# 國 立 交 通 大 學

## 理學院網路學習學程

## 碩 士 論 文

# 數 學 動 態 學 習 環 境 製 作 之 研 究

# A Study of Dynamic Learning Environments for High School Mathematics

研 究 生：姚念廷

指導教授：黃大原 教授

中 華 民 國 九 十 八 年 九 月

# 數學動態學習環境製作之研究
# A Study of Dynamic Learning Environments for High School Mathematics


研 究 生：姚念廷　　Student：Nien-Ting Yao

指導教授：黃大原　　Advisor：Tayuan Huang


國 立 交 通 大 學
理學院網路學習學程
碩 士 論 文

A Thesis
Submitted to Degree Program of E-Learning
College of Science
National Chiao Tung University
in partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master
in
Degree Program of E-Learning

July 2009

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十八年九月

# 數學動態學習環境製作之研究

學生：姚念廷　　　　　　　　　　　　　　指導教授：黃大原　博士

國立交通大學理學院網路學習碩士在職專班

## 摘要

本研究主要根據研究者為教育第一線的高級中學數學老師，藉由數學輔助軟體 GSP, Cabri 3D, GeoGebra，根據教學經驗，融合教學與視覺思考，藉此讓教學更有效果，讓學生更容易吸收所需要的知識，利用具體的圖像協助學生學習抽象的定理，彌補傳統教學上的不足。

本論文分兩部分，第三章是數位內容的開發。圓錐截痕在以往的傳統教材中，大部分採三維模擬二維的方式講解，本研究用目前在三維空間使用最好的軟體---Cabri 3D 做為工具，不僅方便教師的教學，也讓學習者可不斷的重複觀看直到瞭解為止。

第四章是根據不同軟體製作的數位教材內容的比較，把同一題目，用三個目前普遍使用的數學軟體呈現--- GSP, Cabri 3D, GeoGebra 做為工具來呈現，發現其彼此的優點，並補足彼此的劣勢，希望能妥善運用得宜，讓教學更有成效。

A Study of Dynamic Learning Environments for High School Mathematics

Student: Nien-Ting Yao    Advisor: Dr. Tayuan Huang

Degree Program of E-Learning
National Chiao Tung University

# Abstract

How to prepare course materials efficiently so that the students can easily catch abstract mathematical concepts in friendly environments is usually the main concern of high school teachers in mathematics. For efficient teaching and learning, how to prepare course materials by using appropriate packages of software is the theme of this research.

Based on teaching experiences in classes, the evolutions of courses materials from the traditional ways to the current information days are surveyed in Chapter 3. The evolutions is illustrated by the topic of conic sections; in particular, we show in detail how the classification of conic sections in traditional way in paper, and then gradually transformed into the presentation in GSP. Finally the classification is presented in Cabri 3D, three types of conic sections are presented efficiently, and the student hopefully will be convinced clearly and friendly.

Comparisons of course materials for various topics in high school level mathematics prepared by the packages of software including GSP, Cabri 3D, GeoGebra, commonly used in campus currently, are given in Chapter 4. Some prototype problems chosen from texts, entrance examinations, and mathematics competitions illustrated in various packages of software are given. Some procedures for preparing related course materials in detail are included.

# 誌謝

花了兩年多的時間，其中一邊教書，一邊唸書，內心的壓力隨著身邊同學口試而越來越大，好在有家人的支持，服務學校新竹高工同事的鼓勵，終於再撰寫，開發，修正中順利完成了。

寫論文的過程中，如果沒有黃大原教授的啟發，我想不會有我現在的成果，因為黃老師對我的耐心，給我的寶貴意見，讓我更對現在的數學軟體更加的熟稔，也發現了以往忽略的地方，進而改進，也謝謝我的同學，陳偉閔老師，如果不是他告訴我有 GeoGebra 這個軟體，那我也想不到現在論文的方向，也謝謝很多老師的鼓勵，陳明璋老師在每次論文研討課時都細心提供我們意見，謝謝竹南高中李政豐老師，如果不是他，我也不會來這個專班，他僅提供我很多數學上的想法，也矯正我很多不周全的觀念。

不知有多少個夜裡，自己一人坐在電腦前發呆，不知道自己做的這份論文有沒有對數學教育有沒有幫助？感謝黃大原教授常常跟我說，我們要提供不同的方法讓學生更好認識數學，而非排斥，讓我因此有動力完成，真希望能為高中數學教育進一點點微薄的努力。

陪我的家人及身邊的好友，尤其是我的女朋友紹綸，當我因讀書的事煩悶時，靜靜聽我發牢騷，也鼓勵我再接再厲，更時時提醒我照顧身體，早點休息，謝謝你們。

以此篇論文獻給大家，誠心祝福大家健康幸福快樂。

# 目錄

# 表目錄



# 圖目錄

# 第一章　　　緒論

本章主要在說明研究的背景，研究動機與目的及研究方法及研究限制，並提出整個論文的結構。本章有五節，1-1 研究背景 1-2 研究動機與目的 1-3 研究方法 1-4 研究限制 1-5 論文結構。

## 1-1 研究背景

電腦的普及，加上現在學生對電腦依賴的程度，提供我們不同的方法來教數學，對學生而言不僅改變學習數學的模式，也提供更快的達到效果的工具，像繁雜的計算已不再需要，繪製圖形的能力也可以交給電腦。當然老師們也從中學習並利用其好處，可以藉由電腦來呈現一些較難說明的概念，增強一些視覺化的呈現，減少憑空抽象思考，提升學生的學習興趣，1983 年美國數學教師學會 NCTM（National Council of Teachers of Mathematics）亦建議各層級的老師都應使用資訊科技來輔助教學，但教師該怎麼使用，如何適當的運用才能真正的發揮其最大的功效。

因此，在資訊科技蓬勃發展的今天，身在教育第一線的老師應該用更積極的態度來提升自己的資訊素養，進而養成將資訊融入教學現場的能力，把資訊科技與課程內容中有相關的主題統一整合，有利於學生更認識單元的內容，妥善利用數學軟體如（GSP, Cabri 3D, GeoGebra）來輔助以往在教學上難以教授的課程內容，加強學生對觀念的建立與瞭解，並鼓勵學生運用教學輔助軟體所模擬的環境進行探索和發現。

NCTM 於課程改革中提出數學問題解決是學習的主要活動。教學的目的在於提供學生數學討論、觀察的學習環境，並設計一系列的有意義的題目讓學生可以做充分的討論及成果展現，學習如何提出問題，並能積極的投入困難問題的解決（Manuel Santos-Trigo, 2004）。我從高中數學教材中，選定了幾個主題來提供不同的思維，運用身邊隨手可得且會使學生有興趣的物品配合電腦資訊，加上我任教的職業類科學生中既有的技能來提供不同的管道學習，避免用刻板的方式，讓學生體驗數學，並從中瞭解其觀念，而非單純的紙筆計算，摒除死記的方法。

如同我的指導教授黃大原老師教導我，當一位老師要為更多不同需求的人設計不同的教法，在教育第一線的老師就像一個搭梯子的工人一樣，目的是讓學生爬往上一個樓層，因此讓梯子更好爬，或者搭架更多不同的梯子，讓學生更好理解，進而培養解決實際問題中的廣泛應用，從中感受數學的價值，學會用數學的思維方式去觀察、分析現實世界，去解決日常生活和其他學科學習中的問題，發

展數學應用意識，是我的目標，也是我的動力。

## 1-2 研究動機與目的

萊茵巴赫（Hans Reichenbach，邏輯實證論代表人物之一）認為「數學的求知活動是由問題出發，先有探索的發現過程，然後才有邏輯證明與整理成嚴謹的知識系統，兩個階段兼備才算完美。然而，一般數學教科書、教學、或文章，往往只展示冰冷且抽象的後半段，而忽略掉最精采且最能啟迪思想的前半段。」這是台灣教育的盲點，注重紙筆計算下的缺失，也導致學生對數學的態度，忽略最重要的原理，而只想知道怎麼把題目快速的解答，也因此很多學生放棄數學，討厭數學。（蔡聰明，2000）

科學上很多新定理、新發現都是經由「觀察」而來，課堂上通常所採用傳統講述教學法，因為升學壓力致使學生只注重公式及解題技巧，卻不喜歡動腦筋思考和非主動學習，對於比較艱深或具創意、抽象的課程，學生吸收有限。因此，教師應針對不同的教學內容，採用適當的方式，尤其是特別重要的概念，訓練學生觀察且思考，對教學才能達到最大的效能。

在數學領域，面對資訊科技的結合，教與學的方法孕育出動態學習的教學理念。過去的學習方式著重於「認知的獲得」，由完善的證明與推理、循序漸進的邏輯組織，勾勒出數學嚴謹的全貌，卻忽略了經由觀察、實驗、操作、猜想、測試等歸納方式獲得的數形理念。由於網際網路的發展，快數的傳輸使得圖形檔案與文字資料得以完整、清晰、迅速地呈現在使用者眼前，使得動態學習能順利進行。有了電腦作為動態學習的輔助教學工具，加上優良的互動式軟體，不僅能夠簡單的呈現數學的動態圖形，或以編序教學為理論基礎之傳統電腦輔助教學，它也提供動態模擬、圖形變換的功能，同時誘發學生主動學習、操作、嘗試及實驗的興趣，如此我們才能兼顧數學「認知的發展」（李政豐，2003）。

本研究除了希望在電腦輔助教學軟體下幫助數學教學，尤其在 3D 轉成 2D 的步驟，利用軟體視覺化呈現，並以動態具體效果配合課本教材來達到觀察、實驗、操作、猜想、測試等歸納方式獲得的數形理念，引導學生能有個人主動思考探索能力。

## 1-3 研究方法

從高中課程教材中，挑出適合的教學內容，針對教學目標，探討適用哪一種相關軟體，設計教學活動，使學生更容易理解課程內容，並利用電腦及軟體的特性輔助教學，把黑板難以展現的內容，用電腦模擬。舉例來說，關於圓錐截痕，基本的證明對普通學生來說已經有些難度，利用數學輔助軟體（Cabri 3D）能把在黑板上難以畫出的立體感，立即而簡單的呈現；用軟體的動態效果，加深學生印象，得到很好的學習效果，讓學生更容易理解。

本研究主要針對教學設計加以探討，運用資訊科技的輔助軟體做科學素材的開發，以提升教學效率與教學素材品質，達到事半功倍的效果。另外在教學軟體的輔助下，引導學生做導向式的學習探索，利用網路上的數學資源（老顏的家，數學傳播，北一女中數學網，華江高中數學網）等網站，達到加廣加深的效果。

## 1-4 研究軟體之限制

本研究以教材開發，實務探討為主，但仍有下列限制；

一. 軟體的限制：除了取得方式外，還有軟體的被推廣的程度，在 2-3~2-5 節有簡單描述論文內所使用三種軟體（GSP, GeoGebra, Cabri 3D），在 3-4、4-2、4-3、4-4 中可呈現其限制。

二. 學習成效及教學成效：在本研究中著重動態學習環境的建立，提供觀察、實驗、操作、猜想、測試的教學範例，希望未來的研究者能對其在教學上的成效加以探討。

三. 視覺化限制：使用數學輔助軟體時，有些角度被限制在 0 度到 90 度之間，在呈現上會容易讓學生搞混，教師在教學上應說明清楚。

四. 計算的精準度：因為使用的軟體所測量出來的值都是近似值，對於計算的精準度無法掌握，尤其是在連續跳躍的極限值，會讓學生無法理解。在本論文第三章中所用 Cabri 3D 做出圓錐截痕的圖 3-4-4 中，畫面上顯示角度一樣，但實際上卻不同，使用上需要注意，也應在教學上說明。

## 1-5 論文結構

本論文除第一章緒論、第二章文獻探討之外，分三個章節概述如下。

第三章為針對高中教材中圓錐截痕做主題式研究，從歷史發展由來開始講起，再至圓錐曲線分類，證明，經由學生熟悉的物品（加油棒）來製作教具，利用 Cabri 3D 數學輔助軟體，模擬動態立體幾何，讓學生可以從不同角度來觀察，抿除過去只能看黑板留下的 2D 圖形想像，讓立體觀念不再抽象，培養學生對於立體空間的概念。

第四章是以三種數學輔助軟體（GSP, GeoGebra, Cabri 3D）在高中數學幾何方面的相互應用。本章把平面幾何，空間幾何同時用三套軟體呈現，進而發現其互相彌補彼此疏漏的部分，並以近幾年的各級考試的數學問題，做同樣的探索，希望藉此範例，引起學生的興趣，並從中觀察、思考，進而培養解決問題的能力。

# 第二章　　　文獻探討

本章有五節　2-1 資訊科技融入教學　　2-2 資訊科技與網路的學習環境
2-3 相關軟體簡介　2-4 數學輔助軟體比較　2-5 數學輔助軟體繪圖能力表

## 2-1 資訊科技融入教學

二十世紀最大的改變就是資訊科技以及網路的蓬勃發展，隨著科技的進步，教學工具（個人筆記型電腦、單槍投影機）逐步普及，部分都會學校教師更是人手一台筆記型電腦，每間教室有桌上型電腦、單槍投影機、都能快速連接上校園網路。在這條件下，傳統的教學方式開始受到衝擊。（邱建偉，2005）於是，越來越多教師用教學輔助軟體融入教學，一味的採用電腦軟體對高中數學課程而言，似乎又有失其完備性。因此，如何巧妙的利用資訊科技融入教學是一大課題。

Roblyer 和Edwards（2000）認為有以下原因可解釋為何要將資訊科技融入學科：

1.資訊科技可增加學生學習動機。
2.資訊科技具備特殊的教學潛力。
3.資訊科技可支援不同的教學型態。
4.資訊科技可增加教師的工作績效。
5.資訊科技可培養學生資訊時代所需的技能。

目前「資訊科技融入教學」不但是國內教學的新型態，也是世界各先進國家教學的趨勢，但是教師要如何將科技融入課程、教材、教學及學習之中，才能使電腦成為教學環境中不可缺少的工具（邱貴發，1990）而且由於資訊科技日漸普及且軟體操作介面親和，目前輔助教學的實施大多利用電腦科技來完成。尤其在數學的教學上，經常利用PowerPoint、GSP、Cabri-II、Cabri-3D、Maple、Excel、Flash…軟體進行輔助教學。（李進福，2006）因此使用數學軟體輔助數學教學，已經不再是困難重重的了。

## 2-2 資訊科技與網路的學習環境

Jonassen 等學者（2000 年）曾在所著的書中，說明學習資訊科技發展的三階段，分別是從『電腦學（Learning from Computer）』、『學電腦（Learning about Computer）』、『與用電腦學（Learning with Computer）』，尤其對於現在所謂

新新人類的學生，傳統的方式已不能抓住他們的注意力，就像曾志朗（1997 年）在建構與教學，網路上的科學教育所言：「如果把網路學習課程的設計，能像電動遊戲一般，把電腦所能提供的資訊教學化，令學生普遍的著迷，樂於探索與學習。」那我想數學教育一定會成功，或退而求其次，若可以把課程經由教師利用教學輔助軟體設計，使學生經由啟發性的引導而豁然開朗，進行有意義的學習或探索，學會解決問題的能力。

在資訊融合傳統教學的理想下，我們和學生一樣走進科幻的旅程，藉此盡情發揮教育的熱忱，希望我們是能擔任培育明日人才的推手，替學生裝上網路科技的望遠鏡，看到更遼闊的世界，提升國家的競爭力，是我們對網路學習的憧憬。

## 2-3 相關軟體簡介

1. GSP（The Geometer's Sketchpad）：

是一個尺規作圖功能強大的平面幾何構圖電腦輔助教學軟體，可精確地構造動態幾何。學生經由動態幾何圖形的變換及度量來描述他們所發現的一些幾何關係，增強開放式的猜測與研究，適合處理一些動態幾何圖形的模擬實驗與觀察。可對結構性作圖作巨集建構、文字說明，形成簡易操作鈕，提供使用者一個最佳化幾何學習環境。

2. Cabri-3D:

這個軟體是一套動態立體幾何軟體，延續尺規作圖的方式，讓使用者透過視覺及滑鼠完成立體幾何圖形，點選工具列可以構作並操作一些立體幾何物件；從功能表中可以對所構作的立體幾何圖形作屬性及視角的改變，並且可以同時開 啟多個觀看視窗以及各種角度的透視圖像，還可以拖曳滑鼠右鍵，調整立體視角的角度。透過這個 Cabri-3D 立體幾何軟體的輔助與視覺呈現的優勢，相信在立體幾何課程的資訊融入教學設計會有令人驚艷的效果。

3. GeoGebra:

GeoGebra 是由 Markus Hohenwarter 所設計的數學繪圖軟體，曾榮獲歐洲多項軟體大獎，一開始是他在 2001 年於奧地利 Salzburg 大學寫有關數學教育博士論文的程式計畫，現在已發展成多國語言（30 多種），跨平台（Window、Mac、Linux）的數學繪圖軟體，並有美國科學基金會的資助，繪圖功能持續加強中。

GeoGebra 這軟體的名稱拆開來是 Geo+Gebra，顧名思義是結合了幾何

（Geometry）與代數（Algebra）的教育軟體，若在繪圖區畫出圓或直線，代數視窗就會出現對應的方程式，反過來若是輸入代數方程式，繪圖區便出現其圖形，操作的感覺就像是把 GSP 及 Graphmatica 融合在一起，代數算式和圖形，一左一右兩個同時出現，既生瑜又生亮。GeoGebra 把幾何圖形和代數方程式的關係緊密的結合在一起。

## 2-4 數學輔助軟體比較

## GSP：

基本需求及表現：基本上任一台電腦都可執行。

繪圖工具：基本的線及圓。

自訂工具：可自訂。

網頁輸出：轉換為 JavaSketchPad，但對於某些繪圖指令不支援。

文字工具：可在圖形上加入文字。

參考資料：國中幾何動動動（聯經出版社）。

參考網站：老顏的家、陳創義、官長壽等有豐富範例檔案及教學，GSP 官方網站。

如何取得：校園版 50000 元、個人版 6000 元、學生版 1600 元。

## GeoGebra:

基本需求及表現：較舊的電腦機型會有：起動稍慢，按 Ctrl-Z 會停頓一下才復原到前一動作，其餘一般運作良好若硬體為 Pentium IV 512MB memory 以上配備，則沒有上述問題。

繪圖工具：較多的繪圖工具，如：半圓、切線、極限、中垂線、角平分線，過 5 點的圓錐曲線等。

自訂工具：可自訂。

網頁輸出：GeoGebra 是以 Java 語言設計的，100％可轉換為網頁。

文字工具：可在圖形上加入文字（支援 Latex 語法，可顯示$\sqrt{2}$、$\frac{1}{3}$、根號,分數）。

參考網站：陳創義、錦和高中數學教學網等有豐富範例檔案及教學、GeoGebra 官方網站、GeoGebra Forum：討論區（英、法等多種語言）。

如何取得：免費，自行至網站下載安裝。

## Cabri：

基本需求及表現：電腦的配備要高一些，因為使用中所佔記憶體較大，至於舊一些的電腦會跑慢一些。

繪圖工具：空間的工具多很多，如：球，圓錐體，正立方體，還有向量等功能。

自訂工具：不可。

網頁輸出：100％可轉換為網頁。

文字工具：可在圖形上加入文字。

參考資料：中文書：Cabri 3D 使用手冊（大陸學者翻譯）。

參考網站：北一女高中數學科網站、華江高中數學科網站、Cabri 3D 官方網站

如何取得：校園版 35000 元、個人版 5500 元。

## 2-5 數學輔助軟體繪圖能力表

| 軟體種類 | 高中數學程度圖例 |
|---|---|
| GSP | 1.函數圖，動點軌跡圖。<br>2.能用動點軌跡來畫拋物線、橢圓、雙曲線。<br>3.空間圖形可利用 3d 坐標架模擬描繪。 |
| GeoGebra | 1.函數圖，動點軌跡圖。<br>2.可輸入代數方程式把拋物線、橢圓、雙曲線等的圖形畫出來（類似 Graphmatica）。<br>3.有指令可直接畫出積分的上下和的連續矩形。 |
| Cabri 3D | 1.動點軌跡圖。<br>2.能用動點軌跡來畫拋物線、橢圓、雙曲線。<br>3.空間的圖形，舉凡多面體，或者圓錐，圓柱，都可表現。<br>4.平面的圖形，可直接畫，到時取視角即可像 2D 一樣。 |

表 2-5-1 軟體繪圖能力表

# 第三章　　圓錐曲線

本章有四節　3-1 前言　3-2 圓錐曲線由來　3-3 圓錐曲線分類
3-4 在 Cabri-3D 軟體下之動態模擬　3-5 製作之流程

## 3-1　前言

圓錐曲線，即指橢圓、雙曲線與拋物線，這三種曲線都是圓錐截痕，亦即給定一個圓錐體，用一個平面去切割圓錐，可切出上述三種曲線痕跡。

95課綱中，圓錐曲線是用焦點或準線去定義的，要如何說明圓錐截痕的性質，除了直接觀察外，最常見的方式就是使用模型教具來輔助，如圖3-1.1~圖3-1.3，但在實際教學現場，使用模型時的教學效果非常有限，一方面是教師手上拿著模型時，多數學生很難近距離仔細觀察模型，也無法跟上教師的解說，對座位在離黑板遠一些的同學幾乎沒有效果；又如果將模型教具讓同學傳閱，既無法同時兼顧同學觀察時有教師的解說，也浪費寶貴的課堂時間，除非每種模型都大量製作滿足學生人手一個，但基於成本考量，這又是不太可能的事，畢竟關於圓錐截痕的教具往往都價格不斐，有些學校甚至沒有，或者已經壞掉無法使用。

圖3-1-1

圖3-1-2

圖3-1-3

教學過程中，每回上到圓錐截痕這單元時，總是寫了很多證明，在黑板上畫了很多圖，不僅是講課的人覺得辛苦，學生也吸收的非常有限。偶然在一次去看棒球的時候發現了加油棒跟圓錐截痕的關係，於是我把兩支加油棒握把部分黏在一起，中間放入電燈泡，利用光的性質在牆壁上投出圓錐的影子，用學生會有興趣的東西做出簡單的教具，如圖 3-1.4 ～圖 3-1.7 讓學生可以看的到，感受的到，再引導他們證明，確定其投影出來的圖形真的是圓錐曲線，比起拿上述那些傳統教具來輔助，效果更為明顯。

圖 3-1-4

圖 3-1-5

圖 3-1-6

圖 3-1-7

由於本研究者任教的學校屬於高級職業學校暨綜合高中，所以有機械科的學生利用上面的原理，在實習課的時間自己動手做出類似的教具，如下圖 3-1-8～圖 3-1-9，結果做出了令大家驚豔的作品，也讓學生對此單元更有興趣。

圖 3-1-8

圖 3-1-9

高中數學中，利用二次函數可以描述在地面斜角向上或水平拋物的軌跡，這個的圖形我們稱為拋物線。以拋物線的頂點為中心，將拋物線繞對稱軸旋轉一周，可繞出一個曲面，稱為拋物面，在利用其光學性質，可做『探照燈』及『天文望遠鏡』。再將二次函數加以延伸，考慮一般化的二於二次方程式，可描述更多的曲線，如橢圓、雙曲線、這些曲線讓我們可描繪出大自然中，天體運動的軌跡及其他相關的現象，這些曲線的形狀可由一個圓錐面和一個平面的截痕而得，稱為圓錐曲線，下面就先對圓錐曲線發展史做一個說明。

## 3-2 圓錐曲線由來

圓錐曲線的研究，早在古希臘時代就有人為了『倍立方問題』引出了圓錐曲線的概念。到了西元前四百年左右，梅納克門斯以幾何方法來探討『倍立方問題』，他利用頂角分別為直角、銳角、鈍角等三種曲線（註：雙曲線只有一支)。梅納克門斯為了將拋物線的概念與『倍立方問題』結合在一起，曾推得一個拋物線的關係，以現代解析幾何的表達，就是 $y^2 = cx$ 的形式，其中c是與頂點到截平面的距離有關的常數。同樣的，對橢圓與雙曲線也做了深入的研討。

梅納克門斯之後，希臘數學家持續地做系統性的研究，其中歐基里德（Euclid，約 330~275B.C.)，阿基米德（Archimedes,287~212B.C.)，阿波羅尼斯等人都有很多的著作。阿基米德曾利用『窮盡法』計算出拋物線與直線圍成的弧形面積，並求得橢圓的面積，而阿波羅尼斯更完成了八卷關於圓錐曲線研究的著作。圓錐曲線的純幾何式研究，到阿波羅尼斯時代，可說到達顛峰狀態。

在阿波羅尼斯的著作中，他利用一個圓錐面與不同斜度的截平面截出了橢

圓、拋物線與雙曲線，而且也確定了雙曲線是兩支曲線的概念，三種曲線的命名是由他最早提出的。在八卷著作中，阿波羅尼斯對切線與平行弦的中點軌跡都有詳細的介紹，他也得到橢圓和雙曲線的焦半徑性質，那就是：「橢圓上任一點到兩焦點的距離和為一定值」以及「雙曲線上任一點到兩焦點的距離差的絕對值是一定值」。

阿波羅尼斯更探索了橢圓與雙曲線的光學性質，但對於圓錐曲線的焦點、準線與離心率的研究，卻在阿波羅尼斯之後約西元三世紀左右，由幾何學家帕布斯（Pappus）所提出來的。圓錐曲線的綜合幾何法研究，到此時已經相當完備了。直到十六、十七世紀後，由於解析幾何的引入，以及實際問題的需要，圓錐曲線的研究，在燃起新的熱潮，利用軌跡的概念，重新探討圓錐曲線與錐線的性質。

## 3-3 圓錐曲線分類

### 3-3-1 圓錐面

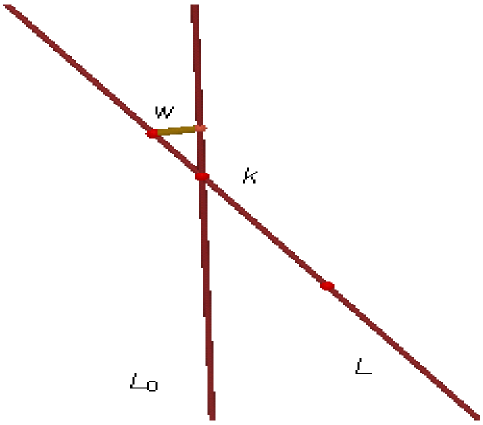



圖 3-3-1

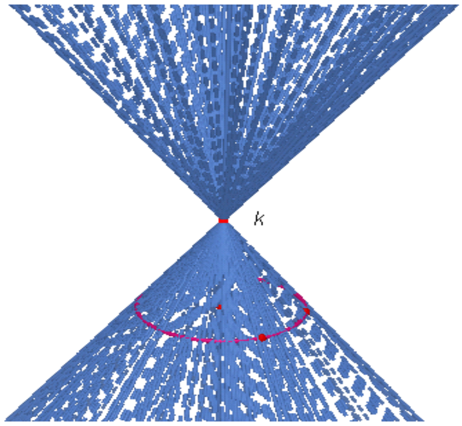



圖 3-3-2

如上面圖 3-3-1，設 $L_0$ 與 $L$ 是空間上相交的兩直線，$k$ 為交點，$w$ 為夾角，則以 $L_0$ 為旋轉軸，把它做空間上的一個迴轉，如上圖 3-3-2。

我們也可以這樣想像：$L_0$ 與 $L$ 是播焊接著的兩個長金屬棒，$k$ 是焊接點，$w$ 角度固定，兩金屬棒無法單獨動搖。這時用兩隻手只捏住 $L_0$ 在輕輕轉動。結果，直線 $L$ 會掃出一個圓錐面。

$k$ 稱為此圓錐面的頂點。

$w$ 稱為此圓錐面的頂角。

$L_0$ 稱為此圓錐面的中心軸。

$L$ 在每一瞬間的位置，都稱為此圓錐面的母線。

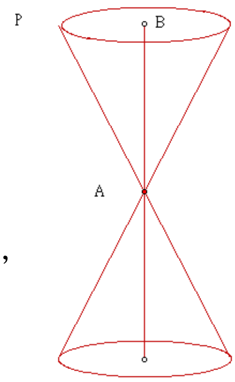



圖 3-3-3

所以，如右圖 3-3-3，把 $\overline{BP}$ 連起來，$\triangle ABP$ 為直角三角形，

又 P 點為任意可動點，因此可以證明上述利用加油棒所做的教具，透過燈光，利用光的直進性質來說明，投影出來的是一個圓錐體

### 3-3-2　圓錐截痕種類

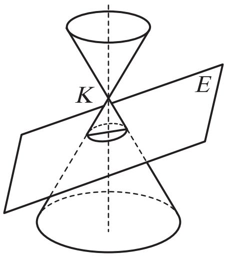
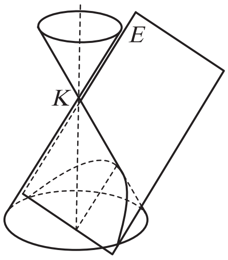
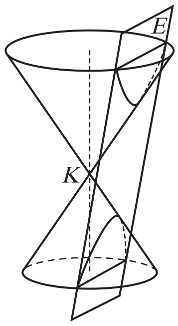
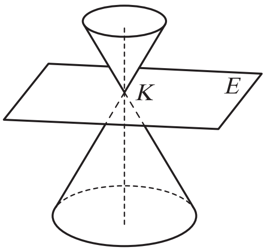
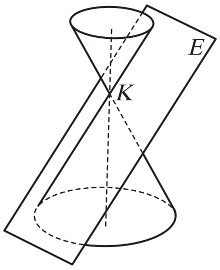
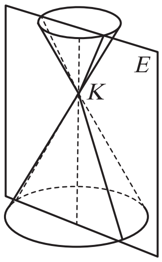
| | | |
|---|---|---|
|  |  |  |
| **(1)橢圓(圓)** | **(2)拋物線** | **(3)雙曲線** |
|  |  |  |
| **(4)一點** | **(5)一直線** | **(6)二相交直線** |

表 3-3-1 圓錐截痕種類

基本上，平面和圓錐面的截痕，都叫做圓錐曲線，可利用平面法向量與中心軸之間的夾角$\theta$來區分，分成三類

(i)　當$0^\circ \le \theta < \frac{\pi}{2} - w$時，截痕為封閉的曲線，我們稱為橢圓。（$\theta = 0^\circ$，截痕為圓）

(ii)　當$\theta = \frac{\pi}{2} - w$時，截痕是一單葉的開口曲線，我們稱為拋物線。

(iii)　當$\frac{\pi}{2} - w < \theta \le \frac{\pi}{2}$時，截痕是雙葉的開口曲線，我們稱為雙曲線。

（說明一）若$\theta = \frac{\pi}{2}$，指平面和圓錐面的中心軸平行的情形

（說明二）我們把$\theta$定義在$0^\circ \le \theta \le \frac{\pi}{2}$這個範圍。超過的話，若平面持續逆時鐘旋轉上去，那截痕就先由雙曲線，再來是拋物線，再來是橢圓。

（說明三）如果平面通過圓錐頂點，那截痕就不是上述三類，而是一點，一直線或者兩相交直線，這是屬於特別情形，本論文就不探討。

（i）　$0^\circ \le \theta < \frac{\pi}{2} - w$　　一點　　（ii）　$\theta = \frac{\pi}{2} - w$　　一直線

（iii）　$\frac{\pi}{2} - w < \theta \le \frac{\pi}{2}$　　兩相交直線

針對拋物線，橢圓，雙曲線三種截痕，下面做一些簡單的證明。

### 3-3-3 拋物線的幾何性質

如下圖 3-3-4，考慮一頂角為$\omega$的圓錐面$\Omega$，$E$是不通過$\Omega$頂點的一平面，而且$E$與$\Omega$的一母線平行，這相當於$E$的法向量與$\Omega$的中心軸之間的夾角是$\frac{\pi}{2}-\omega$,這時$\Omega$與$E$的交線$\Gamma$便是一拋物線。

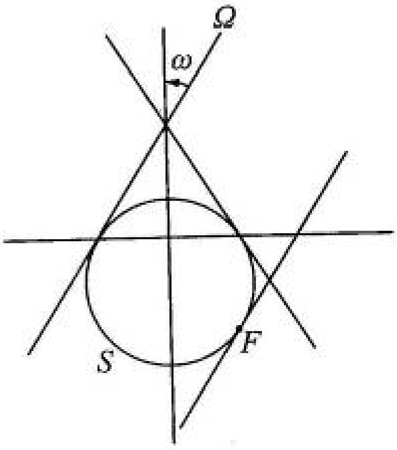



圖 3-3-4

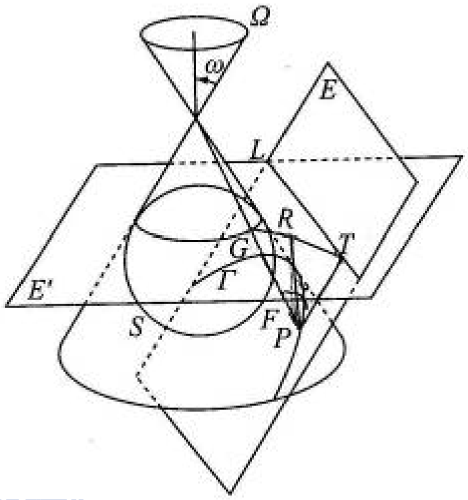



圖 3-3-5

如上圖 3-3-5 設 S 是包含於$\Omega$內，而且與$\Omega$及$E$都相切的球面．則球面$S$與平面$E$的切點$F$即為拋物線的焦點．又設球面 S 與圓錐面$\Omega$相切於一圓$C$，則包含 C 的水平面$E$`且與平面$E$的交線上即為拋物線的準線．證明如下:

（i）自交線$\Gamma$上任一點$P$分別作直線垂直於L與平面$E$`，設垂足分別為$T$與$R$，

則由$\angle TPR=\omega$得出，$\overline{PT}=\dfrac{\overline{PR}}{\cos\omega}$.

（ii）另一方面，連接$P$到$\Omega$頂點的直線交圓$C$於點$G$，

則由$\angle GPR=\omega$，有$\overline{PG}=\dfrac{\overline{PR}}{\cos\omega}$.

（iii）$\overline{PF}$與$\overline{PG}$都是球面$S$外一點$P$到球面$S$的切線段長，而有$\overline{PF}=\overline{PG}$，

因此，得到$\overline{PF}=\overline{PG}=\dfrac{\overline{PR}}{\cos\omega}=\overline{PT}$.

所以可以證明出$\Gamma$上任一點$P$到定點$F$與定直線$L$等距，故為一拋物線。

### 3-3-4 橢圓的幾何性質

如下圖3-3-6，設$E$為不通過$\Omega$頂點的一平面，且其法向量與$\Omega$的中心軸之間的夾角小於$\frac{\pi}{2}-\omega$,這時$\Omega$與$E$的交線$\Gamma$是一橢圓﹒在錐面內$E$的兩側各有一球面同時與平面$E$及錐面相切，這兩球面與平面$E$的切點$F$與$F`$便是橢圓的焦點﹒又兩球面與錐面相切於兩圓$C_1$與$C_2$，這兩圓分別落在兩水平面上﹒

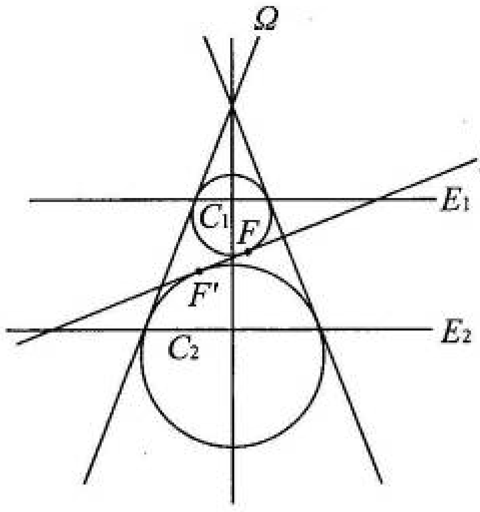



圖3-3-6

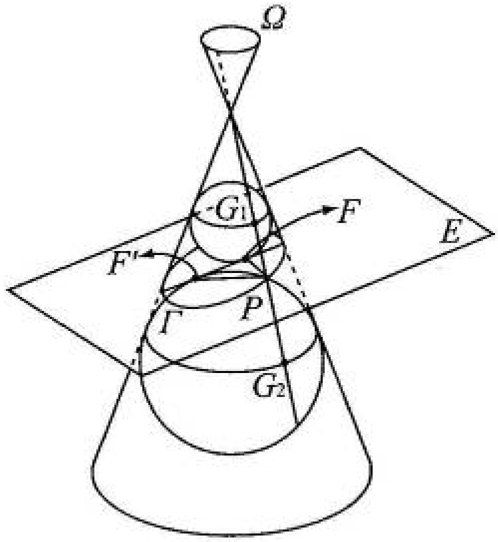



圖3-3-7

如上圖3-3-7，自$\Gamma$上任一點$P$，作$P$與錐面$\Omega$頂點的連線，分別交圓$C_1$與圓$C_2$於$G_1$與$G_2$，則有$\overline{PF}=\overline{PG_1}$且$\overline{PF`}=\overline{PG_2}$，得到$\overline{PF}+\overline{PF`}=\overline{PG_1}+\overline{PG_2}=\overline{G_1G_2}=$定長。所以可以證明出$\Gamma$上任一點$P$到$F$與$F`$兩定點的距離和是定數，故$\Gamma$為一橢圓。

## 3-3-5 雙曲線的幾何性質

如下圖3-3-8，設$E$為不通過$\Omega$頂點的一平面，且其法向量與$\Omega$的中心軸之間的夾角大於$\frac{\pi}{2}-\omega$但小於$90^{\circ}$,這時$\Omega$與$E$的交線$\Gamma$是一雙曲線．在錐面內的兩側各有一球面同時與平面$E$及錐面相切，這兩球面與平面$E$的切點$F$與$F`$便是雙曲線的焦點．又兩球面與錐面相切於兩圓$C_1$與$C_2$，這兩圓分別落在兩水平面上．

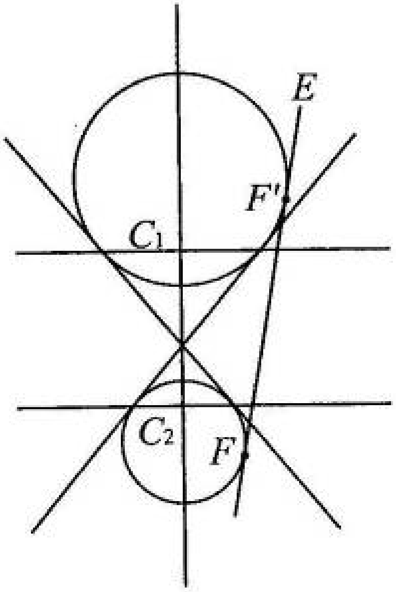



圖3-3-8

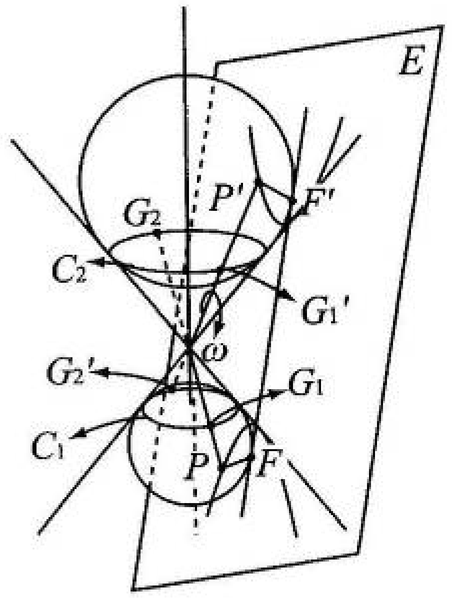



圖3-3-9

如上圖3-3-9，自$\Gamma$上任一點$P$，作$P$與錐面$\Omega$頂點的連線，分別交圓$C_1$與圓$C_2$於$G_1$與$G_2$，則有$\overline{PF}=\overline{PG_1}$且$\overline{PF`}=\overline{PG_2}$，因而得到$\overline{PF}-\overline{PF`}=\overline{PG_1}-\overline{PG_2}=\overline{G_1G_2}=$定長。再自$\Gamma$另一支上任取一點$P`$，作$P`$與錐面$\Omega$頂點的連線，交圓$C_1$與圓$C_2$於$G_2`$與$G_1`$，則有$\overline{PF`}=\overline{PG_1`}$且$\overline{P`F`}=\overline{PG_2`}$，得到$\overline{P`F}-\overline{P`F`}=\overline{P`G_2`}-\overline{P`G_1`}=\overline{G_1`G_2`}=$定長。所以可以證明出$\Gamma$上任一點$P$到$F$與$F`$兩定點的距離差的絕對值是定數，故$\Gamma$為一雙曲線。

# 3-4 在Cabri-3D軟體下之動態模擬

由前兩節可知道，圓錐曲線截痕這部分，除了有其歷史發展的重要性之外，牽涉的數學也是高中生較容易感到困惑的，市面上也出售了很多教具，但對於傳統用黑板教學，這章節常常把黑板畫了滿滿的圖，寫了很多證明，學生還是一臉困惑樣。

Cabri-3D 這個數學軟體改變了使用傳統黑板上課的窘況，它具備幾個模型教具沒有的優點，可以投影大螢幕讓所有學生同時觀察，動態呈現可以從各個不同角度觀察，也可局部強調重點幾何元件如點、線或面等等。在Cabri-3D 環境下，實作圓錐截痕素材如下圖3-4-1～圖3-4-3：

（1）拋物線

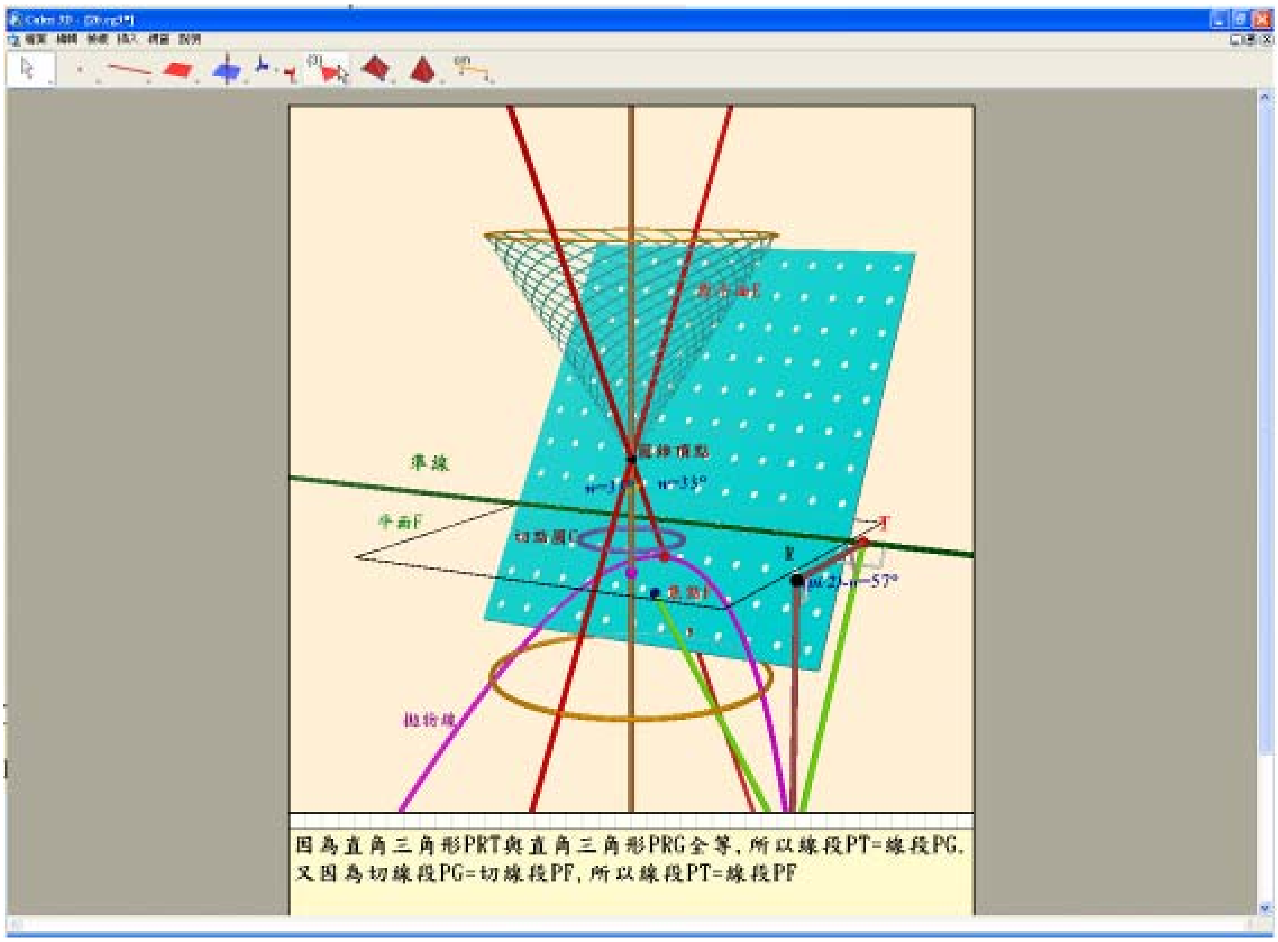



圖3-4-1 以Cabri 3D動態模擬拋物線

（2）橢圓

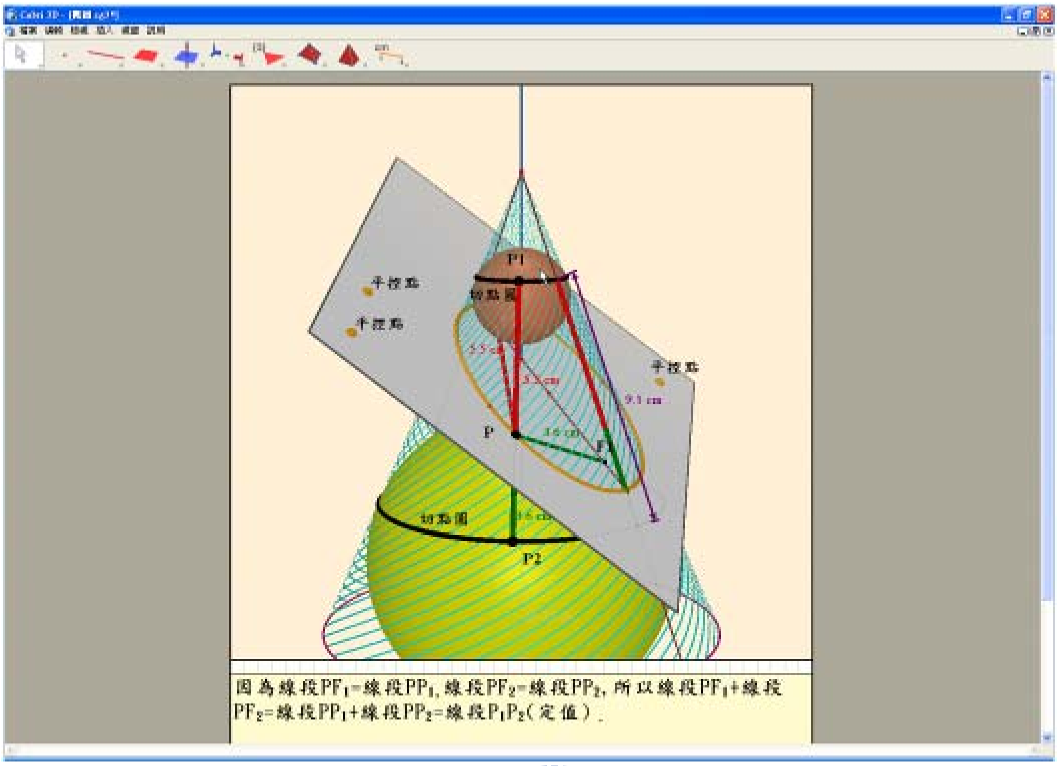



圖3-4-2 以Cabri 3D動態模擬橢圓

（3）雙曲線

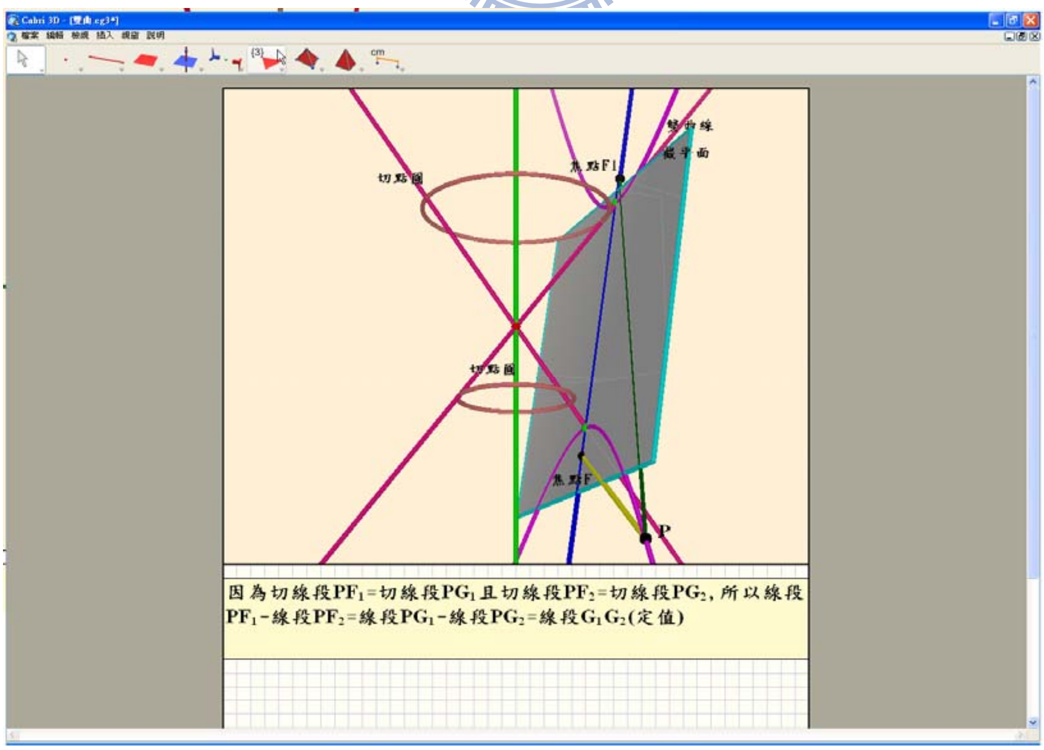



圖3-4-3以Cabri 3D動態模擬雙曲線

也可以用同一個畫面來陳述三個圖形

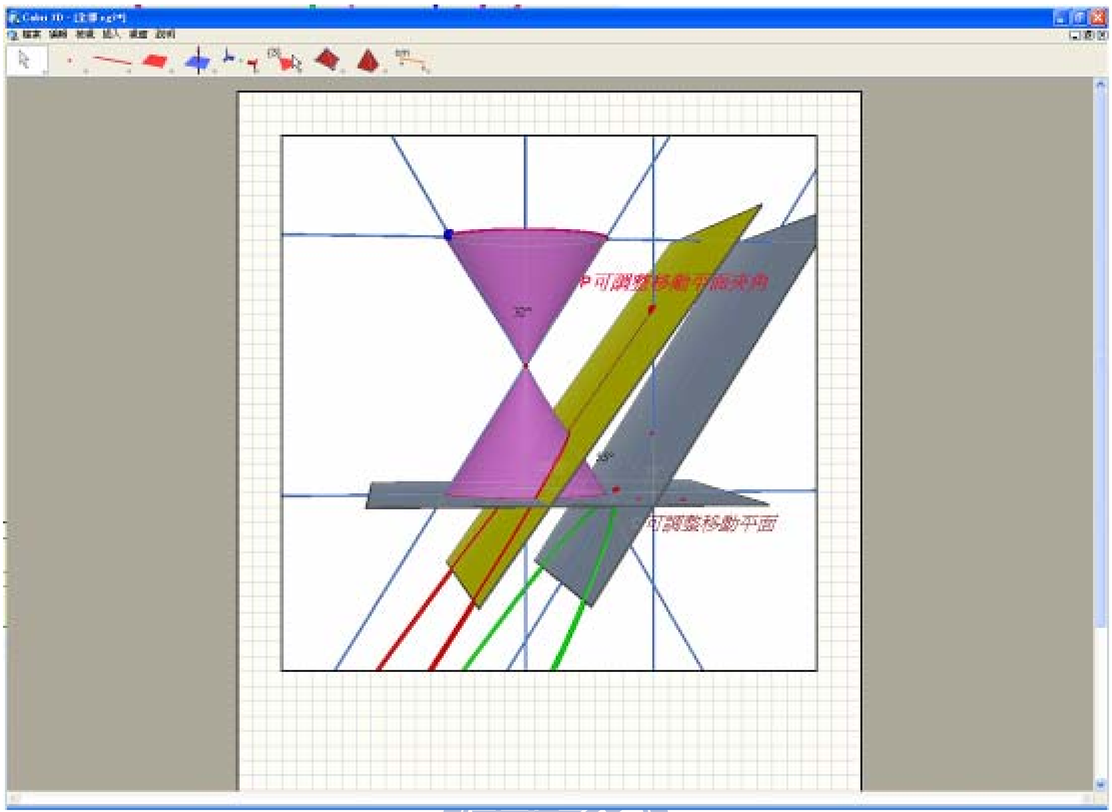



圖3-4-4　以Cabri 3D動態模擬圓錐曲線

圖中有兩個可以動點P,Q，其中P點隨意動可以觀察出雙曲線和橢圓的差別其實是在角度，至於拋物線，比較困難的是要截出拋物線，切面角度必須要和角錐角度互餘才可，由於Cabri 3D在製圖功能上沒有鎖定角度的功能，所量的角度也是近似值，要調整到角度一致，不好手動調整，只能以數學方法利用平行做出相同角度，所以上圖中Q點就是已經調整好角度的平面動點，移動Q點可知道，只要角度一致，都是拋物線。

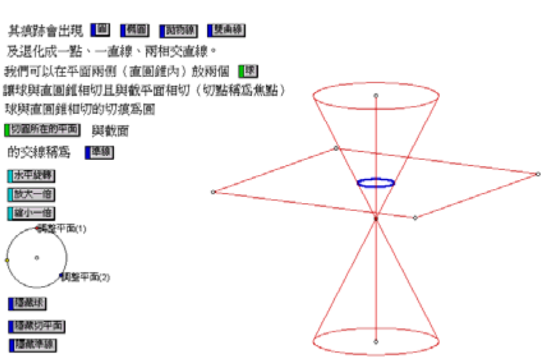



圖3-4-5 GSP做圓

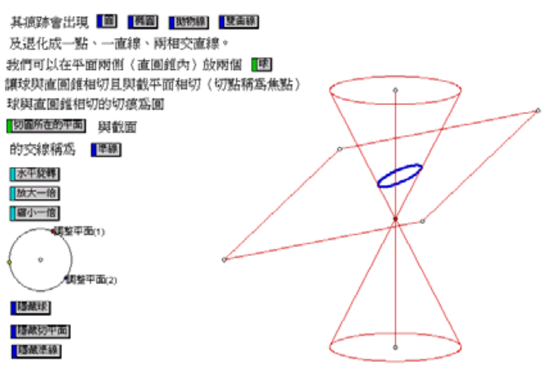



圖3-4-6 GSP做橢圓

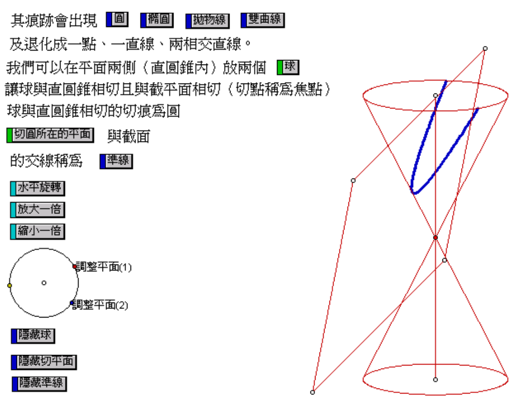



圖3-4-7 GSP做拋物線

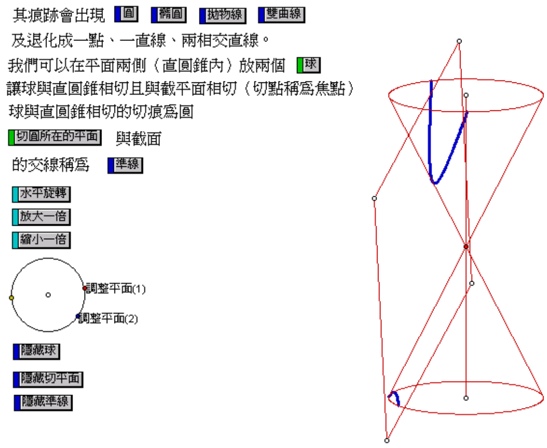



圖3-4-8 GSP做雙曲線

在早期還沒開發立體軟體時，有一些數學先驅利用GSP模擬3D做出圓錐截痕範例，如上面圖3-4-5～圖3-4-8，其實已經做的很好了，但還是跳脫不出〝模擬〞的框框，利用Cabri 3D做，可以做出立體模型，更可旋轉，切換角度觀看，在配合課本或搭配講義上課，改善傳統上課模式，也突破以往的多媒體教學。

## 3-5 製作之流程

利用 Cabri 3D 做出橢圓(如圖 3-4-2)的程序

圓錐截痕 Cabri 3D 作法

一. 步驟（一）部分

製圖順序：

1.垂直軸：先做出平面，任取一點做垂線。

2.大球心、小球心：選兩點，一點當大球心，另一點當小球心。

3.圓錐頂點：在垂上上端取一點當作圓錐頂點。

4.平面動點：平面取一點當作可任意移動的點。

5.隱藏水平面。

6.做大球。

7.以大球心到圓錐頂點為直徑做球(隨後隱藏球)交大球之切痕圓為圓錐底。

8.先不畫圓錐。

9.先畫出內切小球(圓錐底任取一點連接到圓錐頂點)。

10.小球心向此線段做垂線取得半徑。

11.畫小圓和圓錐捷痕，畫圓錐。

得下圖 3-5-1

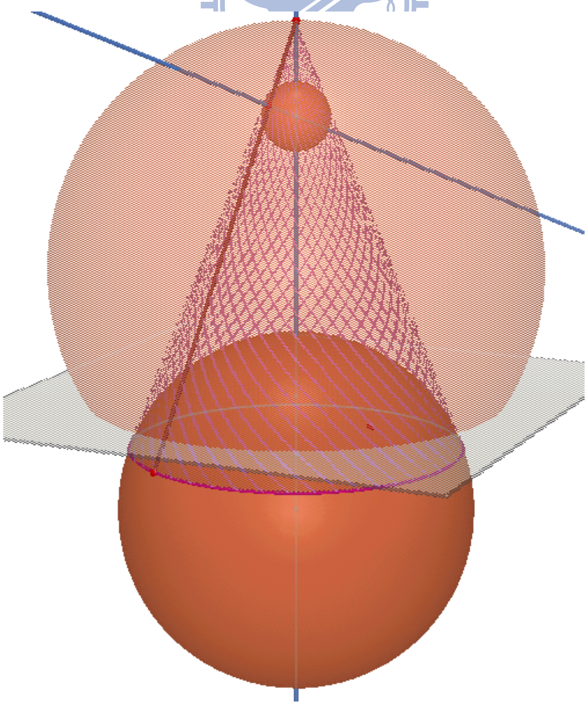


圖 3-5-1　Cabri 3D 製作過程步驟(1)

二. 步驟（二）部分

(1) 做出兩圓(球)的外公切線，製造 R+r 的虛圓

(作外公切線的平行線，可利用對應的功能，做出 R+r 的虛圓)

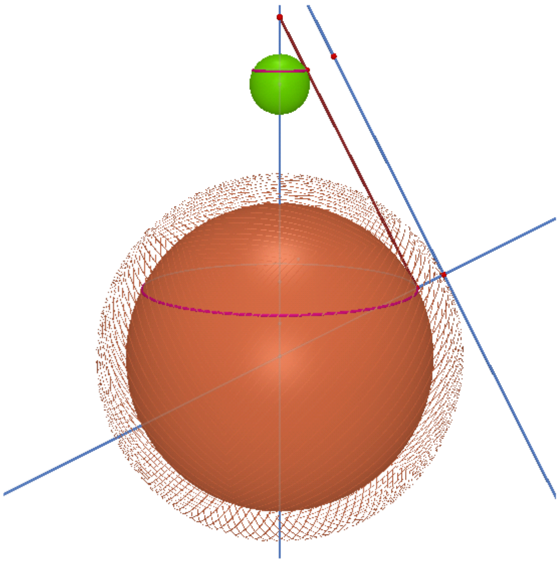


圖 3-5-2 Cabri 3D 製作過程(2)

(2) 找出內公切線：仿照上述做法，可找出內功切線

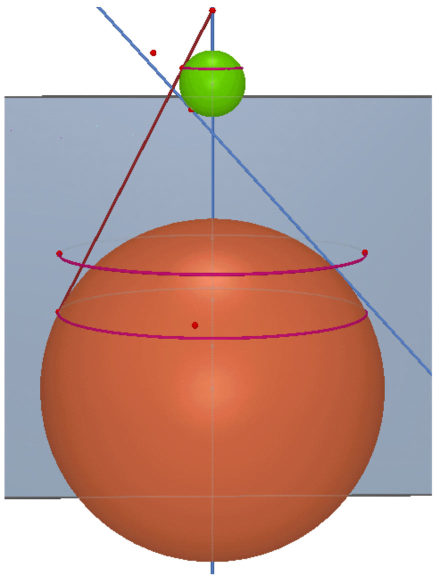


圖 3-5-3 Cabri 3D 製作過程步驟(3)

三. 步驟（三）部分

(1) 利用內公切線，及其垂線，做出兩球內公切平面。

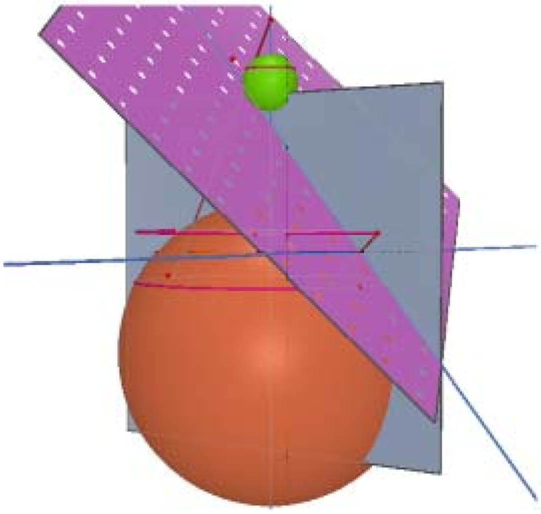


圖 3-5-4 Cabri 3D 製作過程步驟(4)

(2) 兩球內公切平面與圓錐體交集為橢圓。

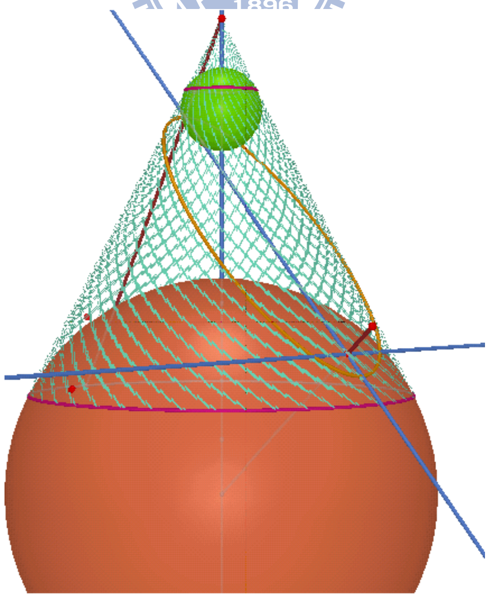


圖 3-5-5 Cabri 3D 製作過程步驟(5)

(3) 內公切平面與兩球體的切點當橢圓兩焦點。

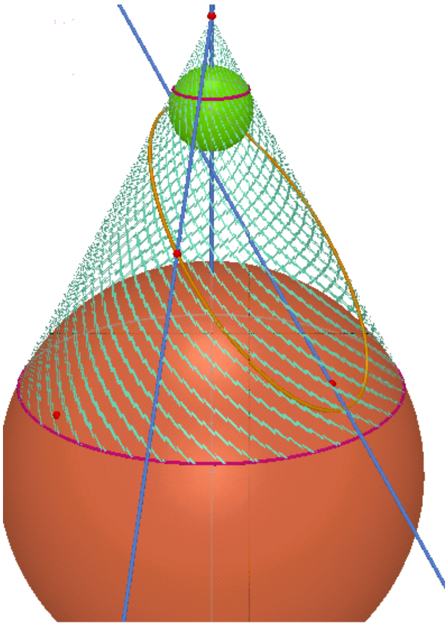


圖 3-5-6 Cabri 3D 製作過程步驟(6)

(4) 橢圓上任取一動點，到兩焦點距離之和為固定值。

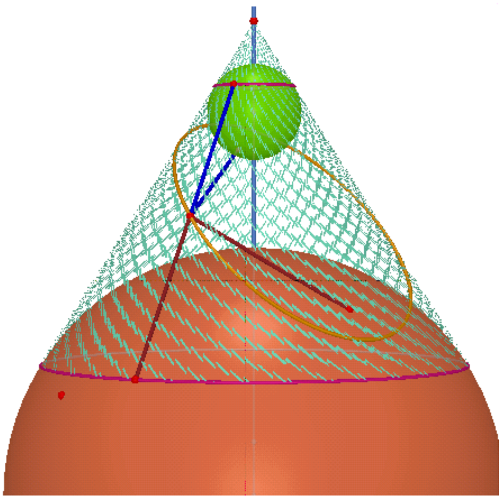


圖 3-5-7 Cabri 3D 製作過程步驟(7)

# 第四章　高中數學教材動態呈現示例



## 4-1 前言

本章主要探討高中數學中幾何的部分，針對高中數學第二冊第二章三角函數來說明，利用現在電腦輔助教學套裝軟體（GSP, Cabri 3D, GeoGebra）交互呈現各版本的題目，搭配課本內容，亦即提供不同的想法給老師及學生，讓上課更有趣，讓數學更親切一些。

由於不同的數學輔助教學套裝軟體（GSP, Cabri 3D, GeoGebra）其主要發揮的功能不同，相同的題型，用不同軟體呈現，可以很快發現其優勢，互相搭配使用，可釐清學生學習上的盲點。

以高中數學第二冊第二章第五（六）節基本三角測量為例，不管是 2D 或 3D 的題目，老師都得在黑板上講解、作圖，2D 的單元，在黑板上可以畫出平面的感覺，但如果是牽涉到 3D 空間，老師會在黑板中模擬 3D 的圖形，或做簡易的模型讓學生瞭解，但 2D 模擬 3D 學生會混亂，做模型只會讓少部分同學受惠而且浪費教學時間，搭配電腦教學輔助套裝軟體來呈現，不僅可完整表現出立體的感覺，更利用軟體特有的功能，讓學生把不懂的觀念釐清；也增加教學時間，激化學生觀察並思考的能力，進而找到解決的步驟與方法。

## 4-2 平面幾何範例

以高中平面幾何教材在不同數學輔助軟體下之動態呈現

範例一

例題 2

阿榮在住家 A 處看見建築物 C 在 A 點北 60°東，另一建築物 D 在其北 15°東．阿榮從住家向北前進 2 公里至學校 B 處，發現建築物 C 在 B 點正東，建築物 D 在其東 60°南，試求：(1) 阿榮住家 A 與建築物 C 的距離．

(2) 阿榮住家 A 與建築物 D 的距離．

(3) 兩建築物 C 與 D 的距離．

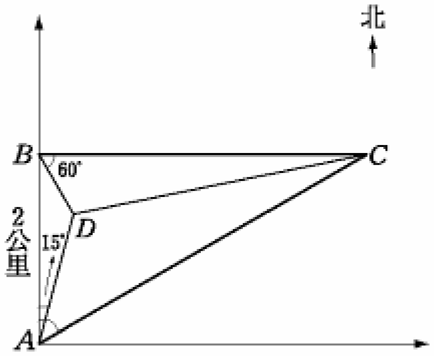



圖 2-51

（南一版 98 年第二冊第二章第六節課本內容）

解：(1) 因 $\overline{AB} \perp \overline{BC}$，故 $\angle ABC = 90^\circ$，在直角三角形 ABC 中，

$$\sin 30^\circ = \frac{2}{\overline{AC}}，故\ \overline{AC} = \frac{2}{\sin 30^\circ} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4（公里）．$$

(2) △ABD 中，$\angle ABD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$，$\angle ADB = 180^\circ - 30^\circ - 15^\circ = 135^\circ$，

$$由正弦定理知\ \frac{\overline{AD}}{\sin 30^\circ} = \frac{2}{\sin 135^\circ}，\quad 故\ \overline{AD} = \frac{2 \times \sin 30^\circ}{\sin 135^\circ} = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}，$$

即阿榮住家 A 與建築物 D 的距離是 $\sqrt{2}$（約 1.414）公里。

(3) △ACD 中，$\angle DAC = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$，

$$由餘弦定理知\ \overline{CD}^2 = (\sqrt{2})^2 + 42 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 4 \cdot \cos 45^\circ = 2 + 16 - 8\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 10，$$

故 $\overline{CD} = \sqrt{10}$，　即兩建築物 C 與 D 的距離是 $\sqrt{10}$（約 3.162）公里

（甲）以 Cabri 3D 呈現

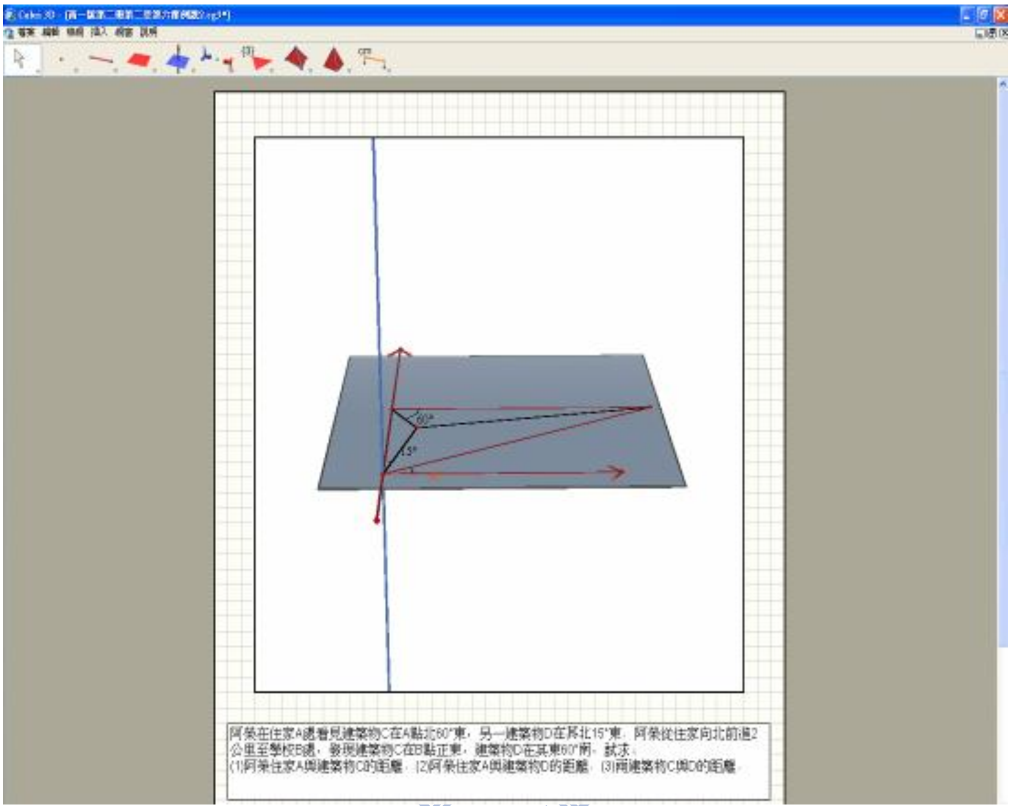



圖 4-2-1　　範例一以 Cabri 3D 動態模擬呈現(1)

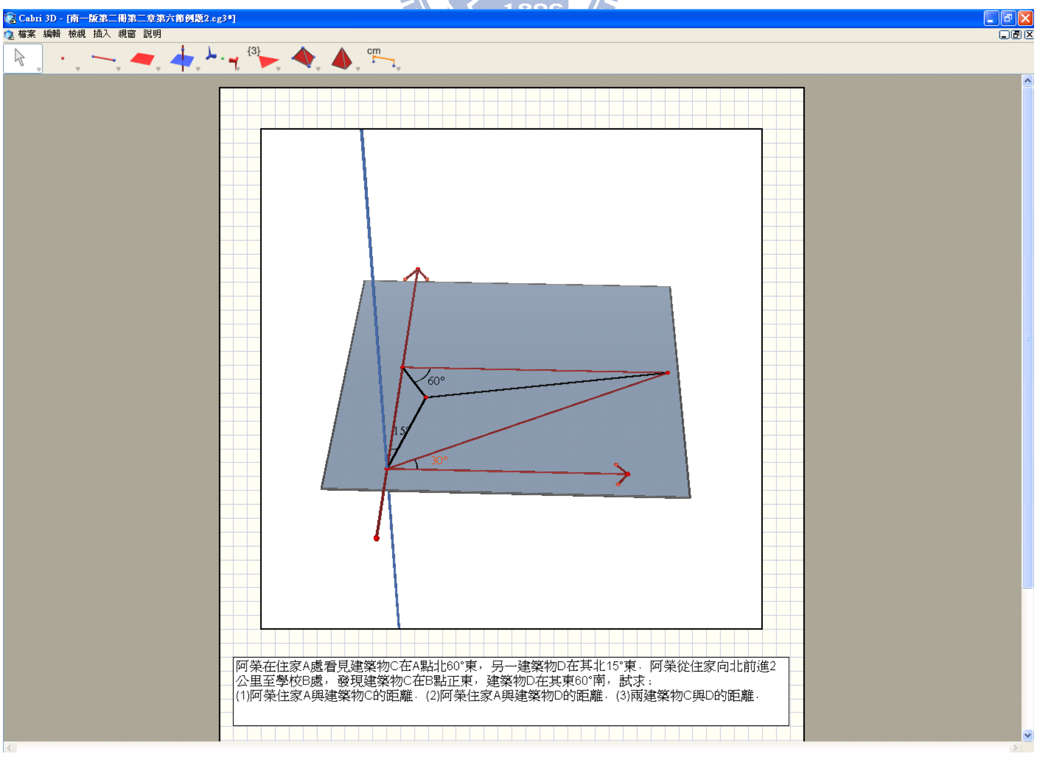



圖 4-2-2　　範例一以 Cabri 3D 動態模擬呈現(2)

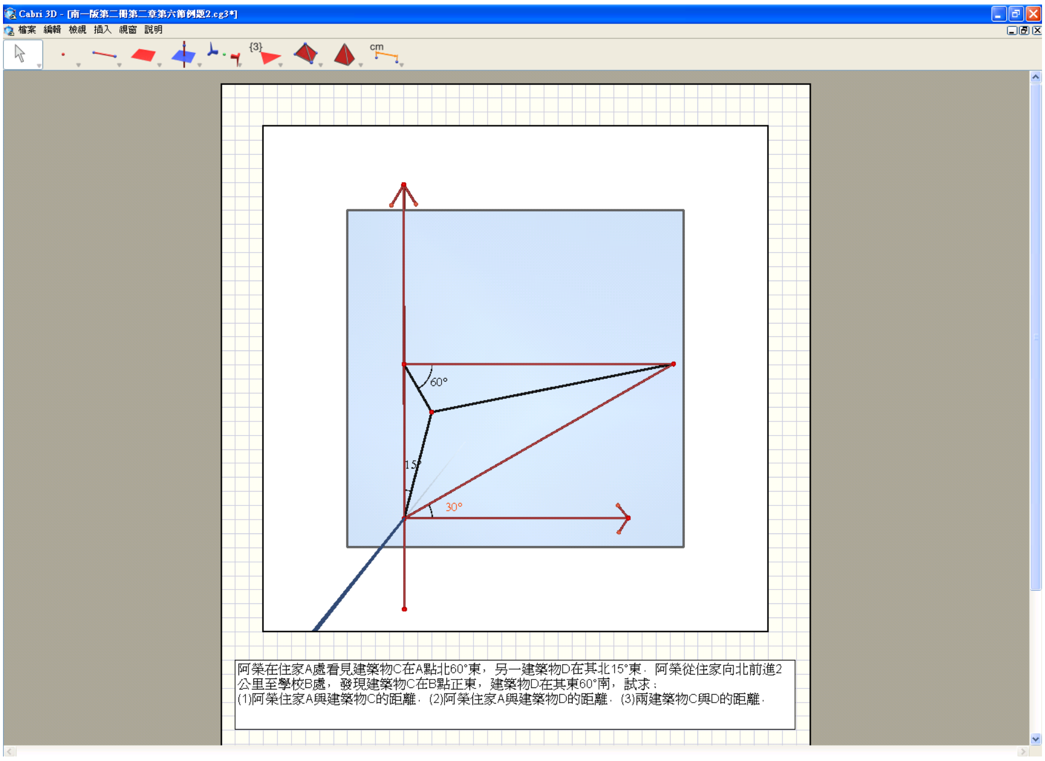



圖 4-2-3　　範例一以 Cabri 3D 動態模擬呈現(3)

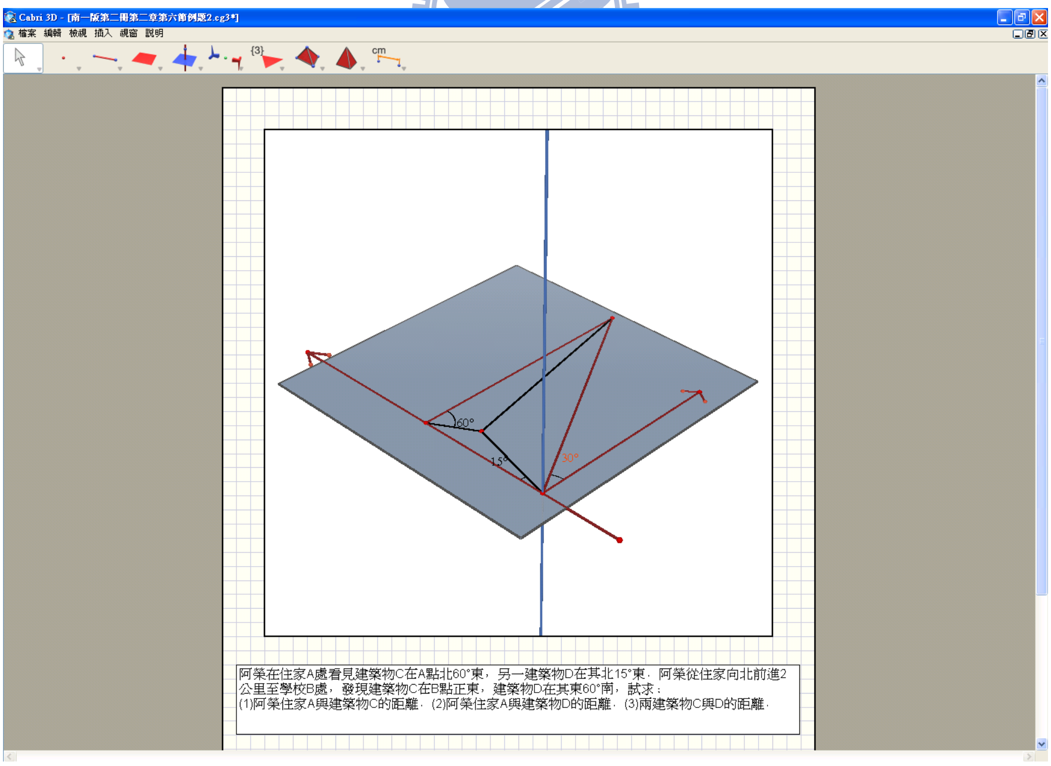



圖 4-2-4　　範例一以 Cabri 3D 動態模擬呈現(4)

（乙）以 GSP 表示

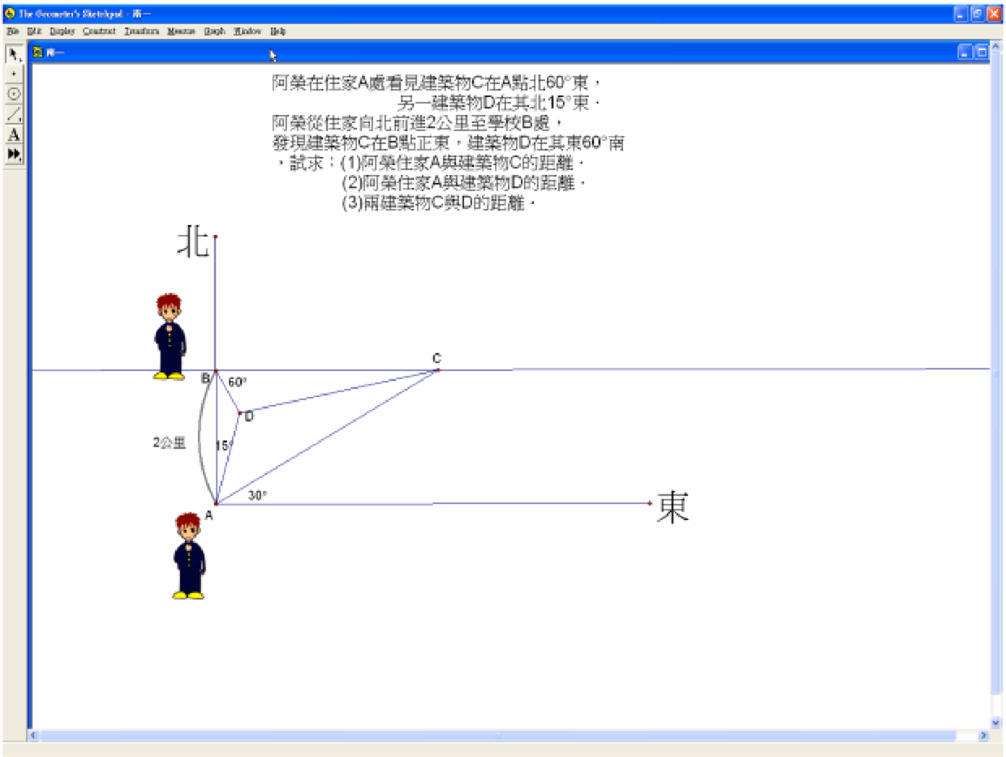



圖 4-2-5　　範例一以 GSP 動態模擬呈現

（丙）以 GeoGebra

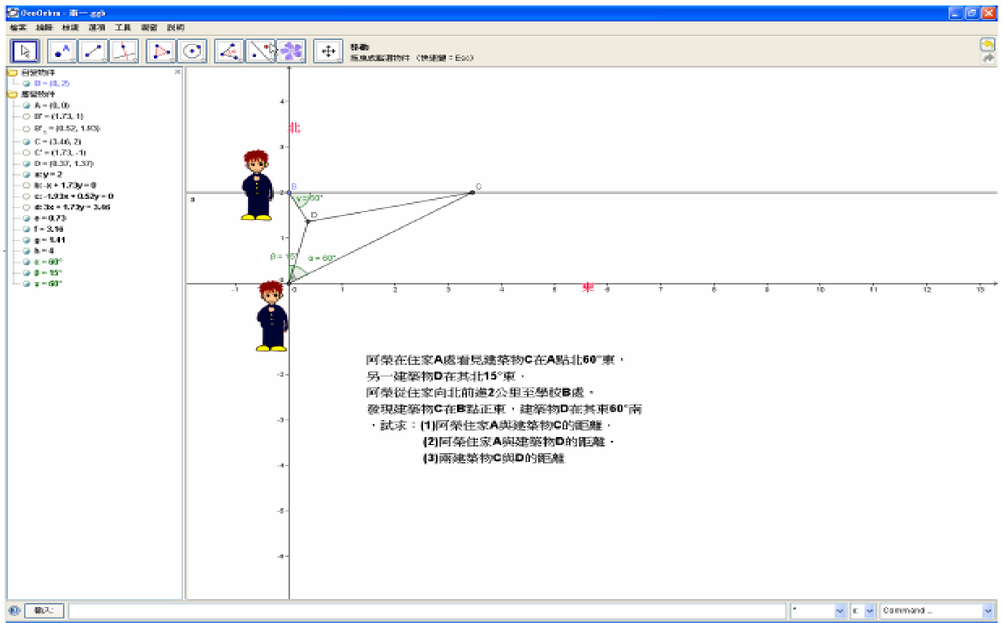
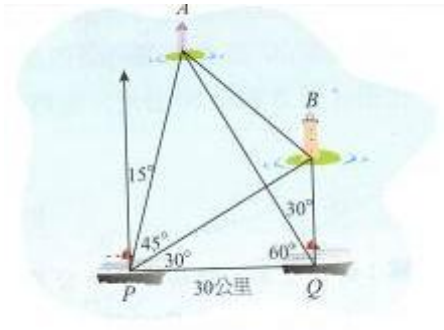



圖 4-2-6　　範例一以 GeoGebra 動態模擬呈現

範例二

有一艘郵輪往正東方向航行，在北$15^{\circ}$東發現燈塔 A，在北$60^{\circ}$東發現燈塔 B，郵輪繼續航行 30 公里後，再測得燈塔 A 在北$30^{\circ}$西，燈塔 B 在正北方，求燈塔 A 與 B 距離？　　　　　　（龍騰版 98 年第二章第六節例題 4 課本內容）




解：如右圖所示：在『在北$15^{\circ}$東發現燈塔 A，在北$60^{\circ}$東發現燈塔 B 知道 』$\angle APB = 30^{\circ}, \angle AQP = 60^{\circ}$，在□$APQ$ 中，利用正弦定理得

$$\frac{\overline{PA}}{\sin 60^{\circ}} = \frac{\overline{PQ}}{\sin 45^{\circ}} \Rightarrow \frac{\overline{PA}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\overline{PQ}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \overline{PA} = \frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

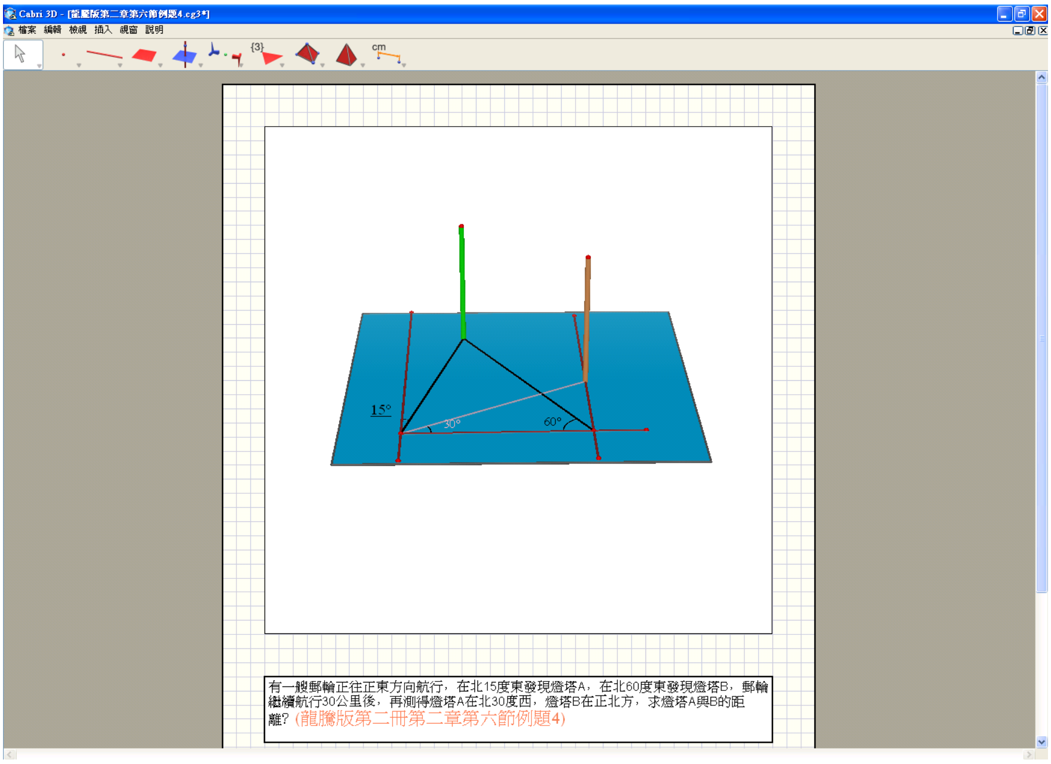
因為是□$BPQ$ 直角三角形，所以 $\overline{PB} = \dfrac{30}{\cos 30^{\circ}} = 20\sqrt{3}$

在□$PAB$ 中，利用餘弦定理 $\overline{AB}^2 = \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 - 2 \cdot \overline{PA} \cdot \overline{PB} \cdot \cos \angle APB$，得

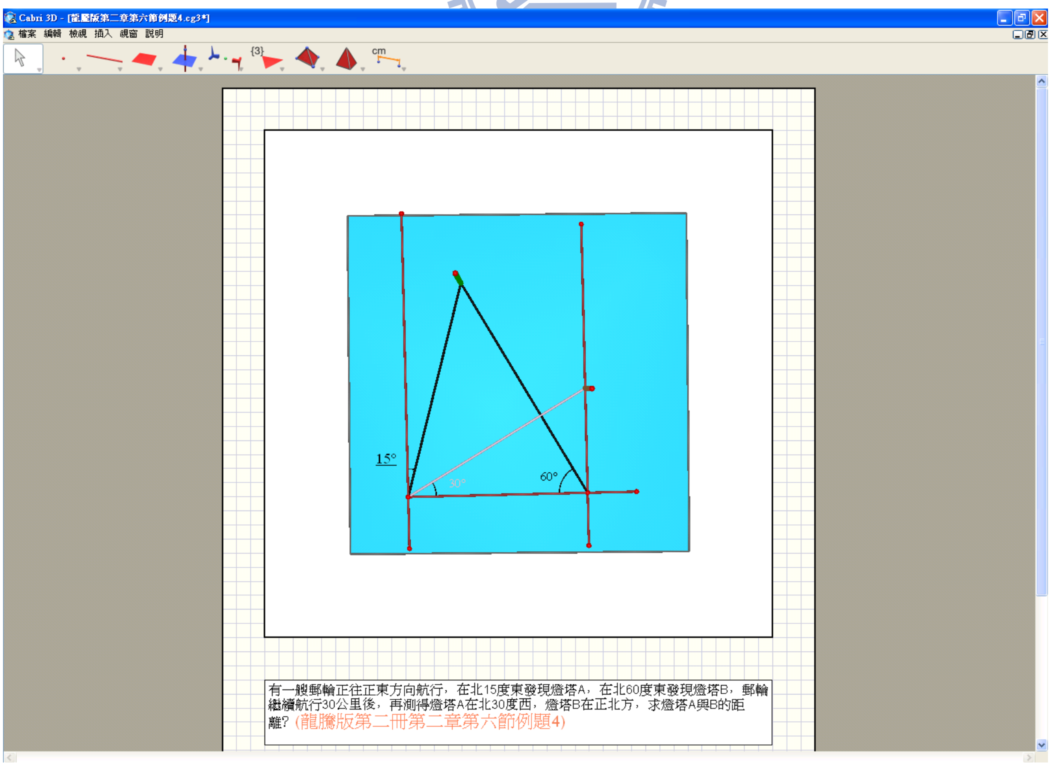
$$\overline{AB}^2 - \left(\frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 + (20\sqrt{3})^2 - 2 \cdot \frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot 20\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 750$$

故燈塔 A 與 B 距離 $\overline{AB} = \sqrt{750} = 5\sqrt{30}$（公里）

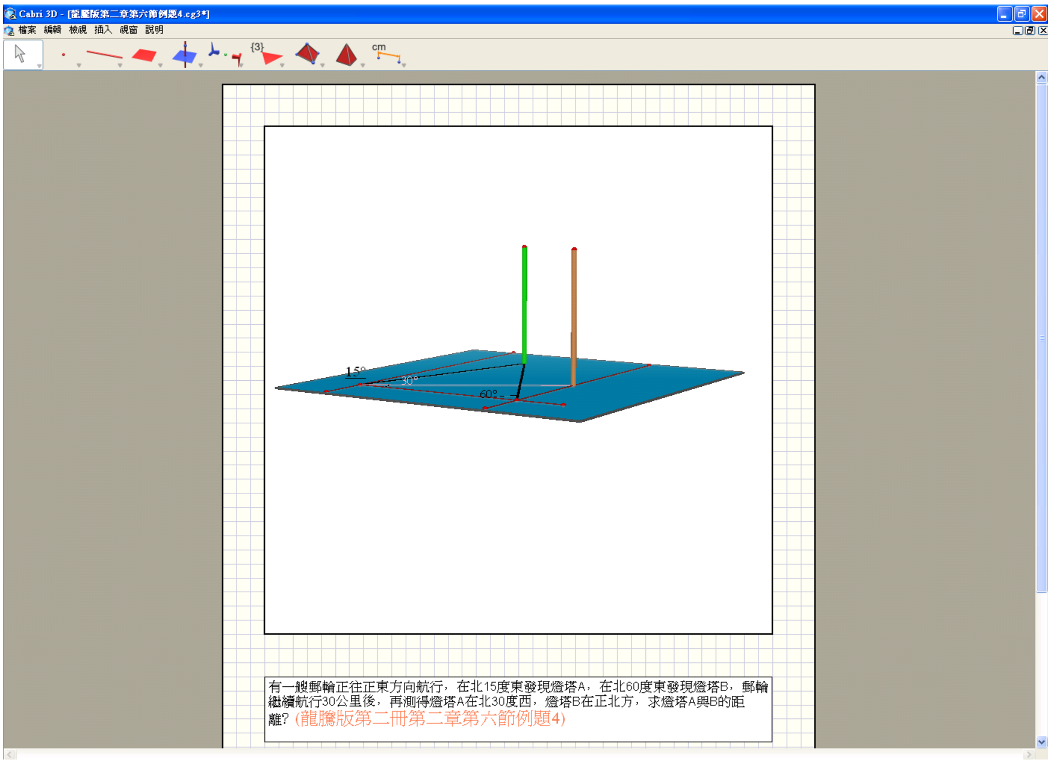
（甲）以 Cabri 3D 呈現



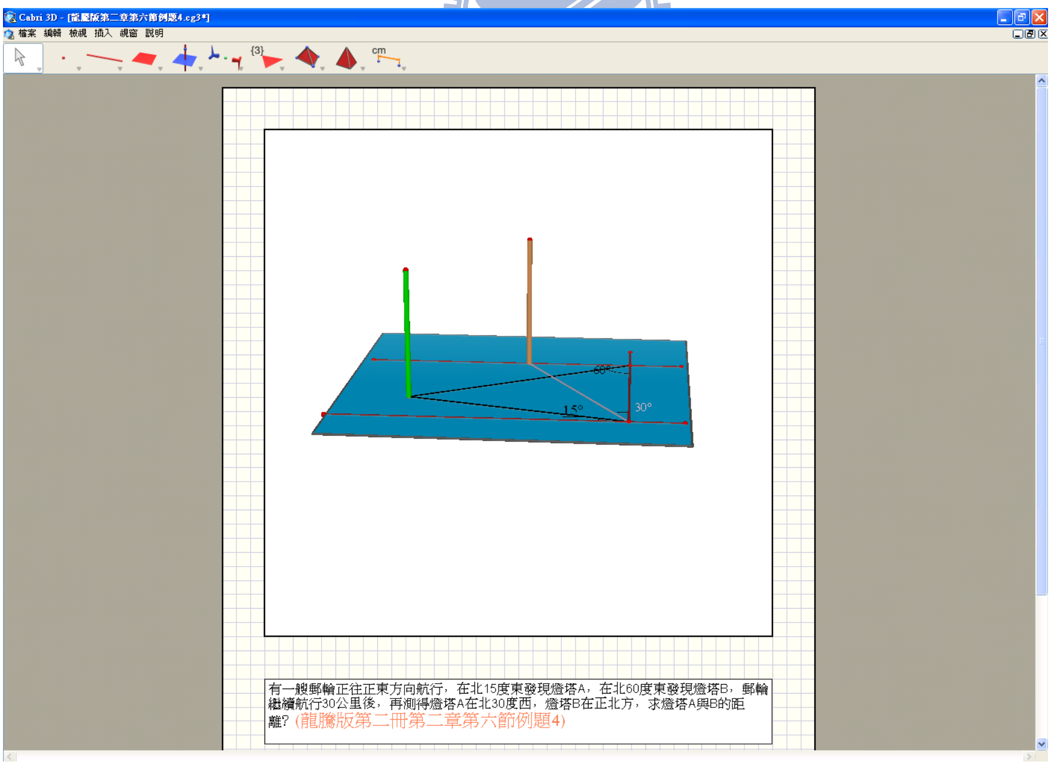

4-2-7 範例二以 Cabri 3D 動態模擬呈現(1)




4-2-8 範例二以 Cabri 3D 動態模擬呈現(2)




4-2-9 範例二以 Cabri 3D 動態模擬呈現(3)




4-2-10 範例二以 Cabri 3D 動態模擬呈現(4)

（乙）以 GSP 表示

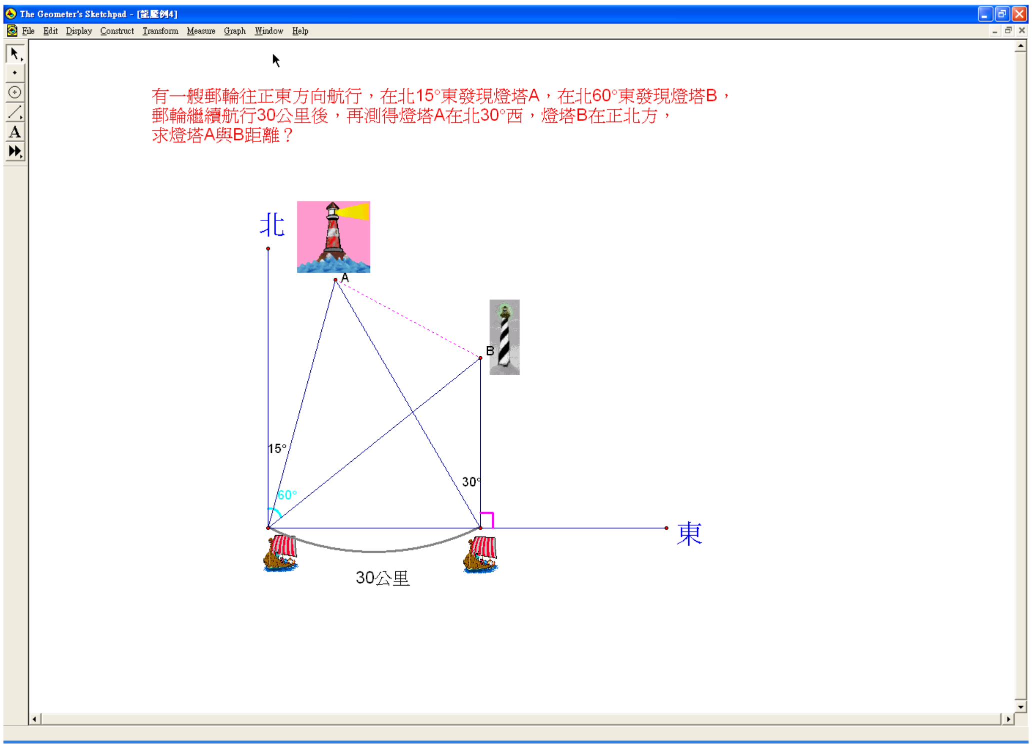



圖 4-2-11 範例二以 GSP 動態模擬呈現

（丙）以 GeoGebra

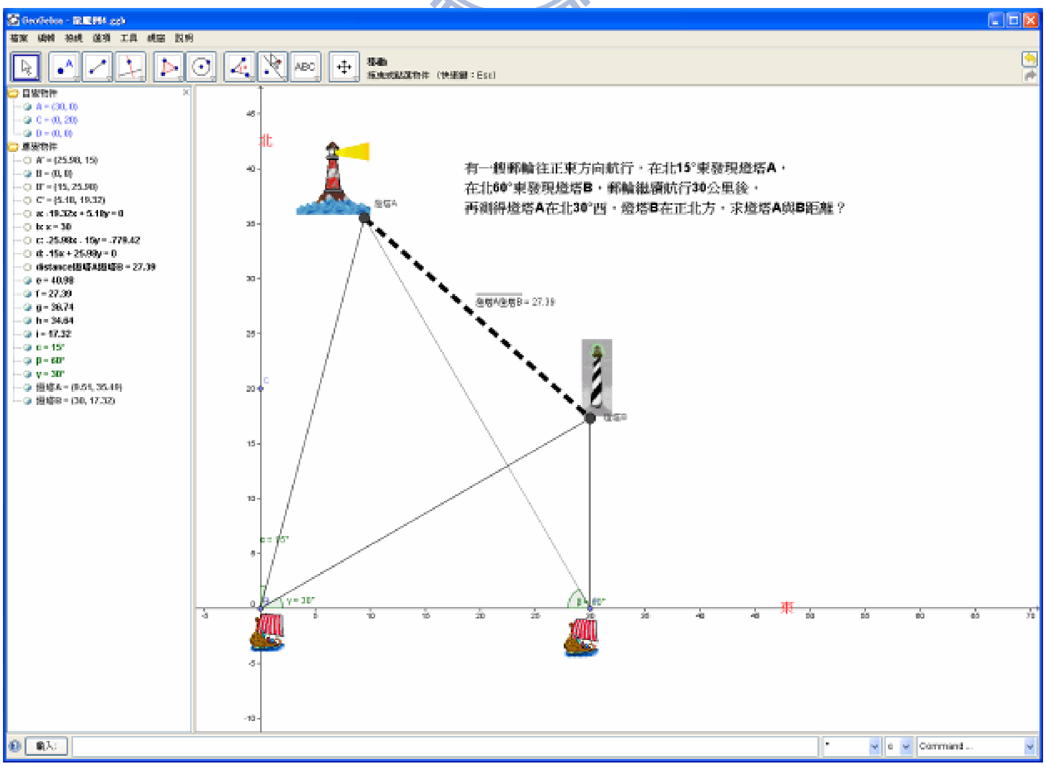



圖 4-2-12 範例二以 GeoGebra 動態模擬呈現

Cabri 3D：

(1) 專門針對空間幾何所設計的軟體，但須有一些數學先備知識。
(2) 對學習者而言，許多在平面上的圖形用立體來表示較沒有效果。
(3) 對教師而言，平面用 Cabri 3D 確實有些大材小用，在教學效果上也較沒有 GSP 及 GeoGebra 實用。

GSP：

(1) 在台灣算普遍的數學軟體，老師都曾聽過或設計教材過，對平面幾何幫助很大，尤其早期資訊融入教學，對數學的教學環境帶來很大的衝擊與啟發。
(2) 對學習者而言，許多應用在平面上的圖形效果很明顯。
(3) 對教師而言，平面教材用 GSP 確實很方便，在教學效果也有明顯的提升。

GeoGebra：

(1) 在目前發展和 GSP 不相上下，但在台灣知名度不高，也鮮少看到老師使用。
(2) 對學習者而言，功用大致上和 GSP 相仿，但多了些方便的指令，回家也可使用軟體做練習可以提升學生對數學的興趣，相對可提升數學能力。
(3) 對教師而言，使用上和 GSP 差不多。也多了些功能可以研究，比 GSP 更不會有程度上的差異。

| 軟體種類 | 製作成本（時間） | 從學習者角度 | 從教師角度 |
|---|---|---|---|
| Cabri 3D | Cabri 3D 需購買，知名度較 GSP 低。<br>一個例子大約 15 分鐘 | 對平面幾何，Cabri 3D 雖可畫出相關位置，但對學習者而言，比較喜歡用 GSP 或 GeoGebra 來示範平面上的內容。 | 對於平面而言，建議使用 GSP 或 GeoGebra，效果較大。 |
| GSP | GSP 需購買，在台灣算很普遍。<br>一個例子大約 10 分鐘 | 針對平面上的問題，可以清楚讓學習者知道課堂的內容及其重點。 | 使用 GSP 來講解幾何的問題，能達到老師們所要的要求，適合用在這類型內容中。 |
| GeoGebra | GeoGebra 免費。<br>相較 GSP，此軟體是開發時間較晚。<br>一個例子大約 10 分鐘 | 效果跟 GSP 差不多，可利用軟體的特性觀察其做圖的步驟，可以訓練學習者的數學能力。 | 在國外發展跟 GSP 不相上下，操作類似。<br>在平面幾何類型單元中，功用跟 GSP 差不多。 |

表 4-2-1 使用心得比較表

## 4-3 空間幾何範例

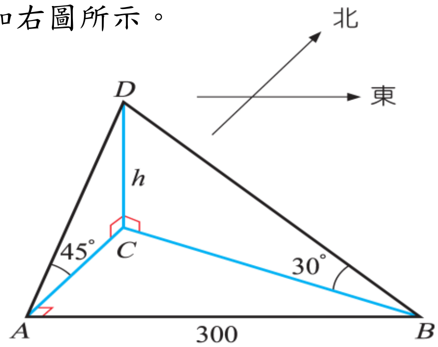
以高中平面幾何教材在不同數學輔助軟體下之動態呈現

範例一

一測量人員在一山的正南方的山腳下點 A 測出山的仰角是 45°，這測量人員向東方移動 300 公尺到達另一點 B，而測得山頂的仰角是 30°，求山的高度。

（翰林版 98 年第二冊第二章第六節例題一課本內容）

解　兩測量位置 A、B，山頂 D 與山高 $h=\overline{CD}$，如右圖所示。




考慮直角三角形 ABC，因為

$\cot 45^\circ=\dfrac{\overline{AC}}{h}$，$\cot 30^\circ=\dfrac{\overline{BC}}{h}$，

得出 $\overline{AC}=h\cot 45^\circ=h$，

$\overline{BC}=h\cot 30^\circ=\sqrt{3}\,h$，

由商高定理得出

$\overline{AC}^2+\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$，$h^2+90000=3h^2$，$2h^2=90000$，$h^2=45000$，

$h=\sqrt{45000}=150\sqrt{2}$，故山高是 $150\sqrt{2}$（約 212）公尺。

課本所附的是 2D 模擬 3D 的圖，學生會不瞭解圖中立體的角度，用 Cabri 3D 來模擬，可以清楚知道其相關位置和資訊，學生不容易搞混，才會理解為什麼課本要附這種圖來幫助思考。

（甲）以 Cabri 3D

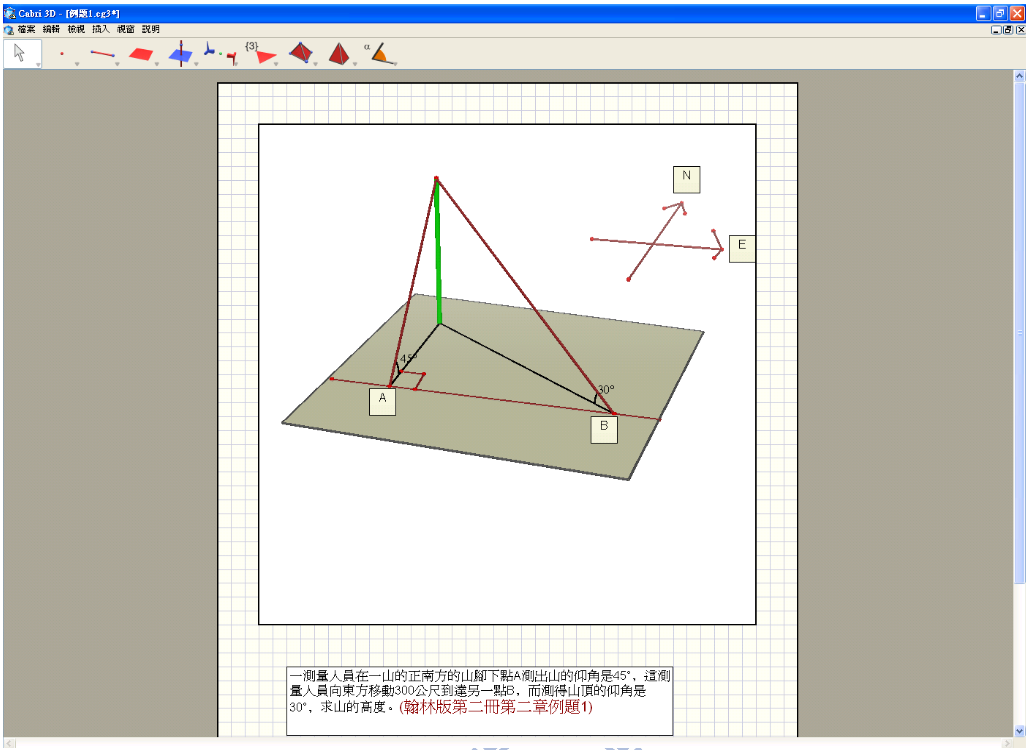



圖 4-3-1 範例一以 Cabri 3D 動態模擬呈現(1)

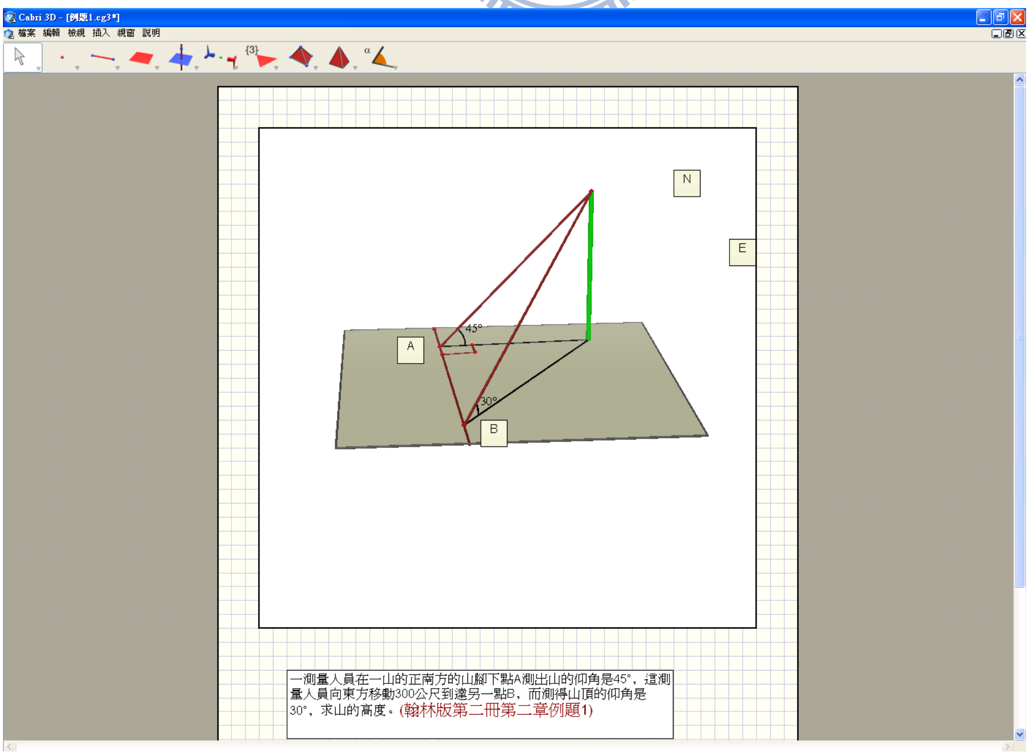



圖 4-3-2 範例一以 Cabri 3D 動態模擬呈現(2)

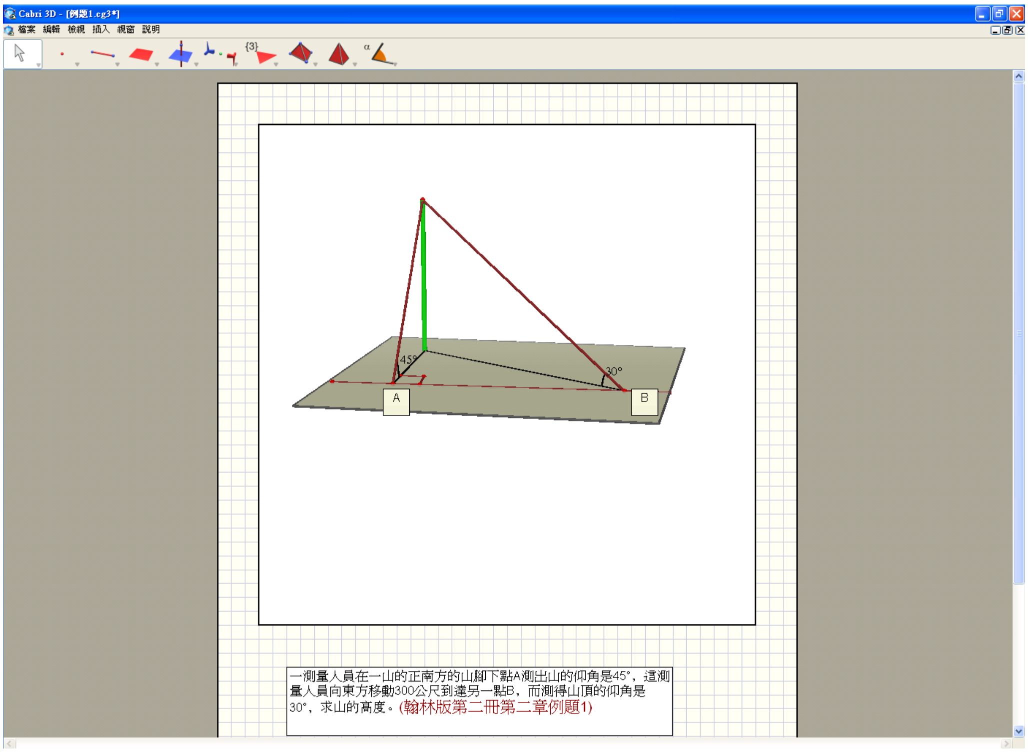



圖 4-3-3 範例一以 Cabri 3D 動態模擬呈現(3)

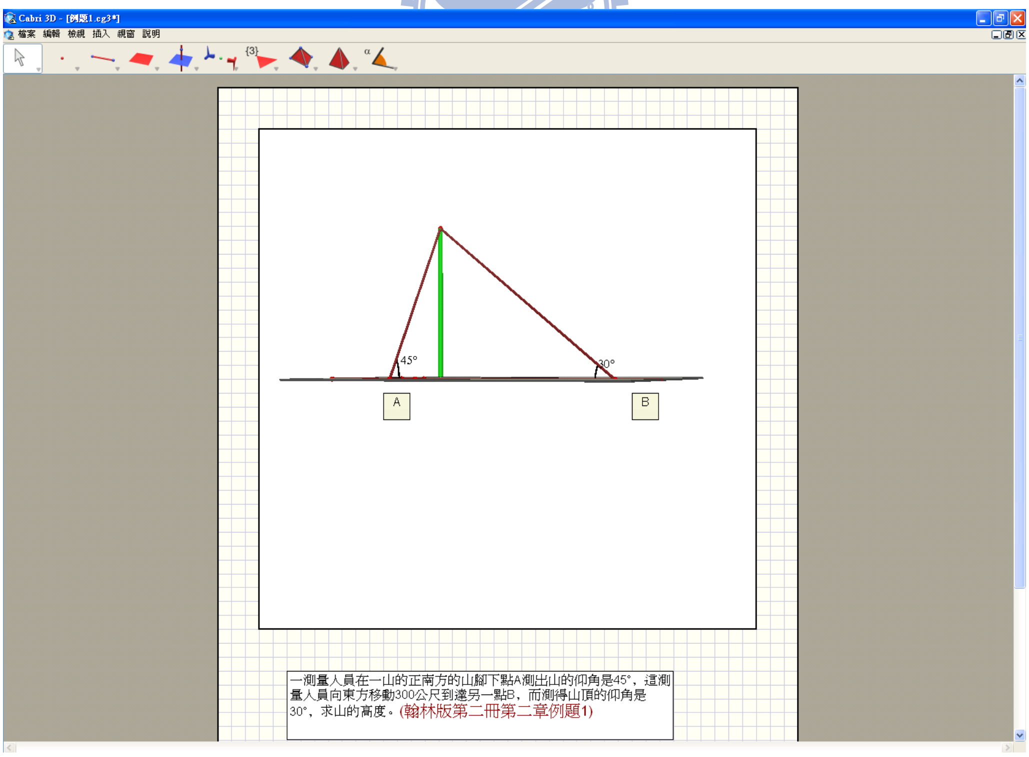



圖 4-3-4 範例一以 Cabri 3D 動態模擬呈現(4)

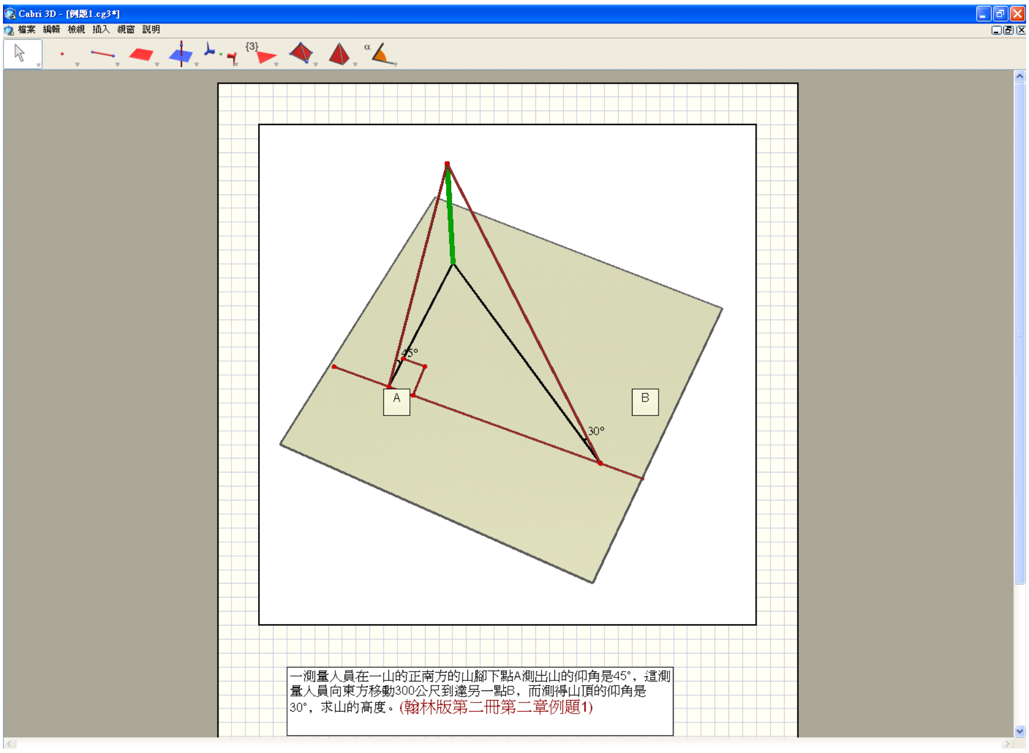



圖 4-3-5 範例一以 Cabri 3D 動態模擬呈現(5)

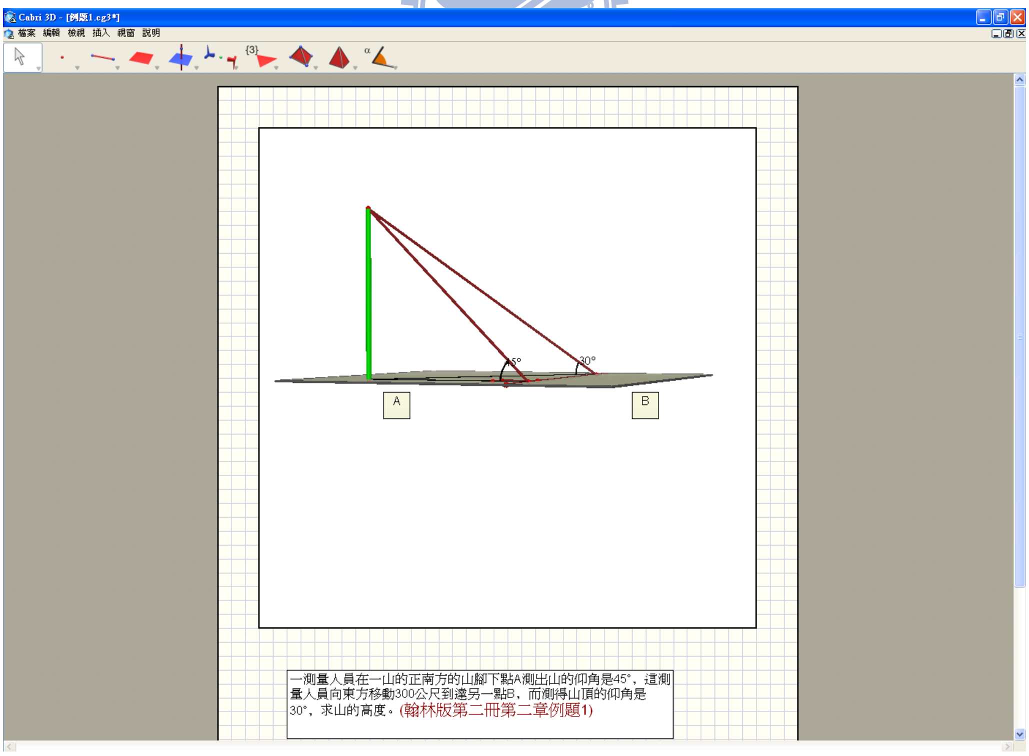



圖 4-3-6 範例一以 Cabri 3D 動態模擬呈現(6)

（乙） 以 GSP

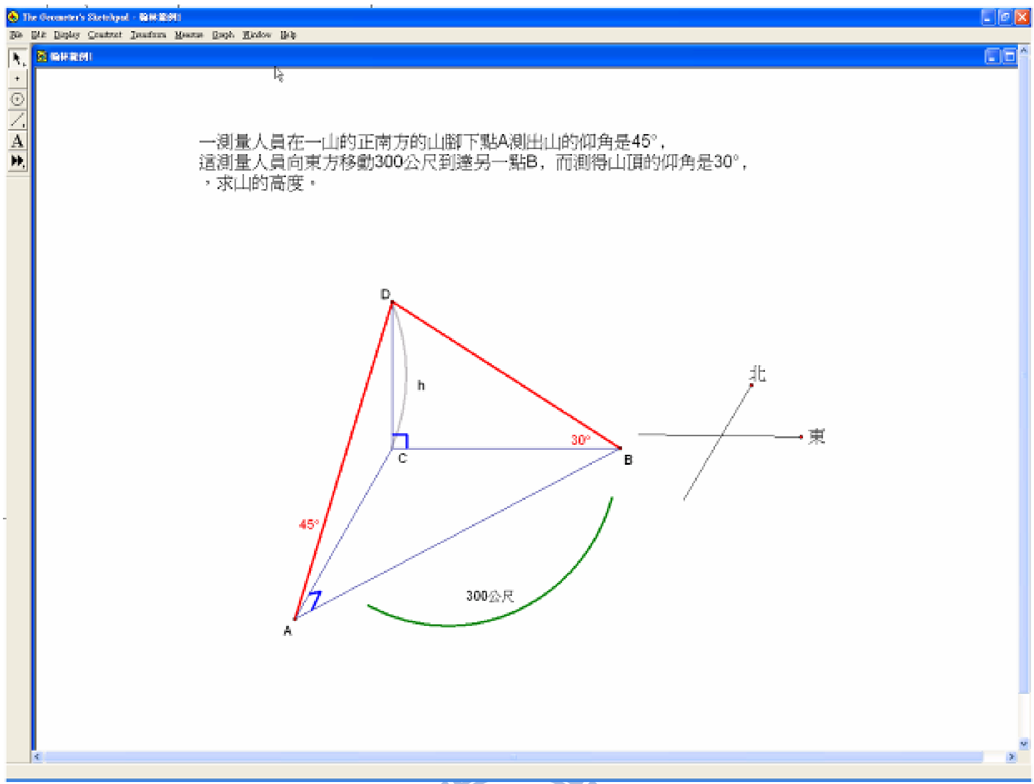



圖 4-3-7 範例一以 GSP 動態模擬呈現

（丙） 以 GeoGbra

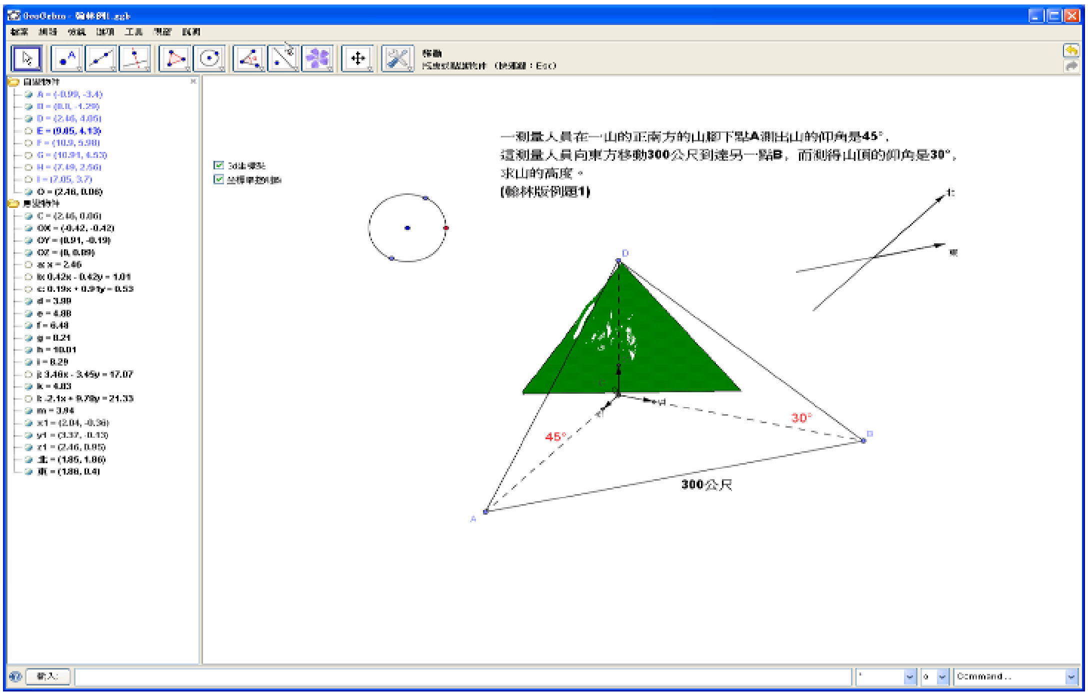
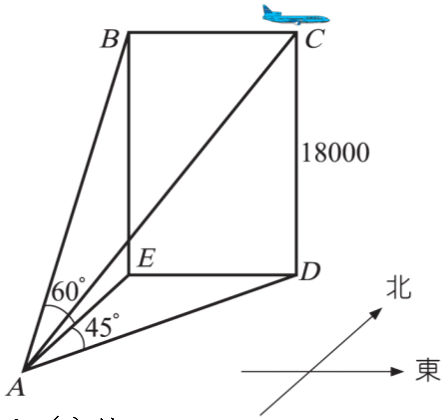



圖 4-3-8 範例一以 GeoGebra 動態模擬呈現

範例二

一塔臺人員觀察到一小型飛機在塔臺正北方以高度 18000 公尺向東飛行，這時飛機的仰角是 $60^\circ$，一分鐘後飛機變成東北方向，假設飛機是等高度等速度飛行，求飛機的速度。　（翰林版 98 年第二冊第二章第六節例題二課本內容）

解　設塔臺位置是 A，而 B、C 分別是飛機先後所在位置，E、D 是地面上飛機正下方所在位置，如圖 2－78 所示。BCDE 是長方形，而有 $\overline{BC}=\overline{DE}$，由直角三角形 ABE 中，




$$\tan 60^\circ=\frac{\overline{BE}}{\overline{AE}}=\frac{18000}{\overline{AE}},$$

得出 $\overline{AE}=\frac{18000}{\tan 60^\circ}=\frac{18000}{\sqrt{3}}=6000\sqrt{3}$，

又△AED 是等腰直角三角形，而有

$$\overline{DE}=\overline{AE}=6000\sqrt{3},$$

故飛機的速度是 $6000\sqrt{3}$（約 10392）公尺／分鐘。

(甲)以 cabri 3D 呈現

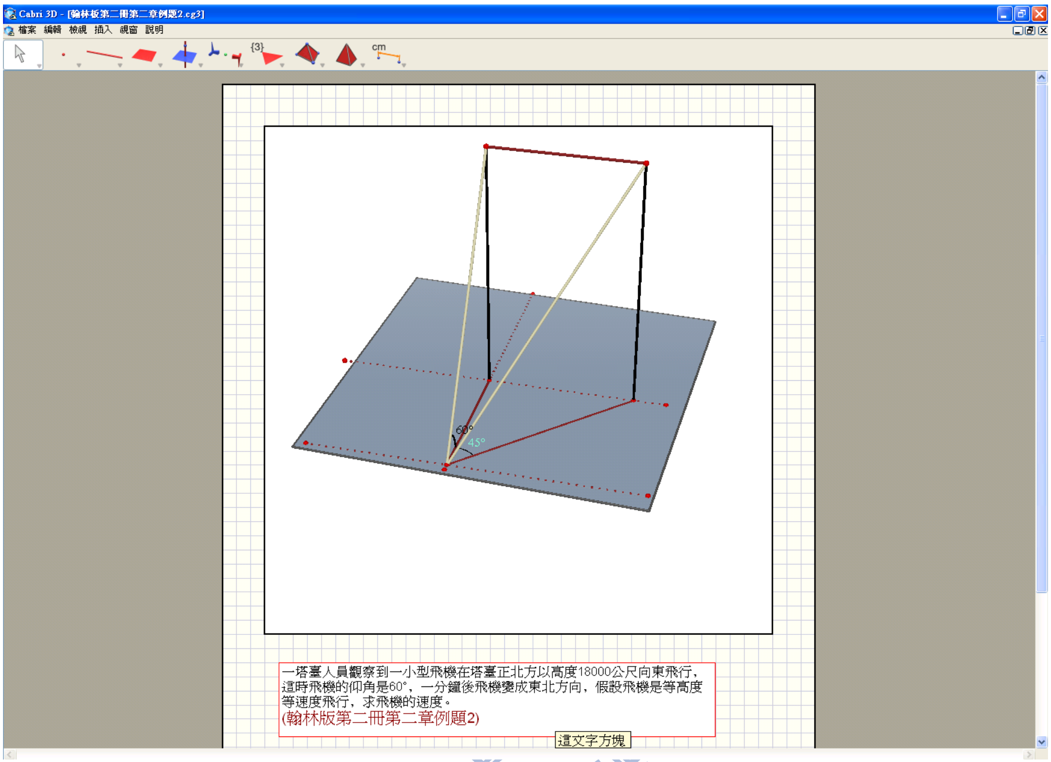



圖 4-3-9 範例二以 Cabri 3D 動態模擬呈現(1)

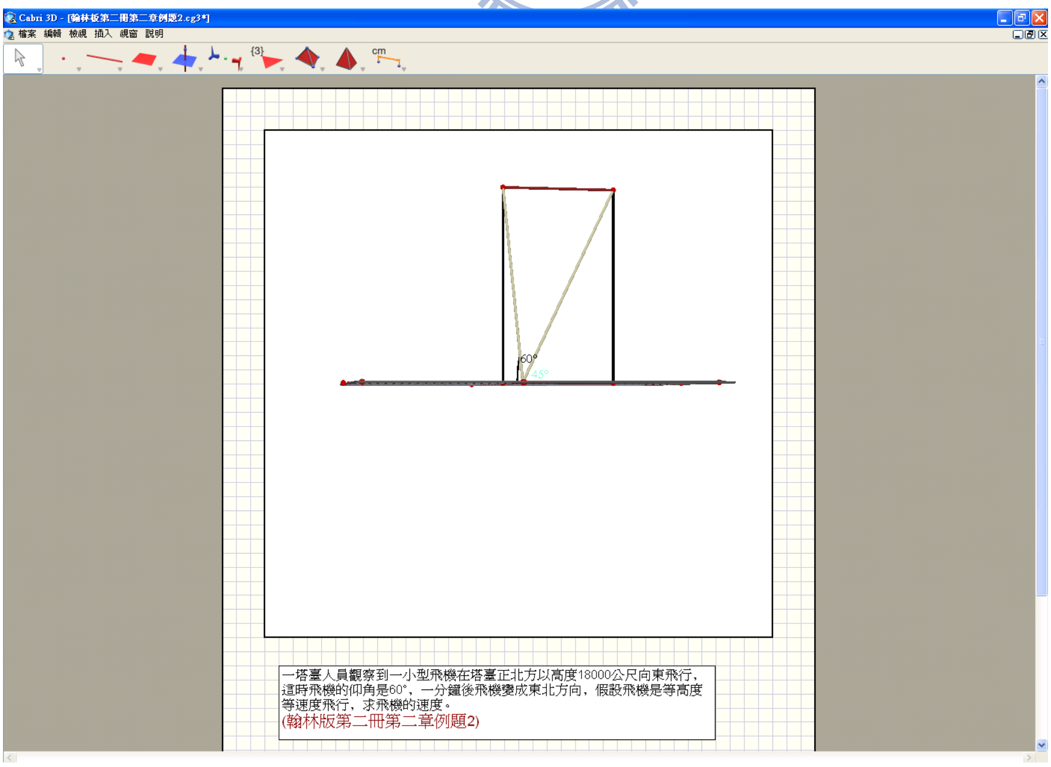



圖 4-3-10 範例二以 Cabri 3D 動態模擬呈現(2)

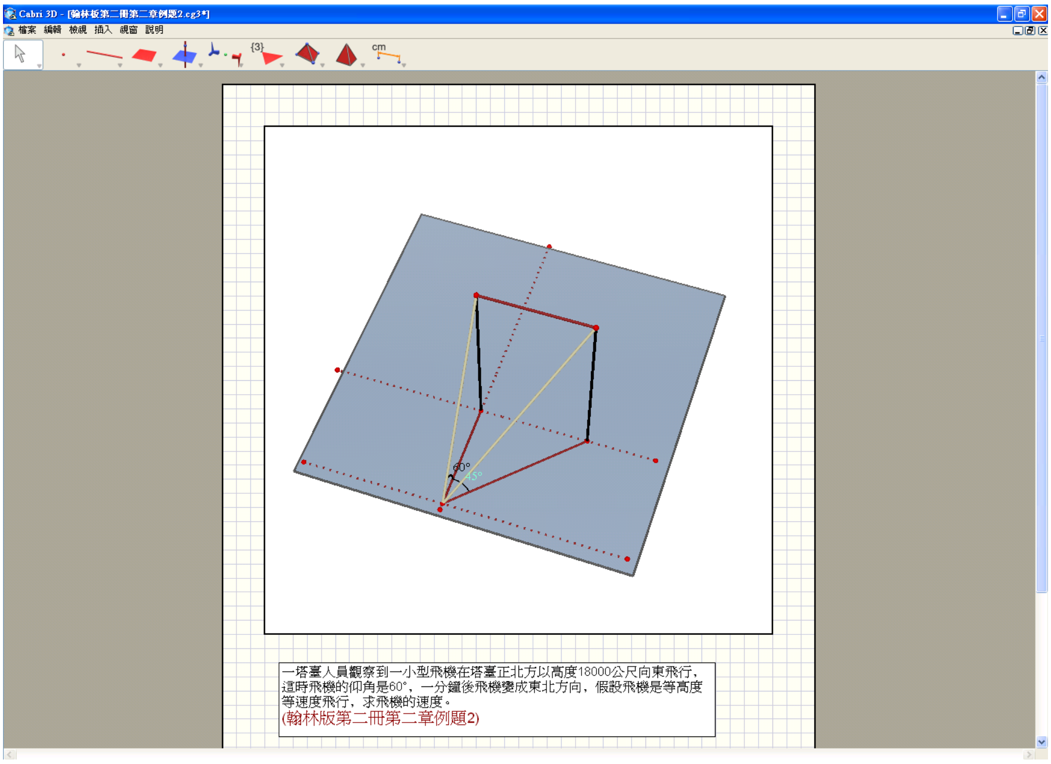



圖 4-3-11 範例二以 Cabri 3D 動態模擬呈現(3)

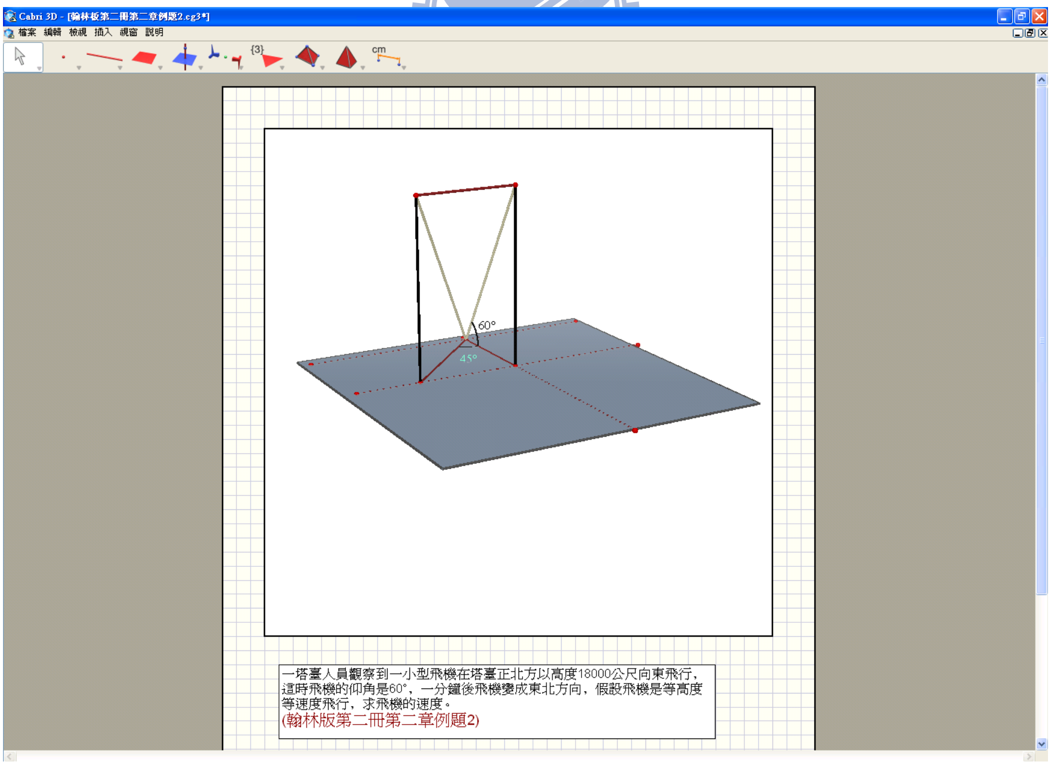



圖 4-3-12 範例二以 Cabri 3D 動態模擬呈現(4)

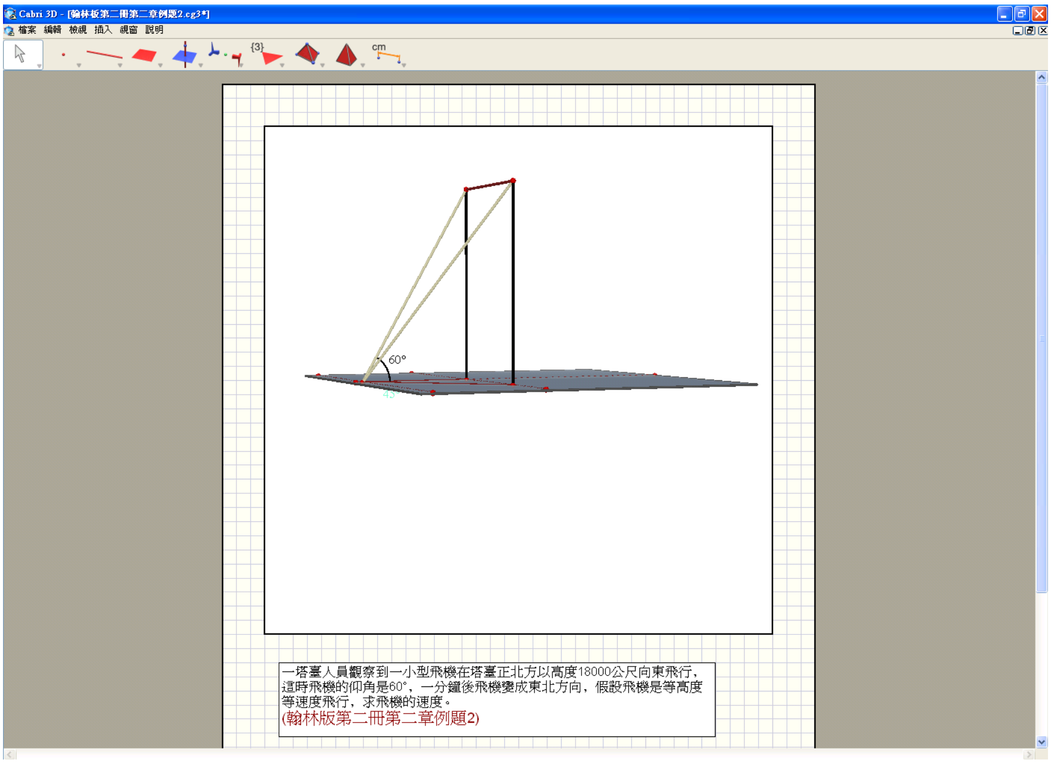



圖 4-3-13 範例二以 Cabri 3D 動態模擬呈現(5)

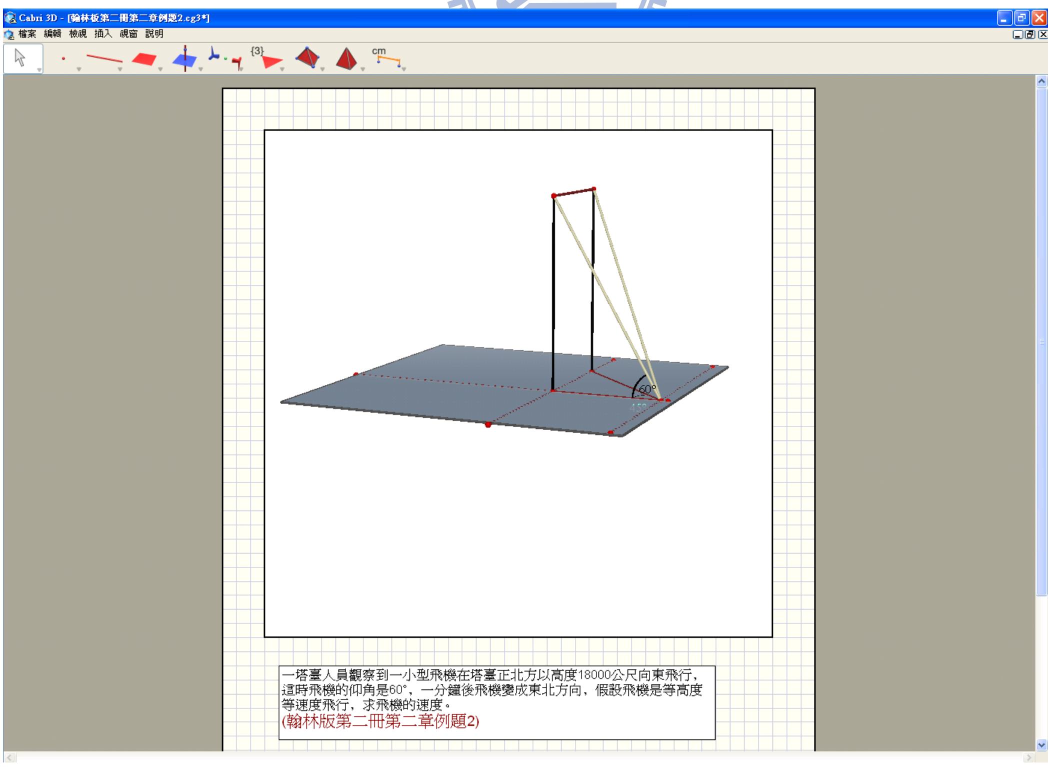



圖 4-3-14 範例二以 Cabri 3D 動態模擬呈現(6)

(乙)以 GSP 表示

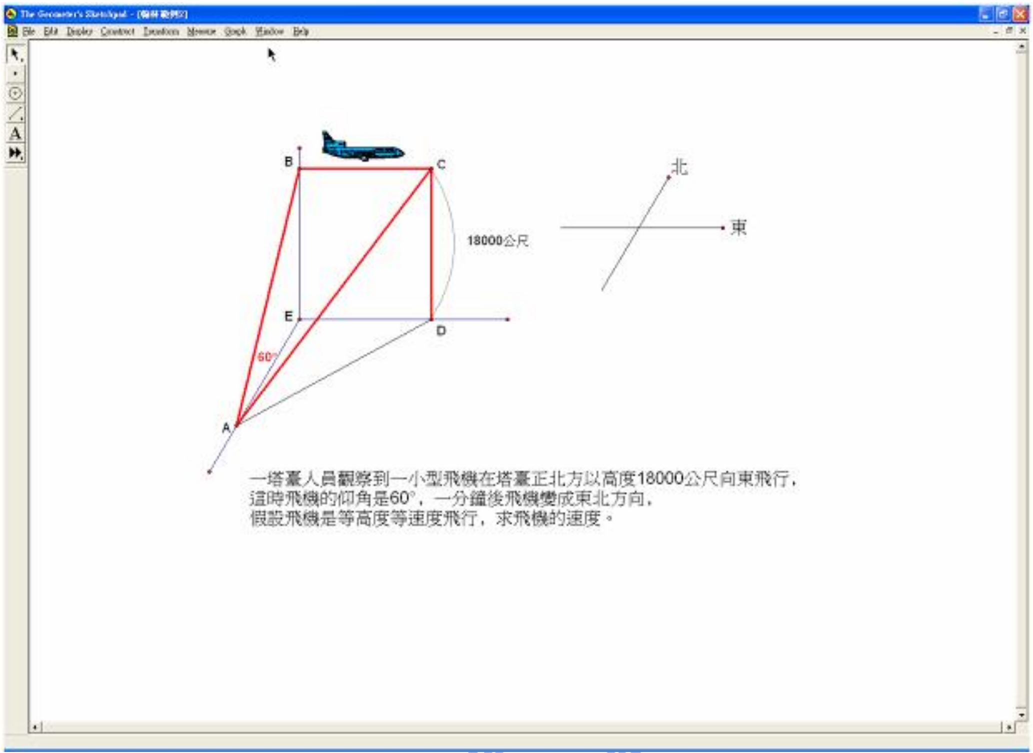



圖 4-3-15 範例二以 GSP 動態模擬呈現



(丙)以 GeoGebra

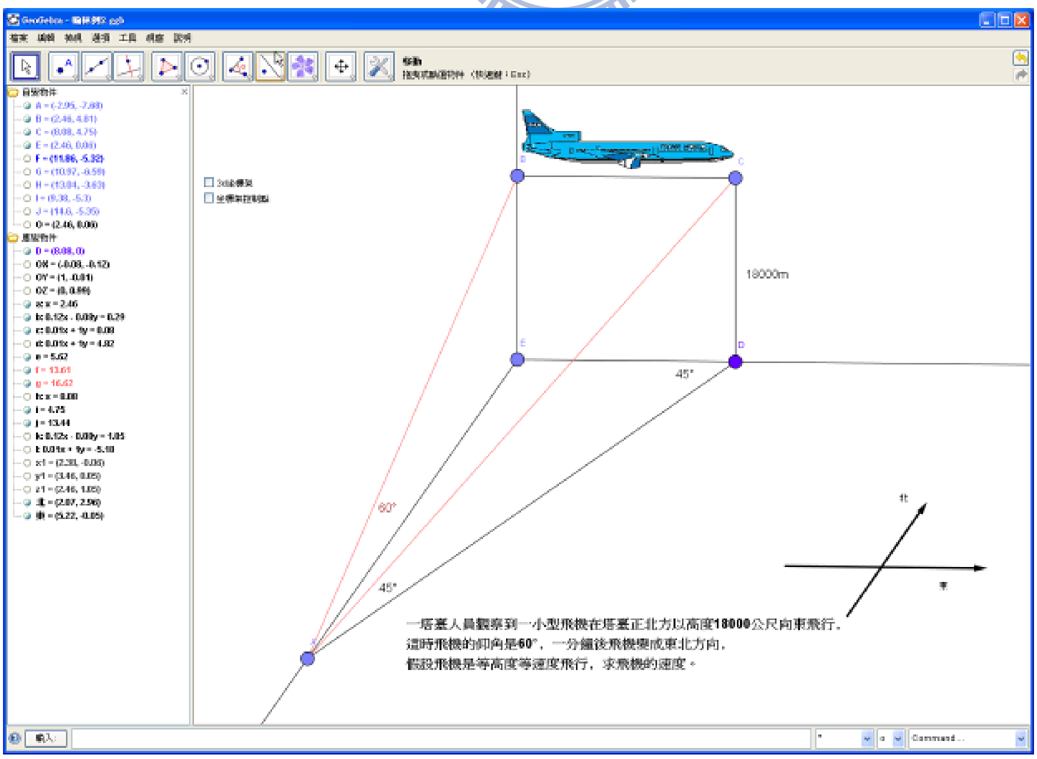


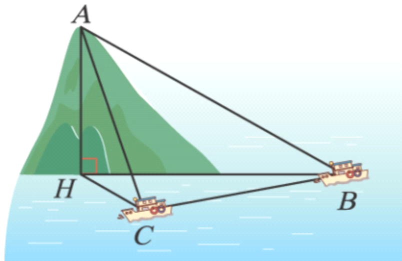

圖 4-3-16 範例二以 GeoGebra 動態模擬呈現

範例三

在高 300 公尺的山丘上，俯視正東方一直線航行的漁船，俯角為 30°，經過 10 分鐘後，漁船在南 30°東方向，俯角為 60°，求漁船之速度。

（翰林版 98 年第二冊第二章第六節例題四課本內容）

解　設觀測點是 A，漁船由 B 航向 C，H 是觀測點 A 正下方海平面上的點，由點 A 看 B 的俯角是 30°，由平行線的內錯角相等得出 $\angle ABH=30^\circ$，同理得出 $\angle ACH=60^\circ$，則




$\tan 30^\circ=\dfrac{\overline{AH}}{\overline{BH}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\overline{BH}=\sqrt{3}\cdot\overline{AH}=300\sqrt{3}$,

$\tan 60^\circ=\dfrac{\overline{AH}}{\overline{CH}}=\sqrt{3}$, $\overline{CH}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\overline{AH}=100\sqrt{3}$,

由餘弦定律得出

$$\overline{BC}^2=\overline{BH}^2+\overline{CH}^2-2\cdot\overline{BH}\cdot\overline{CH}\cdot\cos 60^\circ$$

$$=(300\sqrt{3})^2+(100\sqrt{3})^2-2\cdot 300\sqrt{3}\cdot 100\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}=210000.$$

得出 $\overline{BC}=100\sqrt{21}$,故漁船的速度是 $10$（約 45.8）公尺／分鐘。

（甲）以 cabri 3D 呈現

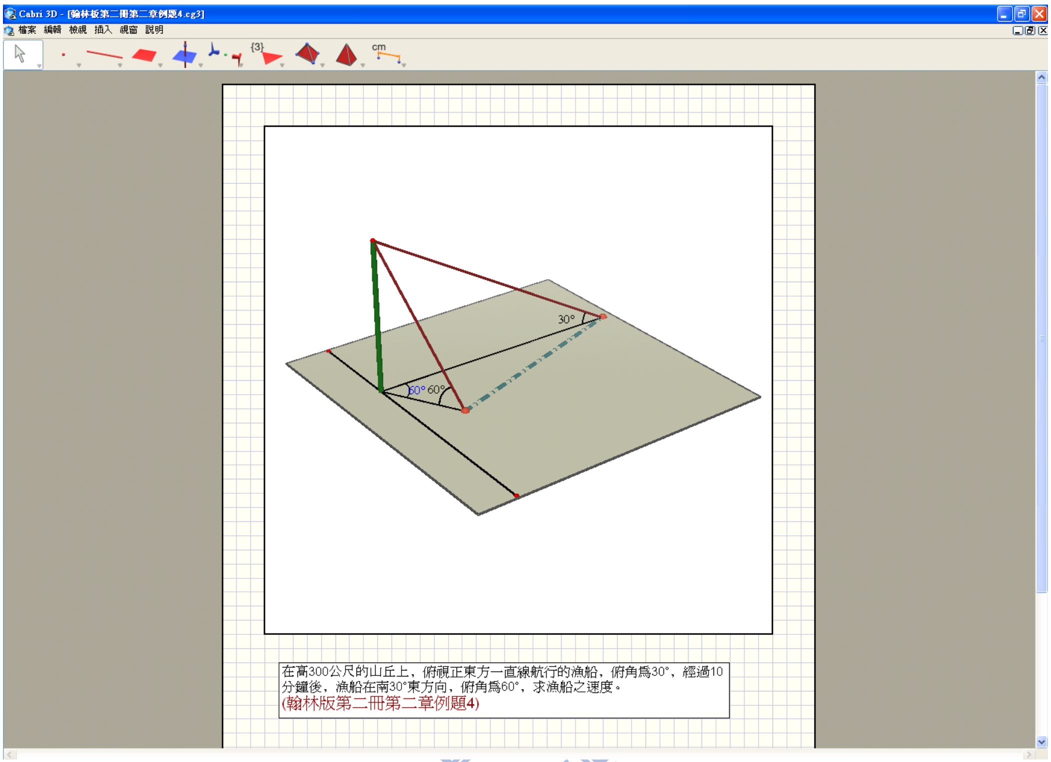



圖 4-3-17 範例三以 Cabri 3D 動態模擬呈現(1)

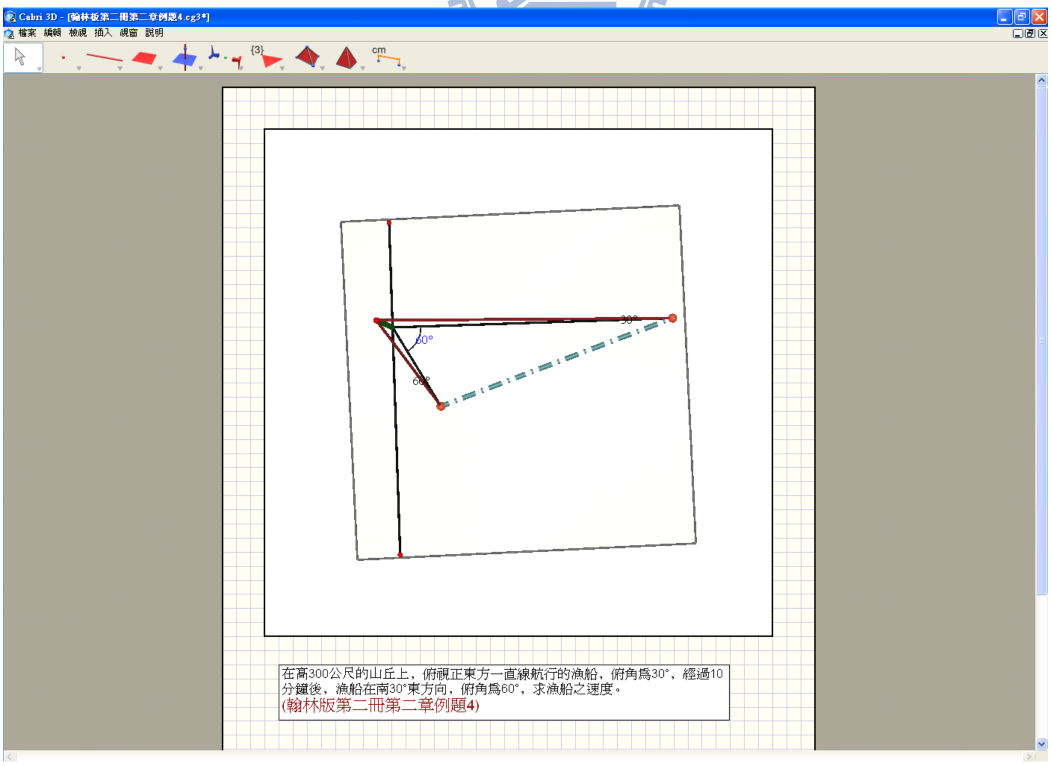



圖 4-3-18 範例三以 Cabri 3D 動態模擬呈現(2)

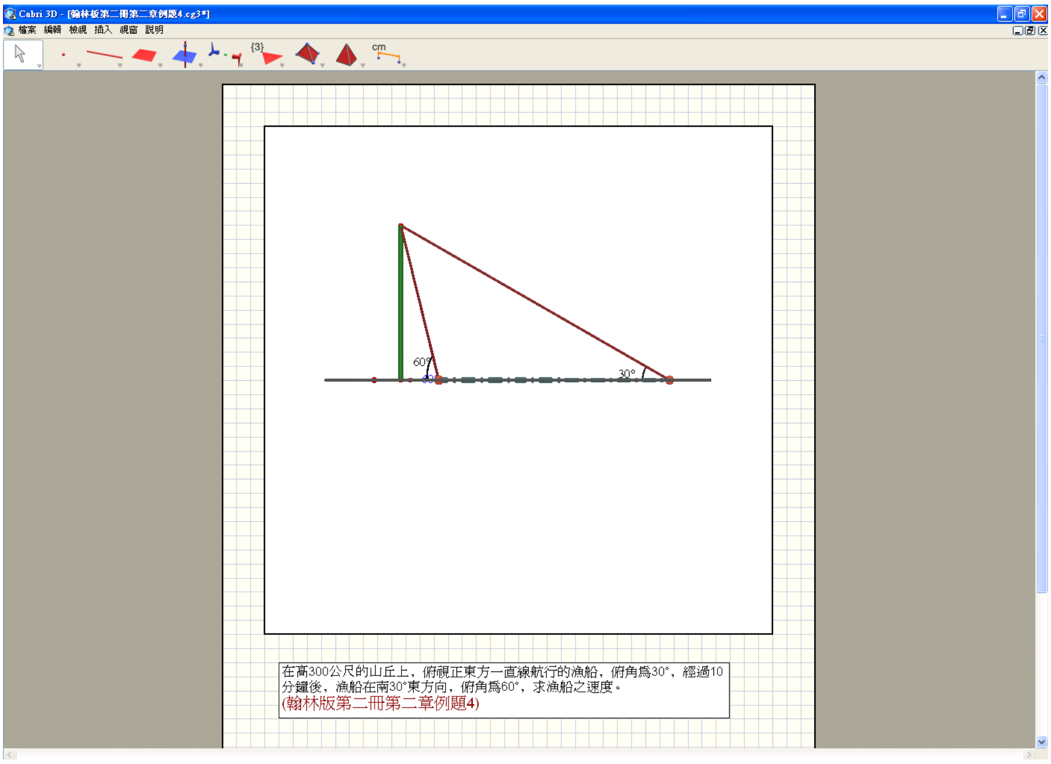



圖 4-3-19 範例三以 Cabri 3D 動態模擬呈現(3)

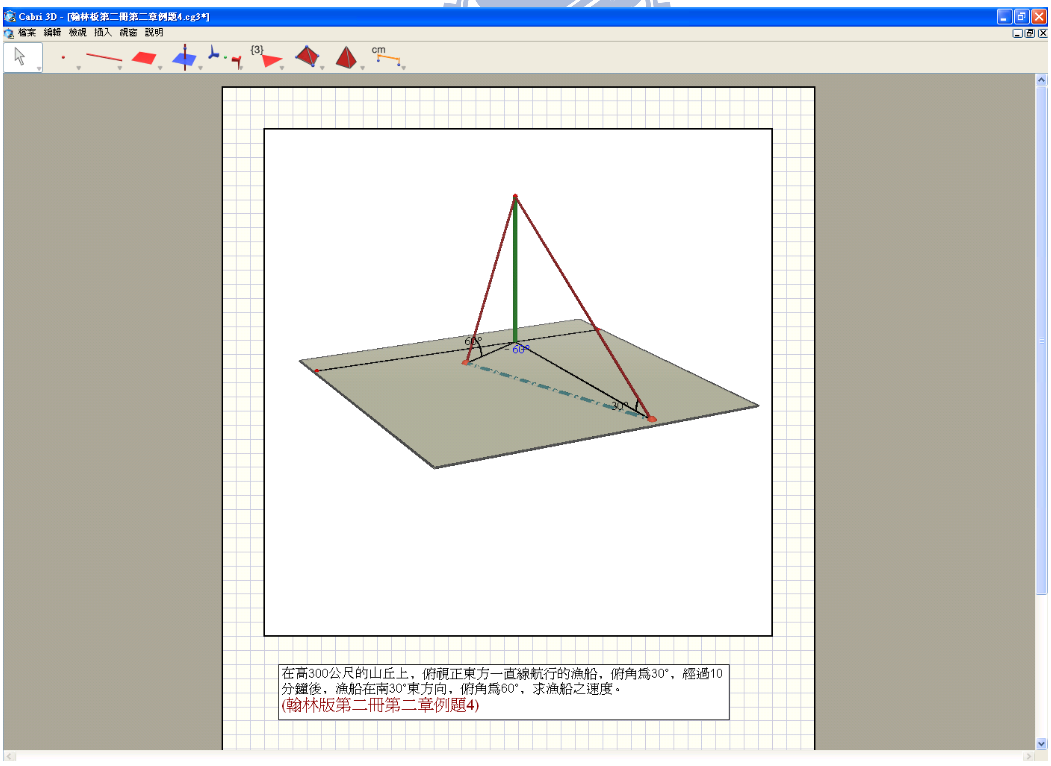



圖 4-3-20 範例三以 Cabri 3D 動態模擬呈現(4)

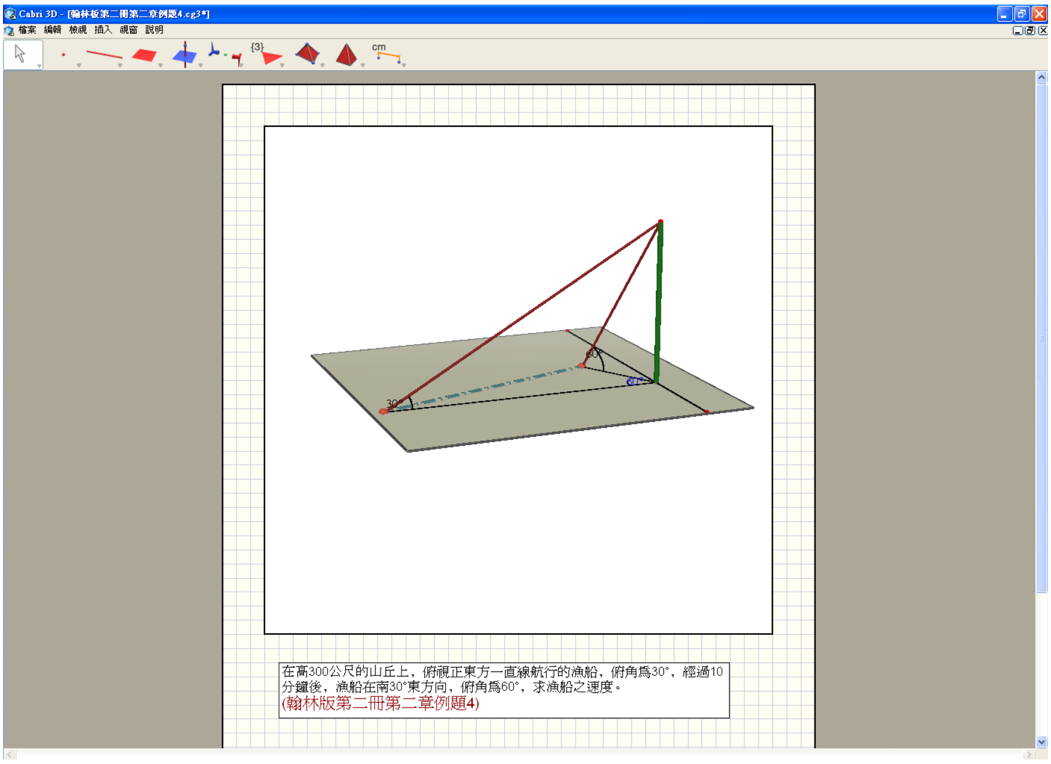



圖 4-3-21 範例三以 Cabri 3D 動態模擬呈現(5)

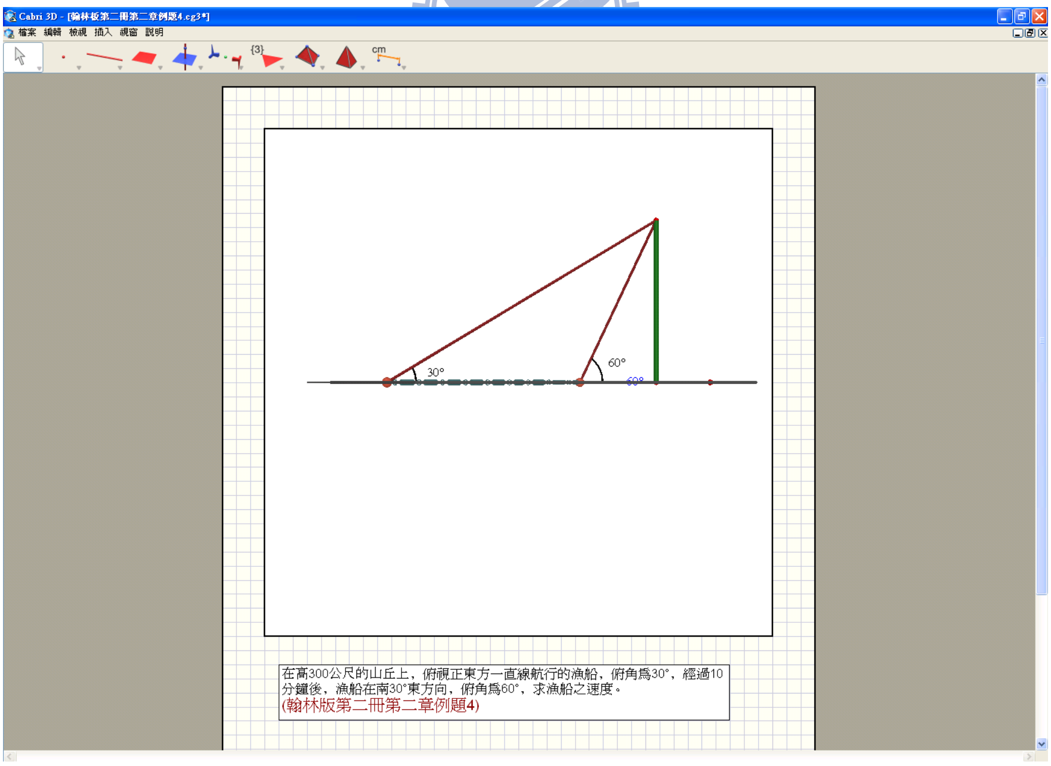



圖 4-3-22 範例三以 Cabri 3D 動態模擬呈現(6)

（乙）以 GSP 表示

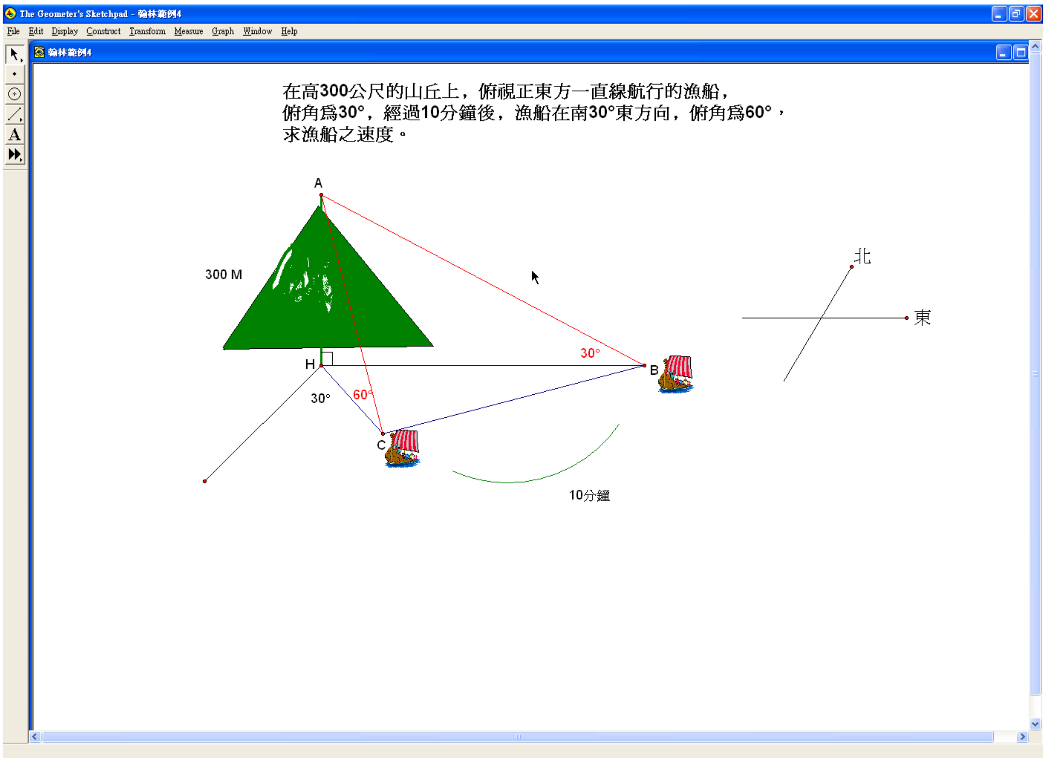



圖 4-3-23 範例三以 GSP 動態模擬呈現

（丙）以 GeoGebra

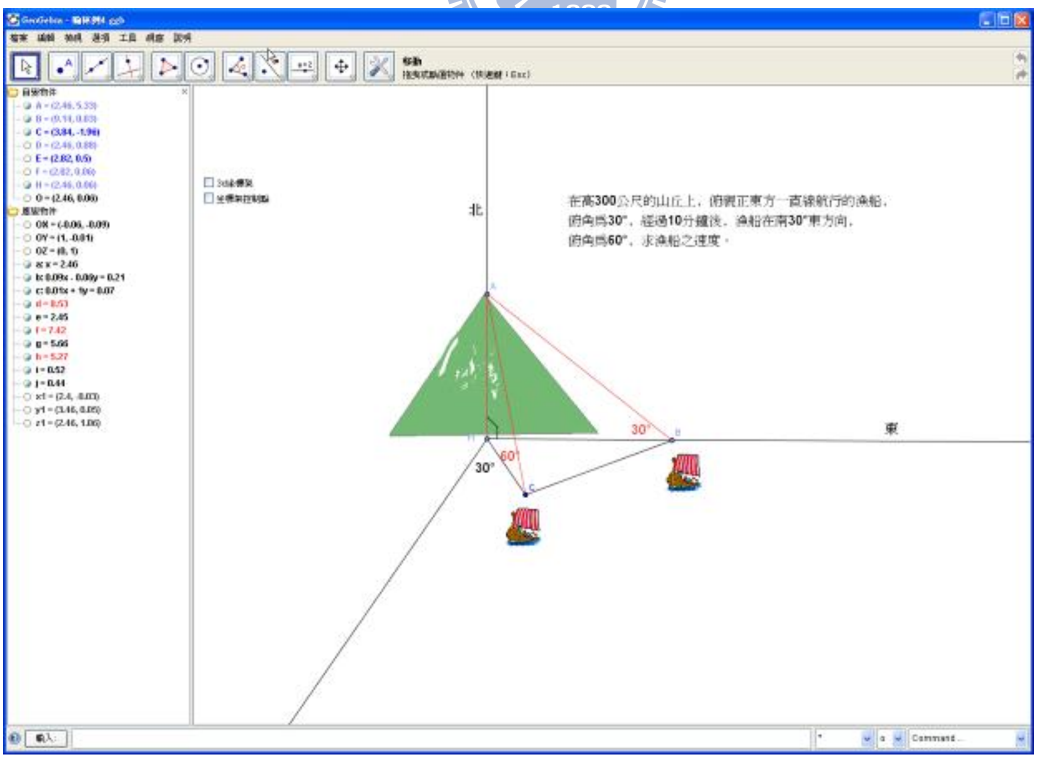



圖 4-3-24 範例三以 GeoGebra 動態模擬呈現

範例四

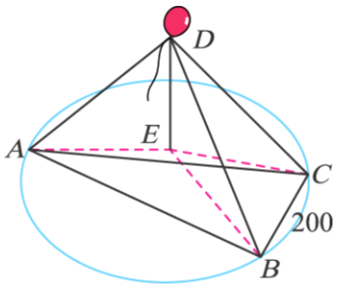
想測量出一高空氣球底端的高度，在地面上三定點 A、B、C 分別測出氣球底端的仰角都是 $60^\circ$，又$\angle CAB=30^\circ$且$\overline{BC}=200$ 公尺，求氣球底端的高度。

（翰林版 98 年第二冊第二章第六節例題五課本內容）

解　設氣球底端所在位置是 D，而 E 是 D 正下方地面上的點。因 A、B、C 的仰角都是 $60^\circ$，而有 $\overline{EA}=\overline{EB}=\overline{EC}=\overline{DE}\cot 60^\circ$，故 A、B、C 三點在以 E 為圓心，半徑為$\overline{DE}\cot 60^\circ$之圓上，即$\triangle ABC$ 之外接圓半徑 $R=\overline{DE}\cot 60^\circ=\dfrac{\overline{DE}}{\sqrt{3}}$，

由正弦定律$\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}=2R$，可得$\dfrac{200}{\sin 30^\circ}=2\cdot\dfrac{\overline{DE}}{\sqrt{3}}$，$\overline{DE}=200\sqrt{3}$，

故氣球底端的高度是 $200\sqrt{3}$（約 346.4）公尺。



（甲）以 cabri 3D 呈現

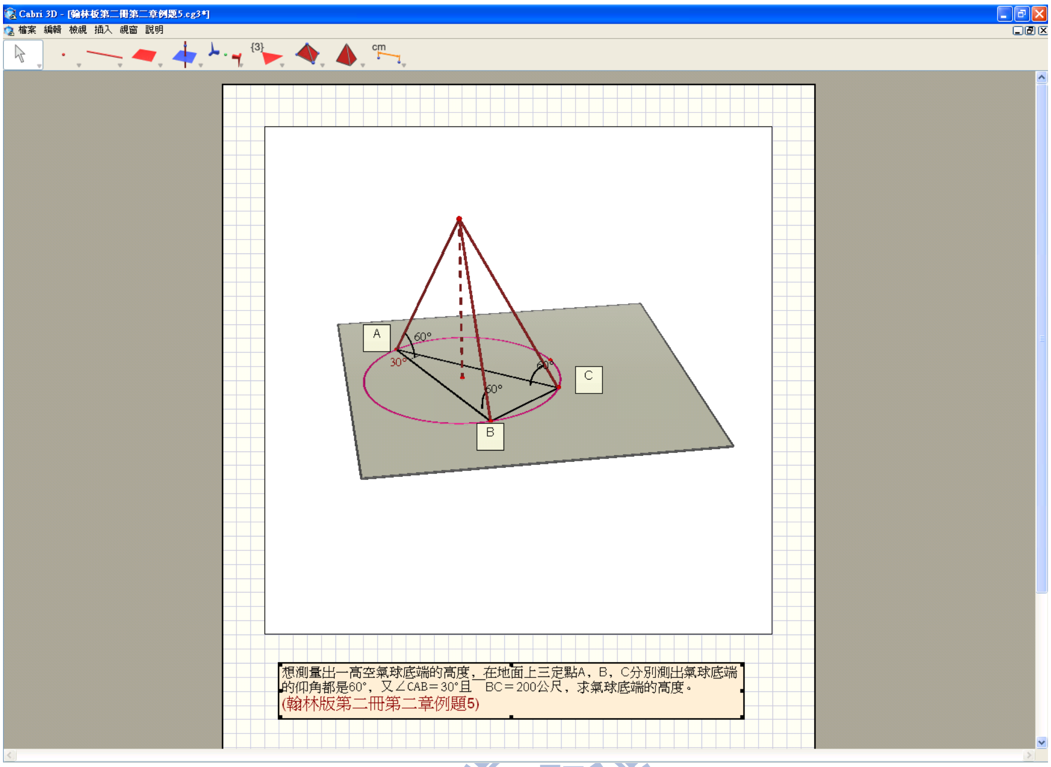



圖 4-3-25 範例四以 Cabri 3D 動態模擬呈現(1)

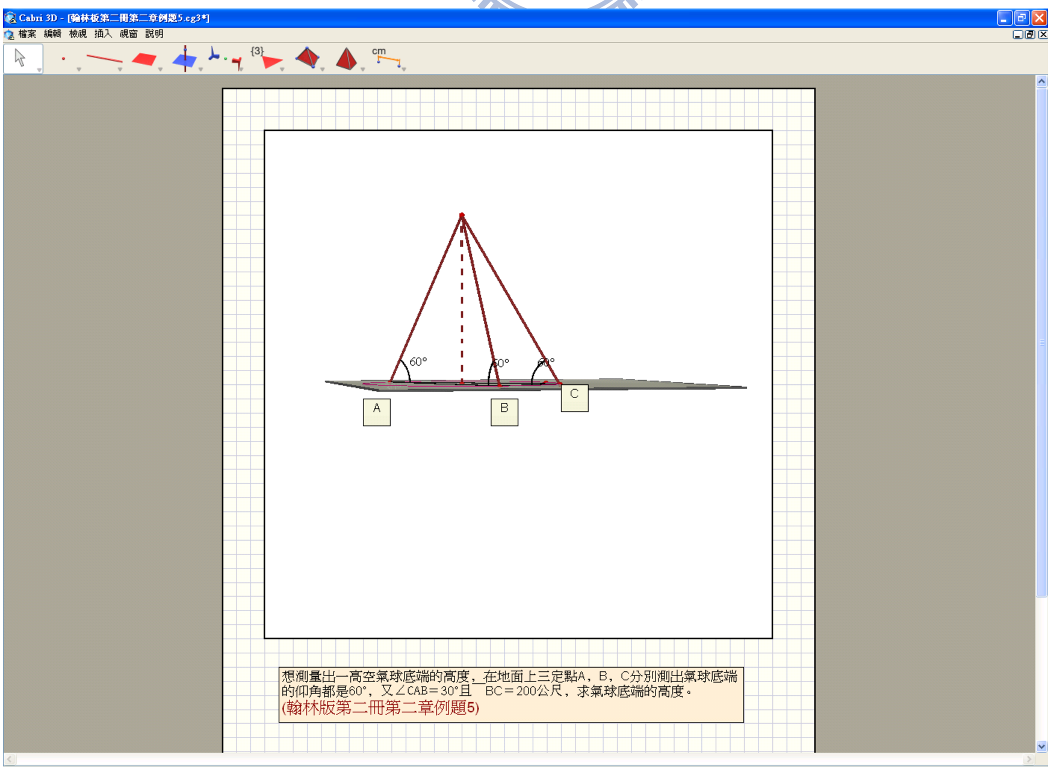



圖 4-3-26 範例四以 Cabri 3D 動態模擬呈現(2)

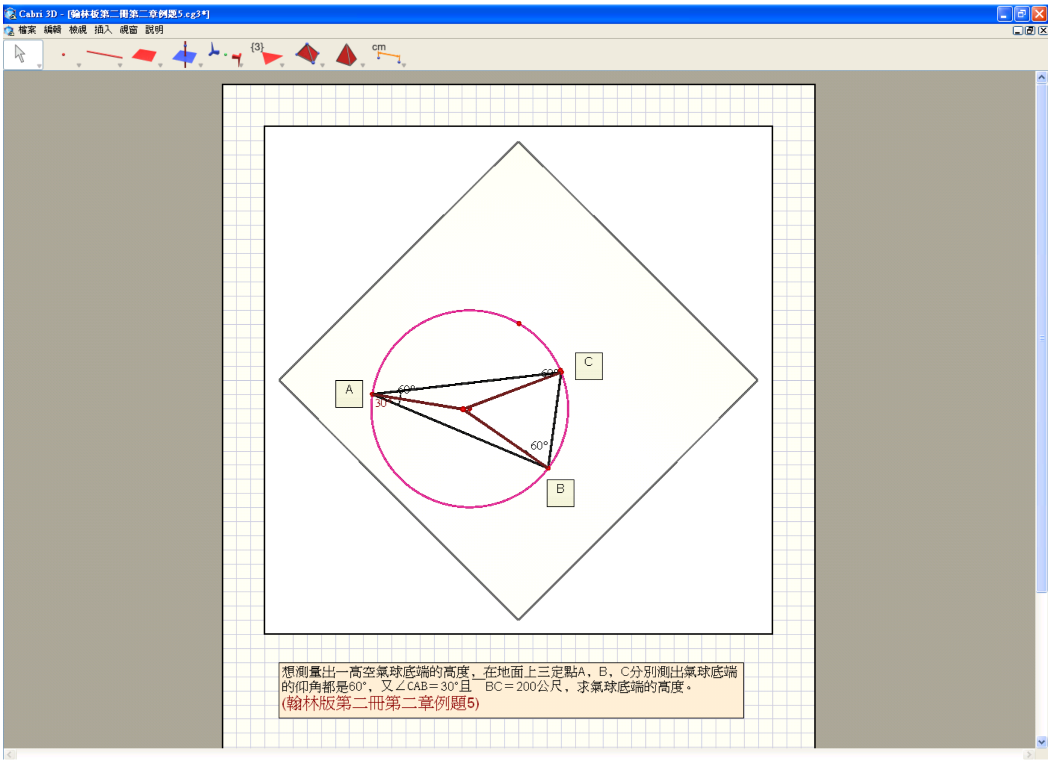



圖 4-3-27 範例四以 Cabri 3D 動態模擬呈現(3)

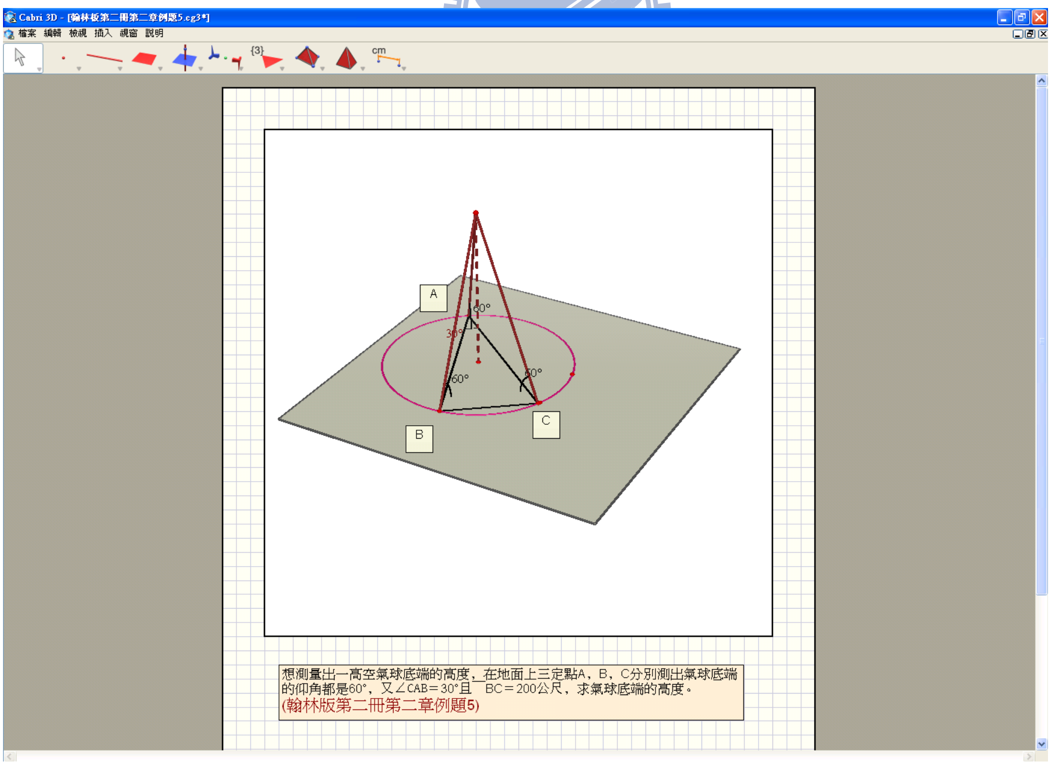



圖 4-3-28 範例四以 Cabri 3D 動態模擬呈現(4)

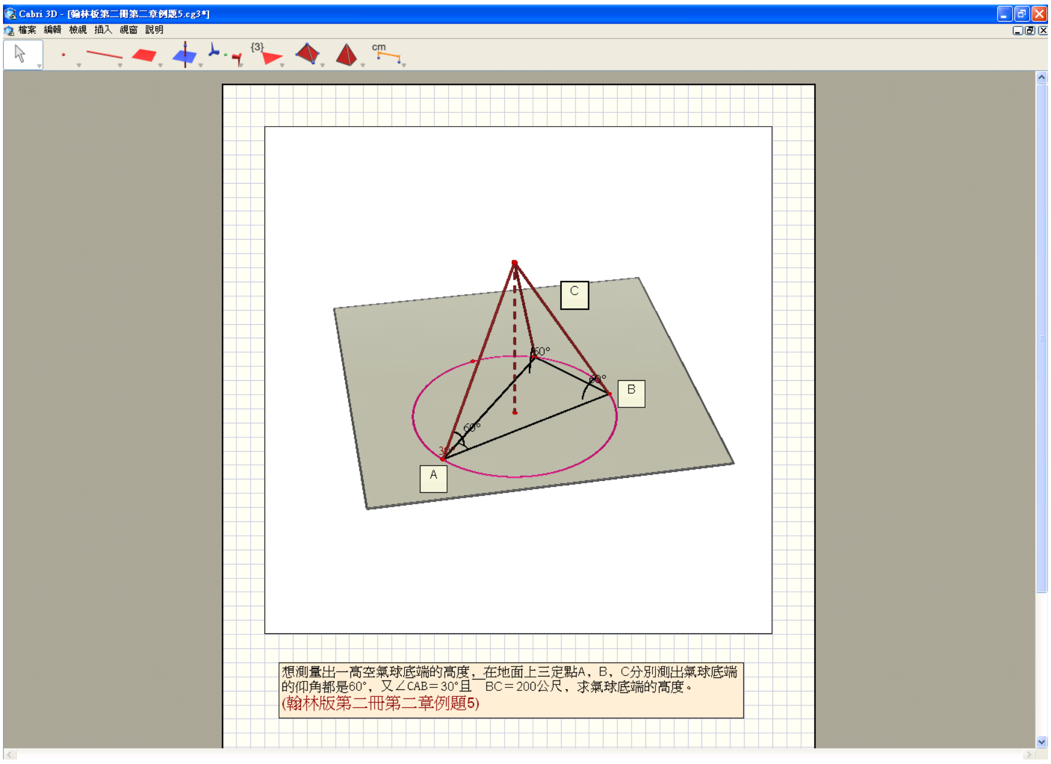



圖 4-3-29 範例四以 Cabri 3D 動態模擬呈現(5)

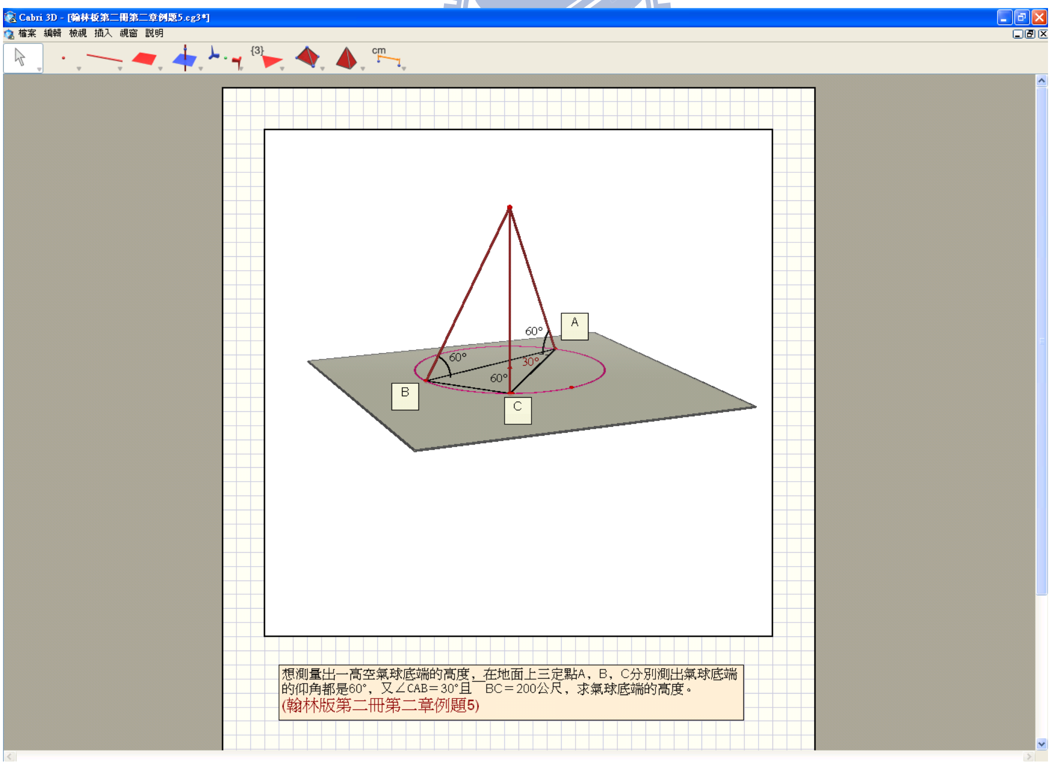



圖 4-3-30 範例四以 Cabri 3D 動態模擬呈現(6)

（乙）以 GSP 表示

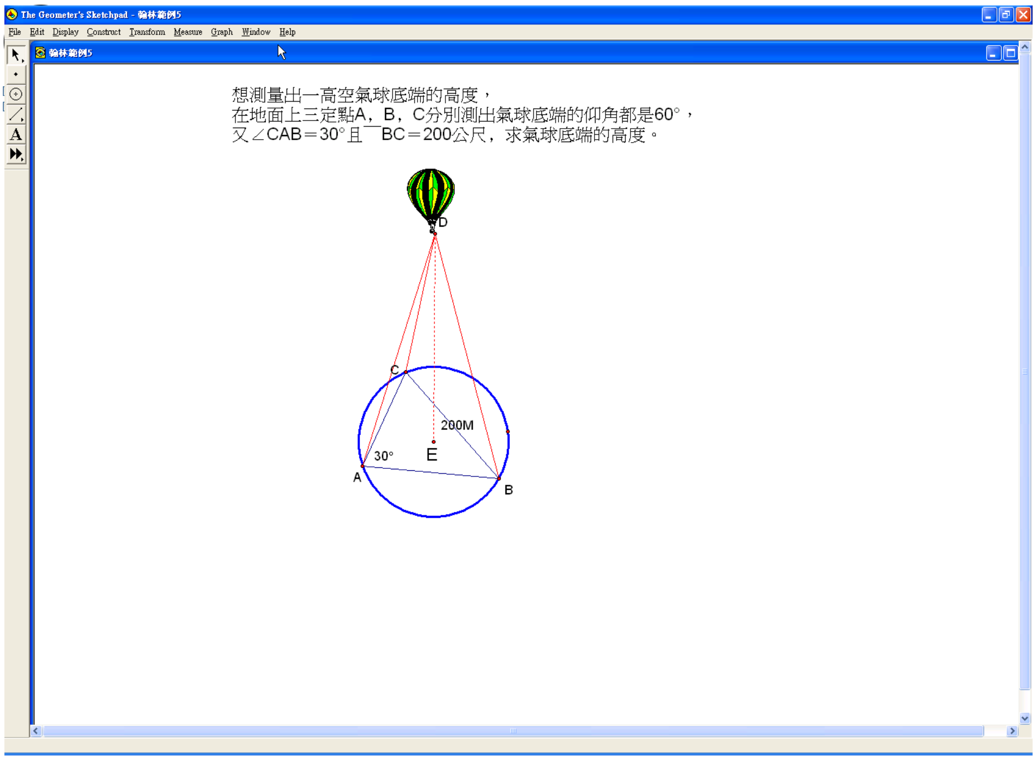



圖 4-3-31 範例四以 GSP 動態模擬呈現

（丙）以 GeoGebra

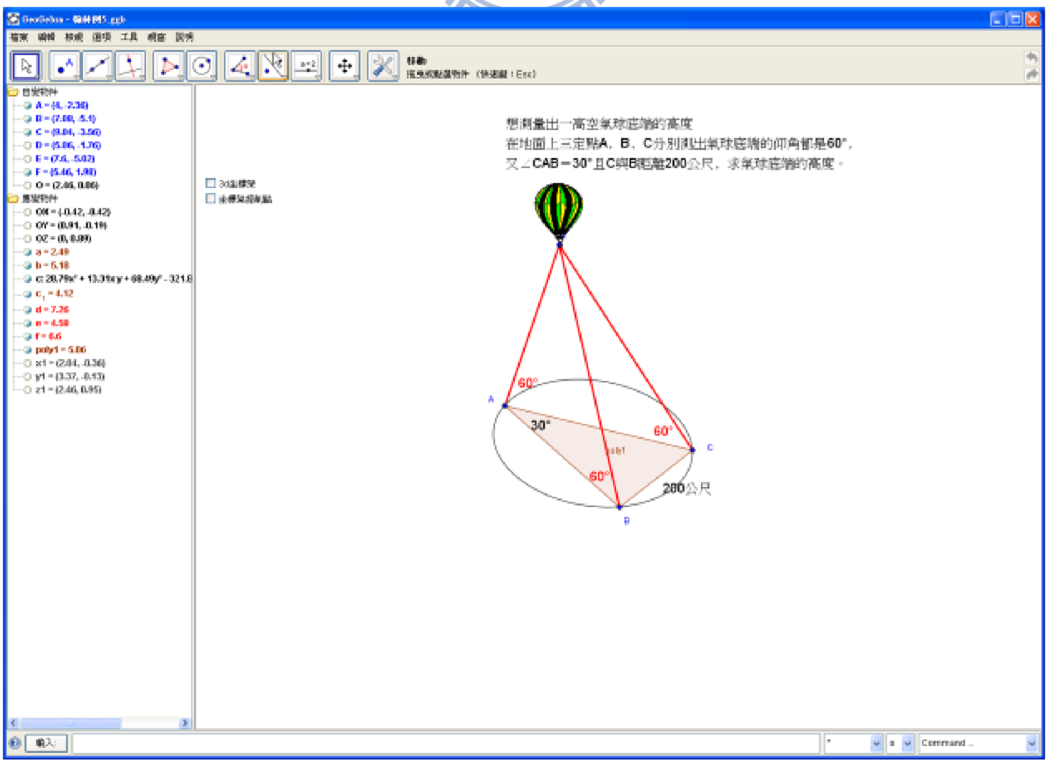
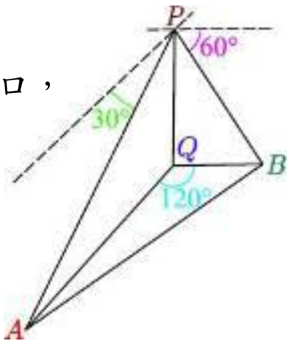



圖 4-3-32 範例四以 GeoGebra 動態模擬呈現

範例五

<u>小傑</u>在高 100 公尺的大樓陽台觀測到正西方俯角 30 度處有一牌樓，在南 30 度東，俯角 60 度處為學校門口，試求牌樓與校門口間的距離約為多少公尺？　　　　　　　　（三民版 98 年第二章第六節例題 4 課本內容）




解　如圖所示，設 $\overline{PQ}$ 表大樓，A 表牌樓，B 表校門口，

則 $\angle AQB=120^\circ$，$\overline{AQ}=100\cot 30^\circ=100\sqrt{3}$，

$\overline{BQ}=100\cot 60^\circ=\dfrac{100}{\sqrt{3}}$，

由餘弦定理得 $\overline{AB}^2=(100\sqrt{3})^2+(\dfrac{100}{\sqrt{3}})^2-2\cdot 100\sqrt{3}\cdot\dfrac{100}{\sqrt{3}}\cdot\cos 120^\circ$

$=100^2\cdot 3+100^2\cdot\dfrac{1}{3}+100^2=100^2\cdot\dfrac{13}{3}$，

開根號得 $\overline{AB}=\sqrt{100^2\times\dfrac{13}{3}}=100\cdot\sqrt{\dfrac{13}{3}}=208.167=208$，

故牌樓與校門口間的距離約為 208 公尺．

（甲）以 cabri 3D 呈現

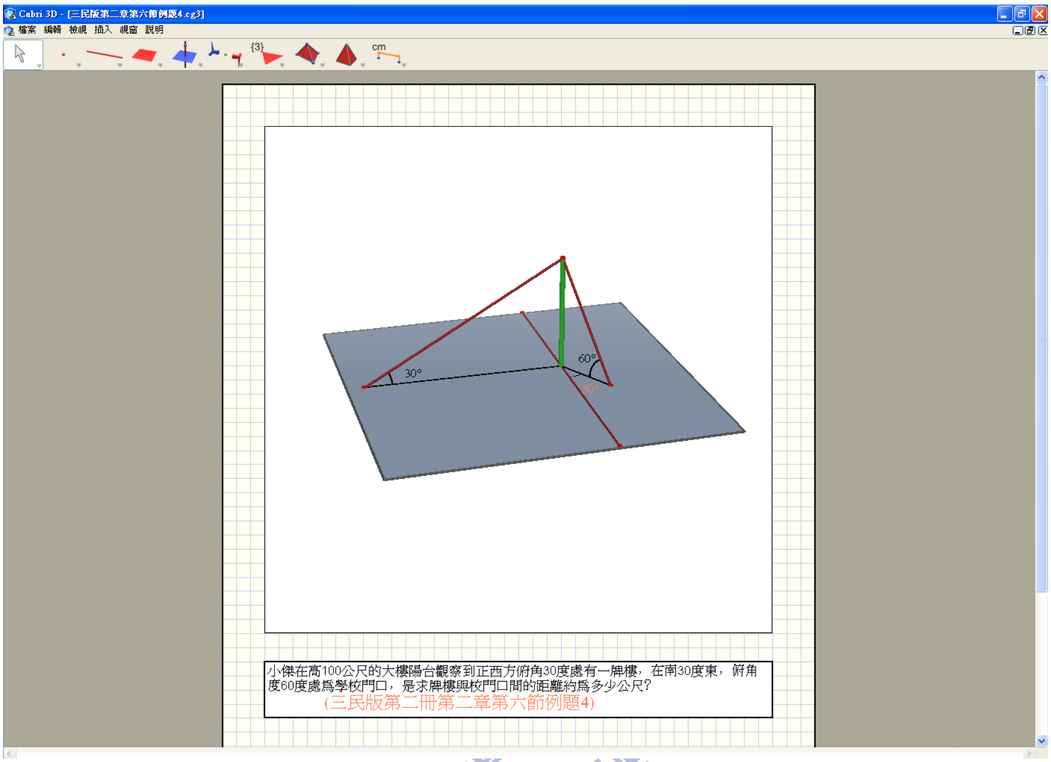



圖 4-3-33 範例五以 Cabri 3D 動態模擬呈現(1)

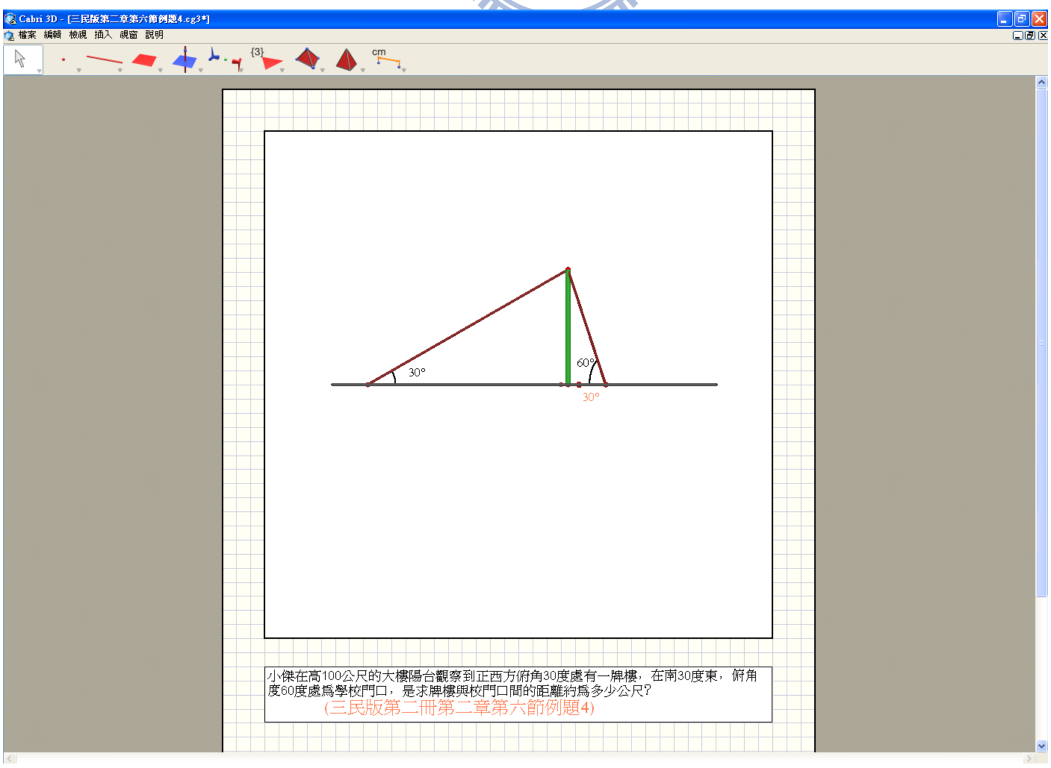



圖 4-3-34 範例五以 Cabri 3D 動態模擬呈現(2)

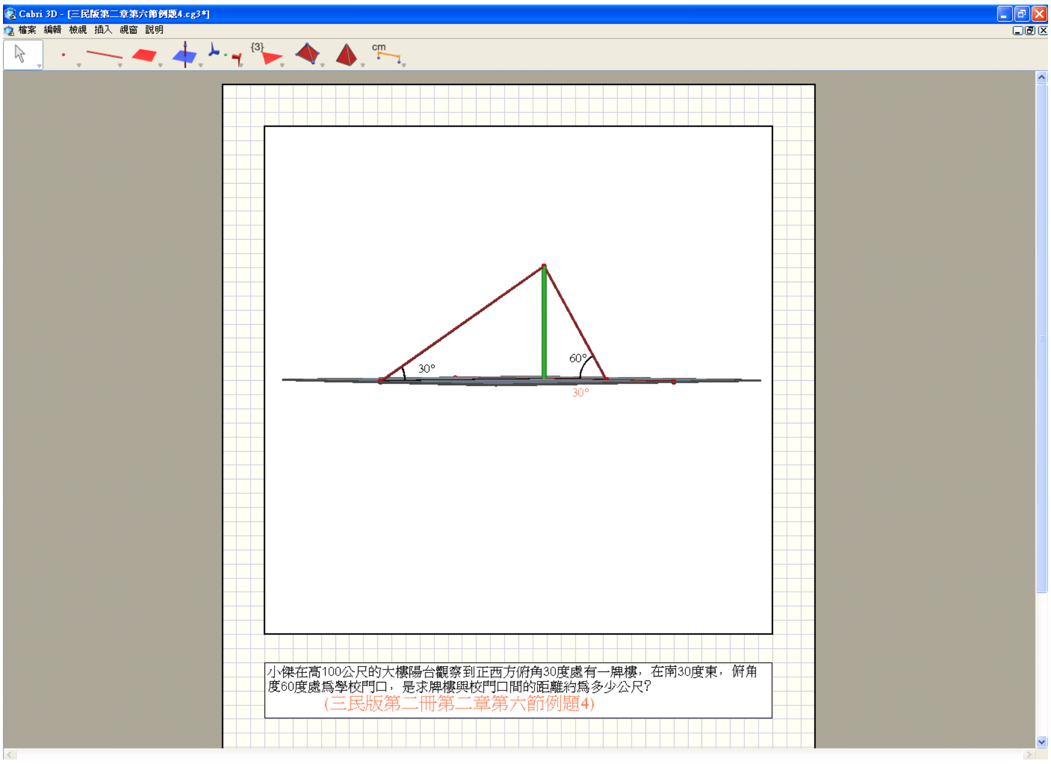



圖 4-3-35 範例五以 Cabri 3D 動態模擬呈現(3)

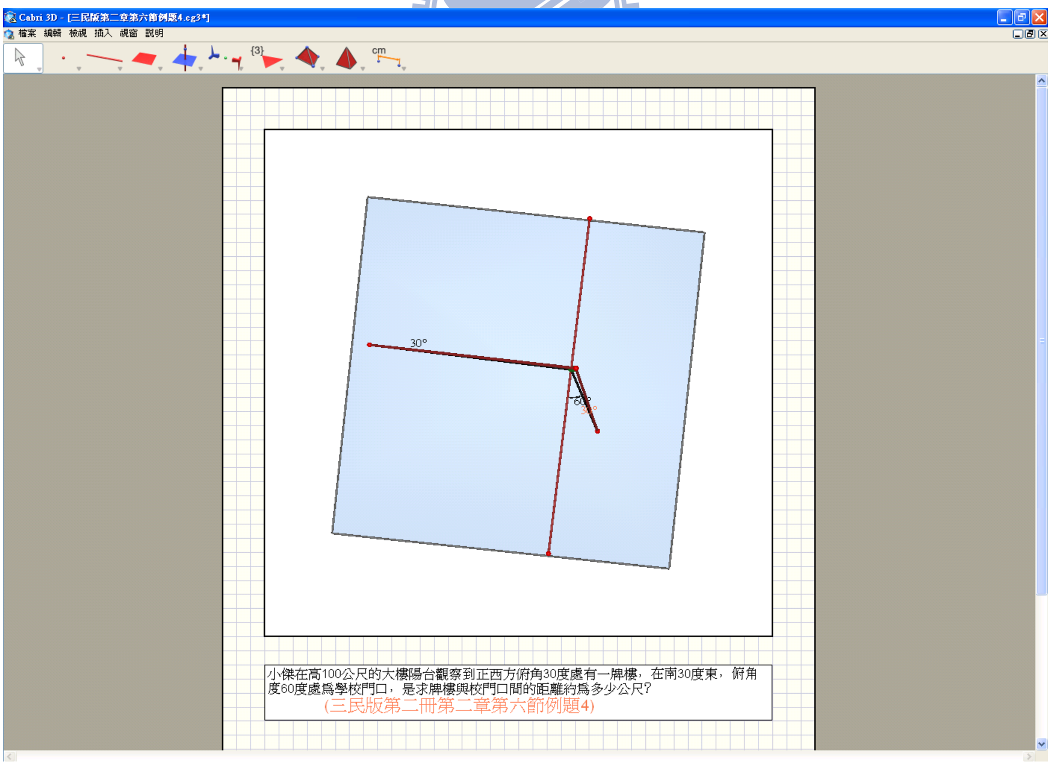



圖 4-3-36 範例五以 Cabri 3D 動態模擬呈現(4)

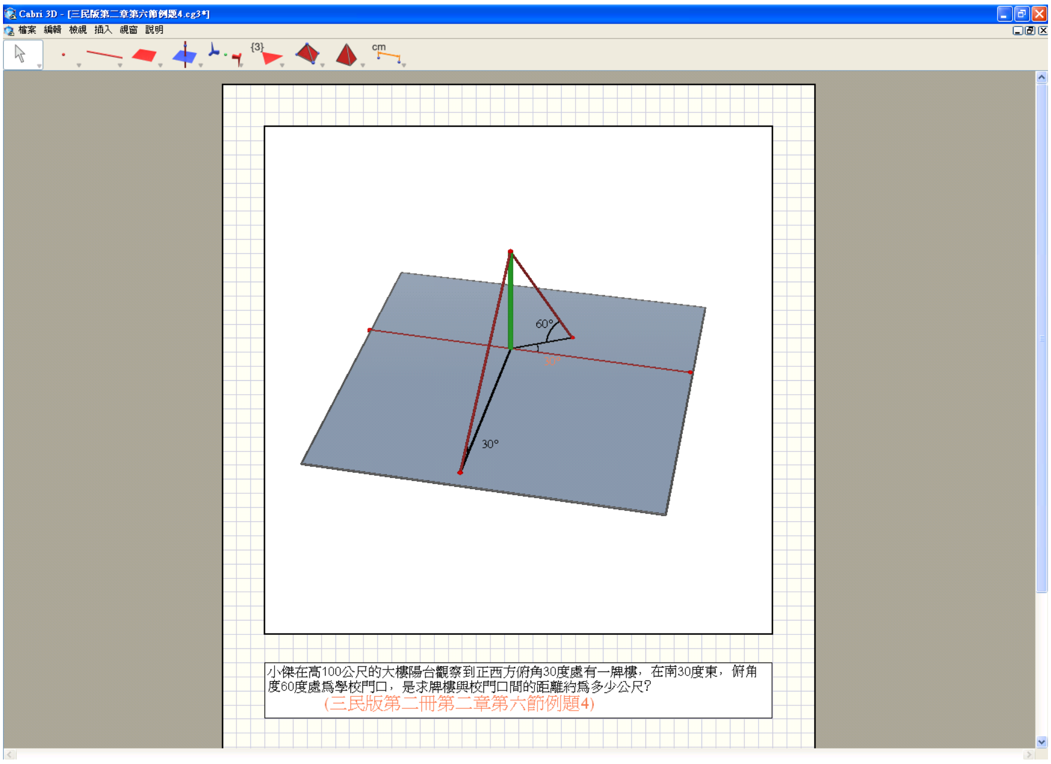



圖 4-3-37 範例五以 Cabri 3D 動態模擬呈現(5)

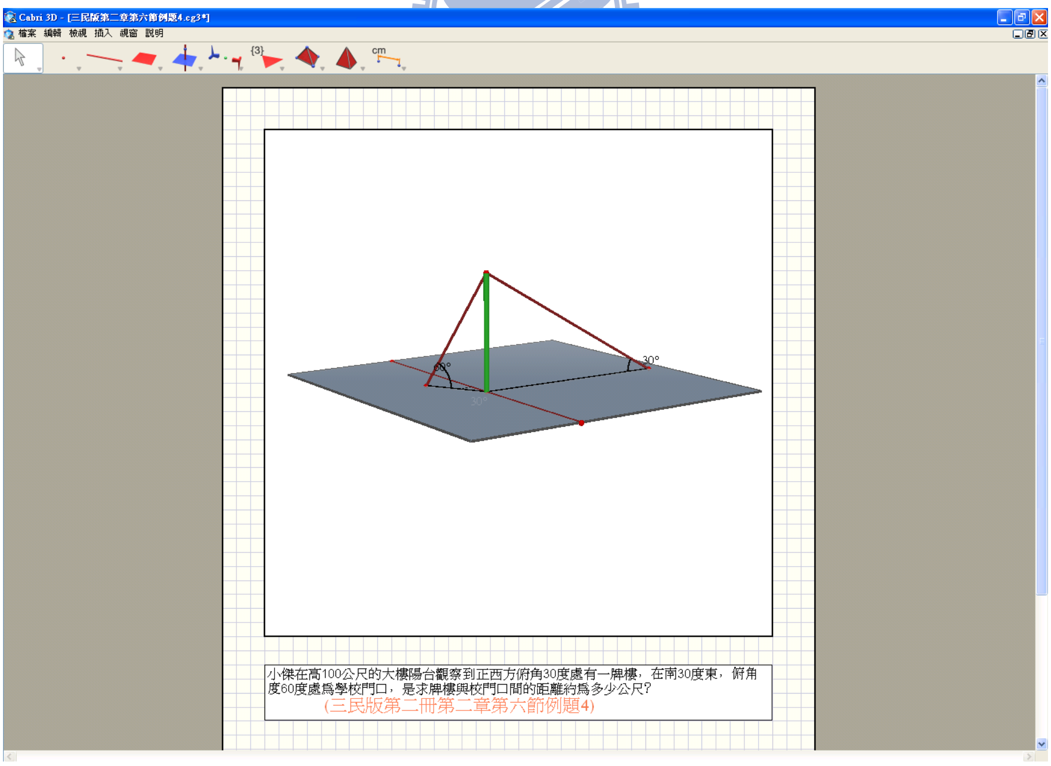



圖 4-3-38 範例五以 Cabri 3D 動態模擬呈現(6)

（乙）以 GSP 表示

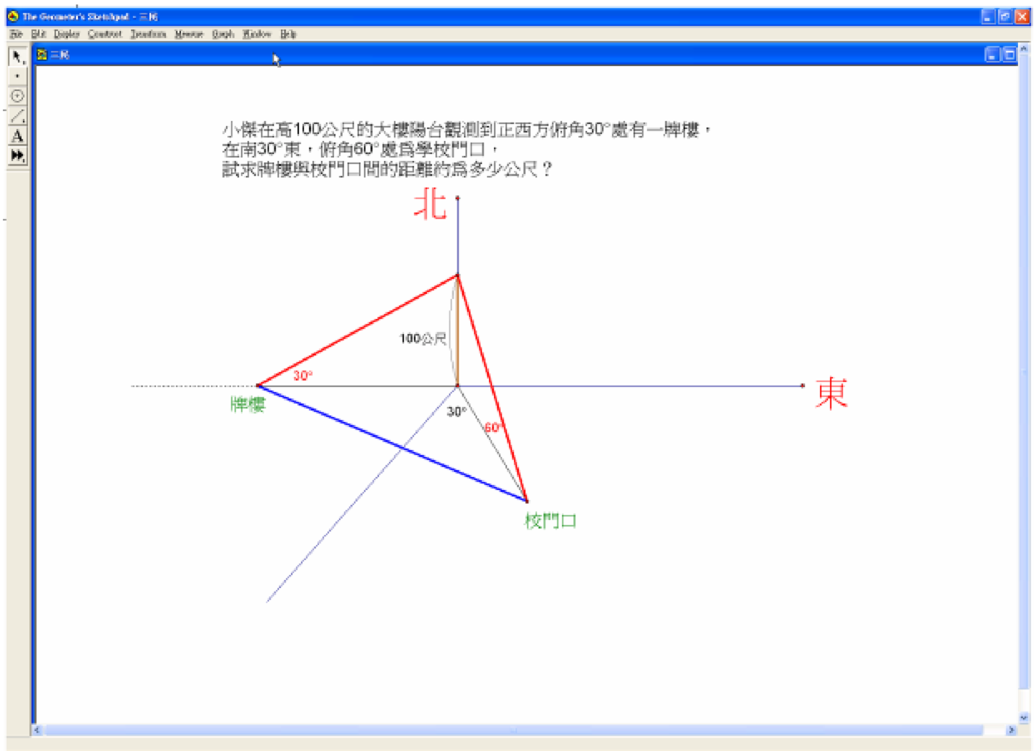



圖 4-3-39 範例五以 GSP 動態模擬呈現

（丙）以 GeoGebra

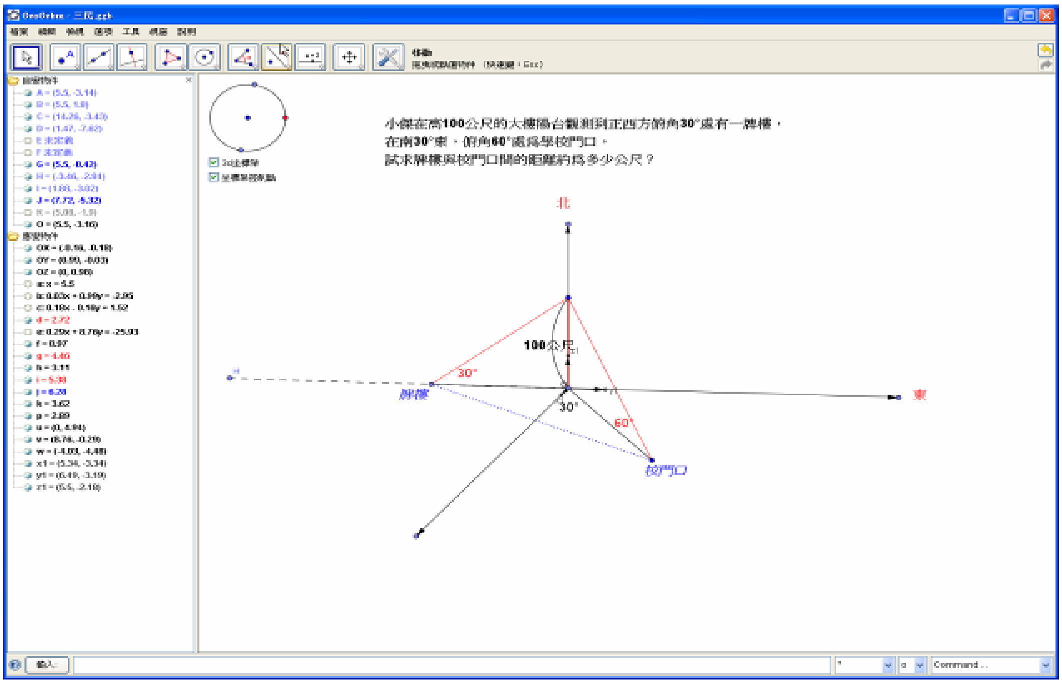
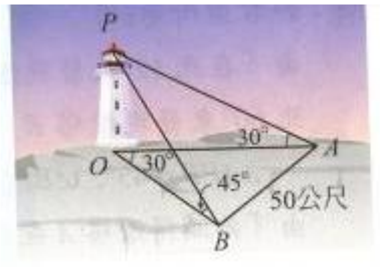


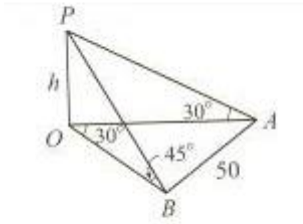

圖 4-3-40 範例五以 GeoGebra 動態模擬呈現

範例六

自塔的正東方 A 點測的塔頂仰角為$30^\circ$;
而在塔的東$30^\circ$南 B 點測得塔頂仰角為$45^\circ$，
已知 A 與 B 相距 50 公尺，求塔高。
（龍騰版 98 年第二章第六節例題 3 課本內容）




解：
如圖所示，設塔高為$h$公尺。




由直角三角形 PAO 得 $\dfrac{h}{\overline{OA}}=\tan 30^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \overline{OA}=\sqrt{3}h$

再由直角三角形 PBO 得 $\dfrac{h}{\overline{OB}}=\tan 45^\circ=1 \Rightarrow \overline{OB}=h$

在□$OAB$中，已知$\overline{OA}$與$\overline{OB}$兩邊長及其夾角$\angle AOB$，

可利用餘弦定理$\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2-2\cdot\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\cos\angle AOB$得

$50^2=(\sqrt{3}h)^2+h^2-2(\sqrt{3}h)\cdot h\cdot(\dfrac{\sqrt{3}}{2}) \Rightarrow 50^2=h^2$，解得塔高$h=50$（公尺）

（甲）以 cabri 3D 呈現

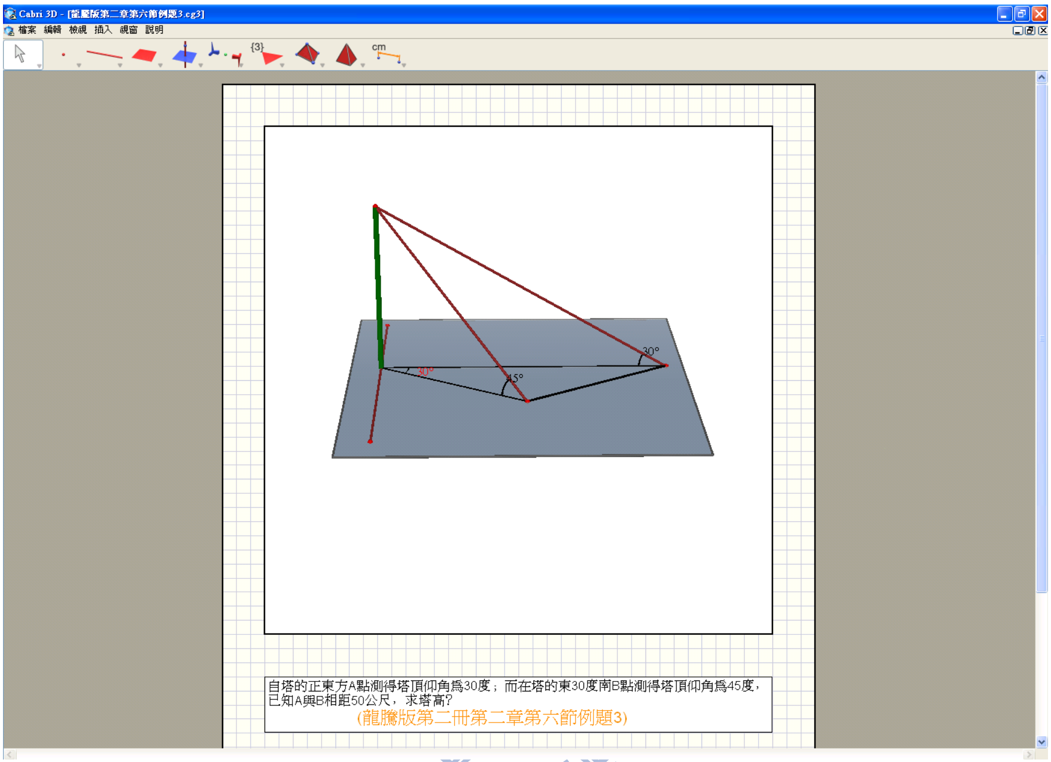



圖 4-3-41 範例六以 Cabri 3D 動態模擬呈現(1)

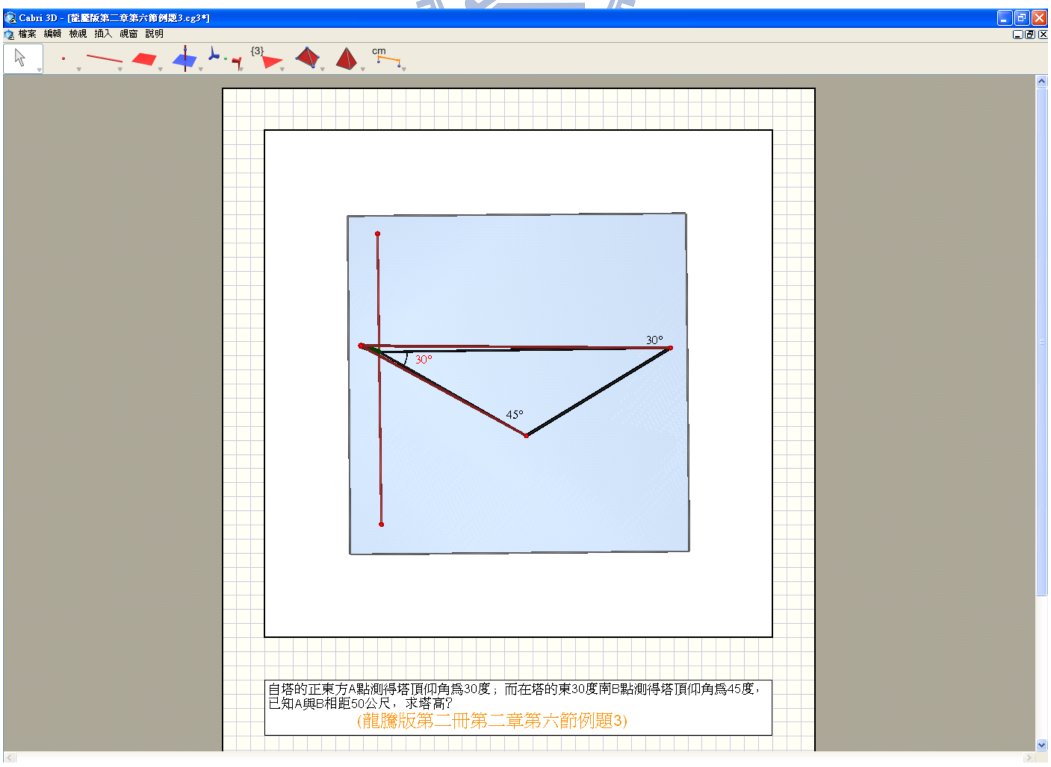



圖 4-3-42 範例六以 Cabri 3D 動態模擬呈現(2)

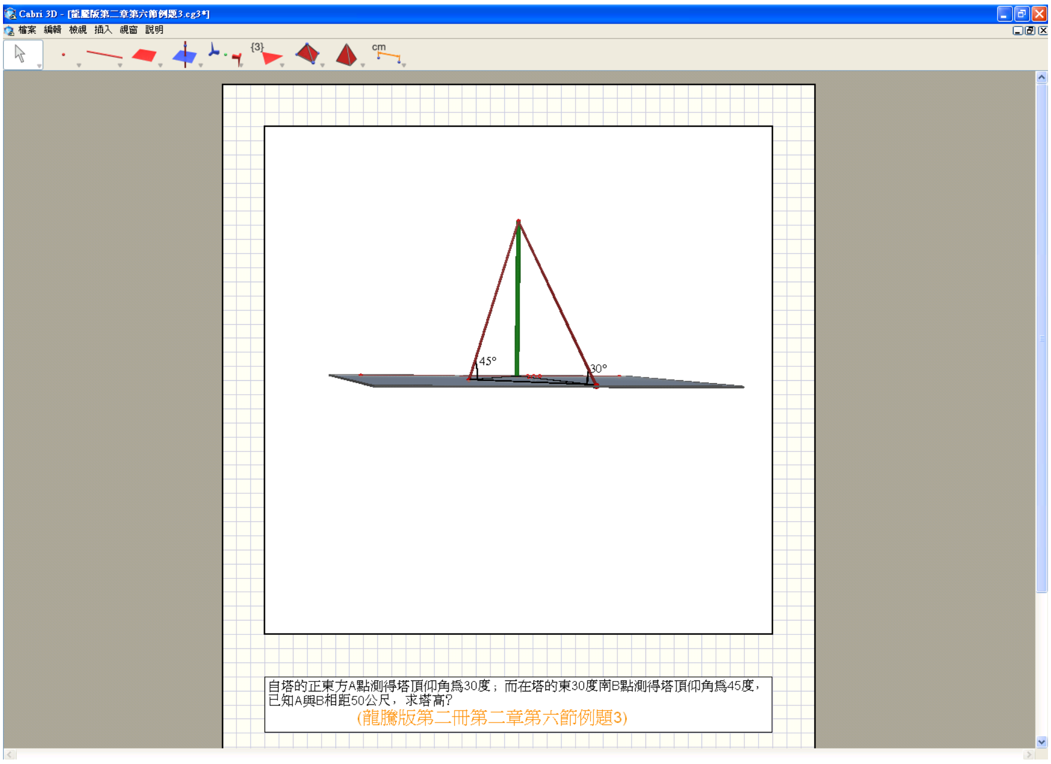



圖 4-3-43 範例六以 Cabri 3D 動態模擬呈現(3)

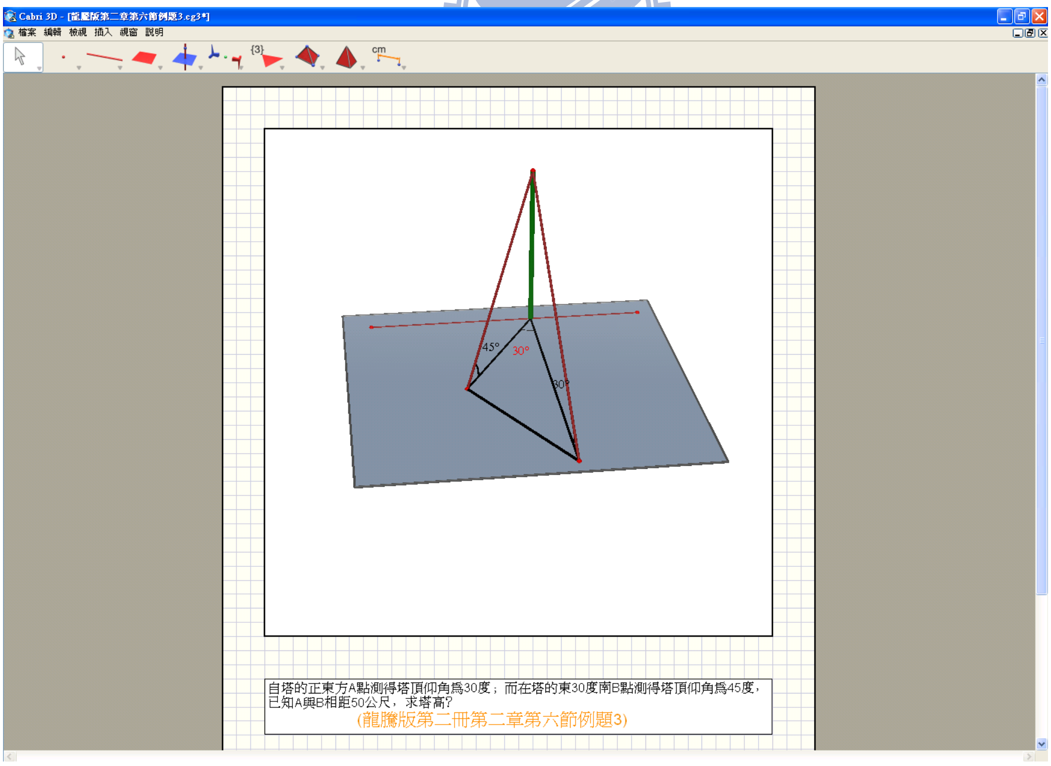



圖 4-3-44 範例六以 Cabri 3D 動態模擬呈現(4)

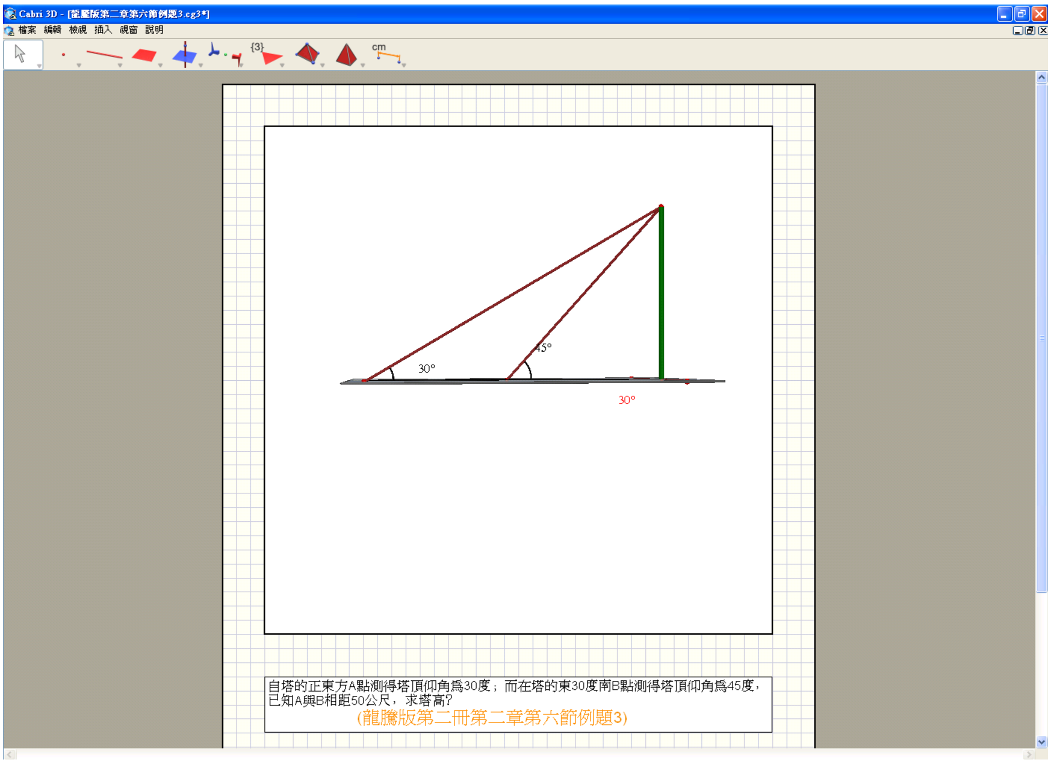



圖 4-3-45 範例六以 Cabri 3D 動態模擬呈現(5)

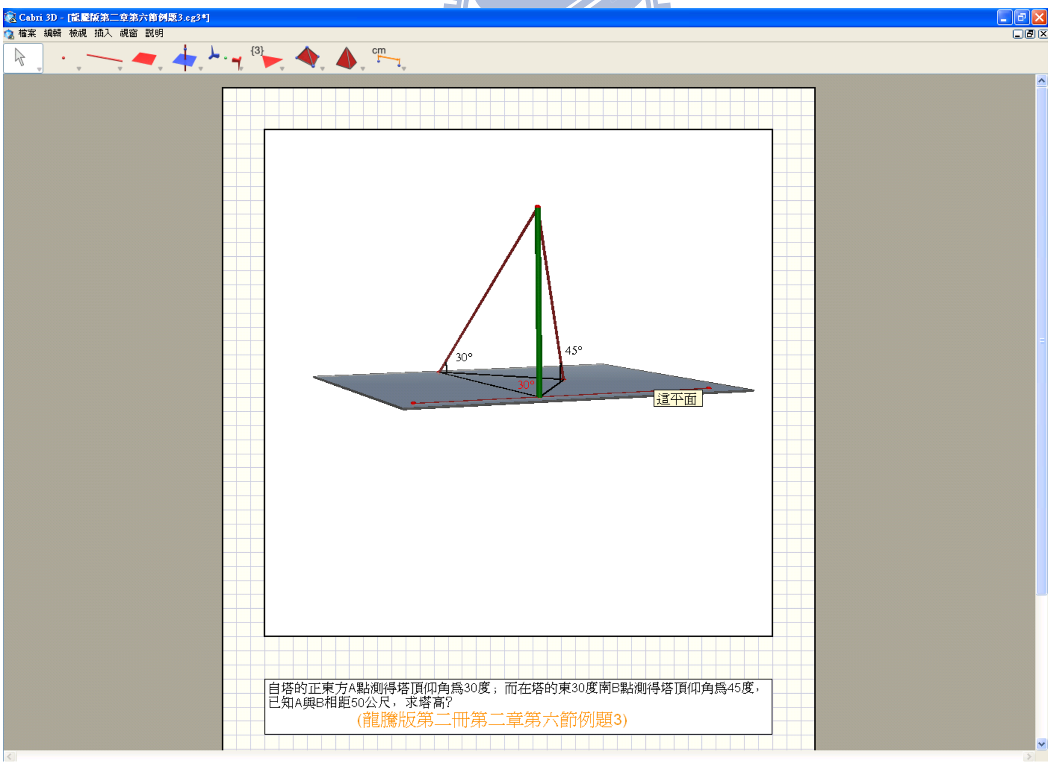



圖 4-3-46 範例六以 Cabri 3D 動態模擬呈現(6)

（乙）以 GSP 表示

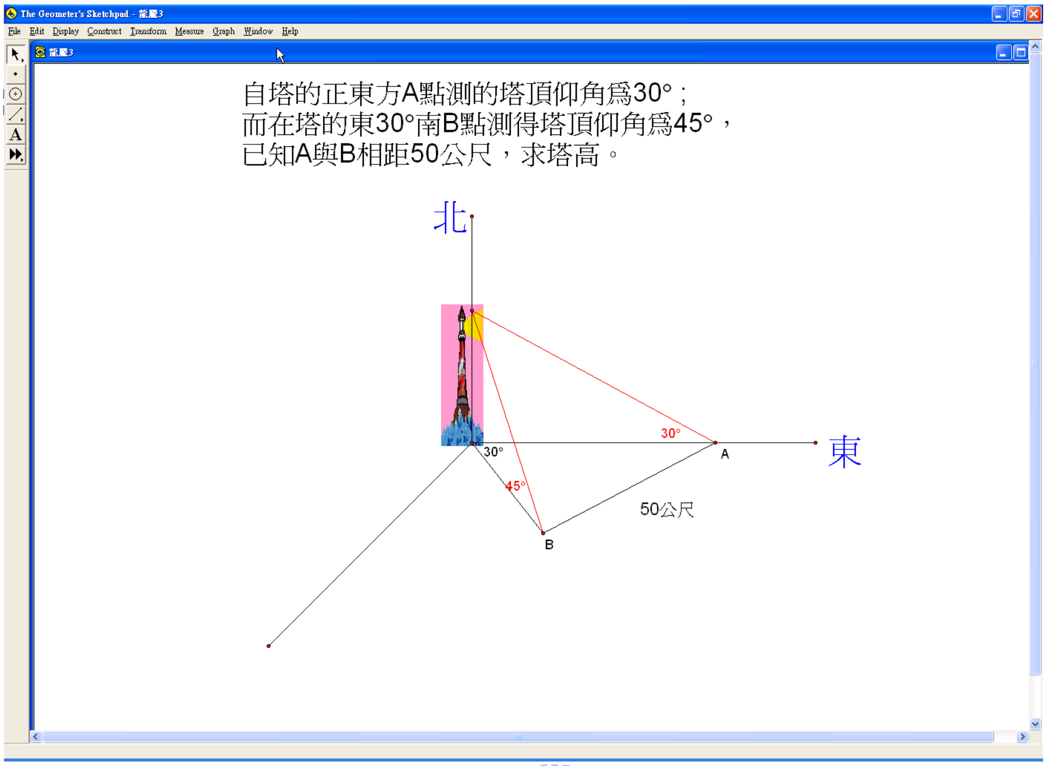



圖 4-3-47 範例六以 GSP 動態模擬呈現

（丙）以 GeoGebra

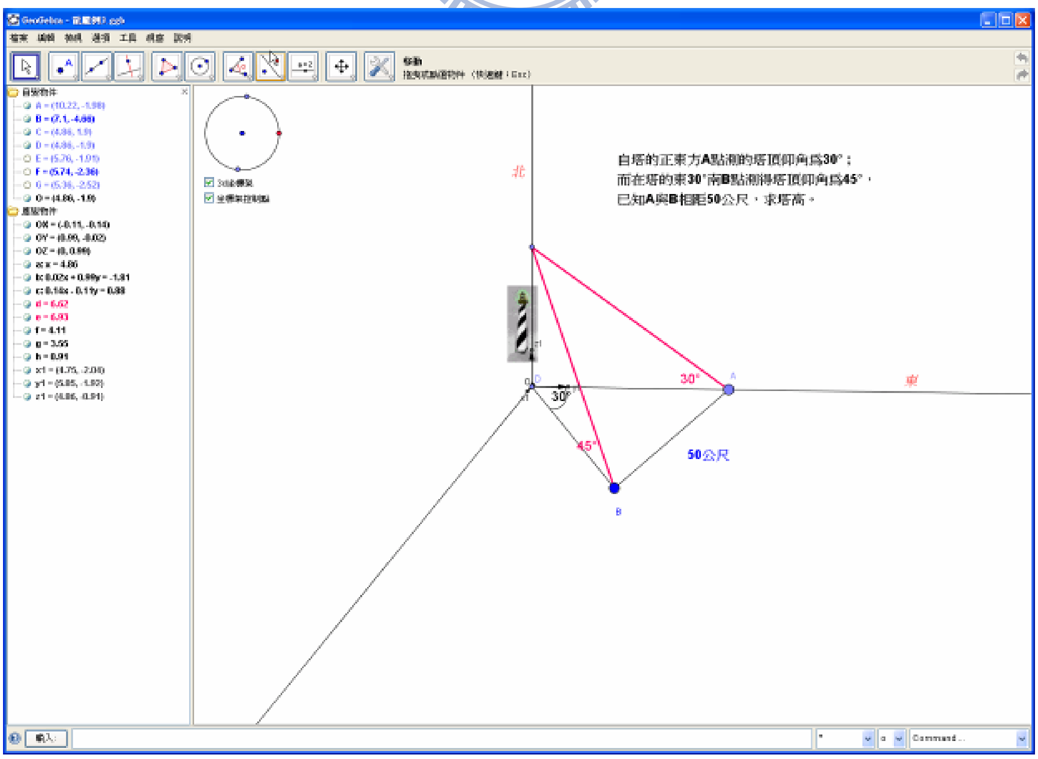



圖 4-3-48 範例六以 GeoGebra 動態模擬呈現

心得比較：

| | 製作成本（時間） | 從學習者角度 | 從教師角度 |
|---|---|---|---|
| Cabri 3D | Cabri 3D 需購買，知名度較 GSP 低。<br>做一個例子大約 20 分鐘 | 針對立體幾何的部分，Cabri 3D 可以模擬出整個空間。對學習者而言，不會有盲點，可用不同角度來觀看，減少學習上的問題。 | 省去傳統在黑板上模擬空間的畫法，比起做教具而言，省時又清楚解釋上課內容。 |
| GSP | GSP 需購買，在台灣算很普遍。<br>做一個例子大約 10 分鐘 | 主要是在處理平面幾何的問題，對於空間，雖可以模擬，但仍舊在 2D 的架構上，相較 Cabri 3D 的功能來說，在空間的功用就沒這麼大。 | 操作 GSP 並不陌生，在平面幾何的部分，能達到老師的要求。<br>空間幾何，建議採用 Cabri 3D 功效較好。 |
| GeoGebra | GeoGebra 網路可下載。相較 GSP，此軟體開發時間較晚。<br>做一個例子大約 10 分鐘 | 效果跟 GSP 差不多。可利用 GeoGebra 的功能觀察其作圖的步驟，可增加學習者的數學能力。 | 操作上跟 GSP 類似，功能較完備。不管是平面幾何還是空間幾何都可以模擬。 |

表 4-3-1 使用心得比較表

## 4-4 各級考試範例

範例一

在 A,B 兩支旗竿底端連線段中的某一點測出 A 旗竿頂端的仰角為 29 度，B 旗竿頂端的仰角為 15 度。在底端連線段中的另一點測得 A 旗竿頂端的仰角為 26 度，B 旗竿頂端的仰角為 19 度。則 A 旗竿高度和 B 旗竿高度的比值約為？

（98 指考數學甲）

(甲) 以 Cabri 3D

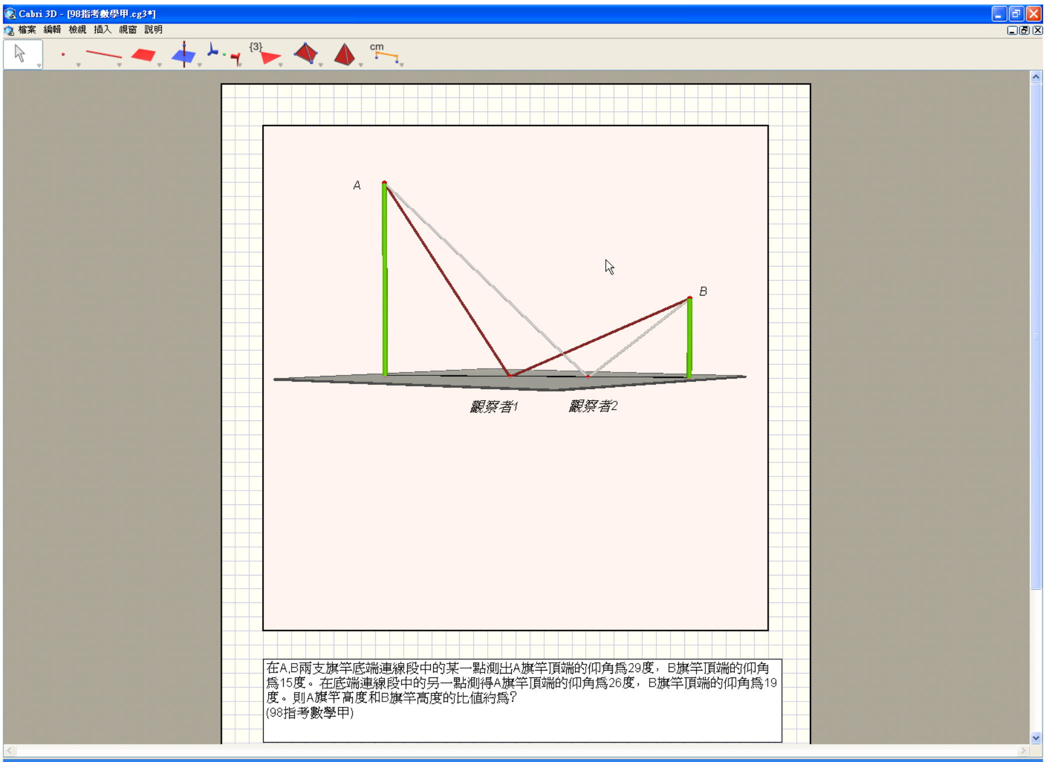



圖 4-4-1 範例一以 Cabri 3D 動態模擬呈現(1)

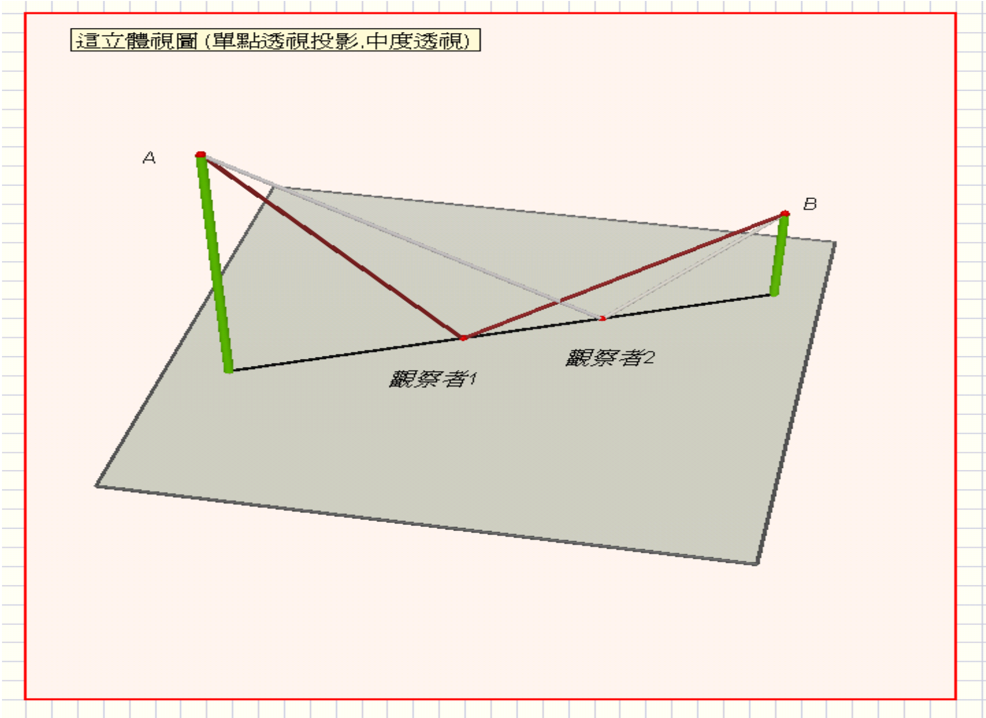



圖 4-4-2 範例一以 Cabri 3D 動態模擬呈現(2)

(乙) 以 GSP

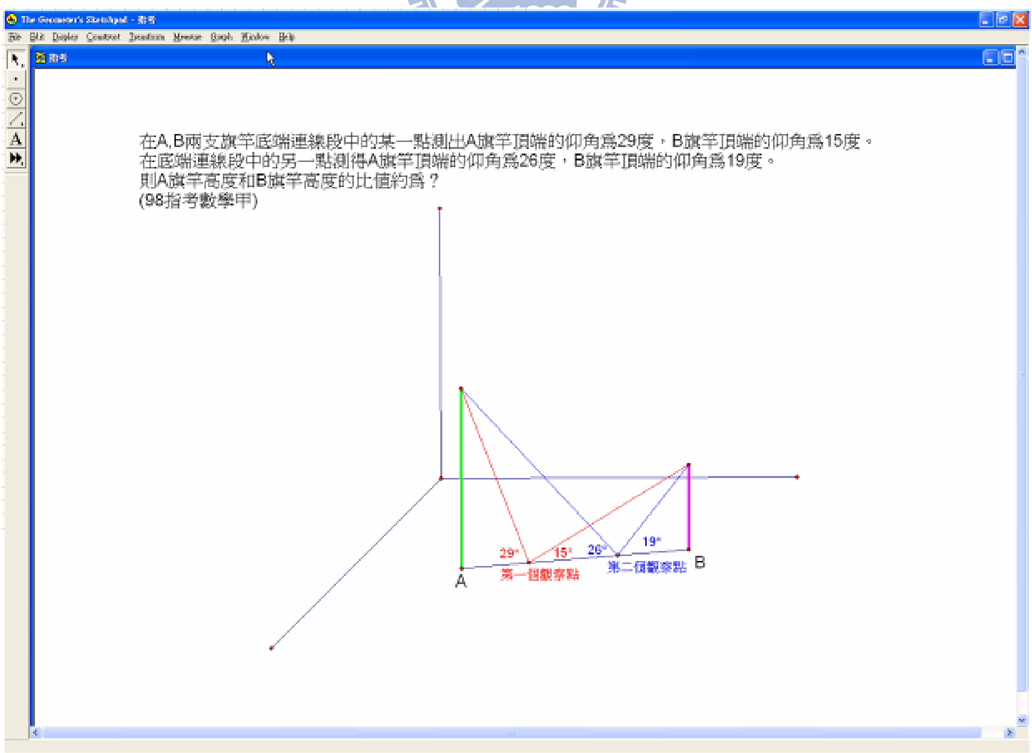



圖 4-4-3 範例一以 GSP 動態模擬呈現

(丙) 以 GeoGebra

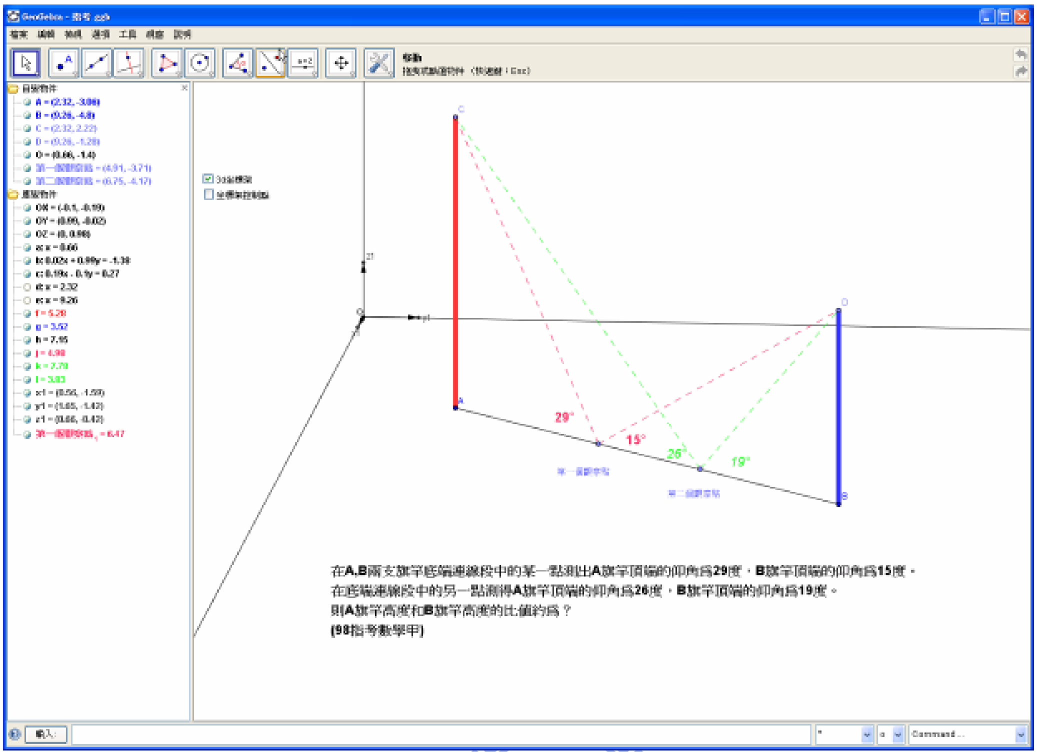



圖 4-4-4 範例一以 GeoGebra 動態模擬呈現

範例二

某機場基於飛航安全考量，限制機場附近建築物從機場中心地面到建築物頂樓的仰角不得超過 $8°$。某建築公司打算在離機場中心 3 公里且地表高度和機場中心一樣高的地方蓋一棟平均每樓層高 5 公尺的大樓。在符合機場的限制規定下，該大樓在地面以上最多可以蓋______層樓。

〔參考數據： $\sin 8° \approx 0.1392, \cos 8° \approx 0.9903, \tan 8° \approx 0.1405$ 〕 （95 指考數學乙）

(甲) 以 Cabri 3D

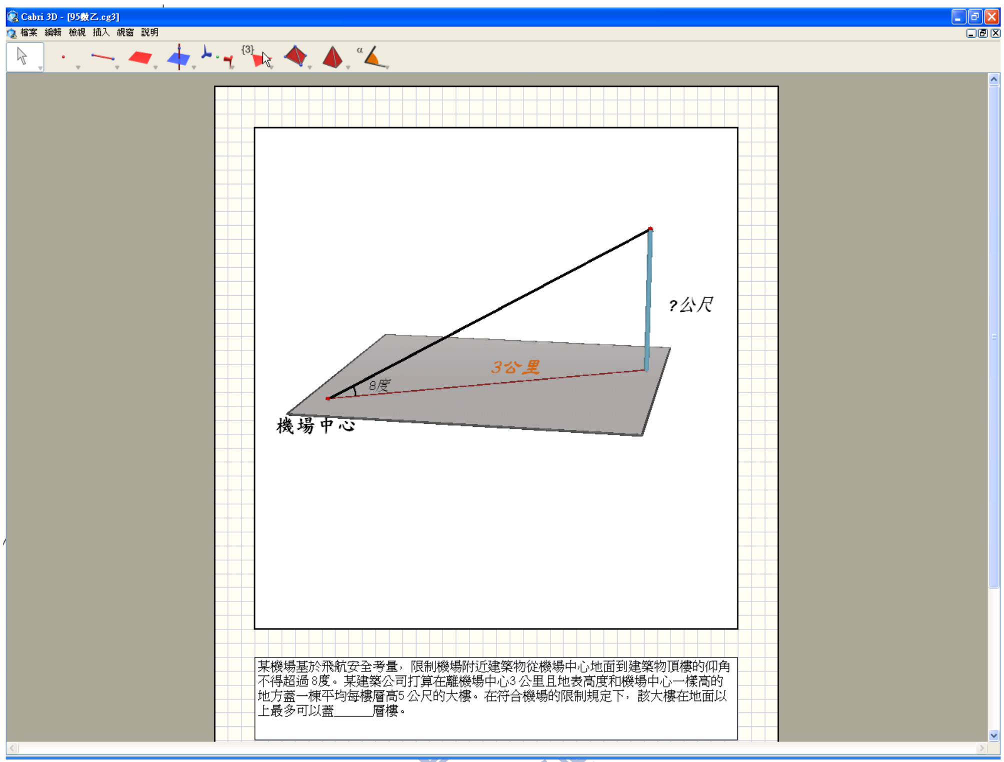



圖4-4-5 範例二以Cabri 3D動態模擬呈現(1)

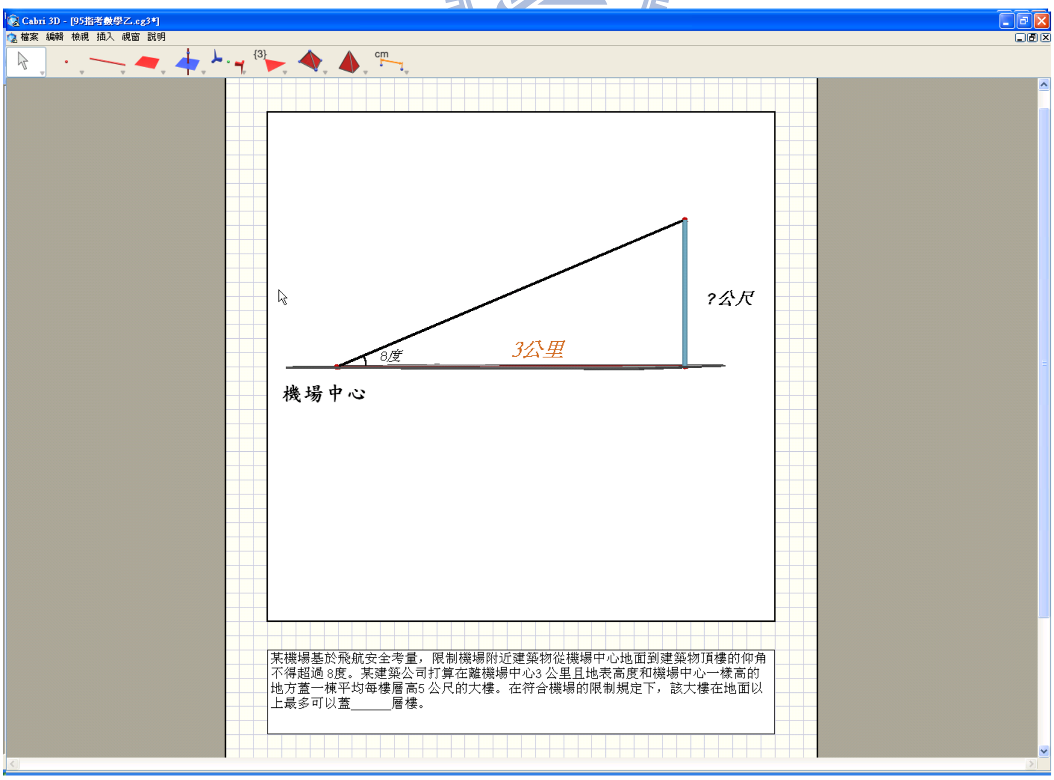



圖4-4-6 範例二以Cabri 3D動態模擬呈現(2)

(乙) 以 GSP

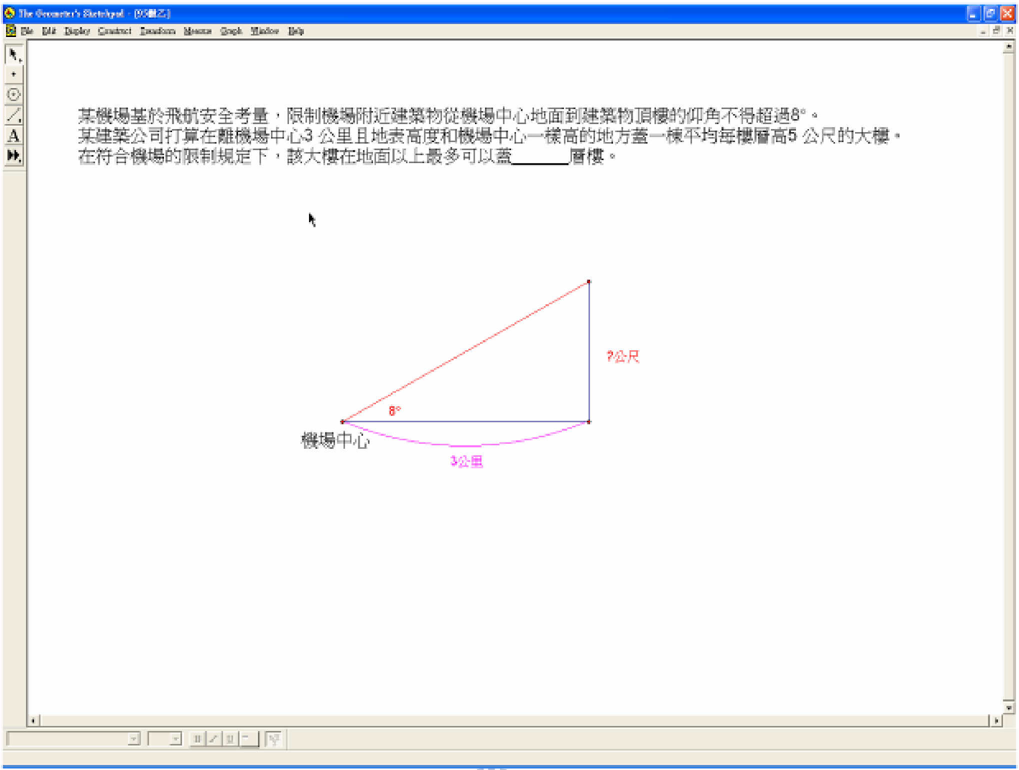



圖4-4-7 範例二以GSP動態模擬呈現

(丙) 以 GeoGebra

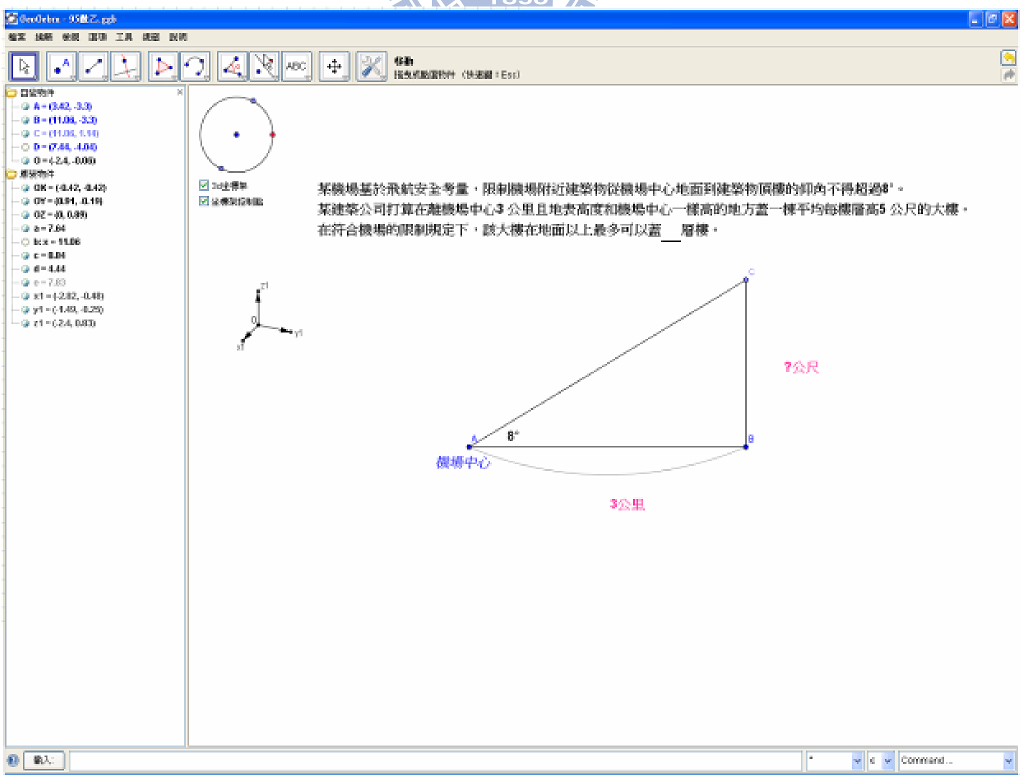



圖 4-4-8 範例二以 GeoGebra 動態模擬呈現

範例三

小明玩戰爭網路遊戲，在螢幕上有一坐標平面，飛機 P 以等速直線前進，在坐標（-12,4）的位置被發現，經過 1 秒後到達坐標（-10,4），再經 1 秒後，小明從原點選一方向發射一飛彈 R，假設 R 也以直線前進且速率跟 P 相同，而且 R 剛好擊中 P。試求 R 擊中 P 時的坐標（a,b）為______________。　（94 指考數學乙）

(甲) 以 Cabri 3D

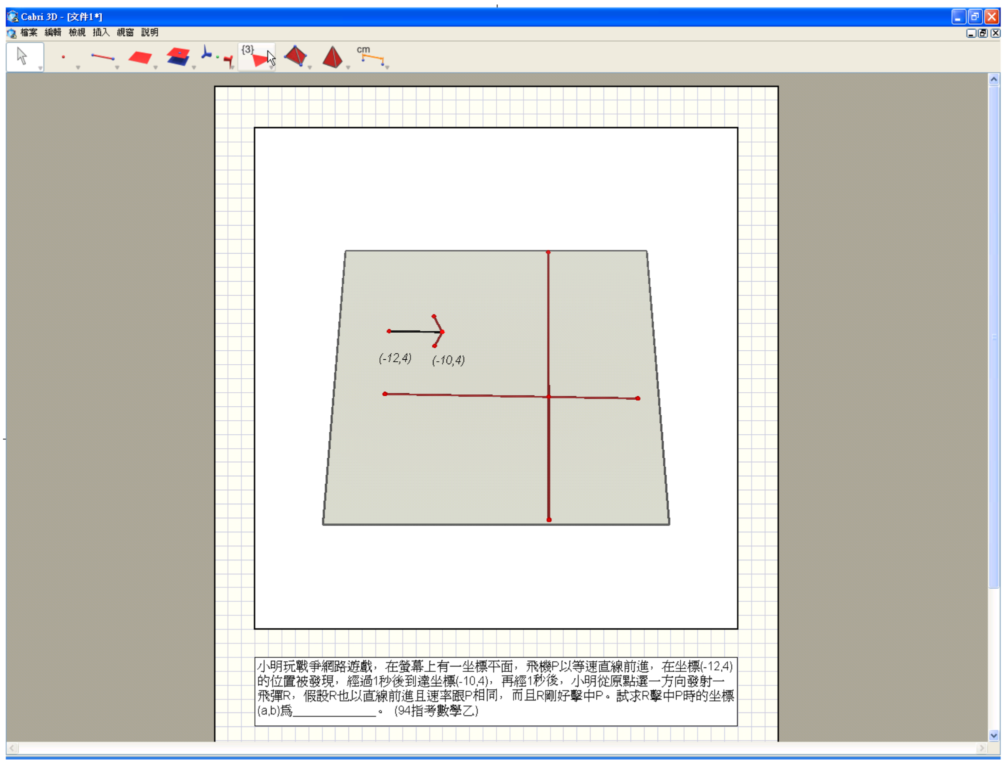



圖 4-4-9 範例三以 Cabri 3D 動態模擬呈現

(乙) 以 GSP

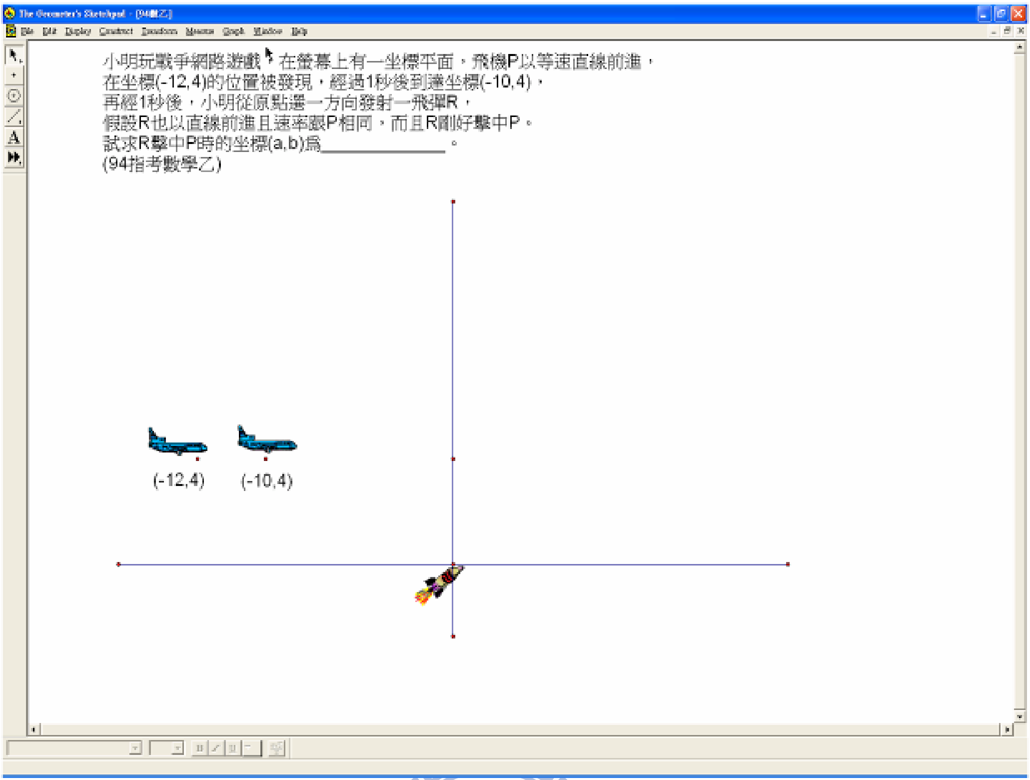



圖 4-4-10 範例三以 GSP 動態模擬呈現

(丙) 以 GeoGebra

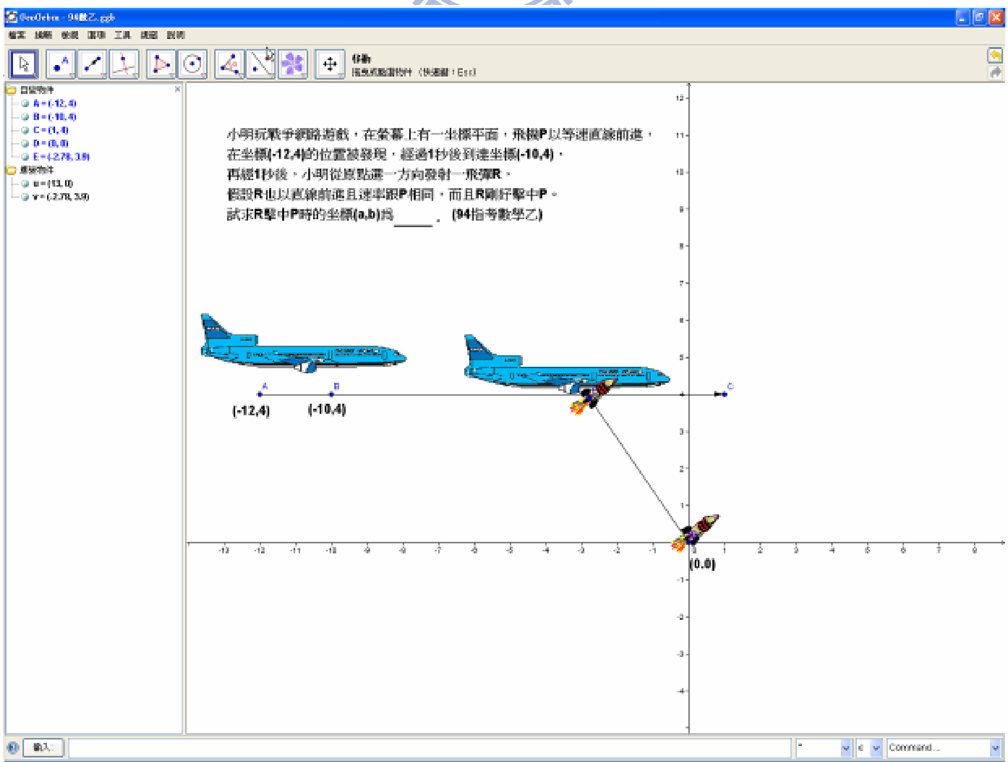



圖 4-4-11 範例三以 GeoGebra 動態模擬呈現

範例四

一飛機在大雄的正北方,見此飛機平行地面等速向東飛行,其仰角為 60 度,又飛機向東飛行 600 公尺後,在原地觀測飛機仰角成為 45 度,試問飛機的高度為幾公尺?

（97 年北區模擬試題）

（甲） 以 Cabri 3D

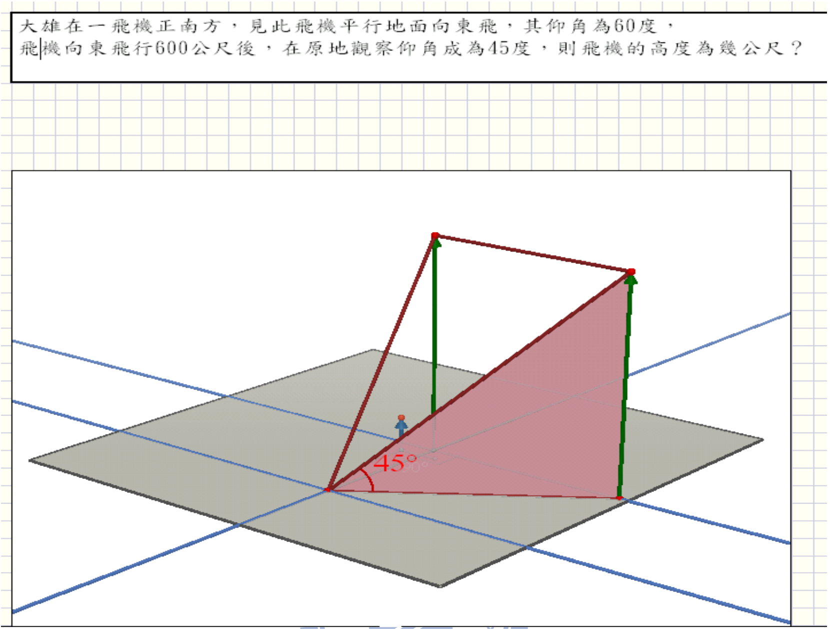



圖 4-4-12 範例四以 Cabri 3D 動態模擬呈現(1)

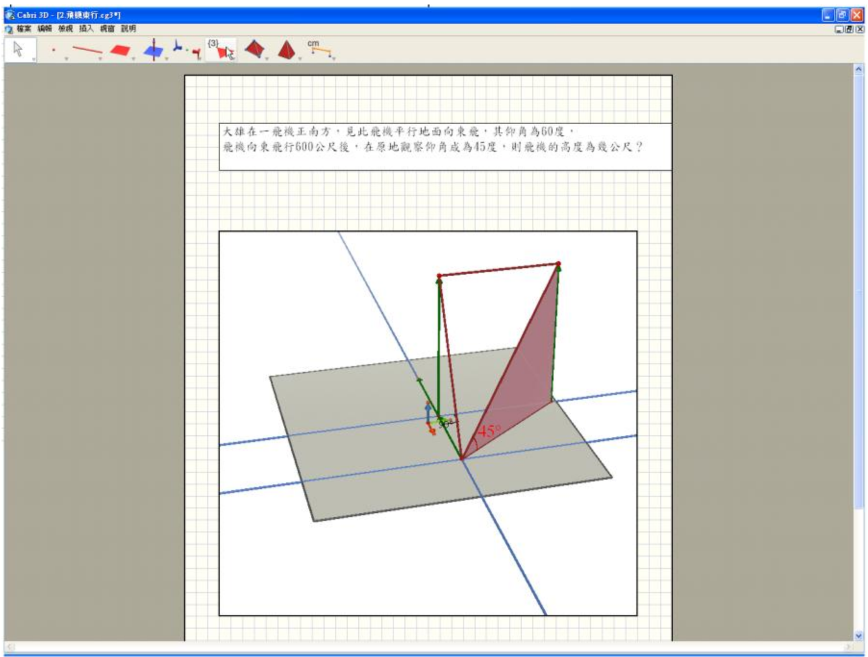



圖 4-4-13 範例四以 Cabri 3D 動態模擬呈現(2)

（乙） 以 GSP

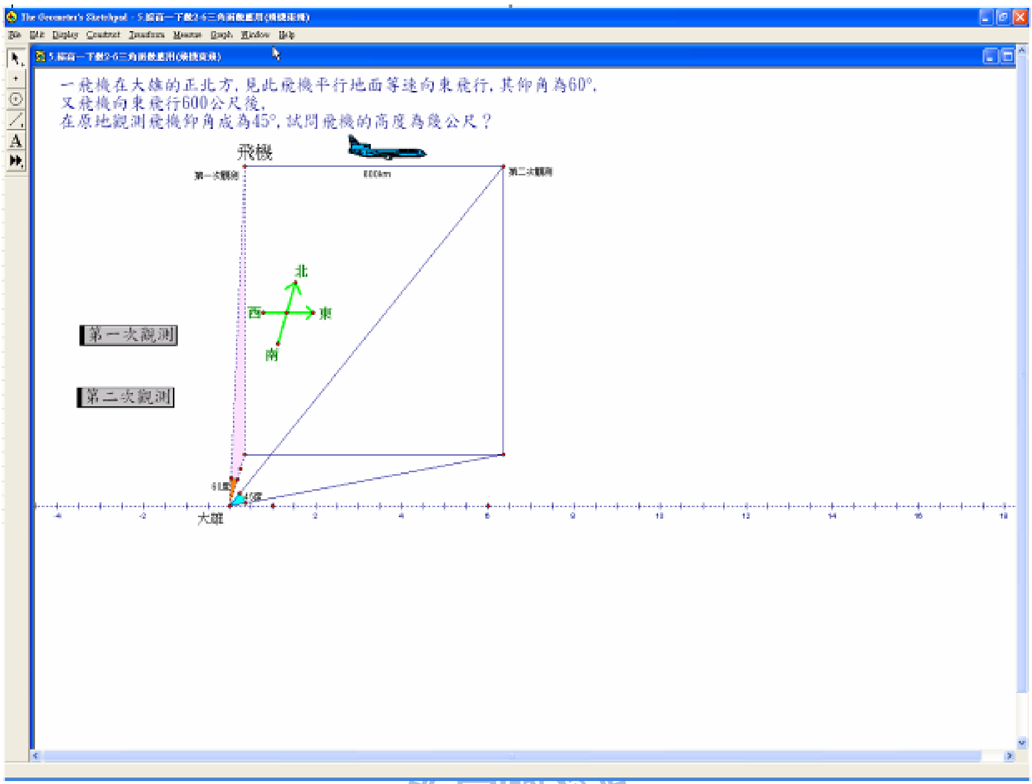



圖 4-4-14 範例四以 GSP 動態模擬呈現

（丙）以 Geogebra

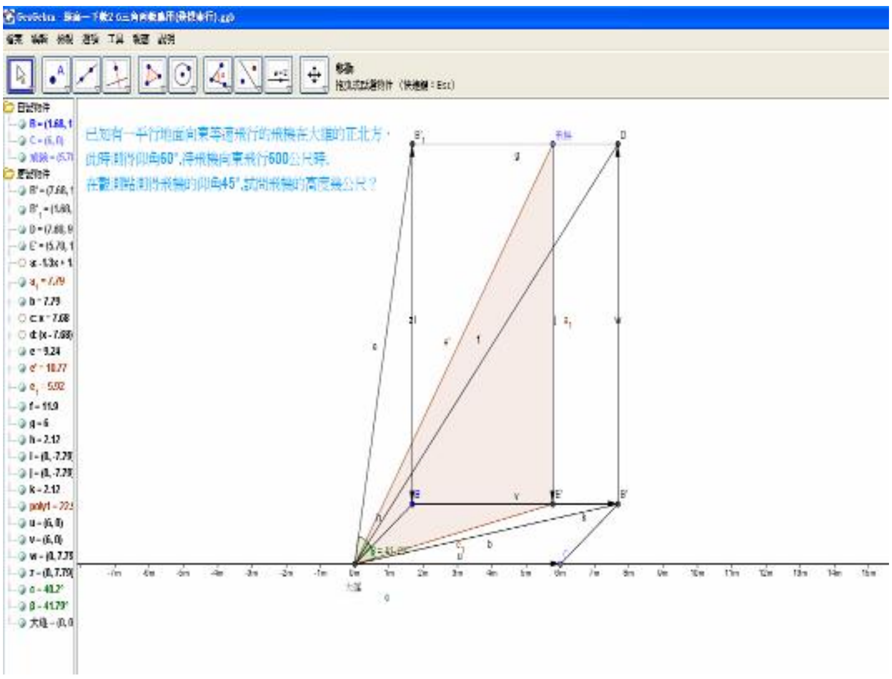


圖 4-4-15 範例四以 GeoGebra 動態模擬呈現

範例五

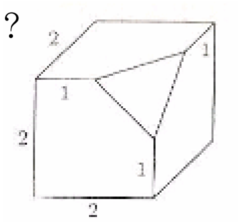
一個中空的立方體被切去一個角，出現了一個三角形的洞，各邊的尺寸如圖所示（以米為單位）。原立方體所剩下的外表面的面積（以米$^2$為單位）是多少？

（AMC,1988 年　中 17，初 22）

範例六

一個中空的立方體被切去一個角，出現了一個三角形的洞，各邊的尺寸如圖所示（以米為單位）。原立方體所剩下的體積（以米$^3$為單位）是多少？

（AMC,1988 年　中 17，初 22）




因為上述例題五例題六題目一樣，但問的內容不一致，所以製作動態教材時一樣

（甲）　以 Cabri 3D

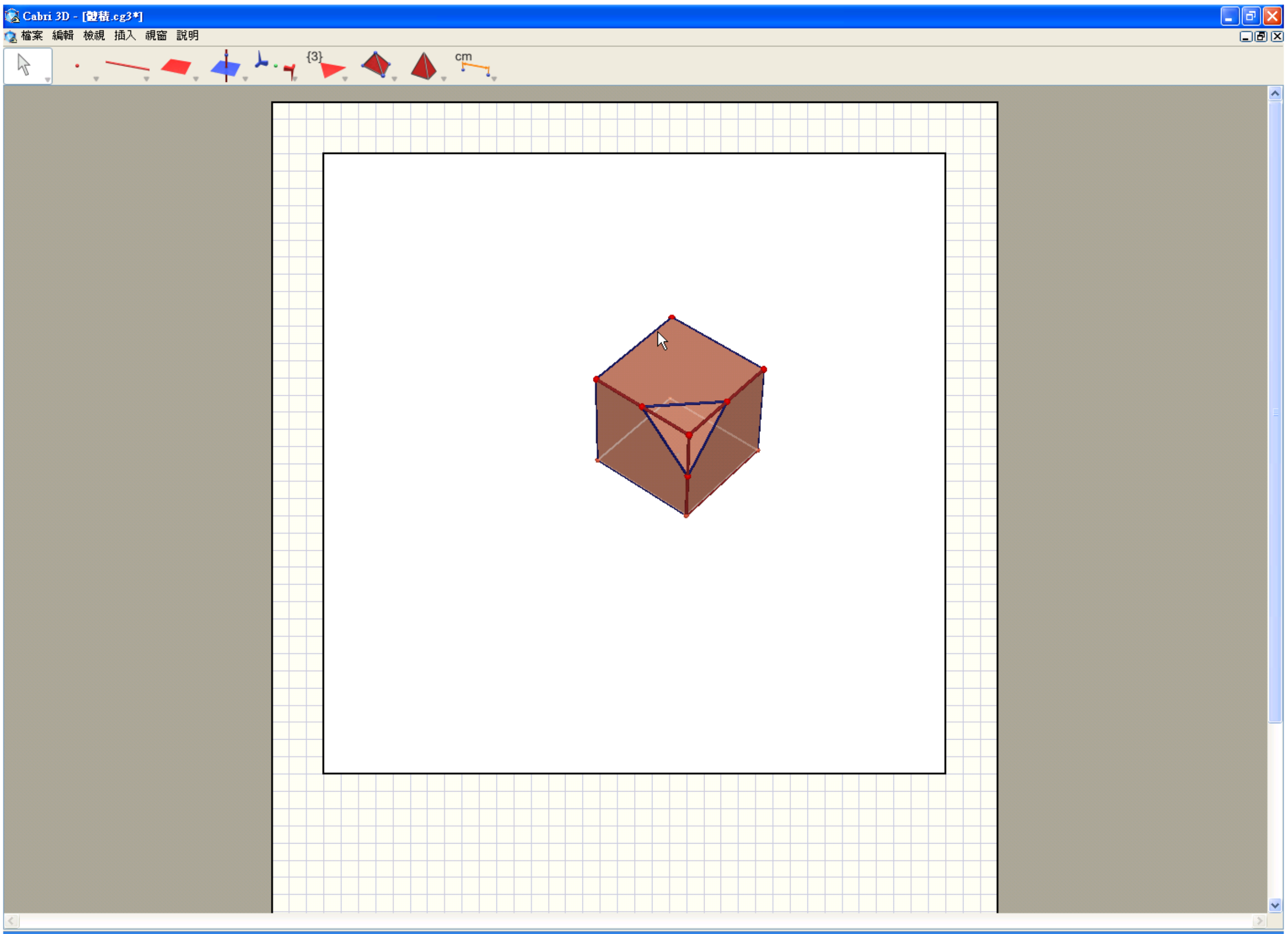



圖 4-4-16 範例五、六以 Cabri 3D 動態模擬呈現(1)

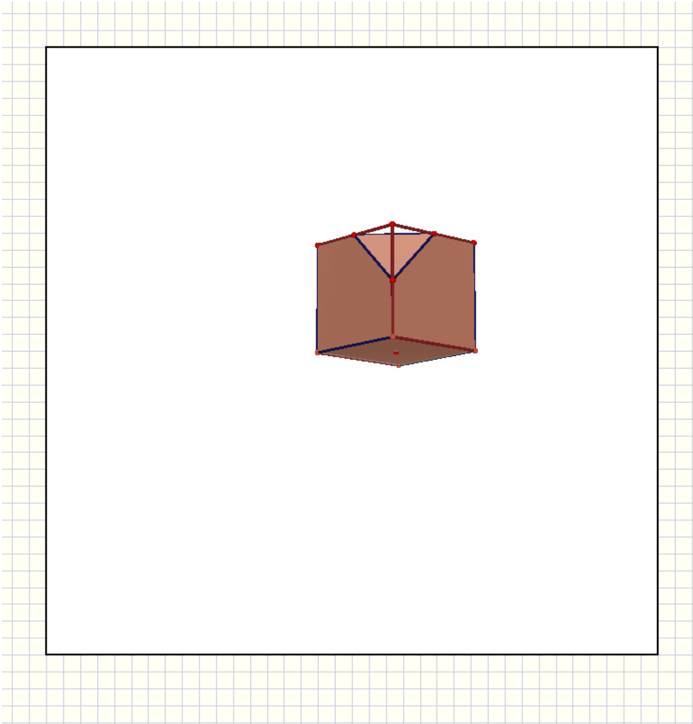


圖 4-4-17 範例五、六以 Cabri 3D 動態模擬呈現(2)

（乙）以 Geogebra

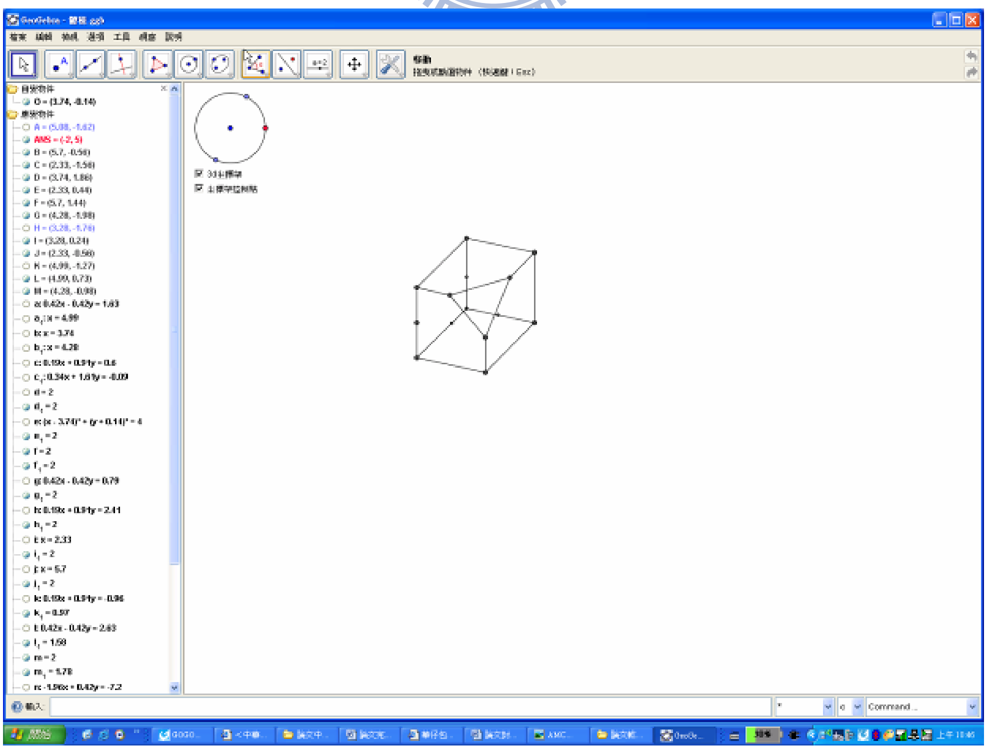
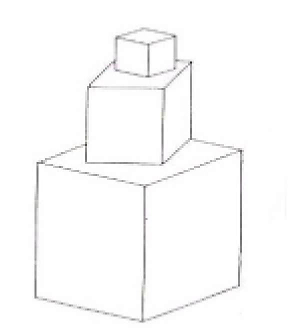


圖 4-4-18 範例五、六以 GeoGebra 動態模擬呈現

例題七

一件雕塑品由三個大立方體組成，一個疊一個，沒有懸空的部分，安放在墨爾本市中心後，他的暴露在外的表面將漆成淡黃色。最大的立方體平放在地上，每邊長 3 米，其他兩個的邊長分別是 2 米和 1 米。油漆的用量是每平方米 1 罐，共需油漆的灌數為？

（AMC,1986 年　高 8,中 13,初 17）



（甲）　以 Cabri 3D

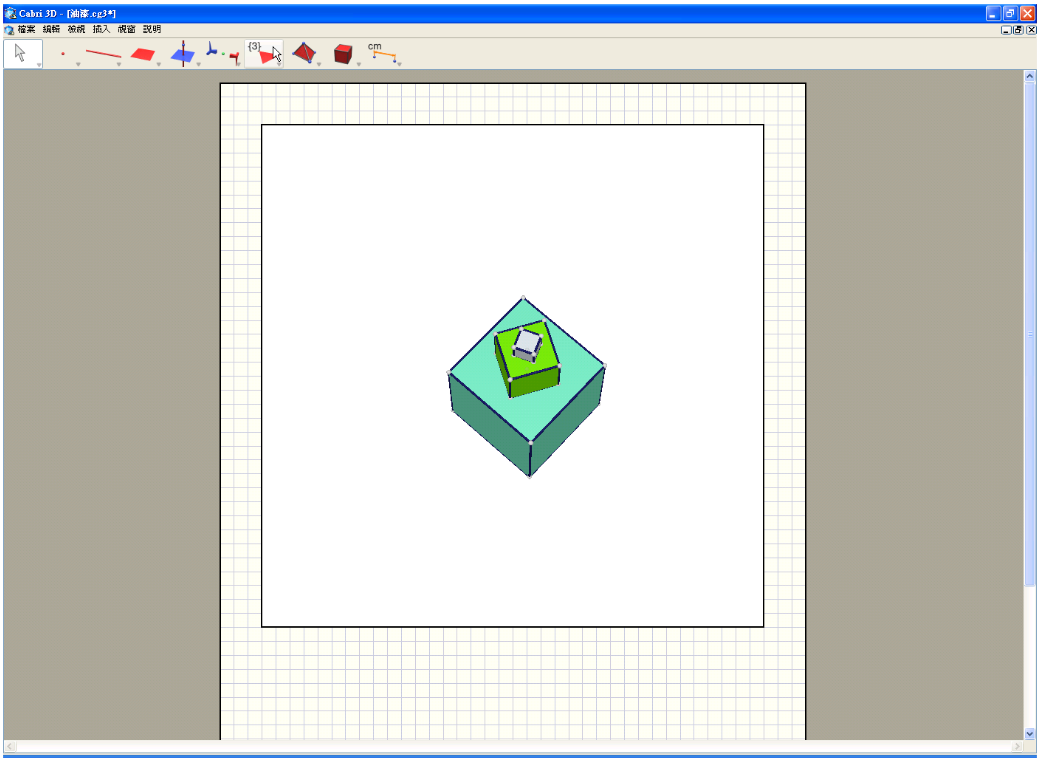


圖 4-4-19 範例七以 Cabri 3D 動態模擬呈現(1)

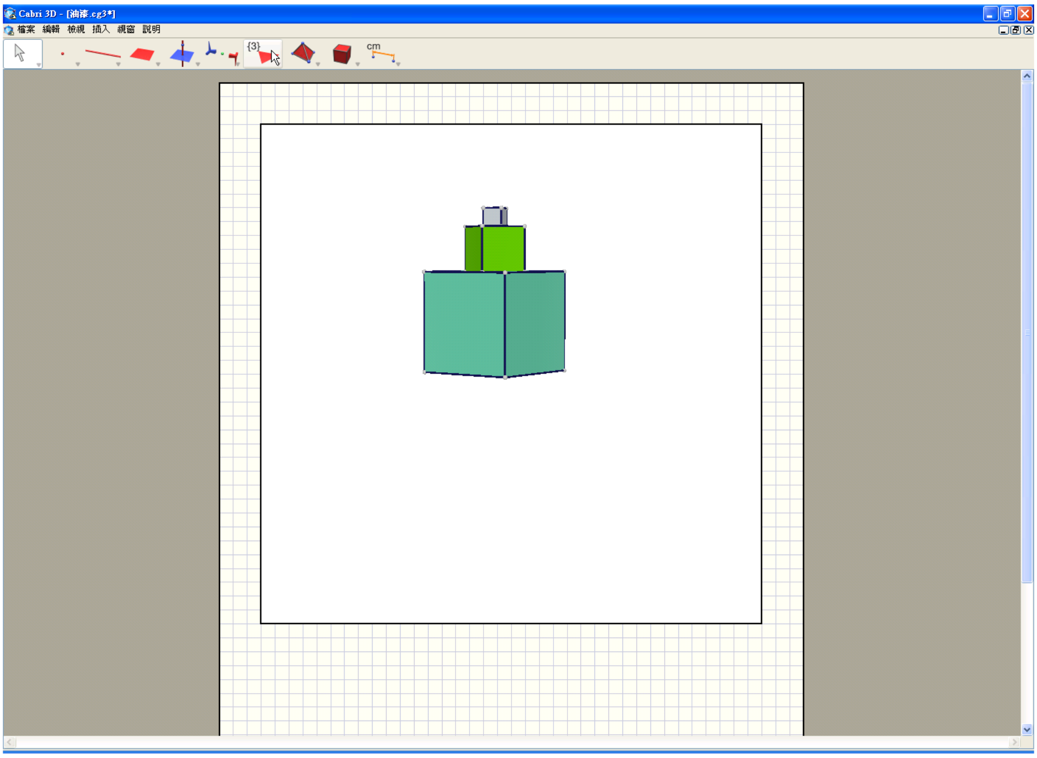


圖 4-4-20 範例七以 Cabri 3D 動態模擬呈現(2)

## 4-5 結論與建議

本論文中套裝軟體的呈現，可以很輕易發現，任何一種套裝軟體都可以彌補用傳統方式上課（黑板）的盲點，要讓班上全部學生都瞭解上課的內容，也許沒辦法用其中一種來詮釋，因此，善用學校擁有的數位媒體設備，讓上課更有趣，更貼切生活，甚至培養學生把問題數學化，進而解決問題，是我努力完成的目標。

在教學設計上，要注意使用軟體所呈現畫面的訊息量，盡量簡化避免多餘的干擾妨礙學生的思考。在立體轉平面的概念，要簡單、明瞭，單純的提供學生可以觀察、實驗、操作、猜想、測試，達到學會問題解決的目的。

未來，希望能有人可以就教學成效深入研究探討，更以畫面呈現的顏色，線條，及 3D 操作步驟等會影響視覺化學習的因素加以研究，讓 3D 轉 2D 更親切，達到「Learning from Software」、「Learning about Software」、「Learning with Software」。

但避免被單一軟體牽制住，找出軟體的特性，適當的運用，讓教學生活化，建立動態學習的環境，協助學生在快樂中學習。

# 參考文獻

一. 英文

(1) Sophie & Pierre Rene`de Cotret, Cabri 3D v.2 User Manual，August 2006。

二.中文

(1) Morris Kline，Mathematical Thought from Ancient to Modern Times，數學史—數學思想的發展上冊，第四章第五章，林炎全，洪萬生，楊康景松譯，九章出版社。

(2) 王懷權，數學的故鄉，學英文化事業有限公司。

(3) 李虎維，陳昭地，黃登源，李登貴，林礽堂，儲啟政，高中數學教師手冊第四冊，大同資訊企業股份有限公司，民國 91 年。

(4) 翁文祥，圓錐曲線，綠天出版社，民國 92 年。

(5) Markus Hohenwarter & Judith Preiner，GeoGebra 3.0 官方版使用說明，黃福坤，黃驥韡，陳禾凱，林螢婕譯。

(6) 黃國忠，高中三角函數動態圖說證明元件開發研究，交大碩士論文，民國 95 年。

(7) 李吉彬，資訊科技融入高中數學資優教育的實務研究，交大碩士論文，民國 95 年。

(8) 孟主安，套裝軟體支援下之高中數學教學的動態呈現與探究，交大碩士論文，民國 96 年。

(9) 陳佳煌，動態幾何軟體 GSP 支援下之數學探究，交大碩士論文，民國 96 年。

(10) 蔡政樺，在電腦套裝軟體環境下經營數學探究之研究，交大碩士論文，民國 95 年。

(10) 世界幾何史，凡異出版社 p125~126

(11) 幾何學辭典，九章出版社，p854.871.892~893

(12) 余文卿，高中數學課本第二冊，翰林出版社，民國 96 年。

(13) 許志農，高中數學課本第二冊，龍騰出版社，民國 96 年。

(14) 林福來，高中數學課本第二冊，南一出版社，民國 96 年。

(15) 楊維哲，高中數學課本第二冊，三民出版社，民國 96 年。

(16) 余文卿，高中數學課本第四冊，翰林出版社，民國 96 年。

三.網址

(1) http://www.fg.tp.edu.tw/~math/mainpages/s.htm(北一女數學教學研究會)

(2) http://www.hcsh.tp.edu.tw/~math01/Cabri3D/index.html（華江高中吳秉豐老師）

(3) http://teach.nehs.hc.edu.tw/plog/index.php?op=Default&Date=200610&blogId=8（老顏的家）