

第一章 概論

1.1 實驗現象描述

考慮一層金屬上有週期孔洞結構(如圖 1.1)，當電磁波在穿透此結構時，某些特殊頻率的電磁波會有特別高的穿透率。值得一提的是這些特殊頻率的電磁波在孔洞中是以指數遞減的方式傳播(cut-off)，但仍具有高穿透率。這樣的現象被稱作異常穿透(Extraordinary Optical Transmission, EOT)，在 1998 年由 Ebbesen 研究群發現[1]。異常穿透現象無法用粒子光學去解釋，以粒子光學的角度而言，金屬週期孔洞結構的穿透率(穿透率定義為透射光能量除以入射光能量)要等於開孔區域的面積比例，然而在某些頻率卻有高於此面積比例的穿透率。如圖 1.2 所示，在頻率接近 120cm^{-1} 時，穿透率會大於開孔區域面積比例(紅虛線)。1942 年 Bethe 在一些簡單的假設條件下用馬克斯威波動方程分析了單一金屬洞的穿透特性[2]，若電磁波在孔洞中是以指數遞減的方式傳播，則穿透率是非常低的；其後在 1987 年 Roberts 使用了更精確的計算[3]，也得到相同的性質。若我們單純的引入 Bethe 與 Roberts 對於單一金屬洞的結果，試圖去解釋週期金屬結構的穿透現象，也只能推論出非常低的穿透率。以上的敘述可知，在 1998 年以前的理論，不論是粒子光學或 Bethe 的波動計算，都無法解釋異常穿透的現象；隨之有許多團隊針對此現象進行了不少的研究，到目前已

有許多針對異常穿透現象的計算與分析[4-7]。

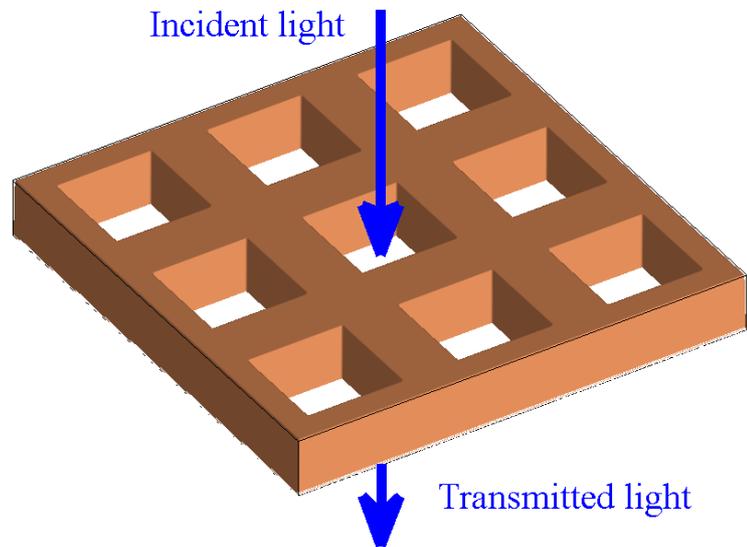


圖 1.1 金屬週期孔洞結構圖

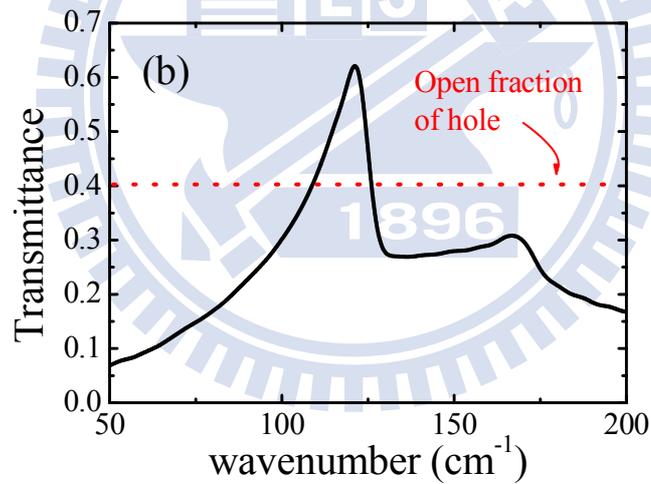


圖 1.2 異常穿透的穿透頻譜。紅虛線是此結構的開孔區域面積比例，頻率為 120cm^{-1} 的電磁波具有高於此面積比例的穿透率，也就是說頻率為 120cm^{-1} 的電磁波發生了異常穿透的現象。

1.2 表面態共振

費諾共振(Fano Resonance)是目前比較公認的異常穿透的物理圖象[8-14]。費諾共振是一個波動干涉的物理現象：電磁波在通過金屬

週期孔洞結構時可分成兩個穿透路徑，一個是直接穿隧(direct tunneling)，另一個是共振穿透(resonant transmission)，這兩個路徑的波會互相干涉而產生最後的穿透頻譜。直接穿隧是指電磁波藉由穿隧的方式去通過個別的金屬孔洞；共振穿透是指電磁波激發了此週期孔洞結構的某一個共振態，藉由此共振態去通過週期孔洞。此機制的示意圖見圖 1.3。

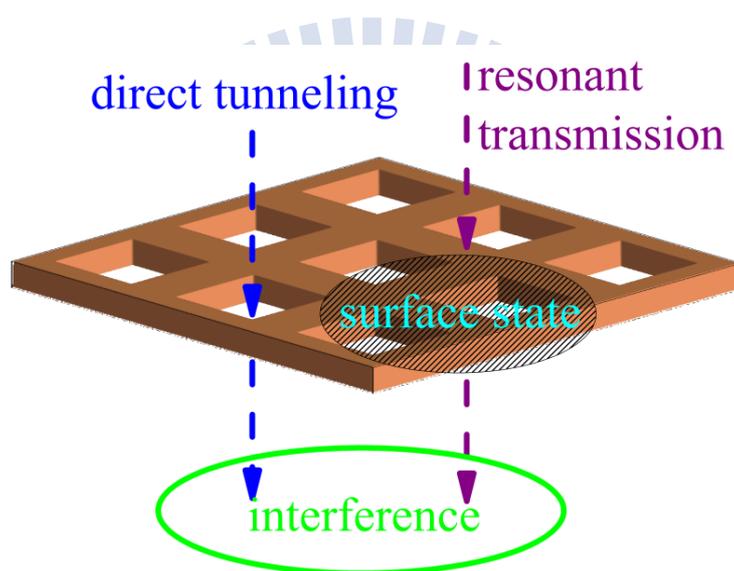


圖 1.3 費諾共振的示意圖。入射光可以分成兩條路徑去通過金屬孔洞結構，一條是直接穿隧，另一條是共振穿透。這兩條路徑的電磁波會互相干涉而造成最後的穿透結果。

金屬週期孔洞結構的共振態是什麼呢？一片完整的金屬兩側與空氣的交界面具有表面電漿子(surface plasmon polaritons, SPP's)，當此金屬被挖有週期孔洞時，週期結構會對此表面電漿子產生修正，這被修正之後的表面電漿子我們稱之為表面態(surface state)，此表面態可被入射電磁波激發，進而再發射出電磁波[5]。完美金屬不具有表

面電漿子，但在一些理論的證實下，完美金屬在週期結構的幫助之下會產生一種叫類表面電漿子(sproof surface plasmon)的表面態[15-18]。所以在兆赫波波段，即使金屬沒有表面電漿子，仍然可觀察到異常穿透的現象。

一個十分有趣的現象是，表面態的頻率以及色散關係(dispersion relation)會受到週期結構中孔洞的幾何形狀而有改變[19-27]。以長方形孔洞的例子而言，長方形孔洞的異常穿透頻譜會因為長方形的長寬比不同而有所不同[19, 21]，這是因為不同長方形的幾何形狀改變了表面態的色散關係[27]，進而影響異常穿透的特性。對於這些幾何形狀是如何影響表面態的特性，非常值得深入的研究與探討。

1.3 本研究目的

本研究使用了兩種計算方法去分析金屬週期孔洞結構的異常穿透現象。第一種方法為基底展開法，使用了平面波基底去展開自由空間的電磁波，而金屬孔洞內的電磁波則使用波導模態基底(waveguide mode)去展開。Martin-Moreno 和 Garcia-Vidal 首先用此方法分析了異常穿透的性質[5]，然而在他們當時的論文中礙於篇幅並沒有詳細的計算式子，其後他們給了一篇長篇的文章介紹計算過程，但是該計算式只使用了最低階的波導模態(fundamental waveguide mode)去展開金屬孔洞內的電磁波[18]，精確度略嫌不足。本研究給出了一個完整

的計算式，考慮了所有的波導模態，可以更精確地分析異常穿透的性質。基底展開法中使用的波導模態基底是建立在完美金屬的假設之下，而為了考慮非完美金屬，我們使用了第二種方法去分析問題。第二種方法為傅立葉模型法(Fourier Modal Method, FMM)，在 1997 年李立峰教授提出了一個改良版本的傅立葉模型法[28]，大大改進的傅立葉模型法收斂特性，並解決了傳統傅立葉模型法遇到金屬結構容易發散的問題，本研究使用李立峰教授的新傅立葉模型法先去解出二維週期金屬洞的本徵態(eigenstate)，再使用這些本徵態當基底去展開金屬洞區域的電磁波。

當計算工具建立完成後，我們將分析各種異常穿透結構的特性，諸如正方形週期孔洞、長方形週期孔洞、十字架週期孔洞的穿透特性。最後我們提出了一些金屬週期孔洞結構可能的應用，以期在光電元件的發展提供一個新的參考。

第二章 計算方法

2.1 基底展開法

這裡首先介紹基底展開法的計算方式。我們所計算的結構是由長方形孔洞以長方形的週期排列而成，詳見圖 2.1。這裡還考慮了金屬層下方有基板的情況。我們使用了平面波為基底去展開區域(一)以及區域(三)的電磁波；而在區域(二)的孔洞內的電磁波我們則用長方形波導的波導模態去展開[29]。

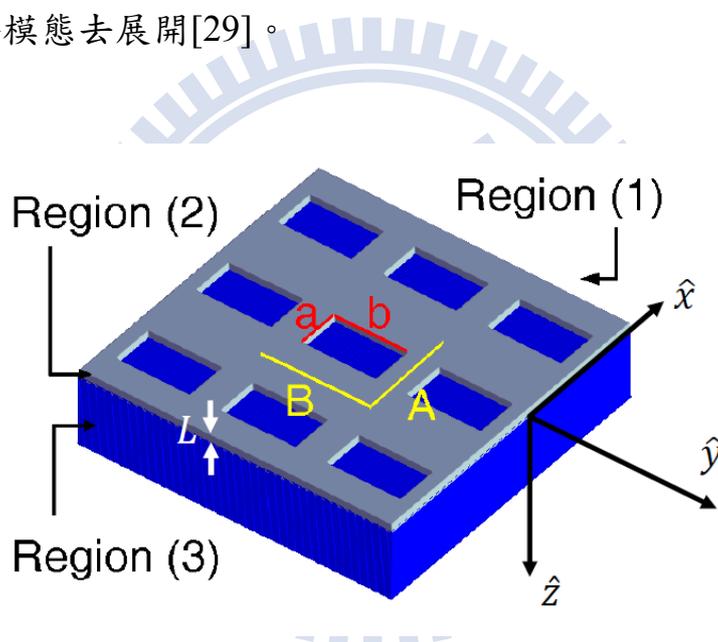


圖 2.1 金屬週期孔洞示意圖。區域(一)是空氣層；區域(二)是金屬層，金屬上開有週期孔洞；區域(三)是基板層。入射光是來自區域(一)。A與B是此結構的週期長度， a 與 b 則是長方形孔洞的長與寬。金屬層的厚度是 L 。

由於此計算的結構具有二維的週期性，故平面波基底必須滿足布洛赫型式(Bloch Form)，也就是此平面波基底在 xy 平面上的波向量(wave vector)只能是入射波的平行波向量(平行波向量指的就是落在 xy 平面上的波向量)加上一個反晶格向量(reciprocal lattice vector)。平

面波具有兩個偏振方向，這裡採用最一般的定義方式，定義電場垂直於入射面(入射面為 xy 平面法向量與入射方向所張開的平面)的平面波為 S -波，可寫為 $\mathbf{E}_{S,g}^{(\nu)}(\mathbf{r}_{\parallel})\exp(\pm ik_{z,g}^{(\nu)}z)$ 。 $\exp(\pm ik_{z,g}^{(\nu)}z)$ 的正負號代表了此波往正 z 或負 z 方向傳播。其中的 $\mathbf{E}_{S,g}^{(\nu)}(\mathbf{r}_{\parallel})$ 可寫成：

$$\mathbf{E}_{S,g}^{(\nu)}(\mathbf{r}_{\parallel}) = \frac{1}{\sqrt{AB}} \frac{1}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \begin{pmatrix} k_y \\ -k_x \\ 0 \end{pmatrix} \exp[i(k_x x + k_y y)] \quad 2-1$$

上式中的 $k_x = k_{x0} + (2\pi m_g/A)$ 和 $k_y = k_{y0} + (2\pi n_g/A)$ 分別是 x 與 y 方向的波向量。 k_{x0} 與 k_{y0} 是入射波的平行波向量。 m_g 與 n_g 是整數，而 $g=1,2,\dots,N$ 是描述平面波基底的參數，每一個 g 對應有一組 (m_g, n_g) 值。 N 是我們所使用的 S -波基底的總數。這裡我們特別定義 $g=1$ 對應到入射波以及第零階的散射波，也就是 $(m_1, n_1) = (0,0)$ 的情形。 z 方向的波向量為 $k_{z,g}^{(\nu)} = \sqrt{\varepsilon_v (\omega/c)^2 - k_x^2 - k_y^2}$ ， ω 是光的頻率， c 是光的真空速度。 ν 分別可帶入 1 或 3，是用以描述此基底屬於區域(一)或者區域(三)。電場方向與 S -波垂直的平面波，我們定義為 P -波 $\mathbf{E}_{P,g}^{(\nu)}(\mathbf{r}_{\parallel})\exp(\pm ik_{z,g}^{(\nu)}z)$ ，其中：

$$\mathbf{E}_{P,g}^{(\nu)}(\mathbf{r}_{\parallel}) = \frac{c}{\omega\sqrt{\varepsilon_v}} \frac{1}{\sqrt{AB}} \frac{1}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \begin{pmatrix} k_{z,g}^{(\nu)} k_x \\ k_{z,g}^{(\nu)} k_y \\ -(k_x^2 + k_y^2) \end{pmatrix} \exp[i(k_x x + k_y y)] \quad 2-2$$

$\mathbf{E}_{S,g}^{(\nu)}(\mathbf{r}_{\parallel})$ 與 $\mathbf{E}_{P,g}^{(\nu)}(\mathbf{r}_{\parallel})$ 滿足下列的正交關係：

$$\int_0^A dx \int_0^B dy (\mathbf{E}_{\sigma',g'}^{(\nu)}(x,y))^* \cdot \mathbf{E}_{\sigma,g}^{(\nu)}(x,y) = \delta_{\sigma',\sigma} \delta_{g',g} \quad 2-3$$

這裡的 σ' 和 σ 是用以標示 S -波以及 P -波。 δ 是指克羅內克函數

(Kronecker delta function)。

對於正向入射的電磁波而言，我們是如此定義的：取 $k_{x,0} = 0$ 和 $k_{y,0} = \Delta \rightarrow 0$ 。故零階的 S -波以及 P -波將變成 $\mathbf{E}_{S,1}^{(v)}(\mathbf{r}_{\parallel})\exp(ik_{z,1}^{(v)}z)$ 和 $\mathbf{E}_{P,1}^{(v)}(\mathbf{r}_{\parallel})\exp(ik_{z,1}^{(v)}z)$ ，其中 $k_{z,1}^{(v)} = \sqrt{\epsilon_v}\omega/c$ 、 $\mathbf{E}_{S,1}^{(v)}(x,y) = (AB)^{-\frac{1}{2}}(1,0,0)^T$ 、 $\mathbf{E}_{P,1}^{(v)}(x,y) = (AB)^{-\frac{1}{2}}(0,1,0)^T$ 。

由於我們考慮的系統沒有空間電荷以及空間電流(source free)，馬克斯威方程中的兩條散度方程式可以寫成 $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ 和 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ 。故我們可以只考慮 xy 方向的電磁場即可，而 z 方向的電磁場則由馬克斯威方程直接被決定。為了使整個計算式較為簡單，我們定義以下符號：

$$\mathbf{F}_{S,g}(x,y) \triangleq \frac{1}{\sqrt{AB}} \frac{1}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \begin{pmatrix} k_y \\ -k_x \end{pmatrix} \exp[i(k_x x + k_y y)] \quad 2-4a$$

$$\mathbf{F}_{P,g}(x,y) \triangleq \frac{1}{\sqrt{AB}} \frac{1}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix} \exp[i(k_x x + k_y y)] \quad 2-4b$$

因此之前(2-1)與(2-2)式的平行分量可寫成：

$$\mathbf{E}_{S,g,\parallel}^{(v)}(\mathbf{r}_{\parallel}) = \mathbf{F}_{S,g}(x,y) \quad 2-5a$$

$$\mathbf{E}_{P,g,\parallel}^{(v)}(\mathbf{r}_{\parallel}) = \frac{ck_{z,g}^{(v)}}{\omega\sqrt{\epsilon_v}} \mathbf{F}_{P,g}(x,y) \quad 2-5b$$

對於平行方向的磁場 \mathbf{H}_{\parallel} 而言，我們針對 $\hat{z} \times \mathbf{H}_{\parallel}$ 做計算而非 \mathbf{H}_{\parallel} ，如此一來 S -波與 P -波的磁場有以下簡單的表示：

$$\hat{z} \times \mathbf{H}_{S,g,\parallel}^{(v)}(\mathbf{r}_{\parallel}) = \pm \left[-\frac{ck_{z,g}^{(v)}}{\omega Z_0} \mathbf{F}_{S,g}(x,y) \right] \quad 2-6a$$

$$\hat{z} \times \mathbf{H}_{p,g,\parallel}^{(\nu)}(\mathbf{r}_{\parallel}) = \pm \left[-\frac{\sqrt{\epsilon_{\nu}}}{Z_0} \mathbf{F}_{p,g}(x, y) \right] \quad 2-6b$$

其中 Z_0 是指真空中的阻抗(impedance)。「+」號對應到正 z 傳播項 $\exp(ik_{z,g}^{(\nu)}z)$ ，而「-」號對應到負 z 傳播項 $\exp(-ik_{z,g}^{(\nu)}z)$ 。

介紹完我們所使用的平面波基底之後，我們要把電磁波用這些基底來展開。區域(一)和區域(三)的電場可寫成：

$$\mathbf{E}_{\parallel}^{(1)}(\mathbf{r}) = \sum_{\sigma=s,p} \sum_g \mathbf{E}_{\sigma,g,\parallel}^{(1)}(\mathbf{r}_{\parallel}) \left[a_{\sigma,g}^{(1)} \exp(ik_{z,g}^{(1)}z) + b_{\sigma,g}^{(1)} \exp(-ik_{z,g}^{(1)}z) \right] \quad 2-7a$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\parallel}^{(3)}(\mathbf{r}) \\ = \sum_{\sigma=s,p} \sum_g \mathbf{E}_{\sigma,g,\parallel}^{(3)}(\mathbf{r}_{\parallel}) \left[a_{\sigma,g}^{(3)} \exp(ik_{z,g}^{(3)}(z-L)) + b_{\sigma,g}^{(3)} \exp(ik_{z,g}^{(3)}(L-z)) \right] \end{aligned} \quad 2-7b$$

這裡的 $a_{\sigma,g}^{(1)}$ 和 $a_{\sigma,g}^{(3)}$ 是往正 z 方向傳播的平面波的展開係數；而 $b_{\sigma,g}^{(1)}$ 和 $b_{\sigma,g}^{(3)}$ 則是往負 z 方向傳播的平面波的展開係數。 $z=0$ 的位置設在區域(一)(二)交界處， $z=L$ 的位置則是在區域(二)(三)交界處。磁場也有類似的式子：

$$\hat{z} \times \mathbf{H}_{\parallel}^{(1)}(\mathbf{r}) = \sum_{\sigma=s,p} \sum_g \hat{z} \times \mathbf{H}_{\sigma,g,\parallel}^{(1)}(\mathbf{r}_{\parallel}) \left[a_{\sigma,g}^{(1)} \exp(ik_{z,g}^{(1)}z) - b_{\sigma,g}^{(1)} \exp(-ik_{z,g}^{(1)}z) \right] \quad 2-8a$$

$$\begin{aligned} \hat{z} \times \mathbf{H}_{\parallel}^{(3)}(\mathbf{r}) \\ = \sum_{\sigma=s,p} \sum_g \hat{z} \times \mathbf{H}_{\sigma,g,\parallel}^{(3)}(\mathbf{r}_{\parallel}) \left[a_{\sigma,g}^{(3)} \exp(ik_{z,g}^{(3)}(z-L)) - b_{\sigma,g}^{(3)} \exp(ik_{z,g}^{(3)}(L-z)) \right] \end{aligned} \quad 2-8b$$

接下來介紹區域(二)的展開基底。在完美金屬的假設之下，我們使用了 Jackson 電磁學教科書之中長方形波導模態[29]當作基底，其電場可以寫成：

$$\mathbf{E}_{TM,j,\parallel}^{(2)}(x,y) = \frac{1}{\gamma_j \sqrt{ab}} \begin{pmatrix} \frac{2\pi m_j}{a} \cos\left(\frac{\pi m_j x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n_j y}{b}\right) \\ \frac{2\pi n_j}{b} \sin\left(\frac{\pi m_j x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n_j y}{b}\right) \end{pmatrix} \quad 2-9a$$

$$\mathbf{E}_{TE,i,\parallel}^{(2)}(x,y) = \frac{1}{\gamma_i \sqrt{ab}} \begin{pmatrix} \frac{-2\pi n_i}{b} \cos\left(\frac{\pi m_i x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n_i y}{b}\right) \\ \frac{2\pi m_i}{a} \sin\left(\frac{\pi m_i x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n_i y}{b}\right) \end{pmatrix} \quad 2-9b$$

磁場則可以寫成：

$$\hat{z} \times \mathbf{H}_{TM,j,\parallel}^{(2)}(x,y) = \pm \left[-\frac{\omega \epsilon_2}{ck_{z,j}^{(2)} Z_0} \mathbf{E}_{TM,j,\parallel}^{(2)}(x,y) \right] \quad 2-10a$$

$$\hat{z} \times \mathbf{H}_{TE,i,\parallel}^{(2)}(x,y) = \pm \left[-\frac{ck_{z,i}^{(2)}}{\omega Z_0} \mathbf{E}_{TE,i,\parallel}^{(2)}(x,y) \right] \quad 2-10b$$

其中 $i=1,2,\dots,I$ 和 $j=1,2,\dots,J$ 是分別去 TE 和 TM 描述波導模式的參數。 '+' 號對應到正 z 傳播項，而 '-' 號對應到負 z 傳播項。 m_i 與 n_i 是非負整數； m_j 與 n_j 是正整數。 $\gamma_i = \pi \sqrt{(m_i/a)^2 + (n_i/b)^2}$ 與 $\gamma_j = \pi \sqrt{(m_j/a)^2 + (n_j/b)^2}$ 。 $k_{z,i}^{(2)} = \sqrt{\epsilon_2 (\omega/c)^2 - (\gamma_i)^2}$ 與 $k_{z,j}^{(2)} = \sqrt{\epsilon_2 (\omega/c)^2 - (\gamma_j)^2}$ 分別是 TE 和 TM 的傳播常數(propagation constant)。若 m_i 與 n_i 其中之一為零，則該波導模式要乘上 $1/\sqrt{2}$ 。如此一來，區域(二)的電磁場可寫為：

$$\mathbf{E}_{\parallel}^{(2)}(\mathbf{r}) = \sum_i \mathbf{E}_{TE,i,\parallel}^{(2)} \left[a_{TE,i}^{(2)} \exp(ik_{z,i}^{(2)} z) + b_{TE,i}^{(2)} \exp(ik_{z,i}^{(2)} (L-z)) \right] + \sum_j \mathbf{E}_{TM,j,\parallel}^{(2)} \left[a_{TM,j}^{(2)} \exp(ik_{z,j}^{(2)} z) + b_{TM,j}^{(2)} \exp(ik_{z,j}^{(2)} (L-z)) \right] \quad 2-11a$$

$$\hat{z} \times \mathbf{H}_{\parallel}^{(2)}(\mathbf{r}) = \sum_i \hat{z} \times \mathbf{H}_{TE,i,\parallel}^{(2)} \left[a_{TE,i}^{(2)} \exp(ik_{z,i}^{(2)} z) - b_{TE,i}^{(2)} \exp(ik_{z,i}^{(2)} (L-z)) \right] + \sum_j \hat{z} \times \mathbf{H}_{TM,j,\parallel}^{(2)} \left[a_{TM,j}^{(2)} \exp(ik_{z,j}^{(2)} z) - b_{TM,j}^{(2)} \exp(ik_{z,j}^{(2)} (L-z)) \right] \quad 2-11b$$

這裡 $a_{TE,i}^{(2)}$ 與 $a_{TM,j}^{(2)}$ 是正 z 傳播的波導模式的展開係數；而 $b_{TE,i}^{(2)}$ 與 $b_{TM,j}^{(2)}$ 是負

z 傳播的波導模態的展開系數。

介紹完我們使用的基底以及展開型式，接著我們要去用水平電場與水平磁場的邊界條件去把各區域基底的展開系數關係式給推倒出來。首先我們針對水平方向電場在區域(一)(二)交界面的連續性可得 $\mathbf{E}_{\parallel}^{(1)}(x, y, z=0) = \mathbf{E}_{\parallel}^{(2)}(x, y, z=0)$ ，在左右兩邊同乘 $\mathbf{F}_{S,g}(x, y)$ 以及 $\mathbf{F}_{P,g}(x, y)$ 之後，積分整個單位晶格(unit cell)，可以得到 $2N$ 條方程式，寫成矩陣如下：

$$\mathbf{Y}_E^{(1)} \{ \mathbf{A}^{(1)} + \mathbf{B}^{(1)} \} = \mathbf{M}_E \{ \mathbf{A}^{(2)} + \mathbf{K}\mathbf{B}^{(2)} \} \quad 2-12$$

其中 $\mathbf{A}^{(1)} = [a_{S,1}^{(1)}, \dots, a_{S,N}^{(1)}, a_{P,1}^{(1)}, \dots, a_{P,N}^{(1)}]^T$ 、 $\mathbf{B}^{(1)} = [b_{S,1}^{(1)}, \dots, b_{S,N}^{(1)}, b_{P,1}^{(1)}, \dots, b_{P,N}^{(1)}]^T$ 、 $\mathbf{A}^{(2)} = [a_{TE,1}^{(2)}, \dots, a_{TE,I}^{(2)}, a_{TM,1}^{(2)}, \dots, a_{TM,J}^{(2)}]^T$ 和 $\mathbf{B}^{(2)} = [b_{TE,1}^{(2)}, \dots, b_{TE,J}^{(2)}, b_{TM,1}^{(2)}, \dots, b_{TM,J}^{(2)}]^T$ 是由展開系數所構成的列矩陣。 \mathbf{M}_E 是平面波與波導模態兩種基底的內積值所構成的矩陣：

$$\mathbf{M}_E = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \quad 2-13$$

這裡的 \mathbf{M}_{11} 和 \mathbf{M}_{21} 是 $N \times I$ 的子矩陣；而 \mathbf{M}_{12} 和 \mathbf{M}_{22} 是 $N \times J$ 的子矩陣。這些子矩陣的矩陣元素如下：

$$[\mathbf{M}_{11}]_{g,i} = \int_0^a dx \int_0^b dy (\mathbf{F}_{S,g})^* \cdot \mathbf{E}_{TE,i,\parallel}^{(2)} \quad 2-14a$$

$$[\mathbf{M}_{12}]_{g,j} = \int_0^a dx \int_0^b dy (\mathbf{F}_{S,g})^* \cdot \mathbf{E}_{TM,j,\parallel}^{(2)} \quad 2-14b$$

$$[\mathbf{M}_{21}]_{g,i} = \int_0^a dx \int_0^b dy (\mathbf{F}_{P,g})^* \cdot \mathbf{E}_{TE,i,\parallel}^{(2)} \quad 2-14c$$

$$[\mathbf{M}_{22}]_{g,j} = \int_0^a dx \int_0^b dy (\mathbf{F}_{P,g})^* \cdot \mathbf{E}_{TM,j,\parallel}^{(2)} \quad 2-14d$$

注意 \mathbf{M}_E 矩陣是不依頻率而有所不同的。 $\mathbf{Y}_E^{(1)}$ 是一個 $2N \times 2N$ 的對角矩陣，他可以寫成：

$$\mathbf{Y}_E^{(1)} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ & \ddots \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}_{N \times N} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{bmatrix} \frac{ck_{z,1}^{(1)}}{\omega\sqrt{\epsilon_1}} & \mathbf{0} \\ & \ddots \\ \mathbf{0} & \frac{ck_{z,N}^{(1)}}{\omega\sqrt{\epsilon_1}} \end{bmatrix}_{N \times N} \end{bmatrix} \quad 2-15$$

\mathbf{K} 是區域(二)的轉移矩陣(transfer matrix)：

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{TE} & \mathbf{0}_{I \times J} \\ \mathbf{0}_{J \times I} & \mathbf{K}_{TM} \end{bmatrix} \quad 2-16$$

其中 $\mathbf{0}_{I \times J}$ 是一個 $I \times J$ 的零矩陣； $\mathbf{0}_{J \times I}$ 則是一個 $J \times I$ 的零矩陣。 \mathbf{K}_{TE} 和 \mathbf{K}_{TM}

這兩個子矩陣為：

$$\mathbf{K}_{TE} = \begin{bmatrix} \exp(ik_{z,1}^{(2)}L) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \exp(ik_{z,2}^{(2)}L) & & \\ \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & \dots & \exp(ik_{z,I}^{(2)}L) \end{bmatrix} \quad 2-17$$

$$\mathbf{K}_{TM} = \begin{bmatrix} \exp(ik_{z,1}^{(2)}L) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \exp(ik_{z,2}^{(2)}L) & & \\ \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & \dots & \exp(ik_{z,J}^{(2)}L) \end{bmatrix} \quad 2-18$$

$k_{z,i}^{(2)}$ ($i=1,2,\dots,I$)和 $k_{z,j}^{(2)}$ ($j=1,2,\dots,J$) 分別是 TE 和 TM 波導模式的傳播常

數，詳細見式子(2-10)的敘述。

對於磁場在區域(一)(二)交界面的連續性也是類似的處理，我們有磁場連續的式子： $\hat{z} \times \mathbf{H}_{\parallel}^{(1)}(x, y, z=0) = \hat{z} \times \mathbf{H}_{\parallel}^{(2)}(x, y, z=0)$ ，在這裡左右要同乘的是 $\mathbf{E}_{TE, i, \parallel}^{(2)}(x, y)$ 與 $\mathbf{E}_{TM, j, \parallel}^{(2)}(x, y)$ ，之後只針對單位晶格內的孔洞區域做積分，可以得到 $I+J$ 條方程式，寫成矩陣如下：

$$\mathbf{M}_H \mathbf{Y}_H^{(1)} \{ \mathbf{A}^{(1)} - \mathbf{B}^{(1)} \} = \mathbf{Y}_H^{(2)} \{ \mathbf{A}^{(2)} - \mathbf{KB}^{(2)} \} \quad 2-19$$

\mathbf{M}_H 可以寫成：

$$\mathbf{M}_H = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11}^{\dagger} & \mathbf{M}_{21}^{\dagger} \\ \mathbf{M}_{12}^{\dagger} & \mathbf{M}_{22}^{\dagger} \end{bmatrix} \quad 2-20$$

$\mathbf{Y}_H^{(1)}$ 也是一個的 $2N \times 2N$ 對角矩陣，他可以寫成：

$$\mathbf{Y}_H^{(1)} = \begin{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c} \frac{ck_{z,1}^{(1)}}{\omega} & \mathbf{0} \\ \vdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{ck_{z,N}^{(1)}}{\omega} \end{array} \right]_{N \times N} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \left[\begin{array}{c|c} \sqrt{\epsilon_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sqrt{\epsilon_1} \end{array} \right]_{N \times N} \end{bmatrix} \quad 2-21$$

這裡我們分別針對 TE 及 TM 波導模態各定義一個 $I \times I$ 和 $J \times J$ 的對角矩陣：

$$\mathbf{Y}_{TE} = \begin{bmatrix} ck_{z,1}^{(2)}/\omega & 0 & \dots & 0 \\ 0 & ck_{z,2}^{(2)}/\omega & & \\ \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & & ck_{z,I}^{(2)}/\omega \end{bmatrix} \quad 2-22$$

$$\mathbf{Y}_{TM} = \begin{bmatrix} \omega\varepsilon_2/ck_{z,1}^{(2)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega\varepsilon_2/ck_{z,2}^{(2)} & & \\ \dots & & \dots & \\ 0 & \dots & & \omega\varepsilon_2/ck_{z,J}^{(2)} \end{bmatrix} \quad 2-23$$

$\mathbf{Y}_H^{(2)}$ 可以寫成：

$$\mathbf{Y}_H^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{TE} & \mathbf{0}_{I \times J} \\ \mathbf{0}_{J \times I} & \mathbf{Y}_{TM} \end{bmatrix} \quad 2-24$$

同理，對於區域(二)(三)交界面的電場及磁場使用類似手法處理，

我們可以得到如下的式子：

$$\mathbf{Y}_E^{(3)} \{ \mathbf{A}^{(3)} + \mathbf{B}^{(3)} \} = \mathbf{M}_E \{ \mathbf{K} \mathbf{A}^{(2)} + \mathbf{B}^{(2)} \} \quad 2-25$$

$$\mathbf{M}_H \mathbf{Y}_H^{(3)} \{ \mathbf{A}^{(3)} - \mathbf{B}^{(3)} \} = \mathbf{Y}_H^{(2)} \{ \mathbf{K} \mathbf{A}^{(2)} - \mathbf{B}^{(2)} \} \quad 2-26$$

其中 $\mathbf{A}^{(3)} = [a_{S,1}^{(3)}, \dots, a_{S,N}^{(3)}, a_{P,1}^{(3)}, \dots, a_{P,N}^{(3)}]^T$ ， $\mathbf{B}^{(3)} = [b_{S,1}^{(3)}, \dots, b_{S,N}^{(3)}, b_{P,1}^{(3)}, \dots, b_{P,N}^{(3)}]^T$ 。這裡 $\mathbf{Y}_E^{(3)}$ 和 $\mathbf{Y}_H^{(3)}$ 的定義和式子(2-15)(2-21)是一樣的，唯獨介電常數要改成 ε_3 。

整理式子(2-12)(2-19)(2-25)(2-26)，把握散射矩陣法(scattering matrix method)的原則，將 $\mathbf{B}^{(1)}$ 和 $\mathbf{A}^{(3)}$ 消去之後可以得到以下的方程式：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{(2)} \\ \mathbf{B}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mathbf{M}_H^{(1)} \mathbf{A}^{(1)} \\ 2\mathbf{M}_H^{(3)} \mathbf{B}^{(3)} \end{bmatrix} \quad 2-27$$

其中的子矩陣列舉如下：

$$\mathbf{G}_{11} = \mathbf{M}_H^{(1)} \left(\mathbf{Y}_E^{(1)} \right)^{-1} \mathbf{M}_E + \mathbf{I}_{I+J} \quad 2-28a$$

$$\mathbf{G}_{12} = \left[\mathbf{M}_H^{(1)} \left(\mathbf{Y}_E^{(1)} \right)^{-1} \mathbf{M}_E - \mathbf{I}_{I+J} \right] \mathbf{K} \quad 2-28b$$

$$\mathbf{G}_{12} = \left[\mathbf{M}_H^{(3)} \left(\mathbf{Y}_E^{(3)} \right)^{-1} \mathbf{M}_E - \mathbf{I}_{I+J} \right] \mathbf{K} \quad 2-28c$$

$$\mathbf{G}_{22} = \mathbf{M}_H^{(3)} \left(\mathbf{Y}_E^{(3)} \right)^{-1} \mathbf{M}_E + \mathbf{I}_{I+J} \quad 2-28d$$

這裡的 \mathbf{I}_{I+J} 指的是一個 $(I+J) \times (I+J)$ 的單位矩陣(identical matrix)。 $\mathbf{M}_H^{(1)}$ 和 $\mathbf{M}_H^{(3)}$ 則是定義為：

$$\mathbf{M}_H^{(1)} = \left(\mathbf{Y}_H^{(2)} \right)^{-1} \mathbf{M}_H \mathbf{Y}_H^{(1)} \quad 2-29a$$

$$\mathbf{M}_H^{(3)} = \left(\mathbf{Y}_H^{(2)} \right)^{-1} \mathbf{M}_H \mathbf{Y}_H^{(3)} \quad 2-29b$$

針對入射光的形式給定恰當的 $\mathbf{A}^{(1)}$ 和 $\mathbf{B}^{(3)}$ ，解式子(2-27)可以得到展開系數 $\mathbf{A}^{(2)}$ 與 $\mathbf{B}^{(2)}$ ，進而再得到 $\mathbf{A}^{(3)}$ 和 $\mathbf{B}^{(1)}$ 。整個計算的示意圖見圖 2.2。

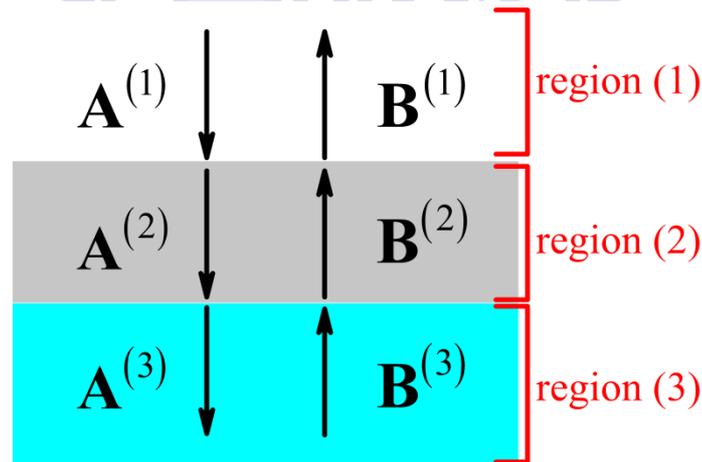


圖 2.2 基底展開法的示意圖。 $\mathbf{A}^{(1)}$ 和 $\mathbf{B}^{(1)}$ 是區域(一)的展開系數， $\mathbf{A}^{(2)}$ 和 $\mathbf{B}^{(2)}$ 是區域(二)的展開系數， $\mathbf{A}^{(3)}$ 和 $\mathbf{B}^{(3)}$ 是區域(三)的展開系數。各展開系數的關係由交界面的邊界條件而決定。

穿透率的定義是指透射光在 z 方向的能量流(energy flux)除以入射光在 z 方向的能量流，根據坡印廷向量(Poynting vector)的計算可以得到穿透率為：

$$T = \frac{\sum_g \left[|a_{S,g}^{(3)}|^2 + |a_{P,g}^{(3)}|^2 \right] \operatorname{Re} \{ k_{z,g}^{(3)} \}}{\left[|a_{S,1}^{(1)}|^2 + |a_{P,1}^{(1)}|^2 \right] \operatorname{Re} \{ k_{z,1}^{(1)} \}} \quad 2-30$$

這裡的 $\operatorname{Re} \{ k_{z,g}^{(3)} \}$ 代表把 $k_{z,g}^{(3)}$ 取實部。如果我們只想得到零階穿透的穿透率，式子(2-30)的分子部分只需加總 $g=1$ 的項。

2.2 傅立葉模型法

在前一節所介紹的方法是基於完美金屬的假設，使用波導模態去展開區域(二)的電磁波，其優點是計算量小，收斂性佳，但是自由度低。若我們改用其他形狀的金屬洞的結構，則需要把對應金屬洞的波導模態給先求出來，當金屬洞形狀複雜時，不易處理。在本節我們介紹一種處理區域(二)本徵態的方法-傅立葉模型法。我們使用傅立葉模型法去把區域(二)的本徵態給解出來，利用這些本徵態當基底再去線性疊加出電磁波。傅立葉模型法一直有著收斂性不佳的問題，在這裡我們使用了 1997 年李立峰教授所發表的新傅立葉模型法[28]去配合上一節所介紹的平面波基底進行計算。

區域(二)是由週期性的介電質 $\varepsilon(x, y)$ 所構成的結構，因此我們可以將介電質分佈作傅立葉展開：

$$\varepsilon(x, y) = \sum_{m_g, n_g} \varepsilon_{m_g, n_g} \exp \left[i \left(\frac{2\pi m_g}{A} x + \frac{2\pi n_g}{B} y \right) \right] = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{e}(x, y) \quad 2-31$$

其中 ε_{m_g, n_g} 是傅立葉展開係數：

$$\varepsilon_{m_g, n_g} = \frac{1}{AB} \int_0^A dx \int_0^B dy \varepsilon(x, y) \exp \left[-i \left(\frac{2\pi m_g}{A} x + \frac{2\pi n_g}{B} y \right) \right] \quad 2-32$$

這裡定義 $\mathbf{e}(x, y)$ 是 $N \times 1$ 的列矩陣； $\boldsymbol{\varepsilon}$ 是 $1 \times N$ 的行矩陣：

$$\mathbf{e}(x, y) = \begin{bmatrix} \exp \left[i \left(\frac{2\pi m_1}{A} x + \frac{2\pi n_1}{B} y \right) \right] \\ \vdots \\ \exp \left[i \left(\frac{2\pi m_N}{A} x + \frac{2\pi n_N}{B} y \right) \right] \end{bmatrix}_{N \times 1} \quad 2-33$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \left[\varepsilon_{m_1, n_1} \quad \cdots \quad \varepsilon_{m_N, n_N} \right]_{1 \times N} \quad 2-34$$

N 指的是傅立葉展開所用的基底總數，他同樣的也是 S -平面波或 P -平面波的基底總數，可參考式子(2-1)的定義。為了之後的計算，我們再定義一個 $N \times N$ 的矩陣：

$$\llbracket \boldsymbol{\varepsilon} \rrbracket = \begin{bmatrix} \varepsilon_{m_1-m_1, n_1-n_1} & \varepsilon_{m_1-m_2, n_1-n_2} & \cdots & \varepsilon_{m_1-m_N, n_1-n_N} \\ \varepsilon_{m_2-m_1, n_2-n_1} & \varepsilon_{m_2-m_2, n_2-n_2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{m_N-m_1, n_N-n_1} & \cdots & \cdots & \varepsilon_{m_N-m_N, n_N-n_N} \end{bmatrix}_{N \times N} \quad 2-35$$

馬克斯威方程式的兩條旋度方程式如下：

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H} = i \frac{\omega}{c} Z_0 \mathbf{H} \quad 2-36$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0 \boldsymbol{\varepsilon}(x, y) \mathbf{E} = -i \frac{\omega}{c} \frac{1}{Z_0} \boldsymbol{\varepsilon}(x, y) \mathbf{E} \quad 2-37$$

令 $Z_0 = 1$ ，我們詳列上式：

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = i \frac{\omega}{c} H_x \quad 2-38a$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = i \frac{\omega}{c} H_y \quad 2-38b$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = i \frac{\omega}{c} H_z \quad 2-38c$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = -i \frac{\omega}{c} \varepsilon(x, y) E_x \quad 2-39a$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = -i \frac{\omega}{c} \varepsilon(x, y) E_y \quad 2-39b$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = -i \frac{\omega}{c} \varepsilon(x, y) E_z \quad 2-39c$$

我們再列出所有電磁場的傅立葉展開型式：

$$\begin{aligned} E_x(x, y, z) &= \sum_{m_g, n_g} E_{x, m_g n_g}(z) \exp \left[i \left(k_{x(m_g)} x + k_{y(n_g)} y \right) \right] \\ &= \left[E_x(z) \right]_{1 \times N} \mathbf{e}(x, y) \exp(i \mathbf{k}_0 \mathbf{r}_{\parallel}) \end{aligned} \quad 2-40a$$

$$\begin{aligned} E_y(x, y, z) &= \sum_{m_g, n_g} E_{y, m_g n_g}(z) \exp \left[i \left(k_{x(m_g)} x + k_{y(n_g)} y \right) \right] \\ &= \left[E_y(z) \right]_{1 \times N} \mathbf{e}(x, y) \exp(i \mathbf{k}_0 \mathbf{r}_{\parallel}) \end{aligned} \quad 2-40b$$

$$\begin{aligned} E_z(x, y, z) &= \sum_{m_g, n_g} E_{z, m_g n_g}(z) \exp \left[i \left(k_{x(m_g)} x + k_{y(n_g)} y \right) \right] \\ &= \left[E_z(z) \right]_{1 \times N} \mathbf{e}(x, y) \exp(i \mathbf{k}_0 \mathbf{r}_{\parallel}) \end{aligned} \quad 2-40c$$

$$\begin{aligned} H_x(x, y, z) &= \sum_{m_g, n_g} H_{x, m_g n_g}(z) \exp \left[i \left(k_{x(m_g)} x + k_{y(n_g)} y \right) \right] \\ &= \left[H_x(z) \right]_{1 \times N} \mathbf{e}(x, y) \exp(i \mathbf{k}_0 \mathbf{r}_{\parallel}) \end{aligned} \quad 2-40d$$

$$\begin{aligned} H_y(x, y, z) &= \sum_{m_g, n_g} H_{y, m_g n_g}(z) \exp \left[i \left(k_{x(m_g)} x + k_{y(n_g)} y \right) \right] \\ &= \left[H_y(z) \right]_{1 \times N} \mathbf{e}(x, y) \exp(i \mathbf{k}_0 \mathbf{r}_{\parallel}) \end{aligned} \quad 2-40e$$

$$\begin{aligned} H_z(x, y, z) &= \sum_{m_g, n_g} H_{z, m_g n_g}(z) \exp \left[i \left(k_{x(m_g)} x + k_{y(n_g)} y \right) \right] \\ &= \left[H_z(z) \right]_{1 \times N} \mathbf{e}(x, y) \exp(i \mathbf{k}_0 \mathbf{r}_{\parallel}) \end{aligned} \quad 2-40f$$

這裡的 $\left[E_x(z) \right]_{1 \times N}$ 、 $\left[E_y(z) \right]_{1 \times N}$ 、 $\left[E_z(z) \right]_{1 \times N}$ 、 $\left[H_x(z) \right]_{1 \times N}$ 、 $\left[H_y(z) \right]_{1 \times N}$ 、

$\left[H_z(z) \right]_{1 \times N}$ 是由展開系數所構成的 $1 \times N$ 的列矩陣，舉例來說， $\left[E_x(z) \right]_{1 \times N}$

即為 $\left[E_{x, m_1 n_1} \quad \cdots \quad E_{x, m_N n_N} \right]$ 。 $k_{x(m_g)} = k_{x0} + (2\pi m_g / A)$ 與 $k_{y(n_g)} = k_{y0} + (2\pi n_g / B)$ 同

上一節的定義，加入下標 m_g 和 n_g 是為了下面計算式子能夠清楚。接下來我們要重新整理馬克斯威方程式，在這裡的計算把握一個原則，就是要避免「不連續函數乘上不連續函數等於連續函數」的情況發生。首先改寫式子(2-39c)，因為 E_z 在區域(二)中是連續的，故我們保持 $\varepsilon(x,y)$ 與 E_z 的相乘，可以得到 E_z 的新表示法：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{i} \frac{\omega}{c} E_z(x,y,z) \\ &= i [\varepsilon]^{-1} \left\{ \left[H_y(z) \right] \mathbf{k}_x - \left[H_x(z) \right] \mathbf{k}_y \right\} \mathbf{e}(x,y) \exp(i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}_{\parallel}) \end{aligned} \quad 2-41$$

其中：

$$\mathbf{k}_x = \begin{bmatrix} k_{x(m_1)} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & k_{x(m_N)} \end{bmatrix}_{N \times N} \quad 2-42$$

$$\mathbf{k}_y = \begin{bmatrix} k_{y(m_1)} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & k_{y(m_N)} \end{bmatrix}_{N \times N} \quad 2-43$$

把式子(2-41)帶入(2-38a)以及(2-38b)會得到：

$$\frac{1}{i} \frac{\omega}{c} \frac{\partial}{\partial z} \left[E_x(z) \right] = \frac{\omega^2}{c^2} \left[H_y(z) \right] - [\varepsilon]^{-1} \left\{ \left[H_y(z) \right] \mathbf{k}_x - \left[H_x(z) \right] \mathbf{k}_y \right\} \mathbf{k}_x \quad 2-44a$$

$$\frac{1}{i} \frac{\omega}{c} \frac{\partial}{\partial z} \left[E_y(z) \right] = -\frac{\omega^2}{c^2} \left[H_x(z) \right] - [\varepsilon]^{-1} \left\{ \left[H_y(z) \right] \mathbf{k}_x - \left[H_x(z) \right] \mathbf{k}_y \right\} \mathbf{k}_y \quad 2-44b$$

接下來要改寫式子(2-39a)與(2-39b)。我們先認識以下的連續性：(i) E_x 對於 y 連續，(ii) $\varepsilon(x,y)E_x$ 對於 x 連續，(iii) E_y 對於 x 連續，(iv) $\varepsilon(x,y)E_y$ 對於 y 連續。式子(2-39a)與(2-39b)的處理較複雜，對於 x 與 y 方向的傅立葉展開要分段計算。這裡只列出最後結果：

$$\frac{\omega}{ic} \frac{\partial}{\partial z} \llbracket H_y(z) \rrbracket = \mathbf{k}_y \llbracket \llbracket E_y(z) \rrbracket \mathbf{k}_x - \llbracket E_x(z) \rrbracket \mathbf{k}_y \rrbracket + \frac{\omega^2}{c^2} \llbracket \tilde{\varepsilon} \rrbracket \llbracket E_x(z) \rrbracket \quad 2-45a$$

$$\frac{\omega}{ic} \frac{\partial}{\partial z} \llbracket H_x(z) \rrbracket = \mathbf{k}_x \llbracket \llbracket E_y(z) \rrbracket \mathbf{k}_x - \llbracket E_x(z) \rrbracket \mathbf{k}_y \rrbracket - \frac{\omega^2}{c^2} \llbracket \tilde{\varepsilon} \rrbracket \llbracket E_y(z) \rrbracket \quad 2-45b$$

其中：

$$\llbracket \tilde{\varepsilon} \rrbracket = \begin{bmatrix} \llbracket \tilde{\varepsilon}_{m_1-m_1, n_1-n_1} \rrbracket & \cdots & \llbracket \tilde{\varepsilon}_{m_1-m_N, n_1-n_N} \rrbracket \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \llbracket \tilde{\varepsilon}_{m_N-m_N, n_1-n_1} \rrbracket & \cdots & \llbracket \tilde{\varepsilon}_{m_N-m_N, n_N-n_N} \rrbracket \end{bmatrix}_{N \times N} \quad 2-46a$$

$$\llbracket \tilde{\varepsilon} \rrbracket = \begin{bmatrix} \llbracket \tilde{\varepsilon}_{m_1-m_1, n_1-n_1} \rrbracket & \cdots & \llbracket \tilde{\varepsilon}_{m_1-m_1, n_N-n_N} \rrbracket \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \llbracket \tilde{\varepsilon}_{m_N-m_N, n_1-n_1} \rrbracket & \cdots & \llbracket \tilde{\varepsilon}_{m_N-m_N, n_N-n_N} \rrbracket \end{bmatrix}_{N \times N} \quad 2-46b$$

上面兩個矩陣的矩陣元素可寫成：

$$\llbracket \tilde{\varepsilon}_{m_{g'}-m_g, n_{g'}-n_g} \rrbracket = \frac{1}{B} \int_0^B dy \llbracket \tilde{\varepsilon}_{m_{g'}-m_g}(y) \rrbracket^{-1} \exp\left(-i \frac{2\pi(n_{g'}-n_g)}{B} y\right)$$

$$\llbracket \tilde{\varepsilon}_{m_{g'}-m_g, n_{g'}-n_g} \rrbracket = \frac{1}{A} \int_0^A dx \llbracket \tilde{\varepsilon}_{n_{g'}-n_g}(x) \rrbracket^{-1} \exp\left(-i \frac{2\pi(m_{g'}-m_g)}{A} x\right)$$

在這裡 $\llbracket \tilde{\varepsilon}_{m_{g'}-m_g}(y) \rrbracket^{-1}$ 是 $\llbracket \tilde{\varepsilon}_{m_{g'}-m_g}(y) \rrbracket = \frac{1}{A} \int_0^A dx \frac{1}{\varepsilon(x, y)} \exp\left(-i \frac{2\pi(m_{g'}-m_g)}{A} x\right)$ 所

構成的矩陣取反矩陣之後的元素；而 $\llbracket \tilde{\varepsilon}_{n_{g'}-n_g}(x) \rrbracket^{-1}$ 則是

$\llbracket \tilde{\varepsilon}_{n_{g'}-n_g}(x) \rrbracket = \frac{1}{B} \int_0^B dy \frac{1}{\varepsilon(x, y)} \exp\left(-i \frac{2\pi(n_{g'}-n_g)}{B} y\right)$ 所構成的矩陣取反矩陣之

後的元素。

結合式子(2-44a) (2-44b) (2-45a) (2-45b)可以得到平行方向電場與

磁場展開系數的關係：

$$\frac{1}{i} \frac{\omega}{c} \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_x(z) \\ \mathbf{E}_y(z) \end{pmatrix} = \mathbf{F} \begin{pmatrix} \mathbf{H}_x(z) \\ \mathbf{H}_y(z) \end{pmatrix} \quad 2-47a$$

$$\frac{1}{i} \frac{\omega}{c} \frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} \mathbf{H}_x(z) \\ \mathbf{H}_y(z) \end{pmatrix} = \mathbf{G} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_x(z) \\ \mathbf{E}_y(z) \end{pmatrix} \quad 2-47b$$

其中：

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_x [\boldsymbol{\varepsilon}]^{-1} \mathbf{k}_y & \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{I}_{N \times N} - \mathbf{k}_x [\boldsymbol{\varepsilon}]^{-1} \mathbf{k}_x \\ \mathbf{k}_y [\boldsymbol{\varepsilon}]^{-1} \mathbf{k}_y - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{I}_{N \times N} & -\mathbf{k}_y [\boldsymbol{\varepsilon}]^{-1} \mathbf{k}_x \end{bmatrix} \quad 2-48a$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -\mathbf{k}_x \mathbf{k}_y & \mathbf{k}_x \mathbf{k}_x - \frac{\omega^2}{c^2} [\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}] \\ \frac{\omega^2}{c^2} [\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}] - \mathbf{k}_y \mathbf{k}_y & \mathbf{k}_y \mathbf{k}_x \end{bmatrix} \quad 2-48b$$

由於所有展開係數對於 z 方向的變化都是 $\exp(i\gamma z)$ ， γ 是 z 方向的傳播常數，我們可以得到本徵方程式：

$$\left(\mathbf{F}\mathbf{G} - \frac{\omega^2}{c^2} \gamma^2 \right) \begin{pmatrix} \mathbf{E}_x \\ \mathbf{E}_y \end{pmatrix} = 0 \quad 2-49$$

解上面的本徵方程式得到電場後，磁場可以直接由(2-47b)求得：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}_x(z) \\ \mathbf{H}_y(z) \end{pmatrix} = \frac{1}{\frac{\omega}{c} \gamma} \mathbf{G} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_x(z) \\ \mathbf{E}_y(z) \end{pmatrix} \quad 2-50$$

解完了區域(二)的本徵態之後，用這些本徵態來展開區域(二)的電磁

波如下：

$$\mathbf{E}_{\parallel}^{(2)}(x, y, z) = \sum_q \left[a_q^{(2)} \exp(i\gamma_q z) + b_q^{(2)} \exp(-i\gamma_q (z-L)) \right] \mathbf{E}_q(x, y) \quad 2-51a$$

$$\mathbf{H}_{\parallel}^{(2)}(x, y, z) = \sum_q \left[a_q^{(2)} \exp(i\gamma_q z) - b_q^{(2)} \exp(-i\gamma_q (z-L)) \right] \mathbf{H}_q(x, y) \quad 2-51b$$

其中：

$$\mathbf{E}_q(x, y) = \sum_{m_g, n_g} \begin{pmatrix} E_{x, m_g n_g, q} \\ E_{y, m_g n_g, q} \end{pmatrix} \exp \left[i \left(k_{x(m_g)} x + k_{y(m_g)} y \right) \right] \quad 2-52a$$

$$\mathbf{H}_q(x, y) = \sum_{m_g, n_g} \begin{pmatrix} H_{x, m_g n_g, q} \\ H_{y, m_g n_g, q} \end{pmatrix} \exp \left[i \left(k_{x(m_g)} x + k_{y(m_g)} y \right) \right] \quad 2-52b$$

q 是用來標示這些本徵態的參數。 $a_q^{(2)}$ 是 $b_q^{(2)}$ 這些本徵態的展開系數。

根據上一節式子(2-7a) (2-7b) (2-8a) (2-8b)去展開區域(一)(三)的電磁波，再配合邊界條件的匹配，可以得到各區展開系數的關係式。

$$\mathbf{E}_1 \{ \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1 \} = \mathbf{E}_2 \{ \mathbf{A}_2 + \mathbf{TB}_2 \} \quad 2-53$$

$$\mathbf{H}_1 \{ \mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1 \} = \mathbf{H}_2 \{ \mathbf{A}_2 - \mathbf{TB}_2 \} \quad 2-54$$

$$\mathbf{E}_3 \{ \mathbf{A}_3 + \mathbf{B}_3 \} = \mathbf{E}_2 \{ \mathbf{TA}_2 + \mathbf{B}_2 \} \quad 2-55$$

$$\mathbf{H}_3 \{ \mathbf{A}_3 - \mathbf{B}_3 \} = \mathbf{H}_2 \{ \mathbf{TA}_2 - \mathbf{B}_2 \} \quad 2-56$$

其中 \mathbf{E}_2 與 \mathbf{H}_2 是剛剛解出來區域(二)本徵態(共 Q 個本徵態)的展開系數

所構成的矩陣：

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} E_{x, m_1 n_1, 1} & \cdots & E_{x, m_1 n_1, Q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{x, m_N n_N, 1} & \cdots & E_{x, m_N n_N, Q} \\ E_{y, m_1 n_1, 1} & \cdots & E_{y, m_1 n_1, Q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{y, m_N n_N, 1} & \cdots & E_{y, m_N n_N, Q} \end{bmatrix}_{2N \times Q} \quad 2-57$$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} H_{x, m_1 n_1, 1} & \cdots & H_{x, m_1 n_1, Q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{x, m_N n_N, 1} & \cdots & H_{x, m_N n_N, Q} \\ H_{y, m_1 n_1, 1} & \cdots & H_{y, m_1 n_1, Q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{y, m_N n_N, 1} & \cdots & H_{y, m_N n_N, Q} \end{bmatrix}_{2N \times Q} \quad 2-58$$

\mathbf{T} 是這些本徵態對應的轉移矩陣：

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \exp(i\gamma_1 L) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \exp(i\gamma_Q L) \end{bmatrix}_{Q \times Q} \quad 2-59$$

\mathbf{E}_1 、 \mathbf{H}_1 、 \mathbf{E}_3 、 \mathbf{H}_3 是區域(一)和(三)電場與磁場各 $m_g n_g$ 分量構成的矩陣：

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{x,m_1 n_1}^{S1} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & E_{x,m_N n_N}^{S1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} E_{x,m_1 n_1}^{P1} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & E_{x,m_N n_N}^{P1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} E_{y,m_1 n_1}^{S1} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & E_{y,m_N n_N}^{S1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} E_{y,m_1 n_1}^{P1} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & E_{y,m_N n_N}^{P1} \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{2N \times 2N} \quad 2-60a$$

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{x,m_1 n_1}^{S1} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & H_{x,m_N n_N}^{S1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} H_{x,m_1 n_1}^{P1} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & H_{x,m_N n_N}^{P1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} H_{y,m_1 n_1}^{S1} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & H_{y,m_N n_N}^{S1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} H_{y,m_1 n_1}^{P1} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & H_{y,m_N n_N}^{P1} \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{2N \times 2N} \quad 2-60b$$

$$\mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{x,m_1 n_1}^{S3} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & E_{x,m_N n_N}^{S3} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} E_{x,m_1 n_1}^{P3} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & E_{x,m_N n_N}^{P3} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} E_{y,m_1 n_1}^{S3} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & E_{y,m_N n_N}^{S3} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} E_{y,m_1 n_1}^{P3} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & E_{y,m_N n_N}^{P3} \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{2N \times 2N} \quad 2-60c$$

$$\mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{x,m_1n_1}^{S3} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & H_{x,m_Nn_N}^{S3} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} H_{x,m_1n_1}^{P3} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & H_{x,m_Nn_N}^{P3} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} H_{y,m_1n_1}^{S3} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & H_{y,m_Nn_N}^{S3} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} H_{y,m_1n_1}^{P3} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & H_{y,m_Nn_N}^{P3} \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{2N \times 2N} \quad 2-60d$$

$$\text{其中 } \begin{pmatrix} E_{x,m_g n_g}^{S1} \\ E_{y,m_g n_g}^{S1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{AB}} \frac{1}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \begin{pmatrix} k_{y(n_g)} \\ -k_{x(m_g)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_{x,m_g n_g}^{P1} \\ E_{y,m_g n_g}^{P1} \end{pmatrix} = \frac{ck_{z,g}^{(1)}}{\omega\sqrt{\epsilon_1}} \frac{1}{\sqrt{AB}} \frac{1}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \begin{pmatrix} k_{x(m_g)} \\ k_{y(n_g)} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} H_{x,m_g n_g}^{S1} \\ H_{y,m_g n_g}^{S1} \end{pmatrix} = \frac{ck_{z,g}^{(1)}}{\omega} \frac{1}{\sqrt{AB}} \frac{1}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \begin{pmatrix} k_{x(m_g)} \\ k_{y(n_g)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} H_{x,m_g n_g}^{P1} \\ H_{y,m_g n_g}^{P1} \end{pmatrix} = -\sqrt{\epsilon_1} \frac{1}{\sqrt{AB}} \frac{1}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \begin{pmatrix} k_{y(n_g)} \\ -k_{x(m_g)} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} E_{x,m_g n_g}^{S3} \\ E_{y,m_g n_g}^{S3} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{AB}} \frac{1}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \begin{pmatrix} k_{y(n_g)} \\ -k_{x(m_g)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E_{x,m_g n_g}^{P3} \\ E_{y,m_g n_g}^{P3} \end{pmatrix} = \frac{ck_{z,g}^{(3)}}{\omega\sqrt{\epsilon_3}} \frac{1}{\sqrt{AB}} \frac{1}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \begin{pmatrix} k_{x(m_g)} \\ k_{y(n_g)} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} H_{x,m_g n_g}^{S3} \\ H_{y,m_g n_g}^{S3} \end{pmatrix} = \frac{ck_{z,g}^{(3)}}{\omega} \frac{1}{\sqrt{AB}} \frac{1}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \begin{pmatrix} k_{x(m_g)} \\ k_{y(n_g)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} H_{x,m_g n_g}^{P3} \\ H_{y,m_g n_g}^{P3} \end{pmatrix} = -\sqrt{\epsilon_3} \frac{1}{\sqrt{AB}} \frac{1}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \begin{pmatrix} k_{y(n_g)} \\ -k_{x(m_g)} \end{pmatrix}$$

等都是上一節所介紹的平面波基底的 xy 場分量。將(2-53) (2-54) (2-55)

(2-56)做整理：

$$\mathbf{Y}_E^{(1)} \{ \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1 \} = \mathbf{M}_E^{(1)} \{ \mathbf{A}_2 + \mathbf{TB}_2 \} \quad 2-61a$$

$$\mathbf{M}_H^{(1)} \{ \mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1 \} = \mathbf{Y}_H^{(2)} \{ \mathbf{A}_2 - \mathbf{TB}_2 \} \quad 2-61b$$

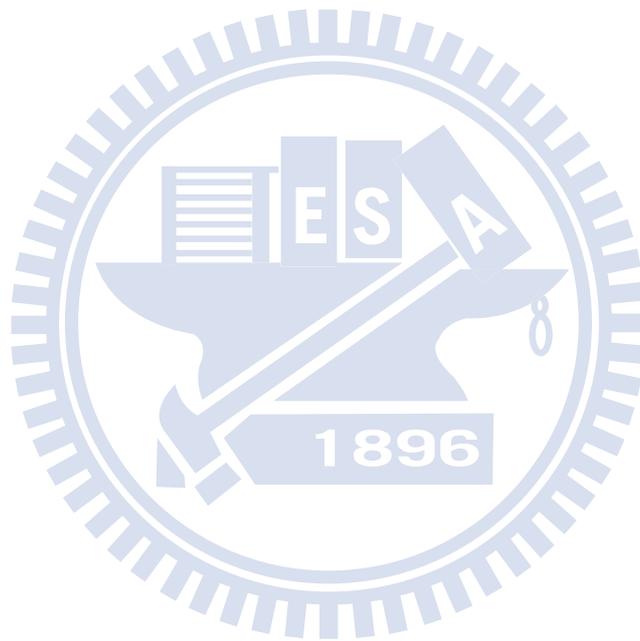
$$\mathbf{Y}_E^{(3)} \{ \mathbf{A}_3 + \mathbf{B}_3 \} = \mathbf{M}_E^{(3)} \{ \mathbf{TA}_2 + \mathbf{B}_2 \} \quad 2-61c$$

$$\mathbf{M}_H^{(3)} \{ \mathbf{A}_3 - \mathbf{B}_3 \} = \mathbf{Y}_H^{(2)} \{ \mathbf{A}_2 - \mathbf{TB}_2 \} \quad 2-61d$$

這裡 $\mathbf{M}_E^{(1)} = \mathbf{E}_1^\dagger \mathbf{E}_2$ 、 $\mathbf{M}_H^{(1)} = \mathbf{H}_2^\dagger \mathbf{H}_1$ 、 $\mathbf{M}_E^{(3)} = \mathbf{E}_3^\dagger \mathbf{E}_2$ 、 $\mathbf{M}_H^{(3)} = \mathbf{H}_2^\dagger \mathbf{H}_3$ 、 $\mathbf{Y}_E^{(1)} = \mathbf{E}_1^\dagger \mathbf{E}_1$ 、

$\mathbf{Y}_H^{(2)} = \mathbf{H}_2^\dagger \mathbf{H}_2$ 、 $\mathbf{Y}_E^{(3)} = \mathbf{E}_3^\dagger \mathbf{E}_3$ 。整理可得類似(2-27)的式子：

$$\begin{aligned}
& 2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_H^{2,1} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{M}_H^{2,3} \mathbf{B}_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \left(\mathbf{M}_H^{(1)} \left(\mathbf{Y}_E^{(1)} \right)^{-1} \mathbf{M}_E^{(1)} + \mathbf{Y}_H^{(2)} \right) & \left(\mathbf{M}_H^{(1)} \left(\mathbf{Y}_E^{(1)} \right)^{-1} \mathbf{M}_E^{(1)} - \mathbf{Y}_H^{(2)} \right) \mathbf{T} \\ \left(\mathbf{M}_H^{(3)} \left(\mathbf{Y}_E^{(3)} \right)^{-1} \mathbf{M}_E^{(3)} - \mathbf{Y}_H^{(2)} \right) \mathbf{T} & \left(\mathbf{M}_H^{(3)} \left(\mathbf{Y}_E^{(3)} \right)^{-1} \mathbf{M}_E^{(3)} + \mathbf{Y}_H^{(2)} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{2-62}$$



第三章 理論分析

3.1 在基板上的金屬孔洞陣列

首先我們分析位於基板上的金屬孔洞陣列穿透情形。在我們團隊之前的研究已有非常豐富的實驗結果[30,31]，在本節我們試圖分析這些實驗結果的物理圖像。

3.1.1 費諾共振

前面 1.2 節提到費諾共振的基本物理圖像，電磁波穿透金屬週期孔洞時是由直接穿隧以及共振穿透兩條路徑經由干涉而達成最後的穿透行為。直接穿隧是指電磁波藉由穿隧的方式通過各別的孔洞而不與金屬週期孔洞結構的表面態有任何交互作用；共振穿透則是指電磁波激發了金屬週期孔洞結構的表面態，這些表面態再重新放出穿透的電磁波。為了更深入的分析費諾共振的效應，我們希望把透射波中直接穿隧和共振穿透這兩個部分給分離開來。在 2007 年 Bravo-Abad 計算了單一孔洞的穿透貢獻，把此單一孔洞貢獻視為直接穿隧，進而去分離直接穿隧和共振穿透的貢獻[13]。這樣的處理方式需要把單一孔洞的穿透特性給先求出來，需要額外的計算。這裡我們想出了一個簡單的方法去分離直接穿隧和共振穿透的貢獻，我們把握一個原則「當開孔區域的面積比例越高時，直接穿隧對於整體電磁波穿透的貢獻也越高」[13, 14, 23]。考慮分析的系統如圖 2.1，此結構的週期為 A 和 B ，

長方形洞的長與寬則分別是 a 和 b 。我們定義一個相對應的系統其週期為 $A' = a + \Delta$ 和 $B' = b + \Delta$ ，其中 $\Delta \rightarrow 0$ ，長方形洞的長與寬仍然是 a 和 b 。我們稱 A' 和 B' 為贗晶格(pseudo lattice)，這樣定義的目的是把開孔區域的面積張到最大。我們假設在此贗晶格系統的穿透貢獻完全由直接穿隧提供，接下來再把贗晶格系統的穿透場根據實際系統的開孔面積比進行比例調整。這調整後的穿透場我們就定義為實際系統的直接穿隧。根據上述的處理步驟，第零階穿透係數可寫成 $a_{p,1}^{(3)} = a^D + a^R$ (這裡假設正向的 P -波入射)， a^D 與 a^R 分別是直接穿隧與共振穿透的分量，直接穿隧的部分可以寫成：

$$a^D \equiv \sqrt{\frac{A'B'}{AB}} a_{pseudo} \quad 3-1$$

其中 a_{pseudo} 是在贗晶格系統中得到的 $a_{p,1}^{(3)}$ 。當我們定義了直接穿隧 a^D ，馬上得到共振穿透 $a^R = a_{p,1}^{(3)} - a^D$ 。最後的穿透率正比於 $|a_{p,1}^{(3)}|^2$ 的值，我們可以把 $|a_{p,1}^{(3)}|^2$ 展開成：

$$|a_{p,1}^{(3)}|^2 = |a^D|^2 + |a^R|^2 + 2 \operatorname{Re}\{a^D a^R\} \quad 3-2$$

$|a^D|^2$ 與 $|a^R|^2$ 分別是直接穿隧與共振穿透對於穿透率的貢獻， $2 \operatorname{Re}\{a^D a^R\}$ 則是直接穿隧與共振穿透互相干涉的貢獻。

我們用以上方法去重新計算 2007 年 Bravo-Abad 的結果[13]。考慮一個位於矽基板的金屬週期孔洞，週期為 $A = B = 100 \mu\text{m}$ ，孔洞為正方形其邊長為 $a = b = 68, 58, 48, 38 \mu\text{m}$ 。我們計算了直接穿隧($|a^D|^2$)、共

振穿透($|a^R|^2$)以及干涉項($2\text{Re}\{a^D a^R\}$)的貢獻，最後的結果再對直接穿隧分量做歸一化的動作。計算結果如圖 3.1，定性上而言此結果與 Bravo-Abad 當年的計算十分吻合。當洞的面積較大時，穿透是由直接穿隧為主；而當洞的面積較小時，穿透則是由共振穿透為主。干涉項在波長接近 $342\ \mu\text{m}$ 時有一個極大的負值，使得最後的穿透頻譜是不對稱的，這樣不對稱的穿透頻譜即為標準的費諾穿透特性。

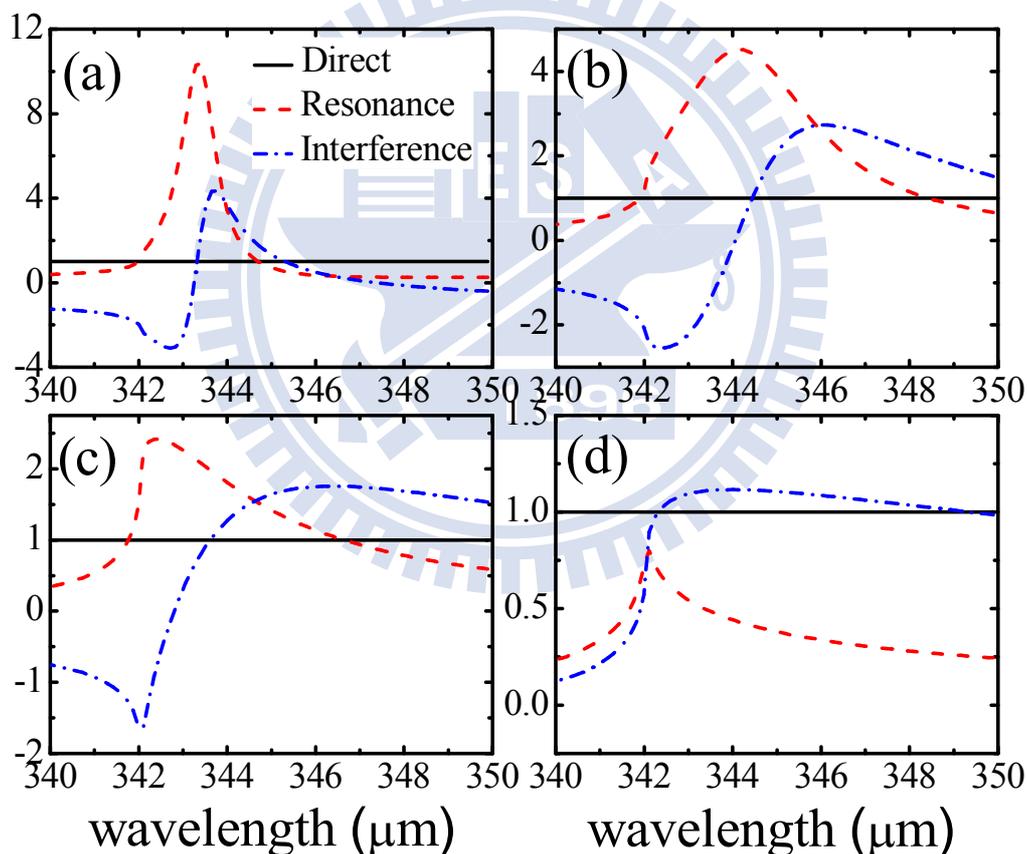


圖 3.1 直接穿隧、共振穿透及干涉項的個別貢獻。圖(a) (b) (c) (d)分別對應 $a = b = 38, 48, 58, 68\ \mu\text{m}$ 。黑線是直接穿隧項($|a^D|^2$)，紅線是共振穿透項($|a^R|^2$)，藍線是干涉項($2\text{Re}\{a^D a^R\}$)。當面積越小時，共振穿透將主導整體穿透的行為，而干涉項會產生一個非對稱的修正。

3.1.2 長方形孔洞的奇異行為

我們的研究團隊曾經針對金屬長方形孔洞的異常穿透特性進行一系列的研究[30]，我們改變長方形的幾何形狀去觀察正向入射穿透頻譜的變化。這裡的結構是位於在 GaAs 基板上的金屬孔洞，固定 $A=B=22\ \mu\text{m}$ 、 $L=0.2\ \mu\text{m}$ 與 $a=18\ \mu\text{m}$ ，去把 b 由 $18\ \mu\text{m}$ 縮小到 $2\ \mu\text{m}$ ，觀

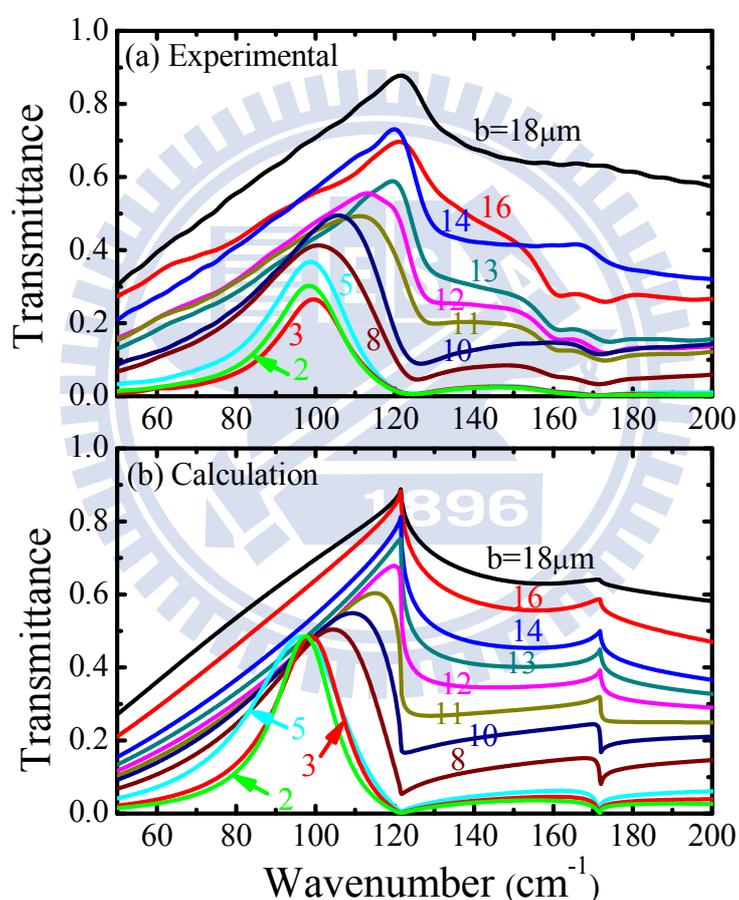


圖 3.2 (a)是正向入射的實驗結果，我們固定 $A=B=22\ \mu\text{m}$ 、 $L=0.2\ \mu\text{m}$ 與 $a=18\ \mu\text{m}$ ，去把 b 由 $18\ \mu\text{m}$ 縮小到 $2\ \mu\text{m}$ 。這個結果顯示了隨著 b 的縮小，穿透頻譜有非單調的變化。(b)是針對與(a)同樣的結構採用 2.1 節方法的計算結果。此計算結果也證實了非單調的變化的發生。

察到穿透頻譜的峰值頻率以及峰值大小皆有明顯的變化，此結果如圖

3.2(a)所示。我們也針對同樣的系統進行計算，計算發法採用 2.1 節的基底展開法。實驗的入射光是非偏振光，故我們計算時使用 50% 的 P -波以及 50% 的 S -波當作入射光。為了與實驗做比較，計算所得的穿透頻譜要同除以 GaAs 基板的穿透率 0.67。計算中唯一的可調參數是 GaAs 介電係數，與實驗有最佳吻合的值為 13.9。實驗與計算的結果在定性上十分一致，但仍有一些小誤差，這些誤差可歸因於：(i) 我們使用完美導體的假設，但事實上不可能有完美的導體存在 (ii) 製程上難以達成真正的完美週期結構 (iii) 介電質基板也可能會吸收電磁波 (iv) 量測的誤差。

我們先分析穿透峰值大小隨著 b 縮小而下降的原因。我們分別計算了 P -波與 S -波的穿透率，結果於圖 3.3。圖 3.3 顯示了穿透頻譜是與偏振方向非常相依的。 P -波(電場指向 y 方向)的穿透峰值大小幾乎不受 b 的改變而有所影響，維持在一個很高的高度；然而 S -波(電場指向 x 方向)的穿透峰值大小因為 b 的縮小而急遽下降。如此一來，最後的穿透頻譜(包含了 P -波與 S -波)峰值大小也就如同圖 3.2(a) (b)所示，隨 b 的縮小而下降。這是由於 $TE_{0,1}$ (這個符號指的是 $m_i = 0$ 以及 $n_i = 1$) 波導模式的電場指向 x 方向， S -波的穿透行為是由 $TE_{0,1}$ 所主導；而 $TE_{1,0}$ 波導模式的電場指向 y 方向，故 P -波的穿透行為是由 $TE_{1,0}$ 所主導。當金屬孔洞是正方形時， $TE_{0,1}$ 與 $TE_{1,0}$ 這兩個波導模式的截止頻率(cut-off

frequency)是相同的，而我們把 b 縮小， $TE_{0,1}$ 的截止頻率也因此提升，導致 $TE_{0,1}$ 模態要穿過金屬孔洞變的困難許多，所以 S -波的穿透能力也因此而下降。

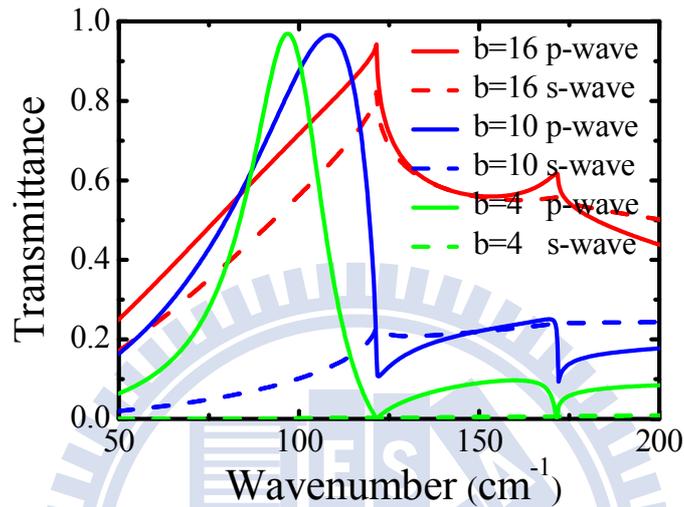


圖 3.3 不同偏振光在不同長方形幾何結構下的穿透頻譜。 S -波的穿透頻譜會隨著 b 的縮小而快速下降。

接著我們要討論穿透頻譜峰值頻率隨 b 的變化關係。我們在圖 3.2 中可以發現，峰值頻率隨 b 的縮小呈現一種非常不規律的變化，這是一個非常有趣的現象。當 b 由 $18\ \mu\text{m}$ 縮小到 $5\ \mu\text{m}$ 時，峰值頻率由 $120\ \text{cm}^{-1}$ (對應到雷利波長, Rayleigh wavelength, 也就是波長等於週期乘上介電常數)下降到 $98\ \text{cm}^{-1}$ ；接著再縮小 b 到 $3\ \mu\text{m}$ ，峰值頻率轉而上升到 $100\ \text{cm}^{-1}$ ；而 b 再由 $3\ \mu\text{m}$ 縮小到 $2\ \mu\text{m}$ 時，峰值頻率竟又由 $100\ \text{cm}^{-1}$ 下降到 $98\ \text{cm}^{-1}$ 。圖 3.4(a)是穿透峰值頻率對 b 的關係，我們也比較了不同數目的波導基底的計算結果。首先是只使用 $TE_{0,1}$ 與 $TE_{1,0}$ 這兩個波導基底的計算，如圖 3.4(a)綠線，這個結果雖然已顯示了峰值頻率大致的

行為，但是在 b 介於 $3\mu\text{m}$ 與 $2\mu\text{m}$ 之間的奇異行為並沒有出現。因此我

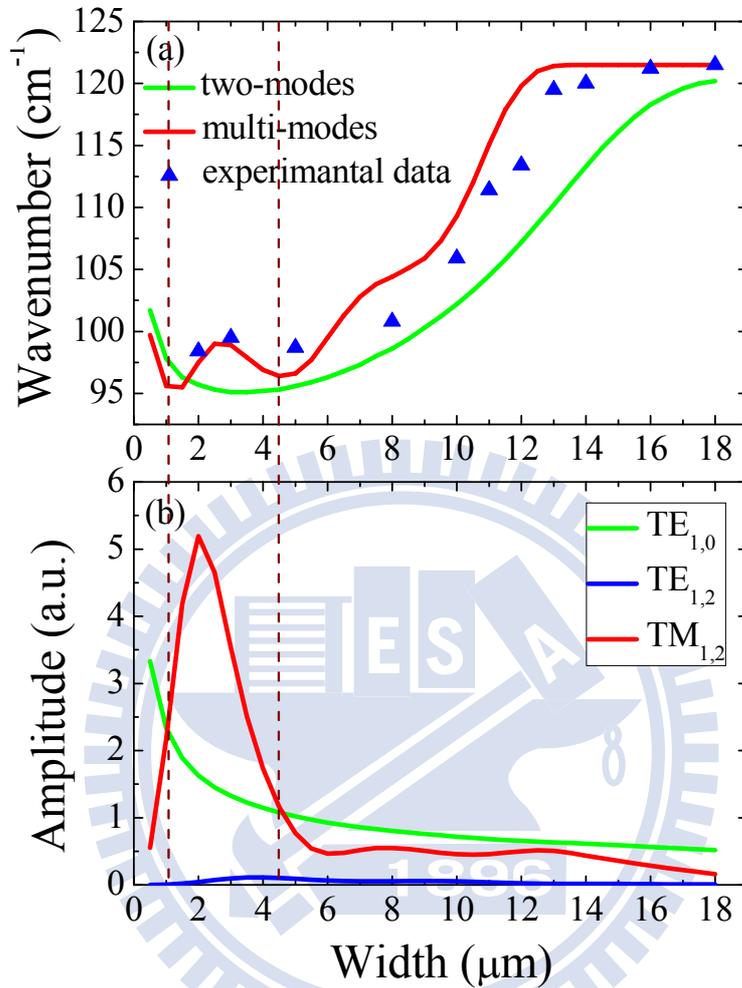


圖 3.4 (a) 穿透峰值頻率對 b 的關係，三角形是實驗數據，綠線是只使用 $\text{TE}_{0,1}$ 與 $\text{TE}_{1,0}$ 兩個波導基底的計算結果；紅線則是使用足夠數目的波導基底已達到收斂的計算結果。(b) $\text{TE}_{1,0}$ 、 $\text{TE}_{1,2}$ 、 $\text{TM}_{1,2}$ 波導模式的電場強度隨 b 的變化。

們使用了更多的波導基底去計算，結果如圖 3.4(a)紅線，我們觀察式子(2-27)中矩陣的非零元素發現， $\text{TE}_{1,0}$ 會與更高階的波導模式如 $\text{TE}_{1,2}$ 與 $\text{TM}_{1,2}$ 有交互作用。圖 3.4(a)紅線的結果與實驗十分吻合，連 b 介於

3 μm 與 2 μm 之間的奇異行為也可以預測，這顯示了高階的波導模態在我們的系統是非常重要的。在 2009 年 Isaac 分析了與我們類似的結構，孔洞形狀為正方形，他們的計算只使用最低階的波導模態，其計算結果與實驗的明顯的誤差。

我們想更一步去分析峰值頻率在 b 介於 5 μm 與 1 μm 之間的行為。我們計算了幾個重要波導模態的電場強度 $\left| a_{TE,i}^{(2)} + b_{TE,i}^{(2)} \exp\left(ik_{z,i}^{(2)}L\right) \right|$ ，如圖 3.4(b)，在這些奇異行為發生的區域，即 b 介於 5 μm 與 1 μm 之間，我們發現 $TM_{1,2}$ 的電場強度高於 $TE_{1,0}$ 的電場強度。這顯示了 $TM_{1,2}$ 在 b 介於 5 μm 與 1 μm 時是主導整個穿透行為的。然而 $TM_{1,2}$ 具有較高的截止頻率，這會使的較低頻的電磁波不易穿隧通過金屬洞；換句話說，當 $TM_{1,2}$ 越主導穿透行為時，穿透峰值越傾向高頻率移動。簡而言之， $TE_{1,0}$ 與 $TM_{1,2}$ 波導模態的交互作用與互相拮抗造成了我們觀察到 b 介於 5 μm 與 1 μm 之間的奇特穿透行為。這裡附帶一提，在 b 較長時 ($b=18\sim6\ \mu\text{m}$) 的穿透峰值變化是由於主導整個穿透的表面態發生改變，以下會詳細說明。

我們現在要觀察穿透頻譜在不同的平行波向量入射下的變化。首先我們介紹表面電漿子的色散關係：

$$\omega_{SPP}^{(m,n)}(\mathbf{k}_0) = c \sqrt{\frac{\varepsilon_M + \varepsilon_S}{\varepsilon_M \varepsilon_S}} |\mathbf{k}_0 + \mathbf{G}| \quad 3-3$$

其中 $\mathbf{G} = \hat{x}2\pi m/A + \hat{y}2\pi n/B$ 是倒晶格向量， ε_M 與 ε_S 分別是金屬與介電質基板的介電常數。式子(3-3)是建立在一個假設條件之下：表面電漿子

的色散關係只受到週期結構所提供的布洛赫散射(Bloch Scattering)而改變，金屬孔洞的幾何形狀對此色散關係完全不影響。在完美金屬情況下($\epsilon_M \rightarrow \infty$)，表面電漿子不復存在，但仍然有稱之為類表面電漿子的表面態的存在於金屬週期結構之上[15-18]，最低能量的三條表面態能帶色散關係可寫成：

$$\omega_{SPP}^{(0,-1)}(0, k_{y0}) = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_S}} \left| k_{y0} - \frac{2\pi}{B} \right| \quad 3-4a$$

$$\omega_{SPP}^{(0,1)}(0, k_{y0}) = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_S}} \left| k_{y0} + \frac{2\pi}{B} \right| \quad 3-4b$$

$$\omega_{SPP}^{(\pm 1,0)}(0, k_{y0}) = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_S}} \sqrt{\left(\frac{2\pi}{A} \right)^2 + (k_{y0})^2} \quad 3-4c$$

上式正好也是雷利關係(Rayleigh condition)。但事實上，金屬孔洞的幾何形狀也會對表面態能帶的色散關係造成改變，進而影響穿透頻譜特性。為了深入了解表面態色散關係的變化，我們計算了穿透頻譜與平行波向量的關係，結果見圖 3.5。在此計算固定 k_{x0} 為零，去變化 $k_{y0} = 0$ 到 $k_{y0} = 0.35(2\pi/B)$ 。此處的計算並沒有去同除以 GaAs 基板的穿透率，而且只考慮 P -波的入射。圖 3.5 中的白線是式子(3-4)的色散關係。圖 3.5(a)是 $b = 18 \mu\text{m}$ 情形，我們發現穿透峰值緊貼著 $(\pm 1,0)$ -能帶(即中間的白線)，這暗示了此時 $(\pm 1,0)$ -能帶是費諾穿透的主要共振態。當 k_{y0} 增加時，另一個較低頻的穿透峰值出現了，我們認為這一個穿透峰值是由另一個由稱作侷域態(localized state)的表面態所主導，此

倏域態是由 $(0,-1)$ -能帶受孔洞幾何形狀的影響去演化而成的表面態。

這裡要注意比較低頻的穿透峰值並不出現於正向入射($k_{y0}=0$)的情形。

當 b 下降成 $12\ \mu\text{m}$ 時,此低頻穿透峰值的強度以及半高寬都明顯增加,

此時穿透行為同時由倏域態與 $(\pm 1,0)$ -能帶所共同主導。當我們更進一

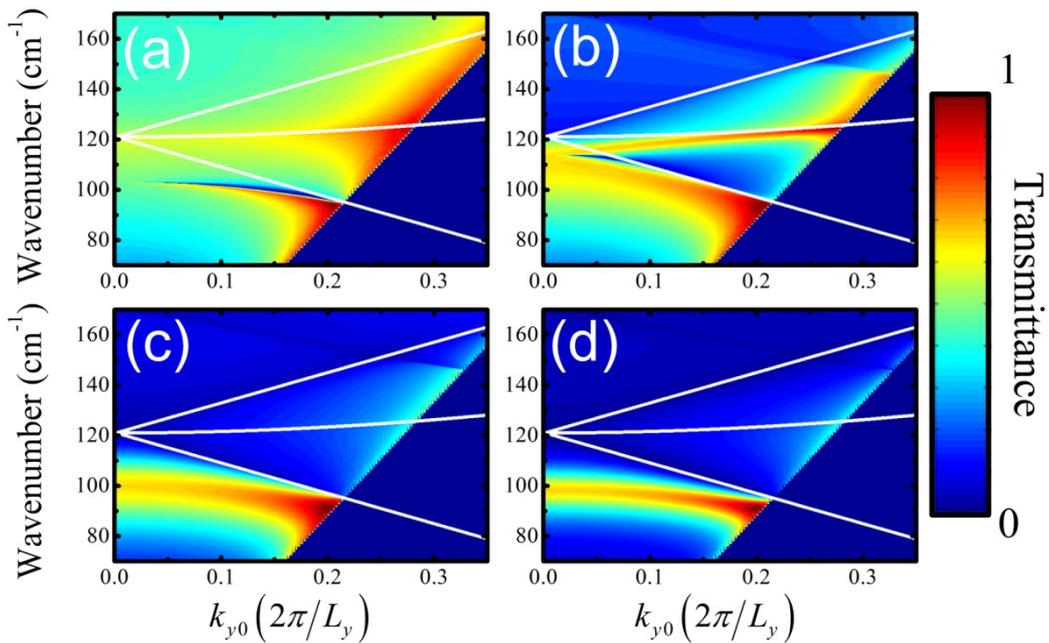


圖 3.5 穿透頻譜隨 k_y 變化的計算結果,我們分別計算了 b 等於(a) $18\ \mu\text{m}$ (b) $12\ \mu\text{m}$ (c) $6\ \mu\text{m}$ (d) $2\ \mu\text{m}$ 的情況。在此計算我們令 $k_x=0$ 。右下角的深藍色區域是真空的光錐(light-cone)。白線是式子(3-4)的色散關係,最低與最高的白線方別是 $(0,-1)$ -能帶與 $(0,1)$ -能帶,在中間的白線則是 $(\pm 1,0)$ -能帶。

步把 b 縮小成 $6\ \mu\text{m}$ 與 $2\ \mu\text{m}$ 時,由 $(\pm 1,0)$ -能帶造成的穿透峰值幾乎消失,

此時的穿透行為完全由倏域態去主導了。由圖 3.5 我們得到以下結論:

當我們把 b 由 $18\ \mu\text{m}$ 縮小到 $6\ \mu\text{m}$ 時,費諾穿透機制的主要貢獻者由

$(\pm 1,0)$ -能帶轉移到倏域態,同時伴隨著穿透峰值頻率的下降。接著我

圖 3.7 是最兩個重要的十字架波導模態的場型，我們分別命名為 TEe_1 與 TEm_1 ，這兩個模態電場分別集中於十字架的垂直臂與水平臂之上。若我們把十字架的垂直臂與水平臂分別視為兩個垂直的長方形，

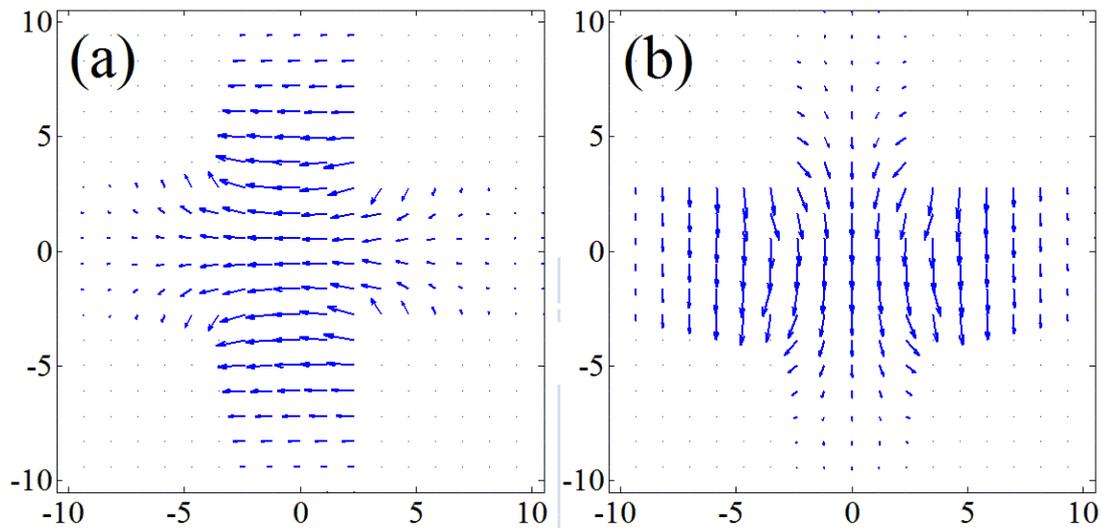


圖 3.7 十字架波導模態電場分佈。(a) TEe_1 模態，與長方形的 $TE_{0,1}$ 相對應；
(b) TEm_1 模態，與長方形的 $TE_{1,0}$ 相對應。

TEe_1 與 TEm_1 這兩個模態就分別對應兩個長方形的 $TE_{0,1}$ 與 $TE_{1,0}$ 模態。因此十字架孔洞的穿透性質可以用兩個互相垂直的長方形孔洞去思考。在 3.1.2 節曾提到，當把正方形孔洞壓縮成長方形時， S -波的穿透會因為與之作用的 $TE_{0,1}$ 波導態截止頻率上升，而使穿透頻譜強度急速下降。十字架孔洞可以分成兩個互相垂直的長方形去近似，其中 TEe_1 態（相當於垂直臂長方形的 $TE_{0,1}$ 態）可以與 S -波去作用；而 TEm_1 態（相當於水平臂長方形的 $TE_{1,0}$ 態）則與 P -波去作用。當十字架上下左右都對

稱時， TE_{e_1} 與 TE_{m_1} 的截止頻率都同樣低，讓 S -波與 P -波都可以有效穿隧金屬孔洞，使得穿透頻譜得以維持很高的強度。

我們比較一下實驗與理論的計算結果。我們討論的結構為上下左右都對稱的十字架結構，為了方便起見我們定義長度參數：

$V = a_3 + a_3' = 2a_2$ 與 $W = a_3 - a_4 = a_2 - a_1 = a_3' - a_4'$ 。把 V 由 $21\ \mu\text{m}$ 縮小到 $9\ \mu\text{m}$ ，

對應的 $W = V/3$ 則由 $7\ \mu\text{m}$ 縮小到 $3\ \mu\text{m}$ 。實驗與計算結果如圖 3.8 所示。

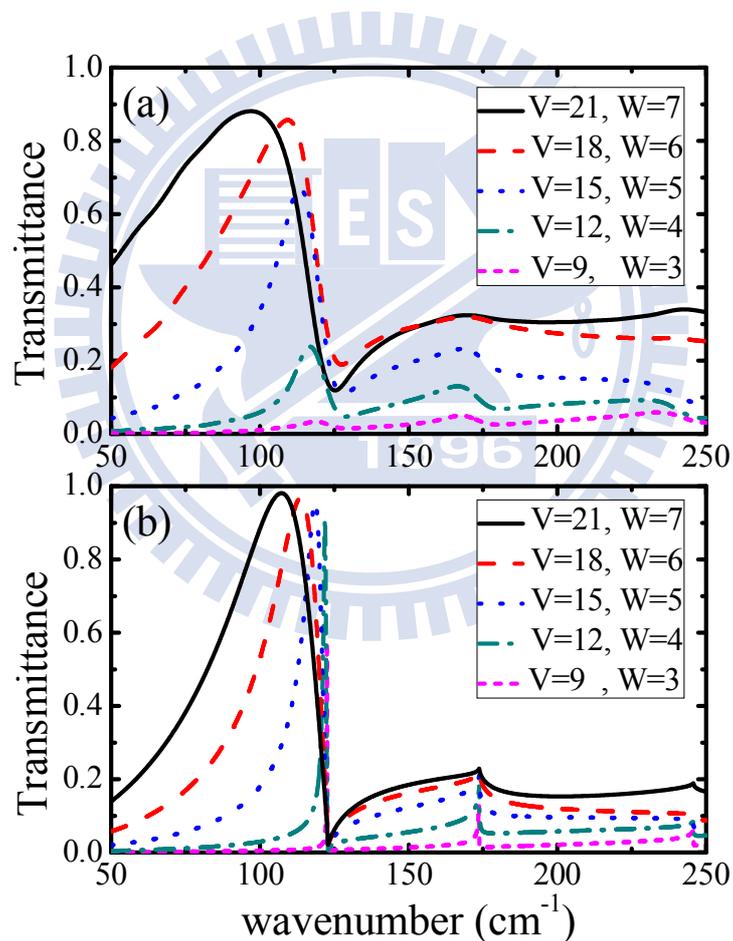


圖 3.8 (a)對稱十字架的實驗結果 (b)相同結構的計算結果。就定性而言，實驗與計算的結果相當一致。

我們可以發現對稱十字架結構具有相當高的穿透強度，非常適合做光

學濾波器的應用。當面積縮小時，實驗與理論的誤差增大了，造成誤差的原因與 3.1.2 節已有敘述。

3.2 金屬非完美效應

為了考慮非完美金屬的影響，我們在 2.2 節介紹了另一種處理週期結構散射問題的方式：傅立葉模型法。傅立葉模型法的計算量比起基底展開法大很多，但其優點是可以處理一些奇怪形狀的孔洞而不用特地先計算出該孔洞的波導模態。傅立葉模型法的精神是把空間中週期排列的介電係數進行傅立葉展開，故可以引入金屬的介電常數去計算金屬非完美的效應，也可以處理光子晶體結構(photonic crystal slab)的散射問題。

3.2.1 傅立葉模型法的正確性

傅立葉模型法中把金屬視為是一種具有「負」的介電係數的材料，對這些空間週期分佈的介電材料進行傅立葉展開，經由馬克斯威方程式的計算去求出區域(二)的本徵態。我們所求得的眾多本徵態之中，出現了許多物理上不合理的結果，例如圖 3.9(b)的電場分佈(圖 3.9 的計算結構同圖 2.1，令 $A=B=22\ \mu\text{m}$ 與 $a=b=14\ \mu\text{m}$)，該本徵態大部分的電場是分佈在金屬區域(白色框之外)，然而在金屬區域是很難有電場存在的，這暗示了圖 3.9(b)的這個本徵態在物理上是不被接受的。

針對這些異常的本徵態，我們要將之移除，再把剩下的合理的這些本徵態當做基底展開區域(二)的電磁波。

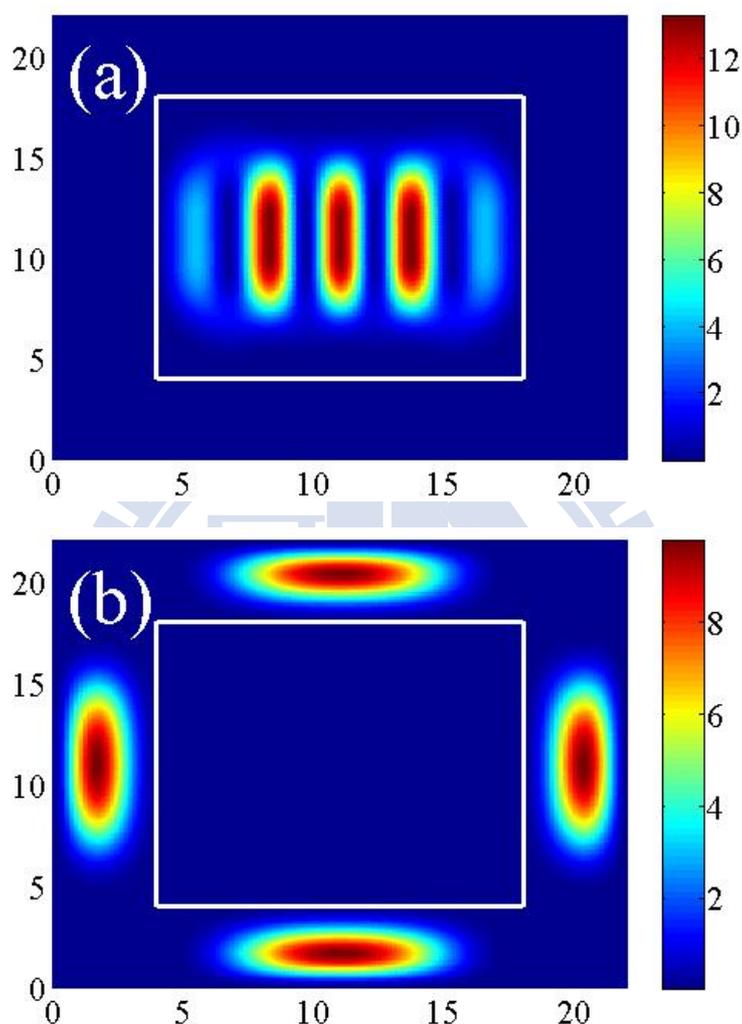


圖 3.9(a)合理的本徵態的平行方向電場強度分佈，電場絕大多數集中於孔洞區域。(b)不合理的本徵態的平行方向電場強度分佈，可看出電場絕大多數集中於金屬區域。此計算的結構如圖 2.1， $A=B=22\ \mu\text{m}$ 、 $a=b=14\ \mu\text{m}$ 。白色框之內是孔洞區域，框外是金屬區域。

3.2.2 非完美金屬討論

非完美金屬最主要的影響是金屬會吸收電磁波能量而導致穿透頻譜強度的下降，對於金屬覆蓋率越高的結構，金屬的吸收越是強烈，

故穿透強度不再是完美金屬假設所預測的值。圖 3.10(圖 3.10 所計算的結構同圖 3.9)是分別使用 2.1 節的基底展開法以及 2.2 節的傅立葉模型法的計算結果，傅立葉模型法考慮了金屬的吸收效應，其所使用的金屬介電常數來自[33]。這裡可以很明顯的發現傅立葉模型法計算的穿透頻譜其強度比基底展開法結果來的低；而且傅立葉模型法的結果也比較貼近實驗值。

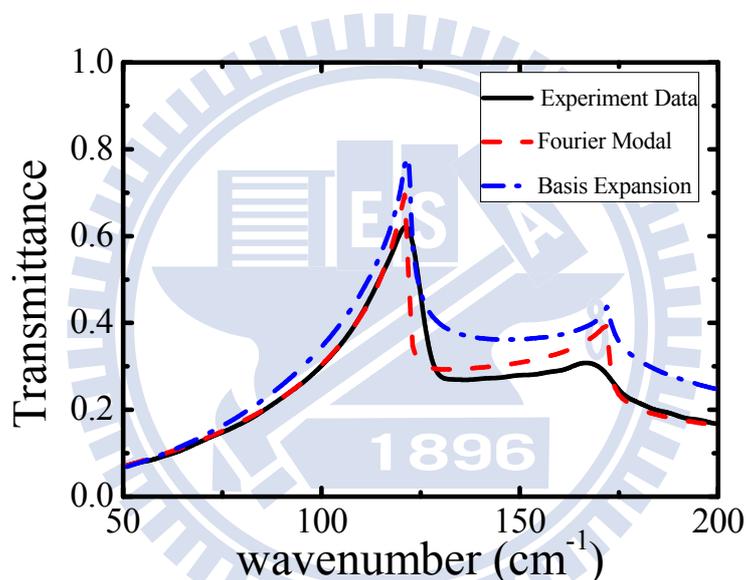


圖 3.10 不同方法計算的結果比較。紅線為傅立葉模型法的結果；藍線則為基底展開法的結果。

接下來我們要討論金屬吸收對穿透頻譜的影響，在 2001 年 Martin-Moreno 研究團隊使用基底展開法計算了獨立型金屬週期孔洞(也就是沒有基板的情形)的穿透頻譜[5]，他們的有興趣的電磁波落在可見光波段，故使用完美金屬假設是十分不妥的做法。因此他們使用表面阻抗邊界條件(surface impedance boundary condition)去修正完

美金屬的結果。在這裡我們要使用傅立葉模型法去處理相同的問題，計算的結構為 $A=B=0.75\ \mu\text{m}$ 、 $a=b=0.28\ \mu\text{m}$ 、 $L=0.32\ \mu\text{m}$ ，區域(三)的介電常數設為 1。銀在 780 nm 波段的介電常數是 $-32.2+1.7i$ ，虛部代表金屬對電磁波的吸收，我們分別帶入介電常數等於 $-32.2+1.7i$ 以及 -32.2 兩種值分別計算穿透頻譜，沒有虛部的介電常數即代表著金屬不吸收電磁波。結果見圖 3.11。在金屬不吸收電磁波的情況下，獨立型金屬週期孔洞可以達到 100% 的穿透能力；而加入電磁波的吸收去考慮時，穿透峰值的波長變化不大，穿透峰值的強度則是下降了。此處的計算結果在定性上與[5]十分一致。

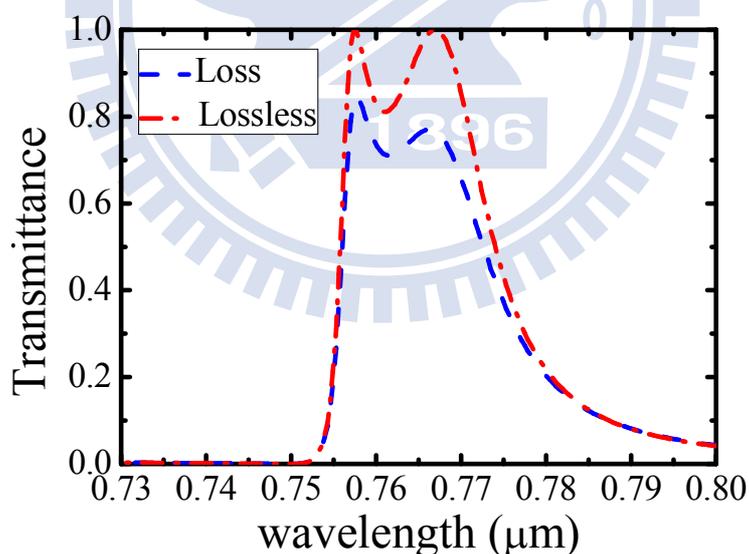


圖 3.11 獨立型金屬週期孔洞的穿透頻譜。藍線是帶入銀金屬實際介電常數的計算結果。紅線是把銀金屬介電常數虛部省略後(也就是不考慮金屬對電磁波的吸收)的計算結果。

3.3 Fabry-Perot 共振

上述的異常穿透都在討論金屬洞之中的波導模態是指數遞減的

方式傳播的情形(cut-off mode)。當金屬洞存在有可傳遞的波導模態(propagation mode)時，主導穿透效應可以使用 Fabry-Perot 共振的觀點去分析。以下我們將就 Fabry-Perot 共振加以討論。

考慮一個金屬週期孔洞所形成的 Fabry-Perot 共振系統如圖 3.12，波導模態在長度為 L 的孔洞區域傳播，傳播到與外界交界面時，各對應有 $r_1 \exp(i\phi_1)$ 與 $r_2 \exp(i\phi_2)$ 的反射率。

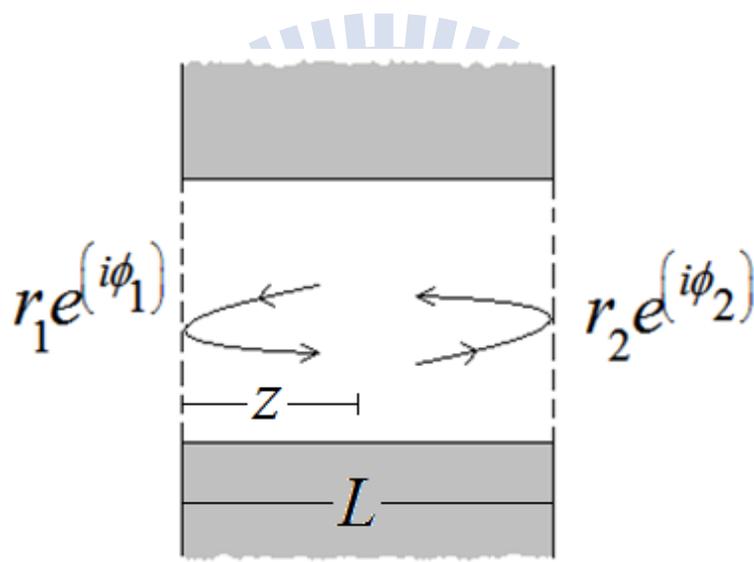


圖 3.12 Fabry-Perot 共振系統。灰色部分是金屬區，波導模態在白色區域傳播。當波導模態碰到左右壁時，分別對應有反射率 $r_1 \exp(i\phi_1)$ 與 $r_2 \exp(i\phi_2)$ 。

考慮某波導態在 z 的位置是由以下各波進行疊加：

起始波(向右傳遞) $\exp(ik_z z)$

第一次反射(向左傳遞) $\exp[ik_z (2L - z)] r_2 \exp(i\phi_2)$

第二次反射(向右傳遞) $\exp(ik_z z) \exp(ik_z 2L) r_2 \exp(i\phi_2) r_1 \exp(i\phi_1)$

第三次反射(向左傳遞) $\exp[ik_z(4L-z)][r_2 \exp(i\phi_2)]^2 r_1 \exp(i\phi_1)$

第四次反射(向右傳遞) $\exp(ik_z z) \exp(ik_z 4L) [r_2 \exp(i\phi_2)]^2 [r_1 \exp(i\phi_1)]^2$

第五次反射(向左傳遞) $\exp[ik_z(6L-z)][r_2 \exp(i\phi_2)]^3 [r_1 \exp(i\phi_1)]^2$

以此類推可以得到向右傳的總波為：

$$\exp(ik_z z) \sum_{n=0}^{\infty} [r_1 r_2 \exp(ik_z 2L + i\phi_1 + i\phi_2)]^n \quad 3-5$$

同理，向左傳的總波為：

$$\exp(-ik_z z) \exp(ik_z 2L) r_2 \exp(i\phi_2) \sum_{n=0}^{\infty} [r_1 r_2 \exp(ik_z 2L + i\phi_1 + i\phi_2)]^n \quad 3-6$$

我們把式子(3-5) (3-6)拿去與式子(2-11a)做比較如下：

$$a_{WG} \exp(ik_z z) + b_{WG} \exp[ik_z(L-z)] \quad 3-7$$

a_{WG} 與 b_{WG} 是對應某波導態的展開系數。經簡單的計算可知：

$$\begin{aligned} \frac{a_{WG}}{b_{WG}} &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} [r_1 r_2 \exp(ik_z 2L + i\phi_1 + i\phi_2)]^n}{\exp(ik_z L) r_2 \exp(i\phi_2) \sum_{n=0}^{\infty} [r_1 r_2 \exp(ik_z 2L + i\phi_1 + i\phi_2)]^n} \\ &= \frac{1}{\exp(ik_z L) r_2 \exp(i\phi_2)} \end{aligned} \quad 3-8$$

我們假設獨立型金屬週期孔洞的情況，故圖 3.12 左右兩邊對稱，

$\phi_1 = \phi_2 = \phi$ 。Fabry-Perot 共振是由於各反射波進行建設性的干涉，故共

振條件可以寫成 $k_z 2L + \phi_1 + \phi_2 = 2n\pi$ ，其中 n 是整數，因此 $k_z L + \phi = n\pi$ 。

帶入式子(3-8)可得 a_{WG}/b_{WG} 的相位是 $n\pi$ 。

接著我們將計算長方形孔洞的獨立型金屬週期孔洞結構，結構參

數為 $A=B=100\ \mu\text{m}$ 、 $a=80\ \mu\text{m}$ 、 $b=20\ \mu\text{m}$ 以及 $L=30, 90\ \mu\text{m}$ 。在此結構下，最低波導模態的截止波長比雷利波長還長，也就是說，此結構在我們感興趣的波段有可傳遞的波導模態。我們要驗證此結構的穿透現象可以視為是可傳遞的波導模態所產生的 Fabry-Perot 共振。此計算考慮垂直入射的 P -波，此波會與 $\text{TE}_{1,0}$ 波導態有強烈的交互作用。

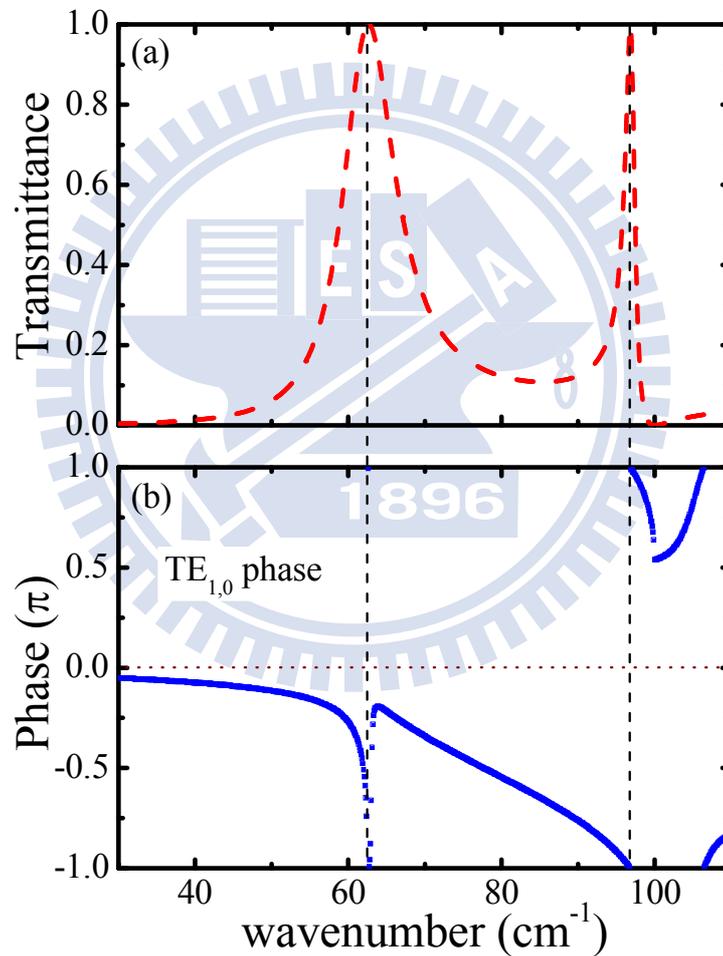


圖 3.13 (a) 長方形孔洞的結構的穿透頻譜 (b) $\text{TE}_{1,0}$ 波導模態傳播係數

a_{WG}/b_{WG} 的相位關係。可以發現穿透峰值頻率正好對應到 $n\pi$ 相位關係。本圖結構的為 $A=B=100\ \mu\text{m}$ 、 $a=80\ \mu\text{m}$ 、 $b=20\ \mu\text{m}$ 以及 $L=30\ \mu\text{m}$ 。

$L=30\ \mu\text{m}$ 的計算結果如圖 3.13 所示，穿透峰值的頻率正好對齊到

a_{WG}/b_{WG} 相位為 $n\pi$ 的位置，這顯示了此結構的穿透是 Fabry-Perot 共振。

其中最低頻的穿透峰值發生在波導模式的截止頻率附近。接著我們再

把金屬厚度增加到 $L = 90 \mu\text{m}$ ，計算結果見圖 3.14。我們發現穿透

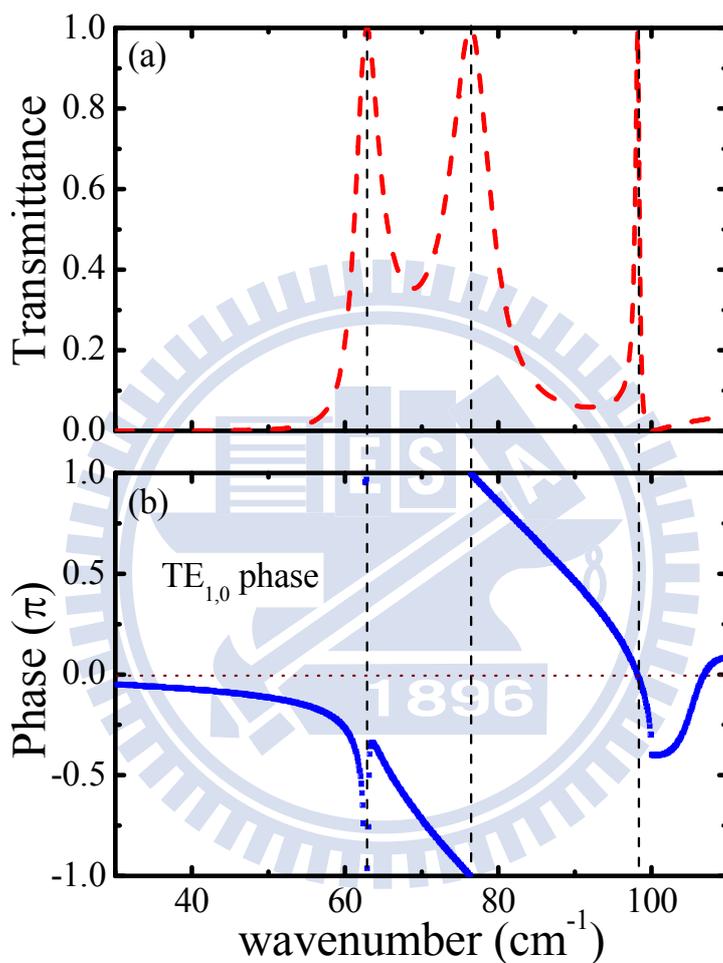


圖 3.14 (a) 長方形孔洞的結構的穿透頻譜 (b) $\text{TE}_{1,0}$ 波導模態傳播係數

a_{WG}/b_{WG} 的相位關係。可以發現穿透峰值頻率正好對應到 $n\pi$ 相位關係。本圖結構與圖 3.13 相同，唯 L 改成 $90 \mu\text{m}$ 。

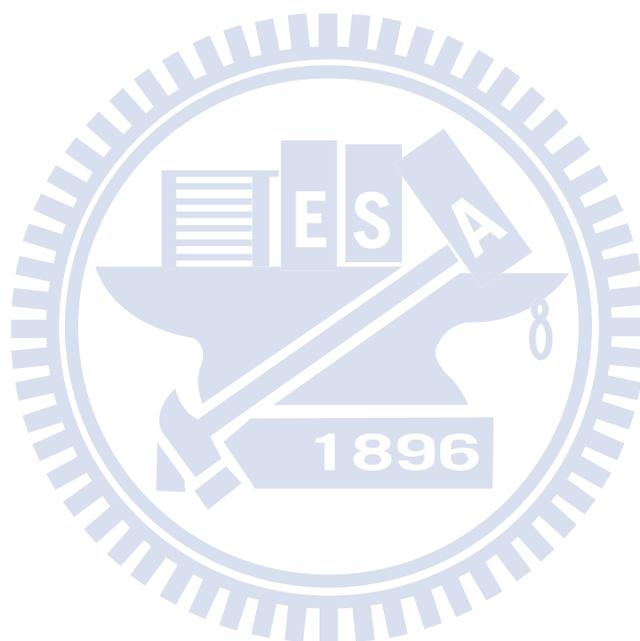
峰值的數目增加了，而且峰值頻率有向低頻移動的趨勢，這是因為當

金屬厚度增加時，在金屬洞之中所波導態所累積的相位也跟著增加，

使得較低頻的電磁波就可以累積到 $n\pi$ 的相位。同樣的，我們發現穿

透峰值的頻率仍然對齊到 a_{WG}/b_{WG} 相位為 $n\pi$ 的位置。這裡的計算顯示了，當金屬洞存在有可傳遞的波導模態時，穿透效應可用 Fabry-Perot 共振去清楚描述。

在獨立型十字架孔洞的結構也有類似的情形發生，主導穿透的波導態 TEe_1 與 TEm_1 通常都是可傳遞的，故也產生了 Fabry-Perot 共振，我們將在下一章詳述此現象以及一個有趣的應用。



第四章 應用

4.1 光學補波片

首先我們要介紹獨立型十字架孔洞的穿透性質，考慮上下左右皆對稱的十字架形狀，如前面 3.1.3 節所述，穿透行為由 TEe_1 與 TEm_1 兩個波導模態所主導。如果這些波導模態是可傳遞的，那麼穿透行為就可視為 Fabry-Perot 共振。我們計算 $V = 80 \mu\text{m}$ 、 $W = 30 \mu\text{m}$ 、 $L = 64 \mu\text{m}$ 的

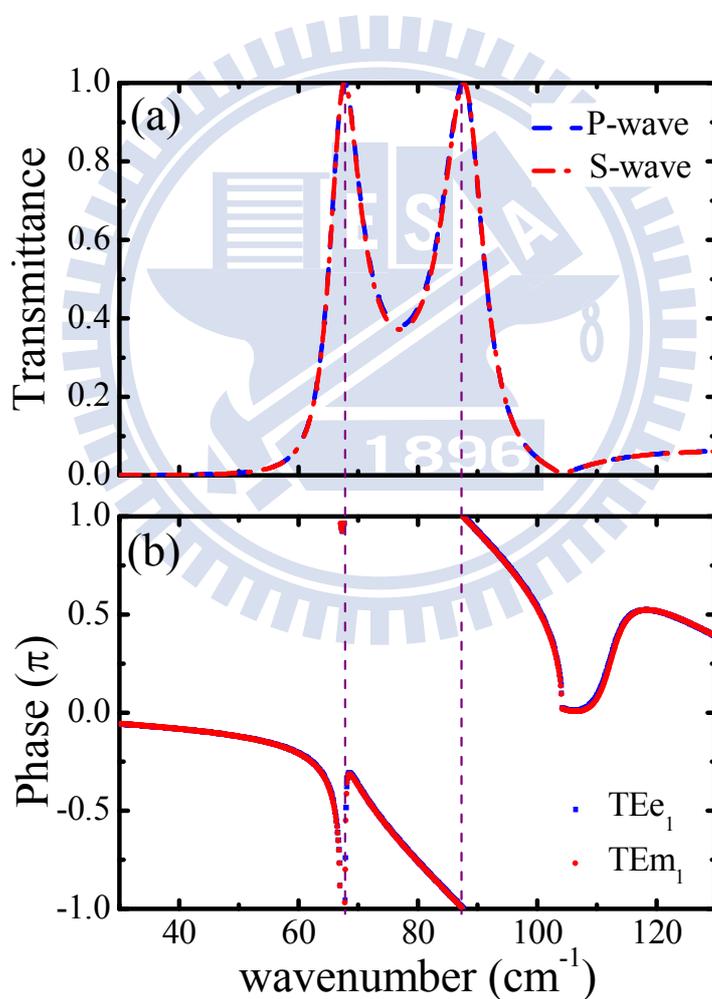


圖 4.1 獨立型對稱十字架結構($V = 80 \mu\text{m}$ 、 $W = 30 \mu\text{m}$ 、 $L = 64 \mu\text{m}$)的 (a) P -波與 S -波的穿透頻譜 (b) TEe_1 與 TEm_1 波導模態傳播係數 a_{WG}/b_{WG} 的相位關係。

獨立型對稱十字結構(參數定義見3.1.3節),晶格週期為 $A = B = 96 \mu\text{m}$, 結果如圖 4.1 所示,我們分別畫出 P -波(電場指向 y 方向)與 S -波(電場指向 x 方向)的穿透頻譜,穿透峰值的頻率正好分別發生在 TE_{e_1} 和 TE_{m_1} 波導模態的 a_{WG}/b_{WG} 相位等於 $n\pi$ 的時候。由於十字架結構是對稱的, TE_{e_1} 和 TE_{m_1} 的截止頻率都一樣,唯電場場型方向互向垂直,所以 P -波與 S -波的穿透頻譜是一模一樣的。

接著我們計算一個非對稱的獨立型十字架結構: $a_1 = 10 \mu\text{m}$ 、 $a_2 = 40 \mu\text{m}$ 、 $a_3 = a_3' = 30 \mu\text{m}$ 、 $a_4 = a_4' = 10 \mu\text{m}$ 、 $L = 64 \mu\text{m}$, 晶格週期亦為 $A = B = 96 \mu\text{m}$ 。由於十字架的垂直臂與水平臂兩臂長度不同,故 TE_{e_1} 和 TE_{m_1} 的截止頻率也就不同。水平臂比垂直臂來的長,導致 TE_{m_1} 的截止頻率低於 TE_{e_1} 的截止頻率,所以 P -波會在較低頻處首先出現穿透峰值。同樣的, TE_{m_1} 和 TE_{e_1} 波導模態的 a_{WG}/b_{WG} 相位等於 $n\pi$ 的時候,正好分別對應 P -波與 S -波的穿透峰值,這是 Fabry-Perot 共振效應。水平臂與垂直臂的不對稱造成了 P -波與 S -波穿透頻譜出現差異。而除了 P -波與 S -波會有不同強度的穿透頻譜之外, P -波與 S -波在通過此非對稱的結構時,還會有不同的相位改變,這是因為 TE_{e_1} 和 TE_{m_1} 兩個波導模態在金屬孔洞之中獲得了不同的相位改變。綜合以上,獨立型非對稱十字架結構的特性為:由於結構的不對稱,導致 P -波與 S -波在穿過金屬層時,會有不同的強度以及相位的改變。利用非對稱結

構對於不同偏振光會有不同穿透行為的性質，我們可以適當的設計讓入射的左旋光成轉變成右旋光。

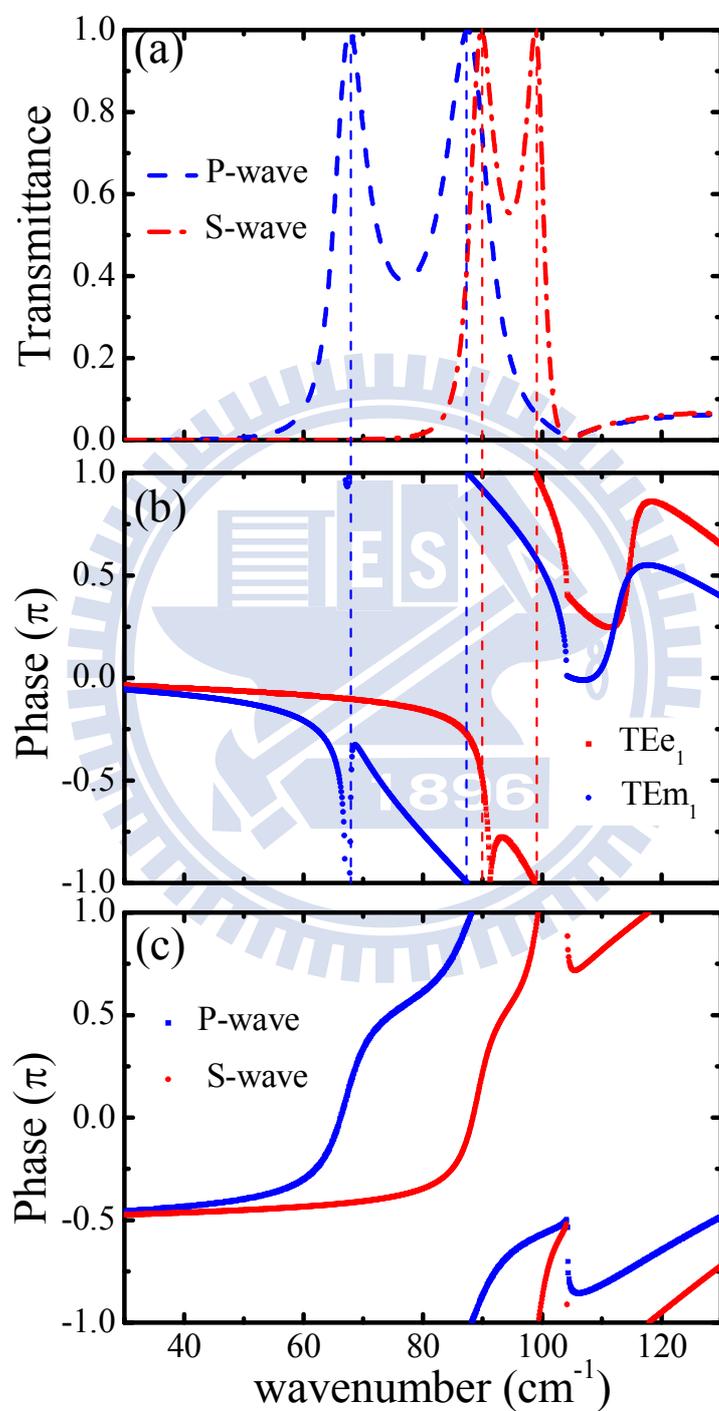


圖 4.2 非對稱十字架結構的 (a) P -波與 S -波的穿透頻譜 (b) TEe_1 與 TEM_1 波導模態傳播係數 a_{WG}/b_{WG} 的相位關係。(c) P -波與 S -波穿透金屬層之後的相位改變量。

在 $a_1 = 10 \mu\text{m}$ 、 $a_2 = 40 \mu\text{m}$ 、 $a_3 = a_3' = 30 \mu\text{m}$ 、 $a_4 = a_4' = 10 \mu\text{m}$ 、 $L = 64 \mu\text{m}$ 的結構之下(也就是圖 4.2 所使用的結構),我們正向入射一道左旋光,再把穿透的光分別投影到左旋與右旋,結果如圖 4.3 所示,可以發現,在頻率為 89 cm^{-1} 時,穿透的光有 99% 的成份變成了右旋光。我們進一

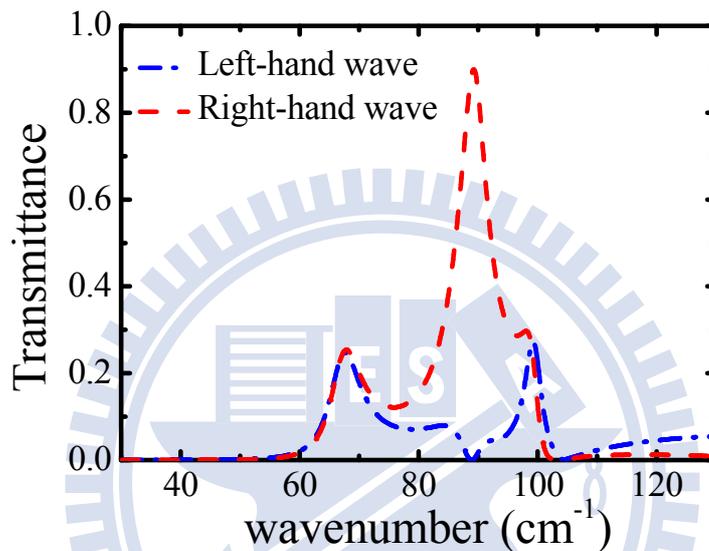


圖 4.3 入射左旋光至 $a_1 = 10 \mu\text{m}$ 、 $a_2 = 40 \mu\text{m}$ 、 $a_3 = a_3' = 30 \mu\text{m}$ 、 $a_4 = a_4' = 10 \mu\text{m}$ 、 $L = 64 \mu\text{m}$ 的非對稱十字架結構,其穿透光的左旋與右旋成分。

步改變這個結構的金屬層厚度,要觀察左旋右旋轉換比例對於金屬厚度的敏感程度。結果如圖 4.4 所示,我們把金屬厚度針對 $L = 64 \mu\text{m}$ 為基準縮放 10%,發現確實左右旋的成份都有變化。當 $L = 70.4 \mu\text{m}$ 時,最佳的左右旋轉換比例可達到 95%;而當 $L = 57.6 \mu\text{m}$ 時,最佳的左右旋轉換比例仍可達 88%。這顯示了此結構對於金屬厚度誤差的要求不算太嚴苛。

我們可以適當的設計非對稱十字架的幾何形狀,去改變入射波與

穿透波的偏極化性質。也就是說，我們可以製造出各式各樣的光學補波片，再藉由縮放整個金屬結構的大小，此光學補波片可以工作於不同的頻段。非對稱十字架金屬週期孔洞非常有機會應用在光學元件方面。

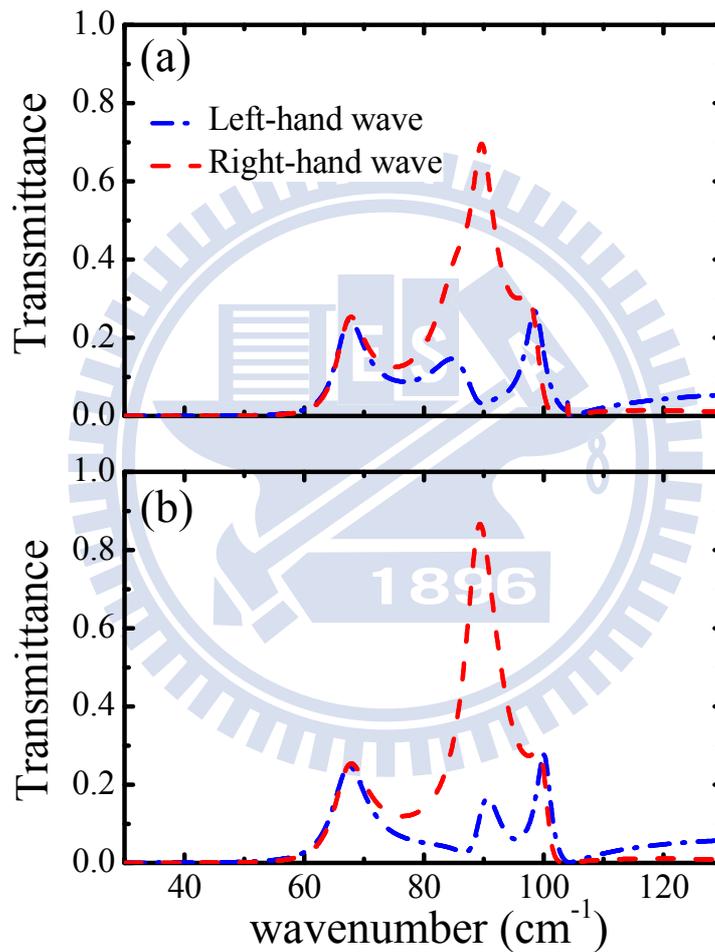


圖 4.4 入射左旋光至圖 4.3 相同的結構，改變金屬層的厚度為(a) $L = 70.4 \mu\text{m}$ (b) $L = 57.6 \mu\text{m}$ ，其穿透光的左旋與右旋成分。

4.2 長波長偵測器的應用

傳統的長波長偵測器是以量子井作為主動層，利用電子的內能帶躍遷(inter-subband transition)去吸收欲偵測的電磁波，然而可以達成

內能帶躍遷的電磁波偏振方向必須垂直量子井，見圖 4.5，這使得偵測器只能接收到側向入射的電磁波，造成工作效率不佳。

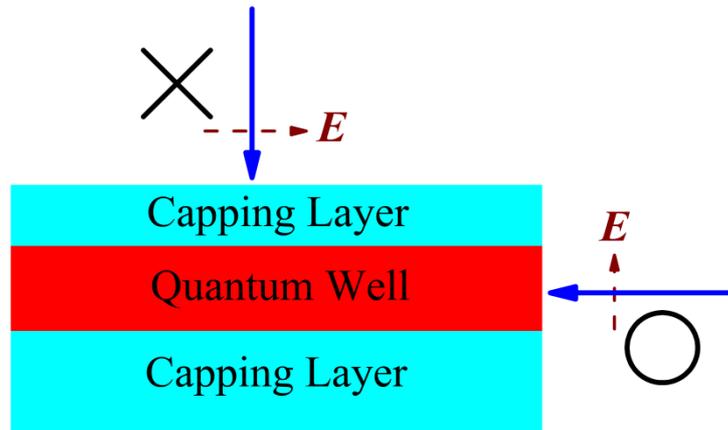


圖 4.5 偵測器示意圖。正向入射的電磁波因為偏振方向必平行於量子井方向，故無法造成內能帶躍遷。側向入射的電磁波因為偏振方向垂直於量子井方向，可以造成內能帶躍遷。

為了解決上述問題，我們要設法使得正向入射的電磁波也可以產生內能帶躍遷。換句話說，要找到一個方法使得正向入射的電磁波可以產生垂直於量子井方向的電場。一個可行的辦法是加入金屬週期孔洞結構。特定頻率正向入射的電磁波可以激發金屬週期孔洞的表面態，這些表面態具有很強的近場(near field)，這些近場具有很高的垂直於量子井方向的電場，用這些近場的電場可以造成內能帶躍遷。我們計算的穿透近場如圖 4.6，此計算的結構如圖 2.1 所示， $A=B=20\ \mu\text{m}$ 、 $a=b=12\ \mu\text{m}$ 、 $L=0.2\ \mu\text{m}$ ，基板是 GaAs。我們計算了在基板層中距離金屬深度為 $0.2\ \mu\text{m}$ 位置的 z 方向電場分佈，可以發現在頻率介於 $120\ \text{cm}^{-1}$ 到 $145\ \text{cm}^{-1}$ 之間都有不小的 z 方向電場。圖 4.6 的色彩單位是入

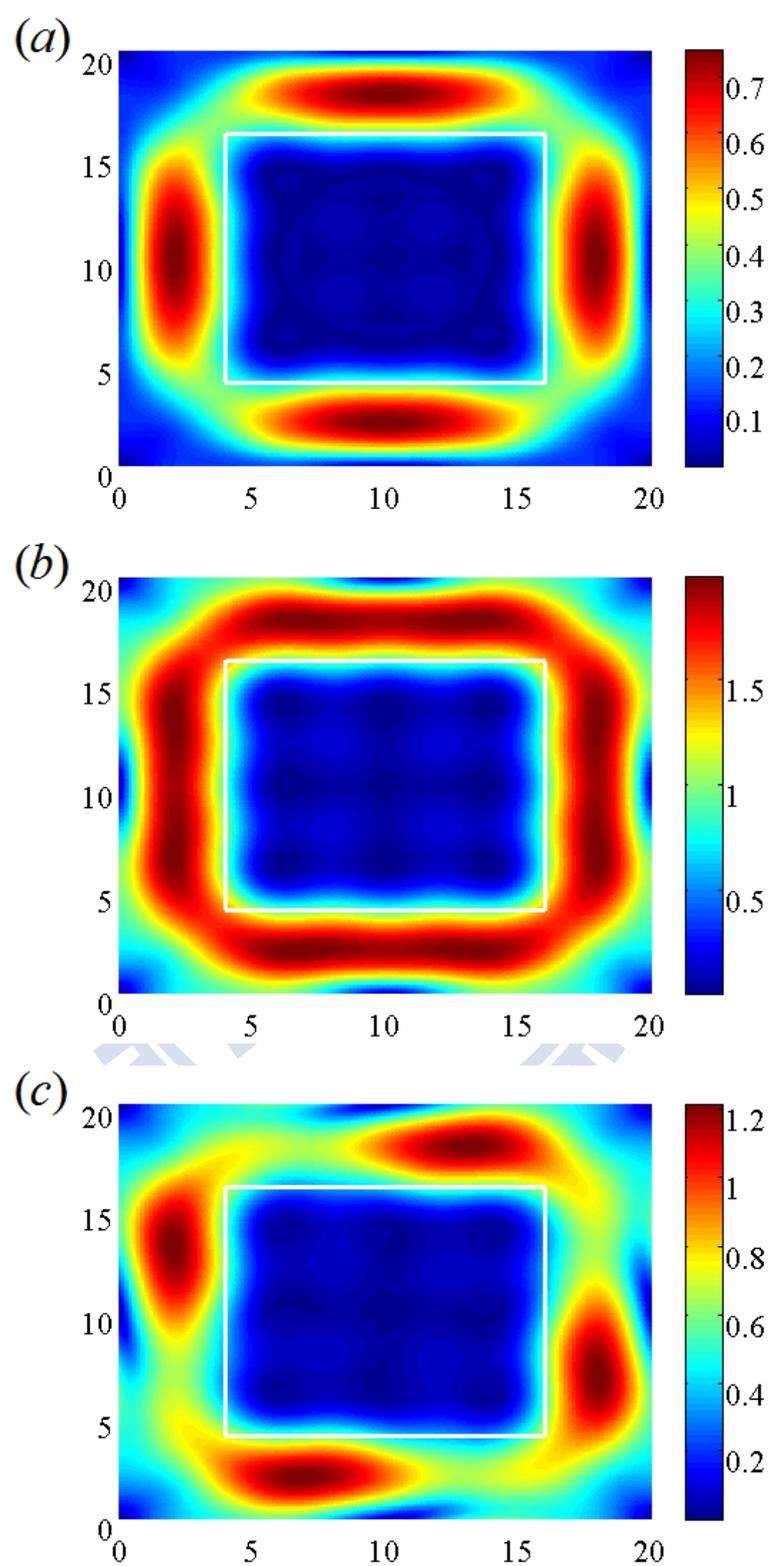


圖 4.6 基板中距離金屬深度為 $0.2 \mu\text{m}$ 位置的 z 方向電場分佈。(a) 入射頻率為 120 cm^{-1} (b) 138 cm^{-1} (c) 145 cm^{-1} 。入射光為正向入射的左旋光。對應的轉換增益 γ_z 分別為 (a) 1.58 (b) 17.82 (c) 4.36。

射光的電場強度。我們接著要討論有多少能量的光子被轉換成 z 方向電場。定義以下轉換增益：

$$\gamma_z = \frac{\iint_{\substack{\text{unit cell,} \\ \text{GaAs region}}} \epsilon_{GaAs} |E_z|^2 ds}{\iint_{\substack{\text{unit cell,} \\ \text{air region}}} \epsilon_{air} |\mathbf{E}|^2 ds} \quad 4.1$$

分母項是入射光在單位晶格面積中的能量，分子項則是在基板中深度為 $0.2 \mu\text{m}$ 位置的 z 方向電場在單位晶格面積中的能量。對於頻率為 120 cm^{-1} 、 138 cm^{-1} 與 145 cm^{-1} 的入射光，轉換增益 γ_z 分別為 1.58、17.82 與 4.36。

金屬週期孔洞結構可以產生電場垂直量子井方向近場，以提升長波長偵測計的工作能力。此結構的示意圖如圖 4.7，原本不可被利用的正向入射光在金屬孔洞的幫助下產生了垂直量子井方向的電場，進而造成內能帶躍遷。

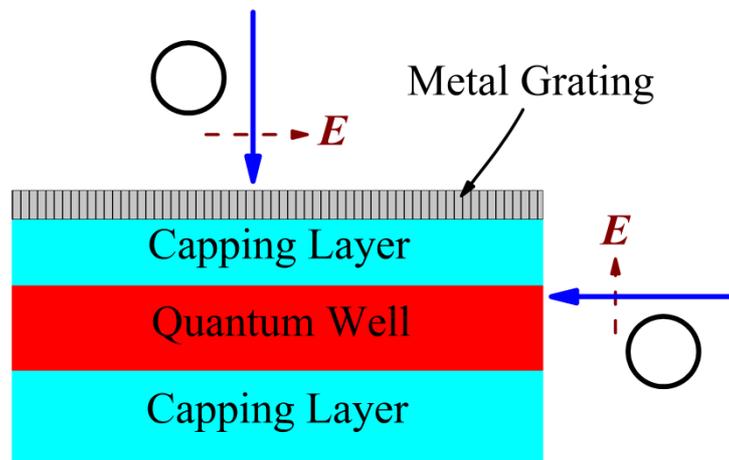


圖 4.7 利用金屬週期孔洞結構改良長波長偵測計的工作示意圖。

第五章 結論

本論文詳細介紹了兩種計算金屬週期孔洞結構的方法，分別是基底展開法以及傅立葉模型法，這兩種方法的計算結果都與實驗十分吻合。我們更進一步用這兩個計算方法去分析各種金屬週期結構的異常穿透現象。

就費諾共振的物理而言，我們提出了一個簡單的方法去分離直接穿隧與共振穿透兩個穿透路徑的貢獻。比較不同孔洞大小的各個穿透貢獻可以發現，當孔洞越小的時候，共振穿透的貢獻越強烈；此外，直接穿隧與共振穿透的干涉項會在雷利波長附近產生一個穿透低點，讓整個穿透頻譜呈現標準的費諾特性。

我們用基底展開法分析了在基板上的長方形孔洞的穿透特性，解釋了當長方形變的較細長時，穿透頻譜的非單調變化行為。之後更進一步分析穿透頻譜隨著入射光平行波向量的改變，發現在較細長的長方形孔洞結構下，侷域態是費諾共振中最重要的表面態。

我們也計算了十字架孔洞的波導模態與穿透頻譜，發現了十字架孔洞的的穿透現象可以用兩個互相垂直的長方型結構去類比，這裡的結果與實驗定性上是吻合的。

我們使用了傅立葉模型法去討論金屬的非完美效應，同時也指出傅立葉模型法在計算上可能發生的錯誤。

針對有可傳遞的波導模態的金屬孔洞結構，根據我們推導的式子可以發現，此時異常穿透的物理機制可以用 Fabry-Perot 共振去清楚的解釋。

就應用層面而言，利用獨立型非對稱十字架週期孔洞，我們可以分別改變 x 與 y 偏振光的相位以及強度，這樣可以製造出各種波段的光學補波片。

在長波長偵測器方面的應用，我們利用了金屬週期結構所具有表面態的近場，去提供垂直於量子井方向的電場，使得垂直入射光也可以產生內能帶躍遷，大幅增加偵測器的效能。



參考文獻

1. T. W. Ebbesen, H. J. Lezec, H. F. Ghaemi, T. Thio, and P. A. Wolff, *Nature (London)* **391**, 667 (1998).
2. H. A. Bethe, *Phys. Rev.* **66**, 163-182 (1944).
3. A. Roberts, *J. Opt. Soc. Am. A*, **4**, 1970 (1987).
4. H. F. Ghaemi, T. Thio, D. E. Grupp, T. W. Ebbesen and H. J. Lezec, *Phys. Rev B* **58**, 6779 (1998).
5. L. Martin-Moreno, F. J. Garcia-Vidal, H. J. Lezec, K. M. Pellerin, T. Thio, J. B. Pendry, and T. W. Ebbesen, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 1114 (2001).
6. F. J. Garcia de Abajo, R. Gomez-Medina, and J. J. Saenz, *Phys. Rev. E.* **72**, 016608 (2005).
7. H. Liu and P. Lalanne, *Nature* **452**, 728 (2008).
8. U. Fano, *Phys. Rev.* **124**, 1866 (1961).
9. C. Genet, M. P. van Exter, and J. P. Woerdman, *Opt. Commun.* **225**, 331 (2003)
10. S. Fan, W. Suh, and J. D. Joannopoulos, *J. Opt. Soc. Am. A* **20**, 569 (2003).
11. M. Sarrazin, J.-P. Vigneron, and J.-M. Vigoureux, *Phys. Rev. B* **67** 085415 (2003).
12. J. Han, A. K. Azad, M. Gong, X. Lu, and W. Zhang, *Appl. Phys. Lett.* **91** 071122 (2007).
13. J. Bravo-Abad, L. Martin-Moreno, F. J. Garcia-Vidal, E. Hendry, and J. Gomez Rivas, *Phys. Rev. B* **76**, 241102(R) (2007).
14. T. H. Isaac, W. L. Barnes, and E. Hendry, *Phys. Rev. B* **80**, 115423 (2009).
15. J. B. Pendry, L. Martin-Moreno, and F. J. Garcia-Vidal, *Science* **305**, 847 (2004).
16. F. J. Garcia-Vidal, L. Martin-Moreno and J. B. Pendry, *J. Opt. A: Appl. Opt.* **7**, S97 (2005).
17. E. Hendry, A. P. Hibbins, and J. R. Sambles, *Phys. Rev. B* **78**, 235426 (2008).
18. L. Martin-Moreno, and F. J. Garcia-Vidal, *J. Phys.: Condens. Matter* **20** 304214 (2008).
19. K. J. Klein Koerkamp, S. Enoch, F. B. Segerink, N. F. van Hulst and L. Kuipers, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 183901 (2004).
20. A. Degiron and T. W. Ebbesen, *J. Opt. A: Pure. Appl. Opt.* **7**, S90

- (2005).
21. K. L. van der Molen, K. J. Klein Koerkamp, S. Enoch, F. B. Segerink, N. F. van Hulst, and L. Kuipers, *Phys. Rev. B* **72**, 045421 (2005).
 22. F. J. Garcia-Vidal, E. Moreno, J. A. Porto, and L. Martin-Moreno, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 103901 (2005).
 23. F. Miyamaru, M. Tanaka, and M. Hangyo, *Phys. Rev. B* **74**, 153416 (2006).
 24. Z. Ruan and M. Qiu, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 233901 (2006).
 25. A. Mary, S. G. Rodrigo, L. Martin-Moreno, and F. J. Garcia-Vidal, *Phys. Rev. B* **76**, 195414 (2007).
 26. F. Miyamaru and M. W. Takeda, *Phys. Rev. B* **79**, 153405 (2009).
 27. S. Collin, C. Sauvan, C. Billaudeau, F. Pardo, J. C. Rodier, J. L. Pelouard, and P. Lalanne, *Phys. Rev. B* **79**, 165405 (2009).
 28. L. Li, *J. Opt. Soc. Am. A*, **14**, 2758 (1997).
 29. J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed., John Wiley, U.S. (1999).
 30. Ping-Wei Huang, "Study of Extraordinary Optical Transmission in THz Region", NCTU, master thesis in electronic engineering department, (200906)
 31. Shin-Jay Huang, "Studies of Metal Mesh Filters in THz Frequencies", NCTU, master thesis in electronic engineering department, (200907)
 32. F. L. Lin, *IEEE Trans. MTT-25*, 756 (1977)
 33. M. A. Ordal, L. L. Long, R. J. Bell, S. E. Bell, R. R. Bell, R. W. Alexander, Jr., and C. A. Ward, *Appl. Opt.*, **22**, 1099 (1983)

自傳

姓名： 謝泓文

性別： 男

出生日期： 民國 75 年 3 月 14 日

學歷： 國立交通大學電機資訊學士班 (93.9~97.6)

國立交通大學電子工程研究所碩士班 (97.9~99.6)

碩士論文題目： 異常光學穿透理論與應用之研究

Study of Extraordinary Optical Transmission: Theory
and Application

論文發表：

Hong-Wen Hsieh and Shun-Tung Yen, 'Analysis of GaAs/GaSb/GaAs structures under optical excitation considering surface states as an electron reservoir', J. Appl. Phys., **105**, 103515 (2009)