

國立交通大學

理學院應用科技學程

碩士論文

利用 Sinc 函數為基底分析二維本徵模態



Analysis on Eigenstates in Two Dimensional System by

Expansion method: Using Sinc Function as Basis

研究生：詹智淵

指導教授：陳永富教授

中華民國一百年七月

利用 Sinc 函數為基底分析二維本徵模態

Analysis on Eigenstates in Two Dimensional System by Expansion method:
Using Sinc Function as Basis

研 究 生：詹智淵

Student : Chih-Yuan Chan

指 導 教 授：陳永富教授

Advisor : Yong-Fu Chen

國 立 交 通 大 學

理學院應用科技學程



A Thesis

Submitted to Degree Program of Applied Science and Technology College of Science

National Chiao Tung University in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master in

Degree Program of Applied Science and Technology

July 2011

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一百年七月

利用 Sinc 函數為基底分析二維本徵模態

學生：詹智淵

指導教授：陳永富教授

國立交通大學理學院應用科技學程碩士班

摘 要

特徵值問題 (Eigenvalue problem) 普遍存在於自然界中，然而，在求解的過程中，只有少數情形能得到解析解，如何利用數值方法解出各種情形的特徵值問題是一個重要的課題。在這篇論文中，我們利用特徵函數展開法，以 Sinc 函數為基底，分析物理系統中相當重要的特徵值問題：二維赫姆霍茲方程式 (Helmholtz equation)。

首先為了證實數值方法的可行性，我們以此數值方法解出邊界為二維方形及圓形的赫姆霍茲方程式，並將模擬結果和解析解比較，發現在同定態下的圖形是相當接近的；比對特徵能量值 (Energy)，能量值誤差並不大。接著我們利用此數值方法解任意邊界的赫姆霍茲方程式，選取的邊界為金門形狀及小提琴形狀。我們更用此方法推廣研究振盪平板的節線圖騰，並推算微擾對節線圖騰的影響，比較數值模擬與實際震砂實驗的結果，兩者之間有良好的對應關係。

Analysis on Eigenstates in Two Dimensional System by Expansion method:
Using Sinc Function as Basis

Student : Chih-Yuan Chan

Advisor : Dr. Yung-Fu Chen

Department of Degree Program of
Applied Science and Technology Course
National Chiao Tung University



ABSTRACT

Eigenvalue problem has been widely existed in the nature. Unfortunately, due to the complexities of the physical system, analytical solutions to eigenvalue problem can be obtained only in few cases. Some numerical methods must be used to solve the eigenvalue problem. In this paper, we used expansion method based on Sinc function as basis to analyze the famous eigenvalue problem in physical system: 2D Helmholtz equation.

To consider the feasibility of numerical method, we numerically calculated the eigenstates and eigenenergy in rectangular and circular membrane and compared the numerical results with the analytical solutions. We also solved the two dimensional (2D) membranes problems with arbitrary shapes of Kinmen and violin by using the numerical method.

We further used the numerical method to simulate Chladni Nodal line pattern and investigate the influence of perturbation on Chladni Nodal line pattern. It can be seen that there is a good agreement between numerical results and experiment results.

誌 謝

時間很快過去了，感謝這幾年來，有許多人陪著我一起成長，讓我學的更多、更廣。首先要感謝陳永富老師的指導與鼓勵，承蒙老師在實驗上悉心的指導與啟發，使得學生得以完成碩士論文，在此獻上最誠摯的感謝。

此外，衷心感謝余彥廷學長在實驗上的教導及敦促，除了在我學習的路途上給予許多協助與建議之外，讓我對於數值模擬有了更進一步的了解；謝謝梁興弛學長及李易純學長在論文上的提點，謝謝蘇冠緯老師與其他學長姐給我許多的協助。

最後，感謝我的父母及家人對我的鼓勵及支持，尤其是我的老婆，在我心情最低落的時候給我鼓勵，也替我分擔了家裡所有的事，使我得以修完碩士學業與課程。由衷地謝謝大家陪我走過這一段人生的路程。



目 錄

中文摘要	III
英文摘要	IV
誌謝	V
目錄	VI
圖表目錄	VIII
一、	緒論.....	1
1.1.	研究動機.....	1
1.2.	本文組織.....	3
二、	自然界中的波動及赫姆霍茲方程式.....	4
2.1.	繩波.....	5
2.2.	電磁波.....	8
2.3.	物質波.....	11
2.4	赫姆霍茲方程式 (Helmholtz equation)	13
三、	數值方法.....	15
3.1.	特徵函數展開法.....	15
3.2.	基底函數.....	18
3.2.1.	基底.....	18
3.2.2	Sinc function.....	19
3.3	一維薛丁格方程式的數值方法推導.....	23
3.4	二維薛丁格方程式的數值方法推導.....	24
3.5	結果與討論.....	26
四、	二維位能勢.....	26
4.1.	二維方形位能勢.....	27
4.1.1.	二維方形位能勢解析解.....	27
4.1.2.	二維方形位能勢數值解.....	33
4.1.3.	二維方形位能勢解析解與數值解比較.....	36
4.2.	二維圓形位能勢.....	40
4.2.1.	二維圓形位能勢解析解.....	40
4.2.2.	二維圓形位能勢數值解.....	45
4.2.3.	二維圓形位能勢解析解與數值解比較.....	48
4.3.	其他二維不規則邊界.....	52
4.3.1.	二維不規則邊界-金門.....	52
4.2.2.	二維不規則邊界-小提琴.....	54
五、	節線研究(Nodal Line).....	56
5.1.	類比文獻上的 Chladni pattern.....	58
5.1.1.	方形.....	58

5.1.2.	圓形.....	61
5.1.3.	小提琴圖形.....	62
5.1.4	結果與討論.....	63
5.2.	理論計算分析.....	64
5.2.1.	干擾物對圖騰的定性分析.....	64
5.2.2	干擾物對圖騰特徵能量值的定量分析.....	66
5.3.	加干擾物的 Nodal line 波動行為探討.....	70
5.3.1.	類比實驗圖形.....	70
5.3.2	實驗結果討論.....	73
六、	結論與未來展望.....	74
參考文獻	75



圖目錄

圖 2.1.1	繩波線段示意圖.....	6
圖 3.2.1	單位向量表示圖.....	19
圖 3.2.2	Sinc 函數形式.....	20
圖 3.2.3	$f(x) = 4x^2$ 圖形.....	21
圖 3.2.4	Sinc function 描述 $f(x) = 4x^2$	21
圖 4.1.1	二維方形位能勢圖.....	27
圖 4.1.2	二維方形圖形.....	33
圖 4.1.3	不同 Basis 數量誤差圖.....	39
圖 4.1.4	二維方形解析解與數值解特徵能量關係圖.....	39
圖 4.2.1	二維圓形位能勢圖.....	40
圖 4.2.2	二維圓形圖形.....	45
圖 4.2.3	二維圓形解析解與數值解特徵能量關係圖.....	51
圖 4.3.1	不規則邊界圖形-金門.....	52
圖 4.3.2	不規則邊界圖形-小提琴.....	54
圖 5.1	方形與圓形震動示意圖.....	57
圖 5.1.1	文獻上方形 Chladni pattern.....	58
圖 5.1.2	方形 Chladni pattern 比對圖 (一)	59
圖 5.1.3	方形 Chladni pattern 比對圖 (二)	60
圖 5.1.4	圓形 Chladni pattern 比對圖 (一)	61
圖 5.1.5	圓形 Chladni pattern 比對圖 (二)	62
圖 5.1.6	小提琴 Chladni pattern 比對圖.....	62
圖 5.2.1	不同距離特徵能量趨勢圖 (一)	67
圖 5.2.2	不同距離特徵能量趨勢圖 (二)	67
圖 5.2.3	不同距離的特徵能量趨勢圖.....	68
圖 5.2.4	能量分布形式.....	69
圖 5.3.1	圓形干擾物距圓心 2 cm.....	71
圖 5.3.2	圓形干擾物距圓心 3.8 cm.....	71
圖 5.3.3	圓形干擾物距圓心 5 cm.....	72
圖 5.3.4	圓形干擾物距圓心 7.3 cm.....	73
圖 5.3.5	圓形干擾物距圓心 10 cm.....	73

表目錄

表 4.1.1	二維方形位能勢之解析解(一).....	31
表 4.1.2	二維方形位能勢之解析解(二).....	32
表 4.1.3	二維方形位能勢之數值解(一).....	34
表 4.1.4	二維方形位能勢之數值解(二).....	35
表 4.1.5	二維方形位能勢解析解與數值解比較表(一).....	37
表 4.1.6	二維方形位能勢解析解與數值解比較表(二).....	38
表 4.2.1	二維圓形位能勢之解析解(一).....	43
表 4.2.2	二維圓形位能勢之解析解(二).....	44
表 4.2.3	二維圓形位能勢之數值解(一).....	46
表 4.2.4	二維圓形位能勢之數值解(二).....	47
表 4.2.5	二維圓形位能勢解析解與數值解比較表(一).....	49
表 4.2.6	二維圓形位能勢解析解與數值解比較表(二).....	50
表 4.3.1	二維不規則邊界位能勢數值解-金門.....	53
表 4.3.2	二維不規則邊界位能勢數值解-小提琴.....	55
表 5.2.1	干擾物於不同距離的特徵態 (一)	65
表 5.2.2	干擾物於不同距離的特徵態 (一)	65
表 5.2.3	不同距離的特徵能量值.....	66



第一章 緒論

1.1 研究動機

日本 311 芮氏 9.0 大地震發生，撼動了全世界，大地震造成了日本相當嚴重的損害，所激發的能量也造成了可怕的海嘯，這是人類有史以來第一次即時的紀錄下海嘯可怕的現場。過去科學家也透過各種研究方法來研究地震；1985 年墨西哥大地震發生[1- 6]，一群研究量子理論的科學家利用解薛丁格方程式處理不規則邊界問題的方法，研究震波對於地震產生災害行為並類比災害現場，發現處於節線位置上房屋倒塌的情形相當輕微，這是一個很有趣的現象，因而對波的共振行為產生了興趣。

對於波共振行為的研究相當多，其中節線圖騰（Nodal lines patterns）在科學上是一個相當重要的研究領域，而 Chladni patterns 更是節線圖騰研究的經典。Chladni 發現了一種觀察振動波形的的方法，他將均勻的細砂撒在平板上，以小提琴的弓在平板的邊緣拉彈，產生特定頻率的振動，致使細砂移動至沒有產生振動的節線上，讓人類第一次可以真正的看見聲音。爾後更有許多科學家以 Chladni patterns 的方法做各種不同方面的運用。郭政嘉學長也利用了 Chladni patterns 的方法[7]，並在其中加上了干擾物來研究節線的變化，概念上就有如一座 101 大樓坐落在台北盆地，當震波傳遞碰上了 101 大樓，看看能量與節線會是如何的變化。諸多的研究也引發對

這些波動行為產生模擬研究的想法。我們知道波動行為在邊界規則的情況下有解析解可以解釋它，而於複雜的邊界條件下僅能利用數值方法來解釋這些波動的行為，我們更利用這樣的數值方法去探討不規則邊界的問題及有干擾物微擾情況下的 Chladni patterns。



1.2 本文組織

本論文共有六個章節，第二章簡介波動行為從繩波到電磁波乃至物質波的基本概念，以及簡述其代表的運動方程在有邊界條件下的赫姆霍茲方程式的表示式。第三章介紹 Sinc 函數及其正交性，並以 Sinc 函數為基底利用數值方法-特徵函數展開法，推導二維定態薛丁格方程式。第四章以此數值方法得到的解來驗證二維方形、圓形的解析解，並對不規則邊界圖形做分析。第五章針對 Chladni 經典的節線圖騰作一系列模擬[8]，並類比實際在 Chladni plate 加干擾物的節線圖騰來做探討。第六章結論與未來方向。



第二章 自然界中的波動及赫姆霍茲方程式

在日常生活中，人類無時無刻都可以體驗到許多來自不同介質所產生的各種波動。波其實是一種擾動，一種平衡狀態中的擾動，這種擾動會隨著時間的經過，從空間中的某個區域傳到另一個區域。除了拍擊海岸的海浪是波之外，聲波、光、廣播電台及電視台的無線電波、震撼地面的地震波、甚至是微小電子的物質波，在在的顯示其實整個自然界到處都是充滿著波動，換句話說，整個自然界都是被波動所支配。

物理學家將自然界中的波動行為區分為巨觀世界及微觀世界的波動，描述巨觀世界的波動行為依循的是古典物理中牛頓運動定律準則，主要所處理的質點系統是建立在力與加速度的觀念，以及描述運動軌跡的運動方程式的兩項基礎上；而描述微觀世界的波動行為依循的是量子力學的理論，建立在物質的波粒二象性及能量為不連續態的觀念上。

波既然是一種傳播運動，必然會有符合其行為的運動方程式，稱為波動方程式，我們將從一般常見的繩波、電磁波及物質波，來導出符合其波動行為的波動方程式[9]。而在物理系統中任何描述其動態的行為必然有其對應的微分方程，波動方程亦是其中之一，而這些重要的微分方程，在有邊界的條件下皆可以化為特徵值問題的形式。物理界中最常碰到的特徵值問題的形式其實就是赫姆霍茲方程式，如式(2.1)。

$$(\nabla^2 + k^2)E = 0$$

(2.1)

因此我們可以將波動方程式化成赫姆霍茲方程式的形式，來解波動在有邊界條件下的特徵值問題。

2.1 繩波

在所有波的種類中，最容易了解的是機械波，這種波是介質從平衡狀態偏離所引起的效應，使波在這種物質內通過，我們可想像由大量質點所構成的介質，每一質點都以彈性材料和其附近的質點連接。此介質的一端以任何形式使其位移，發生位移的地方會使其在旁邊的質點上產生一種彈力，因此在旁邊的質點也產生了位移，第二個質點又會使旁邊的質點產生位移，因此這樣的位移會沿著這個介質以固定的速率來傳播[9]。

我們將這個介質換成是一條繩子，在其左端垂直於繩子的方向上施以外力使其發生位移，此種橫向位移的波我們稱之為橫波，而以一定方向及速度傳播的波動稱為行進波。

直接從牛頓定律出發，假設均勻且完全彈性之繩索，在兩點張力及斜率分別為 T_1 、 $\tan \alpha$ 及 T_2 、 $\tan \beta$ 之作用下，如圖 2.1.1。

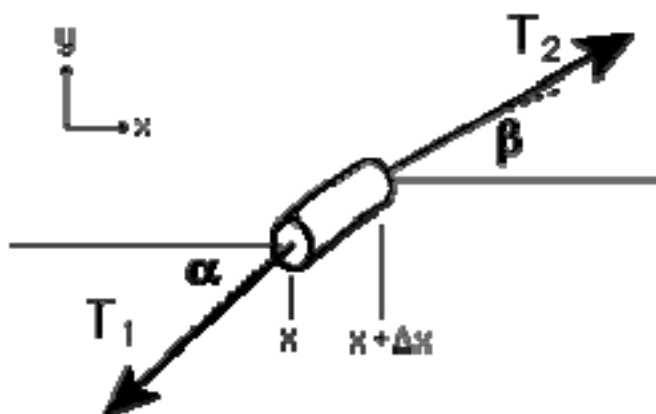


圖 2.1.1 繩波線段示意圖

由橫向力平衡 $\sum F_x = 0$ 可知：

$$T_1 \cos \alpha = T_2 \cos \beta = T = \text{constant} \quad (2.1.1)$$

縱向力平衡 $\sum F_y = 0$ 可知：

$$T_2 \sin \beta - T_1 \sin \alpha = u \cdot (\Delta x) \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2.1.2)$$

其中， u 為單位質量。將式 (2.1.2) 除以式 (2.1.1) 整理可得：

$$\frac{T_2 \sin \beta}{T_2 \cos \beta} - \frac{T_1 \sin \alpha}{T_1 \cos \alpha} = \frac{u}{T} \cdot (\Delta x) \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2.1.3)$$

$$\frac{u}{T} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_x \right] \rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (2.1.4)$$

整理後可得

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2.1.5)$$

其中 $v^2 = \frac{T}{u}$ ，

所推導出來的方程式稱為波動方程式，為行進波的波動函數所遵循的微分方程[10,11]。而 y 為時間 t 與距離 x 的耦合函數，因此利用分離變

數法做時空分離，令 $y(x,t) = X(x)T(t)$ 代入式 (2.1.5)，得

$$\Rightarrow \frac{1}{v^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2} = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\lambda^2 \quad (2.1.6)$$

其中 λ^2 為一常數，整理可得

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(\frac{d^2}{dt^2} + \lambda^2 v^2 \right) T &= 0 \\ \Rightarrow \left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda^2 \right) X &= 0 \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

只要給定邊界條件就可求得其解。此方程形式就是赫姆霍茲方程式的形式。



2.2 電磁波

最具代表電磁波的理論就是馬克斯威爾方程式 (Maxwell equation) [12]，而馬克斯威爾在電磁理論方面的成就可以和牛頓在力學理論的成就相媲美，他將法拉第等人的實驗結果及理論作為基礎，創造性的提出十九世紀物理學中最偉大的成就電磁場理論，並預測電磁波的存在。

如何描述波的運動模式在本篇論文中是一項很重要的課題，我們利用馬克斯威爾方程式 (Maxwell equation) 來描述電磁波的波動方程式，首先針對馬克斯威爾方程式來論述。

在 MKS 的單位制度下，馬克斯威爾方程式的微分方程為：

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad (2.2.1)$$

$$\nabla \times \bar{H} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \bar{J} \quad (2.2.2)$$

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho \quad (2.2.3)$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \quad (2.2.4)$$

其中 \bar{E} 為電場強度 (Electric field intensity)， \bar{H} 為磁場強度 (Magnetic field intensity)， \bar{D} 為電通密度 (Electric flux density) 亦為電位移為 (Electric displacement)， \bar{B} 為磁通密度 (Magnetic flux density)， \bar{J} 為電流密度 (Electric current density)， ρ 為體電荷密度 (Volume charge density)。

電場強度與電位移的關係式為 $\bar{D} = \epsilon \bar{E}$ ，磁場強度和磁通密度關係式

則為 $\bar{B} = \mu \bar{H}$ ， ϵ 為介電常數 (Permittivity)， μ 為介磁常數 (permeability)。

在一無源區域 (Source free region)， ρ 、 J 皆為零，馬克斯威爾方程式的微分方程可化為

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \quad (2.2.5)$$

$$\nabla \times \bar{H} = -\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \quad (2.2.6)$$

$$\nabla \cdot \bar{D} = 0 \quad (2.2.7)$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \quad (2.2.8)$$

對式 (2.2.5) 取旋度，可得下面的式子：

$$\nabla \times \nabla \times \bar{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \bar{H} \quad (2.2.9)$$

在 $\nabla \times \nabla \times \bar{E} = \nabla(\nabla \cdot \bar{E}) - \nabla^2 \bar{E}$ 的關係中， $\nabla \cdot \bar{E} = 0$ 帶入式 (2.2.9)，可得

一電場齊次波動方程式如下：

$$\nabla^2 \bar{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.2.10)$$

同理磁場齊次波動方程式：

$$\nabla^2 \bar{H} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.2.11)$$

式 (2.2.10) 與式 (2.2.11)，其形式就是一般的波動方程式的形式，其速率

c 可表示為：

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad (2.2.12)$$

在MKS制中，介電常數 $\varepsilon_0 \approx 8.85418 \times 10^{-12} \text{ s}^2\text{C}^2/\text{m}^3\text{kg}$ 及介磁常數 $\mu_0 \approx 1.25 \times 10^{-6} \text{ mkg}/\text{C}^2$ 帶入式 (2.2.12) 可得 $c = 2.99792 \times 10^8 \text{ m/s}$ 此速率與真空中的光速相等，所以光也是電磁波的一種。

對於這些方程式的解，我們可瞭解到平面行進的正弦波就是其一組解，波的電場和磁場相互垂直，並且分別垂直於平面波行進的方向，以光速 c 來傳播。

電場和磁場均為時間諧和函數，因此 $e^{i\omega t}$ 來表示隨時間的變量，即

$$E = E_0 e^{i\omega t} \quad (2.2.13)$$

因此式 (2.2.10) 可以二階偏微分方程式來表示為

$$(\nabla^2 + \omega^2 \mu\varepsilon) \bar{E} = 0 \quad (2.2.14)$$

同理

$$(\nabla^2 + \omega^2 \mu\varepsilon) \bar{H} = 0 \quad (2.2.15)$$

其中 $\omega^2 \mu\varepsilon$ 表示成 k^2 ，則可得

$$(\nabla^2 + k^2) \bar{E} = 0 \quad (2.2.16)$$

$$(\nabla^2 + k^2) \bar{H} = 0 \quad (2.2.17)$$

這就是赫姆霍茲方程式的表示式。

2.3 物質波

描述物質波的微分方程就是薛丁格方程式。當愛因斯坦揭露了光具有波和粒子的二象性後，一套觀測微觀世界的理論已然悄悄地萌芽。物理學家德布羅伊（Louis V.deBroglie,1892~1987）提出了突破性的物質波的理論，每一種粒子都具有粒子與波動的兩象性理論，即帶質量的粒子除了具有粒子特性外，還具有波的性質，粒子同時也具有波長和頻率，這種質點所具有的波稱為物質波[13]。

西元1925年，薛丁格（Erwin Schrödinger，1887~1961）研究德布羅伊的論文，思考著粒子既然具有波粒二象性，其運動應該存在其對應的波動方程，此方程式可以正確地詮釋粒子的運動行為。西元1926年，薛丁格連續發表了一系列的論文，提出了滿足粒子系統對應其波函數的波動方程式，波動力學至此已然產生。薛丁格方程式的提出，成功的描述許多微觀世界粒子的行為。首先成功解決了重要的氫原子光譜問題。接著利用薛丁格方程式處理固體的晶格問題，可得到能帶結構，這對於我們了解固體為何有絕緣體、導體、半導體的區別是非常重要的。還有許多物質的重要物理及化學性質，都能透過薛丁格方程式得到重要的解釋，也就是說薛丁格方程式對於近代科學的發展，是具有非常重要的意義[13,14]。

簡單介紹薛丁格方程式，薛丁格在其波動方程式中採用虛數 'i' 於時間項中，其方程式為[14,15]：

$$i\hbar \frac{\partial \psi(r,t)}{\partial t} = E\psi(r,t) \quad (2.3.1)$$

$\psi(r,t)$ 定義為波函數，代表物質波的粒子在某一時間，出現在特定地點的機率， $|\psi|^2$ 代表著出現在特定地點附近機率大小的一個量。

古典物理中，物理系統的總能量 E 是動能與位能的總和，表示式為

$$E = K + V \quad (2.3.2)$$

K 代表著動能勢， V 代表是位能勢。薛丁格依循的這個模式，將空間裡一個單獨粒子運動於位能勢 $V(r)$ 中的與時間有關的波動方程式寫為：

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(r,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \right] \psi(r,t) \quad (2.3.3)$$

接下來令 $\psi(r,t) = \psi(r)f(t)$ 帶入上式 (2.3.3)，利用分離變數法處理，可得方程式，

$$\frac{i\hbar}{f(t)} \frac{df}{dt} = \frac{1}{\psi(r)} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \right] \psi(r) \quad (2.3.4)$$

其中左式及右式分別為時間 t 和位置 r 的函數，互為相等，因此必會等於一個常數 E ，整理可得

$$\left[\nabla^2 + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(r)] \right] \psi(r) = 0 \quad (2.3.5)$$

這就是與時間無關的定態薛丁格方程式，其中 E 其實就是定態的特徵能量，其形式也就是赫姆霍茲方程式的表示式。定態薛丁格方程式將是本論文對於二維幾何邊界推算特徵能量及特徵態的主要方程式。

2.4 赫姆霍茲方程式 (Helmholtz Equation)

從繩波、電磁波到物質波，我們皆可以將其對應方程式化為赫姆霍茲方程式的形式來求在有邊界條件下的解，因此赫姆霍茲方程式在特徵值問題中是相當重要的。赫姆霍茲方程式是一個描述電磁波的橢圓偏微分方程，其形式如下：

$$(\nabla^2 + k^2)A = 0 \quad (2.4.1)$$

在物理的研究中，大部分的物理問題都同時存在著空間和時間的依存關係，例如波動方程：

$$\left(\nabla^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi(x, t) = 0 \quad (2.4.2)$$



對式 (2.4.2) 進行變數分離 $\psi(x, t) = A(x)T(t)$ ，可以得到兩個微分方程：

$$(\nabla^2 + k^2)A = 0 \quad (2.4.3)$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \lambda^2 v^2 \right) T = 0 \quad (2.4.4)$$

其中 k 是分離常數波數， A 是振幅。

我們會得到一個具有空間變數 x 的赫姆霍茲方程式和一個二階時間常微分方程式。時間解是一個正餘弦函數的線性組合，而空間解則必須依賴邊

界條件，因此只要在給定邊界條件下，我們就可以得到空間解，而我們就是利用定態薛丁格方程式化為赫姆霍茲方程式的形式，在有邊界的條件下去求解特徵值問題。



第三章 數值方法

3.1 特徵函數展開法

在一正交系統集合中，定義 $\{\phi_m(x)\}$ 為此正交系統的函數，且具有完備性及正交性，則此系統中的任意函數 $f(x)$ 均可以級數展開表示成；

$$f(x) = \sum_m c_m \phi_m(x) \quad (3.1.1)$$

因此對於此函數只要找出一組具備正交及完備性質的基底函數，就可以解出於此系統中任意態的解，其實這就是特徵值函數問題。

解特徵值問題，其實是一種線性轉換的過程，可以表示為；

$$A\Phi(x) = E\Phi(x) \quad (3.1.2)$$

其中 A 為此系統集合的特徵空間， E 為特徵值， $\Phi(x)$ 則為特徵函數。

又由上可知，假設 $\Phi(x)$ 為一具備正交及完備性質的函數，我們可以將此函數作級數展開為；

$$\Phi(x) = \sum c_m \phi_m(x) \quad (3.1.3)$$

將式 (3.1.3) 帶入式 (3.1.2)，得

$$A \sum c_m \phi_m(x) = E \sum c_m \phi_m(x) \quad (3.1.4)$$

同乘上 $\Phi_n^*(x)$ 並積分

$$\sum_m c_m \int \phi_n^*(x) A \phi_m(x) dx = E \int \sum_m c_m \phi_n^*(x) \phi_m(x) dx \quad (3.1.5)$$

其中 $\Phi_n^*(x)$ 與 $\Phi_m(x)$ 彼此正交，所以 $\sum_m c_m \delta_{nm} = c_n$ ，

又令 $\int \phi_n^*(x) A \phi_m(x) dx = A_{nm}$ ，則式(3.1.5) 改寫為

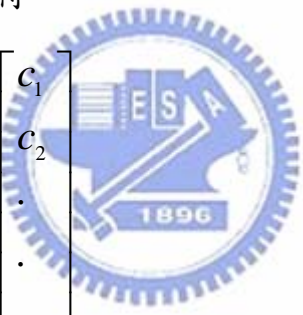
$$\sum_m c_m A_{nm} = E c_n$$

$$\rightarrow A_{n1}c_1 + A_{n2}c_2 + A_{n3}c_3 + \dots + A_{nm}c_m = E c_n$$
(3.1.6)

若將集合展開， $n=1,2,3\dots m$ ，

$$\left[\begin{array}{l} n=1 \\ n=2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ n=m \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} A_{11}c_1 + A_{12}c_2 + \dots + A_{1m}c_m = E c_1 \\ A_{21}c_1 + A_{22}c_2 + \dots + A_{2m}c_m = E c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_{m1}c_1 + A_{m2}c_2 + \dots + A_{mm}c_m = E c_m \end{array} \right.$$

我們再將聯立方程式整理，得

$$\left[\begin{array}{cccc} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mm} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_m \end{array} \right] = E \left[\begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_m \end{array} \right]$$

(3.1.7)

其中令

$$\left[\begin{array}{cccc} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mm} \end{array} \right] \Rightarrow A, \left[\begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_m \end{array} \right] = c, \text{ 整理得}$$

$$(A - EI)c = 0$$
(3.1.8)

此即為矩陣的特徵值問題，可藉由解 $\det[A - EI]c = 0$ 特徵方程式，

得到相對應的特徵值與特徵向量，亦可得此矩陣中相對應的特徵態，其中特徵向量為基底向量。由此可知，只要找到某系統的一組具備正交及完備性質的基底函數，亦可由此方法來找出此系統中的特徵態。而 Sinc 函數即為具有正交性質的基底函數，但其完備性並不完全，故其數值解有些許的誤差，雖然如此 Sinc 函數依舊是為基底函數的最佳選擇之一，所以我們將以 Sinc 函數作為解定態薛丁格方程式的基底函數。



3.2 基底函數

3.2.1 基底

基底 (Basis) 在數學上的定義[16]，簡單來說就是存在一個數學系統中最小的元素，不能又有其他的元素可以對這個數學系統做線性的組合，系統內任何狀態皆可以由基底的乘積或疊加而組成來表示。我們最容易理解的基底就是整數的 1，在整數系定義中它是最小的元素，任何數皆可以 1 的倍數來表示。

以二維向量系統來看，如圖 3.2.1 所示，在二維向量系統中 XY 方向的基底向量亦可稱為單位向量，其單位向量分別以 $e_x = (1,0)$ 及 $e_y = (0,1)$ 來表示，而且在這個系統中，任何向量皆可由單位向量 e_x 及 e_y 來組成，即可用 $a(1,0) + b(0,1)$ 來表示，其中 a 、 b 為實數。從 XY 二維的系統中我們可以理解到既是為 X 方向的基底必不可影響到 Y 方向的向量，亦即為此 XY 二維系統必然具有正交的特質，其空間中兩向量的內積必然為 0；而滿足內積為 0 的條件，單位向量 e_x 及 e_y 必然為線性獨立。

而基底不單單是只用向量方式來表示，它當然可以以不同形式的數學函數來表示，而在二維系統中基底函數的特質如同向量一樣，必須具有正交及線性獨立的特質。

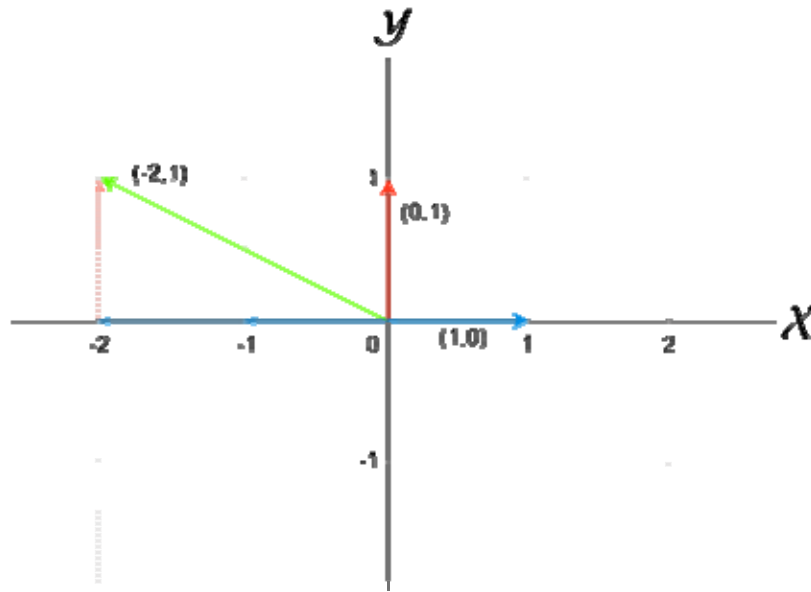


圖 3.2.1 單位向量表示圖

資料來源[17]



3.2.2 Sinc function

Sinc 函數 [18-23] 在科學上的應用相當廣泛，不論在光學成像系統的頻率特性、空間濾波、相干光學處理、非相干光學處理、信息光學、光通信及數位訊號的處理上，都在 Sinc 函數的涵蓋範圍內。我們在處理方波時，經由傅立葉轉換可得到在時域的訊號，其形狀為一 Sinc 函數的訊號。首先介紹 Sinc 函數的定義。

Sinc 函數在數學上定義的基本數學形式為：

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad (3.2.1)$$

$$\operatorname{sinc}(\alpha x) = \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x} \quad (3.2.2)$$

其中 Sinc 函數在 x 為 0 點的奇異點定義為 1，如圖 3.2.2，

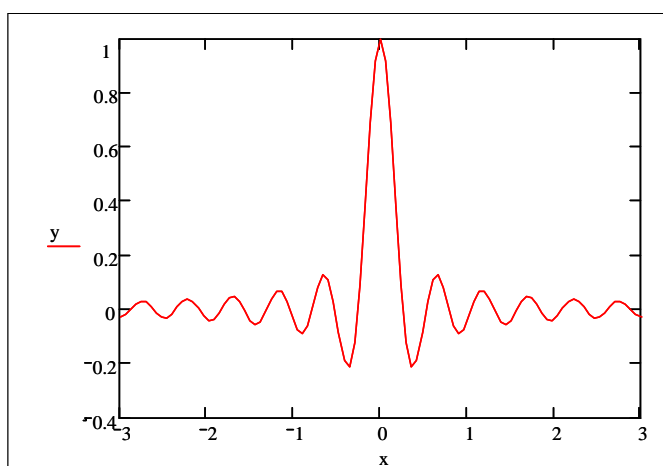


圖 3.2.2 Sinc 函數形式

Sinc Collection Method 數學符號表示為 S_k ，而其數學架構為：

$$S_k(h, x) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{h}(x - kh)\right)}{\frac{\pi}{h}(x - kh)} = \frac{h}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{\pm i(x - kh)t} dt \quad (3.2.3)$$

$S_k(h, x)$ 為一 Sinc function 的表示式，其中固定 h 值，改變 k 值，

可在 x 軸上的得到不同位置的 Sinc function。很直覺的，任何函數皆可由

這些不同位置的 Sinc function 乘上特定比重所表示，圖 3.2.3 及圖 3.2.4 分

別表示 $f(x) = 4x^2$ 及利用 Sinc function 描述函數 $f(x) = 4x^2$ 。

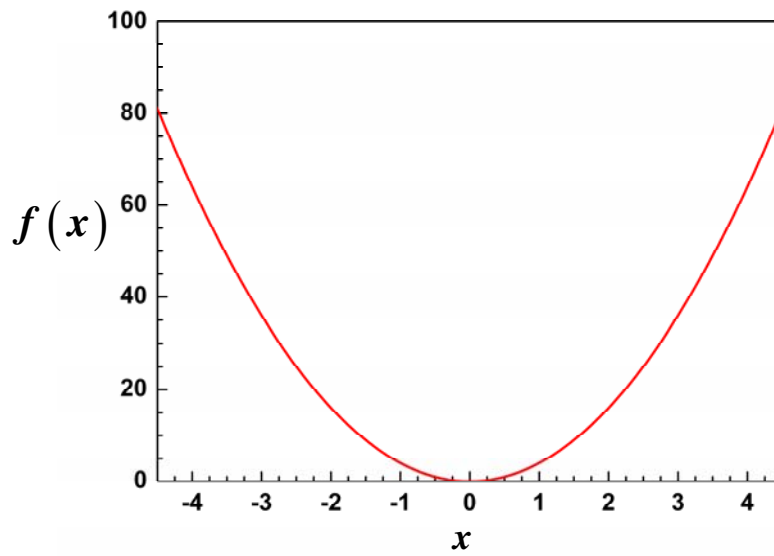


圖 3.2.3 $f(x) = 4x^2$ 圖形

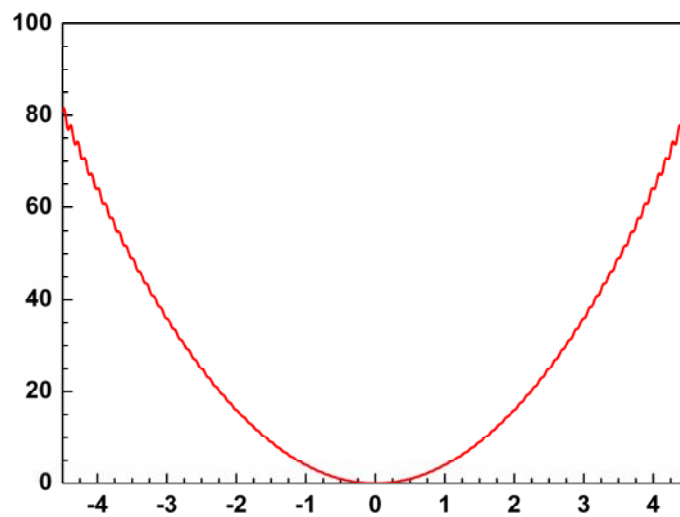


圖 3.2.4 Sinc function 描述 $f(x) = 4x^2$

Sinc function 也具有正交的特質，接下來我們將接續來了解 Sinc 函數的正交性質。已知有兩個 Sinc 函數 $S_k(h, x)$ 及 $S_l(h, x)$ ，假設在某一區

間內彼此正交，為驗證其正交性，對 $S_k(h, x)$ ， $S_l(h, x)$ 做內積運算：

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} S_l(h, x) S_k(h, x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{i(x-lh)t'} dt' \frac{h}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{i(x-kh)t} dt dx \\
 &= \frac{h^2}{4\pi^2} \int_{\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{ilht'} \int_{\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{ikht} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t+t')x} dx dt dt' \quad (3.2.4) \\
 &= \frac{h^2}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{ilht'} \int_{\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{ikht} \delta(t+t') dt dt' = \frac{h^2}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{i(l-k)ht'} dt' \\
 &= h\delta_{kl}
 \end{aligned}$$

計算結果為 $h\delta_{kl}$ ，函數 $S_k(h, x)$ 及 $S_l(h, x)$ 的正交性質因此而得以證明。

從上述討論得知任何函數可以 Sinc function 來表示，而且 Sinc function 彼此間有正交性，也就是說 Sinc function 可以當作任何物理系統的基底函數。

3.3 一維薛丁格方程式的數值方法推導

以 Sinc 函數為基底代入特徵函數展開法，則一維定態薛丁格方程式可表示成，

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \sum_k C_k S_k(h, x) + \sum_k \sum_{k'} V(k'h) S_{k'}(h, x) C_k S_k(h, x) = E \sum_k C_k S_k(h, x) \quad (3.3.1)$$

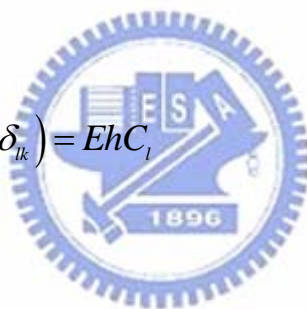
將式 (3.3.1) 乘上 $S_l(h, x)$ 並積分，

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \sum_k C_k \int S_l(h, x) \frac{d^2}{dx^2} S_k(h, x) dx \\ & + \sum_k \sum_{k'} V(k'h) C_k \int S_l(h, x) S_{k'}(h, x) S_k(h, x) dx \\ & = E \sum_k C_k \int S_l(h, x) S_k(h, x) dx \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

將式 (3.3.2) 整理得

$$-\frac{1}{2} \sum_k C_k (hC_{lk}^{(2)} - hV(k'h)\delta_{lk}) = EhC_l \quad (3.3.3)$$

其中 $c_{lk}^{(2)} \equiv \begin{cases} -\frac{\pi^2}{3h^2} & \text{if } l=k \\ \frac{2(-1)^{k-l}}{h^2(k-l)^2} & \text{if } l \neq k \end{cases}$



式 (3.3.3) 經由電腦運算，則可計算出特徵函數及特徵能量。

3.4 二維薛丁格方程式的數值方法推導

接著推導二維定態薛丁格方程式，其二維薛丁格方程式的表示為

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}\right)\psi(x, y) + V(x, y)\psi(x, y) = E\psi(x, y) \quad (3.4.1)$$

而 $\psi(x, y)$ 及 $V(x, y)$ 在導入基底函數的表示式為

$$\Rightarrow \begin{cases} \psi(x, y) \approx \sum_m \sum_n C_{mn} S_m(h, x) S_n(h, y) \\ V(x, y) \approx \sum_k \sum_{k'} V(kh, k'h) S_k(h, x) S_{k'}(h, y) \end{cases} \quad (3.4.2)$$

將式 (3.4.2) 帶入式 (3.4.1) 可得

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}\right) \sum_m \sum_n C_{mn} S_m(h, x) S_n(h, y) \\ & + \sum_k \sum_{k'} V(kh, k'h) S_k(h, x) S_{k'}(h, y) \sum_m \sum_n C_{mn} S_m(h, x) S_n(h, y) \\ & = E \sum_m \sum_n C_{mn} S_m(h, x) S_n(h, y) \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

將 (3.4.3) 同乘上 $S_m(h, x)$ 及 $S_n(h, y)$ 並積分，

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \sum_{m,n} C_{mn} \left[\int S_m(h, x) \frac{d^2}{dx^2} S_m(h, x) dx \int S_n(h, y) S_n(h, y) dy \right. \\ & \quad \left. + \int S_m(h, x) S_m(h, x) dx \int S_n(h, y) \frac{d^2}{dy^2} S_n(h, y) dy \right] \\ & \quad + \sum_{k,k'} \sum_{m,n} C_{mn} \int S_m(h, x) S_k(h, x) S_m(h, x) \int S_n(h, y) S_{k'}(h, y) S_n(h, y) V(kh, k'h) dy dx \quad (3.4.4) \\ & = E \sum_{m,n} C_{mn} \int S_m(h, x) S_m(h, x) dx \int S_n(h, y) S_n(h, y) dy \end{aligned}$$

整理可得

$$-\frac{1}{2}h^2 \sum_{mn} C_{mn} \left\{ \left[\delta_{nn} C_{mm}^{(2)} + \delta_{mm} C_{nn}^{(2)} \right] + \delta_{mm} \delta_{nn} V(mh, nh) \right\} = h^2 E \sum_{mn} C_{mn} \delta_{mm} \delta_{nn} \quad (3.4.5)$$

$$\text{其中 } c_{m'm}^{(2)} \equiv \begin{cases} -\frac{\pi^2}{3h^2} & \text{if } m' = m \\ \frac{2(-1)^{m'-m}}{h^2(m'-m)^2} & \text{if } m' \neq m \end{cases}$$

$$c_{n'n}^{(2)} \equiv \begin{cases} -\frac{\pi^2}{3h^2} & \text{if } n' = n \\ \frac{2(-1)^{n'-n}}{h^2(n'-n)^2} & \text{if } n' \neq n \end{cases}$$

同樣的，式 (3.4.5) 經由電腦運算，則可計算出特徵函數及特徵能量。



3.5 結果與討論

對於特徵值問題，我們採用的數值方法就是特徵函數展開法，只要找出一組具備正交及完備性質的基底函數，我們就可以找到特徵值與特徵向量，最後就可解出於此系統中特徵態的解。而 Sinc 函數為具有正交性質的基底函數，但其完備性並不完全，故其數值解有些許的誤差，雖然如此 Sinc 函數依舊是為基底函數的最佳選擇之一，所以我們將以 Sinc 函數作為解定態薛丁格方程式的基底函數。



第四章二維位能勢

波在不同幾何形狀邊界的行為探討，一直被科學家所研究著，舉凡在通訊、雷射及發光二極體等方面，在在都對特定幾何邊界的波動行為有著相當廣泛的研究。像是光通過光纖進行傳導訊息時，能量在垂直於光傳遞方向二維平面的行為分布就相當重要，關係著傳導訊息失真與否；發光二極體在光行進的路徑，在不同的材料的介面上，波在其幾何邊界上所產生的干涉及反射行為，關係著發光效率高與低。而這些方面的行為研究皆屬電磁學與量子力學的範疇，因此波在不同幾何形狀二維特定邊界下的基礎行為探討，在電磁學及量子力學中是相當重要的。

4.1 二維方形位能勢 (Two-Dimensional square potential)

波的運用相當多元，其中最令人熟知的便是運用在光傳輸的光波導，不同材料的波導會產生不同的模態，在光的傳遞時最不希望高階模態的產生，高階模態會造成光收斂性不佳，而致使光產生損耗或者訊號轉換失真。因此波導的形狀及材質也因應產業的發展而廣泛的被研究著，其中矩形對稱形狀的波導一直是光通訊元件的主流。因此對於二維方形我們將分別以數值方法及解析解來分析及比較。

4.1.1 二維方形位能勢解析解

經由第三章數值方法的討論，已知二維定態薛丁格波動方程式如下；

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(x, y) + V(\vec{r}) \psi(x, y) = E \psi(x, y) \quad (4.1.1)$$

現在要解描述粒子行為的波函數 $\psi(x, y)$ 在二維方形位能勢的解析解，位能勢如圖 4.1.1， $V(x, y)$ 表示如下

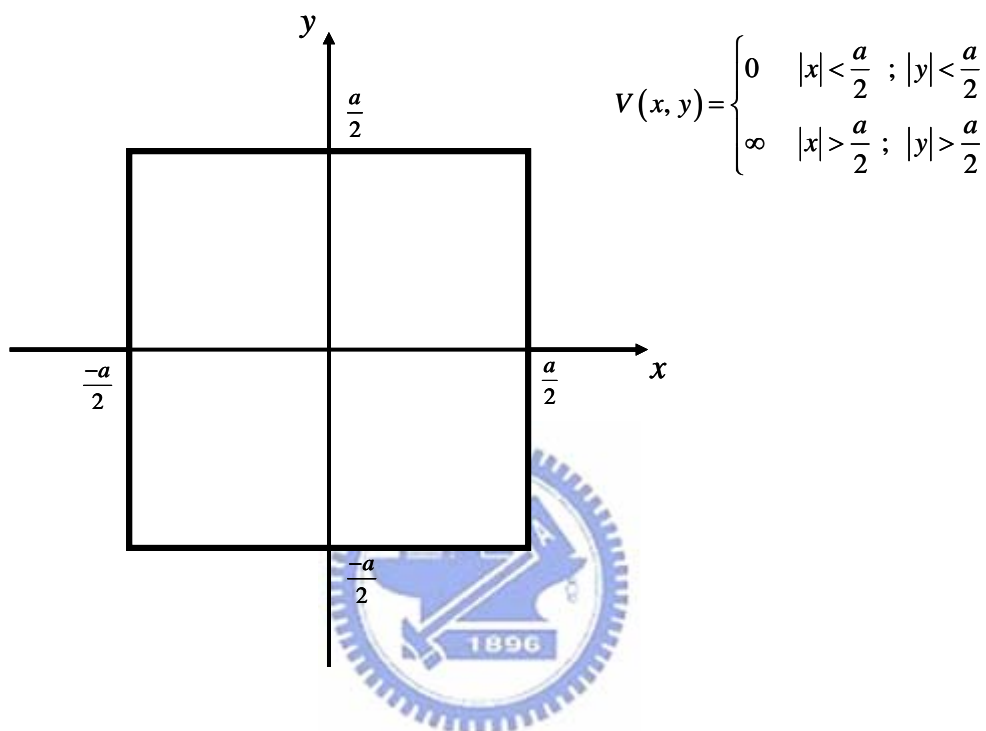


圖 4.1.1 二維方形位能勢圖

在方形位能勢中，薛丁格方程式為

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(x, y) = E \psi(x, y) \quad (4.1.2)$$

利用分離變數，令 $\psi(x, y) = X(x)Y(y)$ ，代入式 (4.1.2)

$$\Rightarrow Y(y) \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + X(x) \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} X(x)Y(y) = 0 \quad (4.1.3)$$

令 $K^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ ，並將式 (4.1.3) 同除以 $X(x)Y(y)$ ，

$$\Rightarrow \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} + K^2 = 0 \quad (4.1.4)$$

假設

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = -\alpha^2 \\ \frac{1}{Y(y)} \frac{d^2 Y(y)}{dy^2} = -\beta^2 \end{cases} \quad (4.1.5)$$

這兩個常係數微分方程式的通解可以表示為

$$\Rightarrow \begin{cases} X(x) = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x \\ Y(y) = C \sin \beta y + D \cos \beta y \end{cases} \quad (4.1.6)$$

其中 A、B、C、D 為常數。因為我們假設在邊界上，位能勢是無限大，粒子無法跑出位能勢之外，因此可得知波函數 $\psi(x, y)$ 在方形位能勢的邊界上的值為零，表示成

$$\begin{cases} \psi\left(x = \frac{\pm a}{2}, y\right) = X\left(\frac{\pm a}{2}\right)Y(y) = 0 \\ \psi\left(x, y = \frac{\pm a}{2}\right) = X(x)Y\left(\frac{\pm a}{2}\right) = 0 \end{cases} \quad (4.1.7)$$

式 (4.1.6) 代入邊界條件式 (4.1.7)，可以解得

$$\begin{cases} X_m(x) = A' \sin \left[\frac{m\pi}{a} \left(x + \frac{a}{2} \right) \right], & m = 1, 2, 3, \dots \\ Y_n(y) = C' \sin \left[\frac{n\pi}{a} \left(y + \frac{a}{2} \right) \right], & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (4.1.8)$$

其中 A' 和 C' 為常數，可以由歸一化條件 $\int \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, y)|^2 dx dy = 1$ 得到

$$\Rightarrow \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} A'^2 \sin^2 \left[\frac{m\pi}{a} \left(x + \frac{a}{2} \right) \right] dx \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} C'^2 \sin^2 \left[\frac{n\pi}{a} \left(y + \frac{a}{2} \right) \right] dy = 1$$

$$\Rightarrow A'C' = \sqrt{\frac{4}{a^2}} = \frac{2}{a}$$

最後可以得知二維方形的特徵態 (Eigenstates) 的解析解，表示如下

$$\begin{aligned}\psi_{m,n}(x,y) &= X_m(x)Y_n(y) \\ &= \frac{2}{a} \sin\left[\frac{m\pi}{a}\left(x + \frac{a}{2}\right)\right] \sin\left[\frac{n\pi}{a}\left(y + \frac{a}{2}\right)\right] \begin{cases} m = 1, 2, 3, \dots \\ n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (4.1.9)\end{aligned}$$

而二維方形位能勢的特徵態 (Eigenstates) 對應的能量特徵值 (Energy Eigenvalues) $E_{m,n}$ 表示為

$$E_{m,n} = \frac{\hbar^2 K_{m,n}^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \right] \begin{cases} m = 1, 2, 3, \dots \\ n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (4.1.10)$$

表 4.1.1 及表 4.1.2 為二維方形位能勢的特徵態的解析解及特徵態對應的特徵能量值。從表 4.1.1 中我們可以看到，當 (m,n) 為 (2,1) 及 (1,2) 時，所描述的圖形會以簡併態來呈現，所以其 Energy 是相等。



表 4.1.1 二維方形之解析解(一)

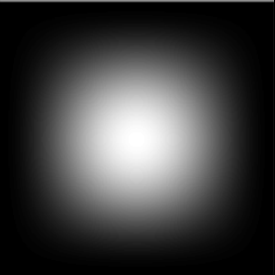
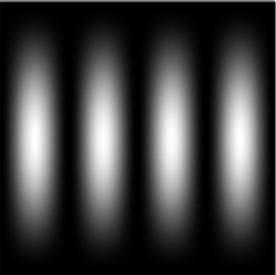
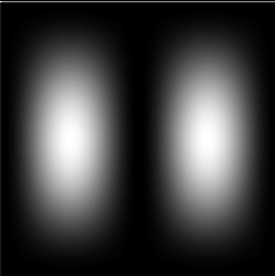
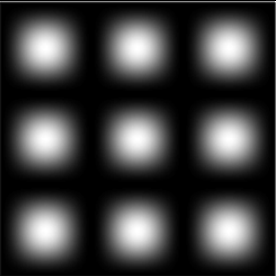
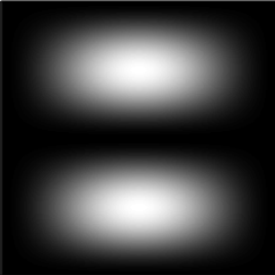
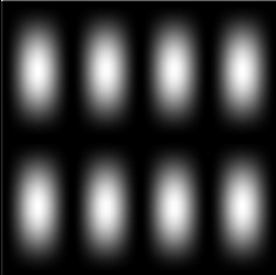
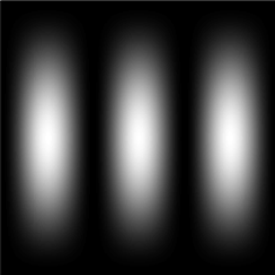


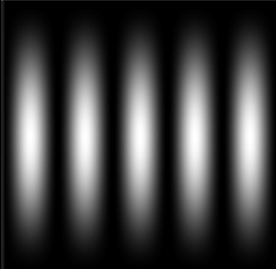
解析解			解析解		
m,n	Intensity	Energy	m,n	Intensity	Energy
(1,1)		2.467	(4,1)		20.973
(2,1)		6.169	(3,3)		22.207
(1,2)		6.169	(4,2)		24.674
(3,1)		12.337	(4,3)		30.843
(3,2)		16.038	(5,1)		32.076

表 4.1.2 二維方形之解析解(二)

解析解			解析解		
m,n	Intensity	Energy	m,n	Intensity	Energy
(5,2)		35.777	(4,6)		64.152
(4,4)		39.478	(6,5)		75.256
(5,3)		41.946	(1,8)		80.191
(6,2)		49.348	(3,8)		90.060
(3,6)		55.517	(9,4)		119.669

4.1.2 二維方形位能勢數值解

將二維方形的圖形，轉化為以點陣圖格式來呈現，點陣圖的灰階呈現由黑到白可表示為 0 至 255。在二維方形外圍束以白色邊框做為其邊界條件，如圖 4.1.2，其中以白色為的邊框部份就是我們用以表示為無限位能井，所有的波動皆束縛在方形位能勢中。

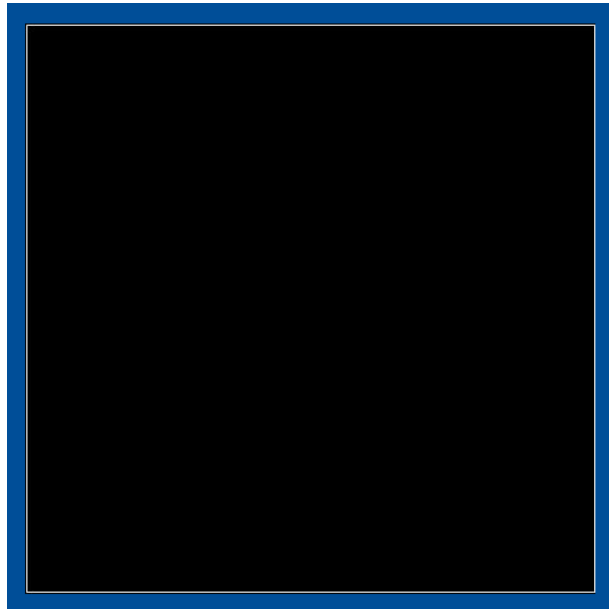


圖 4.1.2 二維方形圖形

將二維方形帶入特徵函數展開法來運算，使用數值方法運算時，Basis 越高其誤差會越低，但由於個人電腦效能的關係，無法處理太大數量的 Basis，在這裡我們使用的 Basis 數目是 $N=40 \times 40$ ，得到在不同 State 狀態下，模擬出的特徵態的圖形及特徵能量值。如表 4.1.3 及表 4.1.4 所示。

表 4.1.3 二維方形位能勢之數值解(一)


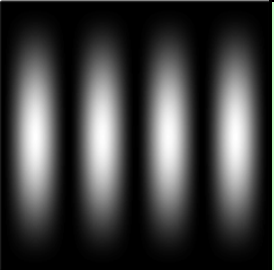
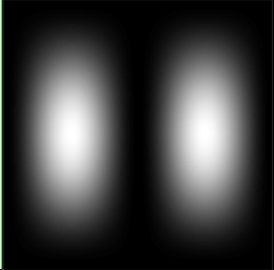
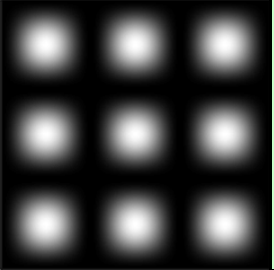
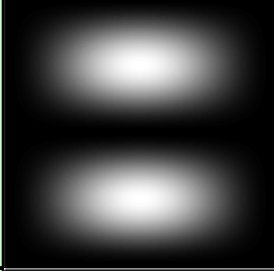
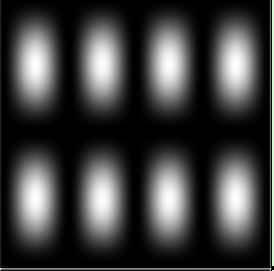
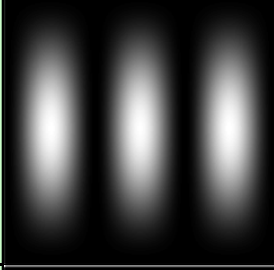
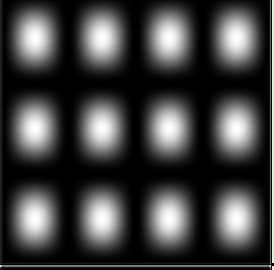
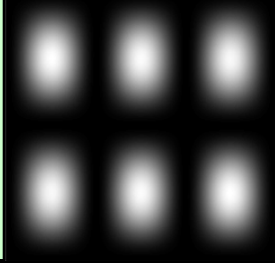
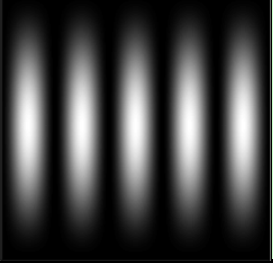
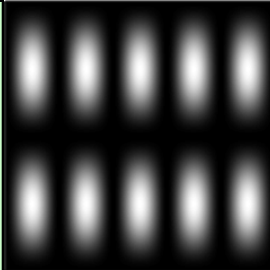

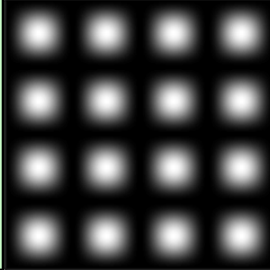
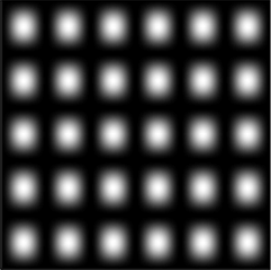
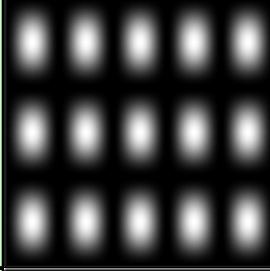
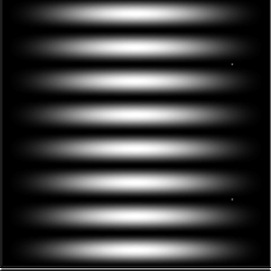
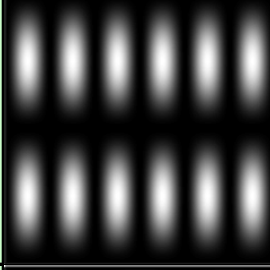
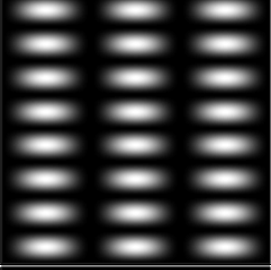
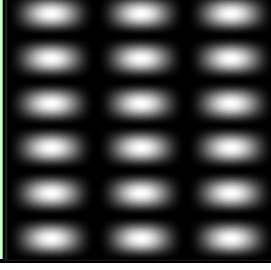
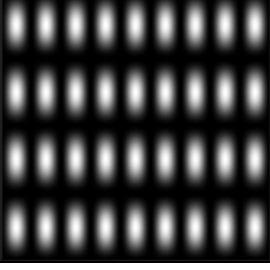
數值解			數值解		
State	Intensity	Energy	State	Intensity	Energy
(1,1)		2.513	(4,1)		21.231
(2,1)		6.256	(3,3)		22.479
(1,2)		6.256	(4,2)		24.975
(3,1)		12.496	(4,3)		31.214
(3,2)		16.239	(5,1)		32.463

表 4.1.4 二維方形位能勢之數值解(二)

數值解			數值解		
State	Intensity	Energy	m,n	Intensity	Energy
(5,2)		36.206	(4,6)		64.908
(4,4)		39.950	(6,5)		76.140
(5,3)		42.446	(1,8)		81.132
(6,2)		49.933	(3,8)		91.116
(3,6)		56.173	(9,4)		121.067

4.1.3 二維方形位能勢解析解與數值解比較

由於運算的 Basis 數量越高，其運算結果與解析解的差異會越小，所以先針對二維方型圖形在不同 Basis 數目的運算下，來比較其運算結果對解析解的誤差率。定義誤差率為在同一定態下，數值解減去解析解的差值再除以解析解，並取其絕對值。從圖 4.1.3 的確可以看出，運算的 Basis 數量越高，其誤差越小。

縱合以上二維方形解析解與數值解的結果，可以從表 4.1.5 及表 4.1.6 中得知，以數值方法模擬所呈現出來在各個不同特徵態的圖形與解析解的圖形比較，在相同特徵態下的圖形是一致的。比對特徵能量值 (Energy)，從表 4.1.5 及表 4.1.6 中也可以看出二維方形解析解與數值解的特徵能量值的確相當的接近。

接下來進一步分析解析解與數值解特徵能量值分佈，我們先定義特徵態 (State)，由 1 至 100 代表著圖形複雜程度的增加，Energy 為特徵能量值。從圖 4.1.4 可以看出，隨著特徵態的複雜度遞增，於相同特徵態下解析解與數值解能量值分別也往上遞增，而其數值解對解析解的平均誤差約為 1.1%。

表 4.1.5 二維方形位能勢解析解與數值解比較表(一)

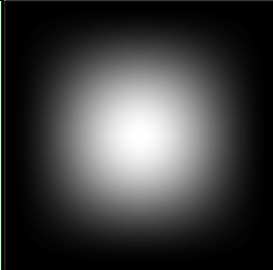
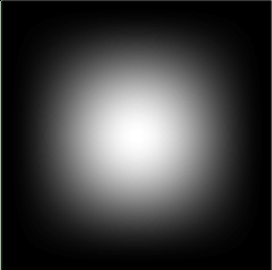
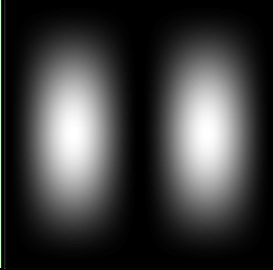

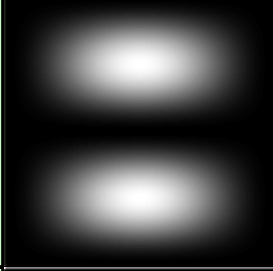
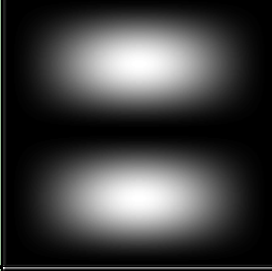
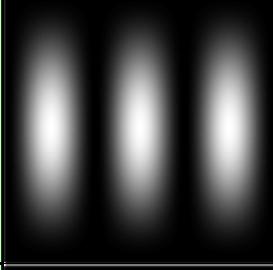
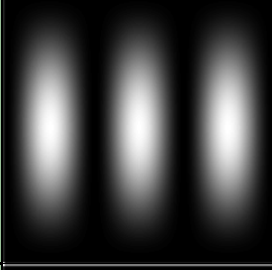
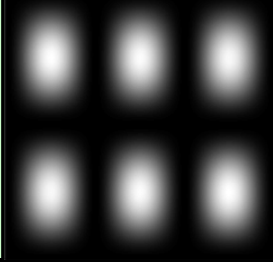
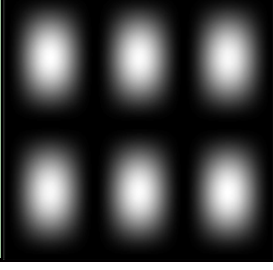
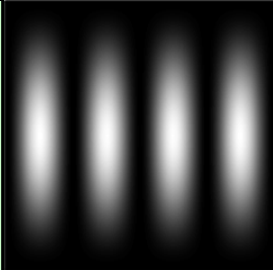
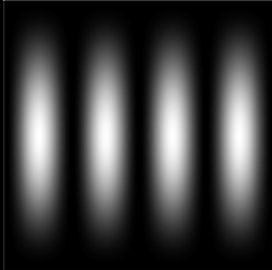
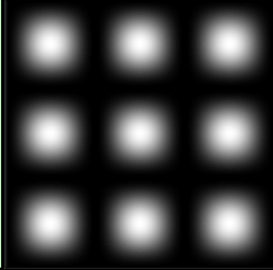
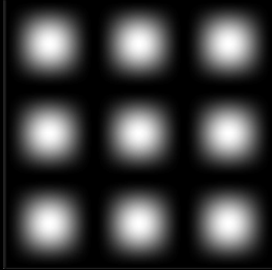
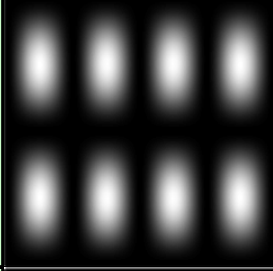

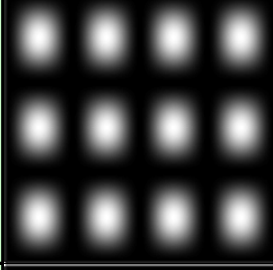
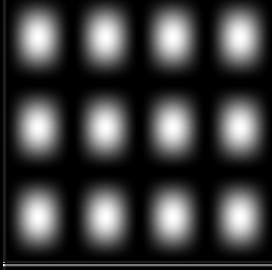
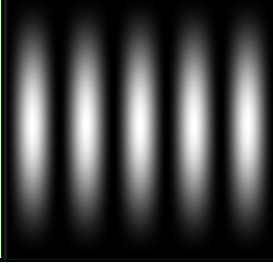
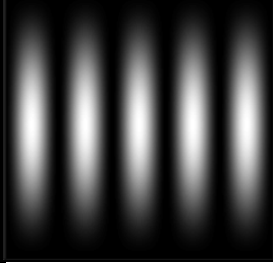
State (m,n)	數值解		解析解	
	Intensity	Energy	Intensity	Energy
(1,1)		2.513		2.467
(2,1)		6.256		6.169
(1,2)		6.256		6.169
(3,1)		12.496		12.337
(3,2)		16.239		16.038

表 4.1.6 二維方形位能勢解析解與數值解比較表(二)

State (m,n)	數值解		解析解	
	Intensity	Energy	Intensity	Energy
(4,1)		21.231		20.973
(3,3)		22.479		22.207
(4,2)		24.975		24.674
(4,3)		31.214		30.843
(5,1)		32.463		32.076

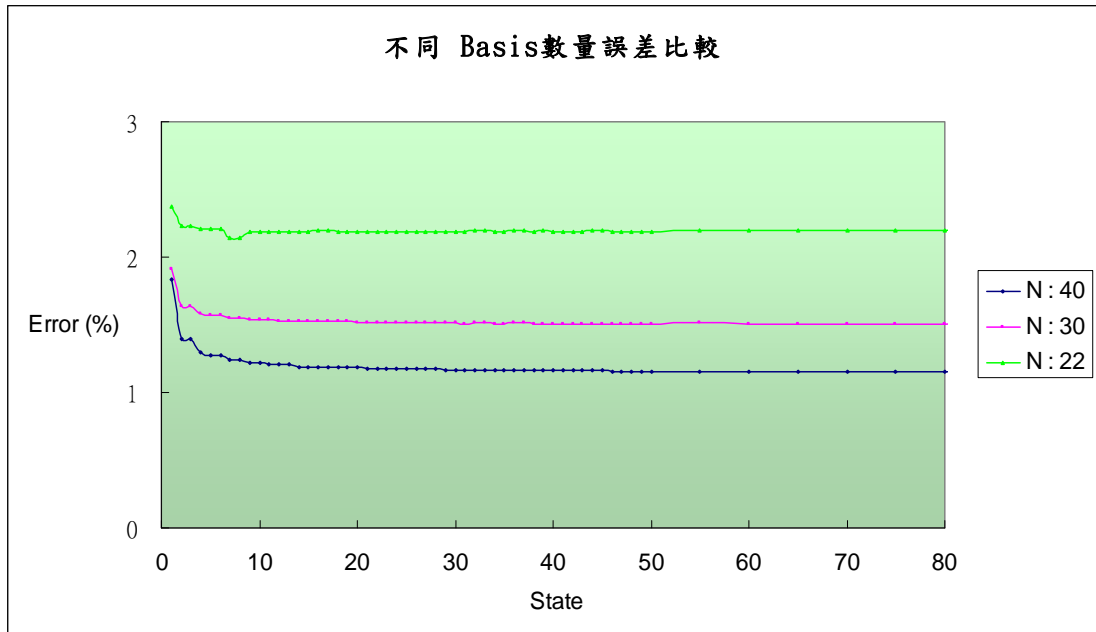


圖 4.1.3 不同Basis數量誤差圖

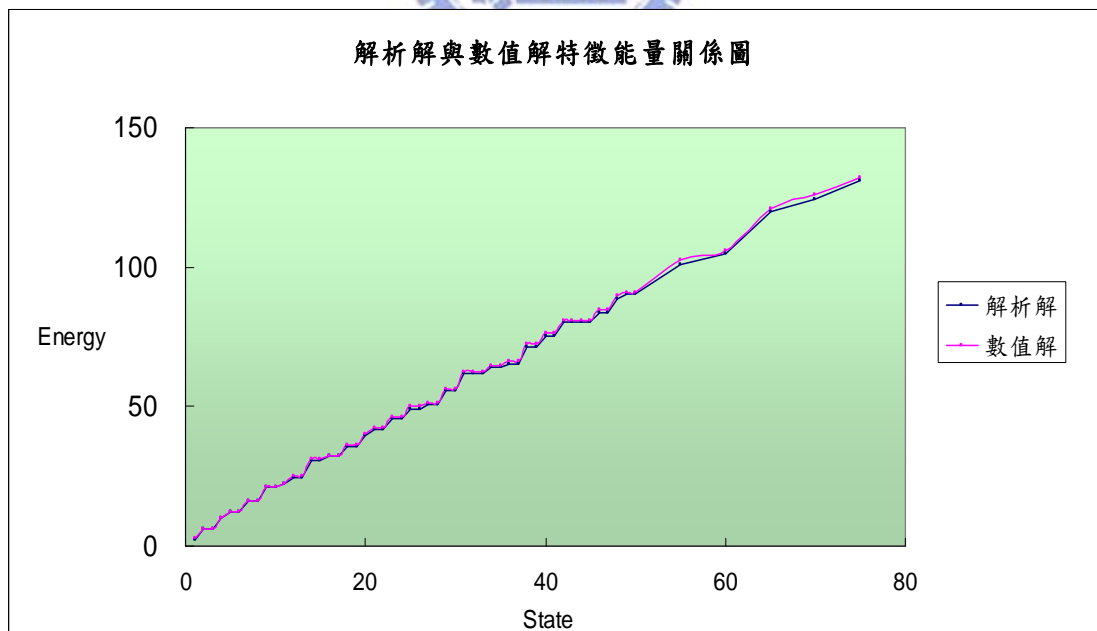


圖 4.1.4 二維方形解析解與數值解特徵能量關係圖

4.2 二維圓形位能勢 (Two-Dimensional circle potential)

4.2.1 二維圓形位能勢解析解

現在要解描述粒子行為的波函數 $\psi(\rho, \phi)$ 在二維圓形位能勢的解析解，位能勢如圖 4.2.1， $V(\rho, \phi)$ 表示如下：

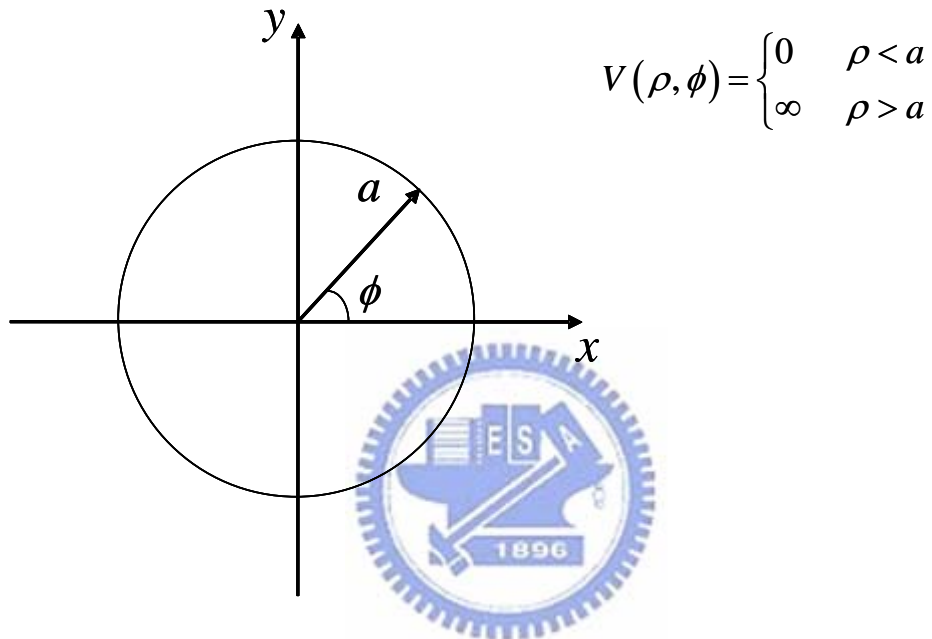


圖 4.2.1 二維圓形位能勢圖

在 $\rho < a$ 的位能為零；在 $\rho > a$ 的區域，其位能則為無窮大。在圓形位能勢的內部，薛丁格方程式為

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \psi(\rho, \phi) = E \psi(\rho, \phi) \quad (4.2.1)$$

利用分離變數，令 $\psi(\rho, \phi) = R(\rho)\Phi(\phi)$ ，代入式 (4.2.1)，

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \frac{-\hbar^2}{2m} \left[\Phi(\phi) \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{\Phi(\phi)}{\rho} \frac{dR(\rho)}{d\rho} + \frac{R(\rho)}{\rho^2} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} \right] \\ & + ER(\rho)\Phi(\phi) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

令 $K^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ ，並將式 (4.2.2) 同除以 $\frac{R(\rho)\Phi(\phi)}{\rho^2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{R(\rho)} \left[\rho^2 \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \rho \frac{dR(\rho)}{d\rho} + R(\rho) \left(\frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} + K^2 \rho^2 \right) \right] = 0 \quad (4.2.3)$$

假設 $\frac{1}{\Phi(\phi)} \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} = -m^2$ ，代入式 (4.2.3) 並重新整理，可得徑向跟軸向兩

個方向的微分方程式

$$\Rightarrow \left[\frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR(\rho)}{d\rho} + \left(K^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R(\rho) \right] = 0 \quad (4.2.4)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} + m^2 \Phi(\phi) = 0 \quad (4.2.5)$$

現在先解式 (4.2.5) 微分方程式。已知此微分方程式的通解為

$$\Rightarrow \Phi_m(\phi) = A \cos(m\phi + \theta) \quad (4.2.6)$$

其中 A, θ 為常數。在此我們令 $\theta = 0$ 。又因為在 ϕ 方向圓對稱，故有邊界條件 $\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$ ，代入式 (4.2.6)，可以得到 $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ，

因此其通解為

$$\Rightarrow \Phi_m(\phi) = A \cos(m\phi), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.2.7)$$

接下來，要解徑向方向微分方程式。令 $x = K\rho$ ，則式 (4.2.4) 可改寫成

$$\Rightarrow \left[\frac{d^2 R(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR(x)}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2} \right) R(x) \right] = 0 \quad (4.2.8)$$

式 (4.2.8) 即 m 階 Bessel 微分方程式，其通解為

$$\Rightarrow R(x) = BJ_m(x) \quad (4.2.9)$$

其中 B 為常數且 $J_m(x)$ 為 m 階 Bessel 函數。跟方形一樣，波函數在邊界上值為零，也就是 $R(x=Ka) = BJ_m(Ka) = 0$ 。並非所有的 K 都可滿足 $J_m(Ka) = 0$ ，只有某些特定的不連續 K 值才滿足，即當 $K_m a = \alpha_{mn}$ 時， $J_m(\alpha_{mn}) = 0$ ， α_{mn} 可由查表得知。最後我們得到徑向方向的通解為

$$\Rightarrow R(\rho) = BJ_m(K_{mn}\rho) \quad (4.2.10)$$

不同 (m, n) 可對應到特定的特徵狀態 $\psi_{m,n}(\rho, \phi) = ABJ_m(K_{mn}\rho)\cos(m\phi)$ ，

AB 可以由歸一化條件 $\iint_{-\infty}^{\infty} |\psi(\rho, \phi)|^2 \rho d\rho d\phi = 1$ 得到

$$\Rightarrow AB = \frac{1}{\sqrt{\pi a} J_{m+1}(K_{mn}\rho)} \quad (4.2.11)$$

最後可以得知二維圓形位能勢的特徵態 (Eigenstates) 解析解，表示如下

$$\begin{aligned} \Rightarrow \psi_{m,n}(\rho, \phi) &= R(\rho)\Phi(\phi) \\ &= \frac{J_m(K_{mn}\rho)\cos(m\phi)}{\sqrt{\pi a} J_{m+1}(K_{mn}\rho)}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2.. \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

而二維圓形位能勢的特徵態 (Eigenstates) 對應的能量特徵值 (Energy eigenvalues) $E_{m,n}$ 表示為

$$E_{m,n} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\alpha_{mn}}{a} \right)^2, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2.. \quad (4.2.13)$$

表 4.2.1 及 4.2.2 為二維圓形位能勢的特徵態解析解及特徵態對應的能量特徵值。

表 4.2.1 二維圓形位能勢之解析解(一)


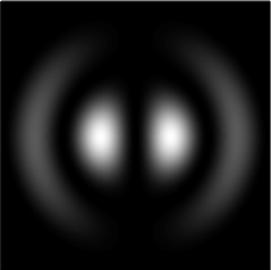
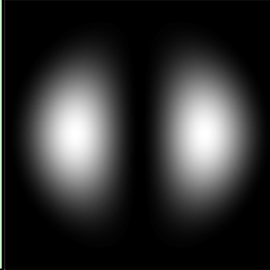
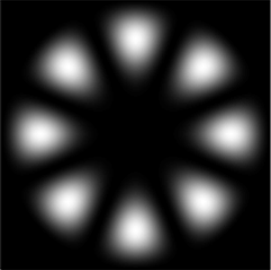
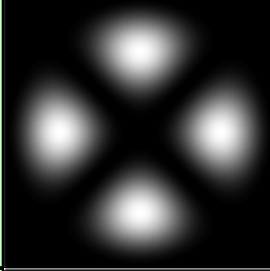
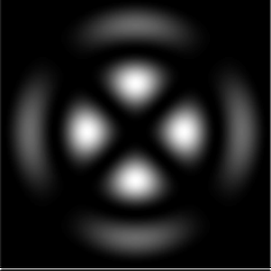
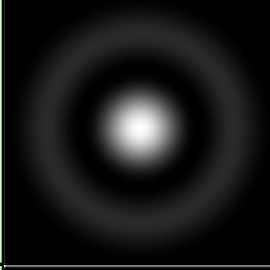
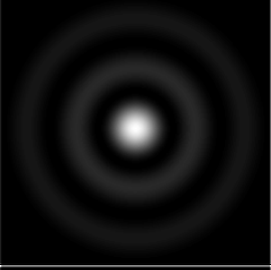
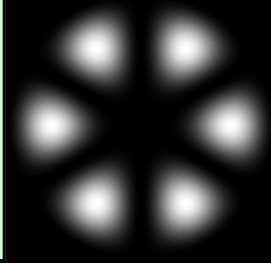
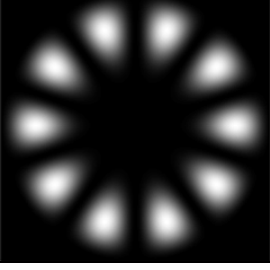
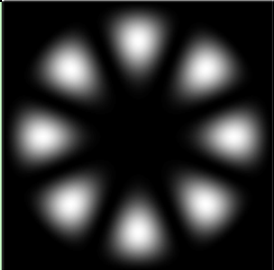
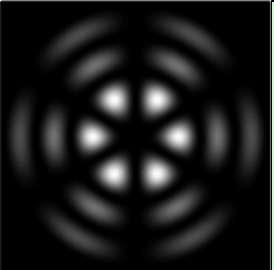
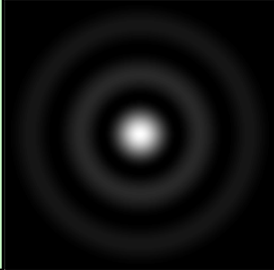
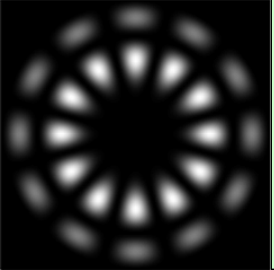
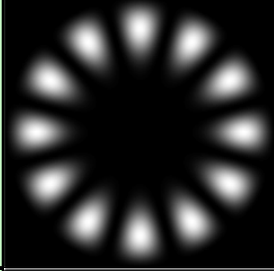
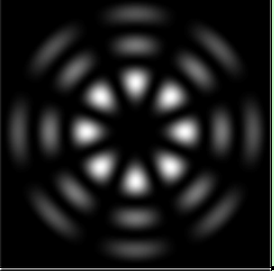
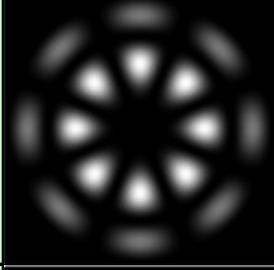
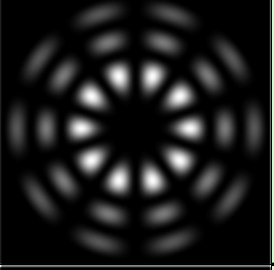
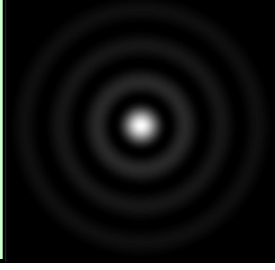
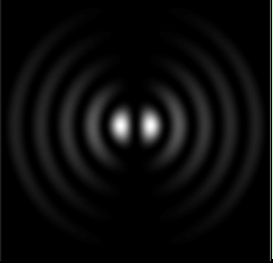
解析解			解析解		
State	Intensity	Energy	m,n	Intensity	Energy
(0,1)		2.776	(1,2)		25.038
(1,1)		7.36	(4,1)		28.059
(2,1)		13.102	(2,2)		36.121
(0,2)		15.113	(0,3)		37.319
(3,1)		20.002	(5,1)		37.273

表 4.2.2 二維圓形位能勢之解析解(二)

解析解			解析解		
State	Intensity	Energy	m,n	Intensity	Energy
(4,1)		28.059	(3,3)		86.590
(4,1)		37.319	(6,2)		92.027
(6,1)		47.645	(4,3)		105.329
(4,2)		61.759	(5,3)		125.225
(0,4)		69.396	(1,5)		137.289

4.2.2 二維圓形位能勢數值解

將二維圓形的圖形，化為矩陣的方式來呈現，處理方式與方型一致，在圓形外圍束以白色邊框做為其邊界，其中白色部分的位能勢視為無窮大，黑色部分位能勢設為零，如圖 4.2.2，

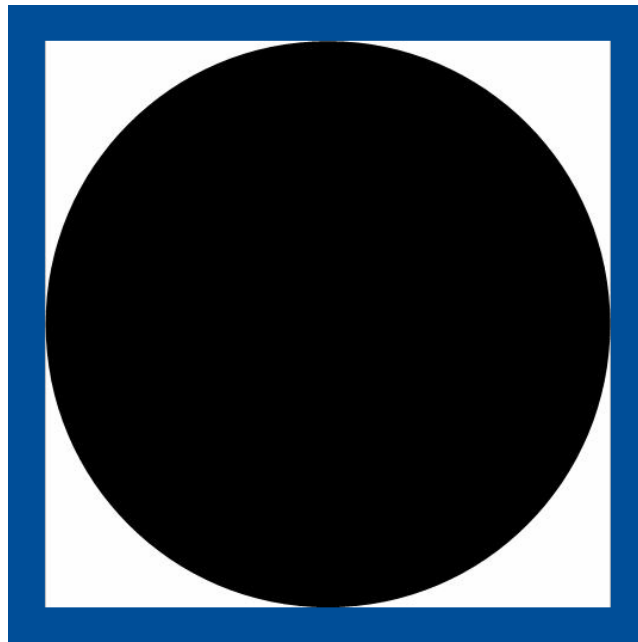


圖 4.2.2 二維圓形圖形

將此圖形帶入數值方法來做運算，可以得到在不同 State 狀態下，其模擬出的不同特徵態圖形及特徵能量 Energy。如表 4.2.3 及表 4.2.4 所示。

表 4.2.3 二維圓形位能勢之數值解(一)


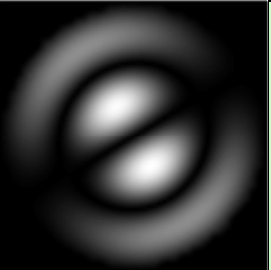
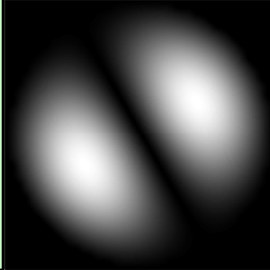
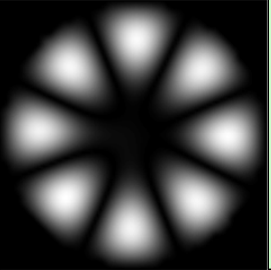
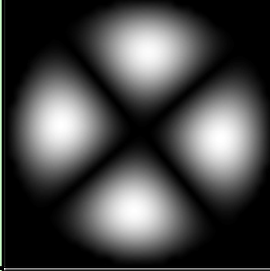
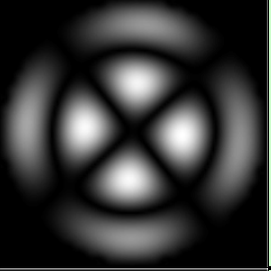
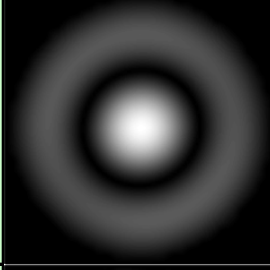

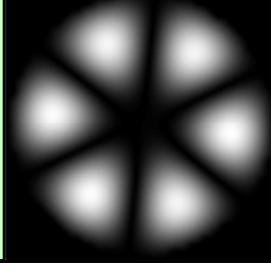
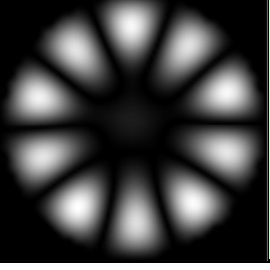
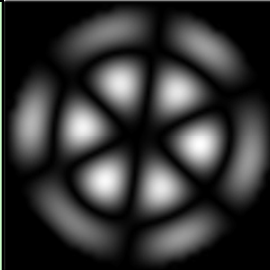
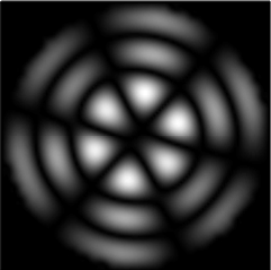
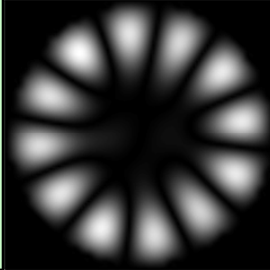
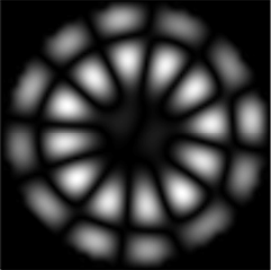
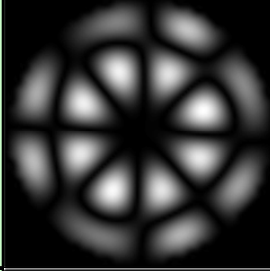
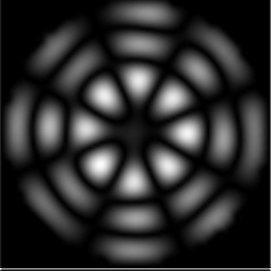

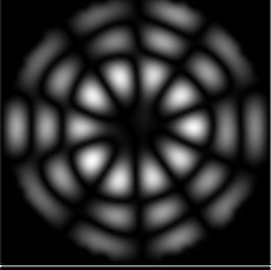
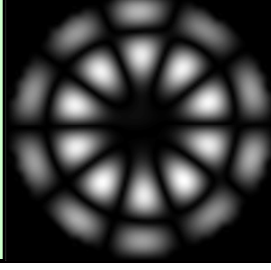
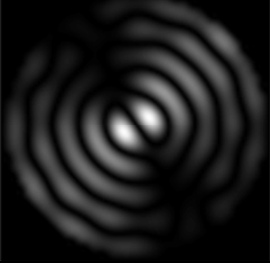
數值解			數值解		
State	Intensity	Energy	m,n	Intensity	Energy
(0,1)		2.865	(1,2)		25.111
(1,1)		7.456	(4,1)		29.226
(2,1)		13.344	(2,2)		35.799
(0,2)		15.503	(0,3)		38.067
(3,1)		20.724	(5,1)		39.076

表 4.2.4 二維圓形位能勢之數值解(二)

數值解			數值解		
State	Intensity	Energy	m,n	Intensity	Energy
(3,2)		48.333	(3,3)		85.875
(6,1)		50.128	(6,2)		93.759
(4,2)		62.294	(4,3)		104.63
(0,4)		70.715	(5,3)		125.21
(5,2)		77.246	(1,5)		137.34

4.2.3 二維圓形位能勢解析解與數值解比較

縱合以上二維圓形解析解與數值解的結果，可以從表 4.2.5 及表 4.2.6 中得知，以數值方法模擬所呈現出來在各個不同 State 的圖像與解析解的圖像作比較，在相同 State 下的圖形，數值解的圖形近似解析解的圖形。比對特徵能量值 (Energy)，從表 4.2.5 及表 4.2.6 中也可以看出二維圓形解析解與數值解的特徵能量值相當的接近。

接下來進一步分析解析解與數值解特徵能量值分佈，與二維方形一樣，定義 State 由 1 至 100 代表著圖形複雜程度的增加，Energy 為特徵能量值。從圖 4.1.3 可以了解，隨著 State 的複雜度遞增，於相同 State 下解析解與數值解能量值分別往上遞增，其數值解對解析解的誤差約為 2.39%。

表 4.2.5 二維圓形位能勢解析解與數值解比較表(一)



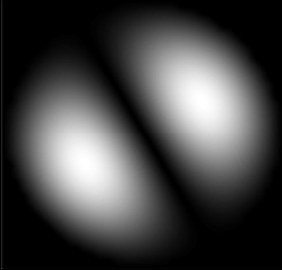

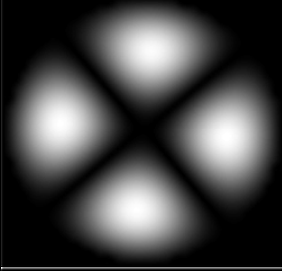
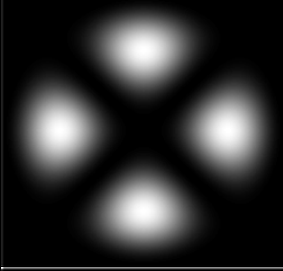

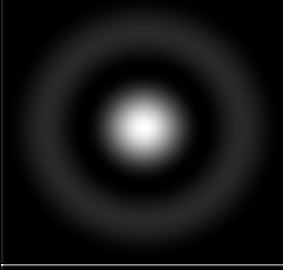
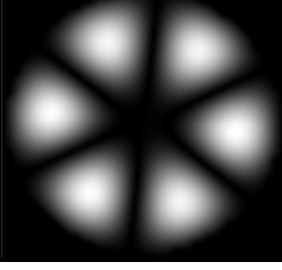
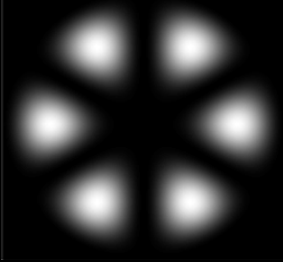
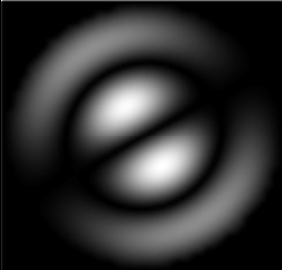

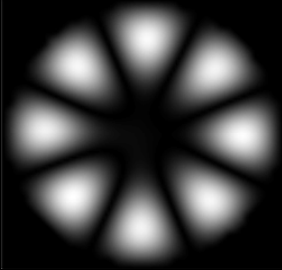
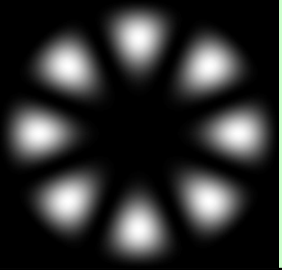
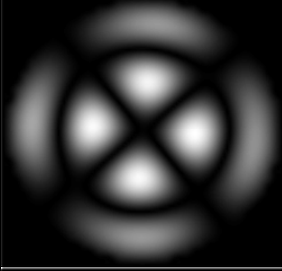
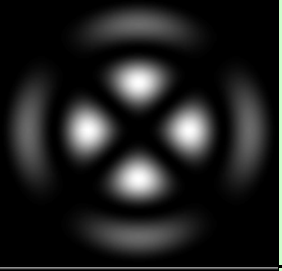


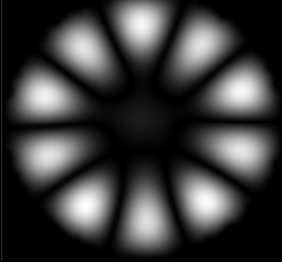
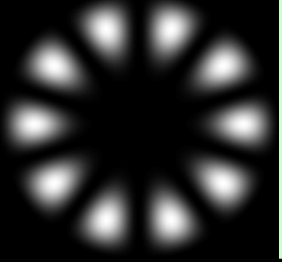
State (m,n)	數值解		解析解	
	Intensity	Energy	Intensity	Energy
(0,1)		2.865		2.776
(1,1)		7.456		7.36
(2,1)		13.344		13.102
(0,2)		15.503		15.113
(3,1)		20.724		20.002

表 4.2.6 二維圓形位能勢解析解與數值解比較表(二)

State (m,n)	數值解		解析解	
	Intensity	Energy	Intensity	Energy
(1,2)		25.111		25.038
(4,1)		29.226		28.059
(2,2)		35.799		36.121
(0,3)		38.067		37.319
(5,1)		39.076		37.273

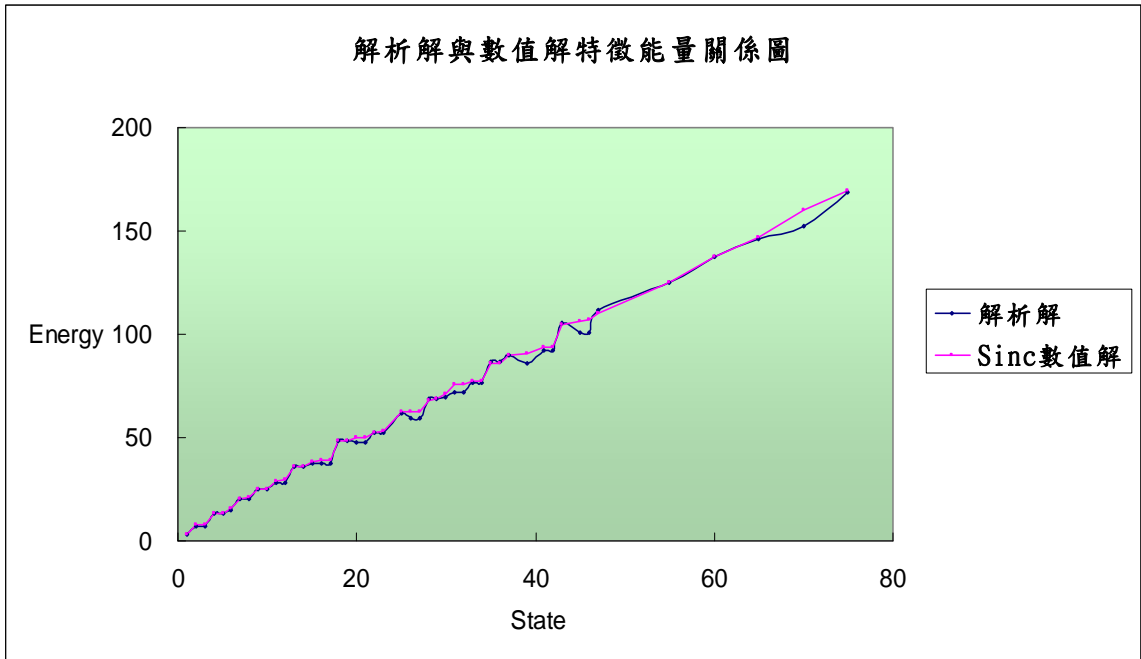


圖 4.2.3 二維圓形解析解與數值解特徵能量關係圖



4.3 其他二維不規則邊界

從上述二維方形及圓形位能勢的解析解與數值解比較來看，以數值方法所運算出來的數值解，的確可以近似二維方形及圓形位能勢的解析解。接下來我們將利用這個數值方法對於不規則形狀邊界的圖形做運算，解出在各個不同定態下的圖形及特徵能量值。

4.3.1 二維不規則邊界-金門

選擇一個金門地形的地圖，再將地圖轉化為二維不規則的矩陣圖形，如圖4.3.1，再帶入數值方法運算，可得二維不規則邊界的特徵態及特徵能量值。

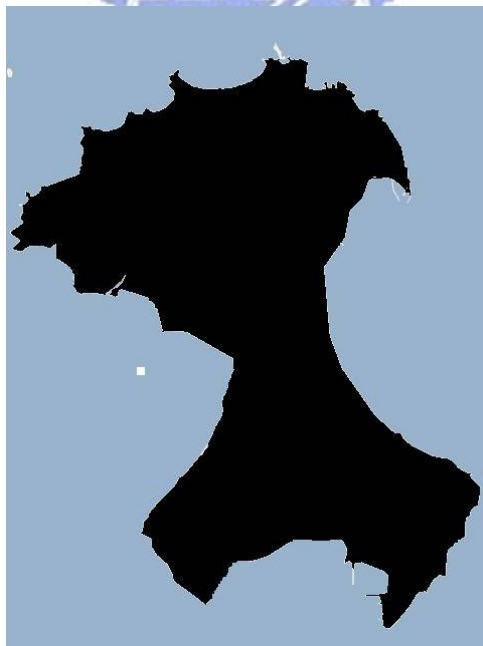

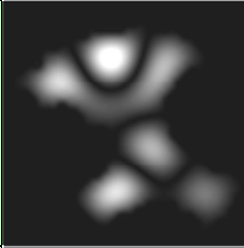
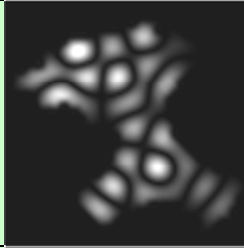
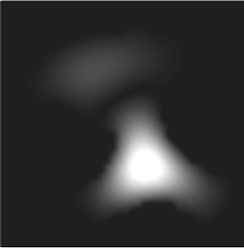
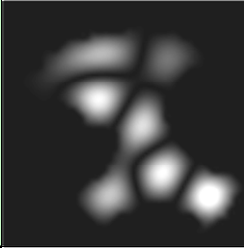
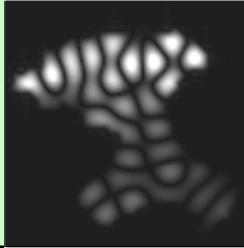


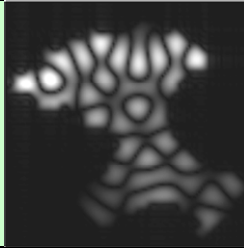


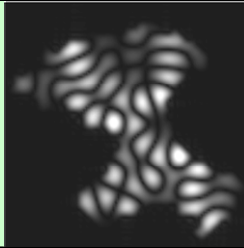


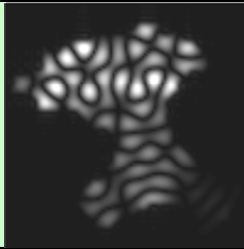


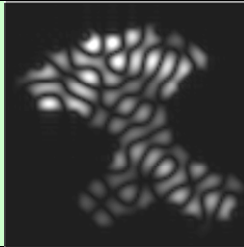


圖4.3.1 不規則邊界圖形-金門

表 4.3.1 二維不規則邊界-金門

數值解					
Intensity	Energy	Intensity	Energy	Intensity	Energy
	11.704		43.334		150.047
	18.680		49.818		200.569
	25.015		54.614		236.512
	29.724		61.825		280.848
	34.955		83.892		329.290
	40.745		106.822		362.464

4.3.2 二維不規則邊界-小提琴

選擇一個小提琴的圖形，再將小提琴圖形轉化為二維不規則的圖形，如圖4.3.2，帶入數值方法運算，可得小提琴形狀的二維不規則邊界的特徵態及特徵能量值。

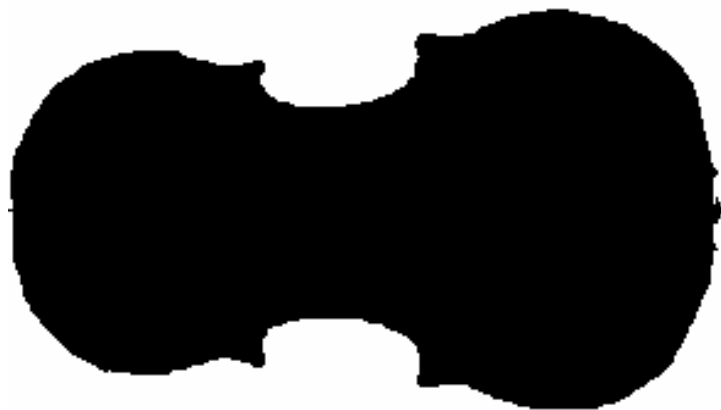
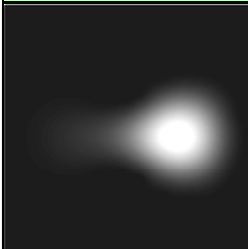
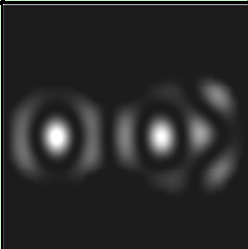
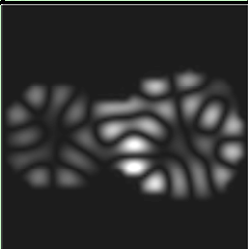
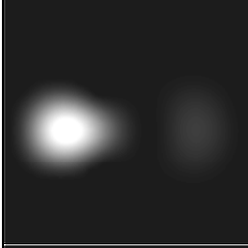
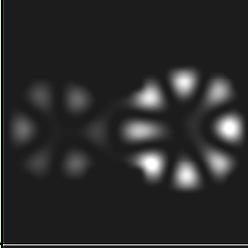
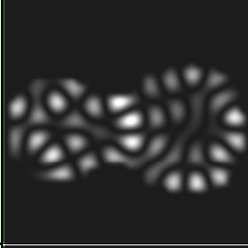
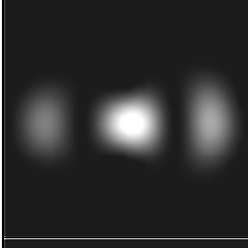

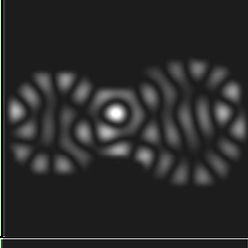


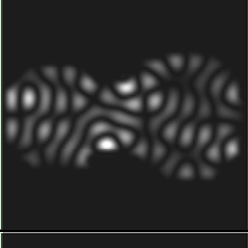

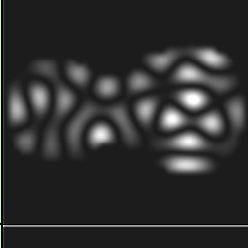
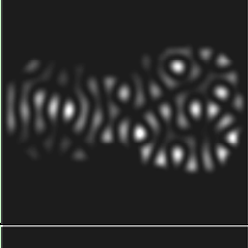
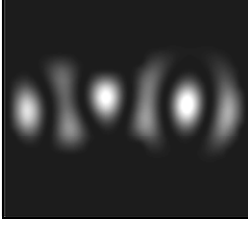
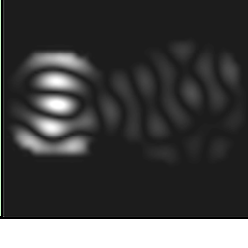
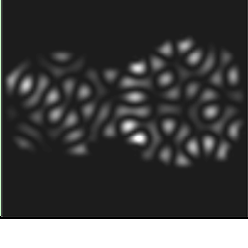


圖4.3.2 不規則邊界圖形-小提琴

表 4.3.2 二維不規則邊界位能勢數值解-小提琴

數值解					
Intensity	Energy	Intensity	Energy	Intensity	Energy
	8.710		74.077		201.461
	12.156		95.703		237.205
	19.669		118.287		258.851
	23.917		138.529		340.629
	28.413		164.402		376.090
	54.173		172.819		417.450

第五章 節線研究(Nodal Line)

自從 Ernst Chladni (1756-1827) 發現了將只能聽得到的聲音化為看得見的”聲音”之後， Nodal Line 在聲學上一直是一個很重要的研究指標。 Ernst Chladni 發展出這個研究二維波圖案的技術，是改良於伽利略的方金屬板振動，他將沙子灑在板子上，用提琴的弓來使平板振動。當達某個共振頻率時，節點線上的沙子仍是靜止，不在節點線的沙子會一直跳動直到移動至節點線上為止。此時，平板的沙子呈現駐波圖案 Chladni pattern ，而聲音節線圖騰— Chladni pattern 到今天仍是重要的研究波振動的工具。

Ernst Chladni 也用圓盤和方型盤子的振動，進行很多實驗研究節點 (Nodal Line)。當振動的平板具有均勻的密度且對稱的形狀，則當施予的波動頻率改變，共振圖案會隨之立即跟著變化，而呈現各種不同模態的對稱圖案，如圖 (5.1)。無論圓形或方形盤子的振動，顯示 Chladni pattern 皆是侷限在二維空間中所展現的共振現象。由第四章我們可以知道，以 Sinc function 為基底的特徵函數展開法可以作為解二維不同幾何形狀特定邊界的數值方法，因此我們將利用數值方法來模擬及類比圓形和方形的 Chladni pattern ，從而衍生討論在設有干擾物微擾下的波動的行為[28-30]。

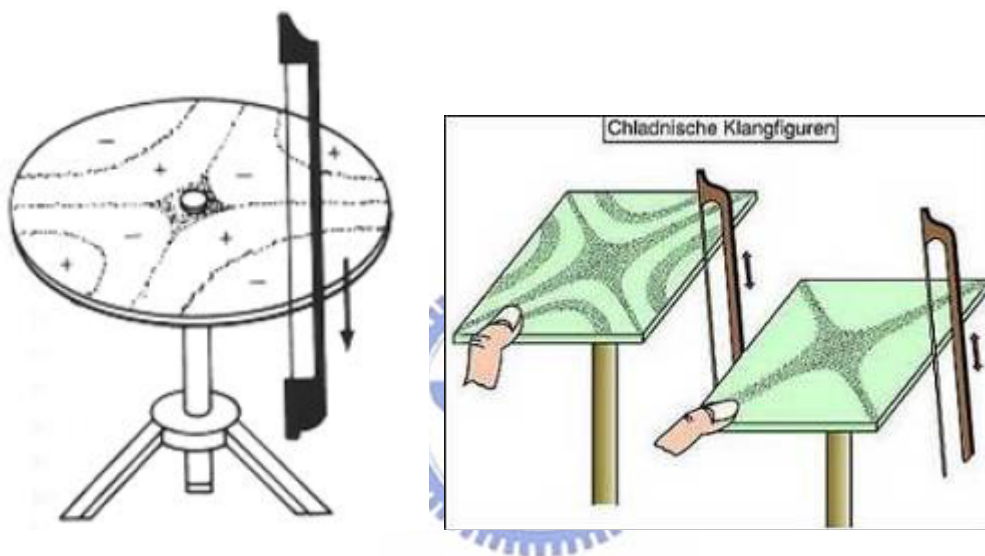


圖 5.1 方形與圓形震動示意圖

5.1 類比文獻上的 Chladni pattern

5.1.1 方形

在大學物理實驗中，探討在特定邊界下波的振動及觀察駐波的行為大都是以 Chladni pattern 作為實驗對象，因此相關的資料相當多元，圖 5.1.1 為文獻上的方形 Chladni pattern。首先我們將針對方形進行模擬並與文獻上方形的 Nodal line 圖形進行比對，結果如圖 5.1.2 與圖 5.1.3，

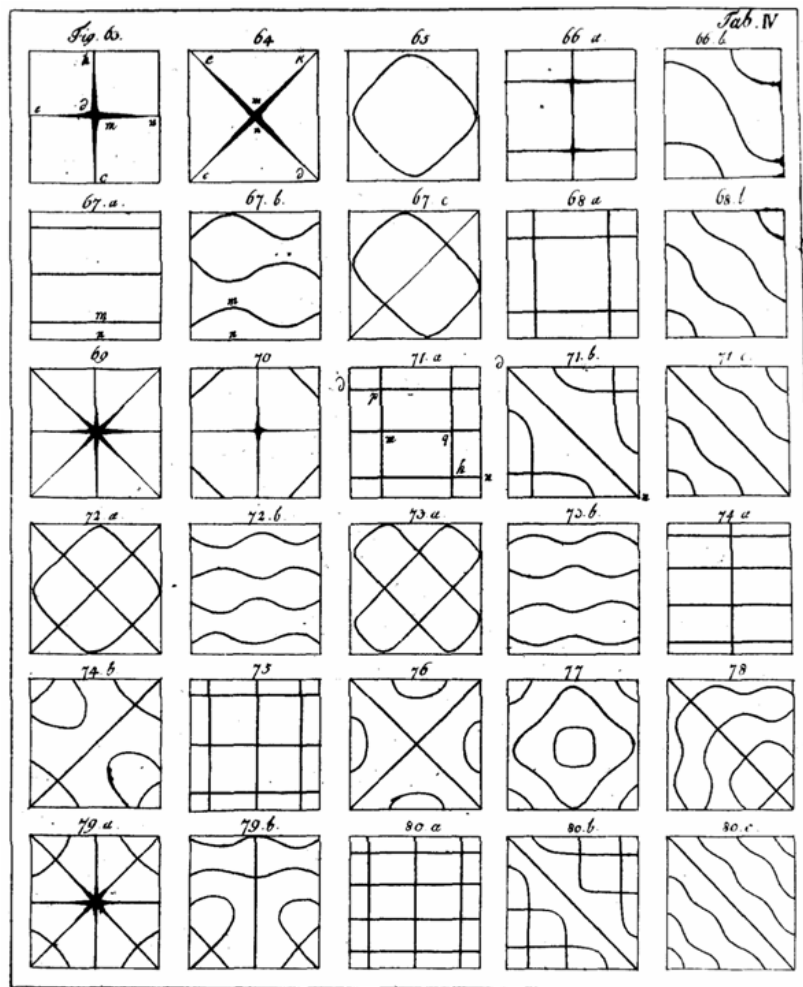


圖.5.1.1 文獻上方形 Chladni pattern [28]

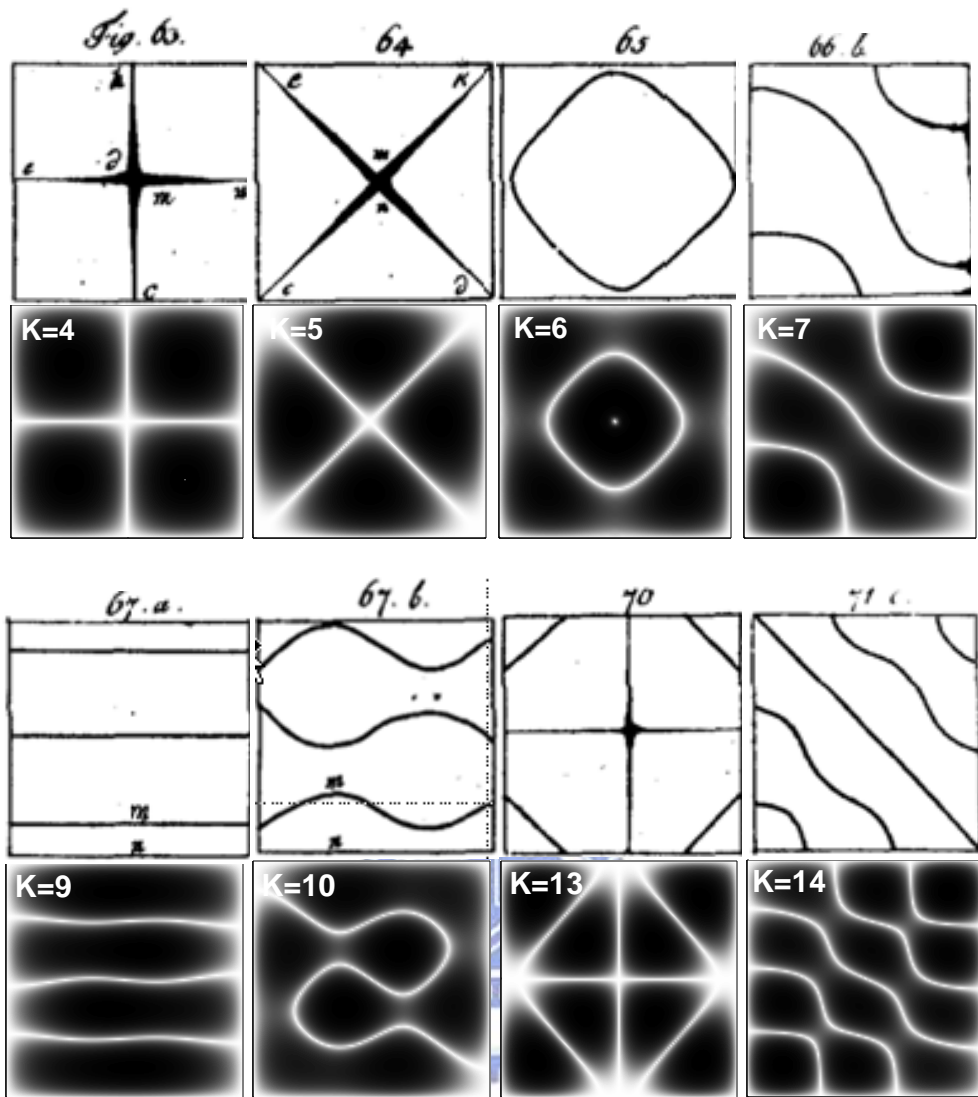


圖.5.1.2 方形 Chladni pattern 比對圖 (一)

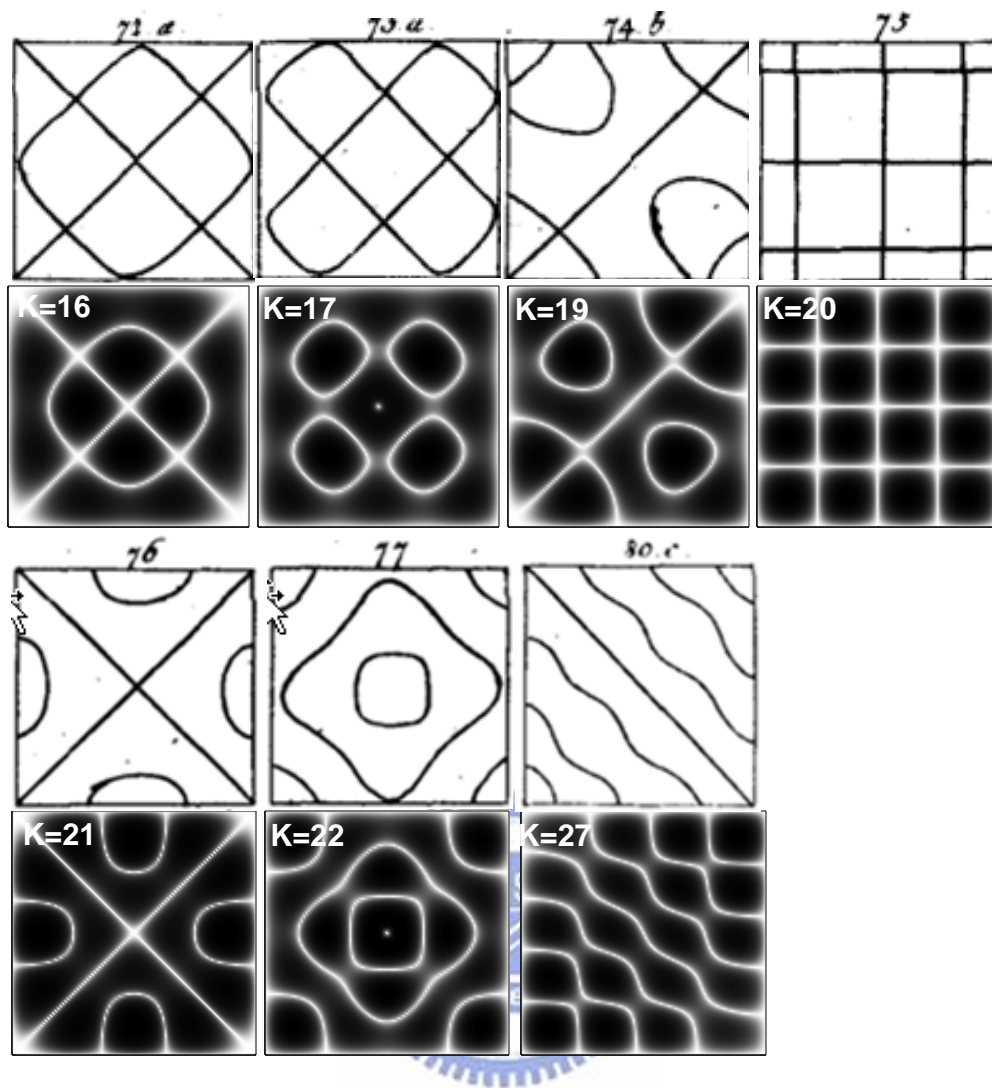


圖.5.1.3 方形 Chladni pattern 比對圖 (二)

文獻中的 Nodal line pattern 會依頻率的不同而產生不同的 pattern，頻率越高，pattern 就會越複雜，在數值方法所模擬各個特徵態的圖形中，我們選擇其中與 Chladni pattern 文獻中相似的 Nodal line 圖形來比較，在類比的圖形中清楚顯示在以數值方法所模擬的特徵態 (K) 是介於 4~27 間，可以模擬出相似於文獻上的圖形；特徵態 (K) 越高可得到對應到的圖形越少。

5.1.2 圓形

對於圓形的 Nodal line pattern，除了類比文獻上的 Chladni pattern 外，也加入實際震砂的經典 pattern。與方形相同的狀況，圓形可模擬的特徵態 (K) 都是在較低的特徵態 (K) 時可模擬出與相關文獻上相似的圖形，結果如圖 5.1.4 與圖 5.1.5。

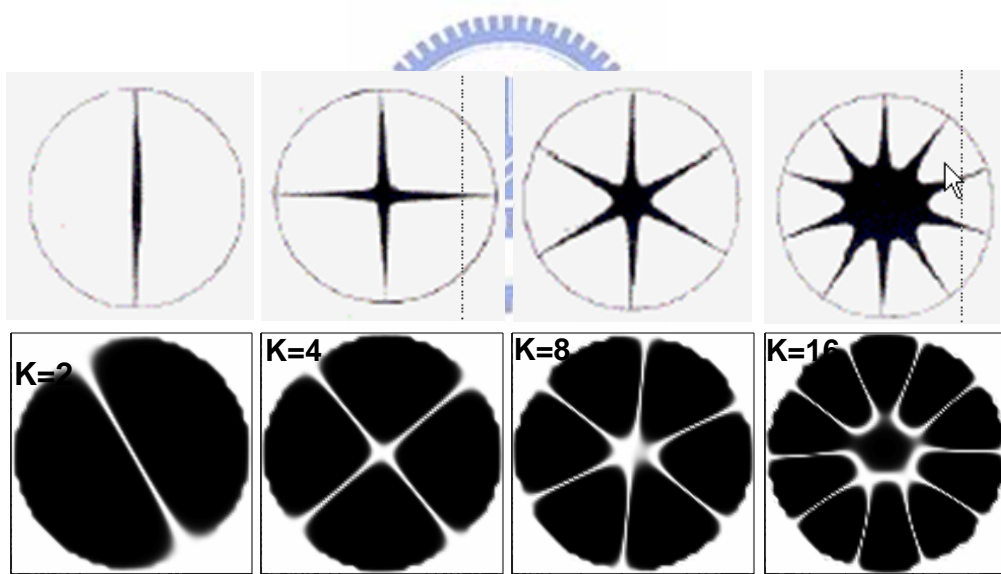


圖.5.1.4 圓形 Chladni pattern 比對圖 (一)

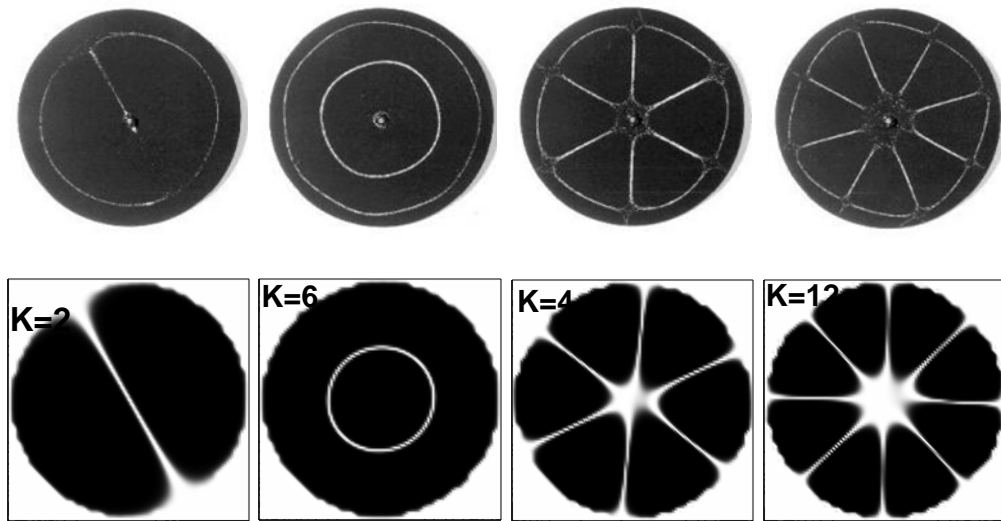


圖.5.1.5 圓形 Chladni pattern 比對圖 (二)

5.1.3 小提琴圖形 (Violin shaped plate)

類比小提琴圖形的 Nodal line pattern，由於邊界條件不同，所模擬的圖形與相關文獻上相似的圖形較少。

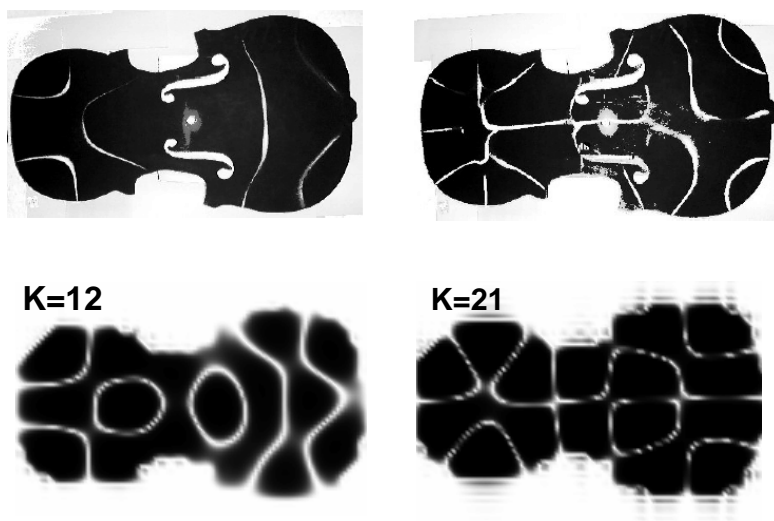


圖.5.1.6 小提琴 Chladni pattern 比對圖

5.1.4 結果與討論

雖然所模擬的圖形及數量還無法與文獻完全的類比，但已經顯示以 Sinc function 為基底的特徵函數展開法的確可以在給定特定的邊界下，模擬出部分在相關文獻上所研究的 Chladni pattern 。



5.2 理論計算分析

接下來我們要在模擬的圖形中加上了干擾物，來探討干擾物對波動行為的影響所產生出的 Nodal Line 圖形。我們從干擾物在不同距離所計算的模擬結果，發現了一些相當有趣的現象值得我們來探討。我們知道當給定一對稱的二維形狀如圓形，在未放干擾物時，在各個特徵態其圖形會呈現對稱性的排列，模擬結果與實際實驗皆有相同的結論。當我們在二維圓形中放置干擾物時，預期原本的對稱性將會受到破壞，而產生另一種新的破壞性對稱的圖形；但若恰巧干擾物放置的位置是在各個特徵態的 Nodal line 時，圖形會等同於未放干擾物時的圖形。另外在產生新的破壞性對稱的圖形時，其特徵能量也會有不同的變化，而當對稱破壞達到最大時，特徵能量也會隨著達到最大值，我們將會再對此現象針對干擾物不同的距離來分析特徵能量的變化趨勢。

5.2.1 干擾物對圖騰的定性分析

我們可以預期，當二維圓形未放置干擾物時，模擬所呈現特徵態的圖形是對稱的，而放置干擾物時則破壞原本呈現的對稱性，而產生另一種新的破壞性對稱的圖形。當干擾物沿著相同的方向改變其放置的位置時，可以清楚的觀察到共振圖形會隨著干擾物放置的方向，呈現其破壞性的對稱，如表5.2.1與表5.2.2。

表.5.2.1 干擾物於不同距離的特徵態 (一)

距離 State	0 cm (無障礙物)	2 cm	3.8 cm	5 cm	7.3 cm	10 cm
K=3						
K=5						
K=6						
K=8						

表.5.2.2 干擾物於不同距離的特徵態 (二)

距離 State	0 cm (無障礙物)	2 cm	3.8 cm	5 cm	7.3 cm	10 cm
K=10						
K=12						
K=14						
K=16						

5.2.2 干擾物對圖騰特徵能量值的定量分析

由5.2.1節可知，干擾物沿著同一方向改變放置的位置，共振圖形會產生破壞性的對稱圖形，而其所對應的特徵能量值也會隨著變化，從表 5.2.3 中可以看出，各個特徵態在不同距離下，所呈現的特徵能量值皆比無干擾物時的特徵能量值高。我們預期對稱性破壞變化達到最大時，其特徵能量也會達到最大值，但如何確定二維圓形內在何種距離下對不同特徵態的對稱破壞變化能達到最大？針對干擾物放置的距離再做進一步的細切來分析，我們發現特徵能量的變化呈現兩種峰值的趨勢，以干擾物放置位置距離的中心 6 cm 為界線，特徵能量的峰值群隱約可以看出會坐落在中心的兩側，如圖 5.2.1及圖 5.2.2。



表 5.2.3 不同距離的特徵能量值

距離 E	0 cm (無障礙物)	2 cm	3.8 cm	5 cm	7.3 cm	10 cm
E (k=3)	7.223	7.76	8.524	8.812	8.462	7.564
E (k=5)	13.008	13.068	13.503	14.198	14.676	13.542
E (k=6)	18.138	19.532	18.94	18.428	18.327	18.366
E (k=8)	19.996	20.03	20.202	20.58	22.01	20.725
E (k=10)	24.168	26.918	27.302	25.857	24.535	24.938
E (k=12)	28.431	28.432	28.572	28.774	30.495	29.534
E (k=14)	34.887	35.526	37.543	37.163	35.12	35.603
E (k=16)	37.792	37.792	38.421	38.389	39.262	39.052

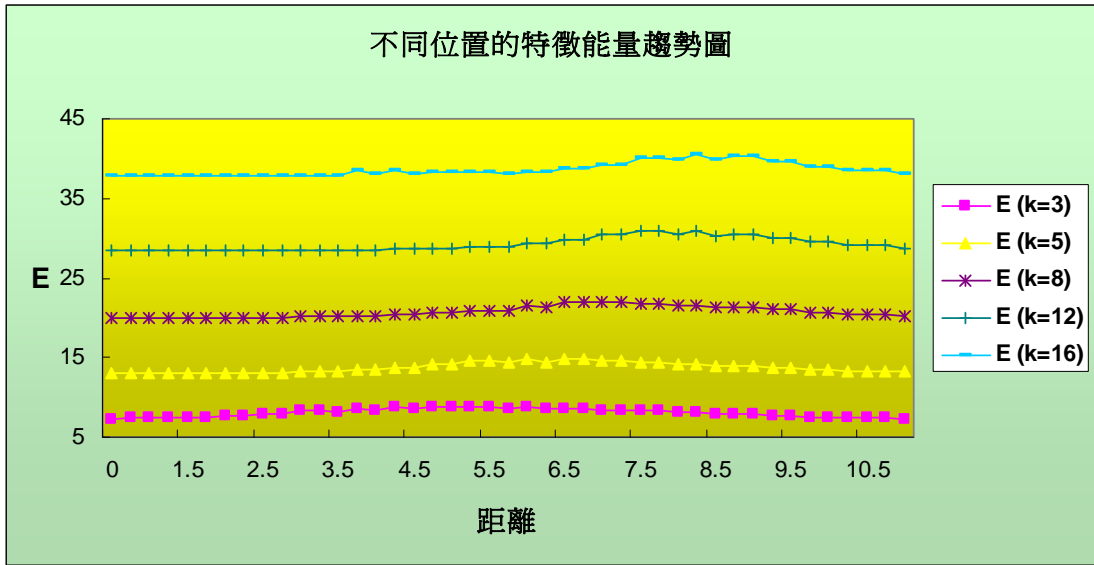


圖 5.2.1 不同距離特徵能量趨勢圖 (一)

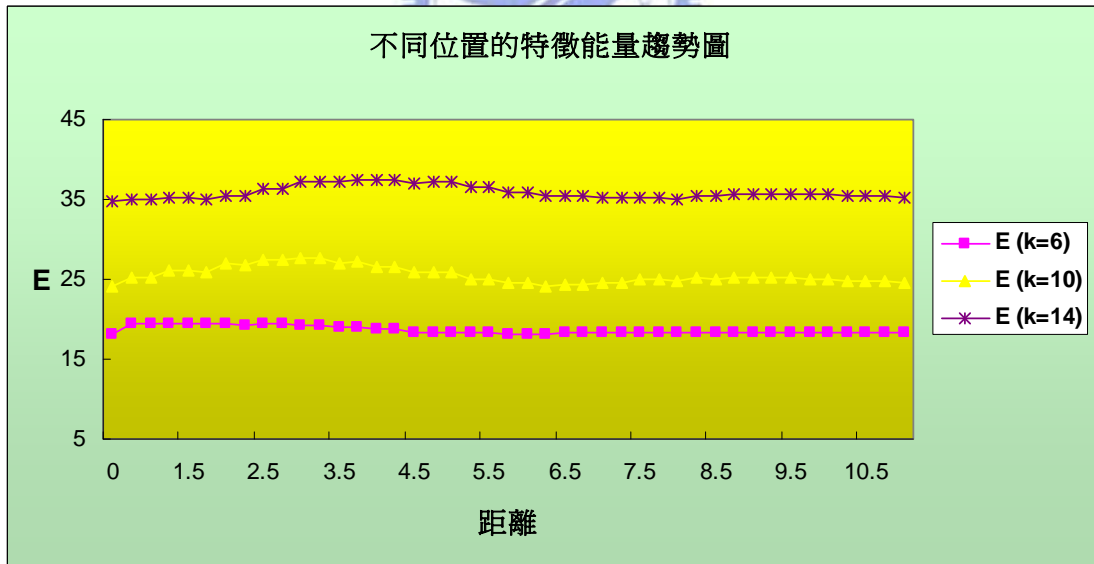


圖 5.2.2 不同距離特徵能量趨勢圖 (二)

接著將各個特徵態的特徵能量值(E)減去無干擾物的特徵能量值(E_0)，可清楚的看到相對特徵能量值呈現的趨勢，如圖 5.2.3。歸納相對特徵能量值與特徵態的關連性，可以分成三類，如圖 5.2.4 能量分布形式所示：

1. 初始的特徵態為圓周節線時，在不同位置加上干擾物後，其特徵能量值的峰值會出現在 2.5~5 cm之間，
2. 初始的特徵態為徑向節線時，於不同位置加上干擾物後，其特徵能量值的峰值會出現在 7~9.5 cm之間，也就是在這兩種區間中，其對稱性破壞變化會達到最大。
3. 初始的特徵態為混合徑向節線與圓周節線時，特徵能量值的峰值在上述兩個區域皆會出現，最大的特徵能量峰值會出現在2.5~5 cm間。

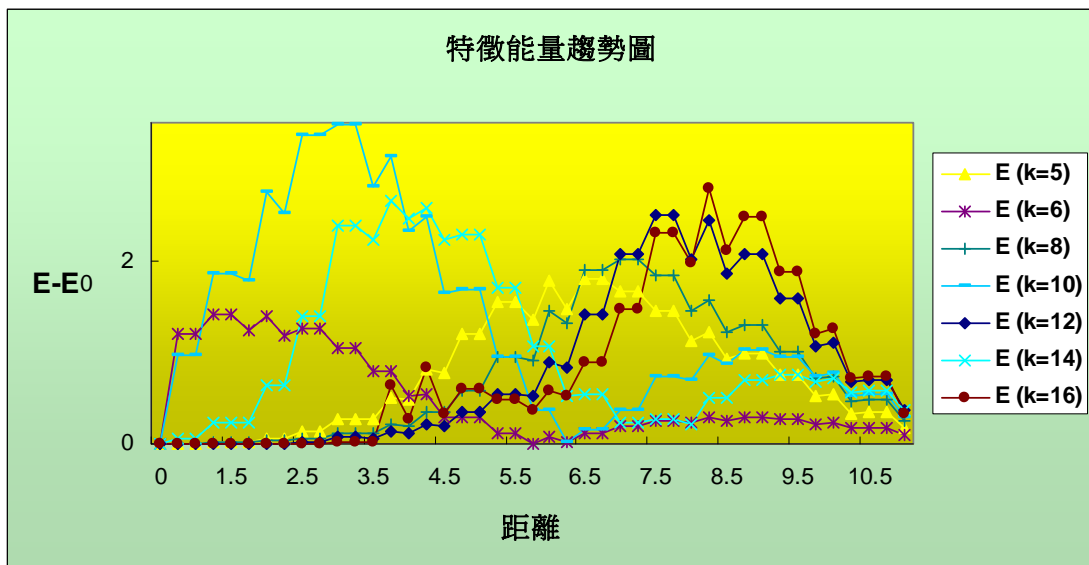


圖 5.2.3 不同距離的特徵能量趨勢圖

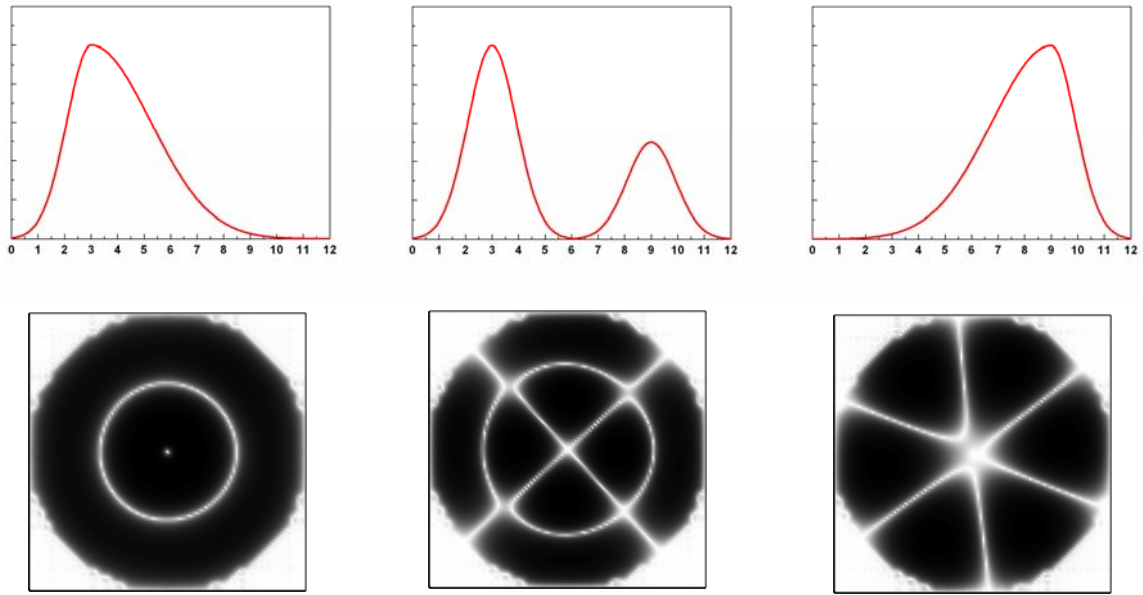


圖 5.2.4 能量分布形式



5.3 加干擾物的 Nodal line 波動行為探討

在5.1節中已知，利用 Sinc function 為基底的數值方法所模擬出的圖形可以類比出文獻上經典的 Chladni pattern，在郭政嘉”局部挾置對平板振盪器的節線圖騰之影響”的論文中，也實際的利用挾住局部區域的一個點及改變點的位置來研究節線圖騰現象做出了實驗，因此我們將重現以其實驗的條件，帶入以 Sinc function 為基底的數值方法中，針對模擬出的圖形對實驗的節線圖騰來做類比，以探討以 Sinc function 為基底的數值方法對於在有干擾物微擾下的節線圖騰的變化。

5.3.1 類比實驗圖形

由實驗得知磁鐵位置、磁鐵大小為其實驗主要影響參數，因此我們定義與實驗一致的直徑24cm的圓形作為模擬的二維邊界的範圍，輔以直徑 10 mm的圓形干擾物，改變圓形干擾物位於圓心的距離，分別對 2 cm、3.8 cm、5 cm、7.3 cm、10 cm不同的位置作模擬，並與實驗中所有頻率的圖騰比較出相同的圖形，結果如圖5.3.1 ~ 5.3.5。



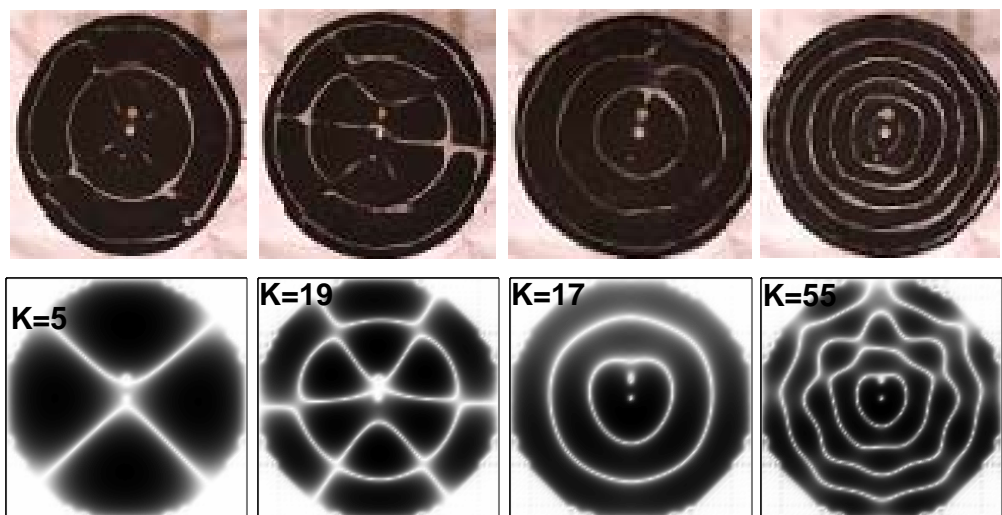


圖.5.3.1 圓形干擾物距圓心 2 cm

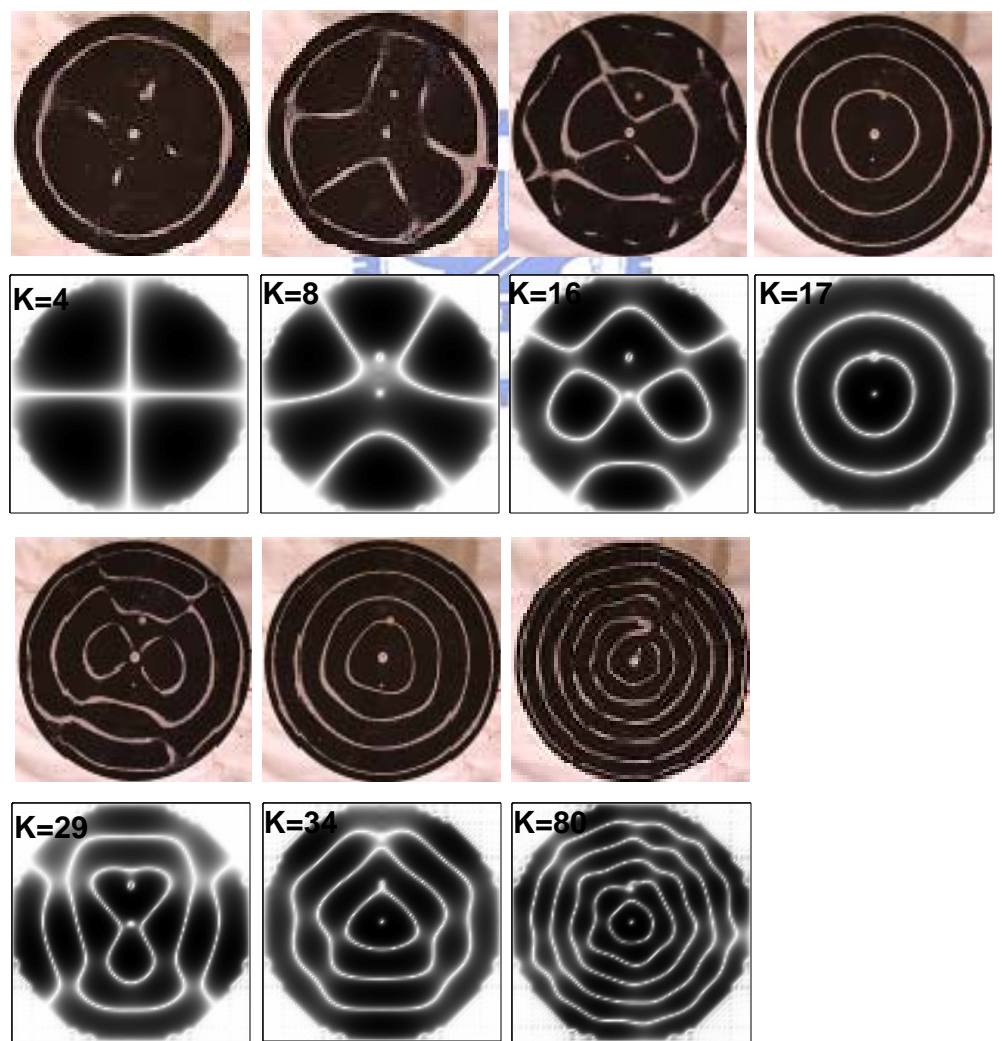


圖.5.3.2 圓形干擾物距圓心 3.8 cm

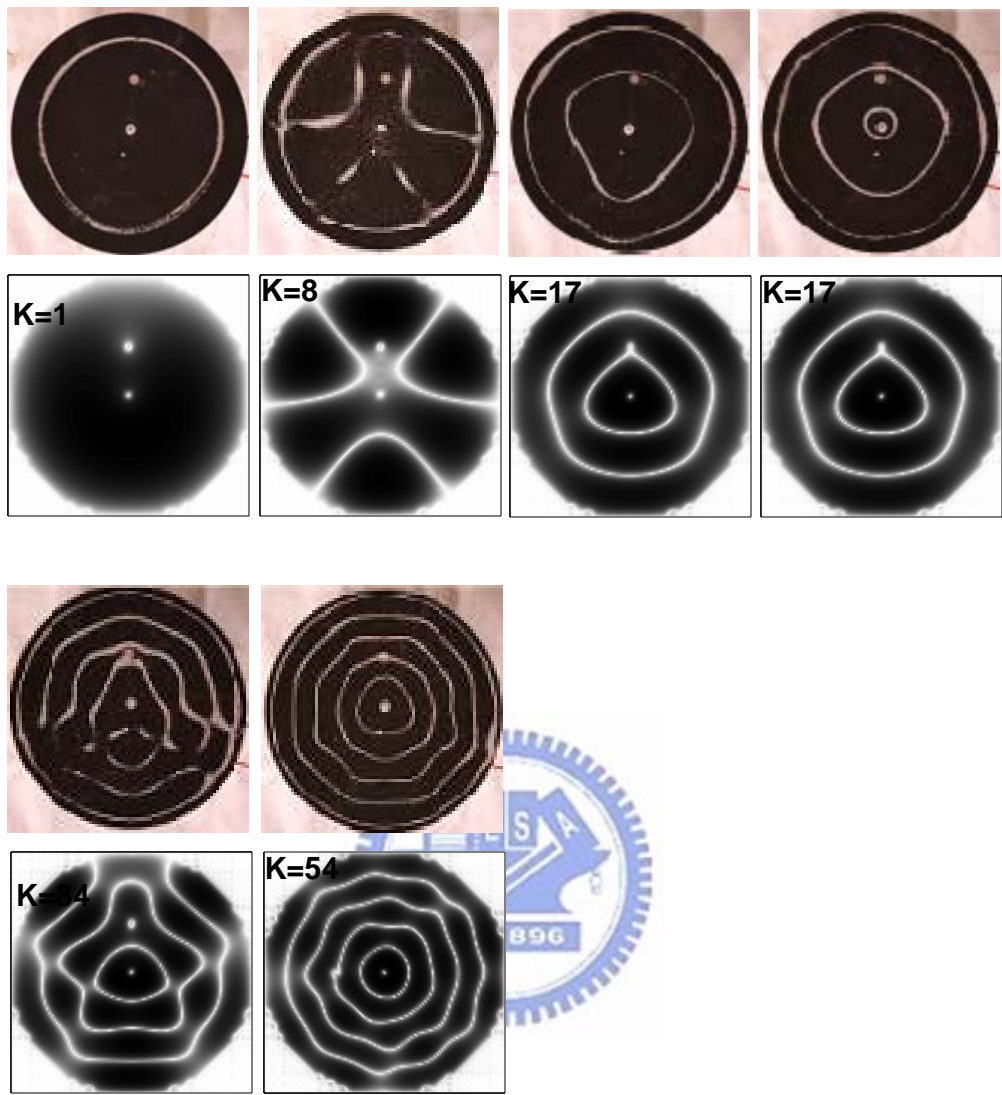


圖.5.3.3 圓形干擾物距圓心 5 cm

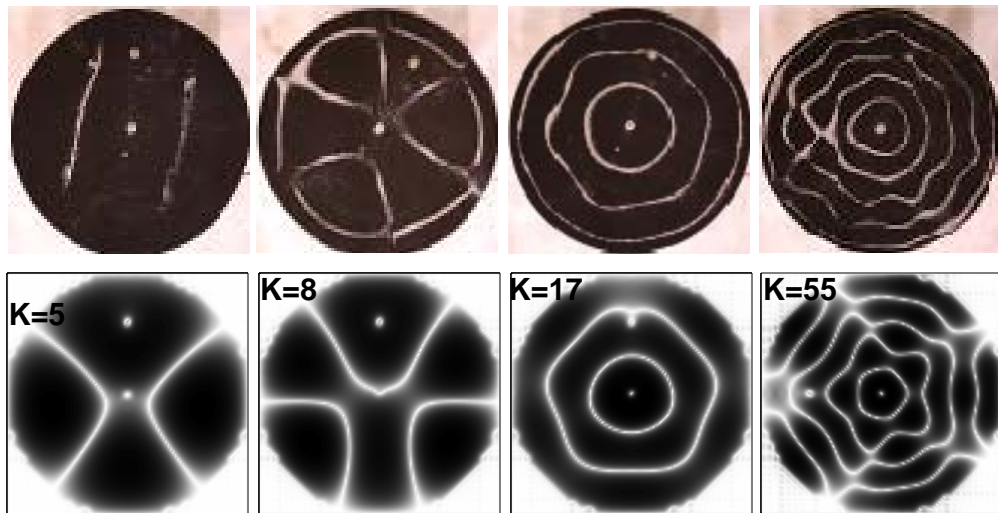


圖.5.3.4 圓形干擾物距圓心 7.3 cm

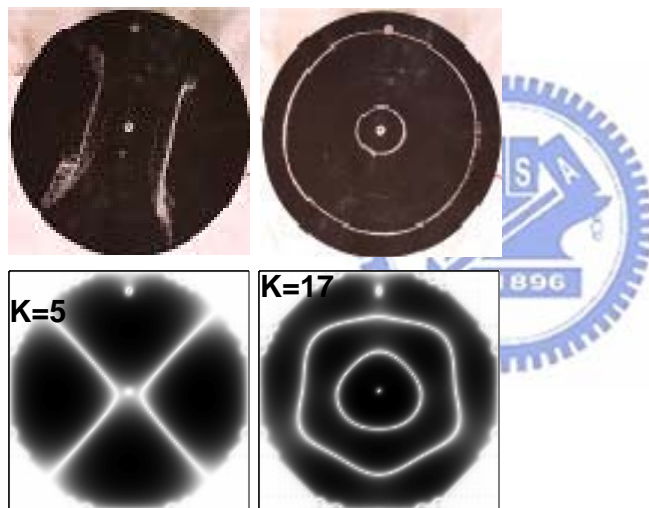


圖.5.3.5 圓形干擾物距圓心 10 cm

5.3.2 實驗結果討論

根據上述的資料所示，比對干擾物在不同距離下各個特徵態 (K) 的圖形，其中特徵態 (K) 為 17 在各個距離皆出現相仿的圖形。因此以 Sinc function 為基底的數值方法可模擬出部分文獻所研究的二維方形及圓形的 Chladni pattern。

第六章 結論與未來展望

Sinc function 為具有正交性質的基底函數，其完備性並不完全，故其數值解有些許的誤差，以二維方形圓形解析解與數值解的結果比較可以得知；以 Sinc function 為基底的數值方法模擬，比較各個特徵態與解析解的特徵態，在相同特徵態下的圖形是相當接近的；比對特徵能量值 (Energy)，能量值相當的接近，方形及圓形數值解對解析解的誤差各約為 1.1% 及 2.39%，所以 Sinc function 依舊是為基底函數的最佳選擇之一。

而在 Chladni pattern 模擬，雖然所模擬的圖形及數量還無法與文獻完全的類比，但已經顯示以 Sinc function 為基底的數值方法的確可以在給定特定的邊界下，模擬出部分在相關文獻上所研究的 Chladni pattern。探討干擾物對波動的 Nodal Line 圖形，我們亦可以針對干擾物在不同距離下，模擬出與實際震砂實驗相似的圖形；而探討微擾對 Nodal Line 的影響，在有放置干擾物下的特徵能量值，的確會高於無干擾物時的特徵能量值。

在此研究上並未針對 High Order 特徵態進行探討，High Order 特徵態的圖形變化更為複雜，未來我們可以利用 Sinc function 為基底的數值方法持續對在 High Order 特徵態作探討。另外我們可利用這個數值方法模擬干擾物在任意邊界圖形中微擾的影響，尤其是當多個干擾物存在時，整個二維系統會呈現出接近現實中無序的狀態，這在物理的研究上是相當重要的。

參考文獻

- [1] J. Floresa, "Nodal patterns in the seismic response of sedimentary valleys", *Eur. Phys. J. Special Topics* **145**, 63-75 (2007).
- [2] J. Flores, O. Novaro, T.H. Seligman, "Possible resonance effect in the distribution of earthquake damage in Mexico City", *Nature* **326**, 783 (1987).
- [3] J. L. Mateos, J. Flores, O. Novaro, T. H. Seligman, J. A. Alvarezostado, "Resonant response models for the Valley of Mexico II. The trapping of horizontal P-waves", *Geophys. J. Int.* **113**, 449 (1993).
- [4] J. L. Mateos, O. Novaro, T. H. Seligman, J. Flores, "Comment on: Can horizontal P-waves be trapped and resonate in a shallow sedimentary basin?" *J. Int.* **129**, 212 (1997).
- [5] C. Lomnitz, J. Flores, O. Novaro, T. H. Seligman and R. Esquivel, "Seismic coupling of interface modes in sedimentary basins: A recipe for disaster", *Bull. Seismol. Soc. Amer.* **89**, 14(1999).
- [6] H. F. Estrella, S. Yussim and C. Lomnitz, "Seismic response of the Mexico City Basin: A review of twenty years of research", *Nat Hazards* **40**, 357 (2007).
- [7] 郭政嘉, "局部挾置對平板振盪器的節線圖騰之影響", D.P.S. on NCTU (2009).
- [8] H. J. Stockmann, "Chladni Meets Napoleon", *Eur. Phys. J. Special Topics* **145**, 15-23 (2007).
- [9] N. Garcia, A. Damask and S. Schwarz, "Physics for Computer Science Students", Second Edition, Springer-Verlag (1998).
- [10] D. Halliday, R. Resnick and J. Walker, "Walker Fundamentals of Physics", fifth Edition, John Wiley & Sons, New York (1997).

- [11]陳錫桓, 大學物理, 建宏出版社, 台北, 1994.
- [12]D. J. Griffiths, "Introduction to Electrodynamics", Prentice Hall, 1998.
- [13]曾謹言, 量子力學(卷一), 凡異出版社, 新竹, 2007.
- [14]A. Beiser, "Concepts of Modern Physics", 6 Edition, McGraw-Hill, 2002.
- [15]Schrödinger equation, http://en.wikipedia.org/wiki/Schrödinger_equation.
- [16]Basis, [http://en.wikipedia.org/wiki/Basis_\(linear_algebra\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Basis_(linear_algebra)).
- [17]Basis graph, http://zh.wikipedia.org/zh-tw/File:Basis_graph.svg.
- [18]Sinc函數, <http://zh.wikipedia.org/zh-tw/Sinc>.
- [19]F. Stenger, "A Sinc-Galerkin Method of Solution of Boundary Value Problems", Mathematics of Computation, Vol. 33, No. **145**, pp. 85-109 (1979).
- [20]F. Stenger, "Numerical Methods based on Whittaker Cardinal, or Sinc functions", SIAM Review, Vol. **23**, 165-224 (1981).
- [21]B. Bialecki, "Sinc-Collocation Methods for Two-Point Boundary Value Problems", IMA Journal of Numerical Analysis, **11**, 357-375 (1991).
- [22]F. Stenger, "Summary of Sinc numerical methods", Journal of Computational and Applied Mathematics, **121**, 379-420 (2000).
- [23]Chen Li, Xionghua Wu, "Numerical solution of differential equations using Sinc method based on the interpolation of the highest derivatives", Applied Mathematical Modeling, **31**, 1-9 (2007).
- [24]P. V. O'Neil, "Advanced Engineering Mathematics", 4 Edition, 1994.
- [25]劉明昌, "工程數學學習要訣", 上下冊, 文笙書局, 台北, 2002.
- [26]P. Amore, M. Cervantes and F. M. Fernández, "Variational collocation on finite intervals", J. Phys. A: Math. Theor. **40** 13047-13062 (2007).

- [27]P. Amore, "Solving the Helmholtz equation for membranes of arbitrary shape: numerical results", J. Phys. A: Math. Theor. **41** 265206 (2008).
- [28]Chladni Patterns in Vibrated Plates, <http://www.physics.utoronto.ca/nonlinear/chladni.html>.
- [29]P. Bourke, "Chladni plate interference surfaces", <http://paulbourke.net/genmetry/chladni/>.
- [30]T. D. Rossing, "Chladni's law for vibrating plates", American Journal of Physics, Volume **50**, Issue 3, pp.271 (1982).

