

國立交通大學

電子工程學系電子研究所碩士班

碩士論文

金屬光柵在不同偏振下穿透機制之研究

**Research on transmission mechanism of
metallic gratings at different polarizations**

研究生：洪唯倫

指導教授：顏順通 教授

中華民國一百年六月

金屬光柵在不同偏振下穿透機制之研究
**Research on transmission mechanism of
metallic gratings at different polarizations**

研 究 生：洪唯倫

Student：Wei-Lun Hung

指導教授：顏順通 博士

Advisor：Dr. Shun-Tung Yen

國 立 交 通 大 學
電 子 工 程 學 系 電 子 研 究 所
碩 士 論 文

A Thesis

Submitted to Department of Electronics Engineering & Institute of Electronics

College of Electrical Engineering and Computer Science

National Chiao Tung University

In Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master

in

Electronics Engineering

June 2011

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國一百年六月

金屬光柵在不同偏振下穿透機制之研究

學生：洪唯倫

指導教授：顏順通 博士

國立交通大學

電子工程學系 電子研究所碩士班

摘要

我們分析了金屬光柵在不同偏振光入射下的穿透頻譜及近場場型，我們除了研究此系統的共振穿透外，另外更探討雷利波長下不同偏振光的穿透機制，入射光會激發表面的駐波，對於P-波(TM)，駐波會導致金屬表面電荷重新分布進而使得入射光無法穿透，對於S-波(TE)而言，駐波會與入射波產生建設性干涉並出現穿透峰值。而模擬也與實驗結果一致。

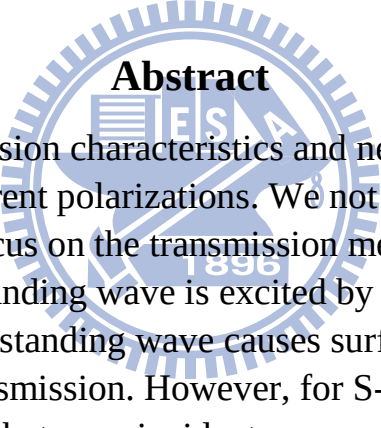
此外，我們觀察到金屬光柵上會有Fabry-Perot模態導致的穿透峰值，透過此模態，我們能針對不同偏振光設計出光學濾波器。

Research on transmission mechanism of metallic gratings at different polarizations

Student : Wei-Lun Hung

Advisor : Dr. Shun-Tung Yen

Department of Electronic Engineering & Institute of Electronics
National Chiao Tung University



Abstract

We analyze transmission characteristics and near-field patterns of metallic gratings at different polarizations. We not only study the resonance transmission, but also focus on the transmission mechanism at Rayleigh wavelength where the standing wave is excited by incident wave. For P-polarization (TM), the standing wave causes surface charge redistribution, which results in null transmission. However, for S-polarization (TE), the constructive interference between incident wave and standing wave leads to high transmission. The calculation results are in good agreement with experiments.

We show that the metallic gratings can be designed as optical filters for different polarizations by tuning the resonance wavelength of Fabry-Perot mode.

誌謝

時光飛逝，一轉眼已經過了七年的時間，雖然比別人多花了一些時間，但得到了不同的體驗，也學到不同領域的知識。首先要感謝顏順通教授，對我研究上遇到瓶頸時，能適時給我幫助，並且對於我理論基礎不足的地方，願意給我時間重新開始學起。感謝李冠成學長以及王德賢學長在理論及數值方法上給我的建議及幫助，並願意花時間與我討論，也要感謝鐘佩鋼學長在實驗上能給我許多建議，並針對我不懂的地方仔細說明，對於泓文對於撰寫程式上的幫助，真的是感謝萬分。此外每當我遇到挫折時，實驗室的同學們皆會給我鼓勵並建議，感謝孫仲村、張皓宇、蕭晉勛、廖宏韋及沈庭宇、張廷誠、簡佳帆、林芳如、曾韋傑、楊政紘對我的幫助。

另一方面也要特別感謝郭治群教授，在老師指導的一年半以來，教導我關於MOSFET的相關知識，也指導我關於論文寫作的重點，並讓我有機會能夠出國去參加研討會。此外，在求職方面，雖然我表現不佳，導致結果不如預期，但還是感謝老師的大力推薦。

也要感謝Lab635中的所有成員，感謝葉國良學長，您從數據分析、論文寫作及求職方面都給了我許多幫助，並且您對於工作積極的態度及效率，樹立了良好的典範，讓我有努力的方向。感謝蔡依修學長、詹仁嘉學長及陳冠旭學長，在高頻、低頻及DC量測上給我的指導，並針對我的問題，不厭其煩的進行解說及示範。感謝古智友學長，與您合作的一年多以來，無論是在量測方面，或是在數據討論上都讓我獲益不少，而您遇到工作壓力時的態度更是值得讓我學習的地方。感謝黃俊榮學長、陳敬文學長、賴弈岑學長及張智翔及邱德昌在研究上給我的建議及指導。

特別感謝黃敬群學長，雖然我們研究領域差距很多，但學長總能針對我的問題點出關鍵的地方，並且在口試投影片編排及論文撰寫上給了非常有用的建議。

感謝時璟及夢熊，你們兩個讓我看到碩士生應有的表現跟實力，雖然還落後一大截，我會繼續加油的。感謝湘婷在六年來對我無私的付出及支持。而在畢業前夕，心情不安及浮躁時，感謝惠潔的開導及協助，讓我有動力繼續走下去。感謝雅屏能抽空來聽我口試，讓我緊張的情緒穩定了不少。

最後，我要感謝一路陪伴我的家人，無論遇到什麼問題及困難，都能無條件的支持我。

謹以此文獻給父母及家人。

唯倫

目錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
誌謝	iii
目錄	iv
圖目錄	vii
第一章 概論	1
1.1 背景介紹	1
1.2 本研究目的	3
第二章 計算方法	4
2.1 基底展開法	4
2.1.1 基底形式	5
1. 平面波	5
2. 平行金屬板波導	7
3. 週期性層狀結構	8
2.1.2 邊界條件	14
1. 不考慮金屬損耗	14
2. 考慮金屬損耗	21
(1). 矩陣運算	21

(2). 本徵值問題	24
(3). 重疊積分的簡化	26
第三章 理論分析及實驗對照	29
3.1 P-波及S-波的基本特性	29
3.1.1 一維與二維週期性孔洞	29
3.1.2 一維結構的基本特性	31
3.2 P-波入射	32
3.2.1 不加基板的穿透特性	36
3.2.2 加入基板的穿透特性	40
3.3 S-波入射	43
3.3.1 不加基板的穿透特性	43
3.3.2 加入基板的穿透特性	46
第四章 應用	49
4.1 濾波器	49
第五章 結論	52
參考文獻	54
自傳	56

圖目錄

圖1.1	海更士－費涅耳原理描述光通過週期性狹縫的繞射及干涉現象[1]。	1
圖1.2	克希荷夫的純量繞射理論對於光通過單一孔洞問題的邊界條件[2]。	2
圖2.1	金屬光柵示意圖，區域(一)及區域(三)可為空氣或是介電質，區域二維金屬與狹縫形成的週期性結構，由區域(一)入射，根據偏振方向可分為S-波及P-波，區域(一)及區域(三)的介電係數為 ϵ_1 及 ϵ_3 ，而區域(二)中，金屬表示為 ϵ_{metal} ，狹縫表示為 ϵ_{slit} 。	4
圖2.2	金屬材料為銅，狹縫中為空氣時，(a)為TM(2-25) (b)為TE(2-32) 本徵值方程式的實部項。	26
圖3.1	寬度為 a_x 的平行金屬板波導及長寬各為 a_x, a_z 的矩形金屬波導間高階項特性的比較。	30
圖3.2	平行金屬板波導中，(a)TM及(b)TE最低階模態的電場示意圖。	31
圖3.3	$a_x=0.15L_x$ ， L 分別為 $0.15L_x$ 及 $0.01L_x$ ，P-波的零階穿透頻譜。	32
圖3.4	一維週期性狹縫對應到費諾共振的物理圖像。	33

- 圖3.5 P-波的穿透頻譜隨 k_{x0} 變化的計算結果，狹縫寬度為 $a_x=0.15L_x$ ，而厚度分別為(a) $L=0.15L_x$ (b) $L=0.25L_x$ (c) $L=0.35L_x$ (d) $L=0.45L_x$ ，目的是了解厚度對週期性狹縫色散關係的影響。 34
- 圖3.6 狹縫寬度為 $a_x=0.15L_x$ ，厚度及入射光波長分別為(a) $L=0.15L_x$ 、 $\lambda=1.012L_x$ (b) $L=0.45L_x$ 、 $\lambda=1.28L_x$ ，在P-波垂直入射狀況下，穿透峰值位置所對應到的場型圖。 35
- 圖3.7 狹縫寬度為 $a_x=0.15L_x$ ，厚度分別為(a) $L=0.15L_x$ (b) $L=0.45L_x$ ，在P-波垂直入射狀況下，零階穿透峰值隨著金屬損耗增加的變化。 36
- 圖3.8 (a)寬度為 $a_x=0.15L_x$ ，厚度為 $L=0.01L_x$ ，當 $\lambda=L_x$ 時，駐波在 $z=0$ 的分布，(b)在 $\lambda=L_x$ 時，P-波入射所激發的+1及-1階散射波之間相對關係的示意圖。 37
- 圖3.9 波長為 λ 的狀況下，光入射於完美導體的狀況，(a)為電場與磁場相對關係圖 (b)時間在1/4週期時，電場的分布狀況 (c)時間在0時，磁場的分布狀況。 38
- 圖3.10 $\lambda=L_x$ ，寬度為 $a_x=0.15L_x$ ，厚度為 $L=0.01L_x$ ，P-波入射光，(a) 時間在1/4週期時，電場的分布狀況 (b) 時間在0時，磁場的分布狀況。 39

圖3.11 (a) $\lambda=0.9、1、1.1 L_x$ ，表面電場 E_z 的分布狀況 (b) $\lambda=1、$ 40

$1.1 L_x$ ，整體電場的分布狀況。

圖3.12 P-波入射， $L_x=24 \mu\text{m}$ ， $L=0.2 \mu\text{m}$ ， $a_x=6、8、10 \mu\text{m}$ ，基 41

板材料為Si，實驗量測與計算結果的對照圖，其中可調

參數為基板介電係數，萃取出值為11.2。

圖3.13 $L_x=24 \mu\text{m}$ ， $L=0.2 \mu\text{m}$ ， $a_x=6 \mu\text{m}$ ，P-波入射光，在(a) $\lambda=L_x$ 41

(b) $\lambda=\sqrt{\epsilon_3}L_x$ 的電場分布圖。

圖3.14 $L_x=24 \mu\text{m}$ ， $L=0.2 \mu\text{m}$ ， $a_x=6 \mu\text{m}$ ，P-波入射光，計算中 42

考慮全部的散射波(total)以及單純的零階項(0^{th})與實驗數據間的比較。

圖3.15 S-波的穿透頻譜，(a)固定厚度為 $L=0.01L_x$ ，改變寬度 43

$a_x=0.2\sim0.8 L_x$ (b) $L=0.6L_x$ ， $a_x=0.8L_x$ ，圖中插圖為

$\lambda=1.2L_x$ 穿透峰值下 $|E_y|$ 的分佈。

圖3.16 (a)寬度為 $a_x=0.8L_x$ ，厚度為 $L=0.01L_x$ ，當 $\lambda=L_x$ 時，駐波 44

在 $z=0$ 的分布，(b)在 $\lambda=L_x$ 時，S-波入射所激發的+1及-1

階散射波之間相對關係的示意圖。

圖3.17 寬度為 $a_x=0.8L_x$ ，厚度為 $L=0.01L_x$ ，S-波入射光，當 $\lambda=L_x$ 45

的電場(E_y)分布圖。

圖3.18 加上基板後，整體穿透特性可區分為三個區段 $\lambda < L_x$ 、 46

$L_x < \lambda < \sqrt{\epsilon_3} L_x$ 及 $\lambda > \sqrt{\epsilon_3} L_x$ ，圖中以箭號來表示該區段是否
包含高階散射波。

圖3.19 S-波入射， $L_x=24 \mu\text{m}$ ， $L=0.2 \mu\text{m}$ ， $a_x=18、20、22 \mu\text{m}$ ， 47

基板材料為Si，實驗量測與計算結果的對照圖，其中可
調參數為基板介電係數，萃取出值為11.2。

圖3.20 $L_x=24 \mu\text{m}$ ， $L=0.2 \mu\text{m}$ ， $a_x=22 \mu\text{m}$ ，S-波入射光，在(a) $\lambda=L_x$ 48

(b) $\lambda=\sqrt{\epsilon_3} L_x$ 的電場分布圖。

圖4.1 透過在狹縫中填入介電質，能夠使等效波長縮短，並能 49

使狹縫中的截止波長增加。

圖4.2 (a) P-波， $L_x=24 \mu\text{m}$ ， $a_x=0.05L_x$ ， $L=0.02L_x$ (b) S-波， 50

$L_x=24 \mu\text{m}$ ， $a_x=0.374L_x$ ， $L=0.267L_x$ ，狹縫中介電係數為
11.9，在垂直入射狀況下，方程式4-2估計值與實際運
算計算結果做比較。

第一章 概論

1.1 背景介紹

光通過狹縫的物理圖像，被稱為繞射，最早是由海更士(Christiaan Huygens)所提出，其後由費涅耳(Augustin-Jean Fresnel)所修正，被稱為海更士－費涅耳原理，也就是波前的每一點皆可視為球面波的點光源，而在任何一點的振幅大小皆可由這些球面波的疊加所得出，如圖1.1[1]。而這個基本概念解釋了許多實驗上觀察到的現象(單狹縫、光柵)，而更嚴謹的計算可由克希荷夫(Gustav Robert Kirchhoff)所提出純量繞射理論來說明，如圖1.2[1, 2]，其假設屏幕為不透明(opaque)，也就是入射波無法穿透屏幕，但也不會被反射，故在屏幕上波的振幅皆為零，而在狹縫中的振幅大小會等同於入射波，透過上述假設，再解波動方程式，則穿透波可由格林定理(Green's theorem)來描述，而得到的結果同樣能與實驗結果及海更士－費涅耳原理吻合。

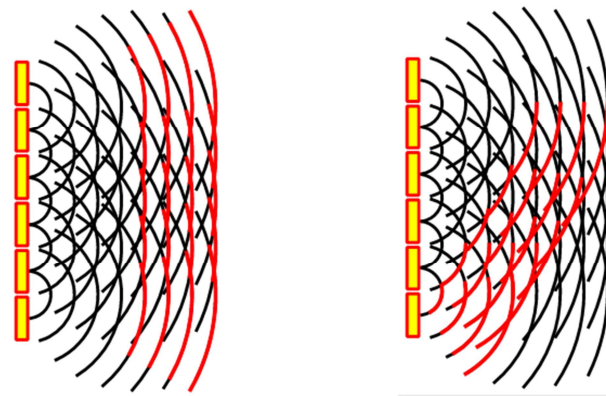


圖1.1 海更士－費涅耳原理描述光通過週期性狹縫的繞射及干涉現象[1]。

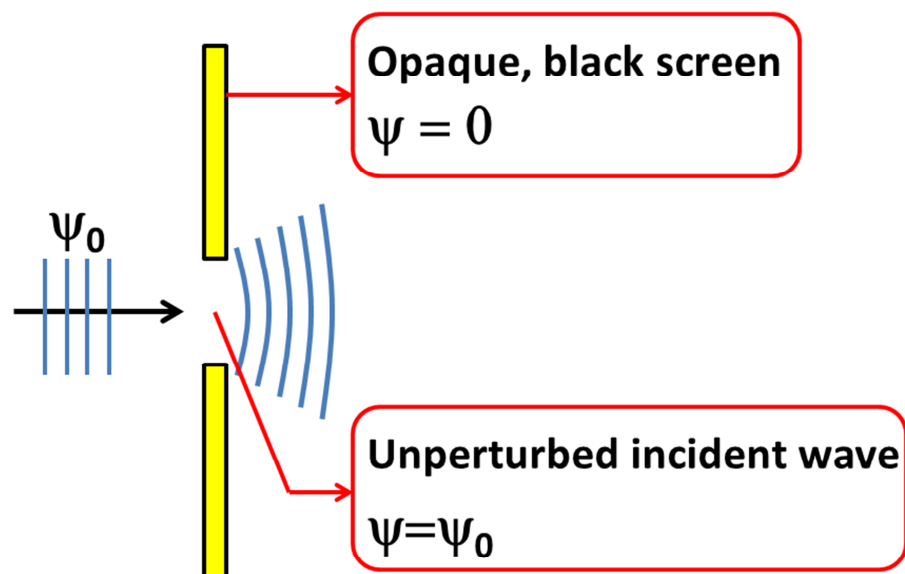


圖1.2 克希荷夫的純量繞射理論對於光通過單一孔洞問題的邊界條件[2]。

然而從上述的說明，我們可以得知早期的繞射理論是不考慮電磁波的偏振以及邊界條件的影響，然而近年來光學元件上的應用[3-7]及 Ebbesen研究群在週期性金屬孔洞陣列上觀察到異常穿透的現象[8]，使得一維週期性金屬狹縫的機制重新獲得重視。此外，上述兩者的實驗現象皆對電磁波的偏振皆有很強的相依性，代表我們無法透過純量繞射理論來解析此問題。而有鑑於純量繞射理論的不足，許多研究團隊發展了考慮向量及材料邊界條件的演算法，像是有限時域差分法(FDTD)[9]、嚴謹光波耦合分析法(RCWA)[10]以及採用波導模態(Waveguide mode)的基底展開法(Modal expansion)[11]，上述的方法皆能與實驗現象吻合。由於一維結構的入射光只要考慮一個方向上的擾動，相對於二維結構而言，計算過程較簡易，因此有相當多的研究團隊針對金屬光柵進行研究[12-24]。

1.2 本研究目的

針對一維週期性狹縫已有相當廣泛的研究，然而大部分研究都著重於探討入射波電場方向平行於金屬排列的狀況下的穿透峰值[12-17, 20, 23, 24]。此外，出現在雷利波長(Rayleigh wavelength)的穿透谷值仍有許多爭議[25-31]。另外在電場垂直於金屬排列的狀況下，過去研究重點都著重於Fabry-Perot模態的現象，而忽略了狹縫厚度遠小於波長的狀況[18, 21, 22]。

因此本研究針對兩種不同的偏振的入射光進行討論，利用基底展開法進行分析，而針對不同狀況，介紹了兩種不同型態的基底，對於不考慮金屬損耗的狀況，利用波導模態來描述完美導體的狀況，而對於考慮金屬損耗，則採用週期性層狀結構的基底形式。討論結構包含不加基板及加上基板的非對稱結構，並針對雷利波長的穿透谷值進行釐清，並討論厚度遠小於波長時，電場平行於狹縫排列的穿透機制。而最後透過狹縫中Fabry-Perot模態，我們定量上描述針對不同偏振方向其穿透峰值的位置，以提供設計光學元件的方針。

第二章 計算方法

2.1 基底展開法

我們要分析的結構如圖2.1所示，電磁波由區域(一)入射，而依照電場偏振方向，可分為S-波及P-波，而區域(一)及區域(三)可為空氣或是介電質，第二層為金屬與狹縫形成的週期性結構。分別對三個區域選出特定的基底，再透過疊加這些基底並符合邊界條件，即可得出在每個區域的電場與磁場分布，因此首先我們必須先找出每一層的基底表示式。

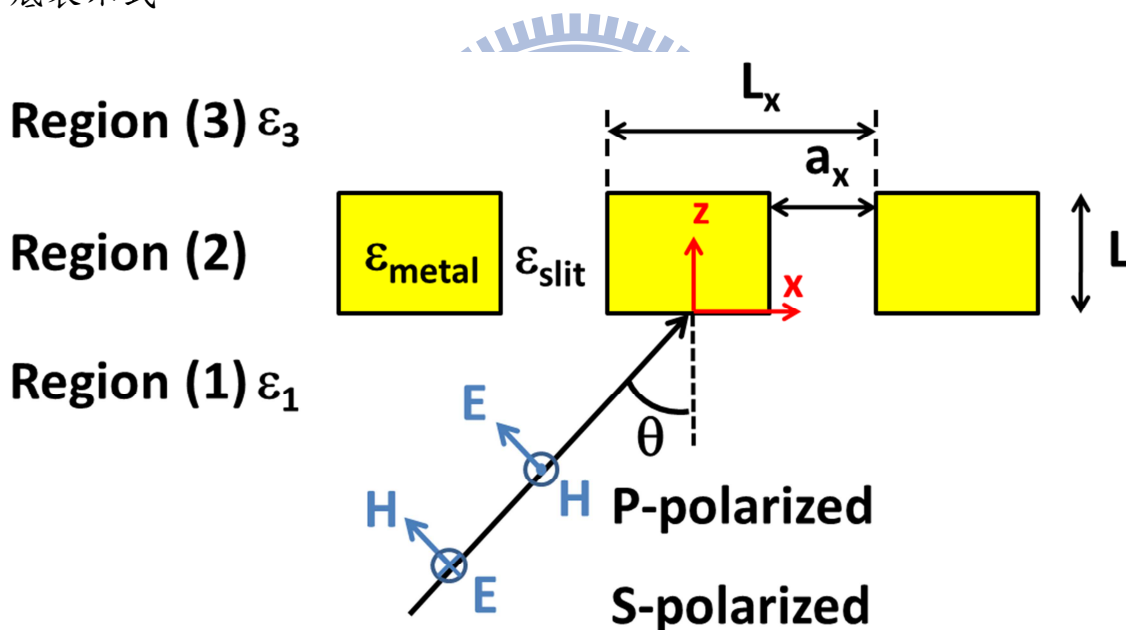


圖2.1 金屬光柵示意圖，區域(一)及區域(三)可為空氣或是介電質，區域二維金屬與狹縫形成的週期性結構，由區域(一)入射，根據偏振方向可分為S-波及P-波，區域(一)及區域(三)的介電係數為 ϵ_1 及 ϵ_3 ，而區域(二)中，金屬表示為 ϵ_{metal} ，狹縫表示為 ϵ_{slit} 。

2.1.1 基底形式

1. 平面波

對於區域(一)及(三)我們可以利用平面波的形式來做為基底，而推導的過程主要是依照[32]，對於S-波及P-波，其電場形式分別為：

$$\mathbf{E}_{S,g}^{(v)}(x) = \frac{1}{\sqrt{L_x}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_{x,g}x} \quad 2-1a$$

$$\mathbf{E}_{P,g}^{(v)}(x) = \frac{1}{\sqrt{L_x}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k_{x,g}}{k_{z,g}^{(v)}} \end{pmatrix} e^{ik_{x,g}x} \quad 2-1b$$

其中 $k_{x,g}$ 及 $k_{z,g}$ 的定義為：

$$k_{x,g} = \frac{\omega}{c} \sin\theta + \frac{2n_g\pi}{L_x} \quad 2-2a$$

$$k_{z,g}^{(v)} = \sqrt{\left(\sqrt{\epsilon_v} \frac{\omega}{c}\right)^2 - k_{x,g}^2}, v=1, 3 \quad 2-2b$$

其中 ϵ_v 為介電係數，而 n_g 為整數， $g=1,2,3\dots N$ ， N 是我們使用平面波基底的總數。若我們在考慮邊界條件時，針對磁場的平行分量選取 $\hat{z} \times \mathbf{H}_{\parallel}$ ，而非 $\mathbf{H}_{\parallel}$ ，並定義以下參數，則計算能夠被大幅度簡化。

$$\mathbf{F}_{S,g}(x) \triangleq \frac{1}{\sqrt{L_x}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{ik_{x,g}x} \quad 2-3a$$

$$\mathbf{F}_{P,g}(x) \triangleq \frac{1}{\sqrt{L_x}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_{x,g}x} \quad 2-3b$$

則電場與磁場的平行分量分別可寫為：

$$\mathbf{E}_{S,g,\parallel}^{(v)}(x) = \mathbf{F}_{S,g}(x) \quad 2-4a$$

$$\mathbf{E}_{P,g,\parallel}^{(v)}(x) = \mathbf{F}_{P,g}(x) \quad 2-4b$$

$$\hat{z} \times \mathbf{H}_{S,g,\parallel}^{(v)}(x) = -\frac{ck_{z,g}^{(v)}}{\omega Z_0} \mathbf{F}_{S,g}(x) \quad 2-4c$$

$$\hat{z} \times \mathbf{H}_{P,g,\parallel}^{(v)}(x) = -\frac{\sqrt{\epsilon_v}}{Z_0} \mathbf{F}_{P,g}(x) \quad 2-4d$$

其中 Z_0 為真空中的阻抗，因此區域(一)及區域(三)的電場：

$$\mathbf{E}_{\parallel}^{(1)}(x, z) = \sum_{\sigma=S,P} \sum_g \mathbf{E}_{\sigma,g,\parallel}^{(1)}(x) \left(a_{\sigma,g}^{(1)} e^{ik_{z,g}^{(1)}z} + b_{\sigma,g}^{(1)} e^{-ik_{z,g}^{(1)}z} \right) \quad 2-5a$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}_{\parallel}^{(3)}(x, z) \\ &= \sum_{\sigma=S,P} \sum_g \mathbf{E}_{\sigma,g,\parallel}^{(3)}(x) \left(a_{\sigma,g}^{(3)} e^{ik_{z,g}^{(3)}(z-L)} + b_{\sigma,g}^{(3)} e^{-ik_{z,g}^{(3)}(z-L)} \right) \end{aligned} \quad 2-5b$$

磁場可表示為：

$$\begin{aligned} & \hat{z} \times \mathbf{H}_{\parallel}^{(1)}(x, z) \\ &= \sum_{\sigma=S,P} \sum_g \hat{z} \times \mathbf{H}_{\sigma,g,\parallel}^{(1)}(x) \left(a_{\sigma,g}^{(1)} e^{ik_{z,g}^{(1)}z} - b_{\sigma,g}^{(1)} e^{-ik_{z,g}^{(1)}z} \right) \end{aligned} \quad 2-6a$$

$$\begin{aligned} & \hat{z} \times \mathbf{H}_{\parallel}^{(3)}(x, z) \\ &= \sum_{\sigma=S,P} \sum_g \hat{z} \times \mathbf{H}_{\sigma,g,\parallel}^{(3)}(x) \left(a_{\sigma,g}^{(3)} e^{ik_{z,g}^{(3)}(z-L)} - b_{\sigma,g}^{(3)} e^{-ik_{z,g}^{(3)}(z-L)} \right) \end{aligned} \quad 2-6b$$

2. 平行金屬板波導

針對區域(二)，由於結構有週期性，因此我們可先考慮單一週期內基底表示式。此外，若我們考慮的頻段位於微波或兆赫波，此時金屬的損耗可以被忽略，可視為完美導體，則區域(二)可利用平行金屬板波導(Parallel-plate waveguide)的形式做展開，因此對於 TE 及 TM 其基底形式可寫為[33]：

$$\mathbf{E}_{TE,i,\parallel}^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{2}{a_x}} \sin \left[\frac{n_i \pi \left(x - \frac{L_x - a_x}{2} \right)}{a_x} \right] \\ 0 \end{pmatrix} \quad 2-7a$$

$$\mathbf{E}_{TM,j,\parallel}^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{a_x}} \cos \left[\frac{n_j \pi \left(x - \frac{L_x - a_x}{2} \right)}{a_x} \right] \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 2-7b$$

$i=1,2,3\dots I$ ， $j=1,2,3\dots J$ ，其中 I 及 J 分別為 TE 及 TM 的基底總數，而要注意的是對於 TE，其係數 n_i 不可為零，而 TM 的係數 n_j 可為零，但此時必須乘上 $1/\sqrt{2}$ 。同樣考慮 $\hat{z} \times \mathbf{H}_{\parallel}$ 則可表示為：

$$\hat{z} \times \mathbf{H}_{TE,i,\parallel}^{(2)}(x) = -\frac{k_{z,i}^{(2)}}{Z_0 \frac{\omega}{c}} \mathbf{E}_{TE,i,\parallel}^{(2)}(x) \quad 2-8a$$

$$\hat{z} \times \mathbf{H}_{TM,j,\parallel}^{(2)}(x) = -\frac{\omega}{Z_0 k_{z,j}^{(2)}} \mathbf{E}_{TM,j,\parallel}^{(2)}(x) \quad 2-8b$$

而 $k_{z,k}$ 為：

$$k_{z,k}^{(2)} = \sqrt{\left(\sqrt{\epsilon_{slit}} \frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{n_k \pi}{a_x}\right)^2} \quad 2-9$$

因此區域(二)中電場與磁場的展開式可表示為：

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\parallel}^{(2)}(x, z) &= \sum_i \mathbf{E}_{TE,i,\parallel}^{(2)}(x) \left[a_{TE,i}^{(2)} e^{ik_{z,i}^{(2)} z} + b_{TE,i}^{(2)} e^{ik_{z,i}^{(2)} (L-z)} \right] \\ &+ \sum_j \mathbf{E}_{TM,j,\parallel}^{(2)}(x) \left[a_{TM,j}^{(2)} e^{ik_{z,j}^{(2)} z} + b_{TM,j}^{(2)} e^{ik_{z,j}^{(2)} (L-z)} \right] \end{aligned} \quad 2-10a$$

$$\begin{aligned} \hat{z} \times \mathbf{H}_{\parallel}^{(2)}(x, z) &= \sum_i \hat{z} \times \mathbf{H}_{TE,i,\parallel}^{(2)}(x) \left[a_{TE,i}^{(2)} e^{ik_{z,i}^{(2)} z} - b_{TE,i}^{(2)} e^{ik_{z,i}^{(2)} (L-z)} \right] \\ &+ \sum_j \hat{z} \times \mathbf{H}_{TM,j,\parallel}^{(2)}(x) \left[a_{TM,j}^{(2)} e^{ik_{z,j}^{(2)} z} - b_{TM,j}^{(2)} e^{ik_{z,j}^{(2)} (L-z)} \right] \end{aligned} \quad 2-10b$$

3. 週期性層狀結構

但若要將金屬的損耗納入討論範圍時，則我們就無法採用完美導體的波導形式，因此參照[34]我們可由馬克士威方程式出發，將區域(二)視為兩種材料以週期性堆疊的基底形式，在此先以 TM 為例子，TE 的形式只是由 TM 的結果稍作修改。同樣考慮圖 2-1 的架構，並令 $r = \frac{(L_x - a_x)}{L_x}$ ，以便於將計算表示式簡化。對於 TM，則代表 E_x 、 E_z 及 H_y 不為零，則馬

克士威方程式可簡化為：

$$E_x = -\frac{i}{\varepsilon(x)k_0} \left(\frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \quad 2-11a$$

$$E_z = \frac{i}{\varepsilon(x)k_0} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} \right) \quad 2-11b$$

$$H_y = \frac{i}{k_0} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \quad 2-11c$$

其中 $k_0 = \omega/c$ ，而對於一個週期， $\varepsilon(x)$ 表示為：

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon_{metal}, & -\frac{rL_x}{2} \leq x \leq \frac{rL_x}{2} \\ \varepsilon_{slit}, & \frac{rL_x}{2} \leq x \leq \left(1 - \frac{r}{2}\right)L_x \end{cases} \quad 2-12$$

透過變數分離，將磁場分為 x 方向及 z 方向的乘積 $H_y(x, z) = X(x)Z(z)$ ，

並假設變數為 Λ ，透過代數運算則可得出：

$$\frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = -\Lambda^2 Z(z) \quad 2-13$$

由 2-13 得知 $Z(z)$ 的形式為 $Exp(i\Lambda z)$ ，再令 $E_z(x, z) = V(x)Exp(i\Lambda z)$ ，

再帶回 2-11 及 2-13 則可得出：

$$\begin{cases} \frac{\partial X(x)}{\partial x} = -i\varepsilon(x)k_0 V(x) \\ \frac{\partial V(x)}{\partial x} = -ik_0 \left(1 - \frac{\Lambda^2}{\varepsilon(x)k_0^2} \right) X(x) \end{cases} \quad 2-14$$

首先考慮在金屬區域，則 2-14 可化為：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = -(\epsilon_{metal} k_0^2 - \Lambda^2) X(x) \\ \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} = -(\epsilon_{metal} k_0^2 - \Lambda^2) V(x) \end{cases} \quad 2-15$$

令 $\beta = \sqrt{\epsilon_{metal} k_0^2 - \Lambda^2}$ ，則 2-15 的通解的形式可表示為：

$$\begin{cases} X(x) = X\left(-\frac{rL_x}{2}\right) \cos\left[\beta\left(x + \frac{rL_x}{2}\right)\right] + \frac{-i\epsilon_{metal} k_0}{\beta} V\left(-\frac{rL_x}{2}\right) \sin\left[\beta\left(x + \frac{rL_x}{2}\right)\right] \\ V(x) = V\left(-\frac{rL_x}{2}\right) \cos\left[\beta\left(x + \frac{rL_x}{2}\right)\right] + \frac{-i\beta}{\epsilon_{metal} k_0} X\left(-\frac{rL_x}{2}\right) \sin\left[\beta\left(x + \frac{rL_x}{2}\right)\right] \end{cases} \quad 2-16$$

其中係數為：

$$\begin{cases} X\left(\frac{rL_x}{2}\right) = X\left(-\frac{rL_x}{2}\right) \cos(\beta rL_x) + \frac{-i\epsilon_{metal} k_0}{\beta} V\left(-\frac{rL_x}{2}\right) \sin(\beta rL_x) \\ V\left(\frac{rL_x}{2}\right) = V\left(-\frac{rL_x}{2}\right) \cos(\beta rL_x) + \frac{-i\beta}{\epsilon_{metal} k_0} X\left(-\frac{rL_x}{2}\right) \sin(\beta rL_x) \end{cases} \quad 2-17$$

透過 2-16 及 2-17，則可寫出金屬中的傳輸矩陣：

$$\begin{pmatrix} X\left(\frac{rL_x}{2}\right) \\ V\left(\frac{rL_x}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\beta rL_x) & \frac{-i\epsilon_{metal} k_0}{\beta} \sin(\beta rL_x) \\ \frac{-i\beta}{\epsilon_{metal} k_0} \sin(\beta rL_x) & \cos(\beta rL_x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X\left(-\frac{rL_x}{2}\right) \\ V\left(-\frac{rL_x}{2}\right) \end{pmatrix} \quad 2-18$$

而類比於上述的方法，則我們可以將非金屬的部分同樣化為傳輸矩陣

的表示式，令 $\alpha = \sqrt{\epsilon_{slit} k_0^2 - \Lambda^2}$ 。則可得出：

$$\begin{pmatrix} X\left(\left(1-\frac{r}{2}\right)L_x\right) \\ V\left(\left(1-\frac{r}{2}\right)L_x\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos[\alpha(1-r)L_x] & -\frac{i\epsilon_{slit} k_0}{\alpha} \sin[\alpha(1-r)L_x] \\ -\frac{i\alpha}{\epsilon_{slit} k_0} \sin[\alpha(1-r)L_x] & \cos[\alpha(1-r)L_x] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X\left(\frac{rL_x}{2}\right) \\ V\left(\frac{rL_x}{2}\right) \end{pmatrix} \quad 2-19$$

由 2-18 及 2-19 則可得出一個週期的傳輸矩陣表示式，而由於結構有週期性，因此接下來可透過布洛赫定理(Bloch theorem)加入週期性並將分離變數求出，由 2-18 及 2-19 可得出：

$$\begin{pmatrix} X\left(\left(1-\frac{r}{2}\right)L_x\right) \\ V\left(\left(1-\frac{r}{2}\right)L_x\right) \end{pmatrix} = \Xi_1 \Xi_2 \begin{pmatrix} X\left(-\frac{rL_x}{2}\right) \\ V\left(-\frac{rL_x}{2}\right) \end{pmatrix} \quad 2-20$$

其中

$$\Xi_1 = \begin{pmatrix} \cos[\alpha(1-r)L_x] & -\frac{i\varepsilon_{slit}k_0}{\alpha} \sin[\alpha(1-r)L_x] \\ -\frac{i\alpha}{\varepsilon_{slit}k_0} \sin[\alpha(1-r)L_x] & \cos[\alpha(1-r)L_x] \end{pmatrix} \quad 2-21a$$

$$\Xi_2 = \begin{pmatrix} \cos(\beta r L_x) & \frac{-i\varepsilon_{metal}k_0}{\beta} \sin(\beta r L_x) \\ \frac{-i\beta}{\varepsilon_{metal}k_0} \sin(\beta r L_x) & \cos(\beta r L_x) \end{pmatrix} \quad 2-21b$$

由布洛赫定理得知：

$$\begin{pmatrix} X\left(\left(1-\frac{r}{2}\right)L_x\right) \\ V\left(\left(1-\frac{r}{2}\right)L_x\right) \end{pmatrix} = e^{ik_0 L_x \sin\theta} \begin{pmatrix} X\left(-\frac{rL_x}{2}\right) \\ V\left(-\frac{rL_x}{2}\right) \end{pmatrix} \quad 2-22$$

由 2-20 及 2-22 可推出：

$$\left\{ \Xi_1 \Xi_2 - \begin{pmatrix} e^{ik_0 L_x \sin\theta} & 0 \\ 0 & e^{ik_0 L_x \sin\theta} \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} X\left(-\frac{rL_x}{2}\right) \\ V\left(-\frac{rL_x}{2}\right) \end{pmatrix} = 0 \quad 2-23$$

若上式要有非平凡解(non-trivial solution)，則代表：

$$\text{Det} \left\{ M - \begin{pmatrix} e^{ik_0 L_x \sin \theta} & 0 \\ 0 & e^{ik_0 L_x \sin \theta} \end{pmatrix} \right\} = 0 \quad 2-24$$

則可得出 TM 的本徵值方程式(eigenvalue equation)：

$$\begin{aligned} & \cos(k_0 L_x \sin \theta) - \cos[\alpha(1-r)L_x] \cos(\beta r L_x) \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_{\text{slit}} \beta}{\alpha \epsilon_{\text{metal}}} + \frac{\alpha \epsilon_{\text{metal}}}{\epsilon_{\text{slit}} \beta} \right) \sin[\alpha(1-r)L_x] \sin(\beta r L_x) = 0 \end{aligned} \quad 2-25$$

透過 2-25 則可解出 Λ ，因此對於 TM 而言，y 方向場的基底形式為及區

域(二)的展開形式：

$$H_y^{(2)}(x, z) = \sum_l X_{TM,l}(x) \left[a_{TM,l}^{(2)} e^{i\Lambda_l z} + b_{TM,l}^{(2)} e^{i\Lambda_l (L-z)} \right] \quad 2-26$$

$$\begin{aligned} X_{TM,l}(x) = & \begin{cases} \cos \left[\beta \left(x + \frac{rL_x}{2} \right) \right] + \frac{-i\epsilon_{\text{metal}} k_0}{\beta} V_{0,TM} \sin \left[\beta \left(x + \frac{rL_x}{2} \right) \right], & -\frac{rL_x}{2} \leq x \leq \frac{rL_x}{2} \\ U_{1,TM} \cos \left[\alpha \left(x - \frac{rL_x}{2} \right) \right] - i \frac{\epsilon_{\text{slit}} k_0}{\alpha} V_{1,TM} \sin \left[\alpha \left(x - \frac{rL_x}{2} \right) \right], & \frac{rL_x}{2} \leq x \leq \left(1 - \frac{r}{2} \right) L_x \end{cases} \end{aligned} \quad 2-27$$

其中各個係數的表示式為：

$$V_{0,TM} = \frac{e^{ik_0 L_x \sin \theta} - M1}{M2} \quad 2-28a$$

$$U_{1,TM} = \cos(\beta r L_x) + \frac{-i\epsilon_{\text{metal}} k_0}{\beta} V_{0,TM} \sin(\beta r L_x) \quad 2-28b$$

$$V_{1,TM} = V_{0,TM} \cos(\beta r L_x) + \frac{-i\beta}{\epsilon_{\text{metal}} k_0} \sin(\beta r L_x) \quad 2-28c$$

$$\begin{aligned} M1 = & \cos[\alpha(1-r)L_x] \cos(\beta r L_x) \\ & - \frac{\epsilon_{\text{slit}} \beta}{\alpha \epsilon_{\text{metal}}} \sin[\alpha(1-r)L_x] \sin(\beta r L_x) \end{aligned} \quad 2-28d$$

$$M2 = -\frac{ik_0}{\alpha\beta} \left\{ \varepsilon_{slit} \beta \cos(\beta r L_x) \sin[\alpha(1-r)L_x] \right. \\ \left. + \alpha \varepsilon_{metal} \cos[\alpha(1-r)L_x] \sin(\beta r L_x) \right\} \quad 2-28e$$

而對於 TE 而言，類比於上述步驟，則可得出：

$$E_y^{(2)}(x, z) = \sum_l X_{TE,l}(x) \left[a_{TE,l}^{(2)} e^{i\Lambda_l z} + b_{TE,l}^{(2)} e^{i\Lambda_l(L-z)} \right] \quad 2-29$$

$$X_{TE,l}(x) = \begin{cases} \cos\left[\beta\left(x + \frac{rL_x}{2}\right)\right] + i\frac{k_0}{\beta} V_{0,TE} \sin\left[\beta\left(x + \frac{rL_x}{2}\right)\right], & -\frac{rL_x}{2} \leq x \leq \frac{rL_x}{2} \\ U_{1,TE} \cos\left[\alpha\left(x - \frac{rL_x}{2}\right)\right] + i\frac{k_0}{\alpha} V_{1,TE} \sin\left[\alpha\left(x - \frac{rL_x}{2}\right)\right], & \frac{rL_x}{2} \leq x \leq \left(1 - \frac{r}{2}\right)L_x \end{cases} \quad 2-30$$

其中各個係數的表示式為：

$$V_{0,TE} = \frac{e^{ik_0 L_x \sin\theta} - \psi1}{\psi2} \quad 2-31a$$

$$U_{1,TE} = X\left(\frac{rL_x}{2}\right) = \cos(\beta r L_x) + i\frac{k_0}{\beta} V_{0,TE} \sin(\beta r L_x) \quad 2-31b$$

$$V_{1,TE} = V\left(\frac{rL_x}{2}\right) = V_{0,TE} \cdot \cos(\beta r L_x) + i \cdot \frac{\beta}{k_0} \sin(\beta r L_x) \quad 2-31c$$

$$\psi1 = \cos[\alpha(1-r)L_x] \cos(\beta r L_x) \\ - \frac{\beta}{\alpha} \sin[\alpha(1-r)L_x] \sin(\beta r L_x) \quad 2-31d$$

$$\psi2 = \frac{ik_0}{\alpha\beta} \left\{ \beta \cos(\beta r L_x) \sin[\alpha(1-r)L_x] \right. \\ \left. + \alpha \cos[\alpha(1-r)L_x] \sin(\beta r L_x) \right\} \quad 2-31e$$

而 TE 的本徵值方程式為：

$$\cos(k_0 L_x \sin\theta) - \cos[\alpha(1-r)L_x] \cos(\beta r L_x) \\ + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} \right) \cdot \sin[\alpha(1-r)L_x] \sin(\beta r L_x) = 0 \quad 2-32$$

2.1.2 邊界條件

透過上一小節的推導，我們得出了各個區域的基底形式，接下來必須透過邊界條件連續將各個展開係數求出來，由於結構有週期性，因此我們只要考慮單一晶格(unit cell)內的邊界條件，而週期性會透過布洛赫定理得出。

由馬克士威方程式的特性，當不考慮損耗時，也就是介電係數為純實數，則馬克士威方程式會具有厄米算符(Hermitian operator)的特性，也就是其基底的表示式具有正交特性，若考慮介電係數具有虛數，則此特性消失，而這個特性對於匹配邊界條件(matching boundary condition)的運算會有很大的影響，因此以下分為不考慮及考慮金屬損耗兩個部份來做討論。

1. 不考慮金屬損耗

電場部分取 2-5a、2-5b 及 2-10a，磁場部分取 2-6a、2-6b 及 2-10b，由邊界條件連續，則我們可以得出：

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma=S,P} \sum_g \mathbf{E}_{\sigma,g,\parallel}^{(1)}(x) (a_{\sigma,g}^{(1)} + b_{\sigma,g}^{(1)}) \\ &= \sum_i \mathbf{E}_{TE,i,\parallel}^{(2)}(x) (a_{TE,i}^{(2)} + b_{TE,i}^{(2)} e^{ik_{z,i}^{(2)}L}) \\ &+ \sum_j \mathbf{E}_{TM,j,\parallel}^{(2)}(x) (a_{TM,j}^{(2)} + b_{TM,j}^{(2)} e^{ik_{z,j}^{(2)}L}) \end{aligned} \quad 2-33a$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{\sigma=S,P} \sum_g \mathbf{E}_{\sigma,g,\parallel}^{(3)}(x) (a_{\sigma,g}^{(3)} + b_{\sigma,g}^{(3)}) \\
&= \sum_i \mathbf{E}_{TE,i,\parallel}^{(2)}(x) (a_{TE,i}^{(2)} e^{ik_{z,i}^{(2)}L} + b_{TE,i}^{(2)}) \\
&\quad + \sum_j \mathbf{E}_{TM,j,\parallel}^{(2)}(x) (a_{TM,j}^{(2)} e^{ik_{z,j}^{(2)}L} + b_{TM,j}^{(2)})
\end{aligned} \tag{2-33b}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{\sigma=S,P} \sum_g \hat{z} \times \mathbf{H}_{\sigma,g,\parallel}^{(1)}(x) (a_{\sigma,g}^{(1)} - b_{\sigma,g}^{(1)}) \\
&= \sum_i \hat{z} \times \mathbf{H}_{TE,i,\parallel}^{(2)}(x) (a_{TE,i}^{(2)} - b_{TE,i}^{(2)} e^{ik_{z,i}^{(2)}L}) \\
&\quad + \sum_j \hat{z} \times \mathbf{H}_{TM,j,\parallel}^{(2)}(x) (a_{TM,j}^{(2)} - b_{TM,j}^{(2)} e^{ik_{z,j}^{(2)}L})
\end{aligned} \tag{2-33c}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{\sigma=S,P} \sum_g \hat{z} \times \mathbf{H}_{\sigma,g,\parallel}^{(3)}(x) (a_{\sigma,g}^{(3)} - b_{\sigma,g}^{(3)}) \\
&= \sum_i \hat{z} \times \mathbf{H}_{TE,i,\parallel}^{(2)}(x) (a_{TE,i}^{(2)} e^{ik_{z,i}^{(2)}L} - b_{TE,i}^{(2)}) \\
&\quad + \sum_j \hat{z} \times \mathbf{H}_{TM,j,\parallel}^{(2)}(x) (a_{TM,j}^{(2)} e^{ik_{z,j}^{(2)}L} - b_{TM,j}^{(2)})
\end{aligned} \tag{2-33d}$$

由完美導體的邊界條件得知，對於平行方向電場，一個週期內都必須連續，而對於磁場而言，其只有在狹縫中才連續 ($\frac{(L_x - a_x)}{2} \sim \frac{(L_x + a_x)}{2}$)，因此對於電場，在兩側對於平面波基底作內積，由 2-33a 及 2-33b 可得出：

$$\begin{aligned}
& a_{S,g}^{(1)} + b_{S,g}^{(1)} \\
&= \sum_i \left(\int_{\frac{L_x - a_x}{2}}^{\frac{L_x + a_x}{2}} \mathbf{E}_{TE,i,\parallel}^{(2)}(x) \mathbf{F}_{S,g}(x)^* dx \right) (a_{TE,i}^{(2)} + b_{TE,i}^{(2)} e^{ik_{z,i}^{(2)}L}) \\
&\quad + \sum_j \left(\int_{\frac{L_x - a_x}{2}}^{\frac{L_x + a_x}{2}} \mathbf{E}_{TM,j,\parallel}^{(2)}(x) \mathbf{F}_{S,g}(x)^* dx \right) (a_{TM,j}^{(2)} + b_{TM,j}^{(2)} e^{ik_{z,j}^{(2)}L})
\end{aligned} \tag{2-34a}$$

$$\begin{aligned}
& a_{P,g}^{(1)} + b_{P,g}^{(1)} \\
&= \sum_i \left(\int_{\frac{L_x - a_x}{2}}^{\frac{L_x + a_x}{2}} \mathbf{E}_{TE,i,\parallel}^{(2)}(x) \mathbf{F}_{P,g}(x)^* dx \right) \left(a_{TE,i}^{(2)} + b_{TE,i}^{(2)} e^{ik_{z,i}^{(2)}L} \right) \\
&+ \sum_j \left(\int_{\frac{L_x - a_x}{2}}^{\frac{L_x + a_x}{2}} \mathbf{E}_{TM,j,\parallel}^{(2)}(x) \mathbf{F}_{P,g}(x)^* dx \right) \left(a_{TM,j}^{(2)} + b_{TM,j}^{(2)} e^{ik_{z,j}^{(2)}L} \right)
\end{aligned} \tag{2-34b}$$

由 2-33c 及 2-33d 可得出：

$$\begin{aligned}
& a_{S,g}^{(3)} + b_{S,g}^{(3)} \\
&= \sum_i \left(\int_{\frac{L_x - a_x}{2}}^{\frac{L_x + a_x}{2}} \mathbf{E}_{TE,i,\parallel}^{(2)}(x) \mathbf{F}_{S,g}(x)^* dx \right) \left(a_{TE,i}^{(2)} e^{ik_{z,i}^{(2)}L} + b_{TE,i}^{(2)} \right) \\
&+ \sum_j \left(\int_{\frac{L_x - a_x}{2}}^{\frac{L_x + a_x}{2}} \mathbf{E}_{TM,j,\parallel}^{(2)}(x) \mathbf{F}_{S,g}(x)^* dx \right) \left(a_{TM,j}^{(2)} e^{ik_{z,j}^{(2)}L} + b_{TM,j}^{(2)} \right)
\end{aligned} \tag{2-34c}$$

$$\begin{aligned}
& a_{P,g}^{(3)} + b_{P,g}^{(3)} \\
&= \sum_i \left(\int_{\frac{L_x - a_x}{2}}^{\frac{L_x + a_x}{2}} \mathbf{E}_{TE,i,\parallel}^{(2)}(x) \mathbf{F}_{P,g}(x)^* dx \right) \left(a_{TE,i}^{(2)} e^{ik_{z,i}^{(2)}L} + b_{TE,i}^{(2)} \right) \\
&+ \sum_j \left(\int_{\frac{L_x - a_x}{2}}^{\frac{L_x + a_x}{2}} \mathbf{E}_{TM,j,\parallel}^{(2)}(x) \mathbf{F}_{P,g}(x)^* dx \right) \left(a_{TM,j}^{(2)} e^{ik_{z,j}^{(2)}L} + b_{TM,j}^{(2)} \right)
\end{aligned} \tag{2-34d}$$

將 2-34 化為矩陣的形式，則可寫為：

$$A^{(1)} + B^{(1)} = M_E \left(A^{(2)} + DB^{(2)} \right) \tag{2-35a}$$

$$A^{(3)} + B^{(3)} = M_E \left(DA^{(2)} + B^{(2)} \right) \tag{2-35b}$$

其中矩陣 $A^{(v)}$ 及 $B^{(v)}$ 分別為展開係數的列矩陣

$$A^{(1)} = \left(a_{S,1}^{(1)}, \dots, a_{S,N}^{(1)}, a_{P,1}^{(1)}, \dots, a_{P,N}^{(1)} \right)^T \tag{2-36a}$$

$$A^{(2)} = \left(a_{TE,1}^{(2)}, \dots, a_{TE,I}^{(2)}, a_{TM,1}^{(2)}, \dots, a_{TM,J}^{(2)} \right)^T \tag{2-36b}$$

$$A^{(3)} = \left(a_{S,1}^{(3)}, \dots, a_{S,N}^{(3)}, a_{P,1}^{(3)}, \dots, a_{P,N}^{(3)} \right)^T \tag{2-36c}$$

$$B^{(1)} = \left(b_{S,1}^{(1)}, \dots, b_{S,N}^{(1)}, b_{P,1}^{(1)}, \dots, b_{P,N}^{(1)} \right)^T \quad 2-36d$$

$$B^{(2)} = \left(b_{TE,1}^{(2)}, \dots, b_{TE,I}^{(2)}, b_{TM,1}^{(2)}, \dots, b_{TM,J}^{(2)} \right)^T \quad 2-36e$$

$$B^{(3)} = \left(b_{S,1}^{(3)}, \dots, b_{S,N}^{(3)}, b_{P,1}^{(3)}, \dots, b_{P,N}^{(3)} \right)^T \quad 2-36f$$

而 M_E 及 D 為：

$$M_E = \begin{pmatrix} [M_{11}]_{g,i} & [M_{12}]_{g,j} \\ [M_{21}]_{g,i} & [M_{22}]_{g,j} \end{pmatrix} \quad 2-37$$

$$D = \begin{pmatrix} [D_{TE}]_{i,i'} & 0_{I \times J} \\ 0_{J \times I} & [D_{TM}]_{j,j'} \end{pmatrix} \quad 2-38$$

其中 $0_{J \times I}$ 為 $J \times I$ 的零矩陣，而 $0_{I \times J}$ 為 $I \times J$ 的零矩陣。子矩陣分別寫為：

$$[M_{11}]_{g,i} = \int_{\frac{L_x - a_x}{2}}^{\frac{L_x + a_x}{2}} \mathbf{E}_{TE,i,\parallel}^{(2)}(x) \mathbf{F}_{S,g}(x)^* dx \quad 2-39a$$

$$[M_{12}]_{g,j} = \int_{\frac{L_x - a_x}{2}}^{\frac{L_x + a_x}{2}} \mathbf{E}_{TM,j,\parallel}^{(2)}(x) \mathbf{F}_{S,g}(x)^* dx \quad 2-39b$$

$$[M_{21}]_{g,i} = \int_{\frac{L_x - a_x}{2}}^{\frac{L_x + a_x}{2}} \mathbf{E}_{TE,i,\parallel}^{(2)}(x) \mathbf{F}_{P,g}(x)^* dx \quad 2-39c$$

$$[M_{22}]_{g,j} = \int_{\frac{L_x - a_x}{2}}^{\frac{L_x + a_x}{2}} \mathbf{E}_{TM,j,\parallel}^{(2)}(x) \mathbf{F}_{P,g}(x)^* dx \quad 2-39d$$

$$[D_{TE}]_{i,i'} = e^{ik_{z,i}^{(2)}L} \delta_{ii'} \quad 2-40a$$

$$[D_{TM}]_{j,j'} = e^{ik_{z,j}^{(2)}L} \delta_{jj'} \quad 2-40b$$

而對於磁場而言，則對波導的基底作內積：

$$\begin{aligned} & \frac{ck_{z,i}^{(2)}}{\omega} \left(a_{TE,i}^{(2)} - b_{TE,i}^{(2)} \cdot e^{ik_{z,i}^{(2)}L} \right) \\ &= \sum_g \frac{ck_{z,g}^{(1)}}{\omega} \left(\int_{\frac{L_x-a_x}{2}}^{\frac{L_x+a_x}{2}} \mathbf{F}_{S,g}(x) \mathbf{E}_{TE,i,\parallel}^{(2)}(x)^* dx \right) (a_{S,g}^{(1)} - b_{S,g}^{(1)}) \end{aligned} \quad 2-41a$$

$$\begin{aligned} & + \sum_g \frac{\omega \mathcal{E}_1}{ck_{z,g}^{(1)}} \left(\int_{\frac{L_x-a_x}{2}}^{\frac{L_x+a_x}{2}} \mathbf{F}_{P,g}(x) \mathbf{E}_{TE,i,\parallel}^{(2)}(x)^* dx \right) (a_{P,g}^{(1)} - b_{P,g}^{(1)}) \\ & \frac{\omega \mathcal{E}_{slit}}{ck_{z,j}^{(2)}} \left(a_{TM,j}^{(2)} - b_{TM,j}^{(2)} e^{ik_{z,j}^{(2)}L} \right) \\ &= \sum_g \frac{ck_{z,g}^{(1)}}{\omega} \left(\int_{\frac{L_x-a_x}{2}}^{\frac{L_x+a_x}{2}} \mathbf{F}_{S,g}(x) \mathbf{E}_{TM,j,\parallel}^{(2)}(x)^* dx \right) (a_{S,g}^{(1)} - b_{S,g}^{(1)}) \end{aligned} \quad 2-41b$$

$$\begin{aligned} & + \sum_g \frac{\omega \mathcal{E}_1}{ck_{z,g}^{(1)}} \left(\int_{\frac{L_x-a_x}{2}}^{\frac{L_x+a_x}{2}} \mathbf{F}_{P,g}(x) \mathbf{E}_{TM,j,\parallel}^{(2)}(x)^* dx \right) (a_{P,g}^{(1)} - b_{P,g}^{(1)}) \\ & \frac{ck_{z,i}^{(2)}}{\omega} \left(a_{TE,i}^{(2)} e^{ik_{z,i}^{(2)}L} - b_{TE,i}^{(2)} \right) \\ &= \sum_g \frac{ck_{z,g}^{(3)}}{\omega} \left(\int_{\frac{L_x-a_x}{2}}^{\frac{L_x+a_x}{2}} \mathbf{F}_{S,g}(x) \mathbf{E}_{TE,i,\parallel}^{(2)}(x)^* dx \right) (a_{S,g}^{(3)} - b_{S,g}^{(3)}) \end{aligned} \quad 2-41c$$

$$\begin{aligned} & + \sum_g \frac{\omega \mathcal{E}_3}{ck_{z,g}^{(3)}} \left(\int_{\frac{L_x-a_x}{2}}^{\frac{L_x+a_x}{2}} \mathbf{F}_{P,g}(x) \mathbf{E}_{TE,i,\parallel}^{(2)}(x)^* dx \right) (a_{P,g}^{(3)} - b_{P,g}^{(3)}) \\ & \frac{\omega \mathcal{E}_{slit}}{ck_{z,j}^{(2)}} \left(a_{TM,j}^{(2)} e^{ik_{z,j}^{(2)}L} - b_{TM,j}^{(2)} \right) \\ &= \sum_g \frac{ck_{z,g}^{(3)}}{\omega} \left(\int_{\frac{L_x-a_x}{2}}^{\frac{L_x+a_x}{2}} \mathbf{F}_{S,g}(x) \mathbf{E}_{TM,j,\parallel}^{(2)}(x)^* dx \right) (a_{S,g}^{(3)} - b_{S,g}^{(3)}) \end{aligned} \quad 2-41c$$

$$+ \sum_g \frac{\omega \mathcal{E}_3}{ck_{z,g}^{(3)}} \left(\int_{\frac{L_x-a_x}{2}}^{\frac{L_x+a_x}{2}} \mathbf{F}_{P,g}(x) \mathbf{E}_{TM,j,\parallel}^{(2)}(x)^* dx \right) (a_{P,g}^{(3)} - b_{P,g}^{(3)})$$

類比於電場的整理方式，2-41 可整理為：

$$Y^{(2)} \left(A^{(2)} - DB^{(2)} \right) = M_H Y^{(1)} \left(A^{(1)} - B^{(1)} \right) \quad 2-42a$$

$$Y^{(2)} \left(DA^{(2)} - B^{(2)} \right) = M_H Y^{(3)} \left(A^{(3)} - B^{(3)} \right) \quad 2-42b$$

為了使矩陣簡化，先將 ϵ_{slit} 寫為 ϵ_2 ，並定義：

$$\left[Y_S^{(v)} \right]_{k,k'} = \frac{ck_{z,k}^{(v)}}{\omega} \delta_{kk'} \quad 2-43a$$

$$\left[Y_P^{(v)} \right]_{k,k'} = \frac{\omega \epsilon_v}{ck_{z,k}^{(v)}} \delta_{kk'} \quad 2-43b$$

而則矩陣 $Y^{(v)}$ 可表示為：

$$Y^{(v)} = \begin{pmatrix} \left[Y_S^{(v)} \right]_{k,k'} & 0 \\ 0 & \left[Y_P^{(v)} \right]_{k,k'} \end{pmatrix} \quad 2-44$$

而矩陣 M_H 為：

$$M_H = \begin{pmatrix} \left[M_{11} \right]_{g,i}^\dagger & \left[M_{21} \right]_{g,j}^\dagger \\ \left[M_{12} \right]_{g,i}^\dagger & \left[M_{22} \right]_{g,j}^\dagger \end{pmatrix} \quad 2-45$$

因此邊界條件的問題會變成 2-35 及 2-42 四個矩陣式，將這四個矩陣式在經過代數運算，則可得出：

$$\begin{pmatrix} A^{(2)} \\ B^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_H^{(2)} + M_H Y_H^{(1)} M_E & (M_H Y_H^{(1)} M_E - Y_H^{(2)}) D \\ (M_H Y_H^{(3)} M - Y_H^{(2)}) D & M_H Y_H^{(3)} M_E + Y_H^{(2)} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2M_H Y_H^{(1)} A^{(1)} \\ 2M_H Y_H^{(3)} B^{(3)} \end{pmatrix} \quad 2-46$$

以及

$$A^{(3)} = M_E (DA^{(2)} + B^{(2)}) - B^{(3)} \quad 2-47a$$

$$B^{(1)} = M_E (A^{(2)} + DB^{(2)}) - A^{(1)} \quad 2-47b$$

因此由入射光的形式給定 $A^{(1)}$ 及 $A^{(3)}$ ，則可由 2-46 得出區域(二)的展

開係數，再由 2-47 得出穿透及反射的結果，假設入射波由區域(一)入射，則可令 $B^{(3)}$ 皆為零，因此由坡印廷向量(Poynting vector)，則可寫出 S-波及 P-波的穿透率：

$$T_{S,m} = \frac{\text{Re} \frac{ck_{z,m}^{(3)}}{\omega} |a_{S,m}^{(3)}|^2}{\sum_n \text{Re} \frac{ck_{z,n}^{(1)}}{\omega} |a_{S,n}^{(1)}|^2 + \sum_n \text{Re} \frac{\omega \epsilon_1}{ck_{z,n}^{(1)}} |a_{P,n}^{(1)}|^2} \Big|_{B^{(3)}=0} \quad 2-48a$$

$$T_{P,m} = \frac{\text{Re} \frac{\omega \epsilon_3}{ck_{z,m}^{(3)}} |a_{P,m}^{(3)}|^2}{\sum_n \text{Re} \frac{ck_{z,n}^{(1)}}{\omega} |a_{S,n}^{(1)}|^2 + \sum_n \text{Re} \frac{\omega \epsilon_1}{ck_{z,n}^{(1)}} |a_{P,n}^{(1)}|^2} \Big|_{B^{(3)}=0} \quad 2-48b$$

我們定義 $g = 1$ 時， $n_g = 0$ ，則 2-2a 中 $k_{x,1} = (\omega/c) \sin \theta$ ，相當於對應到零階散射波，則 $T_{S,1}$ 及 $T_{P,1}$ 則分別代表 S 與 P 的零階穿透。而則 S-波與 P-波的零階入射分別可寫為：

$$a_{S,n}^{(1)} = \delta_{n1} \quad 2-49a$$

$$a_{P,n}^{(1)} = \frac{ck_{z,n}^{(1)}}{\omega \sqrt{\epsilon_1}} \delta_{n1} \quad 2-49b$$

對於 S 而言，電場方向完全是在 y 方向上，然而對於 P 而言，電場方向有包含 x 及 z，而投影到 x 方向上會多一個比例係數 $ck_{z,n}^{(1)}/\omega \sqrt{\epsilon_1}$ 。

2. 考慮金屬損耗

類比於上一節計算過程，同樣透過匹配邊界條件，並將方程式化為矩陣形式，但在此我們將S-波與P-波分開整理成兩組的矩陣，原因有兩個，第一，由計算區域(二)的基底形式，我們得知TE與TM的場是完全正交的，TE只包含 H_x 、 E_y 及 H_z ，而TM只包含 E_x 、 H_y 及 E_z ，因此S-波入射只會耦合到TE模態，而P-波只會耦合到TM，因此將S與P分開處理並不會影響計算結果。第二，考慮金屬損耗後，區域(二)的基底必須透過解本徵值問題得出，而TE及TM有個別的本徵值方程式(2-25及2-32)，因此為了加快計算速度，我們可針對入射偏振不同來選定區域(二)所需的基底。舉例來說，當只有P-波入射，則只要解TM的本徵值問題，而不需要解TE的。

(1). 矩陣運算

首先討論P波，區域(一)及區域(三)同樣用平面波展開，而區域(二)採用 2-26，則透過邊界條件 E_x 及 H_y 連續，則可得出下列四條方程式：

$$\begin{aligned} & \sum_n \frac{1}{\sqrt{L_x}} e^{ik_{x,n}x} (a_{P,n}^{(1)} + b_{P,n}^{(1)}) \\ &= \sum_l X_{TM,l}(x) (a_{TM,l}^{(2)} + b_{TM,l}^{(2)} e^{i\Lambda_l L}) \end{aligned} \quad 2-50a$$

$$\begin{aligned} & \sum_n \frac{1}{\sqrt{L_x}} e^{ik_{x,n}x} (a_{P,n}^{(3)} + b_{P,n}^{(3)}) \\ &= \sum_l X_{TM,l}(x) (a_{TM,l}^{(2)} e^{i\Lambda_l L} + b_{TM,l}^{(2)}) \end{aligned} \quad 2-50b$$

$$\sum_n \frac{1}{\sqrt{L_x}} e^{ik_{x,n}x} k_{z,n}^{(1)} (a_{P,n}^{(1)} - b_{P,n}^{(1)}) \quad 2-50c$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_2(x)} \sum_l X_{TM,l}(x) \Lambda_l (a_{TM,l}^{(2)} - b_{TM,l}^{(2)} e^{i\Lambda_l L})$$

$$\sum_n \frac{1}{\sqrt{L_x}} e^{ik_{x,n}x} \frac{k_{z,n}^{(3)}}{\varepsilon_3} (a_{P,n}^{(3)} - b_{P,n}^{(3)}) \quad 2-50d$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_2(x)} \sum_l X_{TM,l}(x) \Lambda_l (a_{TM,l}^{(2)} e^{i\Lambda_l h} - b_{TM,l}^{(2)})$$

而在這裡必須注意的是，當金屬的介電係數為複數，則區域(二)基底沒有正交性。此外，平行方向的電場與磁場無論是在金屬區域或是狹縫區域都必須連續，因此不能像上一小節對於電場連續與磁場連續分別投影到平面波及波導的基底。故對於上列四條式子，可在左右兩側同乘上平面波的基底($\frac{1}{\sqrt{L_x}} e^{ik_{x,m}x}$)並積分一個週期，則可以得出：

$$a_{P,m}^{(1)} + b_{P,m}^{(1)} = \sum_l \left(\frac{1}{\sqrt{L_x}} \int_{-\frac{rL_x}{2}}^{\left(\frac{1-r}{2}\right)L_x} X_{TM,l}(x) e^{ik_{x,m}x} dx \right) (a_{TM,l}^{(2)} + b_{TM,l}^{(2)} e^{i\Lambda_l L}) \quad 2-51a$$

$$a_{P,m}^{(3)} + b_{P,m}^{(3)} = \sum_l \left(\frac{1}{\sqrt{L_x}} \int_{-\frac{rL_x}{2}}^{\left(\frac{1-r}{2}\right)L_x} X_{TM,l}(x) e^{ik_{x,m}x} dx \right) (a_{TM,l}^{(2)} e^{i\Lambda_l L} + b_{TM,l}^{(2)}) \quad 2-51b$$

$$\frac{k_{z,m}^{(1)}}{\varepsilon_1} (a_{P,m}^{(1)} - b_{P,m}^{(1)}) \quad 2-51c$$

$$= \sum_l \left(\frac{\Lambda_l}{\sqrt{L_x}} \int_{-\frac{rL_x}{2}}^{\left(\frac{1-r}{2}\right)L_x} \frac{X_{TM,l}(x)}{\varepsilon_2(x)} e^{ik_{x,m}x} dx \right) (a_{TM,l}^{(2)} - b_{TM,l}^{(2)} e^{i\Lambda_l L})$$

$$\frac{k_{z,m}^{(3)}}{\varepsilon_3} (a_{P,m}^{(3)} - b_{P,m}^{(3)}) \quad 2-51d$$

$$= \sum_l \left(\frac{\Lambda_l}{\sqrt{L_x}} \int_{-\frac{rL_x}{2}}^{\left(\frac{1-r}{2}\right)L_x} \frac{X_{TM,l}(x)}{\varepsilon_2(x)} e^{ik_{x,m}x} dx \right) (a_{TM,l}^{(2)} e^{i\Lambda_l L} - b_{TM,l}^{(2)})$$

將上述方程式簡化為矩陣形式・並將三個區域的基底數量皆設為 N ，將展開係數化為列矩陣：

$$A_{\sigma}^{(v)} = \left(a_{\sigma,1}^{(v)}, \dots, a_{\sigma,N}^{(v)} \right)^T \quad 2-52a$$

$$B_{\sigma}^{(v)} = \left(b_{\sigma,1}^{(v)}, \dots, b_{\sigma,N}^{(v)} \right)^T \quad 2-52b$$

其中 σ 為 S 或 P，另外再將剩餘的係數化為矩陣：

$$[\chi]_{m,l} = \frac{1}{\sqrt{L_x}} \int_{-\frac{rL_x}{2}}^{\left(\frac{1-r}{2}\right)L_x} X_{TM,l}(x) e^{ik_{x,m}x} dx \quad 2-53a$$

$$[\Omega]_{m,l} = \frac{\Lambda_l}{\sqrt{L_x}} \int_{-\frac{rL_x}{2}}^{\left(\frac{1-r}{2}\right)L_x} \frac{X_{TM,l}(x)}{\epsilon_2(x)} e^{ik_{x,m}x} dx \quad 2-53b$$

$$[K]_{m,l} = e^{i\Lambda_l L} \delta_{ml} \quad 2-53c$$

$$[Y_H^{(v)}]_{m,l} = \frac{k_{z,m}^{(v)}}{\epsilon_v} \delta_{ml} \quad 2-53d$$

則 2-37 可以簡化為：

$$A_P^{(1)} + B_P^{(1)} = \chi \left(A_{TM}^{(2)} + KB_{TM}^{(2)} \right) \quad 2-54a$$

$$A_P^{(3)} + B_P^{(3)} = \chi \left(KA_{TM}^{(2)} + B_{TM}^{(2)} \right) \quad 2-54b$$

$$Y_H^{(1)} \left(A_P^{(1)} - B_P^{(1)} \right) = \Omega \left(A_{TM}^{(2)} - KB_{TM}^{(2)} \right) \quad 2-54c$$

$$Y_H^{(3)} \left(A_P^{(3)} - B_P^{(3)} \right) = \Omega \left(KA_{TM}^{(2)} - B_{TM}^{(2)} \right) \quad 2-54d$$

將 2-54 整理：

$$\begin{pmatrix} A_{TM}^{(2)} \\ B_{TM}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega^{-1}Y_H^{(1)}\chi + I & (\Omega^{-1}Y_H^{(1)}\chi - I)K \\ (\Omega^{-1}Y_H^{(3)}\chi - I)K & \Omega^{-1}Y_H^{(3)}\chi + I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\Omega^{-1}Y_H^{(1)}A_p^{(1)} \\ 2\Omega^{-1}Y_H^{(3)}B_p^{(3)} \end{pmatrix} \quad 2-55$$

其中為 I 單位矩陣 (Identity matrix)。由入射光形式給定 $A_p^{(1)}$ 及 $B_p^{(3)}$ ，透過 2-55 則能得出區域(二)的展開係數，再由 2-54a 及 2-54b 得出穿透及反射的結果，而零階穿透及零階入射則與 2-48b 及 2-49b 的定義相同，在此不再贅述。

對於 S-波，區域(二)取 2-29，邊界條件為 H_x 及 E_y 連續，依照與 P-波相同程序，而只需要多定義一個參數：

$$(\Pi)_{m,l} = \frac{\Lambda_l}{\sqrt{L_x}} \int_{-\frac{rL_x}{2}}^{\left(\frac{1-r}{2}\right)L_x} \frac{X_{TM,l}(x)}{\varepsilon_2(x)} e^{ik_{x,m}x} dx \quad 2-56$$

將 Ω 替換為 Π ，則同樣可解出 S-波的穿透率。上介紹了考慮金屬損耗的基本運算，粗略來看，是否考慮金屬損耗，其運算過程差異不大，然而實際上考慮了金屬損耗後，必須使用一些計算技巧，使得運算速度及精確度大幅提升，以下兩小節分別介紹本徵值問題及重疊積分 (overlap integral) 的簡化。

(2). 本徵值問題

在求區域(二)的基底時，對於 TE 及 TM 會有兩組本徵值方程式 (2-25 及 2-32)，會有兩個特性。

首先，可以觀察到在正弦及餘弦函數中會包含 α 及 β 值，其可為複數

值，由正弦及餘弦函數特性可得知，其複數特性會導致函數值變化劇烈，舉例來說，餘弦函數中帶 $100i$ ， $\cos(100i)$ ，其數量及會達 10^{43} ，因此我們在求本徵值 Λ 時，依照結構參數的不同，其必須準確至小數以下 20 位以上，才能使本徵值方程式確實為 0，換言之才符合邊界條件。

其次，我們觀察 2-25 及 2-32 等號左側的函數特性，利用德魯模型 (Drude model) 來描述金屬的介電係數，取銅做為範例，其自由電子濃度為 $8.47 \times 10^{28} \text{ (m}^{-3}\text{)}$ ，導電率 (conductivity) 為 $5.69 \times 10^7 \text{ (s/m)}$ ，而結構參數列於圖中，而縱軸取函數的實部部分，結果如圖 2.2 所示。如先前所提到的，縱軸變化的幅度很大。此外，本徵值為複數，相當於是要解複數根，我們還必須隨 Λ^2 往負值延伸，將每個根依序解出。若用最直接的解法，在複數平面上透過牛頓法，撒密集的開始估計值 (initial guess) 來解決此問題，則會相當耗時，因此我們必須用有效率的方法來給定開始估計值。我們可以透過很直觀的方法來達到這個目的。在此以兆赫波區段為例，已知 Λ 相當於是往 z 方向的傳遞常數，在此區段，金屬與空氣的介電係數差異相當大，因此解出來的 Λ 只會有兩種情形。一個是在空氣中傳遞的結果，此狀況可用波導模態來預測解實數部分，此外實部必定遠大於虛部，而另一個是在金屬中傳遞的結果，此狀況虛部會由金屬的損耗所決定，因此我們可以鎖定虛部後再找出實數部分，因此將原本二維平面上解根問題化簡為一維的問

題。

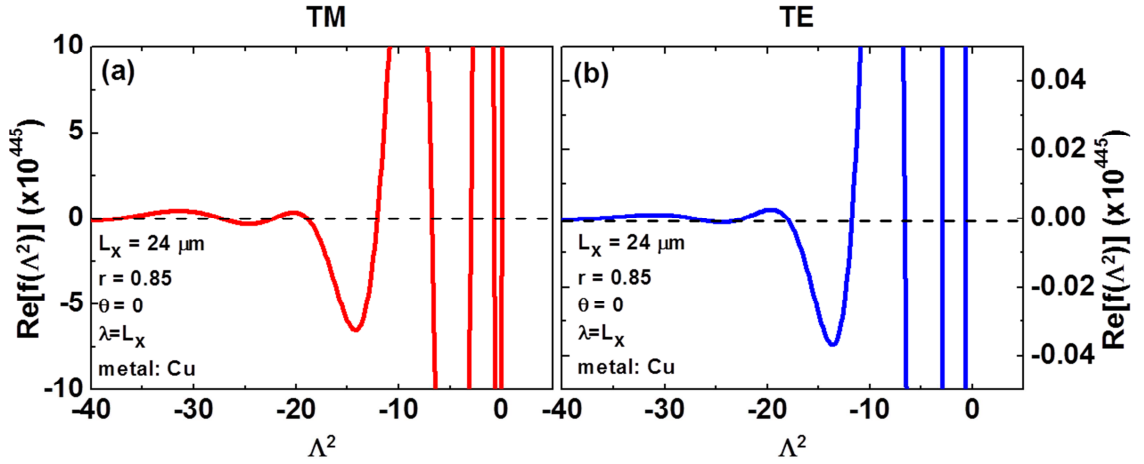


圖 2.2 金屬材料為銅，狹縫中為空氣時，(a)為 TM(2-25) (b)為 TE(2-32) 本徵值方程式的實部項。

(3). 重疊積分(overlap integral)的簡化

矩陣運算中包含三個重疊積分(Ω 、 χ 及 Π)，當基底取的數量很多，導致矩陣很大時，則運算會相當耗時，因此必須將重疊積分簡化，以節省運算時間，在此以 χ 為例：

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\sqrt{L_x}} \int_{-\frac{rL_x}{2}}^{\left(\frac{1-r}{2}\right)L_x} X_{TM,l}(x) e^{ik_{x,m}x} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{L_x}} \int_{-\frac{rL_x}{2}}^{\frac{rL_x}{2}} \cos\left[\beta\left(x + \frac{rL_x}{2}\right)\right] e^{ik_{x,m}x} dx \\
 &+ \frac{1}{\sqrt{L_x}} \int_{-\frac{rL_x}{2}}^{\frac{rL_x}{2}} \left\{ \frac{-i\epsilon_{metal}k_0}{\beta} V_{0,TM} \sin\left[\beta\left(x + \frac{rL_x}{2}\right)\right] \right\} e^{ik_{x,m}x} dx \\
 &+ \frac{1}{\sqrt{L_x}} \int_{-\frac{rL_x}{2}}^{\left(\frac{1-r}{2}\right)L_x} \left\{ U_{1,TM} \cos\left[\alpha\left(x - \frac{rL_x}{2}\right)\right] \right\} e^{ik_{x,m}x} dx \\
 &+ \frac{1}{\sqrt{L_x}} \int_{-\frac{rL_x}{2}}^{\left(\frac{1-r}{2}\right)L_x} \left\{ -\frac{ik_0}{\alpha} V_{1,TM} \sin\left[\alpha\left(x - \frac{rL_x}{2}\right)\right] \right\} e^{ik_{x,m}x} dx
 \end{aligned} \tag{2-57}$$

取等號右側的第一項進行簡化，透過三角函數的特性可得出：

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{L_x}} \int_{-\frac{rL_x}{2}}^{\frac{rL_x}{2}} \cos \left[\beta \left(x + \frac{rL_x}{2} \right) \right] e^{ik_{x,m}x} dx \\
&= \frac{ie^{-\frac{1}{2}irL_x k_{x,m}} \left[-e^{irL_x k_{x,m}} k_{x,m} + k_{x,m} \cos(\beta rL_x) + i\beta \sin(\beta rL_x) \right]}{\sqrt{L_x} (k_{x,m}^2 - \beta^2)} \\
&= \frac{e^{\frac{1}{2}irL_x k_{x,m}}}{2i\sqrt{L_x}} \left\{ \frac{\left(e^{i(\beta - k_{x,m})rL_x} - 1 \right)}{(\beta - k_{x,m})} - \frac{\left(e^{-i(\beta + k_{x,m})rL_x} - 1 \right)}{(\beta + k_{x,m})} \right\}
\end{aligned} \tag{2-58}$$

同樣對剩下三項作簡化可得出如上式相當對稱的結果，因此我們定義以下參數再進行簡化：

$$S^\pm(s) = \frac{1}{2i\sqrt{L_x}} \frac{\text{Exp} \left[i(s - k_{x,m})L_x \frac{1 \pm (1-2r)}{2} \right] - 1}{(s - k_{x,m})} \tag{2-59a}$$

$$T^\pm(s) = \frac{1}{2i\sqrt{L_x}} \frac{\text{Exp} \left[-i(s + k_{x,m})L_x \frac{1 \pm (1-2r)}{2} \right] - 1}{(s + k_{x,m})} \tag{2-59b}$$

再定義

$$\Sigma_1 = e^{\frac{1}{2}irL_x k_{x,m}} \left\{ (S^-(\beta) - T^-(\beta)) - V_{0,TM} \frac{k_0 \epsilon_{metal}}{\beta} (S^-(\beta) + T^-(\beta)) \right\} \tag{2-60a}$$

$$\Sigma_2 = e^{-\frac{1}{2}irL_x k_{x,m}} \left\{ U_{1,TM} (S^+(\alpha) - T^+(\alpha)) - \frac{k_0 V_{1,TM}}{\alpha} (S^+(\alpha) + T^+(\alpha)) \right\} \tag{2-60b}$$

因此對於 P-波中的重疊積分則可以化為：

$$[\mathcal{X}]_{m,l} = \frac{1}{\sqrt{L_x}} \int_{-\frac{rL_x}{2}}^{\left(\frac{1-r}{2}\right)L_x} X_{TM,l}(x) e^{ik_{x,m}x} dx = \Sigma_1 + \Sigma_2 \tag{2-61a}$$

$$[\Omega]_{m,l} = \frac{\Lambda_l}{\sqrt{L_x}} \int_{-\frac{rL_x}{2}}^{\left(\frac{1-r}{2}\right)L_x} \frac{X_{TM,l}(x)}{\epsilon_2(x)} e^{ik_{x,m}x} dx = \Lambda_l \left(\frac{\Sigma_1}{\epsilon_{metal}} + \Sigma_2 \right) \tag{2-61b}$$

換言之，只要計算 Σ_1 與 Σ_2 ，則可以同時得出兩個重疊積分的結果，藉

此能大幅縮短運算時間，同樣對於 S-波也能進行相同的處理。



第三章 理論分析及實驗對照

本研究團隊對於加上基板的金屬光柵的穿透頻譜已有豐富的實驗成果[35]，本章節的目的是透過第二章介紹的計算方式，觀察並解釋實驗結果。而關於實驗參數，我們選定鋁作為金屬，矽作為基板材料。由於實驗上穿透頻譜主要是落在兆赫波區段，因此以下的理論計算結果主要是以不考慮金屬損耗，也就是考慮完美導體的狀況為主，而有考慮金屬損耗的部分會再特別標示出來。以下敘述首先說明P-波及S-波的基本特性，接著再分為P-波入射及S-波入射兩個區塊，並再區分為不加基板及有加基板兩種狀況做討論，最後再與實驗部分做對照。

3.1 P-波及S-波的基本特性

在實際用複雜的向量計算作分析前，本小節先敘述一維與二維週期性孔洞的差異以及一維狀況下P-波及S-波的基本特性。

3.1.1 一維與二維週期性孔洞

我們可利用一維及二維的波導模態來說明，首先定義：

$$k_0 = \sqrt{k_z^2 + k_{\perp}^2} \quad 3-1$$

其中 k_z 的方向為平行波導傳遞方向，而 $k_{\perp}$ 為垂直於傳遞方向， k_0 的最小值是由 $k_{\perp}$ 所決定，相當於往z方向不傳遞，而 $k_{\perp}$ 是由波導截面積大小所決定，也就是駐波條件，其高或寬必須為最大波長的一半，因此當截面積越大時，則容許波長越大，截止頻率越低，反之，則截面積越

小，則截止頻率越高。因此對於二維而言，其有截面積限制，故每個模態必定有截止頻率，而對於一維而言，其只在一個維度上有限制，另一方向無限延伸，而截面積無限大，因此會存在截止頻率為零的模態(TEM mode)。

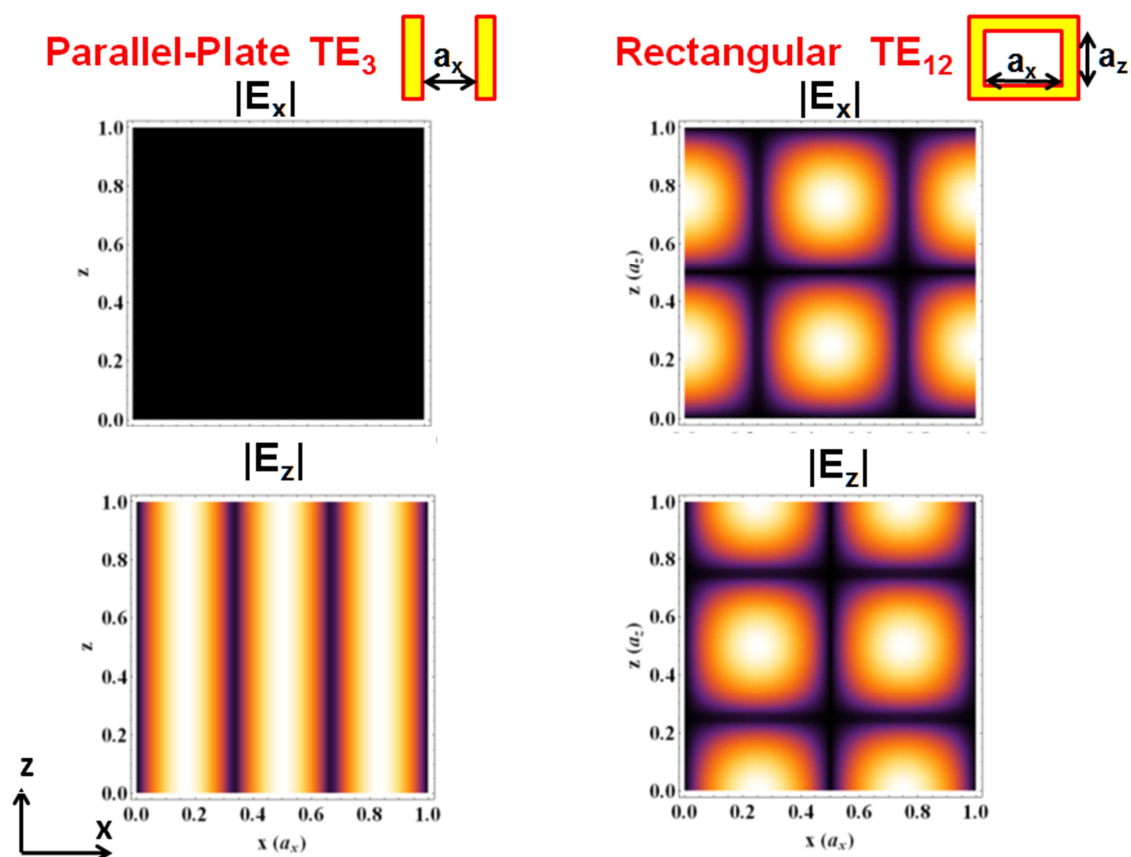


圖3.1 寬度為 a_x 的平行金屬板波導及長寬各為 a_x 、 a_z 的矩形金屬波導間高階項特性的比較。

另一方面，由電場的邊界條件可得知，二維金屬波導在兩個方向上皆有限制，會導致其模態會包含兩個方向的電場偏振，對於一維金屬波導，其TE及TM皆只會各包含其中一種電場方向，如圖3.1所示，對於平行金屬板波導(Parallel-plate waveguide)，其高階TE模態只包含一個偏振方向，而對於矩形金屬波導(Rectangular waveguide)，則包

含有兩個方向的偏振。因此對於二維金屬週期性孔洞而言，無論入射P-波或是S-波，皆會耦合到孔洞中的TE及TM模態，因此無法取孔洞中特定的模態來說明穿透情形，但對於一維週期性狹縫，P-波與S-波入射時，只會個別耦合到狹縫中的TM或TE模態，因此我們可以針對入射偏振方向的不同，取個別的波導模態來預測其穿透行為。

3.1.2 一維結構的基本特性

直觀來看，當波長與狹縫大小相近時，則入射光是直接穿透，當波長大於狹縫時，直接穿透會下降，則能夠觀察狹縫與入射光的交互作用以及對於穿透光的影響。對於P-波入射，會耦合到狹縫中的TM模態，而對於一維結構而言，TM最低階的模態為TEM，如圖3.2(a)所示，TEM模態並沒有截止頻率，故狹縫寬度下降時，依然會有可傳遞的模態。而對於S-波而言，狹縫中最低階的TE模態會如圖3.2(b)所示，在兩端必須是節點，因此會有截止頻率，故當波長遠大於狹縫時，入射光無法通過狹縫，會造成完全反射。

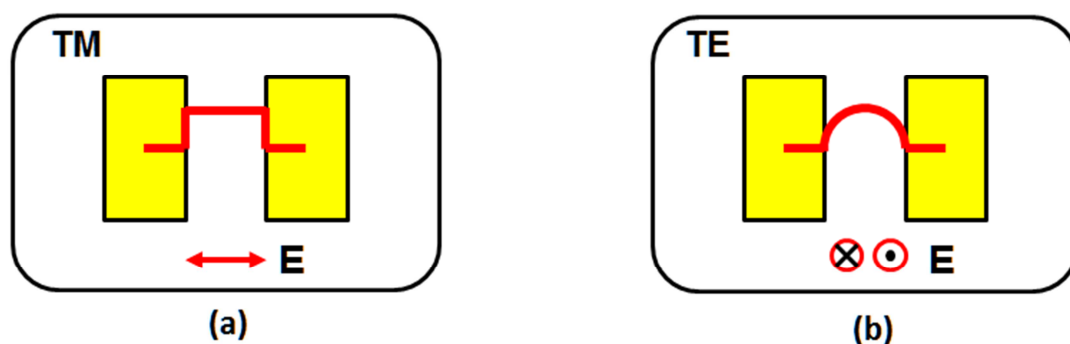


圖3.2 平行金屬板波導中，(a)TM及(b)TE最低階模態的電場示意圖。

另一方面，P-波的電場方向是垂直於狹縫排列方向，一般認為相對於S-波而言，P-波與狹縫的交互作用較強，因此對於金屬光柵，主要研究都落在狹縫小於波長且P-波入射的結果。

3.2 P-波入射

對於P-波入射的狀況，一般最常討論的穿透頻譜，如圖3.3所示，狹縫寬度 $a_x=0.15L_x$ 及厚度 $L=0.15L_x$ ，而入射光為垂直入射，觀察零階穿透，波長由0.9到1.1倍週期，在入射光波長在週期時，會有一個穿透谷值，而在波長略大於週期時，則為一個線寬很窄的穿透峰值，而此穿透峰值的物理機制已有非常廣泛的研究，在此我們用很短的篇幅簡單介紹其特性。

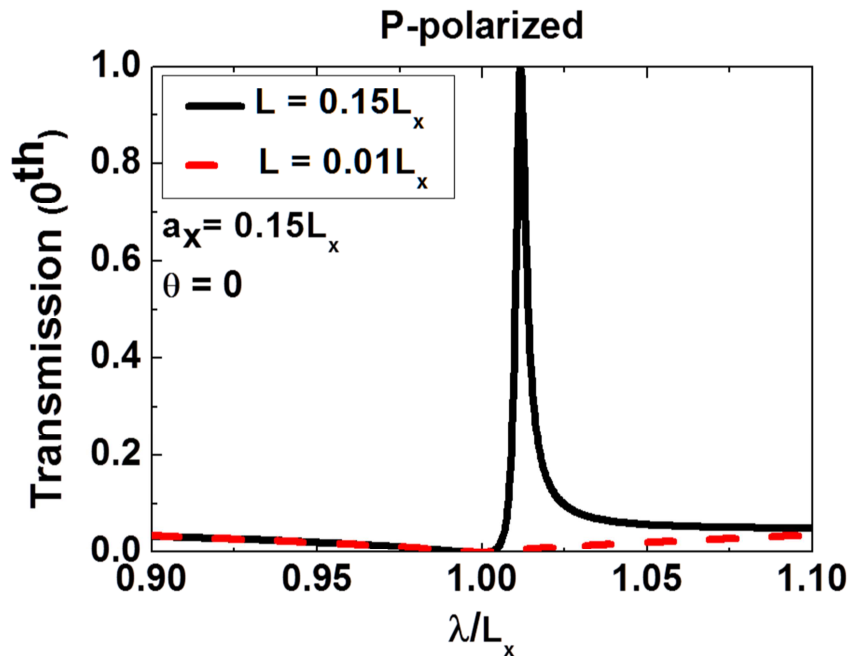


圖3.3 $a_x=0.15L_x$ ， L 分別為 $0.15L_x$ 及 $0.01L_x$ ，P-波的零階穿透頻譜。

此穿透峰值的產生，最廣泛被接受的物理圖像是費諾共振(Fano resonance)[36, 37]，以圖3.4來說明，入射光會看到兩種不同的態(state)，一個是對應到連續態，其代表直接穿透或反射，另一個是離散(discrete)並且是由週期性狹縫所提供的態，當電磁波入射時，會激發這兩種態，而這兩種態彼此間會有建設性及破壞性的交互作用，因此會形成一個谷值與峰值緊鄰的穿透頻譜。基於上述的物理圖像，穿透峰值會對應到週期性狹縫上的態，因此我們可以藉由改變不同入射角來得出週期性狹縫的色散關係(dispersion relation)。

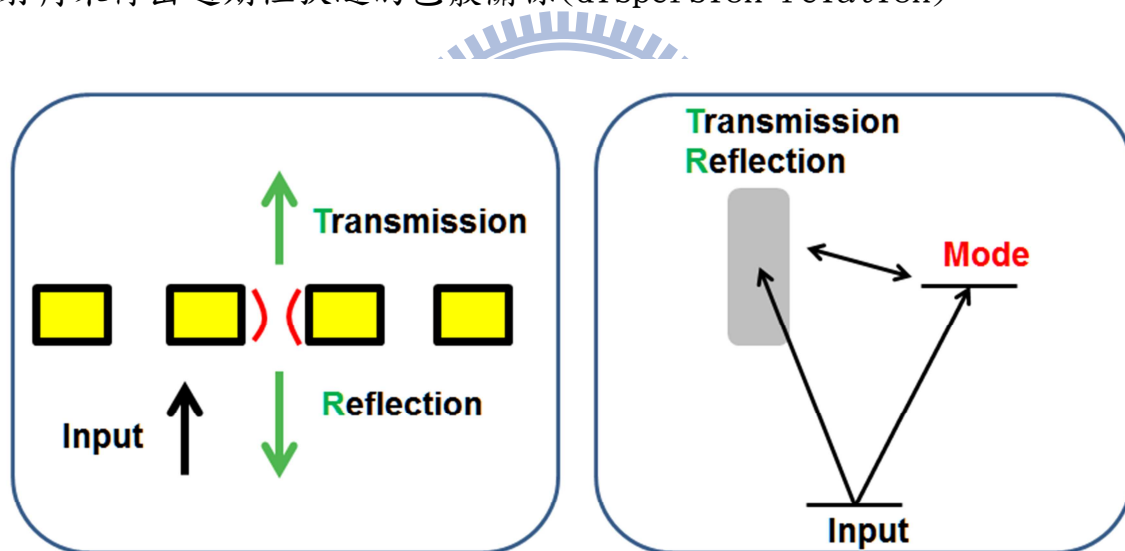


圖3.4 一維週期性狹縫對應到費諾共振的物理圖像。

我們已知在金屬與介電質介面會存在有表面電漿子 (surface plasmon polaritons)，而當假設金屬為完美導體時，則表面電漿子會不存在，然而透過結構有週期性，則會存在類表面電漿子(spoof surface plasmon)，其色散關係可表示為：

$$\omega_{SPP}^{(n)}(k_{x,0}) = c \sqrt{\frac{1}{\epsilon_{dielectric}}} \left| k_{x,0} + \frac{2\pi n}{L_x} \right| \quad 3-2$$

其中 $\epsilon_{dielectric}$ 為區域(一)或區域(三)的介電係數，而在此皆設為1。

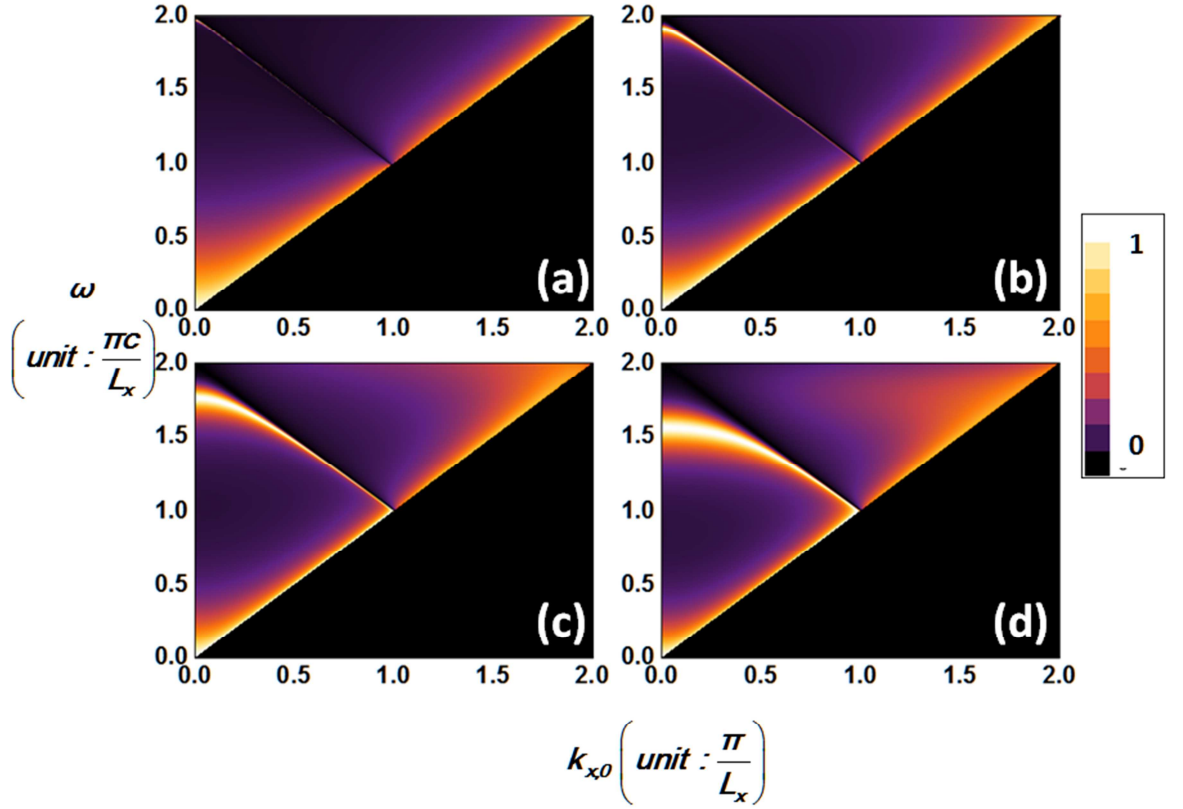


圖3.5 P-波的穿透頻譜隨 k_{x0} 變化的計算結果，狹縫寬度為 $a_x=0.15L_x$ ，而厚度分別為(a) $L=0.15L_x$ (b) $L=0.25L_x$ (c) $L=0.35L_x$ (d) $L=0.45L_x$ ，目的是了解厚度對週期性狹縫色散關係的影響。

首先觀察圖3.5(a)，其穿透峰值的亮帶沿著 $\omega_{SPP}^{(-1)}$ 分布，換言之，在此結構參數下，穿透峰值是由結構的週期特性所產生，而當厚度逐漸增加時，則入射光除了看到水平方向的週期性外，也看到垂直方向所造成的效應，如3.5(b)(c)(d)所示，亮帶會逐漸與入射角無關，代表為單一狹縫所造成的模態，也就是狹縫中的Fabry-Perot共振，而由於上下表面的反射率低，因此可觀察到其線寬會比週期性所產生的模

態寬。因此對於P-波入射，則會存在兩種模態，一個具有週期特性，另一個則是單一狹縫所導致的。而接下來我們可以透過觀察其場型進一步瞭解這兩種模態的特性，考慮垂直入射，圖3.6(a)為 $a_x=0.15L_x$ 及厚度 $L=0.15L_x$ 的電場分布，可觀察到其場緊密附著在上下表面，對應其為週期性所造成的結果，而圖3.6(b)為 $a_x=0.15L_x$ 及厚度 $L=0.45L_x$ ，則可觀察到不同於圖3.6(a)，其電場主要集中在狹縫內部。

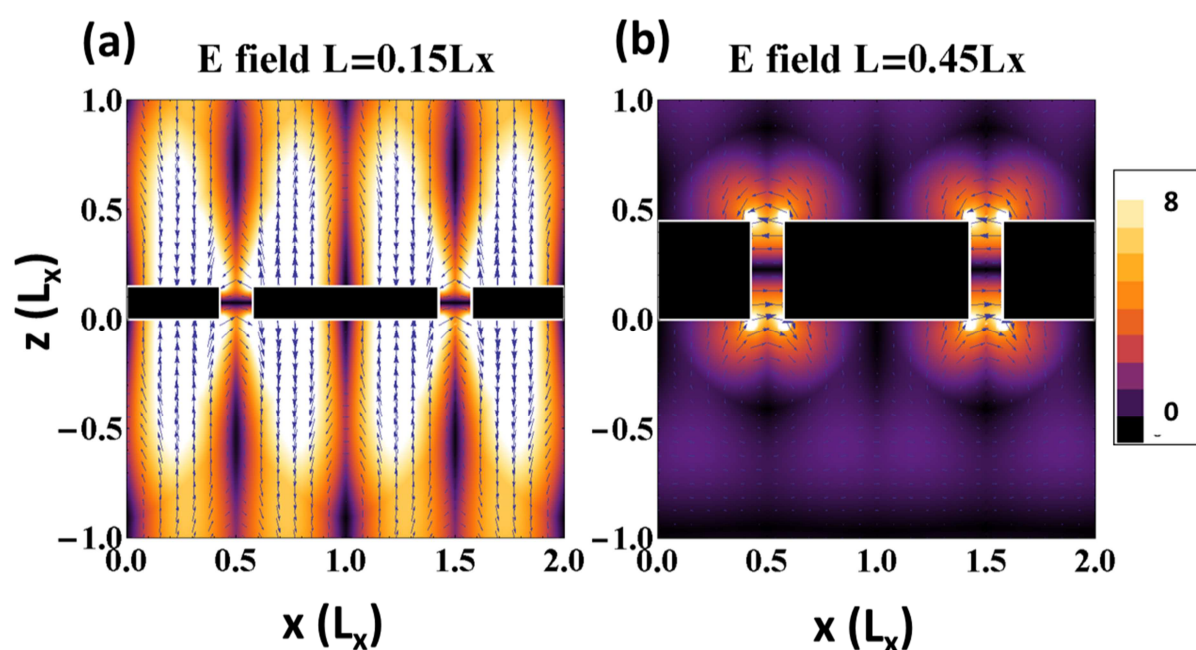


圖3.6 狹縫寬度為 $a_x=0.15L_x$ ，厚度及入射光波長分別為(a) $L=0.15L_x$ 、 $\lambda=1.012L_x$ (b) $L=0.45L_x$ 、 $\lambda=1.28L_x$ ，在P-波垂直入射狀況下，穿透峰值位置所對應到的場型圖。

而由圖3.7，我們可觀察金屬的非完美效應，在此同樣是考慮垂直入射，利用德魯模型來描述金屬的損耗，其方程式如下：

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)} \quad 3-3$$

圖3.7中 ω_p 取為9 eV，變動 γ 為0.1、0.01及0.001 eV(一般良導體， ω_p

約在8到10 eV左右，而 γ 約為0.01 eV的數量級，以銅為例， ω_p 為10.8 eV，而 γ 為0.02 eV)，來觀察損耗的效應。圖3.7(a)，可看出由於週期性所導致的模態，其電場緊密附著於上下表面，因此金屬損耗增加會使得其穿透峰值迅速下降，同時伴隨著線寬增加，而圖3.7(b)，對於Fabry-Perot模態，其穿透率及線寬主要由上下表面的反射率所決定，故金屬損耗對其影響較小。

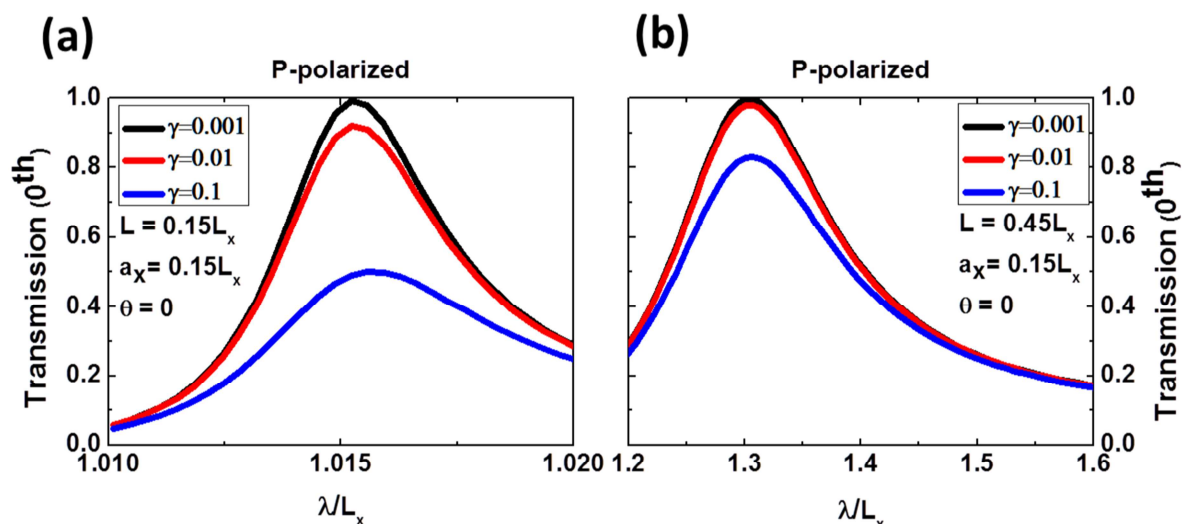


圖3.7 狹縫寬度為 $a_x=0.15L_x$ ，厚度分別為(a) $L=0.15L_x$ (b) $L=0.45L_x$ ，在P-波垂直入射狀況下，零階穿透峰值隨著金屬損耗增加的變化。

以上敘述了共振穿透的圖像及穿透特性，而穿透峰值的特性與週期性狹縫結構間的關係已有相當多研究團隊做討論，因此以下不再進一步敘述。

3.2.1 不加基板的穿透特性

上述介紹了P-波透過激發表面的模態來穿過金屬光柵，而接下來我們要討論的是：若把狹縫厚度縮小，使其遠小於週期時，此時金屬

光柵會扮演怎麼樣的角⊂？我們先觀察其穿透頻譜的特性，如圖 3.3，狹縫寬度 $a_x=0.15L_x$ ，而厚度 L 由 $0.15L_x$ 縮減為 $0.01L_x$ 時，我們可以發現穿透峰值消失了，也就是模態消失了，代表金屬狹縫對於入射光只是扮演擾動的角⊂，然而此時穿透谷值依然存在。

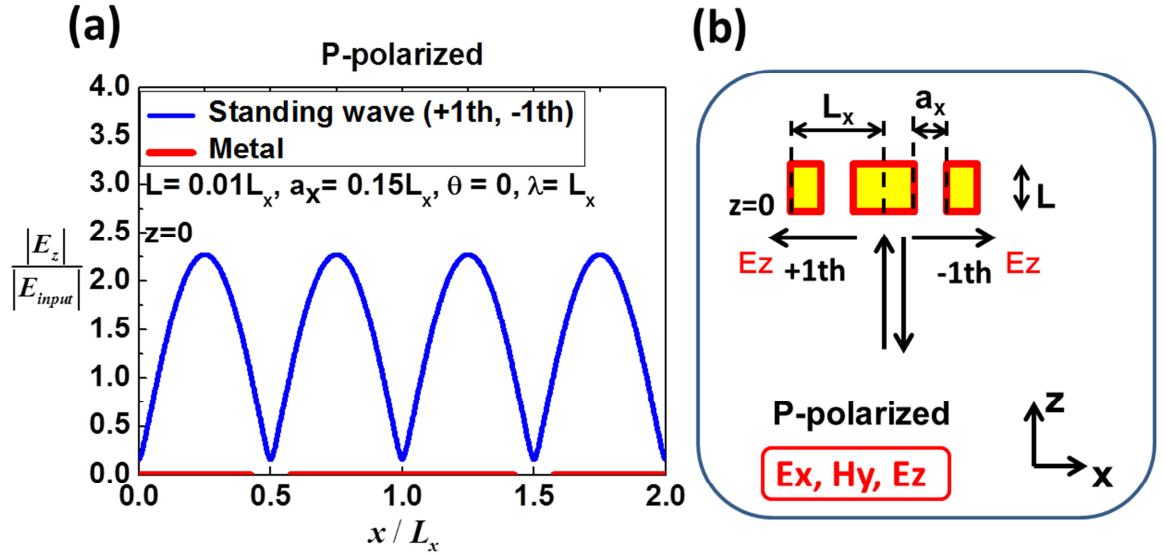


圖3.8 (a)寬度為 $a_x=0.15L_x$ ，厚度為 $L=0.01L_x$ ，當 $\lambda=L_x$ 時，駐波在 $z=0$ 的分布，(b)在 $\lambda=L_x$ 時，P-波入射所激發的+1及-1階散射波之間相對關係的示意圖。

谷值的位置正好落在 $\lambda=L_x$ 的情況，其發生波長稱為雷利波長，也就是使2-2(b)中，對應到 $k_{z,\tau}^{(v)}$ 為零的波長，其中 $n_\tau = \pm 1$ 。而針對此穿透谷值已有相當多研究團隊討論，然而真正的機制目前尚未不明，而在此我們不逐一說明已發展的物理圖像，而是透過我們的計算方式，將觀察到的現象賦予其物理圖像。

由2-2(b)得知，此時 $k_{z,\tau}^{(v)}$ 為正好為零，其物理圖像可用圖3.8(b)來說明，對於P-波入射，其包含電場 E_x 、 E_z 及磁場 H_y ， $k_{z,\tau}^{(v)}$ 為零則代表+1及-1階的散射波不往 z 方向傳遞或遞減，反而轉變為沿表面 $+x$ 及 $-x$ 方

向行進的波，而兩個反方向行進的波會形成駐波(e^{im} 與 e^{-im} 相加，會形成正弦或餘弦函數，與兩者起始相位有關)，由邊界條件得知，由電磁波為橫波條件來看，此駐波必定為 E_z 場所構成，而將 E_z 場的振幅對入射波進行歸一後，則得到圖3.8(a)的結果，駐波的週期由狹縫週期所決定，並在狹縫處為節點，因此我們有興趣的是，是否為此駐波對於入射光有影響，導致此入射波長對應到反射，因此可透過場型圖進行深入的了解。

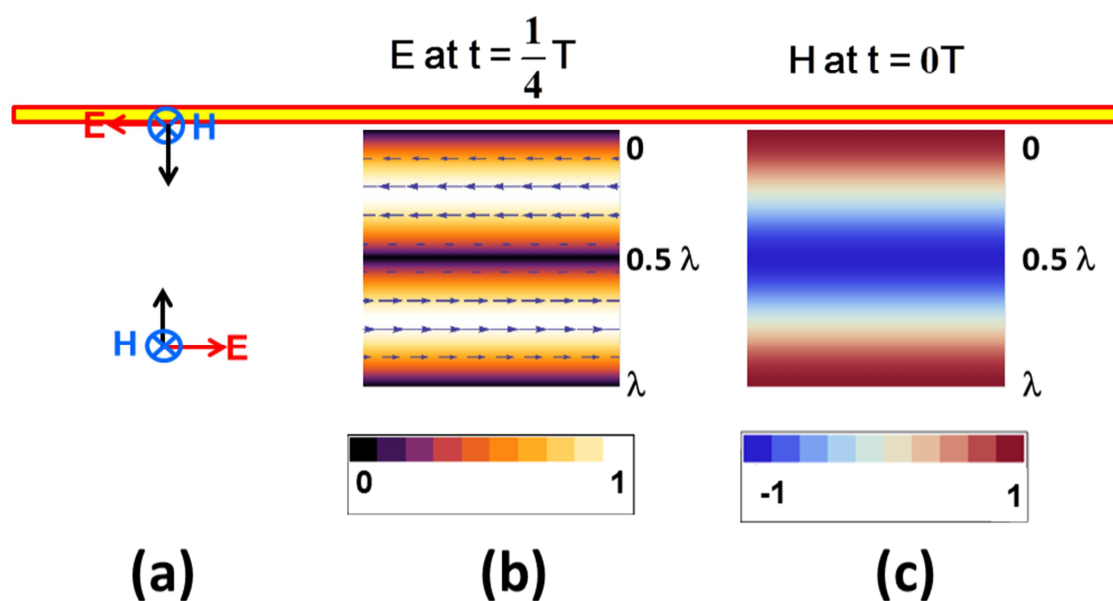


圖3.9 波長為 λ 的狀況下，光入射於完美導體的狀況，(a)為電場與磁場相對關係圖 (b)時間在1/4週期時，電場的分布狀況 (c)時間在0時，磁場的分布狀況。

回顧一下電磁學中，光入射於完美導體平面的狀況，如圖3.9所示，同樣會形成駐波，由邊界條件可以知道，在電場的節點位置會落在 0 、 0.5λ 以及 λ ，磁場的節點位置會落在 0.25λ 以及 0.75λ ，此外電場與磁場會有時間相位差90度，也就是差一個 i ，代表 $\text{Re}[\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*]$ 為零，相當

於呼應到駐波不傳遞且不損耗能量。回到有週期性狹縫的狀況，如圖3.10，當形成駐波時，除了有零階的反射之外，+1及-1階會提供 E_z 場，因此整體的效應相當於是駐波被轉了45度角，因此可以看到圖中電場會是往左上或是右下，因此同樣的效應也會反映在磁場上，呈現45度角方向的駐波，因此由完美導體表面的駐波特性，以及有狹縫後，其散射所提供+1及-1階，我們即可猜出場分布的狀況，因此對於電場與磁場的分布狀況是我們能夠預期的，故從圖3.8依然無法得到我們需要的資訊。

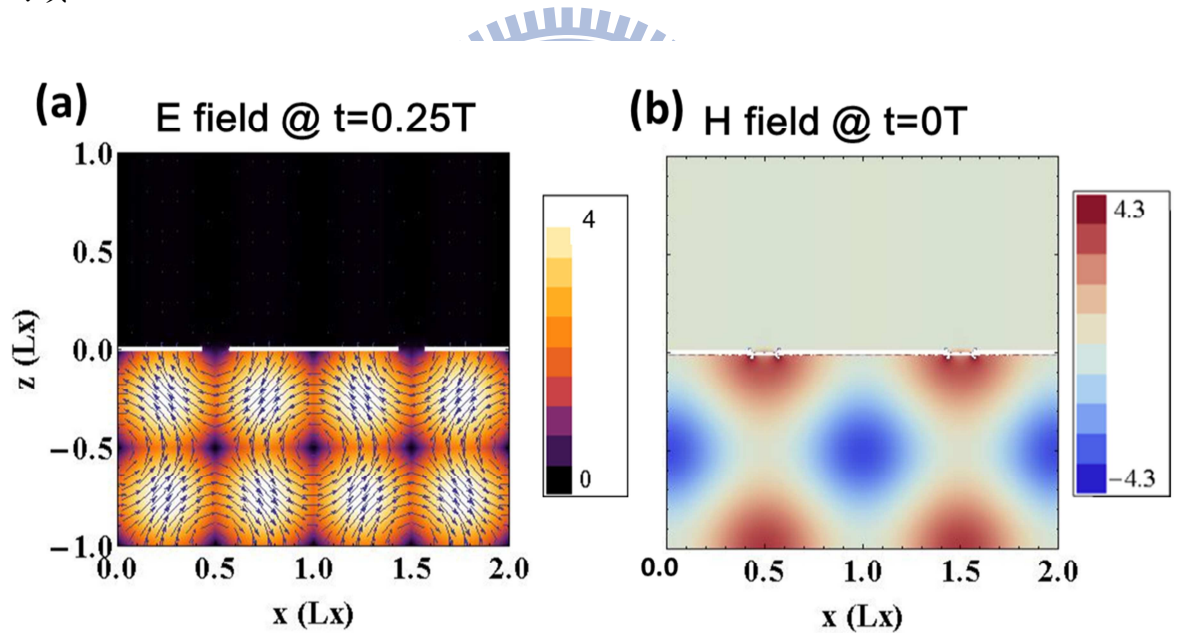


圖3.10 $\lambda=L_x$ ，寬度為 $a_x=0.15L_x$ ，厚度為 $L=0.01L_x$ ，P-波入射光，(a) 時間在1/4週期時，電場的分布狀況 (b) 時間在0時，磁場的分布狀況。

接下來，我們透過 E_z 在金屬表面分布的狀況，了解狹縫週期等於波長附近，表面電荷的分布狀況，如圖3.11(a)所示，取 $\lambda=0.9、1、1.1 L_x$ ，可發現當穿透率增加時，在狹縫兩端的 z 場也會跟著增加，代表入射波是透過感應(induce)狹縫兩側的電荷，形成電偶極(dipole)來穿過

狹縫，在 $\lambda=L_x$ ，駐波會使得在狹縫兩端的 z 場下降，改分配到金屬上方，因此會使得入射光無法穿透，而觀察圖3.11(b)，對於 $\lambda=1.1L_x$ ，則電場在狹縫兩側有密集的電力線，而對於 $\lambda=L_x$ 而言，電力線密集的位置會落在兩側金屬上方。

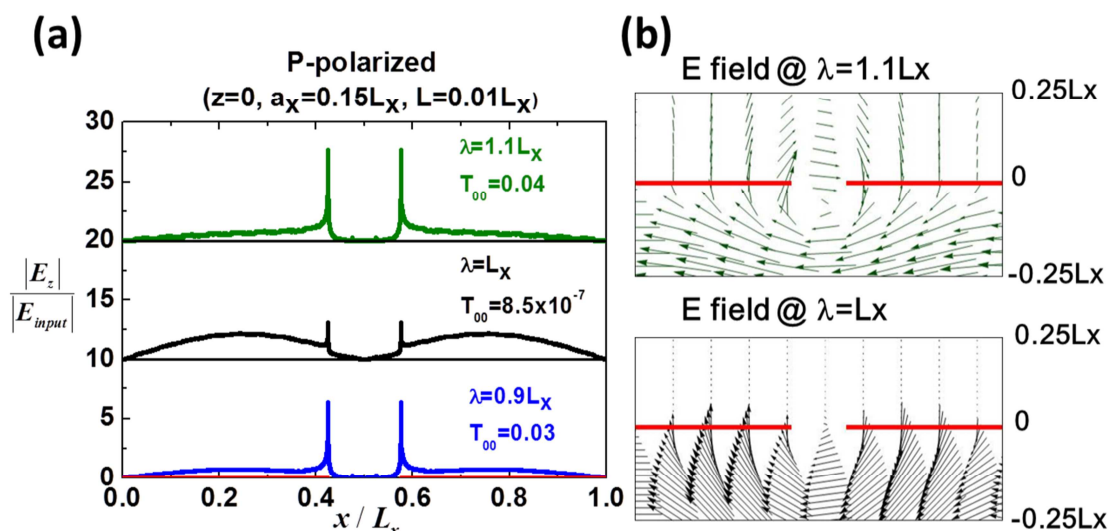


圖3.11 (a) $\lambda=0.9$ 、 1 、 $1.1 L_x$ ，表面電場 E_z 的分布狀況 (b) $\lambda=1$ 、 $1.1 L_x$ ，整體電場的分布狀況。

3.2.2 加入基板的穿透特性

接下來討論加上矽基板的影響，並與實驗做對照，如圖3.12，狹縫的週期為 $24 \mu\text{m}$ ，代表觀察的頻段範圍約在 $0.9 \sim 10 \text{ THz}$ ，分別取三個不同的狹縫大小來觀察趨勢變化，其中唯一的可調係數為基板的介電係數，而透過穿透谷值的位置，可得出為 11.2 ，與理論值 11.9 接近。

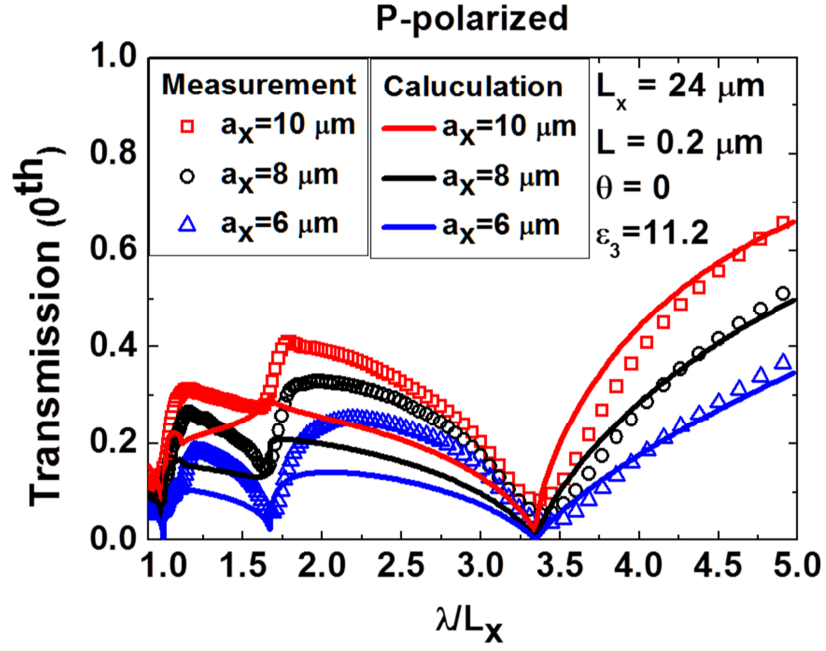


圖3.12 P-波入射， $L_x=24 \mu\text{m}$ ， $L=0.2 \mu\text{m}$ ， $a_x=6、8、10 \mu\text{m}$ ，基板材料為Si，實驗量測與計算結果的對照圖，其中可調參數為基板介電係數，萃取出值為11.2。

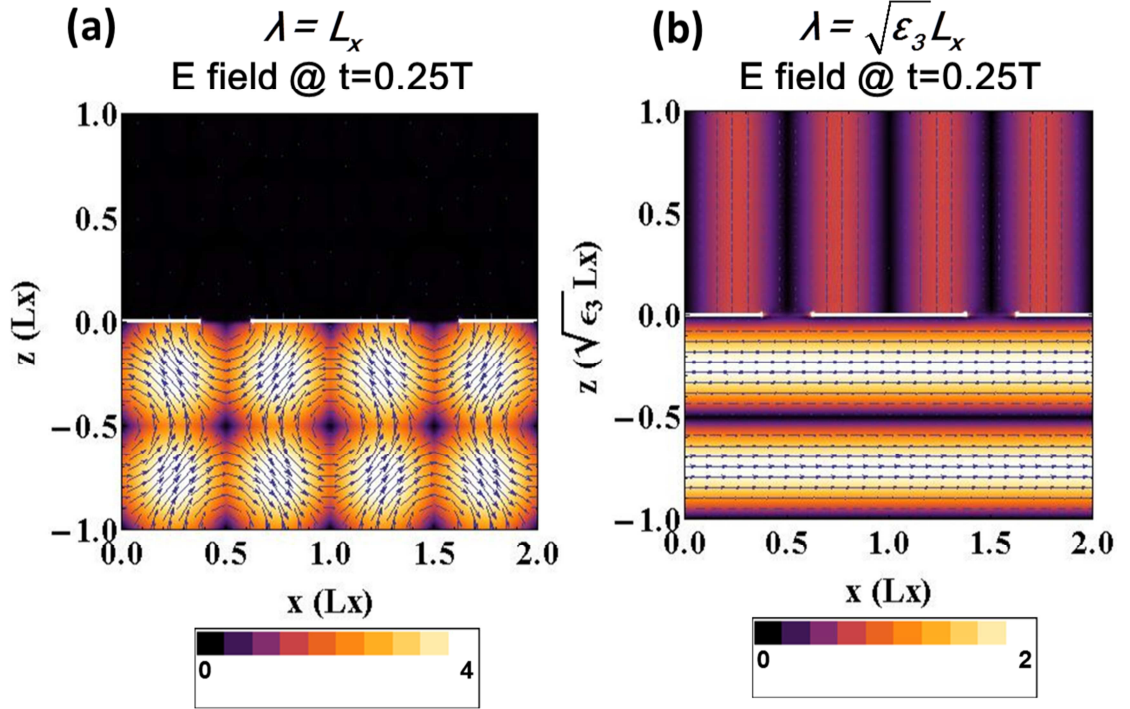


圖3.13 $L_x=24 \mu\text{m}$ ， $L=0.2 \mu\text{m}$ ， $a_x=6 \mu\text{m}$ ，P-波入射光，在(a) $\lambda=L_x$ (b) $\lambda=\sqrt{\epsilon_3} L_x$ 的電場分布圖。

而接下來在仔細觀察穿透頻譜，首先由2-2(b)，當加上基板後，則區域(一)及區域(三)形成駐波的波長分開了，區域(一)為 $\lambda=L_x$ 而區域

(三)為 $\lambda=\sqrt{\epsilon_3}L_x$ 。在 $\lambda=L_x$ 同樣有駐波造成的穿透谷值，與不加基板的狀況相同，而其場型圖也與圖3.10(a)一致。而在 $\lambda=\sqrt{\epsilon_3}L_x$ 同樣有穿透最低值出現，而這點對應到的是區域(三)基板形成駐波的條件，而其場型圖如圖3.13(b)所示，在區域(一)，入射及反射形成駐波，而週期由入射波波長所決定，而在區域(三)在x方向+1階及-1階形成駐波，而週期由狹縫週期所決定，因此透過加上基板，我們可以更進一步確定，駐波的產生會破壞P-波穿過狹縫的路徑，因此有穿透谷值，而在 $\lambda=\frac{\sqrt{\epsilon_3}}{2}L_x$ 同樣有一個穿透低點，此位置對應到區域(三)的+2及-2階形成駐波的條件。

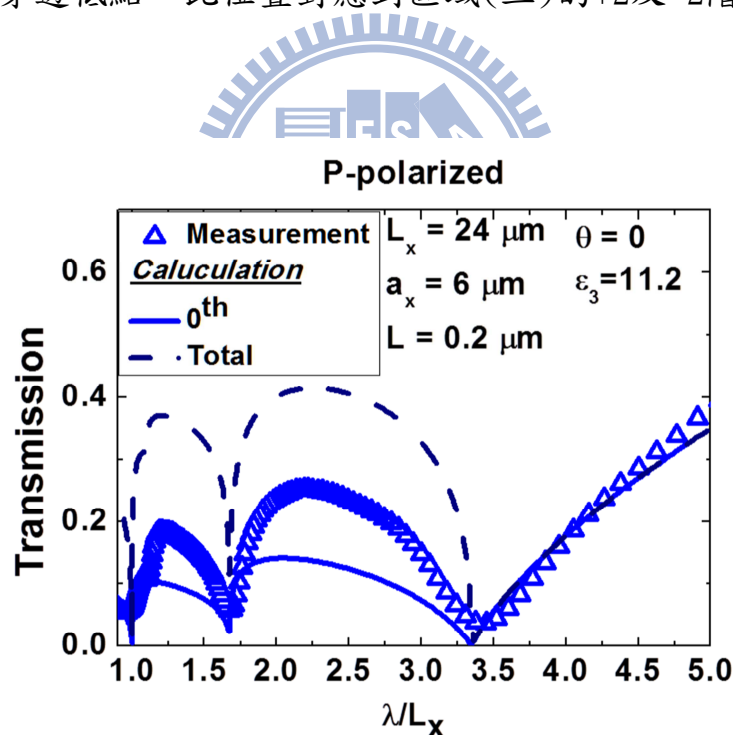


圖3.14 $L_x=24 \mu\text{m}$, $L=0.2 \mu\text{m}$, $a_x=6 \mu\text{m}$, P-波入射光，計算中考慮全部的散射波(total)以及單純的零階項(0th)與實驗數據間的比較。

實驗與理論部分有幾處不吻合的地方，在此說明，第一點，由圖3.14可看出，量測結果會介於零階(0th)與考慮全部散射波(total)的狀況，代表雖然量測有透過聚焦鏡使大部分收到的光為零階，但還是會有高

階項的光，因此只有在單純零階以及整體穿透值很低時，實驗會與計算完全一致。第二點，由於週期是有限的，因此穿透谷值並不會完全與計算預測的相同，而是為一個平緩的曲線。

3.3 S-波入射

3.3.1 不加基板的穿透特性

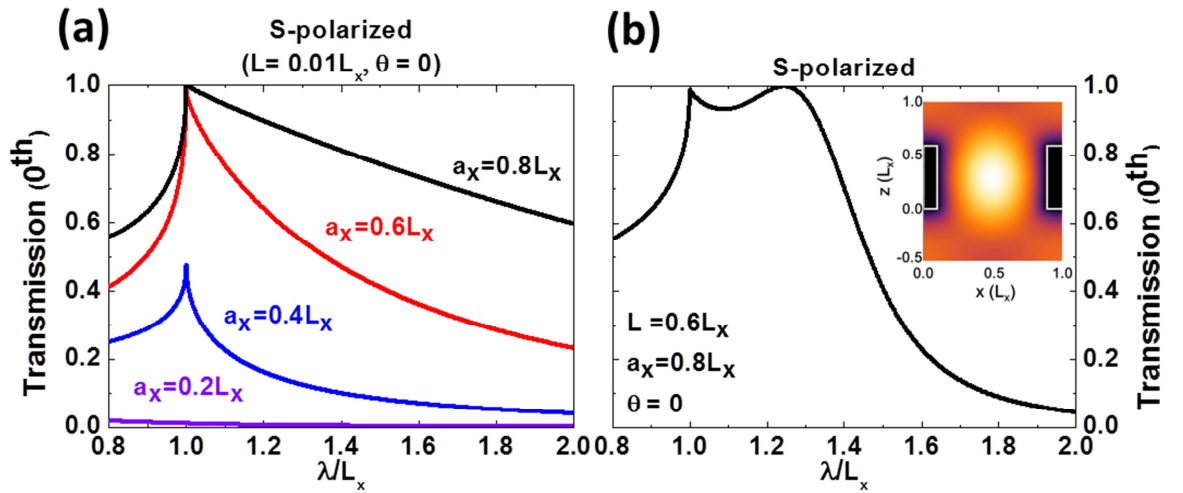


圖3.15 S-波的穿透頻譜，(a)固定厚度為 $L=0.01L_x$ ，改變寬度 $a_x=0.2\sim0.8L_x$ (b) $L=0.6L_x$ ， $a_x=0.8L_x$ ，圖中插圖為 $\lambda=1.2L_x$ 穿透峰值下 $|E_y|$ 的分佈。

由 3.1.2 可得知，對於 S-波而言，其最低階的模態有截止頻率，因此當波長遠大於狹縫時，入射波是無法通過的，如圖 3.15(a)所示，考慮 $L=0.01L_x$ 並討論垂直入射，則寬度越窄時，則整體穿透越低。而對於 S-波同樣只要調整得當，同樣會有 Fabry-Perot 共振，如圖 3.15(b)所示，圖中插圖為 E_y 場振幅的分佈，可觀察到場集中在狹縫中央，由於此時狹縫寬度與波長接近，因此會有大量的直接穿透，因此穿透峰值不明顯。而對於 Fabry-Perot 的共振特性我們會於下一章會在做定量上的討論，而在此我們要討論的是圖 3.15(a)中，在 $\lambda=L_x$ 時，其穿透

峰值的特性。

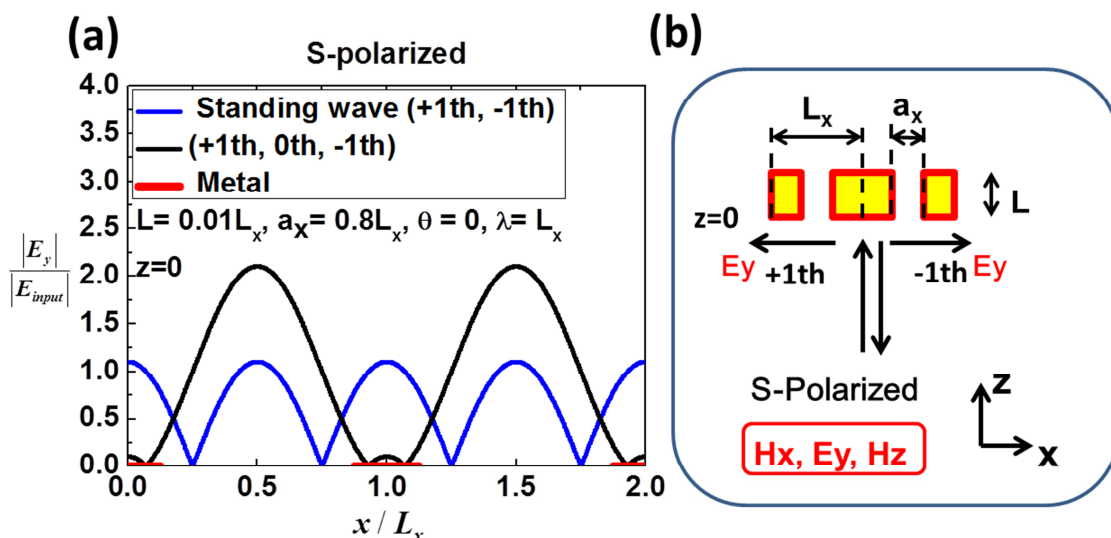


圖3.16 (a)寬度為 $a_x=0.8L_x$ ，厚度為 $L=0.01L_x$ ，當 $\lambda=L_x$ 時，駐波在 $z=0$ 的分布，(b)在 $\lambda=L_x$ 時，S-波入射所激發的+1及-1階散射波之間相對關係的示意圖。

由 P-波的討論，我們得知在 $\lambda=L_x$ 時，會產生駐波並使穿透下降，而為何在 S-波中反而是對應到穿透峰值？由圖 3.16 來說明，取 $a_x=0.8L_x$ 及厚度 $L=0.01L_x$ 並考慮垂直入射，此時只會有 H_x 、 E_y 及 H_z ，在此是利用 E_y 部分來說明，而由邊界條件得知，當 $\lambda=L_x$ ，+1 及-1 階形成的駐波會是由 E_y 所構成，圖 3.16(a)中的藍色實線為駐波的分布，而由於此時 0、+1 及-1 皆為 E_y ，故我們可以直接觀察振幅的分布來了解它們之間的干涉，如圖 3.16(a)中黑色實線，而當+1、-1 與 0 階進行干涉時，可看到振幅被重新分布，在金屬端的振幅下降，在空氣的位置振幅增加，透過能量重新分布達成穿透為 1 的效果。當波長小於週期時，駐波變為散射波，大於週期時，則化為消散波(Evanescence wave)，駐波特性都會消失，造成上述效應消失，導致穿透率下降，因此穿透

峰值只出現在 $\lambda=L_x$ 。而 P-波穿透峰值是透過共振的方式，因此會有線寬很小的穿透峰值，而 S-波的穿透峰值只是單純由干涉所產生，因此不會有勞倫茲函數(Lorentzian function)的形式。

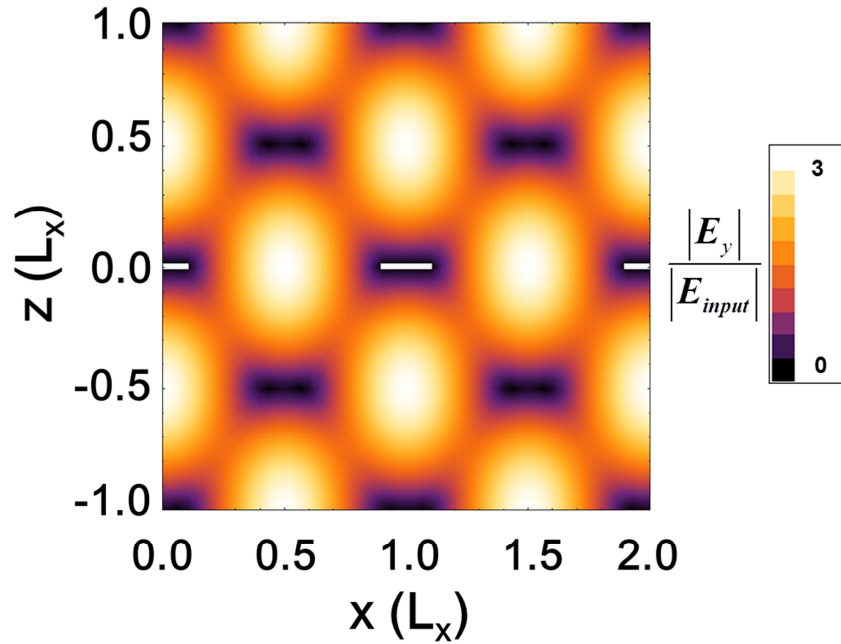


圖3.17 寬度為 $a_x=0.8L_x$ ，厚度為 $L=0.01L_x$ ，S-波入射光，當 $\lambda=L_x$ 的電場(E_y)分布圖。

而同樣可觀察場型圖，如圖 3.17 所示，往 x 方向週期性由駐波所提供且 k_z 為 0，代表往 z 方向無限延伸，而往 z 方向的週期性由入射波所提供，因此形成網狀對稱的振幅分布。

3.3.2 加入基板的穿透特性

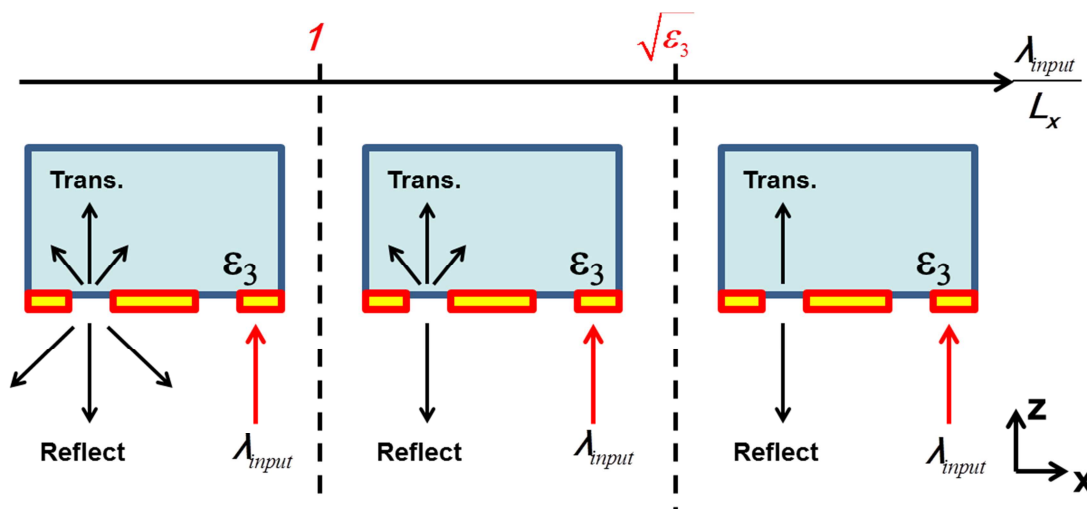


圖3.18 加上基板後，整體穿透特性可區分為三個區段 $\lambda < L_x$ 、 $L_x < \lambda < \sqrt{\epsilon_3} L_x$ 及 $\lambda > \sqrt{\epsilon_3} L_x$ ，圖中以箭號來表示該區段是否包含高階散射波。

在討論實驗數據前，首先我們先想像加入基板後，則穿透與反射會出現什麼變化，以圖3.18來說明，由2-2(b)，當加上基板後，穿透特性隨波長的變化可大致分為三個區域：第一， $\lambda < L_x$ ，區域(一)及區域(三)階除了零階之外，也包含高階散射項。第二， $L_x < \lambda < \sqrt{\epsilon_3} L_x$ ，區域(一)只剩零階，而區域(三)依然存在高階項，第三， $\lambda > \sqrt{\epsilon_3} L_x$ ，區域(一)及區域(三)皆只包含零階項(對於不加基板，結構為對稱，故只會有第一個與第三個狀況)。而我們有興趣的是，在交界處的狀態為何？先觀察圖3.19，與P-波相同取基板介電係數為11.2，則模擬與實驗結果為十分吻合，而接下來分別討論 $\lambda = L_x$ 及 $\lambda = \sqrt{\epsilon_3} L_x$ 的狀況。

在 $\lambda = L_x$ ，如圖3.20(a)，雖然區域(一)同樣有駐波特性，但此時區域(三)無法形成駐波，因此電場無法有效通過狹縫。並且由於區域(三)有高階散射項，故能量無法集中在零階，並且往長波長或短波長，差

異只在散射角度的不同，能量並不會分配至零階，故穿透頻譜上不會有出現峰值的結果。在 $\lambda=\sqrt{\epsilon_3}L_x$ ，如圖3.20(b)，此時區域(三)形成駐波，能量由高階項透過干涉集中到零階項，故出現穿透峰值，而不同於不加基板的狀況，其無法達到區域(一)及(三)同時形成駐波的形式，故穿透率的最大值會被開孔面積比以及基板的反射率所限制，故無法到達1的穿透率，而在1與3.4之間的峰值是來自於區域(三)+2及-2階形成的駐波。

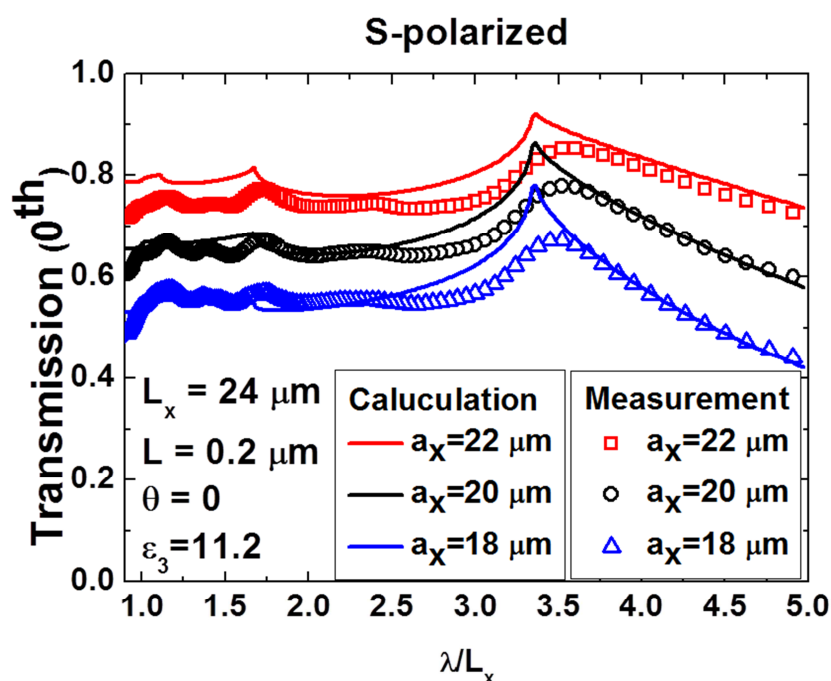


圖3.19 S-波入射， $L_x=24 \mu\text{m}$ ， $L=0.2 \mu\text{m}$ ， $a_x=18、20、22 \mu\text{m}$ ，基板材料為Si，實驗量測與計算結果的對照圖，其中可調參數為基板介電係數，萃取出值為11.2。

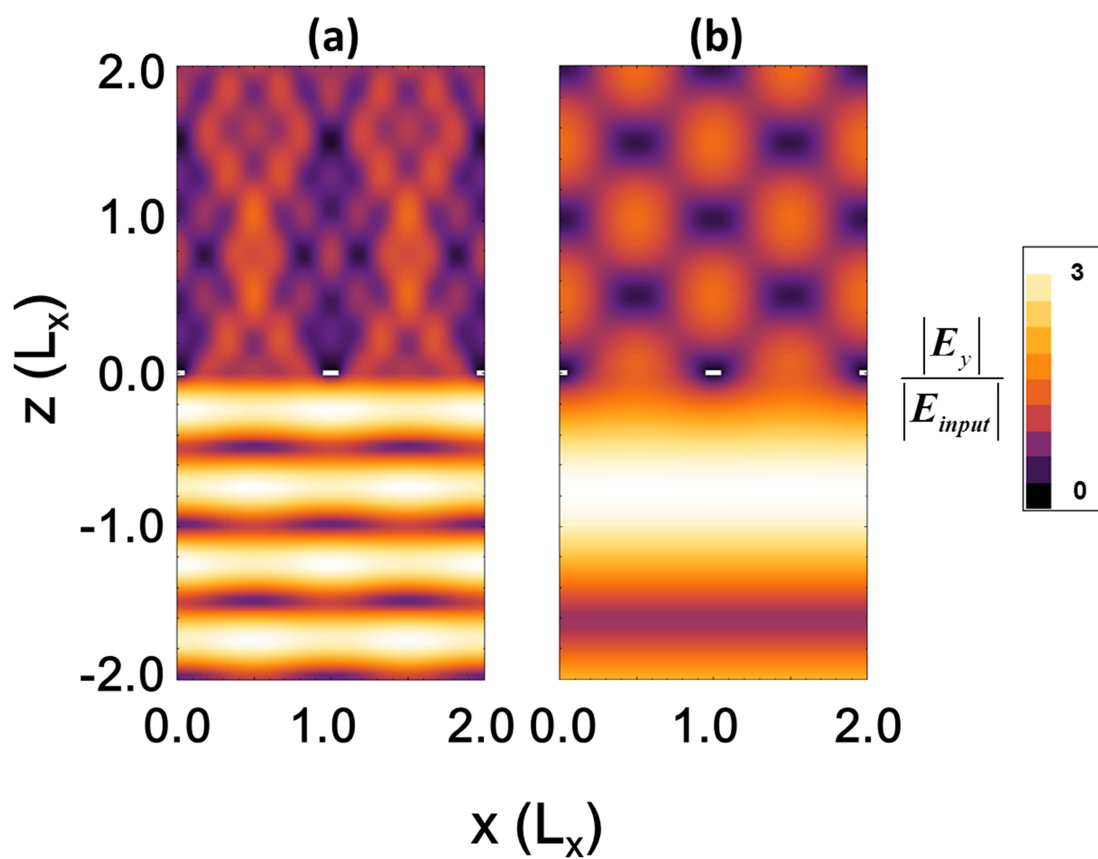


圖3.20 $L_x=24 \mu\text{m}$ ， $L=0.2 \mu\text{m}$ ， $a_x=22 \mu\text{m}$ ，S-波入射光，在(a) $\lambda=L_x$ (b) $\lambda=\sqrt{\epsilon_3}L_x$ 的電場分布圖。

第四章 應用

4.1 濾波器

上一章已詳細敘述P-波及S-波穿過狹縫的物理機制，而接下來我們的目的是希望透過Fabry-Perot模態來設計分別對應到P-波及S-波濾波器，並在定量上預測其穿透峰值的位置。首先我們再回顧兩種偏振光的基本特性，P-波有TEM模態，即使當狹縫寬度小於波長時，依然存在由TEM所構成的Fabry-Perot模態。而對於S-波而言，其最低模態有截止頻率，因此要在狹縫中有可傳遞的模態，則必須滿足 $2a_x > \lambda$ ，要使穿透峰值完全由零階所貢獻，則代表 $\lambda > L_x$ ，故對於S-波，要在零階有Fabry-Perot的共振峰值，則必須滿足 $a_x > (L_x/2)$ ，但因為狹縫寬度太寬，則直接穿透項比例高，因此穿透峰值並不明顯，如圖3.15(b)所示。因此我們會有兩個問題要解決，第一，如何使S-波在狹縫窄的狀況下依然存在可傳遞模態，第二，如何定量上預測這些穿透峰值的位置。

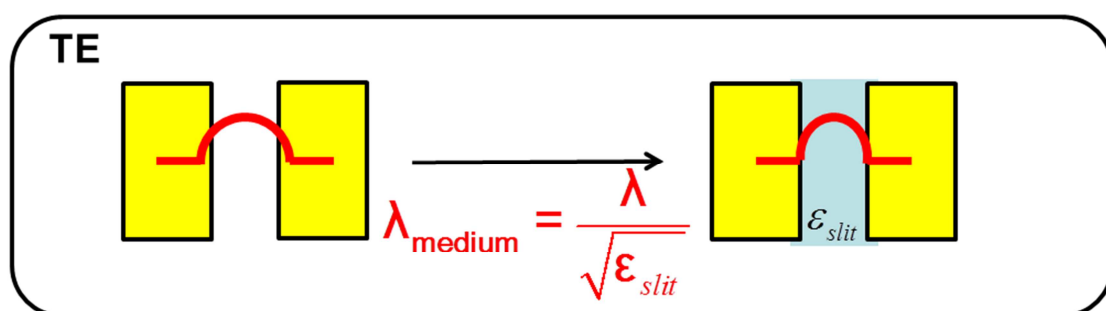


圖4.1 透過在狹縫中填入介電質，能夠使等效波長縮短，並能使狹縫中的截止波長增加。

而針對第一個問題，我們可利用圖4.1來說明，透過在介電質中，

光的等效波長縮短，因此我們可在狹縫中填入適當的介電質來解決問題一。而對於第二個問題，先假設光在狹縫中是不與外界有交互作用，因此在縱向及橫向要滿足駐波條件，因此要滿足下列方程式：

$$\left(\sqrt{\epsilon_{slit}} \frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a_x}\right)^2 \quad 4-1$$

對於P-波而言，n最小值為0，而S-波而言，最小值為1，因此兩者的共振波長可分別表示為：

$$\begin{cases} \text{P - polarized : } n=0 \rightarrow \frac{\lambda}{L_x} = \frac{2\sqrt{\epsilon_{slit}}}{m} \frac{L}{L_x} \\ \text{S - polarized : } n=1 \rightarrow \frac{\lambda}{L_x} = \frac{2\sqrt{\epsilon_{slit}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{L/L_x}\right)^2 + \left(\frac{1}{a_x/L_x}\right)^2}} \end{cases} \quad 4-2$$

而透過4.2，我們則可預測峰值的位置。

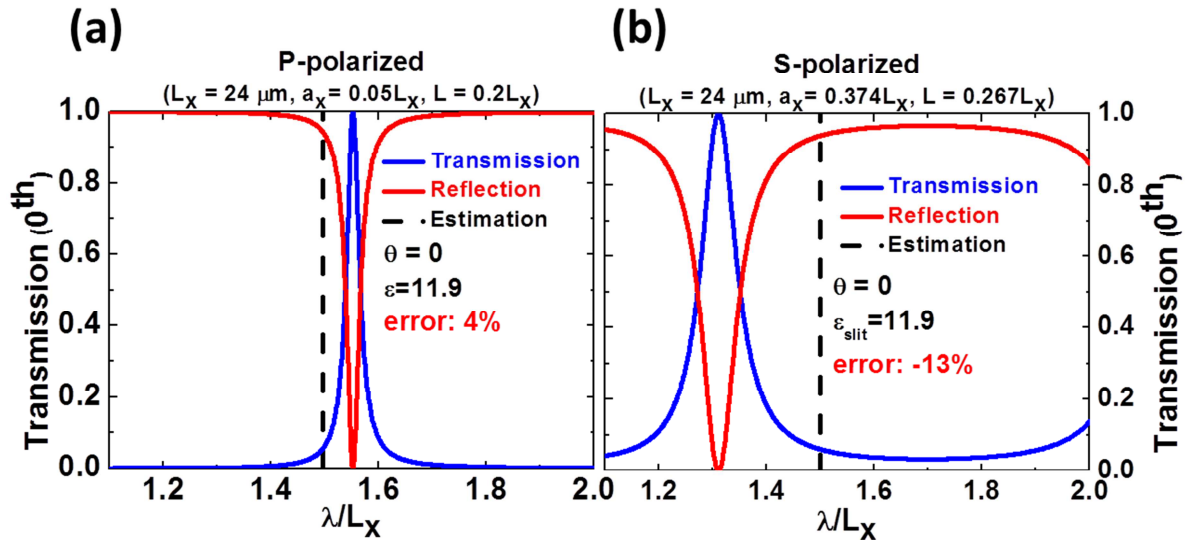


圖4.2 (a) P-波， $L_x=24 \mu\text{m}$ ， $a_x=0.05L_x$ ， $L=0.02L_x$ (b) S-波， $L_x=24 \mu\text{m}$ ， $a_x=0.374L_x$ ， $L=0.267L_x$ ，狹縫中介電係數為11.9，在垂直入射狀況下，方程式4-2估計值與實際運算計算結果做比較。

取週期為 $L_x=24 \mu\text{m}$ ，而 $\epsilon_{slit}=11.9$ ，假設目標為峰值落在 $\lambda=1.5L_x$ ，則

可得出圖4.2的結果，圖中虛線為4-2所預測的結果，可觀察到其與P-波及S-波的實際峰值是有差距的，其誤差原因為在與區域(一)及區域(三)的介面反射時，會有相位差的貢獻，因此實際要形成駐波的條件為：

$$2k_z L + 2\phi = 2n\pi \quad 4-3$$

代表走過一次路徑後，回到原點時，與初始的相位相同，由費涅耳方程式得知，在垂直入射的於介質時，反射是不會有相位差的，故相位差並非狹縫中的介電質與區域(一)及(三)的介電係數不連續所引起的，而是入射光激發了狹縫中有各種方向傳遞的波，其在介面反射所造成的相位差，換言之，此相位差的大小會與狹縫的寬度及厚度有關，但其關聯性在透過程式計算前是無法得知的，因此透過4-2，我們能對峰值位置做估計，實際再透過程式再做微調。

第五章 結論

本論文透過基底展開法分析金屬光柵的穿透頻譜及近場場型，而對於區域(二)的基底形式分別取完美導體假設下的波導模態以及考慮金屬損耗的週期性層狀結構，而透過這兩種基底並搭配基底展開法，我們詳細討論不加基板以及加上基板的非對稱結構，並細分為P-波及S-波入射，說明偏振與穿透頻譜間的關係。

對於P-波入射，我們首先討論此系統的共振穿透現象，並透過考慮不同入射角度以及金屬損耗，歸納出P-波穿透峰值有兩種截然不同的特性。另一方面並深入討論當金屬厚度遠小於光柵週期、入射光波長等於雷利波長時的穿透谷值的物理圖像，我們觀察到在此條件下，入射光會激發表面的駐波，並使表面電荷重新分布，造成穿透率下降的現象。而當加上基板後，正反兩側形成駐波的波長分開，因此會觀察到更多穿透谷值，而在實驗上也得到相對應的結果。

對於S-波入射，同樣關注在金屬厚度遠小於光柵週期的狀況，我們發現同樣在雷利波長，對於S-波反而是穿透峰值，而其原因是駐波與入射波形成建設性干涉，使能量重新分配到狹縫中，藉此達成穿透率為1的結果。而當加上基板後，由於正反兩側形成駐波的波長不同，因此雖然穿透峰值存在，但會受到基板以及開孔面積比的限制，使得最大穿透率無法到達1，並同樣在實驗結果上得到驗證。

而最後就應用層面而言，透過Fabry-Perot共振的概念以及在金屬狹縫中填入介電質，我們能夠定量上預測對於P-波及S-波穿透峰值的位置，而其誤差來源是在開孔處的反射所造成的相位差。



參考文獻

1. Eugene Hecht, **Optics**, 4th ed., Addison-Wesley, U.S. (2001).
2. J. Weiner, Reports on Progress in Physics **72**, 064401 (2009).
3. D. Crouse, and R. Solomon, Solid-State Electronics **49**, 1697 (2005).
4. D. Crouse *et al.*, Optics Express **14**, 2047 (2006).
5. L. Verslegers *et al.*, Nano Letters **9**, 235 (2009).
6. S. Collin *et al.*, Physical Review Letters **104**, 027401 (2010).
7. R. Haidar *et al.*, Applied Physics Letters **96**, 221104 (2010).
8. T. W. Ebbesen *et al.*, Nature **391**, 667 (1998).
9. F. I. Baida, and D. Van Labeke, Optics Communications **209**, 17 (2002).
10. L. F. Li, Journal of the Optical Society of America a-Optics Image Science and Vision **14**, 2758 (1997).
11. L. Martin-Moreno *et al.*, Physical Review Letters **86**, 1114 (2001).
12. J. A. Porto, F. J. Garcia-Vidal, and J. B. Pendry, Physical Review Letters **83**, 2845 (1999).
13. S. Collin *et al.*, Physical Review B **63**, 033107 (2001).
14. S. Collin *et al.*, Journal of Optics a-Pure and Applied Optics **4**, S154 (2002).
15. F. J. Garcia-Vidal, and L. Martin-Moreno, Physical Review B **66**, 155412 (2002).
16. M. M. J. Treacy, Physical Review B **66**, 195105 (2002).
17. D. Crouse, and P. Keshavareddy, Optics Express **13**, 7760 (2005).
18. D. Crouse, and P. Keshavareddy, Optics Express **15**, 1415 (2007).
19. E. Moreno, L. Martin-Moreno, and F. J. Garcia-Vidal, Journal of Optics a-Pure and Applied Optics **8**, S94 (2006).
20. A. I. Fernandez-Dominguez, F. J. Garcia-Vidal, and L. Martin-Moreno, Physical Review B **76**, 235430 (2007).
21. Y. H. Lu *et al.*, Applied Physics Letters **93**, 061102 (2008).
22. Q. Bai *et al.*, Applied Physics B-Lasers and Optics **98**, 681 (2010).
23. X. R. Huang, and R. W. Peng, Journal of the Optical Society of America a-Optics Image Science and Vision **27**, 718 (2010).
24. F. J. Garcia-Vidal *et al.*, Reviews of Modern Physics **82**, 729 (2010).
25. A. Hessel, and A. A. Oliner, Appl. Opt. **4**, 1275 (1965).
26. Q. Cao, and P. Lalanne, Physical Review Letters **88**, 057403 (2002).
27. J. M. Steele *et al.*, Physical Review B **68**, 205103 (2003).
28. P. Lalanne *et al.*, Physical Review B **68**, 125404 (2003).
29. M. Sarrazin, J. P. Vigneron, and J. M. Vigoureux, Physical Review B **67**,

- 085415 (2003).
- 30.Y. Xie *et al.*, Optics Express **14**, 6400 (2006).
- 31.J. Weiner, and F. D. Nunes, Optics Express **16**, 21256 (2008).
- 32.Hong-Wen Hsieh, “Study of Extraordinary Optical Transmission :
Theory and Application”, NCTU, master thesis in electronic engineering
department (201007).
- 33.Marcuvitz, N., **Waveguide Handbook**, McGraw-Hill, U.S. (1951).
- 34.P. Sheng, R. S. Stepleman, and P. N. Sanda, Physical Review B **26**, 2907
(1982).
- 35.Chung -Chun Sun, “Implementation of Terahertz Phase Retarders on
Metallic Films Perforated with Asymmetric Cross Shaped Holes”,
NCTU, master thesis in electronic engineering department (201009).
- 36.U. Fano, Physical Review **124**, 1866 (1961).
- 37.C. Genet, M. P. van Exter, and J. P. Woerdman, Optics Communications
225, 331 (2003).



自傳

姓名：洪唯倫 (Wei-Lun Hung)

性別：男

籍貫：台灣省台南縣

出生年月日：民國74年11月8日

學歷：交通大學電子物理系 (93.9-97.6)

交通大學電子研究所碩士班 (97.9-100.6)

論文題目：金屬光柵在不同偏振下穿透機制之研究。

Research on transmission mechanism of metallic
gratings at different polarizations.

