


圖 4-2-74 學生排出 (3, 3, 4, 3, 4)

3. 綜合分析

在第二堂半規則鑲嵌的教學上，控制組和實驗組在教學設計上同樣使用相同教材、學習單，教學內容和步驟是一致的，兩組僅在教具的使用上不同。然而控制組學生似乎因為使用傳統教具進行教學，學生的反應較被動，傾向於聆聽而少回應，在問答過程中，可以發現回答的學生並不多且回答不完整，因此教師只好一再深入詢問並引導，教師較難掌握學生是否確實明白，而偏向知識的灌輸。雖然每個人皆可以實際操作傳統實體教具，但因為半規則鑲嵌圖形較為複雜，教具袋中圖形種類繁多，大部分學生任意從教具袋中取出正多邊形就拿來嘗試，較無次序性，對於自己拼貼的圖形也較沒有自信，不停的彼此詢問，甚至部分同學未專心操弄自己的教具，任意排成人形、任意亂拼接的，或是抄襲他人拼好的圖形，也有些同學開始離開位子，與其他同學討論，教室內秩序變得

比較亂。

反觀實驗組學生因為教師以電腦進行教學，學生反應較熱烈，在問答過程中，可以發現回答的學生很多且有自信。甚至教師詢問命名方式時，原本預計引導學生回答，結果學生就能搶先回答，立即給予回饋，教師較能掌握學生是否確實明白，而且能扮演輔助的角色，讓學生扮演主動學習的角色。在實際操作時，儘管半規則鑲嵌圖形較為複雜，學生對於能實際操作虛擬教具仍是感到有趣的，雖然大部分學生任意取正多邊形嘗試，但積極地進行數學探索，專注操作自己的教具，相鄰位子的學生會彼此討論發現，但不會任意走動。這也反應了 Steen, Brooks, and Lyon (2006) 提出虛擬教具能讓學生更專注，加強學習品質和提供適當的困難度。可以增加學生學習與教師教學的動機 (Clements & McMillen, 1996; Reimer & Moyer, 2005; Leathrum, 2001)。以及 Izydorczak (2003) 所認為的虛擬教具所產生的班級管理問題較少。

控制組採用大型海報進行教學，對於後面的學生而言，清晰度還是略顯不足，而且資訊全部呈現會互相干擾，而造成學生認知負荷增加。所以控制組學生在整個操作過程中，不少同學仍然排出兩種組成方式的次規則鑲嵌，甚至是教師之前所舉的例子，可見概念仍不清楚。而實驗組採用 AMA2008 進行教學，每一位學生皆能清楚看見教師教學，教師藉由滑鼠點選依序呈現的適當資訊減少互相干擾，可以降低學生的認知負荷。所以實驗組學生在操作過程中，極少學生排出次規則鑲嵌，可見概念較為清楚。這也反應了 Izydorczak (2003) 所認為的虛擬教具在操作上比傳統實體教具更適合大團體教學，因為實體教具的尺寸無法讓遠距離的學習者看得十分清楚，而且對於教學者而言，在操作上也較為不便。

從錄影畫面分析和研究者本身觀察中，可以發現控制組的傳統教具在拿取上較不便利，而且在拼貼過程中會任意位移，學生需一再調整，操作時間拉長延誤下課，而且相近的多邊形易搞混，所以不少學生拼出不能組合成 360 度的錯誤圖形，例如： $(5, 6, 8)$ 、 $(3, 9, 19)$ 、 $(3, 12, 13)$ 、 $(3, 12, 15)$ 等。另一方面因為桌面空間不夠，學生無法保留所有嘗試過的圖形，桌面雜亂也會影響學習單的書寫。絕大多數控制組學生都能拼出教師上課中舉例的 $(3, 4, 6, 4)$ 和 $(4, 6, 12)$ ，然而其他圖形卻常包含次規則鑲嵌及各種錯誤的例子，僅有少部分學生排出的圖形完全正確。教具的操作不易讓學生較無充分時間思考，所以是藉由彼此討論，互相討論了哪些正多邊形可以構成半規則鑲嵌，但最後全班學生仍找不齊八種半規則鑲嵌圖形。

而實驗組因為虛擬教具的圖形已分類好，僅需以滑鼠即可任意拿取十分便利，旋轉拼貼時也不會任意位移，可以很精準看出圖形間是否能密貼，所以只觀察到極少數學生拼出不能組合成 360 度的錯誤圖形，例如： $(5, 5, 12)$ 、 $(3, 4, 3, 11)$ 等，僅部份學生會

拼出可組合成 360 度但無法延伸錯誤例子，如： $(5, 5, 10)$ 、 $(3, 3, 4, 12)$ 。雖然大部分學生的策略是採取任意嘗試，但是部分學生使用內角度數計算哪些正多邊形可以組合成 360 度，再使用虛擬教具拼貼圖形驗證是否能夠延伸，展現了多元的思維能力。最後儘管時間上似乎仍然不夠，但是全班已找齊八種半規則鑲嵌圖形，更詳細數據可以見下一節學習單的分析輔以佐證。這也反應了 Izydorczak (2003) 所認為的虛擬教具比實體教具更易於操作。因為學生可以拼得更好，不會因為疏忽而弄散已經完成的部分成果，尺寸也更精確。而且虛擬教具透過連結表徵，可以將數學符號及步驟和教具相結合。

綜合以上所述，在第二堂課的半規則鑲嵌活動中，實驗組使用 AMA2008 教學比控制組使用黑板和海報製作方便，清晰度較好，降低學生認知負荷。實驗組學生的上課反應較積極有自信，較專注於操作自己的教具，而控制組學生則較被動，會移動位子討論，部分學生並未專注操弄自己的教具。實驗組使用虛擬教具在拿取上方便，拼貼旋轉也不易位移，節省較多時間，因此，在課堂時間內已找齊八種半規則鑲嵌圖形。但控制組因傳統教具操作易位移，排出較多無法密鋪成 360 度的錯誤圖形外，延誤下課十五分鐘仍無法找齊八種半規則鑲嵌圖形。

4.2.3 第三節探討不規則鑲嵌的條件與學生設計自己的鑲嵌圖形

1. 控制組的學習歷程描述

(1) 教學者行為

教師在第三堂課開始，請學生收好大教具袋，將裝有非正多邊形的另一信封袋拿出，說明這節課將進行不規則圖形的鑲嵌，並詢問信封袋中的圖形是否是正多邊形。接著介紹這些圖形有常見的等腰三角形、直角三角形、不等邊三角形、平行四邊形、菱形、梯形、箏形、任意四邊形等，請學生實際操作是否能鑲嵌，並強調要使用同一種圖形嘗試，以免學生與上一節的半規則鑲嵌混淆。在操作時教師到台下巡視，回答學生各式圖形的顏色和特徵。部分學生忘了鑲嵌需密鋪成 360 度，因此，教師提醒同學鑲嵌圖形需要繞一圈 360 度，同一個頂點圖形要密鋪沒有縫隙，不能只將兩個相同圖形拼在一起。教師並反問學生：「我們之前的課程，只將兩個圖形拼在一起就是鑲嵌了嗎？」來澄清學生的疑問。不過在後續學生操作的過程中，還是有學生在學習單上畫出兩個圖形僅將相同的邊接合，或是只是帶狀延伸，未密鋪成 360 度，所以老師只好在黑板上以矩形為例，詳細再說明鑲嵌要能密鋪成 360 度，沒有縫隙且要能無限向四方延伸。最後討論時，由於學生拼法錯誤，認為有些圖形是不能鑲嵌的，因此教師提醒同學每一個圖形都是可以的，引導學生思考一些特殊圖形如箏形、任意四邊形的排法與鑲嵌需要 360 度之間的關係。如圖 4-2-75、圖 4-2-76。

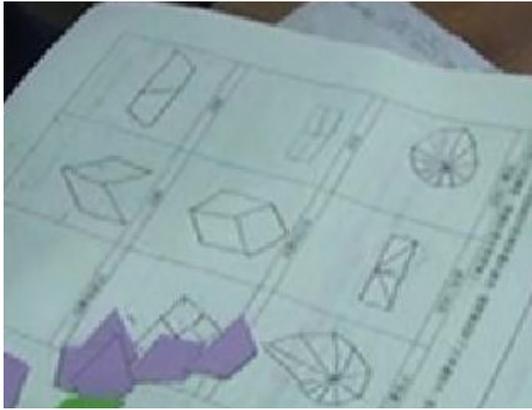


圖 4-2-75 學生沒有密鋪成 360 度



圖 4-2-76 教師以矩形說明需 360 度

接下來教師講解如何設計屬於自己的鑲嵌圖形，請學生回顧第一堂課由同一種正多邊形構成的規則鑲嵌有正三角形、正方形、正六邊形，告訴學生可以由這三種圖形來創作，並以最常見的正方形為例，說明創作曲線的圖形的方法，並告知學生可以設計出第一節課所看到 Escher 的飛馬與蜥蜴圖形。教師以海報先介紹第一種平移的方法，說明先繪出任意曲線後，將此曲線複製後平移至對邊，依此類推將另一邊完成即可。再以事先做好的正方形泡棉教具，實際演練並要求學生跟著每一個步驟操作，在準備好的色紙上畫曲線，剪下來平移至對邊，同樣的另一邊也以相同方式完成圖案。基本圖案完成後，教師以粉筆在黑板上將鑲嵌圖案向四方延伸繪製出連續圖形，並添加眼睛等設計出小貓的圖案。在學生了解基本平移方法後，教師以海報說明如何以平移方法設計出 Escher 的飛馬，並跟學生說明若使用剪刀在設計像飛馬這種圖案，因為在邊上凹凸變化較大以致於平移至對邊不容易，所以教師示範如何將曲線畫在描圖紙上再複製至對邊上。如圖 4-2-77 到圖 4-2-82。

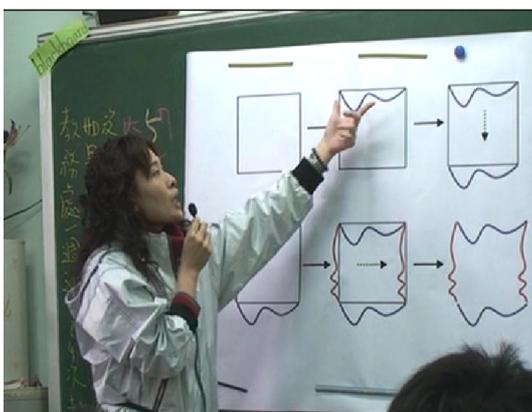


圖 4-2-77 教師以海報說明如何將曲線平移至對邊

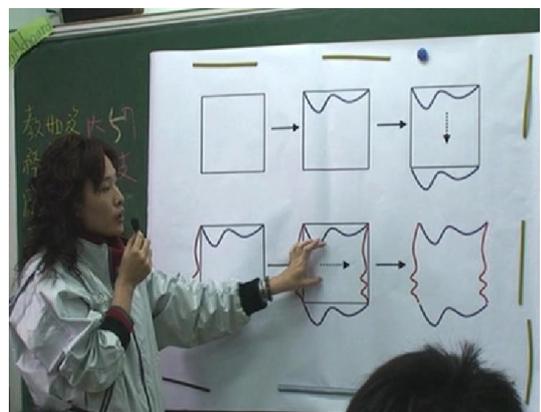


圖 4-2-78 教師將另一邊曲線也平移到對邊

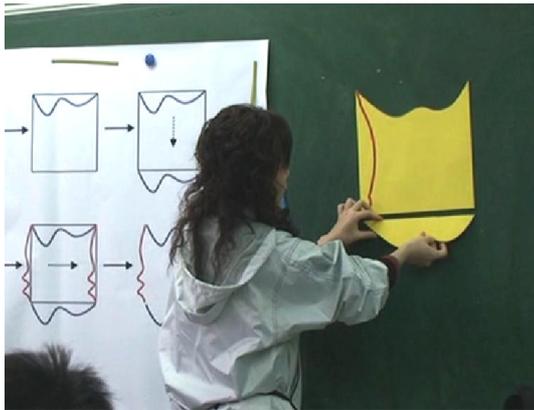


圖 4-2-79 教師以泡棉教具示範平移的方法



圖 4-2-80 教師完成基本圖案，加上設計並繪製出連續圖形

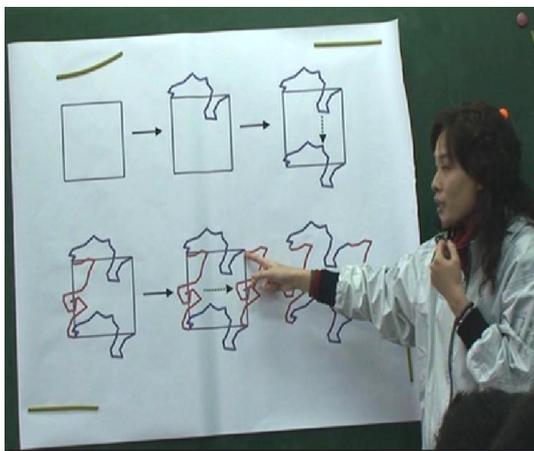


圖 4-2-81 教師說明以平移方法設計出 Escher 的飛馬

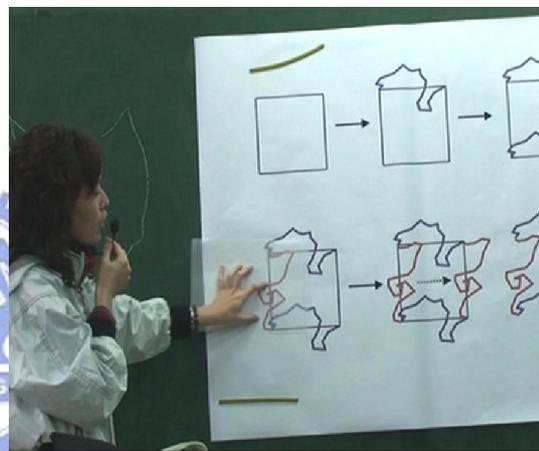


圖 4-2-82 教師示範如何使用描圖紙複製曲線後平移

在說明第一種平移方法後，接下來教師以海報再介紹第二種旋轉的方法，說明先繪出任意曲線後，將此曲線複製後以頂點為中心旋轉到鄰邊，依此類推將另一頂點完成即可。再以事先做好的正方形泡棉教具，實際演練並要求學生跟著每一個步驟操作，在準備好的色紙上畫曲線，剪下來旋轉到鄰邊，同樣的另一邊也以相同方式完成圖案。基本圖案完成後，教師以粉筆在黑板上將鑲嵌圖案向四方延伸繪製出連續圖形，並以想像力設計圖案。在學生了解基本旋轉方法後，教師以海報講解如何以旋轉方法設計出 Escher 的蜥蜴，並跟學生說明若使用剪刀在設計像蜥蜴這種圖案，因為在邊上凹凸變化較大以致於旋轉到鄰邊不容易，所以教師示範如何將曲線畫在描圖紙上再複製到鄰邊上。如圖 4-2-83 到圖 4-2-86。



圖 4-2-83 教師以海報說明如何將曲線旋轉到鄰邊



圖 4-2-84 教師以泡棉教具示範旋轉的方法

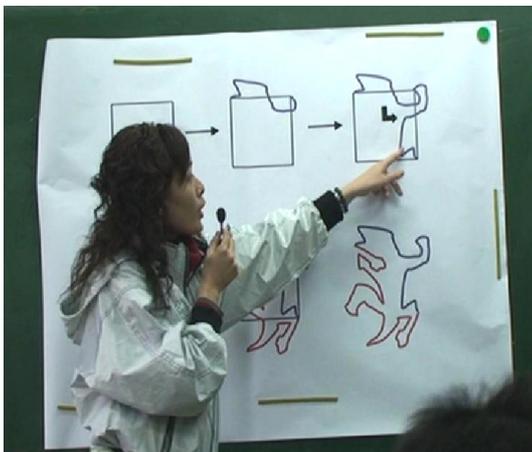


圖 4-2-85 教師說明以旋轉的方法設計出 Escher 的蜥蜴

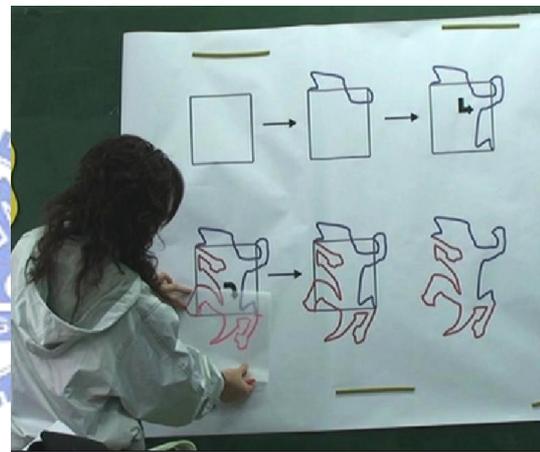


圖 4-2-86 教師示範如何使用描圖紙複製曲線後旋轉

(2) 學習者行為

教師請學生收好大教具袋，拿出另一個信封袋，跟學生說明這節課將進行不規則的鑲嵌。教師詢問信封袋中的圖形是否是正多邊形時，學生一開始受到前兩節課的影響紛紛回答：「對。」，後來學生仔細看圖形，才回答：「不對。」。而當教師介紹這些常見的圖形到這學期學過的直角三角形時，學生大聲回答：「畢氏定理！」。之後請學生實際操作時，因為信封袋中圖形種類較多且大小相似，部分學生對於圖形仍有些混淆，因此有學生詢問教師等腰三角形是哪一種，在教師說明顏色和特徵後，學生就能分辨出並回答可以拼。不過在操作過程中，因為教具沒有分類，部分學生似乎沒把握，仍一再詢問教師自己拿取的圖形是否正確。如圖 4-2-87、圖 4-2-88。



圖 4-2-87 部分學生在詢問後將圖形分類以利於分辨

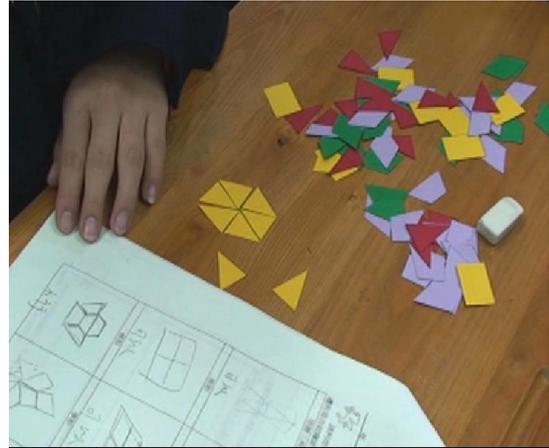


圖 4-2-88 多數學生沒有分類，直接拼湊

部分學生忘了鑲嵌需要密鋪成 360 度，只將兩個相同圖形等長的邊接在一起，因此教師再度提醒同學需要繞一圈 360 度，同一個頂點圖形要密鋪沒有縫隙時，學生紛紛發出驚呼聲和詢問聲確認。當教師反問並澄清學生的疑問後，有學生抱怨：「好麻煩喔。」儘管老師已再度強調要密鋪 360 度，最後還是有部份學生在學習單上畫出兩個圖形，僅將相同的邊接合或是帶狀延伸，未密鋪成 360 度。而且學生在操作到一半時，跑去關教室門，並抱怨：「一直吹，每次就一直飛，一直飛。」可見因為紙做的教具會因為風大造成學生操作上的困擾。

多數控制組學生在操作三角形時，會使用三角形的同一個內角去拼成一圈，並認為圖形能密鋪成 360 度，而不是分別以三角形的三個內角去密鋪成 180 度。當老師指出重疊問題時，學生不認為是拼法錯誤，而以為是自己沒有拼好，因此表達教具很難用並嘗試調整圖形。而且學生在操作四邊形時也常常重複調整圖形，可見傳統教具的缺點就是操作上容易位移，不容易發現拼貼時的誤差。甚至可以觀察到已有少數學生索性放棄操作，在自己位置上發呆。另外，在操作箏形時，學生將圖形的相同角放在一起，出現無法延伸的錯誤。整體而言。控制組學生在第三堂課對於自己拼貼圖形的信心仍顯不足，還是有不停彼此詢問圖形是否能鑲嵌，和離開位子與其他同學討論的現象。此時，部份學生分心出現脫序行為，經教師要求後才繼續進行活動。最後在討論時，學生因為拼法上的錯誤，因此認為有些圖形是不能鑲嵌的，所以教師指出學生犯的錯誤以及說明每一個圖形都是可以的，並引導學生思考圖形排法與鑲嵌需要 360 度之間的關係。如圖 4-2-89 到圖 4-2-94。



圖 4-2-89 學生關門防止教具被風吹亂



圖 4-2-90 學生將三角形相同角拼在一起



圖 4-2-91 教具容易位移，學生在操作時重複調整圖形



圖 4-2-92 學生放棄操作在位置上發呆

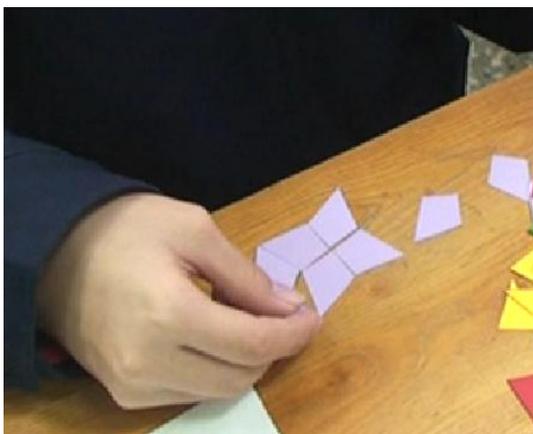


圖 4-2-93 學生將等形相同角拼在一起，不能無限延伸



圖 4-2-94 學生離開自己的位置任意走動

在創作圖形時，學生對於能創作屬於自己的圖形，顯得十分有興趣，因此專注聆聽教師說明。但海報無法生動實擬出操作過程，只能由老師配合海報步驟以口頭說明，教師再以泡棉教具實際操作，告訴學生先在色紙一個邊上任意畫曲線，剪下來再平移到對面的邊黏起來，但是學生還是不太明白要如何實際操作，所以學生們重複一再發問：「真的嗎?」、「在同一個邊畫嗎?」、「老師，要剪下來嗎?」、「移到對面嗎?」。教師重複解答學生疑問後，再將另一個邊同樣畫曲線後平移到對邊完成基本的圖形，學生仍發問：「要剪下來嗎?」、「要黏起來嗎?」。同樣的在示範旋轉技巧時，每說明一個步驟時，學生也同樣的發問類似的問題，教師須重複仔細說明與操作。由於傳統教具不容易地在邊上繪出凹凸的曲線且複製不易，若沒有善用描圖紙複製，會侷限於在同側的邊上，造成學生的圖形線條變化較少，因此學生對於如何使用描圖紙的步驟，也重複要求教師操作與說明。因為進行不規則鑲嵌圖形時，學生操作已耗費較多時間，加上張貼海報、重複講解創作方法、如何使用描圖紙克服複製不易的缺點時，也耗費許多時間，所以最後學生實際創作的時間大為縮短，並拖延到放學時間，許多學生無法完成設計圖案。課程結束後，地上也多了許多遺落的教具以及剪紙留下的紙屑。如圖 4-2-95、圖 4-2-96。



圖 4-2-95 海報張貼不易且耗時，
影響學生創作時間



圖 4-2-96 學生很專注但創作時
間不足

2. 實驗組的學習歷程描述

(1) 教學者行為

教師在第三堂課開始，說明這節課將進行不規則圖形的鑲嵌，使用 AMA2008 簡報系統介紹常見的非正多邊形，包含等腰三角形、直角三角形、不等邊三角形、矩形、平行四邊形、菱形、梯形、箏形、任意四邊形，請學生實際操作是否能鑲嵌，並強調要使用同一種圖形嘗試，以免學生與上一節的半規則鑲嵌混淆。在操作時教師到台下巡視，部

分學生忘了鑲嵌需密鋪成 360 度，因此，教師提醒同學鑲嵌圖形需要繞一圈 360 度，同一個頂點圖形要密鋪沒有縫隙，不能只將兩個相同圖形拼在一起。最後學生已順利完成所有的不規則鑲嵌，因此教師直接請學生思考這些圖形排法與鑲嵌需要 360 度之間的關係。如圖 4-2-97、圖 4-2-98。

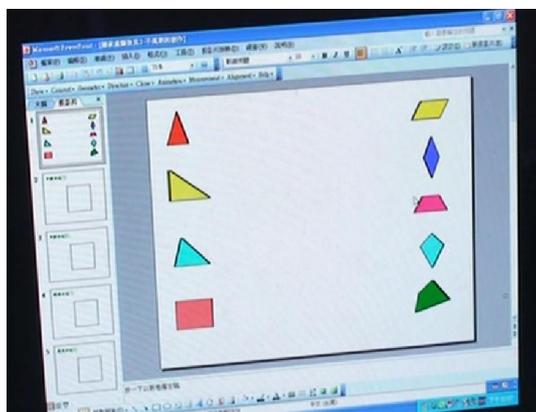


圖 4-2-97 教師介紹不規則鑲嵌的各式圖形



圖 4-2-98 教師到台下巡視學生操作不規則鑲嵌

接下來教師講解如何設計屬於自己的鑲嵌圖形，請學生回顧第一堂課由同一種正多邊形構成的規則鑲嵌有正三角形、正方形、正六邊形，告訴學生可以由這三種圖形來創作，並以最常见的正方形為例，說明創作曲線的圖形的方法，並告知學生可以設計出第一節課所看到 Escher 的飛馬與蜥蜴圖形。教師以 AMA2008 簡報系統先介紹第一種平移的方法，利用動態功能詳細說明及呈現每一個步驟，點選滑鼠後會自動繪出曲線，將此曲線複製後平移到對邊，再將另一邊完成即可。動態解說完畢後教師實際操作，在正方形上任意畫出曲線，並說明如何調整曲線，再平移到對邊，同樣的另一邊也以相同方式完成，並將四條曲線組成一個基本圖案。在學生了解基本平移方法後，教師再度使用動態功能說明如何以平移方法設計出 Escher 的飛馬。如圖 4-2-99 到圖 4-2-106。

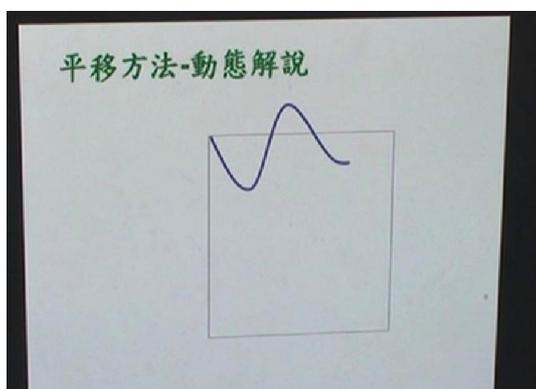


圖 4-2-99 教師使用動態功能自動畫出曲線

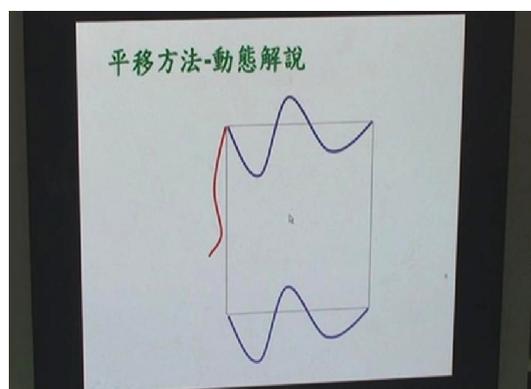


圖 4-2-100 使用動態功能將另一邊曲線平移到對邊

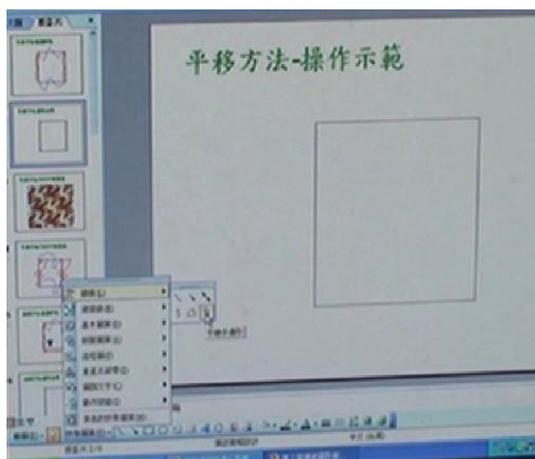


圖 4-2-101 教師示範如何畫出曲線

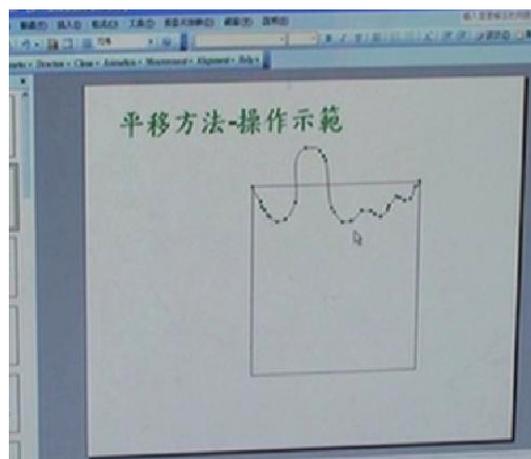


圖 4-2-102 教師示範如何調整曲線

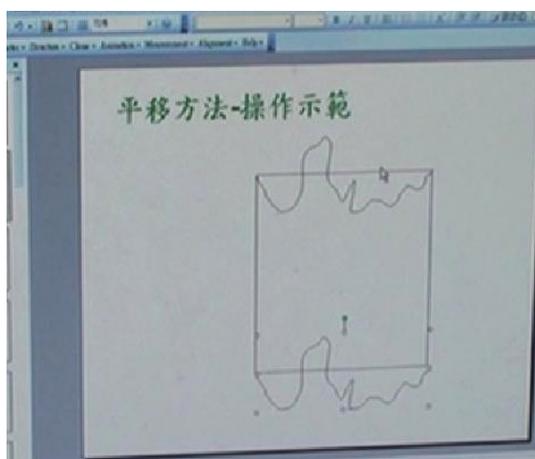


圖 4-2-103 教師示範如何將曲線複製平移到對邊

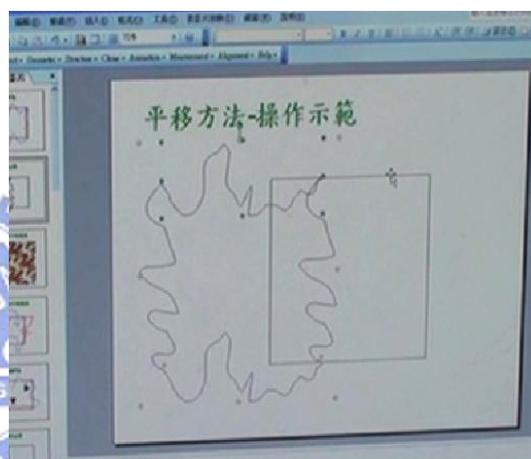


圖 4-2-104 教師將完成的曲線組成基本圖案後移動

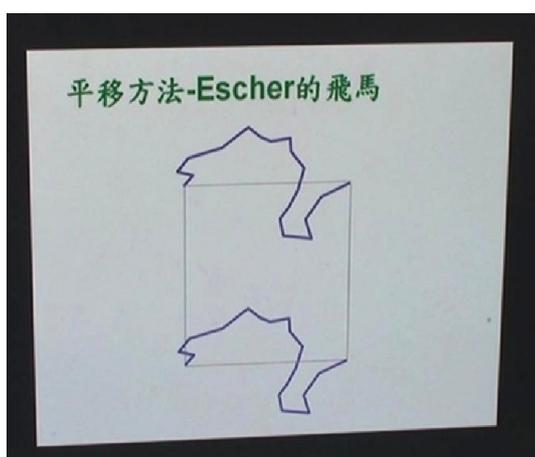


圖 4-2-105 教師用動態功能說明如何設計 Escher 的飛馬

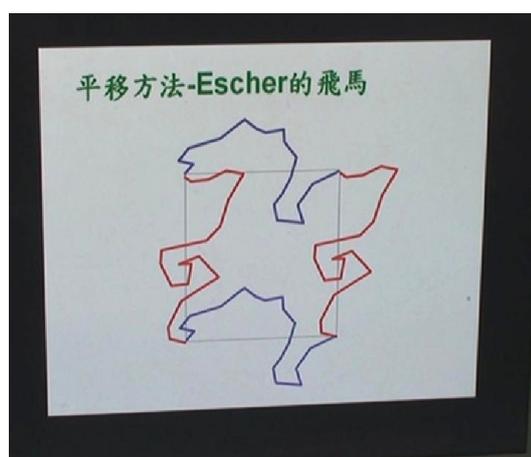


圖 4-2-106 教師以平移方法完成 Escher 的飛馬

在說明第一種平移方法後，接下來教師以 AMA2008 簡報系統的動態功能再介紹第二種旋轉的方法，詳細說明及呈現每一個步驟，點選滑鼠後會自動繪出曲線，將此曲線複製後以頂點為中心逆時針旋轉到鄰邊，同樣方式將另一頂點完成即可。動態解說完畢後教師實際操作，在正方形上任意畫出曲線，將此曲線複製後旋轉到鄰邊，同樣的另一邊也以相同方式完成，將四條曲線組成一個基本圖案，並添加眼睛、嘴巴、牙齒設計出笑臉的圖案。在學生了解基本旋轉方法後，教師再度使用動態功能說明如何以旋轉方法設計出 Escher 的蜥蜴。如圖 4-2-107 到圖 4-2-112。

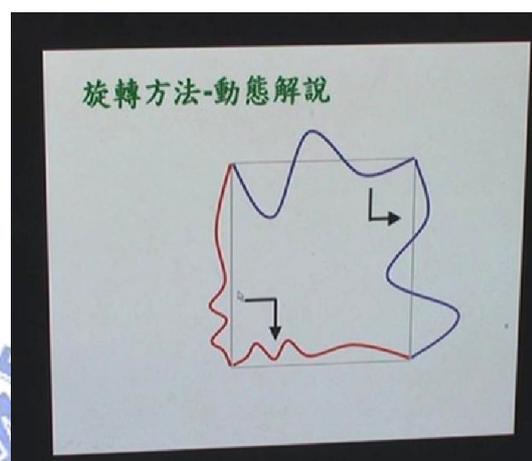
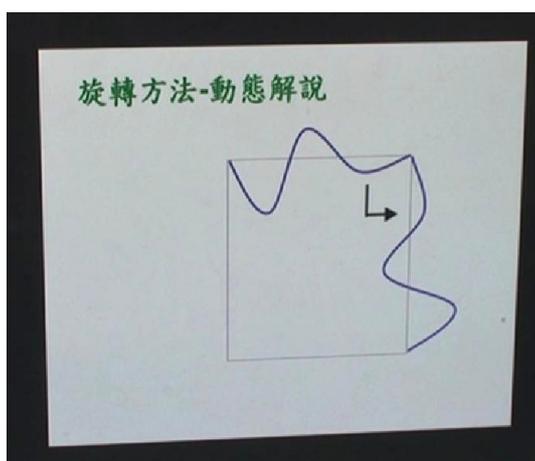


圖 4-2-107 教師使用動態功能自動畫出曲線並旋轉到鄰邊

圖 4-2-108 使用動態功能將另一邊曲線也旋轉到鄰邊

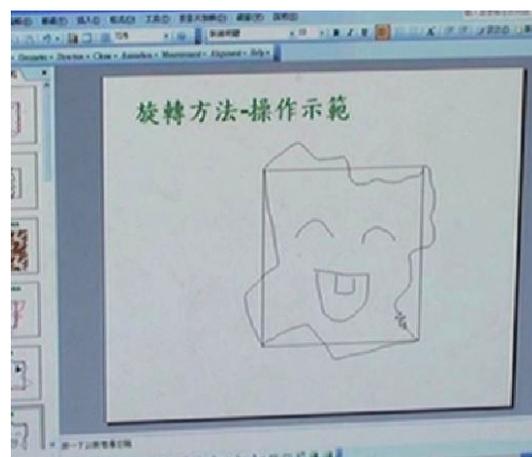
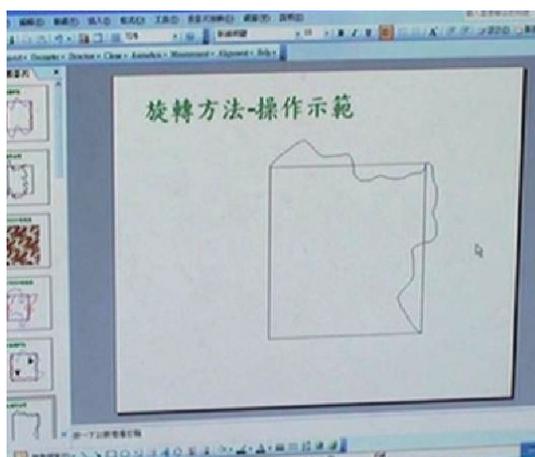


圖 4-2-109 教師示範如何畫出曲線並複製旋轉到鄰邊

圖 4-2-110 教師完成基本圖案後添加眼睛等設計

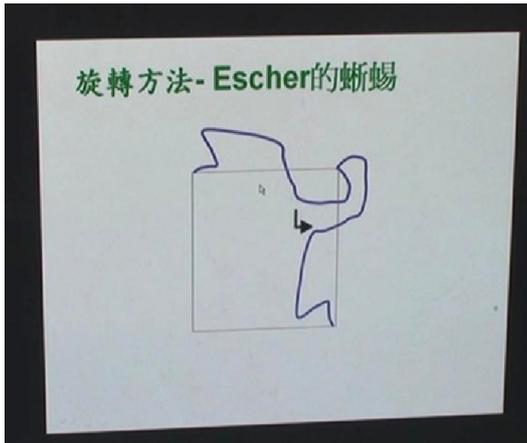


圖 4-2-111 教師用動態功能說明如何設計 Escher 的蜥蜴

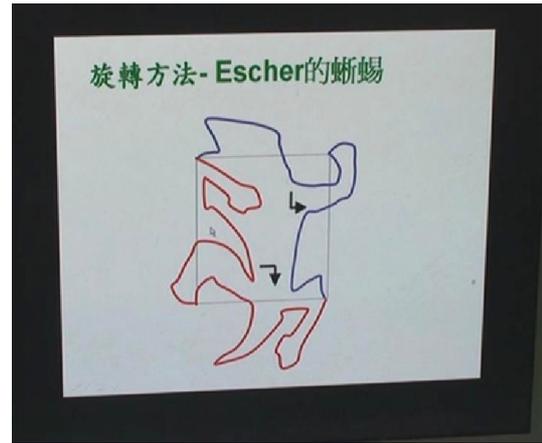


圖 4-2-112 教師以旋轉方法完成 Escher 的蜥蜴

(2) 學習者行為

因為教師使用 AMA 簡報系統介紹圖形，每一位同學皆可清楚看見各式圖形的說明，學生對於圖形分辨相當清楚，加上操作介面上的教具已分類好，學生能很快的操作每一種圖形。實驗組學生較專注操作自己的教具，相鄰位子的學生會彼此討論發現，但不會任意走動。由於虛擬教具在拿取上便利，在拼貼過程中不會任意位移，學生容易發現圖形是否能密貼，而能判斷圖形是否能鑲嵌，只有部分學生忘了鑲嵌需要密鋪成 360 度，將兩個相同圖形等長的邊接在一起，拼成 180 度的帶狀圖案，卻不會拼出無法組合成 360 度的錯誤圖形。實驗組學生在自己拼湊完成圖案時會高興地歡呼，在學習上較有成就感。在拼直角三角形時，利用內角和 180 度或是四個直角密鋪成 360 度兩種不同的拼法，呈現了不同的數學思維。最後學生皆完成了所有不規則的鑲嵌圖形，因此教師僅引導學生思考圖形排法與鑲嵌需要 360 度之間的關係。如圖 4-2-113 到圖 4-2-118。

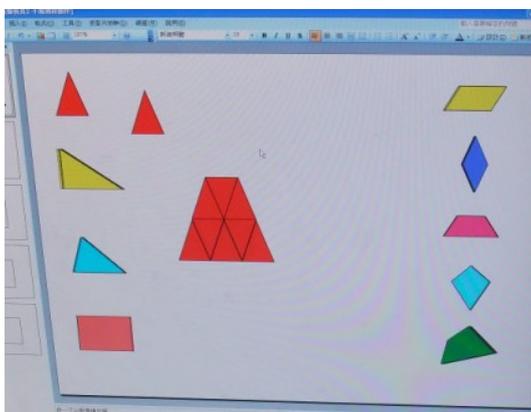


圖 4-2-113 等腰三角形拼成 360 度，沒有誤差

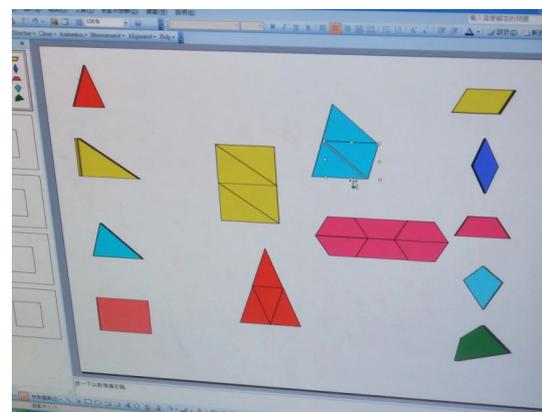


圖 4-2-114 除了梯形以外，其他都只拼成 180 度

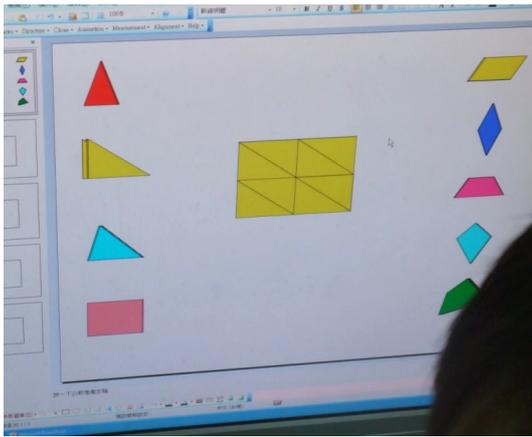


圖 4-2-115 直角三角形以內角和
拼成 360 度

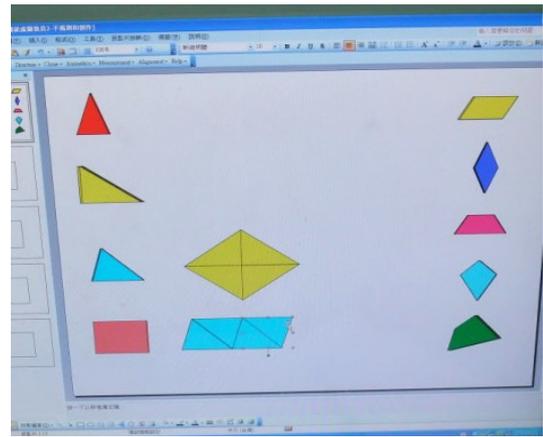


圖 4-2-116 直角三角形以四個直角
密鋪成 360 度

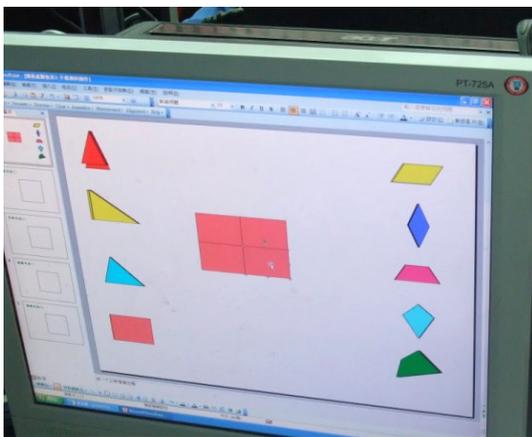


圖 4-2-117 學生將矩形拼成 360 度

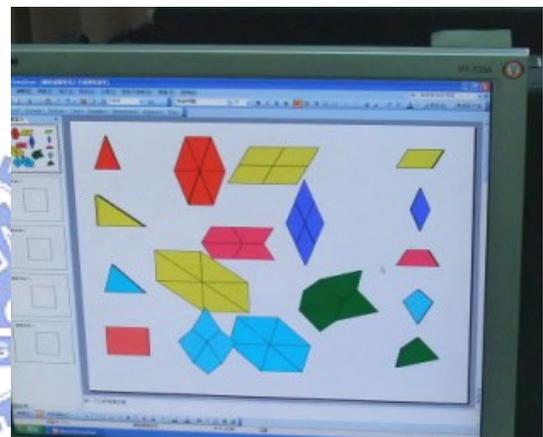


圖 4-2-118 學生拼出了八種不規則
鑲嵌圖形

在創作圖形時，學生很專注聆聽教師說明，並不時傳出笑聲。因為使用 AMA2008 簡報系統以動態方式呈現每一個步驟，讓學生清楚看見先後次序，而且教師實際操作時，學生能再度仔細完整地看見每一個操作過程，所以學生在實際嘗試時，也顯得興致高昂和具有自信。由於虛擬教具可以輕易地在邊上繪出凹凸的曲線且複製容易，所以學生的圖形線條變化較多，不會侷限於在同側的邊上，學生會利用基本元件添加設計以豐富圖案。因為進行不規則鑲嵌圖形時，學生操作順利，加上以 AMA2008 簡報系統進行說明及操作方便，沒有複製不易的缺點，時間掌控順利，所以學生能充裕的創作圖案。課程結束後，地上也沒有遺落的教具和紙屑，不會有整理上的問題。如圖 4-2-119 到圖 4-2-122。

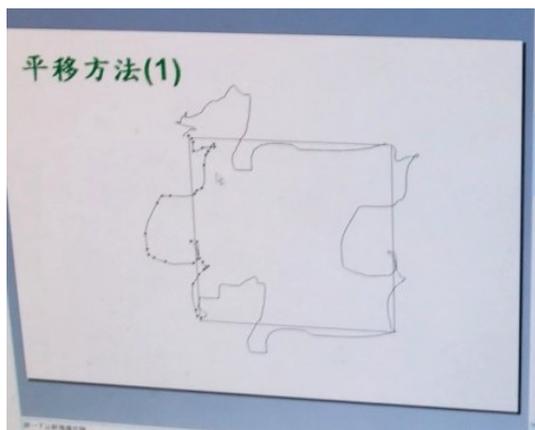


圖 4-2-119 學生使用平移方法創作的圖形

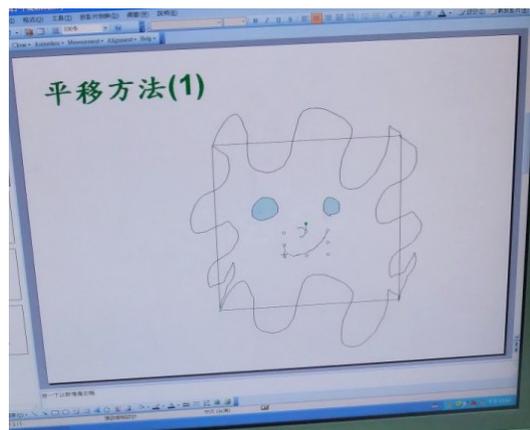


圖 4-2-120 學生添加眼睛等設計豐富圖案

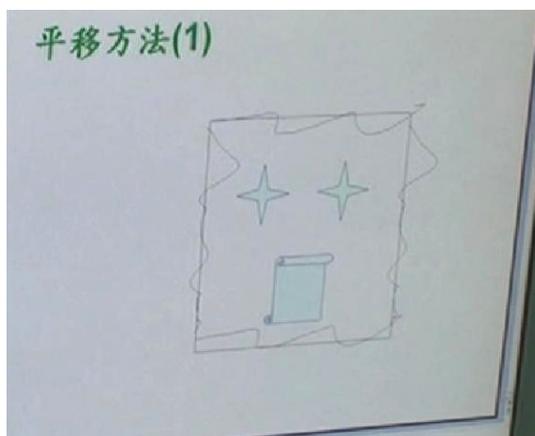


圖 4-2-121 學生利用元件豐富創作的圖形

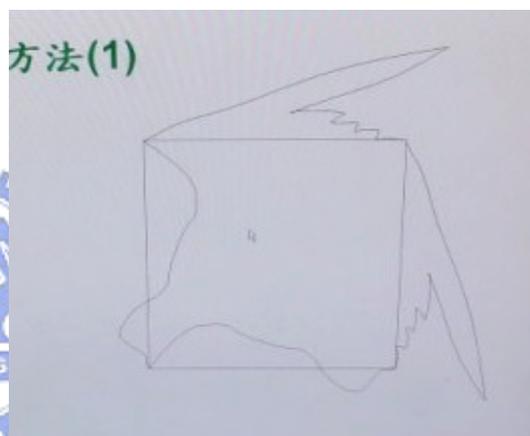


圖 4-2-122 學生使用旋轉方法設計的圖形

3. 綜合分析

在第三堂不規則鑲嵌的教學上，控制組和實驗組在教學設計上同樣使用相同學習單，教學內容和步驟是一致的，兩組僅在教具的使用上不同。然而控制組學生似乎因為使用傳統教具進行教學，信封袋中圖形種類較多且大小相似，因為教具沒有分類，部分學生對於圖形仍有些混淆沒把握，會一再詢問教師自己拿取的圖形是否正確。但實驗組學生因為使用虛擬教具進行教學，各式圖形已分類好，所以學生對於圖形分辨清楚較有把握，不會詢問教師圖形的種類。

儘管控制組與實驗組學生都有部分學生忘了鑲嵌需要密鋪成 360 度，將兩個相同圖形等長的邊接在一起，拼成 180 度的帶狀圖案。但實驗組學生因為虛擬教具在拿取上便利，在拼貼過程中不會任意位移，容易判斷圖形是否能鑲嵌，不會拼出無法組成 360

度的錯誤圖形。反觀控制組學生因為風大造成紙做的傳統教具亂飛，在拿取上也較不方便，拼貼過程中也會任意位移，學生必須一再調整，操作時間拉長。不少控制組學生會使用三角形的同一個內角去拼成一圈，拼出不能組合成 360 度的錯誤圖形，當教師指出重疊問題時，會以為是自己沒有拼好而嘗試調整圖形。另外，在操作箏形時，控制組學生也會將圖形的相同角放在一起，出現無法延伸的錯誤。這同樣反應了 Izydorczak (2003) 所認為的虛擬教具比實體教具更易於操作。因為學生可以拼得更好，不會因為疏忽而弄散已經完成的部分成果，尺寸也更精確。

傳統教具操作不易讓控制組的學生操作時間拉長並重複調整圖形，對於拼貼的圖形較無自信，所以常常互相討論哪些不規則圖形可以鑲嵌。甚至可以觀察到已有少數學生索性放棄操作，在自己位置上發呆，也有些同學開始離開位子，出現分心脫序的行為，教室內秩序變得比較亂。而且因為拼法上的錯誤，認為有些圖形是不能鑲嵌的，所以最後是由教師指出學生犯的錯誤，並引導學生思考圖形排法與鑲嵌需要 360 度之間的關係。而虛擬教具操作方便讓實驗組學生能在預定時間內完成，而有充分時間思考，在完成圖案時會高興地歡呼，在學習上較有成就感和自信，能專注操作自己的教具，相鄰位子的學生會彼此討論發現，但不會任意走動。在拼直角三角形時有相異的拼法，呈現了不同的數學思維。最後也完成了所有不規則的鑲嵌圖形，因此教師僅扮演輔助的角色，引導實驗組學生思考圖形排法與鑲嵌需要 360 度之間的關係。這同樣反應了 Steen, Brooks, 和 Lyon (2006) 提出虛擬教具能讓學生更專注，加強學習品質和提供適當的困難度。可以增加學生學習與教師教學的動機 (Clements & McMillen, 1996; Reimer & Moyer, 2005; Leathrum, 2001)。以及 Izydorczak (2003) 所認為的虛擬教具所產生的班級管理問題較少。

在創作圖形時，控制組與實驗組學生對於能創作屬於自己的圖形顯得十分有興趣，因此專注聆聽教師說明。然而控制組採用大型海報進行教學，對於後面的學生而言，清晰度還是略顯不足，資訊全部呈現互相干擾也造成學生認知負荷增加，雖然老師配合海報以口頭說明步驟，再以泡棉教具實際操作一次，但是學生還是不太明白，所以重複一再發問。反觀實驗組採用 AMA2008 簡報系統進行教學，每一位學生皆能清楚看見教師教學，教師藉由滑鼠點選依序呈現的適當資訊減少互相干擾，可以降低學生的認知負荷，而且教師實際操作時，學生能再度仔細完整地看見每一個操作過程，所以學生在實際嘗試時，也顯得興致高昂和具有自信。這也反應了 Izydorczak (2003) 所認為的虛擬教具在操作上比傳統實體教具更適合大團體教學，因為實體教具的尺寸無法讓遠距離的學習者看得十分清楚，而且對於教學者而言，在操作上也較為不便。

傳統教具若沒有使用描圖紙，則不容易地在邊上繪出凹凸的曲線，會侷限於在同側

的邊上，所以控制組學生的圖形線條變化較少。而虛擬教具可以輕易地在邊上繪出凹凸的曲線且複製容易，所以實驗組學生的圖形線條變化較多，不會侷限於在同側的邊上，也會利用基本元件添加設計以豐富圖案。這也反應了 Izydorczak (2003) 所認為的虛擬教具比實體教具更有擴展性，而實體教具會受限於物理的特性而無法做到。

因為進行不規則鑲嵌活動、張貼海報、重複講解創作方法和使用描圖紙克服複製不易的缺點時，耗費許多時間拖延到下課，所以最後實際創作的時間大為縮短，許多控制組學生無法完成設計圖案。課程結束後，地上也多了許多遺落的教具以及剪紙留下的紙屑。而以 AMA2008 簡報系統進行說明及操作方便，也沒有複製不易的缺點，時間掌控順利，所以實驗組學生能充裕的創作圖案，課程結束後，地上也沒有遺落的教具和紙屑，不會有整理上的問題。所以虛擬教具可以克服 Moyer & Jones (2004) 指出的現象，即部份教師對於使用教具是恐懼的，擔心讓學生自由使用教具時會遺失或損壞、課堂上秩序會變得混亂。

綜合以上所述，在第三堂課的不規則鑲嵌活動中，使用虛擬教具的實驗組學生，因為分類清楚，對於不規則圖形種類較少重複發問，不像控制組因教具種類易混淆而一再重複發問。實驗組使用虛擬教具在拿取上方便，拼貼旋轉也不易位移，節省較多時間。但控制組因傳統教具操作易位移，在嘗試三角形和四邊形時，會以同一個角拼出無法密鋪成 360 度的錯誤圖形，重複調整也拉長時間，部分同學有分心脫序的行為。在創作圖形活動中，實驗組以 AMA2008 依序說明講解，比控制組以海報和泡棉教具清晰。實驗組學生在創作圖形時可任意描繪複雜曲線，不像控制組學生需要以描圖紙來輔助，也不會留下教具和紙屑，清理方便。

4.3 學生在學習單與心得及感想問卷的質化分析

研究者欲透過學生的學習單、作業和心得及感想問卷的描述，以期了解並分析不同教學環境對於學生學習相同課程內容所產生的影響。以下內容將分別探討使用虛擬教具的教學環境與傳統教具的教學環境下，對於學生解題策略、行為和學習態度的影響。為了研究方便記錄與描述，並保護個人隱私，學生姓名均以化名呈現。

4.3.1 學生的學習單分析

1. 第一節展示日常生活中常見的美麗鑲嵌圖形與探討規則鑲嵌的種類

尚未實際操作教具前，教師展示日常生活常見的美麗鑲嵌圖案引起學生的學習動機，實驗組與控制組學生對於圖形怎樣安排才是鑲嵌圖案有初步的了解，其看法整理如表 4-3-1。之後分別讓兩組學生使用虛擬教具和傳統教具找出規則鑲嵌圖形，要求學生在學習單上列出可以鑲嵌的正多邊形並畫出鑲嵌結果、不能鑲嵌的正多邊形，以及操作過程中使用的策略。將結果分別整理如表 4-3-2 到表 4-3-5，並加以進行比較。

表 4-3-1 教師於展示各式美麗鑲嵌圖形後，學生對於鑲嵌的看法

| 項目 | 實驗組 (36 人) | 控制組 (36 人) | 總人數 |
|--------------|------------|------------|-----|
| 圖形沒有空隙向四邊延伸 | 13 | 10 | 23 |
| 合起來要拼成 360 度 | 8 | 2 | 10 |
| 不同形狀的圖案排列 | 2 | 5 | 7 |
| 角對角連接在一起 | 2 | 2 | 4 |
| 要有規律性 | 0 | 3 | 3 |
| 圖形要簡單、相同 | 0 | 2 | 2 |
| 不知道 | 11 | 12 | 23 |

表 4-3-2 學生找出三種可以鑲嵌的圖形，但沒將圖形密鋪成 360 度

| 項目 | 實驗組 (36 人) | 控制組 (36 人) | 總人數 |
|--------------|------------|------------|-----|
| 正三角形、正四邊形呈帶狀 | 7 | 9 | 16 |
| 每一種只畫出單個圖形 | 2 | 0 | 2 |

表 4-3-3 學生找出可以鑲嵌的正多邊形數目（共有三種）

| 項目 | 實驗組 (36 人) | 控制組 (36 人) | 總人數 |
|-------------|------------|------------|-----|
| 三種全找出 | 33 | 30 | 63 |
| 只找出兩種 | 0 | 1 | 1 |
| 只找出一種 | 0 | 1 | 1 |
| 找出其他錯誤的正多邊形 | 1 | 1 | 2 |
| 找不出來 | 2 | 3 | 5 |

表 4-3-4 學生列出不能鑲嵌的正多邊形

| 項目 | 實驗組 (36 人) | 控制組 (36 人) | 總人數 |
|------------|------------|------------|-----|
| 將不能鑲嵌的全列出 | 31 | 30 | 61 |
| 只列了一種不能鑲嵌的 | 0 | 4 | 4 |
| 列不出來 | 5 | 2 | 7 |

表 4-3-5 學生操作過程使用的策略

| 項目 | 實驗組 (36 人) | 控制組 (36 人) | 總人數 |
|----------------|------------|------------|-----|
| 一個一個操作 | 23 | 28 | 51 |
| 計算完後進行操作檢驗 | 6 | 2 | 8 |
| 直接計算找 360 度的因數 | 3 | 4 | 7 |
| 策略不明 | 4 | 2 | 6 |

由表 4-3-1 可以知道在展示各式圖形後，實驗組學生認為鑲嵌圖形沒有空隙向四邊延伸及合起來要拼成 360 度的人數共有 21 人，無法精準描述的（不同形狀的圖案排列和角對角連接在一起）有 4 人，不知道的人數有 11 人。控制組學生認為鑲嵌圖形沒有空隙向四邊延伸及合起來要拼成 360 度的人數共有 12 人，無法精準描述的（不同形狀的圖案排列、角對角連接在一起和要有規律性）有 10 人，想法不正確的（圖形要簡單、相同）有 2 人，不知道的人數有 12 人。可以發現不了解鑲嵌圖形意義的兩組學生都接近三分之一，但實驗組超過半數的學生在教師展示各式鑲嵌圖案時，就能觀察出鑲嵌圖形的基本條件，無法精準描述的學生較少。然而，控制組僅有三分之一的學生在教師展

示各式鑲嵌圖形時，就觀察出來鑲嵌圖案的基本條件，無法精準描述的學生接近三分之一，甚至有極少數想法不正確的。因為實驗組採用虛擬教具，以廣播系統使用 AMA 簡報系統 2008 進行教學，學生不受限於教室的位置，皆能夠清楚看見所有的圖形。而控制組採用傳統實體教具進行教學，使用大型的海報，對於後面的學生而言，清晰度還是略顯不足。這似乎也反應了 Izydorczak (2003) 所認為的虛擬教具在操作上比傳統實體教具更適合大團體教學，因為實體教具的尺寸無法讓遠距離的學習者看得十分清楚。因此，在教師展示各式圖形後，實驗組的學生比控制組的學生更能觀察出產生鑲嵌圖形的條件。

表 4-3-2 顯示實驗組和控制組都有四分之一的學生找到三種可以鑲嵌的正多邊形，但沒有密鋪成 360 度，一種是畫成帶狀圖案 (圖 4-3-1)，另一種是三種正多邊形都各畫了一個，可見部分學生觀念仍不夠完整。然而整體而言，表 4-3-3 可以知道操作後，實驗組學生和控制組學生幾乎都能找到三種規則鑲嵌的圖形 (圖 4-3-2)，僅有極少數學生沒有辦法找齊或找出錯誤的圖形。另外，表 4-3-4 也顯示實驗組和控制組學生幾乎都能判斷哪些正多邊形無法構成規則鑲嵌 (圖 4-3-3)，也是只有少數學生無法完成。因此，雖然兩組分別使用虛擬教具和傳統教具進行教學，但是找出正確規則鑲嵌圖形的能力沒有差異性。

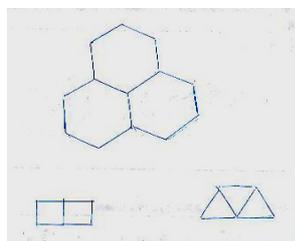


圖 4-3-1 圖形沒有密鋪成 360 度

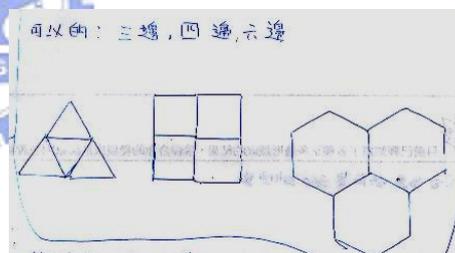


圖 4-3-2 學生找到的三種規則鑲嵌圖形

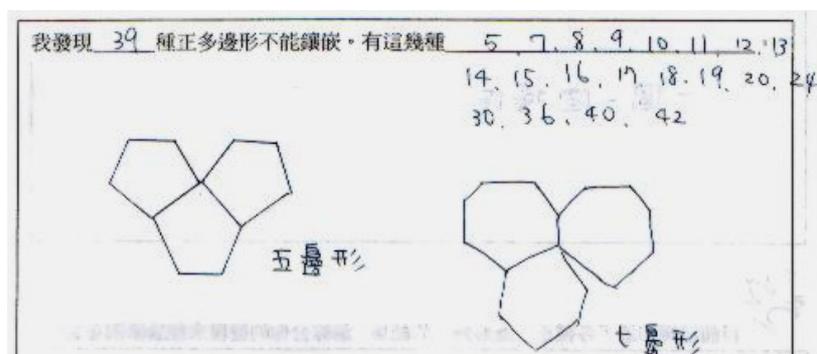


圖 4-3-3 不能構成規則鑲嵌的正多邊形

由表 4-3-5 可以知道實驗組學生採取一個一個操作策略的有 23 人，採取計算完後進行操作檢驗的有 6 人，直接計算找 360 的因數的有 3 人，策略不明的有 4 人。而控制

組學生，採取一個一個操作策略的有 28 人，採取計算完後進行操作檢驗的有 2 人，直接計算找 360 因數的有 4 人，策略不明的有 2 人。可以發現實驗組和控制組大多數學生都是採取一個一個操作的策略，實驗組有將近三分之二的人次，而控制組有高達九分之七的人次。實驗組有六分之一的學生會以計算方式找出圖形後，再以虛擬教具操作檢驗，而控制組極少學生會在計算找出圖形後，再以傳統教具操作檢驗。兩組學生採取直接計算找 360 度因數策略和策略不明的人數都很少，差異也不大。因為實驗組採用虛擬教具分類清楚，且操作上較便利，因此學生較能聚焦思考，除了最基本的一個一個嘗試策略外，已有部分學生能建構出鑲嵌的數學概念，彈性使用虛擬教具當做檢驗的工具。而控制組使用傳統教具，受限於教具種類眾多和容易位移的影響，學生較容易出現干擾而無法專注思考，因此採用計算方式找出圖形再以教具檢驗的學生數目較實驗組少，在運用教具的方式和策略上較無彈性。

綜合以上所述，兩組分別使用虛擬教具和傳統教具進行教學，在規則鑲嵌的操作上，結果顯示使用虛擬教具的實驗組在找出正確規則鑲嵌圖形的數目、沒有密鋪 360 度的圖形、哪些圖形不能鑲嵌的表現上，和控制組差異不大。但在展示圖形後觀察出鑲嵌圖形的條件和使用策略的表現上，使用虛擬教具的實驗組比使用傳統教具的控制組表現較佳。

2. 第二節探討半規則鑲嵌種類與簡介次規則鑲嵌

第二堂課中，教師在實驗組和控制組分別以 AMA2008 和海報講解半規則鑲嵌與次規則鑲嵌的差異後，讓實驗組和控制組學生分別使用虛擬教具和傳統教具進行實際操作，找出半規則鑲嵌的種類，並在學習單上寫出命名以及畫出圖形。表 4-3-6 為學生學習單的命名及畫圖的狀況，表 4-3-7 為找出的八種正確半規則鑲嵌，表 4-3-8 為其他錯誤的半規則鑲嵌類型，表 4-3-9 為學生在半規則鑲嵌操作過程使用的策略。

表 4-3-6 學生在半規則鑲嵌圖形的命名及畫圖狀況

| 項目 | 實驗組 (36 人) | 控制組 (36 人) | 總人數 |
|------------------|------------|------------|-----|
| 寫出命名及畫出圖形 | 32 | 7 | 39 |
| 寫出命名，但只畫出兩個以下的圖形 | 0 | 9 | 9 |
| 只有寫命名，沒有畫出圖形 | 0 | 16 | 16 |
| 沒有寫命名，只有畫出圖形 | 1 | 1 | 2 |
| 自己擅自命名，但有畫出圖形 | 0 | 1 | 1 |
| 找不出來 | 3 | 2 | 5 |

表 4-3-7 學生找出正確的半規則鑲嵌種類

| 圖形命名 | 實驗組 (36 人) | 控制組 (36 人) | 總人數 |
|-----------------|------------|------------|------|
| (3, 3, 4, 3, 4) | 2 | 8 | 10 |
| (3, 3, 3, 4, 4) | 2 | 0 | 2 |
| (3, 4, 6, 4) | 20 | 9 | 29 |
| (4, 6, 12) | 27 | 20 | 47 |
| (4, 8, 8) | 30 | 24 | 54 |
| (3, 12, 12) | 16 | 26 | 42 |
| (3, 3, 3, 3, 6) | 2 | 0 | 2 |
| (3, 6, 3, 6) | 15 | 0 | 15 |
| 圖形總數目 | 114 | 87 | 201 |
| 平均每人找出的圖形數目 | 3.17 | 2.42 | 2.79 |

表 4-3-8 學生找出錯誤的半規則鑲嵌種類

| 圖形命名 | 實驗組 (36 人) | 控制組 (36 人) | 總人數 |
|-------------|------------|------------|-----|
| (3, 3, 3) | 0 | 1 | 1 |
| (3, 3, 4) | 0 | 1 | 1 |
| (3, 3, 6) | 0 | 1 | 1 |
| (3, 4, 6) | 0 | 1 | 1 |
| (3, 4, 5) | 0 | 5 | 5 |
| (3, 4, 8) | 0 | 1 | 1 |
| (3, 5, 8) | 1 | 0 | 1 |
| (3, 7, 42) | 1 | 1 | 2 |
| (3, 8, 8) | 1 | 1 | 2 |
| (3, 8, 24) | 2 | 7 | 9 |
| (3, 9, 15) | 0 | 1 | 1 |
| (3, 10, 15) | 2 | 13 | 15 |
| (3, 11, 13) | 0 | 5 | 5 |
| (3, 12, 13) | 0 | 4 | 4 |

(續下頁)

(接上頁)

| | | | |
|-------------------------|------|------|------|
| (3, 3, 6, 5) | 0 | 1 | 1 |
| (3, 3, 4, 12) | 2 | 0 | 2 |
| (3, 4, 3, 12) | 3 | 0 | 3 |
| (3, 4, 4, 6) | 1 | 7 | 8 |
| (3, 4, 5, 4) | 0 | 2 | 2 |
| (3, 4, 8, 4) | 0 | 3 | 3 |
| (3, 4, 5, 5) | 0 | 1 | 1 |
| (3, 5, 4, 5) | 0 | 1 | 1 |
| (3, 6, 6, 3) | 0 | 9 | 9 |
| (4, 5, 12) | 0 | 3 | 3 |
| (4, 5, 20) | 1 | 2 | 3 |
| (4, 6, 6) | 6 | 0 | 6 |
| (4, 6, 13) | 0 | 2 | 2 |
| (4, 7, 9) | 1 | 0 | 1 |
| (4, 8, 9) | 0 | 1 | 1 |
| (4, 4, 4, 4) | 1 | 0 | 1 |
| (5, 5, 10) | 3 | 11 | 14 |
| (5, 6, 7) | 0 | 9 | 9 |
| (5, 6, 8) | 1 | 9 | 10 |
| (5, 7, 7) | 0 | 5 | 5 |
| (6, 6, 6) | 1 | 0 | 1 |
| (6, 7, 8) | 0 | 1 | 1 |
| (10, 13, 15) | 0 | 1 | 1 |
| (3, 4, 3, 12/3, 12, 12) | 0 | 1 | 1 |
| (3, 4, 4, 6/3, 4, 6, 4) | 0 | 3 | 3 |
| (3, 6, 12/3, 9, 12) | 0 | 2 | 2 |
| (3, 9, 9/3, 9, 13) | 0 | 3 | 3 |
| 錯誤圖形總數目 | 27 | 119 | 146 |
| 平均每人錯誤的圖形數目 | 0.75 | 3.31 | 2.03 |

表 4-3-9 學生在半規則鑲嵌操作過程使用的策略

| 項目 | 實驗組 (36 人) | 控制組 (36 人) | 總人數 |
|----------------|------------|------------|-----|
| 一個一個操作 | 16 | 25 | 41 |
| 計算完後進行操作檢驗 | 12 | 7 | 19 |
| 直接計算找 360 度的因數 | 2 | 1 | 3 |
| 策略不明 | 6 | 3 | 9 |

由表 4-3-6 可以知道在經由實際操作後，實驗組學生寫出鑲嵌圖形名稱及畫出圖形的有 32 人，而控制組僅有 7 人寫出名稱及畫出圖形，寫出名稱但只畫出兩個以下的圖形有 9 人，只有名稱但沒畫出圖形有 16 人，如圖 4-3-4、圖 4-3-5。可以發現實驗組的學生寫出鑲嵌圖形名稱及畫出圖形的人數明顯多於控制組的學生。推測造成這些表現差異的原因，是實驗組學生使用虛擬教具畫面清晰不易位移，較能具體化成平面圖形畫出，而控制組學生使用傳統教具圖形易位移，較無法將圖形具體化成平面圖形畫出。由表 4-3-7 顯示實驗組和控制組較多學生找出 $(4, 8, 8)$ 、 $(4, 6, 12)$ 、 $(3, 12, 12)$ 這三種圖形，而較少學生找出 $(3, 3, 3, 4, 4)$ 和 $(3, 3, 3, 3, 6)$ ，推測使用圖形數目只有三種的比較容易找到，而數目需要五種且能排列成延伸的圖形，則較有難度，因此學生較不易找到。另外，也可發現實驗組學生找齊了八種半規則鑲嵌圖形，而控制組學生僅找到五種。且實驗組的學生共找到了 114 個正確圖形，平均每人找到了 3.17 個圖形，控制組的學生共找到了 87 個正確圖形，平均每人找到了 2.42 個圖形，可以發現實驗組的學生找到的正確圖形數目略多於控制組的學生。

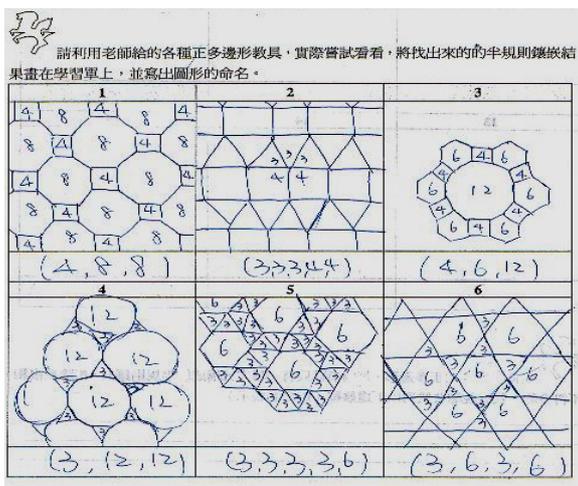


圖 4-3-4 實驗組大多數學生能寫出名稱和畫出圖形

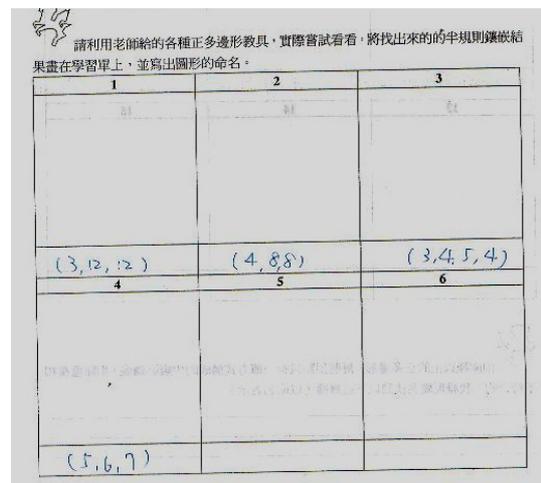


圖 4-3-5 控制組大多數學生只寫出名稱，沒畫圖形

由表 4-3-8 可以發現，實驗組的學生共出現 27 個錯誤圖形，平均每人 0.75 個，然而控制組的學生共出現 119 個錯誤圖形，平均每人 3.31 個。可以推測使用虛擬教具操作較便利且不易位移，容易發現圖形是否能鑲嵌，以及有充分時間檢查是否能延伸，所以實驗組學生的錯誤圖形較少。而使用傳統教具操作較麻煩且易位移，不易發現圖形是否能鑲嵌及較無心力檢查是否能延伸，所以控制組學生的錯誤圖形較多，出現了無法拼成 360 度的圖形、無法無限延伸的圖形，甚至少數的次規則鑲嵌，如圖 4-3-6、圖 4-3-7。

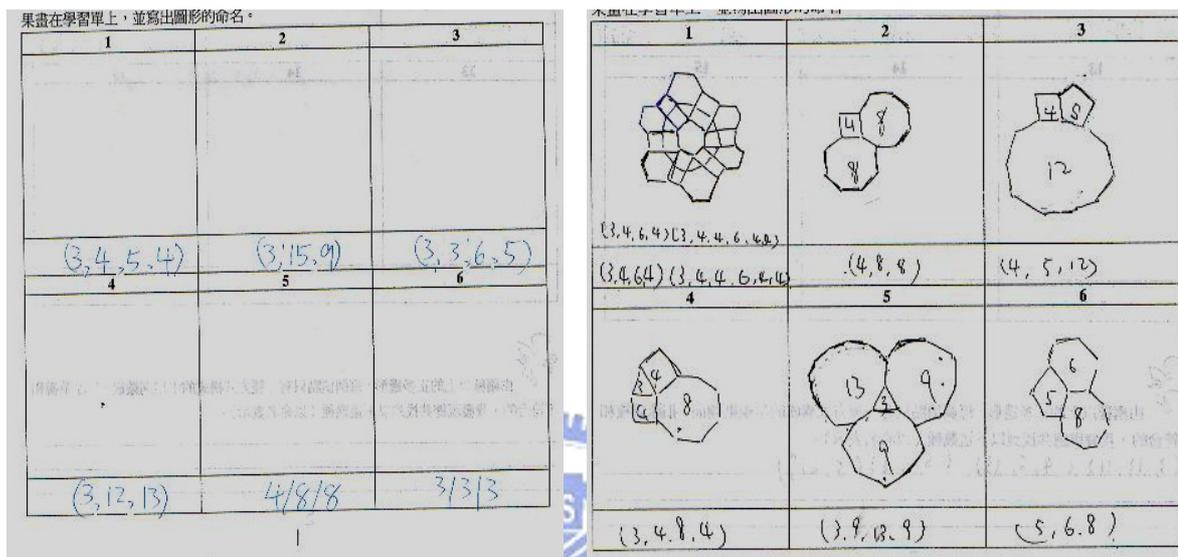


圖 4-3-6 控制組學生的錯誤圖形 1896 圖 4-3-7 控制組少數學生拼出次規則鑲嵌

由表 4-3-9 可以知道實驗組學生使用一個一個操作策略的有 16 人，使用計算再用虛擬教具進行檢驗的有 12 人，有 2 人直接計算，使用猜想等策略不明的有 6 人。控制組學生使用一個一個操作策略的有 25 人，使用計算再用傳統教具進行檢驗的有 7 人，有 1 人直接計算，使用猜想等策略不明的有 3 人。相較於第一堂所進行的規則鑲嵌活動，在第二堂課所進行的半規則鑲嵌活動中，實驗組使用基本一個一個操作策略的學生同樣比控制組少外，實驗組有更多的學生採取計算後再操作的策略，來輔助自己找出較複雜的半規則鑲嵌圖形。而控制組學生仍大多使用一個一個的操作策略，和第一堂規則鑲嵌活動的使用策略差異不大。可推測是實驗組採用虛擬教具分類清楚，且操作上較便利，因此學生較能聚焦思考，除了最基本的一個一個嘗試策略外，部分學生能建構出鑲嵌的數學概念，彈性使用虛擬教具當做檢驗的工具。而控制組使用傳統教具，受限於教具種類眾多和容易位移的影響，學生較容易出現干擾而無法專注思考，因此大多數採取最基本的方式去一個一個嘗試，在運用教具的方式和策略上較無彈性。可見虛擬教具可有效地誘發學生嘗試新的解題策略。

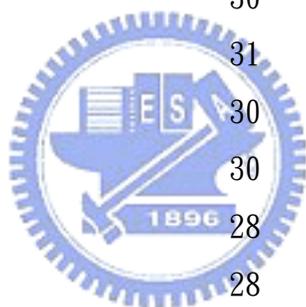
綜合以上所述，兩組分別使用虛擬教具和傳統教具進行教學，在半規則鑲嵌的操作上，最後結果顯示使用虛擬教具的實驗組將圖形平面化的能力、找出正確半規則鑲嵌圖形的數目、出現錯誤圖形數目和使用策略的表現上，都比使用傳統教具的控制組表現好。

3. 第三節探討不規則鑲嵌的條件與學生設計自己的鑲嵌圖形

第三堂課中，實驗組和控制組學生分別使用虛擬教具和傳統教具進行實際操作，進行判斷等腰三角形、直角三角形、不等邊三角形、矩形、平行四邊形、菱形、梯形、箏形、任意四邊形等不規則圖形，是否能組成鑲嵌圖形，並在學習單上畫出圖形。表 4-3-10 整理學生在學習單上的反應結果。

表 4-3-10 學生找出的不規則鑲嵌圖形

| 項目 | 實驗組 (36 人) | 控制組 (36 人) | 總人數 |
|--------------|------------|------------|-------|
| 等腰三角形 | 30 | 13 | 43 |
| 直角三角形 | 30 | 27 | 57 |
| 不等邊三角形 | 31 | 8 | 39 |
| 矩形 | 30 | 29 | 59 |
| 平行四邊形 | 30 | 27 | 57 |
| 菱形 | 28 | 23 | 51 |
| 梯形 | 28 | 25 | 53 |
| 箏形 | 30 | 12 | 42 |
| 任意四邊形 | 25 | 8 | 33 |
| 平均每一種圖形找出的數目 | 29.11 | 19.11 | 48.22 |



由表 4-3-10 能發現使用虛擬教具的實驗組學生大多數都能找出所有的不規則鑲嵌圖形，如圖 4-3-8，僅有任意四邊形較少一些，但每一種圖形找出的數目皆比使用傳統教具的控制組學生多，而控制組較多學生無法找出等腰三角形、不等邊三角形、箏形和任意四邊形為可鑲嵌圖形。觀察學習單可以發現控制組學生在操作三角形時，會使用三角形的同一個內角去拼成一圈，並認為圖形能密鋪成 360 度，而不是分別以三角形的三個內角去密鋪成 180 度，如圖 4-3-9。在操作四邊形時也有相同情形，可見傳統教具的缺點就是操作上容易位移，不容易發現拼貼時的誤差，因此控制組學生才會出現較多的錯誤圖形。

整體而言，在不規則鑲嵌的活動上，使用虛擬教具的實驗組學生找到的不規則鑲嵌

數目比使用傳統教具的控制組學生多，而實驗組學生也較不會出現像控制組學生使用圖形的同一個角去拼一圈的行為。

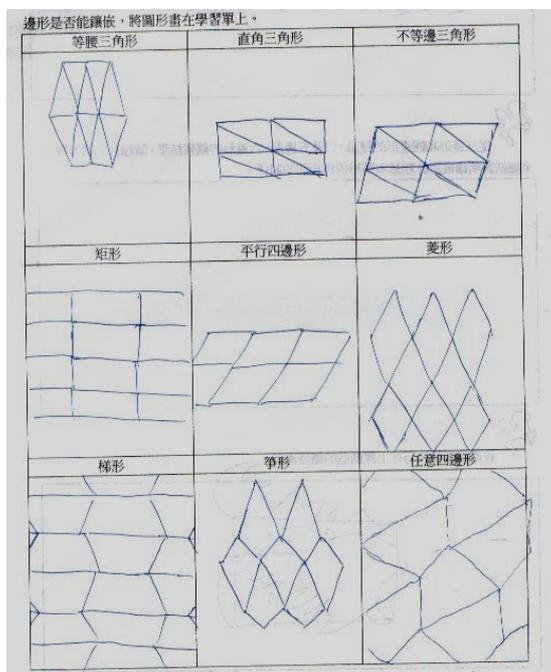


圖 4-3-8 實驗組大多數學生能找出
出不規則圖形

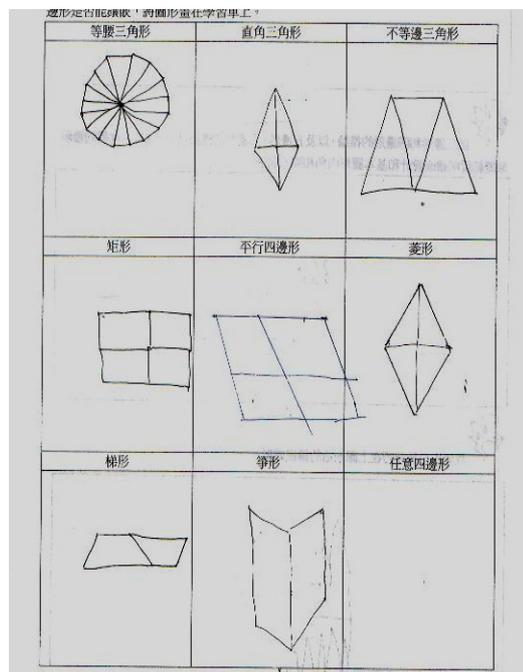
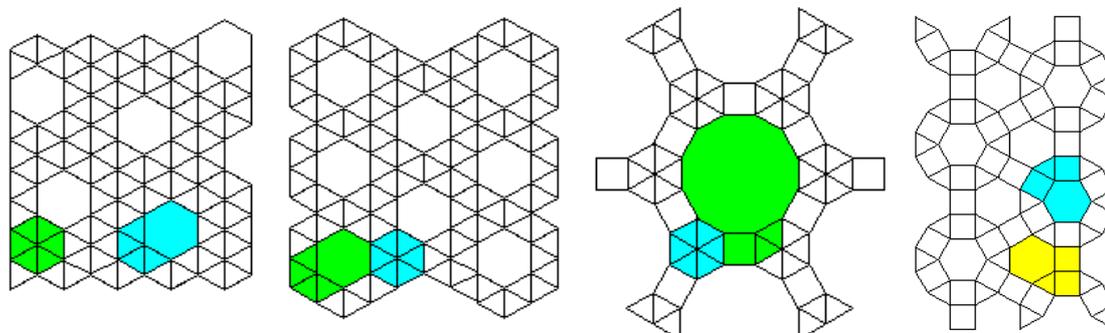


圖 4-3-9 控制組學生會以同一個
角去拼成一圈，錯誤圖形也較多

4.3.2 學生的作業分析

1. 次規則鑲嵌圖形作業單

實驗教學結束後，將次規則鑲嵌當作業讓學生回家挑戰，並輔以作業單確保學生完成。實驗組學生以教師設計的 AMA 虛擬教具或以 NLVM 的 Tessellations 當做虛擬教具 (http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_163_g_1_t_3.html)。而控制組則讓學生直接帶回紙做的正多邊形教具包，在家使用傳統教具完成作業。圖 4-3-10 為二十種次規則鑲嵌圖形，而表 4-3-11 為兩組學生的作業單上找出的次規則鑲嵌種類。



(3,3,3,3,3,3/3,3,3,3,6) (3,3,3,3,3,3/3,3,3,3,6) (3,3,3,3,3,3/3,3,4,12) (3,4,4,6/3,4,6,4)

(續下頁)

(接上頁)

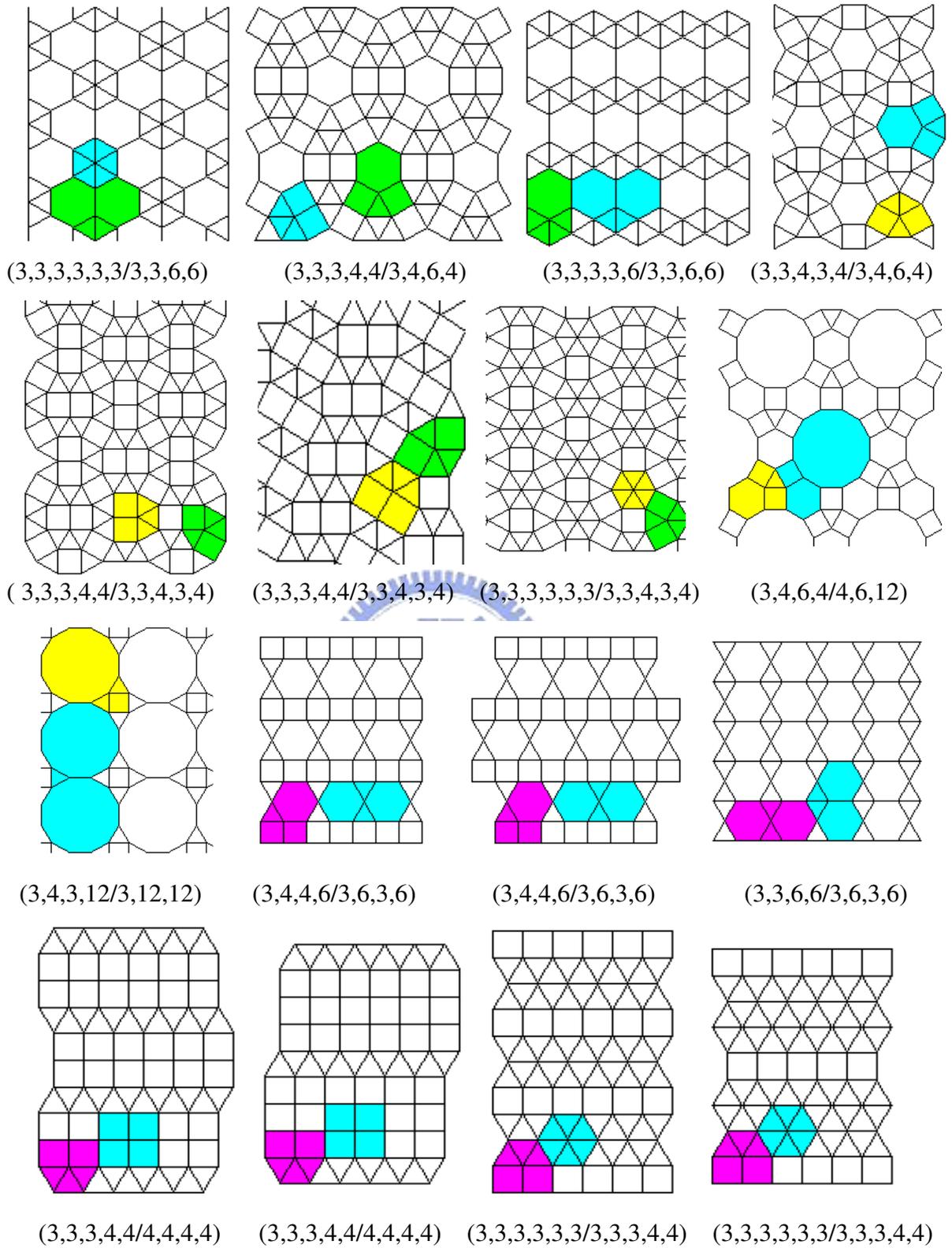


圖 4-3-10 次規則鑲嵌的種類

資料來源：Uniform Tilings, by Dutch, S., 1999,
<http://www.uwgb.edu/dutchs/symmetry/uniftil.htm>.

表 4-3-11 學生找出的次規則鑲嵌種類

| 圖形命名 | 實驗組 (36 人) | 控制組 (36 人) | 總人數 |
|----------------------------------|------------|------------|------|
| (3, 3, 3, 3, 3, 3/3, 3, 3, 3, 6) | 2 | 0 | 2 |
| (3, 3, 3, 3, 3, 3/3, 3, 3, 3, 6) | 1 | 0 | 1 |
| (3, 3, 3, 3, 3, 3/3, 3, 4, 12) | 1 | 1 | 2 |
| (3, 4, 4, 6/3, 4, 6, 4) | 1 | 1 | 2 |
| (3, 3, 3, 3, 3, 3/3, 3, 6, 6) | 1 | 0 | 1 |
| (3, 3, 3, 4, 4/3, 4, 6, 4) | 7 | 0 | 7 |
| (3, 3, 3, 3, 6/3, 3, 6, 6) | 1 | 0 | 1 |
| (3, 3, 4, 3, 4/3, 4, 6, 4) | 0 | 0 | 0 |
| (3, 3, 3, 4, 4/3, 3, 4, 3, 4) | 1 | 0 | 1 |
| (3, 3, 3, 4, 4/3, 3, 4, 3, 4) | 0 | 0 | 0 |
| (3, 3, 3, 3, 3, 3/3, 3, 4, 3, 4) | 1 | 0 | 1 |
| (3, 4, 6, 4/4, 6, 12) | 0 | 0 | 0 |
| (3, 4, 3, 12/3, 12, 12) | 10 | 1 | 11 |
| (3, 4, 4, 6/3, 6, 3, 6) | 16 | 0 | 16 |
| (3, 4, 4, 6/3, 6, 3, 6) | 0 | 0 | 0 |
| (3, 3, 6, 6/3, 6, 3, 6) | 7 | 0 | 7 |
| (3, 3, 3, 4, 4/4, 4, 4, 4) | 0 | 0 | 0 |
| (3, 3, 3, 4, 4/4, 4, 4, 4) | 0 | 0 | 0 |
| (3, 3, 3, 3, 3, 3/3, 3, 3, 4, 4) | 2 | 0 | 2 |
| (3, 3, 3, 3, 3, 3/3, 3, 3, 4, 4) | 0 | 0 | 0 |
| 圖形總數目 | 51 | 3 | 54 |
| 平均每人找出的圖形數目 | 1.42 | 0.08 | 0.75 |
| 找不到任何次規則鑲嵌圖形的人數 | 10 | 34 | 44 |

由表 4-3-11 能發現使用虛擬教具的實驗組學生找出較多的次規則鑲嵌圖形，如圖 4-3-11，但也有 10 人無法找出正確的次規則鑲嵌圖形。然而使用傳統教具的控制組學生只有 2 人，總共找到 3 個正確的次規則鑲嵌圖形，但是這 3 個次規則鑲嵌圖形的名稱都不對，高達 34 個控制組學生皆無法找到正確的次規則鑲嵌圖形，如圖 4-3-12。可以發現大部分控制組學生仍找出半規則鑲嵌圖形，或是認為合併兩個半規則鑲嵌圖形即是

次規則鑲嵌圖形，在作業單上直接寫出名稱而沒有畫出圖形，因此沒考慮無限延伸的問題，而無法找到正確的次規則鑲嵌圖形，如圖 4-3-13。

整體而言，在次規則鑲嵌的作業中，使用虛擬教具的實驗組學生找到次規則鑲嵌總數目為 51 個，而傳統教具的控制組學生找到總數目僅有 3 個。而實驗組學生比控制組學生較少找出半規則鑲嵌圖形，也較少出現將兩個半規則鑲嵌圖形直接當作次規則鑲嵌圖形的行為。所以，實驗組在次規則鑲嵌的作業表現上比控制組好。

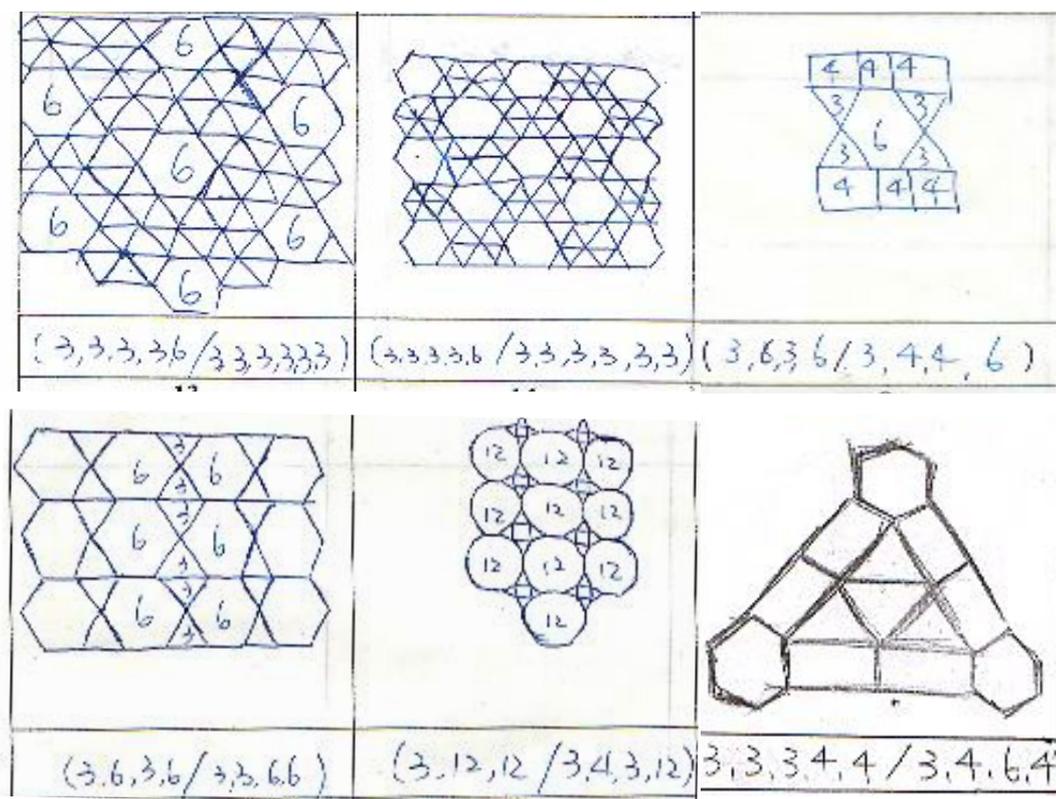


圖 4-3-11 實驗組學生找出的次規則鑲嵌圖形

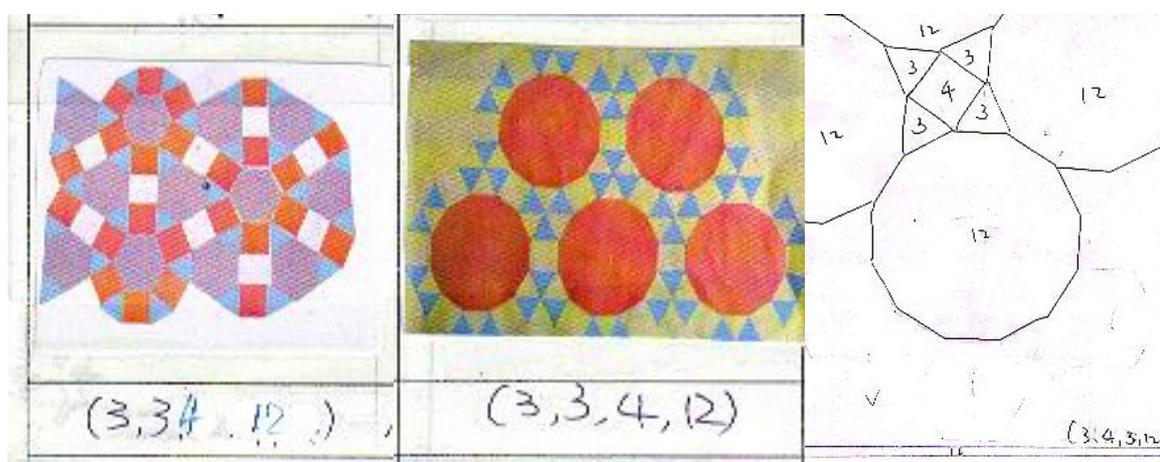


圖 4-3-12 控制組學生找出的次規則鑲嵌圖形但名稱皆錯誤

| 1 | 2 | 3 |
|----------------------------|--------------------------|-------------------------|
| | | |
| 13, 12, 3, 4 13, 4, 6, 4 | 13, 4, 6, 4 13, 12, 12 | 14, 6, 12 13, 4, 4, 6 |

請說說看你剛剛用什麼方法嘗試?一個一個操作?還是其他方法?請綜合你的發現來推論原因並說明。

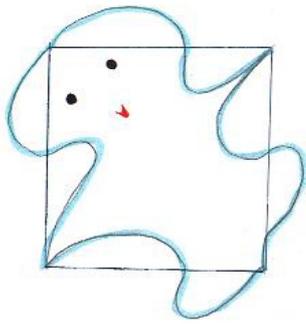
算出角度相加是否 = 360° , 再自己試試把2個半規則的鑲嵌拼起來

圖 4-3-13 控制組學生認為合併兩個半規則鑲嵌圖形即是次規則鑲嵌圖形

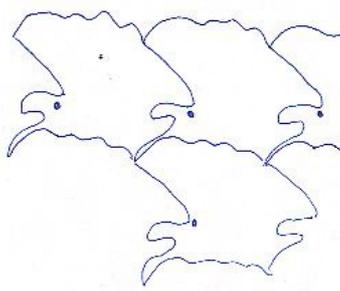
2. 學生創作的鑲嵌圖形

在教學結束後將創作鑲嵌圖形部份當做回家作業，讓兩組學生發揮創意自行設計作品，融合數學與藝術。可以發現雖然教師在課堂上只教授實驗組學生以 AMA2008 進行創作，但實驗組學生的創作除了使用 AMA2008 設計圖形外，也有學生使用傳統的紙筆方式進行設計。另外，控制組的學生因為教師只教授以紙筆設計圖形，所以全部學生都使用傳統的紙筆方式設計。觀察兩組學生的作品可以知道，無論是實驗組或控制組的學生皆能創作出屬於自己的鑲嵌圖形，也有各自的特色。不過，儘管教師在課堂上教授了平移和旋轉兩種方法，但兩組學生的創作卻幾乎都只有使用平移方法，只有實驗組的小凱和控制組的小展兩人使用其他方法設計，可見兩組學生都偏好使用最簡單的方法進行創作。圖 4-3-14 為實驗組學生的作品，圖 4-3-15 為控制組學生的作品。

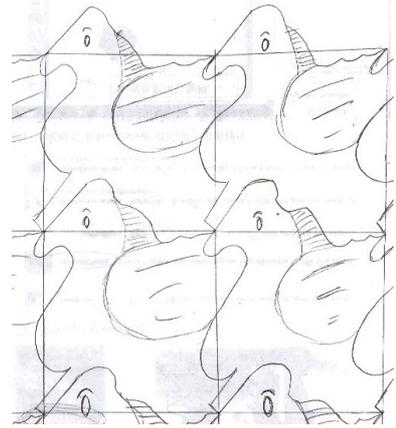
整體而言，在學生創作的鑲嵌圖形作業中，實驗組的學生除了使用電腦設計外，也有學生使用傳統的紙筆方式設計。而實驗組學生和控制組學生都能設計具有自己特色的鑲嵌圖形，且幾乎都使用平移的方法來創作自己的鑲嵌圖形。



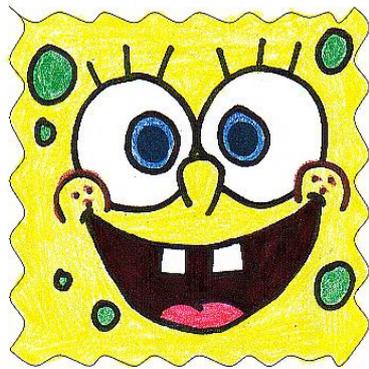
小瑋的創作



小樺的創作



小賢的創作



小安的創作



小閔的創作

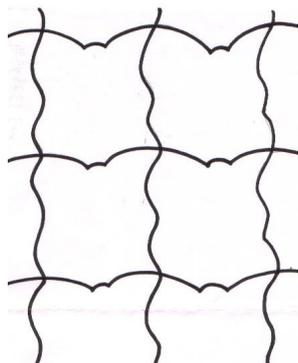


小凱的創作

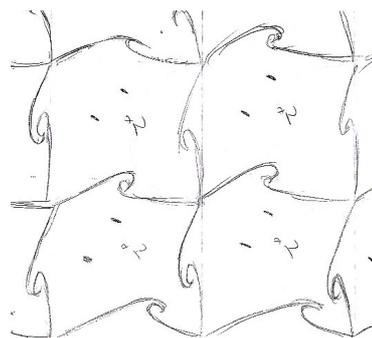


小綸的創作

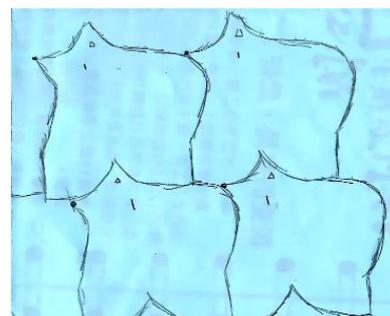
圖 4-3-14 實驗組學生創作的鑲嵌圖形



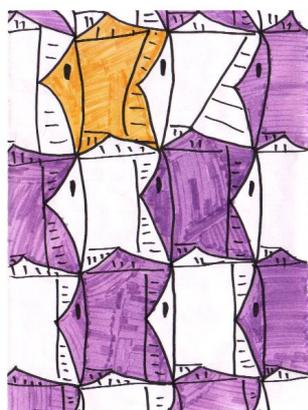
小雅的創作



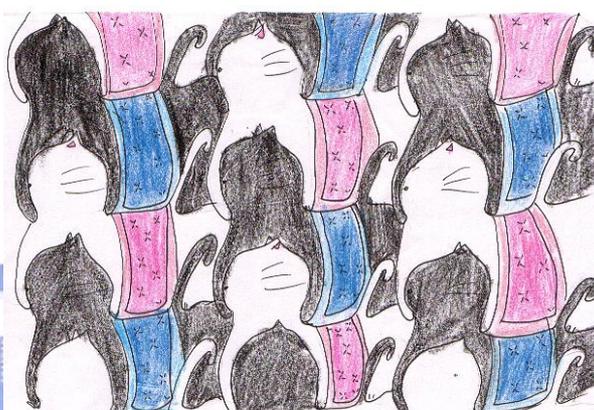
小晴的創作



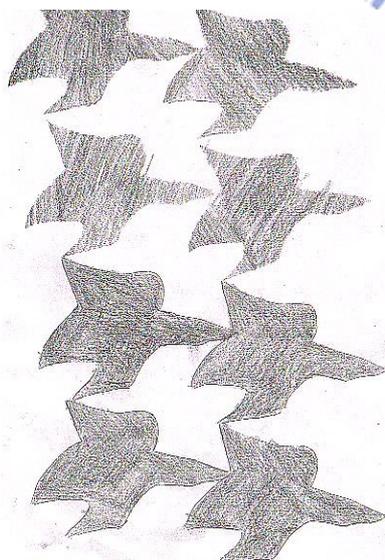
小惟的創作



小齡的創作



小瑄的創作



小展的創作



小萱的創作

圖 4-3-15 控制組學生創作的鑲嵌圖形

4.3.3 學生的心得及感想問卷分析

分析學生對於使用不同教具作為教學輔具進行鑲嵌圖形教學的看法和影響，實驗組與控制組學生均填寫心得感想問卷。問卷題目內容包含對於教具的使用操作是否有困難、從課程中學習到的內容和解題幫助、對於這門數學課的看法以及是否願意再上這類型的數學課程。以下根據兩組學生的撰寫內容，進行綜合整理與分析。

1. 對於教具的使用操作是否困難

實驗組有 17 位學生表示教具的操作上沒有困難，很簡單容易上手。8 位學生認為還好，只有一些困難，理由是不太熟悉電腦的操作，須老師說明後才適應。7 位學生表示要一個一個操作找出鑲嵌圖形很困難。4 位學生反應移動或旋轉時，操作較容易過頭要調整。實驗組學生的說法整理如下：

阿儀：沒有困難，我可以清楚明確的使用。

小爵：可以簡單的操作，容易上手。

小君：操作方便，不用多費心思。

阿皚：有些困難，因為還不太熟悉。

小萱：好像有些困難，因為不太會用電腦（電腦白癡）。

小珊：我比較不會計算內角和，只能一個一個拼湊，所以很麻煩。

阿鈞：有困難，因為我不太會數學，所以要一個一個排，很累。

阿倫：有一點困難，改變方向的時候有一點麻煩，還有移動的時候可能沒對好。

小州：旋轉時常轉過頭要一再調整。

可見對於從未使用過電腦進行數學教學的實驗組學生，在第一次接觸陌生的虛擬教具時，部分學生需要一些說明與適應，才能更加熟練。至於回答一個一個操作找出鑲嵌圖形很困難的學生，可以發現他們真正的困難是在於策略的不佳，導致找出可以鑲嵌圖形的過程中較辛苦，並非真正在教具的使用操作上有困難。

控制組有 17 個學生表示在教具的操作上很便利，沒有困難。7 位學生認為有一些困難，須老師解說後才覺得比較簡單。9 位學生表示有困難，理由是沒有事先分類好要找到相同的圖形有點困難、同一個圖形有誤差、不夠厚難操作、拼湊時目測可以但實際上卻不行等。3 位學生認為要找鑲嵌圖形很麻煩，有困難。控制組學生的說法整理如下：

小熙：我覺得教具的使用操作很方便，不會有困難。

小新：教具老師都幫我們弄好了，也剛好可以組，不會有不合的。

阿展：有困難，有時找不到要的形狀，且有時兩個形狀之間無法密合。

小軒：我覺得事先分配好多邊形，這樣比較好找。

小汪：有困難，有時候同一個圖形的紙片大小不一無法完全接在一起，所以明明可

以的圖形卻用不出來。

阿欽：太難操作，可以讓它厚一點。

小晴：有一點困難，因為有時候目測可以，但實際上卻不行。

阿元：一些教具拼起來時肉眼看不出來，雖然覺得沒錯，但算一遍時才發現是錯的。

小芸：有困難，雖然老師講很久，但對於這些拼來拼去的東西仍有些困難。

阿翔：有一點困難，因為我想像力、圖形概念不太好，所以鑲嵌其實覺得很麻煩。

可見對於大約一半的控制組學生而言，傳統紙做的教具較熟悉，操作上不需要時間適應也沒有困難。而部分學生也需要一些說明與適應，才能熟練。但認為有困難的學生，理由包含沒事先分類好不易尋找相同圖形、相同圖形有誤差、不夠厚不易操作以及拼湊時目測可以但實際上卻不行等，確實是傳統教具在操作使用上的困難。僅有三位學生因策略不佳導致找出可以鑲嵌圖形的過程中較辛苦，而認為找出鑲嵌圖形很困難，並非真正在教具的使用操作上有困難。

綜合以上所述，我們可以發現實驗組和控制組都大約一半的學生對於操作教具上沒有困難。但是部份認為有些困難的實驗組與控制組學生對於教具，都需要一些說明與適應，才能更加熟練。另外，認為有困難的實驗組學生，主要是在於策略的不佳，導致找出可以鑲嵌圖形的過程中較辛苦，並非真正在教具的使用操作上有困難。只有少數實驗組的學生確實在虛擬教具的平移和旋轉操作上有困難。然而認為有困難的控制組學生，主要是傳統教具操作使用上的困難，僅有少數控制組的學生是在於策略的不佳，導致找出可以鑲嵌圖形的過程中較辛苦。因此，我們可以發現使用 AMA 簡報系統和 NLVM 的 Tessellations 為虛擬教具比傳統教具在操作使用上真正的困難較少。

2. 從這個課程學到的內容與解題幫助

實驗組和控制組的學生都表示從這個課程中學習到鑲嵌圖案的規則性、多邊形角度之間的關係、各種鑲嵌圖形排法、創作自己的圖形、數學可以應用到日常生活中，以及增加對幾何的了解。兩組絕大部分的學生均認為這個課程對於自己的思考與解題方式、對幾何知識的了解與應用是有幫助的。兩組都各只有四位學生覺得對於目前較無幫助。將兩組學生的說法綜合如下：

小倍：學到各種鑲嵌、操作教具、平移和旋轉方法。對以後的幾何圖形比較了解，所以很有幫助。

小閔：學到角度、形狀的基本概念，之後對於幾何比較熟悉，加快思考速度。

阿皓：我學到有關圖形的許多知識，如：內角和幾度能湊成一個圖形。對於解題有幫助，會讓腦筋動得更快。

小晨：學到如何排到最緊密及什麼圖案可以鑲嵌。幫助很大，因為從角度就可以知道它可不可以鑲嵌。

小儒：如何製作自己的圖形，很大的幫助且對以後任何題目有快速的解題方法。

小熙：學到鑲嵌圖案的規則性之外，還學到角度之間相加的組合關係。

阿翔：學到鑲嵌的方法，對於解題多了一點方法還有更多想像力、創造力，還有對題目應用力的增長。

小磊：生活中的圖形很多都是鑲嵌來的。有幫助，使我不再討厭幾何圖形，反而覺得很有趣。

小佳：把東西拼在一起可以變成很好看的圖形，可以用在生活上，例如：地板或天花板。因為我是一個一個組合，不會用算的，所以對解題沒有幫助。

小安：我學到如何運用圖形排在一起，但對解題好像沒有明顯的進步。

小晴：學到了些關於幾何的知識。對現在還好，對以後應該有幫助吧。

小萱：學到內角和、鑲嵌的規則，對建築設計能應用，現在沒有幫助，但以後會有。

綜合以上所述，雖然實驗組學生與控制組學生分別使用虛擬教具與傳統教具進行教學，但是兩組學生絕大多數都認為這個鑲嵌課程的設計，讓他們學習到幾何知識與生活上的應用等，也認為對於自己的思考與解題方式是有幫助的。

3. 對於這門數學課的感想及看法以及是否願意再上這類型的數學課程

實驗組學生絕大部分表示這門數學課和以前的課程不同，使用電腦教學是新奇的，也不用侷限於教室內上課，課程十分有趣好玩，雖然有難度但有助於頭腦思考靈活，可以增加許多知識，希望能再上幾堂電腦教學的課程。僅有五位學生覺得太麻煩而不願意再上類似的課程。實驗組學生的說法整理如下：

小倍：還不錯，學到了次規則和半規則，以後如果想當設計師就可以用到了。願意再上，因為非常有趣，也不用天天在教室上課，總要呼吸新鮮空氣嘛。

阿賢：很好玩，可以用到電腦，也可以利用角度學習組合，願意再上這種課程。

小爵：我覺得十分好，希望可以再上，利用電腦教學十分的有趣。

阿綸：這門課程非常好玩，我願意再上一次這種電腦課程，因為讓我學到很多。

小佳：這是一門新奇的課程，之前都沒有上過用電腦的，還不錯玩。

小君：數學不只是單純的計算，生活化的教學很有趣。

小閔：可以讓大腦好好思考一番，變得更靈活反應更快，有機會希望可以多學習這種和平常不一樣的教學。

小州：看到那些圖形眼睛都花了，而且配來配去很麻煩，所以有需要再上課就好了。

小儀：我的感想是它對於我們如何把圖形鑲嵌給我很大的幫助。我不願意再上這種課程，因為有點太麻煩。

控制組學生絕大部分表示這課程很新鮮、特別，可以學習到知識，雖然很難但幫助很大，願意再多上和平常不同的數學課程。僅有五位學生表示太麻煩而不願意再上類似的課程。控制組學生的說法整理如下：

小儒：我覺得這堂課對於解題幫助很大，我會願意再上這堂課。

小語：擺脫一般制式化課程，不再侷限於計算，親自動手做，更能引發對數學的興趣，所以願意再上。

小展：我覺得這個課程很特別，而且有些事可能會用到，如果還有機會，希望能再上這類課程。

阿志：具新鮮感，對圖形也有更上一層之感。願意再上，學到許多更特別的知識。

小梅：這三節課我學到在外面看到或家裡的牆壁地板是怎樣做成的。所以願意再上。

阿維：數學很好用，願意再上，因為會學習到一些東西。

小軒：我覺得很趕，應延長到四節課，我會很樂意上的。

阿欽：還不錯，可是我覺得有點太無聊了。不願意再上，因為不喜歡這種課程。

小芸：好複雜，還要找來找去有點麻煩，所以不會想再上一次。

綜合以上所述，我們發現實驗組和控制組絕大部分的學生對於鑲嵌課程都持正面的看法，並願意再上類似的課程，也覺得數學課程和平常不同而不再只是計算，所以課程本身的內容和性質對學生學習數學的態度的影響遠大於教具上的不同。不過，我們發現對於實驗組學生而言，除了課程內容外，虛擬教具的使用新奇有趣，讓學生想再以電腦學習數學，也能增進學習動機與靈活思考，也多了一種不同於傳統教室的選擇。而控制組學生使用傳統教具，所以僅能單純以課程內容來增進學生的學習動機。

五、結論與建議

本研究使用 AMA 簡報系統和 NLVM 的 Tessellations 為虛擬教具進行鑲嵌教學的教材設計，並進一步探討教學實施後對學生學習上的影響。本章依據研究結果，歸納結論並提出建議，以作為未來相關研究之參考。

5.1 結論

本節主要根據教學後量化的統計數據分析，以及學生課堂上的學習歷程分析、教學過程中所蒐集的學習單、作業單和心得及感想問卷的質化資料，進行結果歸納：

5.1.1 使用 AMA 簡報系統和 NLVM 的 Tessellations 為虛擬教具教學和傳統教具教學對於學生學習的效果是一樣的

教學實驗一週後，研究者利用自編的鑲嵌測驗進行施測，以 SPSS 統計軟體將所得的資料，以鑲嵌測驗後測分數為依變數，前測國民中學智力測驗圖形推理部分的數學分數為共變數，進行共變數分析考驗後發現，雖然實驗組在鑲嵌測驗的平均數在排除智力測驗數學部分分數此共變量的影響後高於控制組，但實驗組與控制組在鑲嵌測驗的表現未達顯著差異 ($F=.307, p=.581 > .05$)，也就是使用 AMA 簡報系統和 NLVM 的 Tessellations 為虛擬教具教學可獲得和傳統教具教學同等的效果。

5.1.2 使用 AMA 簡報系統和 NLVM 的 Tessellations 為虛擬教具教學對於高分組學生的學習比傳統教具教學效果好

教學實驗一週後，研究者利用自編的鑲嵌測驗進行施測，以 SPSS 統計軟體將所得的資料，以鑲嵌測驗分數為依變數，國民中學智力測驗圖形推理部分的數學分數為共變數，進行共變數分析考驗後發現，實驗組高分組的學生在鑲嵌測驗的共變數分析的平均數在排除智力測驗數學部分分數此共變量的影響後高於控制組，並達到顯著差異 ($F=5.842, p=.025 < .05$)，而效果量也大於高度效果量 ($\eta^2=.218 > .138$)，顯示實驗組高分組與控制組高分組在後測「鑲嵌測驗」的差異不但具有統計意義，而且在臨床顯著性也有其實質意義。也就是使用 AMA 簡報系統和 NLVM 的 Tessellations 為虛擬教具教學對於高分組學生學習比傳統教學效果好。

5.1.3 使用 AMA 簡報系統和 NLVM 的 Tessellations 為虛擬教具教學和傳統教具教學對於低分組學生學習的效果是一樣的

教學實驗一週後，研究者利用自編的鑲嵌測驗進行施測，以 SPSS 統計軟體將所得的資料，以鑲嵌測驗分數為依變數，國民中學智力測驗圖形推理部分的數學分數為共變數，進行共變數分析考驗後發現，實驗組低分組的學生在鑲嵌測驗的共變數分析的平均數在排除智力測驗數學部分分數此共變量的影響後低於控制組，但是沒有達顯著差異 ($F=.812, p=.378 > .05$)，也就是使用 AMA 簡報系統和 NLVM 的 Tessellations 為虛擬教具教學對於低分組學生的學習可獲得和傳統教具教學同等的效果。

5.1.4 使用 AMA 簡報系統和 NLVM 的 Tessellations 為虛擬教具教學對於不同性別學生學習的效果是一樣的

教學實驗一週後，研究者利用自編的鑲嵌測驗進行施測，以 SPSS 統計軟體將所得的資料，以鑲嵌測驗分數為依變數，國民中學智力測驗圖形推理部分的數學分數為共變數，進行共變數分析考驗後發現，實驗組的男生在鑲嵌測驗的共變數分析的平均數在排除智力測驗數學部分分數此共變量的影響後低於實驗組女生，但是沒有達到顯著差異 ($F=.726, p=.400 > .05$)，也就是使用 AMA 簡報系統和 NLVM 的 Tessellations 為虛擬教具教學對於不同性別學生的學習可獲得同等的效果。

5.1.5 使用 AMA 簡報系統和 NLVM 的 Tessellations 為虛擬教具有助於數學學習

從學生課堂上的學習歷程分析、教學過程中所蒐集的學習單、作業單、心得及感想問卷可以將使用 AMA 簡報系統和 NLVM 的 Tessellations 為虛擬教具對於數學學習的助益歸納於下：

1. 能讓學生在視覺清晰的條件下聚焦思考

本教學實驗中，如 Izydorczak (2003) 所認為的虛擬教具在操作上比傳統實體教具更適合大團體教學，因為實體教具的尺寸無法讓遠距離的學習者看得十分清楚，而使用 AMA 簡報系統以廣播系統教學視覺清晰，因此，在展示各式圖形後，實驗組的學生比控制組的學生更能觀察出鑲嵌圖形的條件。在創作圖形時，實驗組學生的視覺資訊不會互相干擾造成認知負荷增加，所以能仔細完整地看見每一個操作過程，不需一再發問並重覆要求教師說明。所以使用 AMA 簡報系統進行教學，因視覺無障礙能讓學生更聚焦於教師的概念呈現與操作，使全班的學習進度與關注焦點一致。

2. 對於學生學習的干擾少

本教學實驗中，如 Izydorczak (2003) 所認為的虛擬教具比實體教具更易於操作。

因為學生可以拼得更好，不會因為疏忽而弄散已經完成的部分成果，尺寸也更精確。實驗組學生不會因為風大造成教具亂飛，分類清楚拿取方便，對於圖形分辨較有把握，不會一再詢問教師圖形的種類，拼貼過程中不會任意位移而需要一再調整，操作時間不會拉長，對於學生的學習干擾較少。

3. 讓學生能找出較多的半規則鑲嵌和不規則鑲嵌圖形種類

在半規則鑲嵌的操作過程中，使用虛擬教具的實驗組學生找齊了八種正確的圖形，而控制組並未找到所有的半規則鑲嵌圖形。在不規則鑲嵌圖形的教學過程中，實驗組大多數學生都能找出所有的不規則鑲嵌圖形，每一種圖形找出的數目為 29.11 個，也比控制組學生的 19.11 個多。因此，使用 AMA 簡報系統為虛擬教具的實驗組在找出半規則鑲嵌圖形和不規則鑲嵌圖形的數目表現上比使用傳統教具的控制組好。

4. 在半規則鑲嵌和不規則鑲嵌中能減少錯誤圖形

在半規則鑲嵌操作過程，虛擬教具中每個圖形一致，沒有裁剪造成的誤差，操作便利且不易位移，容易發現圖形是否能鑲嵌，以及有充分時間檢查是否能延伸，所以實驗組學生較少出現不能拼成 360 度的圖形、無法無限延伸的圖形、次規則鑲嵌，平均每個人出現的錯誤圖形數目為 0.75 個，比控制組的 3.31 個少。而實驗組學生在不規則鑲嵌的操作過程中，也較不會出現像控制組學生使用圖形的同一個角去拼一圈的行為。因此，學生使用 AMA 簡報系統為虛擬教具能減少在半規則鑲嵌和不規則鑲嵌操作中的錯誤圖形。

5. 學生能產生新的數學思維和策略

本教學實驗中，從一開始的規則鑲嵌操作過程中，實驗組使用基本一個一個操作策略的學生就比控制組的數目少，而愈來愈多的實驗組學生採取計算後再操作的策略，來輔助自己找出較複雜的半規則鑲嵌圖形。反觀控制組學生在每堂課中的使用策略幾乎沒有差異，都是採取一個一個操作。可以發現實驗組學生較能產生新的數學思維，除了最基本的一個一個嘗試策略外，能建構出鑲嵌的數學概念，彈性使用虛擬教具當做檢驗的工具。因此，學生使用 AMA 簡報系統作為虛擬教具在運用教具的方式和策略上比控制組有彈性。

6. 學生能具體化平面圖形

實驗組學生在半規則鑲嵌中使用虛擬教具畫面清晰不易位移，在學習單上除了能寫出名稱外也能畫出圖形，而控制組學生使用傳統教具圖形易位移，較無法將圖形具體化成平面圖形畫出，所以只寫出圖形名稱而沒畫出圖形。因此，使用虛擬教具能增進學生將圖形平面化的能力。

5.1.6 使用 AMA 簡報系統和 NLVM 的 Tessellations 為虛擬教具比傳統教具在次規則鑲嵌作業上表現好

根據次規則鑲嵌的作業分析，可以發現使用 AMA 簡報系統和 NLVM 的 Tessellations 為虛擬教具的實驗組學生找到的次規則鑲嵌數目比使用傳統教具的控制組學生多，而實驗組學生比控制組學生較少找出半規則鑲嵌圖形，也較少出現將兩個半規則鑲嵌圖形直接當作次規則鑲嵌圖形的行為。因此，使用 AMA 簡報系統和 NLVM 的 Tessellations 為虛擬教具比傳統教具在次規則鑲嵌作業上表現好。

5.1.7 使用 AMA 簡報系統為虛擬教具能提供學生不同的方式創作出和傳統教具同樣具個人特色的鑲嵌圖形

在學生創作的鑲嵌圖形作業中，實驗組和控制組的學生都能設計出具有自己特色的鑲嵌圖形，而且兩組學生都偏好使用最簡單的平移方法進行創作。不過，實驗組的學生除了使用電腦設計外，也有學生使用傳統的紙筆方式設計，可以使用的方式不只一種。因此，使用 AMA 簡報系統為虛擬教具能提供學生不同的方式創作圖形，創作出和傳統教具同樣具個人特色的圖形。



5.1.8 使用 AMA 簡報系統和 NLVM 的 Tessellations 為虛擬教具比傳統教具在學生操作使用上實際的困難較少

從學生課堂上的學習歷程分析及心得及感想問卷分析，可以發現實驗組和控制組大約半數的學生對於操作教具上沒有困難。不過，實驗組中覺得困難的學生大部分是策略不佳，導致找出鑲嵌圖形的過程中較辛苦，並非真正在教具的使用操作上的困難，只有極少數實驗組學生確實在虛擬教具的平移和旋轉操作上有困難。反觀控制組覺得困難的學生中確實大部分是傳統教具操作使用上的困難，如教具沒事先分類好不易尋找相同圖形、相同圖形有誤差、不夠厚不易操作以及拼湊時目測可以但實際上卻不行等，僅有少數學生是策略不佳造成的。因此，使用 AMA 簡報系統和 NLVM 的 Tessellations 為虛擬教具比傳統教具在學生操作使用上實際的困難較少。

5.1.9 使用 AMA 簡報系統和 NLVM 的 Tessellations 為虛擬教具對於學生學習態度有正向的影響

從學生課堂上的學習歷程分析、心得及感想問卷可以將使用 AMA 簡報系統和 NLVM 的 Tessellations 為虛擬教具對於學生學習態度的影響歸納於下：

1. 學生較專注不易分心

從學生課堂上的歷程分析中，可以發現實驗組學生專注看畫面與聆聽老師介紹，課堂中學習氣氛良好。實驗組學生對於能實際操作虛擬教具是感到有趣的，也專注操作自己的教具，相鄰位子的學生會彼此討論發現，但不會任意走動，沒有出現控制組般分心的脫序行為。這也反應了 Steen, Brooks, and Lyon (2006) 提出虛擬教具能讓學生更專注，加強學習品質和提供適當的困難度，以及 Izydorczak (2003) 所認為的虛擬教具所產生的班級管理問題較少。

2. 能提升學生的學習動機

從學生課堂上的歷程分析中，可以發現實驗組學生對於教師以電腦進行教學，每個人都能實際操作虛擬教具而感到十分興奮，上課動機強。在課堂問答過程中學生反應熱烈有自信，能立即給予回饋，讓教師能掌握學生是否確實明白，展現了自主性的數學探索與思維能力。實驗組教師僅須扮演輔助的角色，由學生扮演主動學習的角色，而非被動聆聽教師宣告與知識的灌輸。可見使用 AMA 簡報系統為虛擬教具時可以增加學生學習與教師教學的動機 (Clements & McMillen, 1996; Reimer & Moyer, 2005; Leathrum, 2001)。

3. 能讓學生肯定學習數學是有助益的。

從學生的心得感想問卷中，可以發現雖然實驗組學生與控制組學生分別使用虛擬教具與傳統教具進行教學，但是兩組學生絕大多數都認為這個鑲嵌課程的設計，讓他們學習到幾何知識與生活上的應用等，也認為對於自己的思考與解題方式是有幫助的。因此，使用 AMA 簡報系統和 NLVM 的 Tessellations 為虛擬教具和傳統教具一樣能讓學生肯定學習數學是有助益的。

4. 改善學生對數學課的看法

從學生的心得感想問卷中，發現實驗組和控制組絕大部分的學生對於鑲嵌課程都持正面的看法，並願意再上類似的課程，也覺得數學課程不再只是計算，所以課程本身的內容和性質對學生學習數學的態度的影響遠大於教具上的不同。不過，相較於控制組學生僅能單純以課程內容來增進學習趣味，虛擬教具的使用新奇有趣，更能讓實驗組學生想再以電腦學習數學，也能增進學習興趣與靈活思考，多了一種不同於傳統教室的選擇，使學生更喜愛學習數學並表達對於再上數學課的高度意願。

5.2 建議

本節根據本研究的結論以及研究者在整個研究過程的經歷，在教材設計、教學及未來研究上提出下列幾點建議。

5.2.1 對教材設計的建議

1. 教材設計前宜多方縝密規劃

教學者在進行教材設計前，應該縝密的多方思考參酌，對教材內容的充分了解，將有助於教學者設計合宜的自編教材，對教學過程的流暢度掌握也更有幫助。本教學研究的主題為鑲嵌圖形，能夠提升學生數學上的概念和啟發創造性，鑲嵌教學活動也常於國外課堂進行。對於中學生而言，可以引入更深入的數學概念，如多邊形的內角和鑲嵌需要的幾何條件、探討樣式規則、規則鑲嵌和不規則鑲嵌的種類，也能建構幾何的觀念 (Peterson, 2000)。雖然國內這幾年已可見到鑲嵌活動的蹤跡，如曹亮吉 (2003) 的平面鋪磚、數學真魅 (2008) 的密鋪欣賞，但完整的教學活動仍然有限，也多屬於補充教材，或是針對程度較佳的學生，如林壽福 (2006) 的探索磚瓦 (鑲嵌) 飾的奧妙。在國中二年級課本，關於多邊形的介紹，往往如數學部編版教科書第四冊第二章第二節所述，僅簡短介紹規則鑲嵌的部分，探討正多邊形地磚能否鋪滿地面，甚至也沒提及鑲嵌這個名詞。研究者在教學上也發現這樣的教學內容導致學生易產生只有正多邊形才能鑲嵌，以及大多認為要同一種正多邊形才能鑲嵌的迷思。所以教學者面對新的數學主題時，除了教學內容的充份考究外，教材設計前須先了解學生的起點行為，才能符合學生程度，並選擇系統化教學設計來進行教材設計。因此，本實驗教材採取 ADDIE 系統教學模式，即分析學生的先備知識、教學目標與教學內容後，進一步設計組織教材內容、決定教學方式、使用的教具與選擇評量方式，並根據設計發展教材與評量題目，實施教學活動，最後透過評鑑以修正教學過程。而且根據研究的結論顯示本教材設計確實讓使用虛擬教具的學生和使用傳統教具的學生認為學習鑲嵌圖形是有助益的，並能建構幾何概念，也提升了兩組學生的學習興趣。所以建議教學者在教材設計上宜多方縝密考量，並選擇適當的系統化設計方法，讓教材與教學流程才能更完善。

2. 善用 AMA 簡報系統的工具特性

要使用AMA簡報系統設計教材，首先須了解其工具特性，才能更加得心應手。AMA簡報系統是以數學概念所發展出來的教學軟體，外掛在Microsoft Powerpoint上，檔案小且安裝便利，設計者不需撰寫程式碼或複雜的操作，即能簡便地繪圖且能同時製作教學

簡報。AMA系統是一種新的繪圖法，能解決設計教材時定位不易的問題，與PowerPoint結合可以成為一個數位內容設計及展演、繪本寫作及創意的平台。因AMA有強大的定位繪圖功能，能設計各式鑲嵌圖形的繪製、旋轉與貼合，而且亦是一個良好的教學展演平台，利用它激發式動態呈現的功能，以一個物件當按鈕來控制一連串的動態呈現，協助教學者適時的呈現數位內容，吸引學習者注意力與引導學習，進而降低學習者的認知負荷。所以，研究者選擇AMA簡報系統作為設計鑲嵌圖形教學的軟體，除了利用繪圖功能設計各式多邊形虛擬教具讓學生實際操作外，也利用激發式動態呈現功能來進行教學說明。AMA系統還有結構式複製繪圖法可以簡單的製作出更多數學教材，激發式動態呈現功能也能提供學習者與內容互動的機會，有別於PowerPoint的講述與展示。因此建議設計者可以依照自己的教學流程，掌握此工具特性以設計適合的教材，善用發揮虛擬教具的特色，讓教學發揮更大的輔助效益。

3. 彈性運用虛擬教具

同時使用兩種教具比單獨使用任何一種好 (Terry, 1995)。Suh and Moyer (2007) 研究也顯示使用虛擬或是實體的代數天平來建立學生表徵，成就都一樣顯著，且在轉換和呈現他們理解表徵上顯示出彈性，只是兩者在學生思考上各有不同的特徵。綜合以上結果，我們發現儘管虛擬教具無法肯定是否在各方面都勝過傳統教具，然而卻具有許多優勢，且讓學生有不同的表徵出現，提供了多元的選擇。因此，我們應該思考使用虛擬教具的時機，不見得要從一而終使用AMA簡報系統，我們可以在不同的教學階段中，選用不同的虛擬教具。如本實驗研究，次規則鑲嵌作業因學生已有概念不需要太多種類的正多邊形，所以即可選擇NLVM的Tessellations當作虛擬教具，方便學生在家上網取得，操作也更簡易。另外，我們可以發現在簡單的規則鑲嵌課程中，使用虛擬教具或傳統教具成就一樣，僅是兩者顯現出的思考特徵不同，所以對於簡單的課程內容，教具種類的使用效果不一定有顯著分別，因此不見得非要使用虛擬教具不可。然而在複雜的半規則鑲嵌、不規則鑲嵌課程、次規則鑲嵌作業中和高分組學生中，確實可見到虛擬教具讓學生表現較佳，思考具有不同的特徵，比傳統教具有優勢。因此，建議研究者可依照自己的教學需求，衡量教學對象，彈性在不同的時機運用虛擬教具。

5.2.2 對教學上的建議

1. 可以增加學習探索的時間

本實驗設計主要是以常態編班的學生為主，研究一般學生對於使用虛擬教具和傳統教具進行教學的差異與影響，為了避免第八節或假日實施時學生不夠積極，並期望鑲嵌教學能融入一般教學，所以於學期中正常課程時間實施共3節課。以國中目前幾何概念

設計適合常態學生程度的課程，探索主要的規則鑲嵌、半規則鑲嵌、次規則鑲嵌簡介、不規則鑲嵌和學生創作活動，讓學生由操作中了解數學概念，以及激發學習興趣。然而在操作過程中，我們可以發現控制組因為操作費時，課程非常趕影響到下課，所以學生在心得及感想問卷中希望能延長課程時間。即使實驗組使用虛擬教具可以在預定時間內完成，但也有少部分學生表示需要一段時間適應如何操作滑鼠。在創作圖形部分兩組學生幾乎都使用最簡單的平移方法，而少用旋轉方法，因此，建議實施本課程活動可以再多一堂課的時間，讓學生能更加熟悉虛擬教具的使用，以及增加創作課程的時間。

2. 須確認環境能配合教學使用

爲了讓每一位學生皆能實際操作虛擬教具，需要足夠的電腦設備，必須借電腦教室教學，因為本校新穎的電腦教室皆有固定的資訊教師上課，時間上須要配合其它教師上課，無法依照研究設計連續進行三堂課，所以選擇較少人使用的資訊教室。於是教師須事先檢查教室環境使否能配合教學使用，例如窗簾的遮蓋性要足夠，上課前先確認網路能連線無誤、教學廣播系統、相關硬體設備能正常運作，才能讓教學順利。

3. 進行半規則鑲嵌教學或次規則鑲嵌作業時可以使用虛擬教具

在教學實驗過程中，我們知道在半規則鑲嵌和次規則鑲嵌的學習中，學生容易拼出不能密鋪成 360 度的圖形，所以此處的教學宜讓學生在拼湊過程中，能清楚的判斷圖形是否沒有縫隙或重疊的鑲嵌在一起，如此學生將更容易判斷出真正的半規則鑲嵌或次規則鑲嵌圖形，減少錯誤圖形的出現率。另外，教師進行半規則鑲嵌和次規則鑲嵌兩者差異的教學時，宜建立在視覺清晰的條件下，學生才更容易區分出兩者的差異，建立半規則鑲嵌和次規則鑲嵌的正確概念。故研究者建議未來教學此單元者在講述半規則鑲嵌和次規則鑲嵌差異時，可以使用 AMA 簡報系統來教學以符合大班教學的視覺需求，並讓學生使用虛擬教具來進行操作，以建立正確概念及減少錯誤圖形的出現率。

4. 進行傳統實體教具的改良

在目前的教育現場中，若部分學校受制於環境的限制或器材的不足，而僅能以傳統實體教具進行教學時，則可根據本實驗研究中發現的各項缺點進行改良。建議可以加強傳統實體教具的厚度，以更厚的紙張製作，而在人為裁剪上有誤差的問題，可以請專門的店家進行電腦切割，讓圖形更精準。另外，可以黏貼背膠式的磁鐵，在鐵板上操作以改善傳統實體教具容易位移的缺點。

5.2.3 對未來相關研究的建議

1. 增加樣本數量

本研究乃是研究者在教學領域上的實驗研究，取樣採方便樣本，對象為研究者任教

學校的國二學生，各選取一班為實驗組，一班為控制組，有樣本數過小的研究限制。雖然接受教學的學生就讀之學校採常態編班，入學編班依據入學時的測驗成績做S型編排，但仍不能強推到其他地區。因此，日後的研究者可以增加樣本數量，以取得更有代表性的研究結果。

2. 增加教學研究的時間

考量學校教學進度安排無法任意更動，本研究為延伸課程，旨在將數學融入日常生活中，並非正式課堂必教課程，為了避免壓縮正式課程的教學時間，僅安排三堂課程，有教學研究時間過短的研究限制，因此本實驗教學對於學習成效的結果論定可能造成影響。因此，日後研究者可以考慮增加教學研究時間，進行更深入的探究。

3. AMA 簡報系統與不同教學素材結合的開發研究

AMA 簡報系統以數學概念所發展出來的教學軟體，能簡便地繪圖且能同時製作教學簡報，成為一個數位內容設計及展演、繪本寫作及創意的平台。利用激發式動態呈現的功能，能協助教學者適時的呈現數位內容，降低學習者的認知負荷。因此，未來研究者若能善用 AMA 簡報系統的這些性質，就能輕鬆地將資訊融入數學教學，也可看到 AMA 簡報系統與不同的教學素材結合的可能契機，例如：尺規作圖、直角座標、函數圖形等。

4. 虛擬教具在於不同教學環境的成效研究

一些研究報告顯示虛擬教具可以運用在特殊教育、學前教育與補救教學的學習環境中，但是目前在教學現場虛擬教具的使用並不普及，且對於是否能真的取代傳統實體教具，學者間也有不同的看法。而國內對於虛擬教具教學成效的正式研究，數量其實很少（Yuan, 2006），本教學實驗也僅是將 AMA 簡報系統和 NLVM 的 Tessellations 運用於鑲嵌教學中探討虛擬教具環境和傳統實體教具環境的學習成效差異。因此，未來研究者可以將虛擬教具運用在一般的教學單元或不同的教學環境中，進行實証研究。

5. 改良虛擬教具的操作功能

由於本教學實驗中虛擬教具的設計，只是以研究者進行教學的角度去思考學生如何操作，雖然已請其他教師進行操作並依意見修改調整，然而並沒有找學生試用，所以不知道學生的操作習慣，因此，可以增加複製、拉近、拉遠等功能和更人性化的操作版面配合學生的操作習慣，這些都是未來研究者可以努力的方向。

參考文獻

中文部份

- 王士彥 (1979) 譯。鑲嵌畫。世界工藝叢書，35，世界文物，台北市。
- 王智弘 (2006)。多方塊虛擬教具的開發與教學研究。國立交通大學理學院網路學習學程碩士論文，未出版，新竹市。
- 丘永福 (1990)。設計基礎。藝風堂，台北。
- 李虎雄、李政貴、林初堂、陳昭地、黃登源、儲啟政 (2005)。高中數學乙教科書下冊。康熙圖書，台中市。
- 沙雷金 (2001)。直觀幾何。(呂乃剛譯)。中國上海：華東師範大學出版社。
- 吳麗美 (2003)。網路新科技融入於教學之研究。中原大學資訊管理學系碩士論文，中壢市。
- 林佳蓉、劉新白 (1999)。教育傳播。傳播與社會，世新大學新聞學系編著，台北：揚智。
- 林瑞蘭 (2008)。虛擬教具應用於國小三年級周長與面積概念教學之影響研究。國立交通大學理學院網路學習學程碩士論文，未出版，新竹市。
- 林壽福 (2006)。數學樂園—從胚騰Pattern學好數學。如何出版社，台北市。
- 凌春玉 (1998)。圖案。藝術家雜誌，273，371-373。
- 袁媛 (2007)。國中小數學虛擬教具的研發與教學研究。行政院國家科學委員會專題研究成果報告(編號：NSC95-2520-S-033-003)，未出版。
- 教育部 (2003)。國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域。台北：教育部。
- 陳明璋 (2006)。數學簡報系統——一個克服數位落差之教師專業發展環境。第十屆全球華人計算機教育研討會，北京清華大學。
- 陳明璋 (2008)。一個以授課為導向之數位教材設計及展演環境-Activate Mind Attention (AMA) 系統。2008年11月13日，取自阿嬤的家 (AMA)
<http://ama.nctu.edu.tw/Introduction/AMA-Introduction.mht>
- 曹亮吉 (2003)。阿草的數學聖杯—探尋無所不在的胚騰。天下遠見，台北市。
- 張祖忻、朱純 (1995)。教學設計：基本原理與方法。五南，台北市。
- 張瑜軒 (2002)。群論應用於艾雪鑲嵌藝術之對稱構成研究—以多媒體創作為例。中原大學商業設計學系碩士論文，未出版，中壢市。
- 張漢宜 (2002)。教導兒童學習數學的新工具——虛擬教具。國教輔導，42卷，1期，33-37頁。

- 彭健彰（2008）。**虛擬教具應用於國小四年級重量概念教學之影響研究**。國立交通大學理學院網路學習學程碩士論文，未出版，新竹市。
- 數學真魅-密鋪欣賞（2008）。2008年7月10日，取自
<http://aishuxue.blogspot.com/2008/04/blog-post.html>
- 劉賢建（2006）。**虛擬計算機的開發與教學研究 — 以探索數字樣式一般化為例**。國立交通大學理學院網路學習學程碩士論文，未出版，新竹市。
- 蕭慶利（2007）。**運用二維對稱特性建構雙瓦片鋪磚之研究**。國立交通大學理學院網路學習學程碩士論文，未出版，新竹市。



英文部分

Aiken, L. R. (1986). Sex difference in mathematical ability: a review of the literature.

Educational Research Quarterly, 87, 5, 531-543.

Branson, R. K. (1978). The interservice procedures for instructional systems development.

Educational Technology, March, 11-14.

California Department of Education(1997). Mathematics Content Standards for California

Public Schools. Retrieved October 29, 2008, from:

<http://www.cde.ca.gov/be/st/ss/documents/mathstandard.pdf>.

Cassidy, J. (1998). Tessellations & transitions. *Arts and Activities*, 123, 5, 42.

Char, C. A. (1989). *Computer graphic feltboards: New software approaches for young*

children's mathematics exploration. San Francisco American Educational Research

Association.

Clauss, J. E. (1991). Pentagonal Tessellations. *The Arithmetic Teacher*, 38, 5, 52.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws

(Ed.), *Handbook of reasoning on mathematics teaching and learning* (pp.420-464). New

York, NY: Macmillan.

Clements, D. H. , & McMillen, S. (1996). Rethinking "concrete" manipulatives. *Teaching*

Children Mathematics, 2(5), 270-279.

Coxeter, H. S. M. , Emmer, M. , Penrose, R. , & Teuber M. L. (editors). (1986). *M.C. Escher:*

Art and Science, Amsterdam: Elsevier Science. Collection of papers on Escher's work,

with analyses of his use of tessellations and polyhedra.

Crawford, C. , & Brown, E. (2003). Integrating internet-based mathematical manipulatives

within a learning environment. *Journal of Computers in Mathematics and Science*

Teaching, 22(2), 169-180.

- Dick, W. (1996). The dick and carey model: Will it survive the decade? . *Educational Technology Research and Development*, 44(30), 55-63.
- Dick, W. , & Carey, L. M. (1978, 1985, 1990, 1996). *The systematic design of instruction* (editions 1 through 4.). New York: HarperCollins College Publishers.
- Dorward, J. (2002). Intuition and research: Are they comparable? . *Teaching Children Mathematics*, 8, 329-332.
- Drickey, N. A. (2000). A comparison of virtual and physical manipulatives in teaching visualization and spatial reasoning to middle school mathematics students. (Doctoral dissertation, Utah State University, 2000). *Dissertation Abstracts International*, 62(02), 499A.
- Durmus, S., & Karakirik, E. (2006). Virtual manipulatives in mathematics education: A theoretical framework. *The Turkish Journal of Educational Technology*, 5(1). Retrieved April 8, 2008, from: <http://www.tojet.net/articles/5112.htm>.
- Dutch, S. (1999). *Uniform Tilings*. Retrieved August 20, 2008, from: <http://www.uwgb.edu/dutchs/symmetry/unifitil.htm>.
- Fennema, E. (1972). Models and mathematics. *Arithmetic Teacher*, 19(Dec.), 633-640.
- Furner, J. M. , Goodman, B. , & Meeks, S. (2004). Creating tessellations with pavement chalk: Implementing best practices in Mathematics. *The Australian Mathematics Teacher*, 60 (2), 25-28.
- Giganti, P. J. , & Cittadino, M. J. (1990). The Art of Tessellation. *The Arithmetic Teacher*, March , 37(7), 6.
- Granger, T. (2000). Math is art. *Teaching Children Mathematics*, 7(5), 10-13.
- Grunbaum, B., & Shephard, G. C. (1986). *Tilings and Patterns*, New York: W. H. Freeman and Company.
- Hale, C. (2003). Create tessellations like M.C. Escher. *Instructor*, 112(7), 32.

- Heath, G. D. (2002). Using applets in teaching mathematics. *Mathematics and Computer Education*, 36(1), 43-52.
- Heinich, R. , Molenda, M. , Russell, J. D. , & Smaldino, S. (2002). *Instructional media and technologies for learning*(7th ed.). Columbus: Merrill/Prentice Hall.
- Izydorczak, A. E. (2003). A study of virtual manipulatives for elementary mathematics. (Doctoral dissertation, State University of New York at Buffalo, 2003). *Dissertation Abstracts International*.
- Jacobs, K. L. (2005). Investigation of interactive online visual tools for the learning of mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 36(7), 761-768.
- Johnson, C. D. , & Kashef, A. E. (1996). Tessellations in the technology education classroom. *The Technology Teacher, Journal of the International Technology Education Association*, 56(3), 3-7.
- Kim, S. (1993). The relative effectiveness of hands-on and computer-simulated manipulatives in teaching seriation, classification, geometric, and arithmetic concepts to kindergarten children. (Doctoral dissertation, University of Oregon, 1993). *Dissertations Abstracts International*, 54(09), 3319.
- Leathrum, T. (2001). Writing mathlets I: A call to math professionals. *Journal of Online Mathematics and its Applications*. 1(2). Retrieved August 19, 2008, from:
<http://mathdl.maa.org/mathDL/4/?pa=content&sa=viewDocument&nodeId=460>.
- Mathematical Classification of Tessellations (2003). Retrieved July 11, 2008, from:
<http://library.thinkquest.org/11750/eschpage/MathClass1.html>
- Mayer, R. E. (2003). The promise of multimedia learning: using the same instructional design methods across different media. *Learning and Instruction*, 13, 125-139, University of California.

- Miller, D. , Brown, A. , & Robinson, L. (2002). Widgets on the web, using computer-based learning tools. *Teaching Exceptional Children*, 35(2), 24-28.
- Molenda, M. (2003). In Search of the Elusive ADDIE Model. *Performance Improvement*, Indiana University .
- Molenda, M., Pershing, J. A. , & Reigeluth, C. M. (1996). Designing instructional systems. In R. L. Craig(Ed.), *The ASTD training and development handbook*, 4th ed., (pp. 266-293). New York:McGraw-Hill.
- Morrison, G. R., Ross, S. M., & Kemp, J. E. (2004). Designing effective instruction, 4th edition, New York, NY: John Wiley & Sons Inc.
- Moyer, P. S. (2001). Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 175-197.
- Moyer, P. S. , Bolyard, J. J. , & Spikell, M. A. (2002). What are virtual manipulatives? . *Teaching Children Mathematics*, 8, 372-377.
- Moyer, P. S. , & Jones, M. G. (2004). Controlling Choice: Teachers, Students, and Manipulatives in Mathematics Classrooms. *School Science and Mathematics*, Jan 2004, 104, 16-31.
- Moyer, P. S., Niezgoda, D. , & Stanley, J. (2005). Young children's use of virtual manipulatives and other forms of mathematics representations. In P. C. Elliott(Eds.), *Technology-supported mathematics learning environments* (Sixty-seven yearbook), Reston, VA: NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics(2000). *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston, VA: NCTM.
- Nute, N. (1997). The impact of engagement activity and manipulatives presentation on intermediate mathematics achievement, time-on-task, learning efficiency, and attitude. (Doctoral dissertation, University of Memphis, 1997). *Dissertations Abstracts International*, 58(08), 2988.

- Parham, J. L. (1983). A meta-analysis of the use of manipulative materials and student achievement in elementary school mathematics. (Doctoral dissertation, Auburn University, 1983). *Dissertations Abstracts International*, 44-01A: 96.
- Perl, T. (1990). Manipulatives and the Computer: A Powerful Partnership for Learners of All Ages. *Classroom Computer Learning*, Dayton: Mar 1990, Vol. 10, Iss. 6, 20-22, 26-29.
- Peterson, B. E. (2000). From tessellations to polyhedra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 5(6), 348-357.
- Raphael, D. , & Wahlstorm, M. (1989). The influence of instructional aids on mathematics achievement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(2), 173-196.
- Reimer, K. , & Moyer, P. S. (2005). Third-Graders learn about fractions using virtual manipulatives: A classroom study. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 24(1), 5-25.
- Riley, G. , Beard, L. A. , & Strain, J. (2004). Assistive technology at use in the teacher education programs at Jacksonville State University. *Tech Trends*, 48(6), 47-49.
- Sarama, J. , Clements, D. H. , & Vukelic, E. B. (1996). The role of a computer manipulative in fostering specific psychological/mathematical processes. In E. Jakubowski & D. Watkins & H. Biske (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth Annual Meeting of the North America Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*(Vol. 2, pp. 567-572). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.
- Schielack, J. F. (1991). Reaching young pupils with technology. *Arithmetic Teacher*, 38(6), 51-55.
- Smith, J. P. (1995). The effects of a computer microworld on middle school students' use and understanding of integers. (Doctoral dissertation, Ohio State University, 1995). *Dissertation Abstracts International*, 56(09), 3492.
- Smith, P. L. , & Ragan, T. J. (1993). *Instructional design*. New York : Macmillan.

- Sobol, A. J. (1998). A formative and summative evaluation study of classroom interactions and student/teacher effects when implementing algebra tile manipulatives with junior high school students. (Doctoral dissertation, St. John's University, 1998). *Dissertation Abstracts International*, 59(04A), 1103.
- Sowell, E. J. (1989). Effects of manipulative materials in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(5), 498-505.
- Spicer, J. (2000). Virtual Manipulatives: A New Tool for Hands-on Math. *ENC Focus*, 7(4), 14-15.
- Steen, K. , Brooks, D. , & Lyon, T. (2006). The impact of virtual manipulatives on first grade geometry instruction and learning. *The Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 25, 373-391, 4, Academic Research Library.
- Stylianou, D. A. , & Grzegorzczuk, I. (2005). Symmetry in mathematics and art : an exploration of an art venue for mathematics learning. *PRIMUS*, 15:1, 30-44.
- Suh, M. J. (2005). *Third grades' mathematics achievement and representation preference using virtual and physical manipulatives for adding fractions and balancing equations*. Unpublished doctoral dissertation. University of George mason. Fairfax, Virginia.
- Suh, J. , & Moyer, P. S. (2005). Examining technology uses in the classroom: Developing fraction sense using virtual manipulative concept tutorials. *Journal of Interactive Online Learning*, 3(4), 1-21.
- Suh, J. , & Moyer, P. S. (2007). Developing Students' Representational Fluency Using Virtual and Physical Algebra balances. *The Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 26, 2, 155.
- Suydam, M. N. (1984). Attitude toward mathematics, *Arithmetic Teacher*, 12, 56-59.
- Terry, M. K. (1995). An investigation of differences in cognition when utilizing math manipulatives and math manipulative software. (Doctoral dissertation, University of Missouri - Saint Louis, 1996). *Dissertation Abstracts International*, 56(07), 2605.

Tessellation Tutorials (1994). Retrieved August 31, 2008, from:

<http://mathforum.org/sum95/suzanne/tess.intro.html>.

The Official M. C. Escher Website. Retrieved August 19, 2008, from:

<http://www.mcescher.com/indexuk.htm>.

Thompson, P. W. (1992). Notations, conventions, constraints: Contributions to effective uses of concrete materials in elementary mathematics. *Journal for research in mathematics education*, 23, 123-147.

Totally Tessellated (1998). An Introduction to Tessellations. Retrieved July 10, 2008, from:

<http://library.thinkquest.org/16661>

Yuan, Y. (2005). Design of virtual manipulatives for mathematical explorations using Flash ActionScript. *In Proceedings of the 10th Asia Technology Conference in Mathematics*, 182-193.

Yuan, Y. (2007). A comparison study of polyominoes explorations in a physical and a virtual manipulative environment. *Proceedings of the 4th East Asia Regional Conference on Mathematics Education*, 186-190.

Yuan, Y. , & Lee, C. I. (2004). Designing instructional tools by Flash MX to teach basic geometry concepts. *In proceedings of the TIME-2004 Symposium. Montreal, CA: July, 2004.*

Yuan, Y., Lee, C. Y. & Huang, J. R. (2007). Developing Geometry Software for Exploration —Geometry Player. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education*, 11(3), 209-218.

附錄一 鑲嵌圖形教案設計與學習單

一、課程簡介：

| | |
|------|-------------------------|
| 課程名稱 | 鑲嵌圖形(Tessellations) |
| 設計者 | 張玉琪老師 |
| 指導者 | 袁媛教授 |
| 學習領域 | 數學教育 |
| 學習範疇 | 圖形與樣式(Pattern) |
| 上課模式 | 透過虛擬教具或是傳統教具的輔助，讓學生操作學習 |

二、教學理念：

本課程的構思配合數學教育學習領域中的「數學的 pattern」課題，透過實作，結合日常生活中鑲嵌圖形的應用，讓學生觀察欣賞幾何圖形的美，啓發學生的組織力和整合分析能力，並能實際應用所學設計鑲嵌圖案。

三、教案設計：

| | |
|------|--|
| 課程主題 | 鑲嵌圖形 |
| 授課年級 | 國中二年級常態分班，一班 36 人 |
| 授課時間 | 三節課，共 135 分鐘 |
| 先備知識 | 多邊形的外角和與內角和 |
| 教學目標 | 1.學生能欣賞日常生活中磁磚和其他幾何圖案的設計。 2.學生能藉由操作基本圖形的鑲嵌，歸納出要鑲嵌成平面必須 360 度。 3.學生能藉由操作正多邊形，歸納出規則鑲嵌設計和內角間的關係。 4.學生能藉由操作瞭解半規則鑲嵌、次規則鑲嵌、不規則鑲嵌的意義 5.學生能應用多邊形鑲嵌的概念設計鑲嵌圖形。 |

| | |
|-------------|--|
| 能力指標 | <p>S-2-03 能透過操作，認識簡單平面圖形的性質。</p> <p>S-3-01 能利用幾何形體的性質解決簡單的數學問題。</p> <p>S-4-01 能利用形體的幾何性質來定義某一類的形體。</p> <p>S-4-02 能指出合於所給定性質的形體。</p> <p>S-4-03 能描述複合形體構成要素間的可能關係。</p> <p>S-4-04 能利用形體的性質解決幾何問題。</p> <p>C-R-01 能察覺生活中與數學相關的情境。</p> <p>C-R-02 能察覺數學與其他領域之間有所連結。</p> <p>C-R-03 能了解其他領域中所用到的數學知識與方法。</p> <p>C-R-04 能察覺數學與人類文化活動相關。</p> <p>C-T-01 能把情境中與問題相關的數、量、形析出。</p> <p>C-T-03 能把情境中與數學相關的資料資訊化。</p> <p>C-S-03 能熟悉解題的各種歷程：蒐集、觀察、臆測、檢驗、推演、驗證、論證等。</p> <p>C-S-04 能運用解題的各種方法：分類、歸納、演繹、推理、推論、類比、分析、變形、一般化、特殊化、模型化、系統化。</p> <p>C-C-04 能用數學的觀點推測及說明解答的屬性。</p> <p>C-C-08 能尊重他人解決數學問題的多元想法。</p> <p>C-E-03 能闡釋及審視情境，重新評估原來的轉化是否得宜，並做必要的調整。</p> |
|-------------|--|

四、內容摘要：

- | | | |
|---|---|-------|
| <ol style="list-style-type: none"> 1.透過各式圖片的展示，讓學生欣賞生活中幾何圖形的鑲嵌。 2.教師複習正多邊形內角和的性質和每一個內角的度數。 3.操作正多邊形，歸納出規則鑲嵌與其內角間的關係。 | } | 45 分鐘 |
| <ol style="list-style-type: none"> 4.操作正多邊形，瞭解半規則鑲嵌的意義和種類。 5.簡介次規則鑲嵌的意義，請學生回家尋找種類。 | } | 45 分鐘 |
| <ol style="list-style-type: none"> 6.操作任意三角形和四邊形瞭解不規則鑲嵌的意義和內角和的關係 7.應用鑲嵌的概念，使用平移、旋轉的技巧，設計非多邊形的鑲嵌 8.學生設計屬於自己的鑲嵌圖形。 | } | 45 分鐘 |

五、教學資源：

控制組（傳統教具組）：學習單、黑板、紙做教具、磁鐵、海報、泡棉教具。

實驗組（虛擬教具組）：學習單、電腦、廣播系統、AMA 簡報系統軟體、NLVM

的 Tessellations。

六、傳統教具組教學過程：

1.第一節課，45 分鐘

| 時間 | 教學大綱 | 教學活動 | 教材 |
|-------|------------|--|----------------|
| 7 分鐘 | 引發動機 複習 | 教師展示各式磁磚圖片，讓學生欣賞日常生活中幾何圖形的鑲嵌。教師複習多邊形內角和性質。 | 圖片 粉筆 黑板 |
| 8 分鐘 | 說明 | 教師發放教具，並說明內容和如何操作。 | 紙做多邊形 |
| 20 分鐘 | 實際操作 | 操作各式正多邊形(正 3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、15、16、17、18、19、20、24、30、36、40、42 邊形)，實際嘗試是否能鑲嵌，並將圖形繪在學習單上。 | 紙做多邊形 學習單 |
| 10 分鐘 | 討論 | 歸納規則鑲嵌的種類，探討結果及原因。 | 學習單 |

2.第二節課，45 分鐘

| 時間 | 教學大綱 | 教學活動、方法與問題大綱 | 教材 |
|-------|------|---|--------------|
| 10 分鐘 | 簡介說明 | 教師簡介說明半規則鑲嵌和次規則鑲嵌的差異，次規則鑲嵌種類當回家作業。 | 海報 磁鐵 |
| 25 分鐘 | 實際操作 | 操作各式正多邊形(正 3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、15、16、17、18、19、20、24、30、36、40、42 邊形)，嘗試找出半規則鑲嵌的種類，並將圖形繪在學習單上。 | 紙做多邊形 學習單 |
| 10 分鐘 | 討論 | 探討半規則鑲嵌的種類，探討結果及原因。 | 學習單 |

3.第三節課，45 分鐘

| 時間 | 教學大綱 | 教學活動、方法與問題大綱 | 教材 |
|-------|------|--|--------------|
| 15 分鐘 | 實際操作 | 操作等腰三角形、直角三角形、不等邊三角形、矩形、平行四邊形、菱形、梯形、箏形、任意四邊形，實際嘗試是否能鑲嵌，並將圖形繪在學習單上。 | 紙做多邊形 學習單 |

| | | | |
|-------|--------------|--|-----------------------|
| 5 分鐘 | 討論 | 探討不規則鑲嵌的條件和內角和的關係。 | 學習單 |
| 20 分鐘 | 教師示範 學生演練 | 教師使用海報以正方形為例，利用平移、旋轉技巧設計鑲嵌圖形。並讓學生實際演練。 | 海報、泡棉教具、描圖紙、剪刀、膠水、學習單 |
| 5 分鐘 | 作業 | 請學生回家自行創作自己的鑲嵌圖形。 | 學習單 |

4.補充活動

| | |
|----------------------|---|
| 分享與教室佈置 | 學生上台分享作品，交流構思與想法，欣賞別人的創意，培養美感，之後將學生作品佈置在教室牆上。亦可以進行票選活動，增加成就感。 |
| 三律鑲嵌 四律鑲嵌 高律鑲嵌 | 學生在課程內探討一律鑲嵌（規則鑲嵌、半規則鑲嵌）、二律鑲嵌（次規則鑲嵌）外，可以進一步探討三律鑲嵌、四律鑲嵌與高律鑲嵌，促進學習延伸性。可以競賽方式進行，增加趣味性。 |

七、虛擬教具組教學過程：



1.第一節課，45 分鐘

| 時間 | 教學大綱 | 教學活動 | 教材 |
|-------|------------|--|-------------------|
| 7 分鐘 | 引發動機 複習 | 教師透過 powerpoint 展示各式磁磚圖片，讓學生欣賞日常生活中幾何圖形的鑲嵌。教師利用 powerpoint 複習多邊形內角和性質。 | 電腦 廣播系統 |
| 8 分鐘 | 說明 | 教師說明內容和如何操作軟體。 | AMA 設計的多邊形 學習單 |
| 20 分鐘 | 實際操作 | 操作各式正多邊形(正 3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、15、16、17、18、19、20、24、30、36、40、42 邊形)，實際嘗試是否能鑲嵌，並將圖形繪在學習單上。 | AMA 設計的多邊形 學習單 |
| 10 分鐘 | 討論 | 歸納規則鑲嵌的種類，探討結果及原因。 | 學習單 |

2.第二節課，45 分鐘

| 時間 | 教學大綱 | 教學活動、方法與問題大綱 | 教材 |
|-------|------|---|-----------------------|
| 10 分鐘 | 簡介說明 | 教師利用 powerpoint 簡介說明半規則鑲嵌和次規則鑲嵌的差異，次規則鑲嵌種類當回家作業(以 NLVM 的 Tessellations 為虛擬教具)。 | 電腦 廣播系統 |
| 25 分鐘 | 實際操作 | 操作各式正多邊形(正 3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14、15、16、17、18、19、20、24、30、36、40、42 邊形)，實際嘗試找出半規則鑲嵌的種類，並將圖形繪在學習單上。 | AMA 設計的 多邊形 學習單 |
| 10 分鐘 | 討論 | 探討半規則鑲嵌的種類，探討結果及原因。 | 學習單 |

3.第三節課，45 分鐘

| 時間 | 教學大綱 | 教學活動、方法與問題大綱 | 教材 |
|-------|--------------|--|-----------------------|
| 15 分鐘 | 實際操作 | 操作等腰三角形、直角三角形、不等邊三角形、矩形、平行四邊形、菱形、梯形、箏形、任意四邊形，實際嘗試是否能鑲嵌，並將圖形繪在學習單上。 | AMA 設計的 多邊形 學習單 |
| 5 分鐘 | 討論 | 探討不規則鑲嵌的條件和內角和的關係。 | 學習單 |
| 20 分鐘 | 教師示範 學生演練 | 教師使用 AMA 簡報系統，以正方形為例，利用平移、旋轉技巧設計鑲嵌圖形。並讓學生實際演練。 | 電腦 廣播系統 學習單 |
| 5 分鐘 | 作業 | 請學生回家自行創作自己的鑲嵌圖形。 | 學習單 |

4.補充活動

| | |
|----------------------|---|
| 分享與教室佈置 | 學生列印出作品上台分享，交流構思與想法，欣賞別人的創意，培養美感，之後將學生作品佈置在教室牆上。亦可以進行票選活動，增加成就感 |
| 三律鑲嵌 四律鑲嵌 高律鑲嵌 | 學生在課程內探討一律鑲嵌（規則鑲嵌、半規則鑲嵌）、二律鑲嵌（次規則鑲嵌）外，可以進一步探討三律鑲嵌、四律鑲嵌與高律鑲嵌，促進學習延伸性。可以競賽方式進行，增加趣味性。 |

鑲嵌圖形學習單 1

年 班 座號： 姓名：



看過前面的磁磚圖片，你們認為這些磁磚是如何鑲嵌的？回想一下剛才的圖形，將想到的畫在下面空白處。



畫完之後，發現磁磚有哪些形狀？圖形如何安排才是鑲嵌？



我們來分析正多邊形的性質，請完成下表。

| | | | | | | | | |
|--------|----|----|-----|----|-----|----|-----|----|
| 正多邊形 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 九 | 十 |
| 每一內角度數 | | | | | | | | |
| 正多邊形 | 十一 | 十二 | 十三 | 十四 | 十五 | 十六 | 十七 | 十八 |
| 每一內角度數 | | | | | | | | |
| 正多邊形 | 十九 | 二十 | 二十四 | 三十 | 三十六 | 四十 | 四十二 | |
| 每一內角度數 | | | | | | | | |



請利用老師給的各種正多邊形教具，實際嘗試看看吧！將能鑲嵌的正多邊形（規則鑲嵌）結果畫在學習單上，並解釋理由。

我發現_____種正多邊形可以鑲嵌。有這幾種_____。



將不能鑲嵌的正多邊形鑲嵌結果列出，並解釋理由。

我發現_____種正多邊形不能鑲嵌。有這幾種_____。



請說說看你剛剛用什麼方法嘗試？一個一個操作？還是其他方法？



目前已經知道了各種正多邊形鑲嵌的結果，請綜合你的發現來推論原因並說明。



最後，對於這堂數學課，印象最深刻的是什麼？我有什麼想法或期待。

鑲嵌圖形學習單 2

年 班 座號： 姓名：



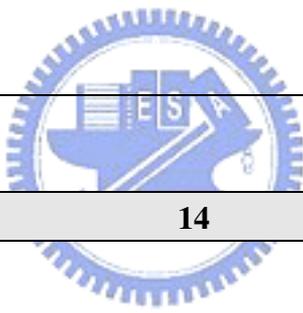
根據圖形命名法，請嘗試列出以下圖形的命名。

| | | |
|--|--|--|
| | | |
| | | |



請利用老師給的各種正多邊形教具，實際嘗試看看，將找出來了的半規則鑲嵌結果畫在學習單上，並寫出圖形的命名。

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| | | |
| | | |
| 4 | 5 | 6 |
| | | |
| | | |

| | | |
|-----------|--|-----------|
| 7 | 8 | 9 |
| | | |
| | | |
| 10 | 11 | 12 |
| | | |
| |  | |
| 13 | 14 | 15 |
| | | |
| | | |



由兩種以上的正多邊形，每個頂點只有一種方式構成的半規則鑲嵌，扣除重複和不符合的，我發現總共找到以下這幾種（以命名表示）。



請說說看你剛剛用什麼方法嘗試?一個一個操作?還是其他方法? 請綜合你的發現來推論原因並說明。



完成以上活動後，你認為如果不是正多邊形，例如：等腰三角形、梯形、平行四邊形可以鑲嵌嗎？說說看你的看法。



最後，對於這堂數學課，印象最深刻的是什麼？我有什麼想法或期待。



猜測二律鑲嵌（次規則鑲嵌）有_____種。請回家嘗試找出次規則鑲嵌的種類，並可以嘗試找出一些高律鑲嵌的例子。

鑲嵌圖形學習單 3

年 班 座號： 姓名：

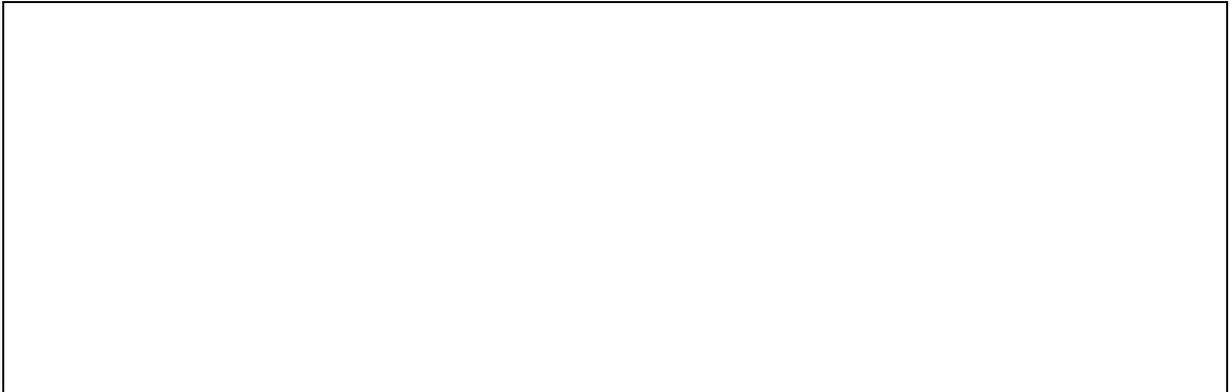


請利用老師給的各種多邊形教具，實際嘗試除了正多邊形外，其他常見的各式多邊形是否能鑲嵌，將圖形畫在學習單上。

| | | |
|-------|-------|--------|
| 等腰三角形 | 直角三角形 | 不等邊三角形 |
| | | |
| 矩形 | 平行四邊形 | 菱形 |
| | | |
| 梯形 | 箏形 | 任意四邊形 |
| | | |



根據上面的操作，歸納探討三角形和四邊形鑲嵌的結果並探討原因。



從三邊形和四邊形的推論，猜測五邊形、六邊形的鑲嵌結果，請綜合你們的發現，來總結說明鑲嵌設計和基本圖形內角和間的關係。

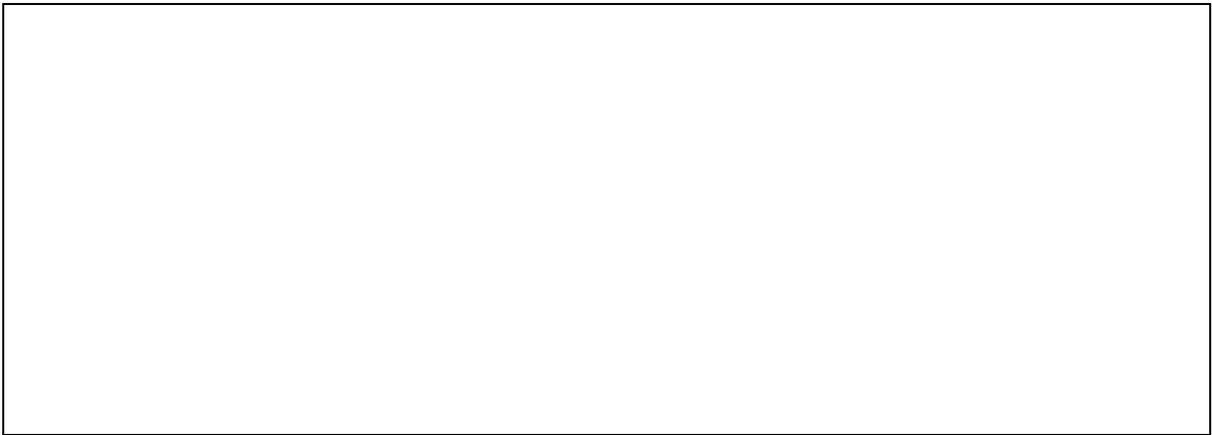


我使用平移技巧在上課創造的鑲嵌圖形。

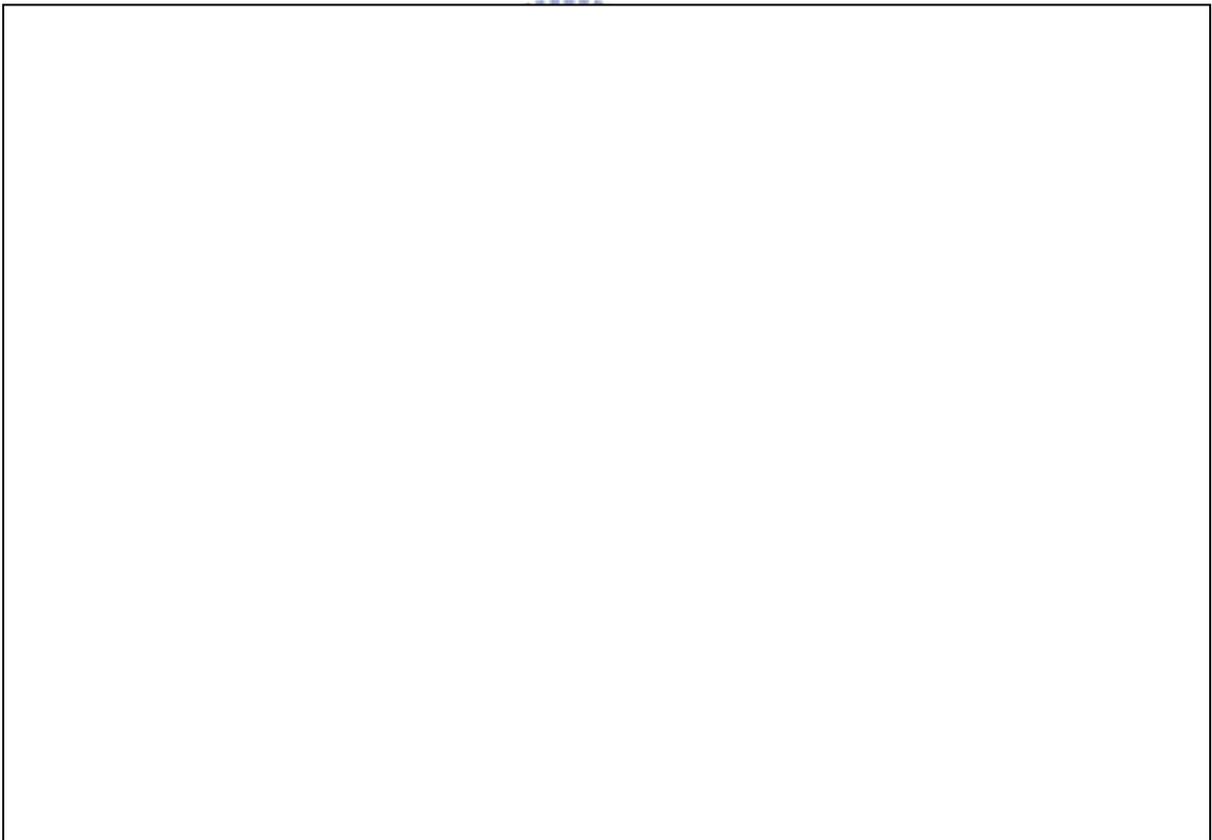




我使用旋轉技巧上課創造的鑲嵌圖形。



最後，對於這堂數學課，印象最深刻的是什麼？我有什麼想法或期待。



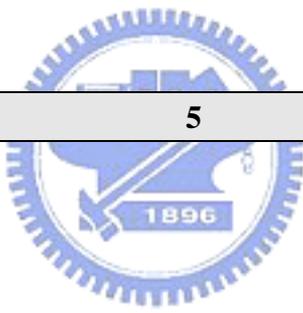
請回家嘗試創造屬於自己獨一無二的鑲嵌圖形，並可以著上喜歡的顏色，然後以A4紙繳交一個自認為最棒的圖形。

次規則鑲嵌圖形作業單

年 班 座號： 姓名：



請利用老師給的各種正多邊形教具，實際嘗試看看，將找出來的次規則鑲嵌結果畫在作業單上，並寫出圖形的命名。

| 1 | 2 | 3 |
|---|--|---|
| | | |
| |  | |
| 4 | 5 | 6 |
| | | |
| | | |
| 7 | 8 | 9 |
| | | |
| | | |

| | | |
|-----------|-----------|-----------|
| 10 | 11 | 12 |
| | | |
| | | |
| 13 | 14 | 15 |
| | | |
| | | |
| 16 | 17 | 18 |
| | | |
| | | |



由兩種以上的正多邊形，每個頂點只有兩種方式構成的次規則鑲嵌，扣除重複和不符合的，我發現總共找到以下這幾種（以命名表示）。



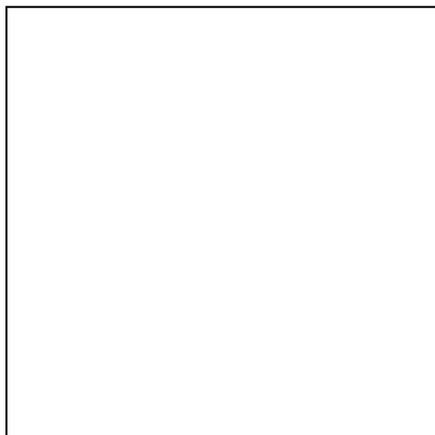
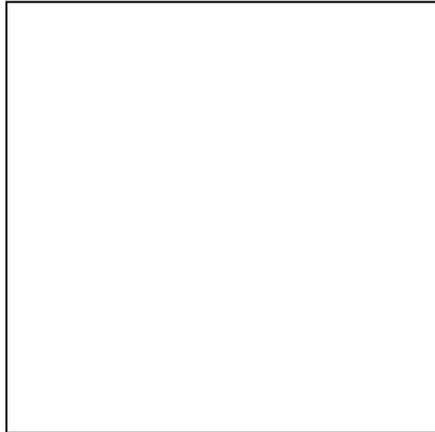
請說說看你剛剛用什麼方法嘗試?一個一個操作?還是其他方法? 請綜合你的發現來推論原因並說明。



我嘗試找出高律鑲嵌的例子。



鑲嵌圖形創作附件



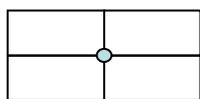
鑲嵌圖形教學：學生試卷

主題：鑲嵌圖形的平面組合

說明：

所謂平面上的鑲嵌圖形是指數個平面圖形，以邊相鄰拼接後，不重疊且沒有空隙密鋪滿整個平面，可以無限的向四方延展。最簡單的樣式是只有一種相同的正多邊形密鋪滿整個平面，我們稱之為“**規則鑲嵌**”；而由兩種以上相同的正多邊形以同樣方式密鋪滿整個平面，我們稱之為“**半規則鑲嵌**”；而由兩種以上相同的正多邊形以兩種不同方式密鋪滿整個平面，我們稱之為“**次規則鑲嵌**”；由正多邊形以外的多邊形密鋪滿整個平面，我們稱之為“**不規則鑲嵌**”；用多邊形以外的曲線圖形，可以密鋪滿整個平面，我們稱之為“**非多邊形鑲嵌**”。

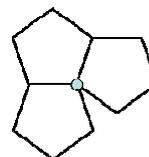
例一：鑲嵌的排法：(以邊相鄰拼接後，不能重疊，且沒有空隙)



正確的

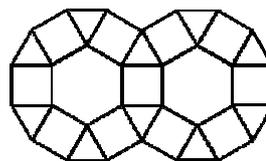
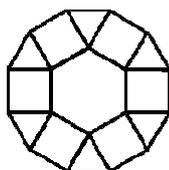
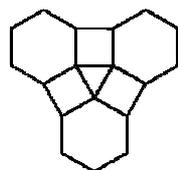
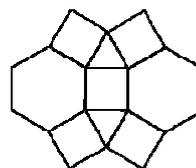
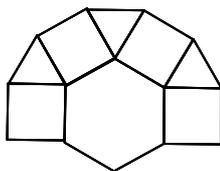
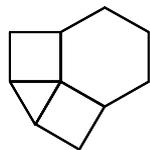


錯誤的



錯誤的

例二：旋轉及延展後的圖形如果相同亦屬於同一種：

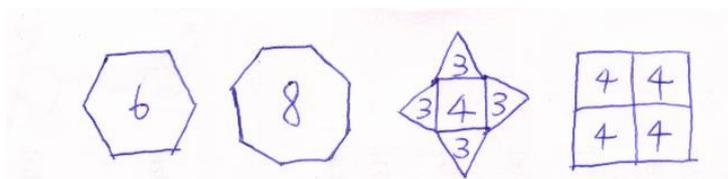


一、基本資料：

1.性別：男 女

2.班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

二、題目：(時間 40 分鐘，請把你找到的圖形畫在下列的表格中，不用畫的很精準，圖形內標示邊數即可，如下圖)



1.請找出所有**規則鑲嵌**的圖形，並解釋找出的**規則鑲嵌**圖形符合的理由。

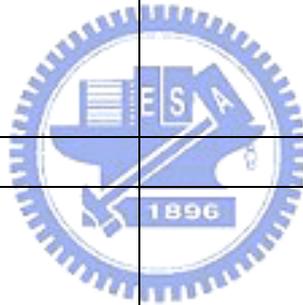
| (1) | 理由 |
|-----|----|
| | |
| (2) | 理由 |
| | |
| (3) | 理由 |
| | |

| | |
|-----|----|
| (4) | 理由 |
| | |
| (5) | 理由 |
| | |

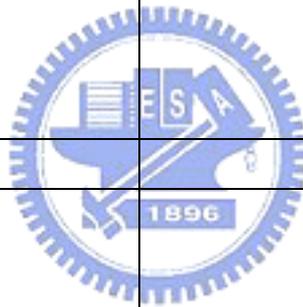
2. 請找出所有半規則鑲嵌的圖形，並解釋找出的半規則鑲嵌圖形符合的理由。

| | |
|-----|----|
| (1) | 理由 |
| | |
| (2) | 理由 |
| | |

| | |
|-----|----|
| (3) | 理由 |
| | |
| (4) | 理由 |
| | |
| (5) | 理由 |
| | |
| (6) | 理由 |
| | |



| | |
|------|----|
| (7) | 理由 |
| | |
| (8) | 理由 |
| | |
| (9) | 理由 |
| | |
| (10) | 理由 |
| | |



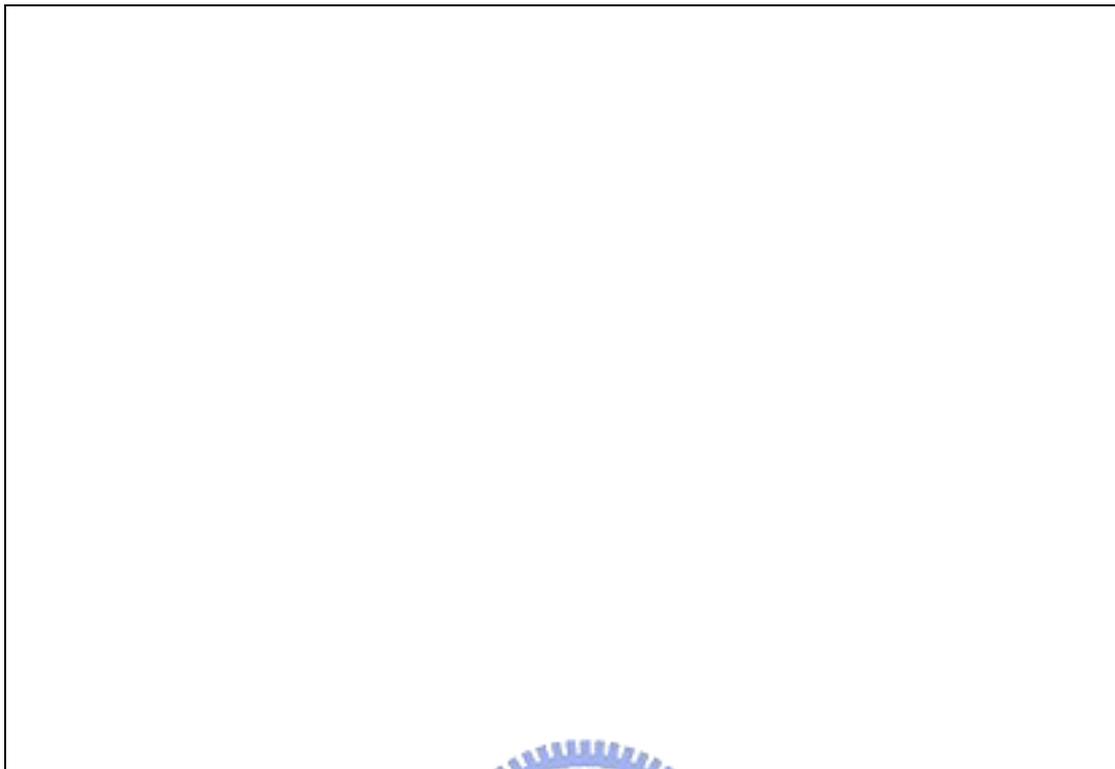
3. 請找出二個**次規則鑲嵌**的圖形，並解釋找出的**次規則鑲嵌**圖形符合的理由。

| (1) | 理由 |
|-----|----|
| | |
| (2) | 理由 |
| | |

4. 請找出二個**不規則鑲嵌**的圖形，並解釋找出的**不規則鑲嵌**圖形符合的理由。

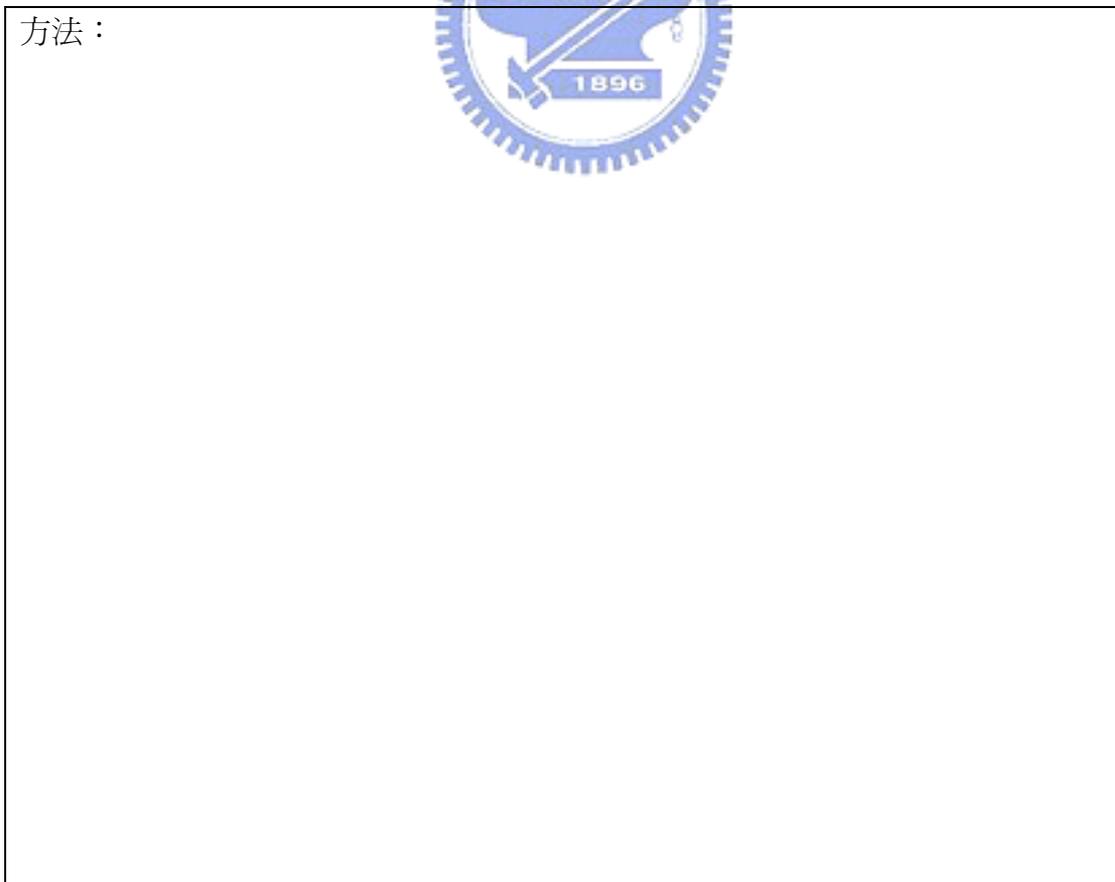
| (1) | 理由 |
|-----|----|
| | |
| (2) | 理由 |
| | |

5.請設計一種**非多邊形鑲嵌**的圖形。



6.請解釋你設計的**非多邊形鑲嵌**圖形用了哪些方法。

方法：



附錄三 學生心得及感想問卷

鑲嵌圖形教學：學生心得及感想問卷

主題：鑲嵌圖形的平面組合

一、基本資料：

1.性別：男 女

2.班級：_____ 座號：_____ 姓名：_____

二、問題：

1.請問對於教具的使用操作是否有困難？

2.從這個課程，你學到了什麼內容？對於你的解題是否有幫助？

3.你對於這門數學課程的感想及看法為何？你會願意再上這類型的數學課程嗎？