

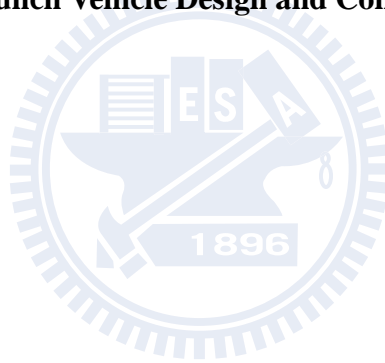
國立交通大學

電控工程研究所

碩士論文

發射載具的設計與控制

Launch Vehicle Design and Control



研究生：蕭惟庭

指導教授：林清安 教授

中華民國九十九年七月

# 發射載具的設計與控制

## Launch Vehicle Design and Control

研究生：蕭惟庭

Student : Wei-Ting Hsiao

指導教授：林清安 教授

Advisor : Prof. Ching-An Lin

國立交通大學

電控工程研究所

碩士論文

A Thesis

Submitted to Institute of Electrical and Control Engineering

College of Electrical and Computer Engineering

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of Master

in

Electrical and Control Engineering

July 2010

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十九年七月

# 發射載具的設計與控制

學生：蕭惟庭

指導教授：林清安 教授

國立交通大學 電控工程研究所

## 中文摘要

欲將衛星發射進入軌道，火箭是目前最常被使用的載具，利用持續的推力將自身及酬載一同推入高空，並以多節的型式持續加速以節省燃料。一般來說，火箭以垂直或接近垂直的角度發射，在大氣層中利用重力轉彎減少空氣阻力，以免載具受到側向力矩損壞，脫離大氣層後，在適當的時間與位置進行轉向，最後控制酬載在軌道上加速，並在預期的目標軌道上以正確的飛行方向與速度入軌。本文由設計載具以及時間參數開始，之後控制轉向與姿態，而最後在入軌加速階段，更以高度回授控制，讓軌道高度符合要求。由於火箭升空時，大部分的受力，包括氣動力、重力皆不是線性，除了需要預測軌跡以外，還需要在多次的模擬後進行改進。本文在不同的軌道要求下，利用一些控制器，進行整體設計並加入誤差，而在模擬結果中，使用的計算方式與控制法則能達到入軌的要求。

# Launch Vehicle Design and Control

Student : Wei-Ting Hsiao

Advisor : Prof. Ching-An Lin

Institute of Electrical and Control Engineering  
National Chiao Tung University

## Abstract

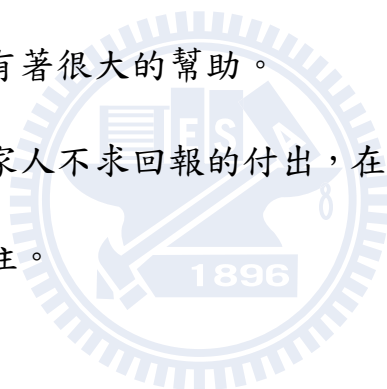
A rocket is the most frequently used vehicle to launch a payload into orbit for taking advantage of its continuous thrust to lift itself and the payload into the high altitude and of the multi-stage mode of sustained acceleration to economize the use of propellant. General speaking, the launch angle of the rocket is vertical or near vertical and gravity turn is used to the reduction of air resistance for avoiding the vehicle from damage of lateral torque in the atmosphere; and further, it can be steered into different directions in proper time and position after leaving the atmosphere; finally, the payload can be controlled to accelerate and enter the orbit with accurate directions and speed of flight in the expected target orbit. This thesis starts on design of rocket and time parameter and then the control of steering and attitude; eventually it makes use of altitude feedback control to meet the requirement of orbit altitude in the final acceleration stage of entering orbit. Because the rocket is forced a lot while launching, including the nonlinear force of aerodynamics and gravity, it not only requires the anticipation of trajectories but also many times of simulation for improvement. This thesis researches on the design with the consideration of errors for meeting different requirements of orbits and results of the simulation successfully achieve the goal of entering orbit by the use of the controller and calculation methods in different cases.

## 誌 謝

在兩年的研究生活中，除了修課以外，還有論文的研究。其中最主要感謝的便是指導教授林清安博士的悉心指導，在我的學習過程中指引方向及給予協助，除了在專業領域上的進步以外，也讓我了解了做研究應有的態度與方法。

此外要感謝 Lab 606 的成員們，不論是學長、同學所給予的經驗與意見，或是學弟們互相的討論，都讓我論文能夠更順利進行，不論在學習或是生活上都有著很大的幫助。

最後要感謝的是家人不求回報的付出，在我求學之路上默默支持，是我精神上最大的支柱。



## 目錄

第一章 緒論.....	1
第二章 載具受力模型.....	3
2.1 座標系定義.....	3
2.2 物體的位置速度變化.....	8
2.2.1 離心力對 $(V, \gamma, \psi)$ 的影響.....	9
2.2.2 科氏力對 $(V, \gamma, \psi)$ 的影響.....	10
2.2.3 速度對 $(\gamma, \psi)$ 的影響.....	11
2.2.4 TVC系統、重力、空氣阻力對 $(V, \gamma, \psi)$ 的影響.....	13
2.3 姿態變化.....	14
2.3.1 尤拉角座標轉換.....	14
2.3.2 尤拉方程式.....	15
2.3.3 四元素方程式.....	16
2.3.4 旋轉運動方程式.....	17
2.4 氣動力模型.....	17
2.5 火箭推力.....	19
第三章 載具設計.....	20
3.1 物理參數的設計：.....	22
3.2 時間參數的設計.....	26
第四章 控制系統.....	30
4.1 火箭轉向控制器.....	30
4.1.1 重力轉彎.....	30
4.1.2 大幅度轉向.....	30
4.2 入軌前的精準控制.....	31
第五章 模擬結果與討論.....	34
5.1 軌道高度 300km入軌模擬結果.....	34

5.1.1 入軌情形 .....	34
5.1.2 加上時間誤差 .....	36
5.2 以不同高度入軌的情形 .....	40
5.3 討論燃料比率及 $I_{sp}$ 的影響 .....	42
5.3.1 不同燃料比率的模擬 .....	42
5.3.2 入軌條件的臨界值與修正 .....	43
第六章 結論 .....	52
參考資料 .....	53



## 圖目錄

圖 2.1 慣性座標系、地球座標系、發射座標系示意圖.....	3
圖 2.2 切平面座標與慣性座標關係圖.....	5
圖 2.3 切平面座標系.....	5
圖 2.4 體座標示意圖.....	6
圖 2.5 速度座標示意圖.....	6
圖 2.6 離心力之計算示意圖.....	9
圖 2.7 離心力值計算.....	10
圖 2.8 速度影響仰角 $\gamma$ 示意圖.....	11
圖 2.9 速度對方向角影響一.....	12
圖 2.10 速度對方向角影響二.....	12
圖 2.11 推力、空氣阻力、重力方向示意圖.....	13
圖 2.12 體座標下各種角度定義.....	18
圖 3.1 Mu-3-S-II 入軌情形[6].....	20
圖 3.2 典型的火箭升空過程[7].....	21
圖 3.3 二、三階段佔總質量不同比例下的飛行軌跡 (15%~35%).....	23
圖 3.4 二、三階段佔總質量不同比例下轉向後的飛行軌跡.....	25
圖 3.5 轉向時間示意圖.....	27
圖 3.6 $\gamma$ 變化示意圖.....	28
圖 4.1 重力轉彎控制方塊.....	30
圖 4.2 進行轉向的角度控制方塊.....	31
圖 4.3 新的 $\theta_c$ 計算.....	32
圖 5.1 未加誤差的控制情形 (高度、速度、仰角、尤拉角).....	34
圖 5.2 未加誤差入軌後繞地運行 (高度、速度、經度、緯度).....	35
圖 5.3 轉向時間誤差 (-1s~+1s) 自由飛行 (高度、速度、仰角).....	36
圖 5.4 轉向時間誤差 (-1s~+1s) 高度回授控制飛行 (高度、速度、仰角).....	37
圖 5.5 第三階段時間啟動誤差 (-1s~+1s) 自由飛行 (高度、速度、仰角).....	38
圖 5.6 第三階段啟動時間誤差 (-1s~+1s) 高度回授控制飛行 (高度、速度、仰角) .....	39
圖 5.7 以不同高度入軌情形 (高度、速度、仰角、尤拉角).....	41
圖 5.8 不同燃料比率的入軌情形 (高度、速度、仰角、尤拉角).....	43
圖 5.9 入軌條件計算的時間關係.....	44
圖 5.10 飛行仰角的變化圖.....	47
圖 5.11 空氣阻力的模擬圖.....	48
圖 5.12 推力與攻角對時間的關係圖.....	49
圖 5.13 改善燃料比率後的模擬結果 (高度、速度、仰角、尤拉角).....	50
圖 5.14 改善 $I_{sp}$ 後的模擬結果 (高度、速度、仰角、尤拉角).....	51





## 表目錄

表 2.1 座標系統.....	7
表 2.2 變數定義.....	8
表 3.1 不同重量比例的能量獲得測試結果.....	24
表 3.2 目標為海拔 300km圓形軌道運行入軌的火箭物理參數 .....	26
表 4.1 預期的高度變化量.....	32
表 5.1 目標 400km高空的衛星物理參數 .....	40
表 5.2 三個不同燃料比率的火箭物理參數.....	42



## 第一章 緒論

載具火箭功能很多，其中一個便是將衛星送至軌道中運作，隨著目前各國太空科技漸漸發展，衛星無論在通訊、氣象、探勘、國防上都扮演著舉足輕重的角色，但台灣卻始終無法自力發展衛星，重點就在於載具發射到入軌的技術無法掌握，本篇論文便是在討論如何利用推進系統將衛星送至高空而繞地運行。

一般來說火箭為了節省燃料會分階段進行推進，一段燃料燃盡後會將一些部位適時脫節，例如前一階段的火箭外殼、接頭等等，減輕質量而節省燃料、容易加速且容易保持穩定。衛星的分類依軌道高度可分為高、中、低三種，高軌道衛星在離地約三萬六千公里高空，與地球相同角速度運行，低軌道大約介於160至2000公里的空中，仍會受到微弱的空氣阻力，2000至36000公里之間則為中軌道衛星，而著名的國際太空站即為位於340至360公里之間的低軌衛星[2]。

本案例討論為四階段的火箭，每一節功能皆有不同功能與目標，其中第一節以增加高度與重力轉彎為主，目標為推出大氣密度最高的部分。第二節則是繼續增加高度，並且在一定高度下進行轉向。第三節在接近軌道的高空加速，並控制高度、速度方向入軌。第四節則為衛星繞地運行。火箭在大氣層中升空時，為了增加穩定度，最常使用的方法為重力轉彎，能使速度方向與載具重合，減少空氣阻力所造成的力矩。在第二階段時，因空氣稀薄之故，阻力較小，經計算時間點轉向，並給予一段時間自由飛行以增加高度。當高度足夠後啟動第三階段，因重量輕、加速快，故加速以第三階段為主，並給予高度、速度與姿態角的回授，希望能夠控制載具能維持預設的目標高度穩定加速入軌。衛星入軌的要求為：受到的地球重力剛好為能使其進行等速率圓周運動之向心力，以圓形軌道來說，速度方向必須平行於該處地表之切線方向，且速率值達到需求。現實中衛星軌道不一定為圓形，大部分為橢圓形，速度方向就不一定是地表切面，但若先利用圓形軌道入軌後，給予一些加速度來進行轉向修正為橢圓會是較容易的做法，但之後的修正本文便不予討論。

然而，在一個三個方向移動與三個方向轉動的六自由度火箭中，力量不只會影響火箭的位置，更會影響到火箭的飛行姿態，進而需要討論其是否真能以預期的方式加速，許多側向較小的外力不能輕易忽略。以每秒數千公尺高速運行的火箭控制不易，且近圓形地球的重力與大氣組成複雜，在大氣中載具會因大氣力矩產生轉向。載具的重量配置以及現實燃料與載具設計有一定的規格，在這些限制之下欲達到期望的軌道位置之過程極為繁瑣，並思考未來技術進步可求改進的地方為何等等。

本文分數章節依序討論達到目標，第二章中解釋在載具受力後所做的位置、姿態、速度等等改變。第三章討論載具的物理參數與飛行時間的設計。第四章為控制系統的設計。第五章為模擬結果與討論，並延伸額外的參數討論與模擬。第六章為結論。



## 第二章 載具受力模型

物體在空間中受到力與力矩的影響，會使其位置、速度、姿態有所改變，因此必須先求出在地球上物體受力的改變情形，之後才容易進行設計與推導。本章在2.1節定義座標系，2.2節推導載具受力所造成的位置速度變化方程式，2.3節則推導載具受力的姿態變化方程式，2.4節計算氣動力模型，2.5節計算載具本身的推力模型。

### 2.1 座標系定義

首先，為了計算動態變化以及推導公式，我們需要利用不同座標系轉換，以求出完整的載具受力情況，首先介紹的為慣性座標系、地球座標系以及發射座標系，如圖2.1所示。

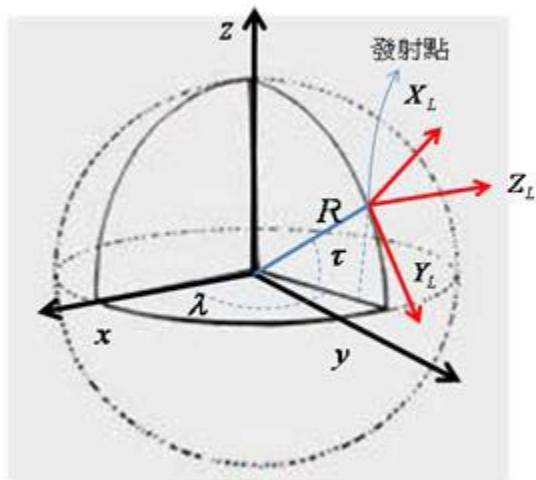


圖 2.1 慣性座標系、地球座標系、發射座標系示意圖

#### 慣性座標系 $(x, y, z)$

以地心為原點， $x$  軸為  $t=0$  時沿著赤道平面往經度  $0$  度之方向， $z$  軸為往地球北極之方向， $y$  軸則為右手定則之另一軸，可計算出目前地心與載具之間絕對的位置關係。

### 地球座標系 $(\lambda, \tau, R)$

以地心為原點，隨著時間自轉之座標系， $t=0$ 時 $\lambda=0$ 與慣性座標正 $x$ 軸方向重合， $R$ 為物體質心與地心之距離， $\tau$ 則為與赤道面的夾角，即為我們熟知的地球經緯度座標系。此外，定義海拔高度 $h=R-R_0$ ， $R_0$ 為地球半徑。因地球自轉使得座標時變，將地球座標與慣性座標關係式列為：

$$\begin{aligned}x(t) &= R \cos(\lambda + \omega t) \cos \tau \\y(t) &= R \sin(\lambda + \omega t) \cos \tau \\z(t) &= R \sin \tau\end{aligned}\quad (2.1)$$

其中 $\omega$ 為地球自轉之角速度值。

### 發射座標系 $(X_L, Y_L, Z_L)$

以發射點為原點，地表平面之正上方為 $X_L$ ，地表平面往發射方向為 $Z_L$ ，剩下一軸以符合右手定則繪出，以本篇論文來說，為求軌道最貼近地球赤道面，通常會選擇正東方發射。

### 切平面座標系 $(E, N, U)$

以物體質心所在位置對以地心為圓心之球面作切平面， $U$ 為垂直平面向上， $N$ 為切面上指向正北方（該球面之北方）， $E$ 則為符合右手定則之另一軸，朝向正東，沿地球自轉之切線速度方向。將物體所在位置可繪出如圖 2.2 的關係圖。

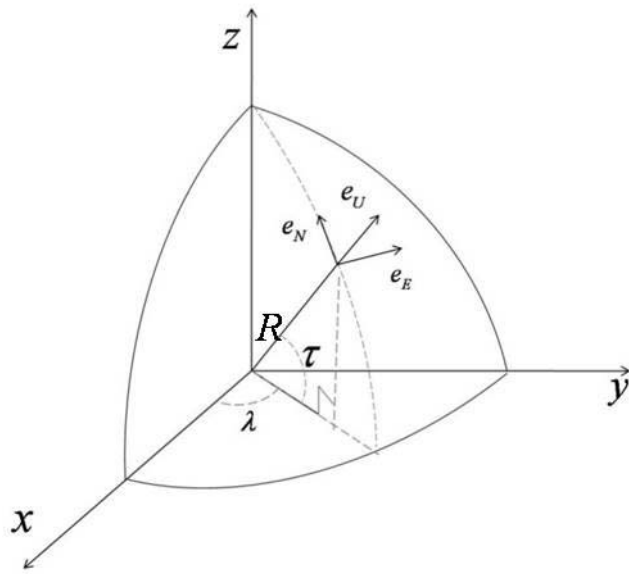


圖 2.2 切平面座標與慣性座標關係圖

圖 2.2 為地球一部分之剖面，以慣性座標之原點為地心，將切面上之  $(\mathbf{e}_E, \mathbf{e}_N, \mathbf{e}_U)$  取出可繪出圖 2.3 之切平面座標系，即為  $(E, N, U)$ 。其中可定義出  $\gamma$ 、 $\psi$ 、 $V$ ， $\gamma$  為飛行的仰角， $\psi$  為方向角， $V$  則為速度之值。

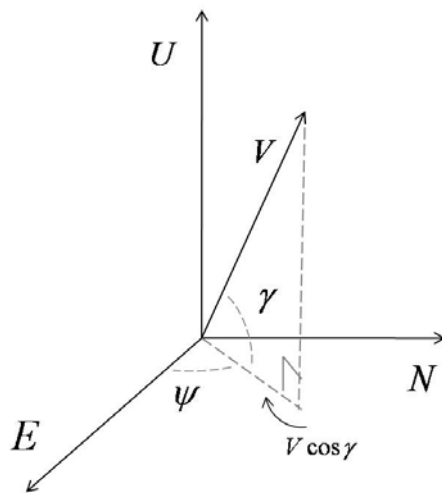


圖 2.3 切平面座標系

**體座標系 ( $X_b, Y_b, Z_b$ )**

物體（機身）指向為  $X_b$ ， $Z_b$  為向下， $Y_b$  向右，如圖 2.4 所示。

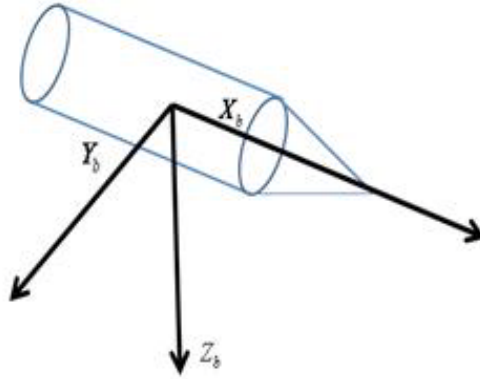


圖 2.4 體座標示意圖

**速度座標 ( $X_v, Y_v, Z_v$ )**

取物體速度方向為  $X_v$ ，以速度方向及切平面座標之 U 軸畫一假想圓， $X_v$  通過圓上之點的切線朝向正 U 軸之方向為  $Y_v$ ，接著利用右手定則取  $Z_v$ ， $Z_v$  落於 EN 平面之上，而計算受力時， $Z_v$ 、 $Y_v$  上的分力分別會造成  $\psi$ 、 $\gamma$  的改變，也可視為速度方向變化，詳細可見圖 2.5，其中， $\alpha_c$  為全攻角， $\mu$  則如圖 2.5 所示。

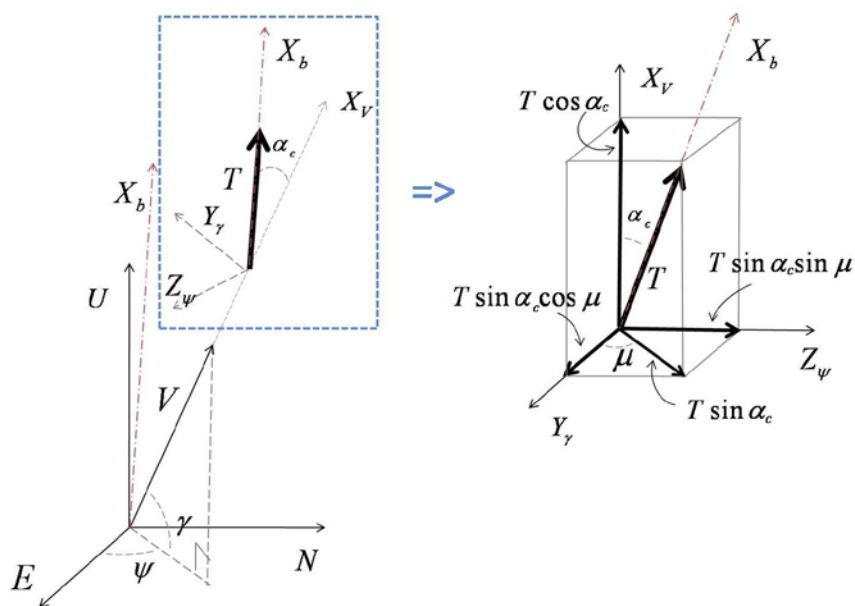


圖 2.5 速度座標示意圖



將以上所有座標系可整理如表 2.1：

名稱	原點	描述
地心慣性座標 ( $x, y, z$ )	地心	$x$ ：赤道面上指向初始時間的子午線。 $y$ ：符合右手定則座標。 $z$ ：正北極方向。
地球座標 ( $\lambda, \tau, R$ )	地心	$\lambda$ ：地球經度。 $\tau$ ：地球緯度。 $R$ ：與地心的距離。
發射座標 ( $X_L, Y_L, Z_L$ )	發射點	$X_L$ ：發射點所在地表平面向上。 $Y_L$ ：符合右手定則座標。 $Z_L$ ：發射點所在地指向發射方向。
切平面座標 ( $E, N, U$ )	載具質心	$E$ ：對地心作假想球切平面正東。 $N$ ：對地心作假想球切平面正北。 $U$ ：對地心作假想球切平面正上方。
體座標 ( $X_b, Y_b, Z_b$ )	載具質心	$X_b$ ：載具長軸方向，指向前方。 $Y_b$ ：在火箭長軸的左右平面取垂直 $X$ 的右方。 $Z_b$ ：符合右手定則座標。
速度座標 ( $X_v, Y_v, Z_v$ )	載具質心	$X_v$ ：物體移動方向。 $Y_v$ ：朝切平面座標 $U$ 軸為正。 $Z_v$ ：符合右手定則座標。

表 2.1 座標系統

## 2.2 物體的位置速度變化

在計算時運動狀態時，需要用到許多物理量，在此先定義如表2.2：

$\lambda$	物體所在位置之經度。	$a_E$	E 方向的加速度分量。
$\tau$	物體所在位置之緯度。	$a_N$	N 方向的加速度分量。
$R$	物體所在位置與地心之距離。	$a_U$	U 方向的加速度分量。
$r_0$	地球平均半徑。	$\gamma$	物體與切平面座標夾角。
$h$	物體所在位置之海拔高度。	$\psi$	物體切平面座標方向角。
$\omega$	地球自轉角速率。		$(\gamma, \psi)$ 見圖 2.3
$V$	物體移動速率。	$\alpha_c$	全攻角。
$T$	TVC 系統的推力。	$\alpha$	攻角
$D$	空氣對速度反方向的阻力。	$\beta$	側滑角。
$L$	空氣對速度往物體垂直方向阻力。	$\mathbf{R}$	物體位置方向向量，見圖 2.6。
$\mu$	見圖 2.5。	$\boldsymbol{\omega}$	角速度方向向量，見圖 2.6。

表 2.2 變數定義

在圖 2.3 中， $V$  為物體移動速率，再利用  $\gamma$  及  $\psi$  定義速度方向，由速度方向可求出經緯度及高度變化速率：

$$\begin{aligned}\dot{\lambda} &= \frac{V \cos \gamma \cos \psi}{R \cos \tau} \\ \dot{\tau} &= \frac{V \cos \gamma \sin \psi}{R \cos \tau} \\ \dot{h} = \dot{R} &= V \sin \gamma\end{aligned}\quad (2.2)$$

飛行體所在位置以地球座標  $(\lambda, \tau, R)$  表示，計算受力狀況時，將力量轉至切平面座標以便於計算飛行體運動模式，而三個方向的加速度  $(a_E, a_N, a_U)$  對物體的  $(V, \gamma, \psi)$  產生變化量如(2.3)式。

$$\begin{bmatrix} a_v \\ a_\gamma \\ a_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \psi & \cos \gamma \sin \psi & -\sin \gamma \\ \frac{-1}{V} \sin \gamma \cos \psi & \frac{-1}{V} \sin \gamma \sin \psi & \frac{1}{V} \cos \gamma \\ \frac{-1}{V \cos \gamma} \sin \psi & \frac{1}{V \cos \gamma} \cos \psi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_E \\ a_N \\ a_U \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

其中， $(a_v, a_\gamma, a_\psi)$  代表了  $(V, \gamma, \psi)$  的變化率，除了火箭本身的推力及空氣阻力以外，還有地球自轉使載具受到的離心力、科氏力，將這些力量分開計算並定義各力量的影響如下：

$$\begin{aligned} \dot{V} &= a_{v1} + a_{v2} + a_{v3} \\ \dot{\gamma} &= a_{\gamma1} + a_{\gamma2} + a_{\gamma3} + a_{\gamma V} \\ \dot{\psi} &= a_{\psi1} + a_{\psi2} + a_{\psi3} + a_{\psi V} \end{aligned} \quad (2.4)$$

其中  $(a_{v1}, a_{\gamma1}, a_{\psi1})$  表示離心力造成的影響， $(a_{v2}, a_{\gamma2}, a_{\psi2})$  表示科氏力造成的影響， $(a_{v3}, a_{\gamma3}, a_{\psi3})$  表示重力、推力、空氣阻力造成的影響，除了這些力量造成的加速度及角速度以外，速度也會對  $(\gamma, \psi)$  的角速度產生影響為  $(a_{\gamma V}, a_{\psi V})$ 。

### 2.2.1 離心力對 $(V, \gamma, \psi)$ 的影響

在分析載具受到的離心力時，必須其作用於載具上加速度，投影至切平面座標上。而作用於載具之離心力的大小及方向如圖 2.6 及圖 2.7 所示。

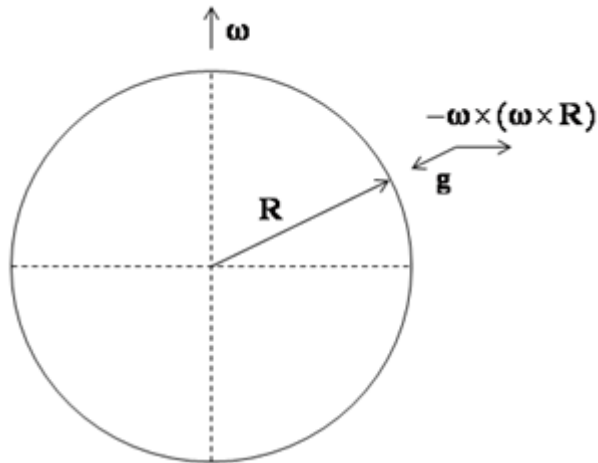


圖 2.6 離心力之計算示意圖

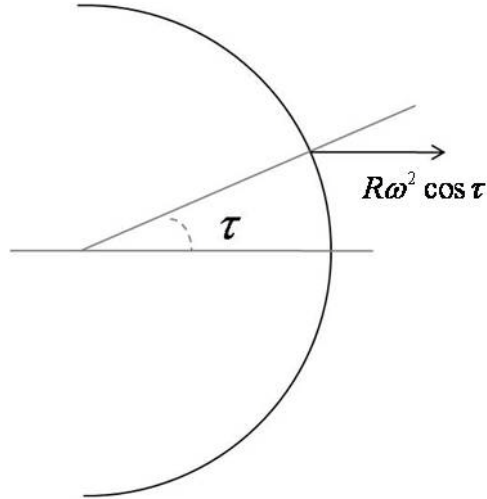


圖 2.7 離心力值計算

圖 2.6 中的  $\omega$  為地球自轉角速度，以向量表示。經過  $-\omega \times \mathbf{R}$  計算後，離心力在緯度  $\tau$  處之加速度大小為  $R\omega^2 \cos \tau$ ，如圖 2.7 所示，其中的  $\omega$  則為角速率值。將離心力值投影至切平面座標以  $(a_{E1}, a_{N1}, a_{U1})$  表示， $E$  方向分量為 0，可整理如下：

$$\begin{cases} a_{E1} : 0 \\ a_{N1} : -R\omega^2 \cos \tau \sin \tau \\ a_{U1} : -R\omega^2 \cos \tau \cos \tau \end{cases} \quad (2.5)$$

將(2.5)式套用(2.3)式，離心力對  $(V, \gamma, \psi)$  影響如下：

$$\begin{cases} a_{V1} = R\omega^2 \cos \tau (\cos \tau \sin \gamma - \sin \tau \cos \gamma \sin \psi) \\ a_{\gamma 1} = \frac{R\omega^2}{V} \cos \tau (\cos \tau \cos \gamma + \sin \tau \sin \gamma \sin \psi) \\ a_{\psi 1} = \frac{-R\omega^2}{V \cos \gamma} \cos \tau \sin \tau \cos \psi \end{cases} \quad (2.6)$$

### 2.2.2 科氏力對 $(V, \gamma, \psi)$ 的影響

計算科氏力的影響同樣要將其投影至切平面座標系，地球自轉角速度  $\omega$  及物體運動速度投影在切平面座標上的分量可表示如下：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &: (0, \omega \cos \tau, \omega \sin \tau) \\ \mathbf{V} &: (V \cos \gamma \cos \psi, V \cos \gamma \sin \psi, V \sin \gamma)\end{aligned}\quad (2.7)$$

科氏力造成的加速度可計算為：

$$2\boldsymbol{\omega}\mathbf{V} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_E & \mathbf{e}_N & \mathbf{e}_U \\ 0 & \omega \cos \tau & \omega \sin \tau \\ V \cos \gamma \cos \psi & V \cos \gamma \sin \psi & V \sin \gamma \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

其中  $\mathbf{e}_E$ 、 $\mathbf{e}_N$ 、 $\mathbf{e}_U$  為切平面座標上單位向量，計算行列式值可得到加速度在切平

面座標下三個方向的分量，以  $(a_{E2}, a_{N2}, a_{U2})$  表示如下：

$$\begin{cases} a_{E2} = \omega V (\cos \tau \sin \gamma - \sin \tau \cos \gamma \sin \psi) \\ a_{N2} = \omega V (\sin \tau \cos \gamma \cos \psi) \\ a_{U2} = -\omega V (\cos \tau \cos \gamma \cos \psi) \end{cases} \quad (2.9)$$

將(2.9)式套用(2.3)式，科氏力對  $(V, \gamma, \psi)$  影響如下：

$$\begin{cases} a_{V2} = 0 \\ a_{\gamma 2} = 2\omega \cos \tau \cos \psi \\ a_{\psi 2} = 2\omega (\cos \tau \tan \gamma \sin \psi - \sin \tau) \end{cases} \quad (2.10)$$

### 2.2.3 速度對 $(\gamma, \psi)$ 的影響

如圖 2.8 可以明顯看出  $\gamma$  的變化率直接由切線速率與半徑比值求得。

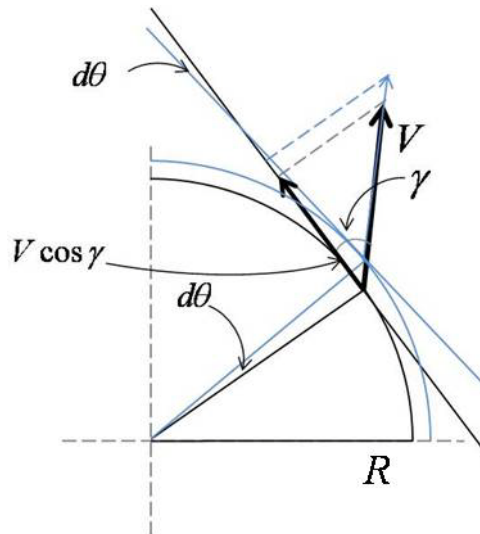


圖 2.8 速度影響仰角  $\gamma$  示意圖

速度在仰角上的影響由速度分量  $V \cos \gamma$  產生。而方向角  $\psi$  的變化率則由速度及經緯度決定，由圖 2.9 可看出，方向角隨經度改變而變，並且觀察出影響方向角變化的速度分量為  $V \cos \gamma \cos \psi$ ，接著，可從圖 2.10 得到轉動的半徑為  $R \cot \tau$ ，因緯度不同造成方向角變化率不同，低緯度時改變不明顯，尤其赤道的變化率為 0，高緯度變化率較快，可整理出關係如下：

$$\begin{cases} a_{\gamma V} = \frac{V \cos \gamma}{R} \\ a_{\psi V} = -\frac{V}{R} \tan \tau \cos \gamma \cos \psi \end{cases} \quad (2.11)$$

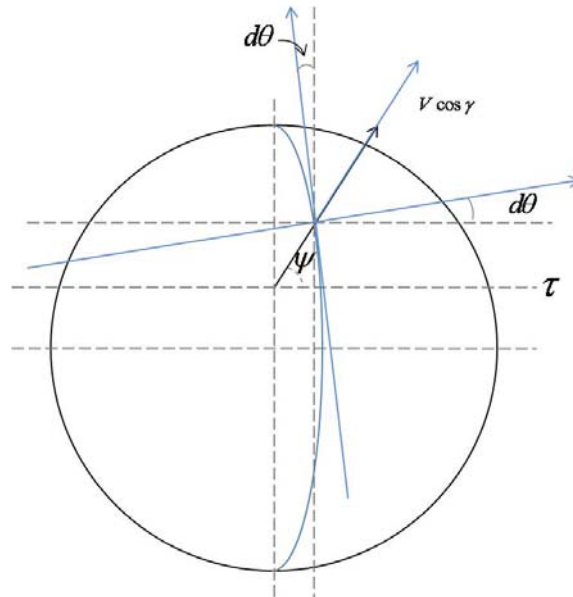


圖 2.9 速度對方向角影響一

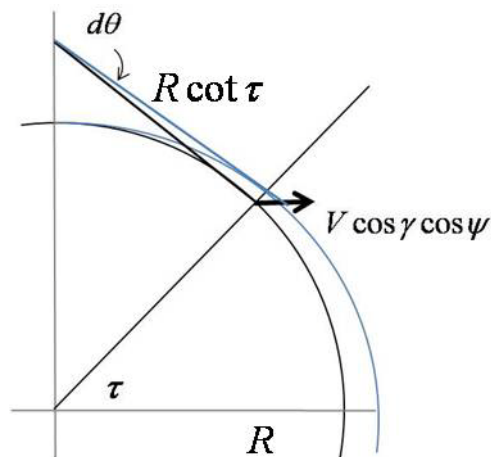


圖 2.10 速度對方向角影響二

### 2.2.4 TVC 系統、重力、空氣阻力對 $(V, \gamma, \psi)$ 的影響

TVC 系統造成的力量為物體體軸  $X_b$  方向，對於速度影響為  $\alpha$  餘弦方向分量，而正弦方向分量造成  $(\gamma, \psi)$  的變化，將  $T$ 、 $D$ 、 $g$  三個力量分量方向繪出示意圖如圖 2.11。

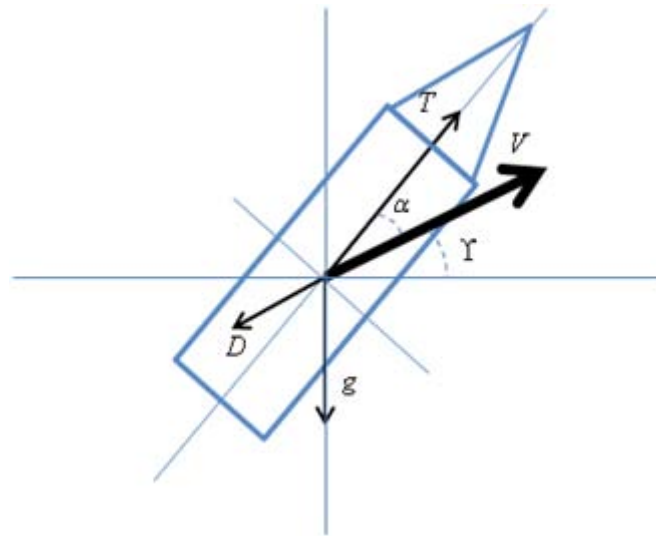


圖 2.11 推力、空氣阻力、重力方向示意圖

其中圖 2.11 利用了體座標系與切平面座標系，重力沿著切平面座標的負  $U$  軸向下朝向地心，接著為了求得  $T$  及  $D$  對系統影響，由圖 2.5 右方小圖可看出 TVC 的推力在速度座標系上各方向造成的力量大小，而空氣阻力分力  $D$  則與速度方向相反，造成速度  $V$  的改變。另一個空氣阻力分力  $L$  與  $T \sin \alpha$  方向相同，垂直於速度方向，進而影響  $\gamma$  及  $\psi$  的變化，將這些不同的力量整理如下：

$$\begin{cases} a_{V3} = \frac{1}{m}(T \cos \alpha - D - mg \sin \gamma) \\ a_{\gamma3} = \frac{1}{mV}[(T \sin \alpha + L) \cos \mu - mg \cos \gamma] \\ a_{\psi3} = -\frac{1}{mV \cos \gamma}(T \sin \alpha + L) \sin \mu \end{cases} \quad (2.12)$$

將(2.6)、(2.10)、(2.11)、(2.12)代回(2.4)可得到完整公式：

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= \frac{1}{m}(T \cos \alpha - D - mg \sin \gamma) + R\omega^2 \cos \tau [\cos \tau \sin \gamma - \sin \tau \cos \gamma \sin \psi] \\
 \dot{\gamma} &= \frac{1}{mV} [(T \sin \alpha + L) \cos \mu - mg \cos \gamma] + \frac{V \cos \gamma}{R} \\
 &\quad + 2\omega \cos \tau \cos \psi + \frac{R\omega^2}{V} \cos \tau [\cos \tau \cos \gamma + \sin \tau \sin \gamma \sin \psi] \\
 \dot{\psi} &= -\frac{1}{mV \cos \gamma} (T \sin \alpha + L) \sin \mu - \frac{V}{R} \tan \tau \cos \gamma \cos \psi \\
 &\quad + 2\omega (\cos \tau \tan \gamma \sin \psi - \sin \tau) - \frac{R\omega^2}{V \cos \gamma} \cos \tau \sin \tau \cos \psi
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

在進行分析與設計時，(2.2)式與(2.13)為參考與估計的重要依據。

## 2.3 姿態變化

討論姿態變化時，定義  $p$ 、 $q$ 、 $r$  分別為角速度在體座標三個方向的分量。

### 2.3.1 尤拉角座標轉換

討論火箭姿態時，一般會以尤拉角進行描述，為體座標系與發射座標之間三個方向旋轉的相對角度，為免與速度的方向角  $\psi$  混淆，在此用  $(\phi, \psi_E, \theta)$  表示，計算時會將原點重合，過程如下：

一、固定  $X_L$  軸，以  $X_L$  為軸心旋轉  $\phi$  角，使旋轉後的  $Y_L'$  投影在  $Y_b - Z_b$  平面上，經過這次旋轉，定義此時座標軸為  $X_L' - Y_L' - Z_L'$ 。

二、固定  $Z_L'$  軸，以  $Z_L'$  為軸心旋轉  $\psi_E$  角，使旋轉後的  $Y_L''$  與  $Y_b$  重合，經第二次旋轉，定義此時座標軸為  $X_L'' - Y_L'' - Z_L''$ 。

三、固定  $Y_L''$  軸，以  $Y_L''$  為軸心旋轉  $\theta$  角，將剩餘兩軸與體座標系重合，經三次旋轉後發射座標將完全與體座標相同，座標定義為  $X_L''' - Y_L''' - Z_L'''$ ，如此便能以出三個尤拉角來計算目前體座標的型態。經由三次旋轉後，可以依序推得轉換關係式



為：

$$\begin{bmatrix} X'_L \\ Y'_L \\ Z'_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_L \\ Y_L \\ Z_L \end{bmatrix} = T_1 \begin{bmatrix} X_L \\ Y_L \\ Z_L \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X''_L \\ Y''_L \\ Z''_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi_E & \sin \psi_E & 0 \\ -\sin \psi_E & \cos \psi_E & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X'_L \\ Y'_L \\ Z'_L \end{bmatrix} = T_2 \begin{bmatrix} X'_L \\ Y'_L \\ Z'_L \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X'''_L \\ Y'''_L \\ Z'''_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X''_L \\ Y''_L \\ Z''_L \end{bmatrix} = T_3 \begin{bmatrix} X''_L \\ Y''_L \\ Z''_L \end{bmatrix}$$

最後可得到發射座標與體座標之間的轉換矩陣為：

$$\begin{bmatrix} X_b \\ Y_b \\ Z_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'''_L \\ Y'''_L \\ Z'''_L \end{bmatrix} = T_3 T_2 T_1 \begin{bmatrix} X_L \\ Y_L \\ Z_L \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

### 2.3.2 尤拉方程式

物體的角速度分三軸可定義為：

$$\omega = p\bar{X}_b + q\bar{Y}_b + r\bar{Z}_b \quad (2.15)$$

若利用尤拉角的變化率可改寫為：

$$\omega = \dot{\phi}\bar{X}'_L + \dot{\theta}\bar{Y}_b + \dot{\psi}_E\bar{Z}''_L \quad (2.16)$$

由2.3.1的推論可得到：

$$\bar{Z}''_L = -\sin \theta \bar{X}_b + \cos \theta \bar{Z}_b$$

$$\bar{X}'_L = \cos \psi_E \bar{X}''_L - \sin \psi_E \bar{Y}''_L = \cos \psi_E \cos \theta \bar{X}_b - \cos \psi_E \sin \theta \bar{Z}_b - \sin \psi_E \bar{Y}_b$$

將上兩式代入(2.16)式可整理為：

$$\omega = (\dot{\phi} \cos \psi_E \cos \theta - \dot{\psi}_E \sin \theta) \bar{X}_b + (-\dot{\phi} \sin \psi_E + \dot{\theta}) \bar{Y}_b + (-\sin \psi_E \cos \theta + \dot{\psi}_E \cos \theta) \bar{Z}_b$$

與(2.15)式比較可得到：

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi_E \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ -\sin \psi_E & 1 & 0 \\ \cos \psi_E \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi}_E \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

整理之後即為尤拉方程式：

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sec \psi_E \cos \theta & 0 & \sec \psi_E \sin \theta \\ \tan \psi_E \cos \theta & 1 & \tan \psi_E \sin \theta \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

### 2.3.3 四元素方程式

四元素是另一種用來描述尤拉角的方式[8]，在尤拉方程式中，有著正切與正割函數，在角度為零度時可能無法定義，但在時做要求下會希望某些角度固定為零度，在計算上必須以另一個方式進行，我們常常定義四元素 $(e_0, e_1, e_2, e_3)$ 來定義尤拉角，如下所示：

$$\begin{aligned} e_0 &= \cos \frac{\psi_E}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} + \sin \frac{\psi_E}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2} \\ e_1 &= \cos \frac{\psi_E}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2} - \sin \frac{\psi_E}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} \\ e_2 &= \cos \frac{\psi_E}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} - \sin \frac{\psi_E}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2} \\ e_3 &= \sin \frac{\psi_E}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\phi}{2} + \cos \frac{\psi_E}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\phi}{2} \end{aligned} \quad (2.19)$$

四元素與角速度之間的關係式如(2.20)所示：

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_0 \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -e_1 & -e_2 & -e_3 \\ e_0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & e_0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & e_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

因此尤拉角可透過四元素計算出來：

$$\begin{aligned}
\phi &= \tan^{-1}\left(\frac{2(e_2e_3 + e_0e_1)}{e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2}\right) \\
\psi &= \sin^{-1}(e_0e_3 - e_1e_2) \\
\theta &= \tan^{-1}\left(\frac{2(e_1e_3 + e_0e_2)}{e_0^2 + e_1^2 - e_2^2 - e_3^2}\right)
\end{aligned} \tag{2.21}$$

先在(2.19)式求出初始值，再由(2.20)式得到 $(e_0, e_1, e_2, e_3)$ 變化率，利用(2.21)式就可以算出尤拉角。

### 2.3.4 旋轉運動方程式

假設載具為一均勻對稱之圓柱體，受到力矩後的運動方程式如下：

$$\begin{aligned}
\dot{p} &= \frac{qr(I_y - I_z)}{I_x} + \frac{M_x}{I_x} \\
\dot{q} &= \frac{rp(I_z - I_x)}{I_y} + \frac{M_y}{I_y} \\
\dot{r} &= \frac{pq(I_x - I_y)}{I_z} + \frac{M_z}{I_z}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

其中 $M_x$ 、 $M_y$ 、 $M_z$ 代表體座標下三個方向的力矩， $I_x$ 、 $I_y$ 、 $I_z$ 為體座標下三軸的轉動慣量，將氣動力與推力產生的力矩找出後，根據旋轉運動方程式及尤拉方程便可得到火箭的飛行姿態。

## 2.4 氣動力模型

在大氣層中飛行的火箭必會受到空氣阻力影響，空氣會產生阻力以及力矩干擾載具穩定飛行，為了模擬出大氣阻力對載具的影響，我們必須先獲得載具當時飛行的馬赫數以及各種姿態角如圖2.12，接著在六個自由度上皆模擬出受力的方程式如(2.23)式。

$$F = \frac{1}{2} \rho V^2 C S$$

$$M = \frac{1}{2} \rho V^2 C L S$$
(2.23)

其中  $\rho$  代表當時空氣密度， $V$  是載具速度， $C$  為空氣阻力係數， $S$  是參考面積， $L$  為參考長度， $F$  及  $M$  則代表受力與力矩。

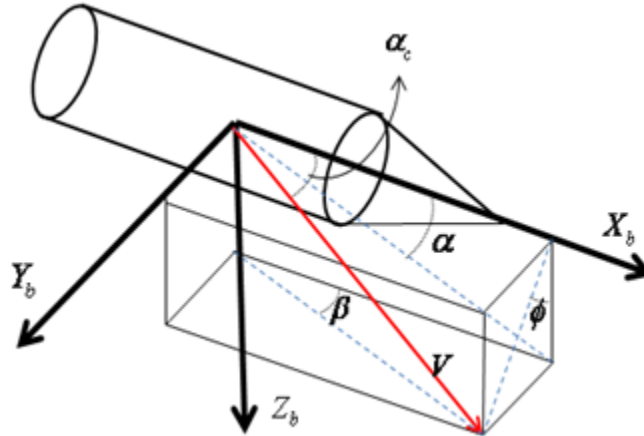


圖 2.12 體座標下各種角度定義

氣動力所產生的力量可由在受力的三個方向上，我們在體座標的三個方向得到各個係數如下：

$$C_{fx} = \begin{cases} -C_{Aon}(M, \alpha_c) \\ -C_{Aoff}(M, \alpha_c) \end{cases}$$

$$C_{fy} = -C_N(M, \alpha_c) \sin \phi$$

$$C_{fz} = -C_N(M, \alpha_c) \sin \phi$$
(2.24)

$C_A$ 、 $C_N$  為氣動力係數，本節中的  $\phi$  非尤拉角，定義如圖 2.12，將上式代回 (2.23)，

得到載具受力如 (2.25) 式：

$$F_x = \frac{1}{2} \rho V^2 C_{fx} S \quad F_y = \frac{1}{2} \rho V^2 C_{fy} S \quad F_z = \frac{1}{2} \rho V^2 C_{fz} S$$
(2.25)

同樣的在轉動上，空氣也在體座標上有不同的作用力矩，同樣在三個座標下得到係數如下：

$$\begin{aligned}
C_{mx} &= 0 \\
C_{my} &= [C_m(M, \alpha_c) + X_{CG} C_N(M, \alpha_c)] \cos \phi \\
C_{mz} &= [-C_m(M, \alpha_c) - X_{CG} C_N(M, \alpha_c)] \sin \phi
\end{aligned} \tag{2.26}$$

$X_{CG}$  為火箭質心位置，而  $C_m$  及  $C_N$  為氣動力係數，將(2.26)式代回(2.23)式可得到

載具受力矩如(2.27)式：

$$M_x = \frac{1}{2} \rho V^2 C_{mx} SL \quad M_y = \frac{1}{2} \rho V^2 C_{my} SL \quad M_z = \frac{1}{2} \rho V^2 C_{mz} SL \tag{2.27}$$

由(2.25)式及(2.27)式可得到氣動力造成的載具受力情形。

## 2.5 火箭推力

火箭推力來自後方噴嘴，並且有一定的轉動幅度用以控制，用燃料產生的推力向量來計算火箭飛行之受力與力矩。而火箭燃料的燃燒效率由  $I_{sp}$  計算，定義為：

$$I_{sp} = \frac{T}{g_0 \dot{m}} \tag{2.28}$$

$g_0$  為海平面的重力加速度， $\dot{m}$  為質量減少速率，質量減少越多表示燃燒量越大，推力也就跟著越大。

另一個影響火箭效率的為燃料比率，定義為該階段燃料質量占該節火箭質量的比例，同樣的，燃料比率越高，推進效率也會越好。

### 第三章 載具設計

火箭的設計大致上可分為兩部分，物理參數設計及控制時間的設計，這兩部分決定了後面章節應該如何設計控制系統以期穩定。由於國外已有許多發射成功之案例，如美國的泰坦系列、俄國由R7發射器改良的火箭以及中國的長征系列[3][4][5]。其中參考日本Mu-3-S-II發射載具[6]，其三階段飛行的情形如圖3.1。

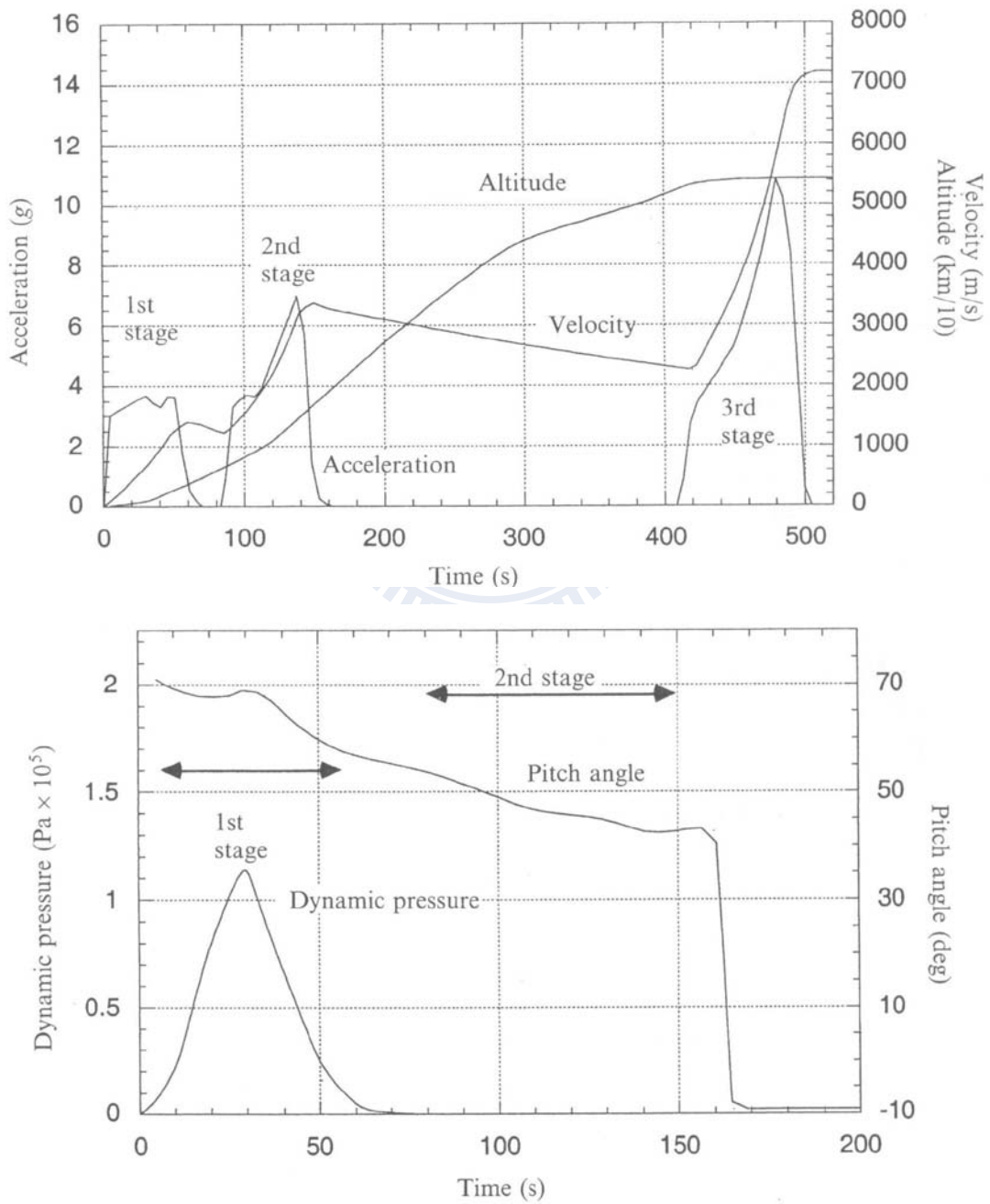


圖 3.1 Mu-3-S-II 入軌情形[6]

此火箭為日本成功入軌的衛星載具，繞行在約在五百公里之圓形軌道，最後再修正為橢圓，該飛行特點有以下三點：

- 一、第一階段共60秒，以重力轉彎的方式升空及轉向至40km左右之高空，脫離空氣阻力最大之部份，巡航20秒後啟動第二階段。
- 二、第二階段令其穩定飛行，共飛行70秒，在推力即將結束時進行姿態的轉向，由於此時已幾乎無空氣阻力，因此轉向幅度極大。
- 三、經巡航250秒後啟動第三階段，此時高度以及姿態已經將近其目標，維持高度後進行加速，進行穩定的控制，此階段達90秒。

在大部分的案例來說，四階段火箭飛行時間的分布圖均大同小異，如圖 3.2 所示[7]：

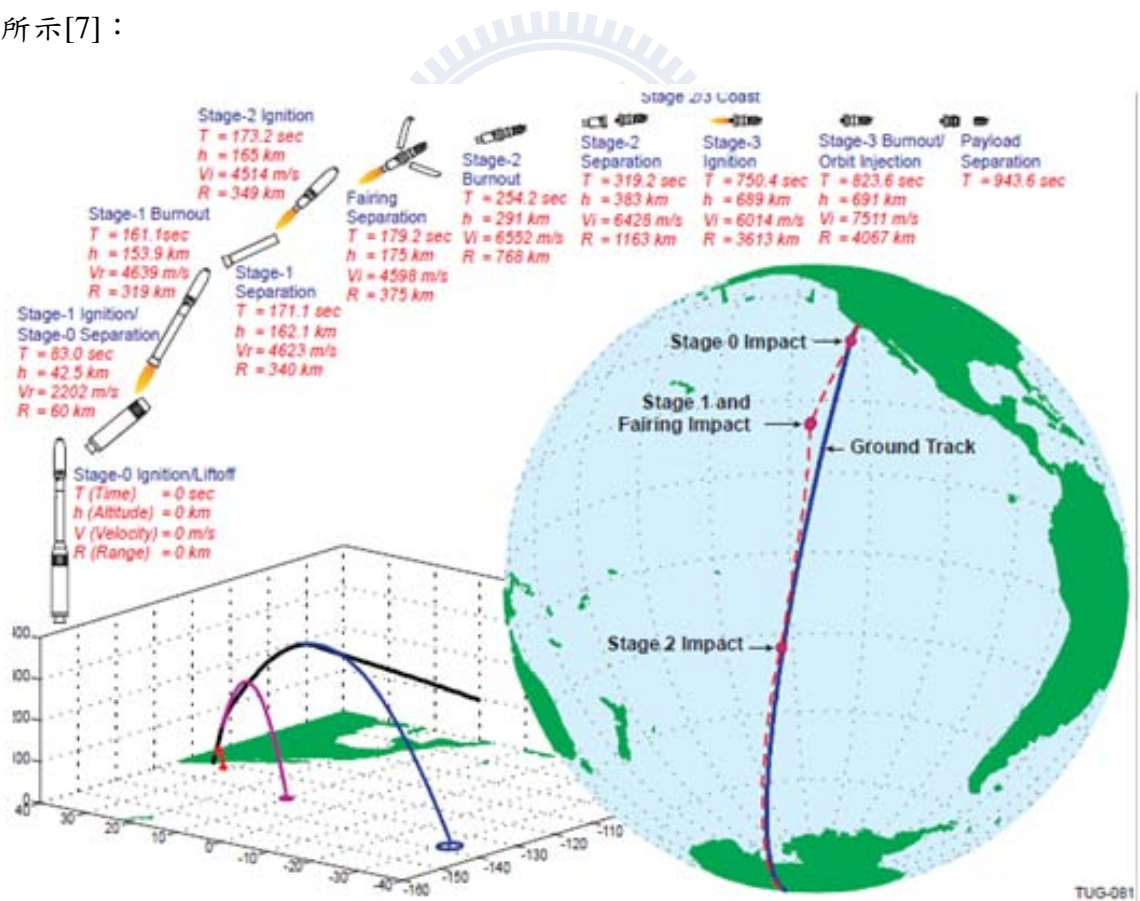


圖 3.2 典型的火箭升空過程[7]



利用前兩節加速與升空，利用重力轉彎穩定轉向，並在第二階段進行大幅度轉彎。中間第一次巡航時間較短，第二次則是重點爬高的階段，火箭也在此階段漸漸平飛，因此巡航時間較長，而第三階段進行加速，且因重量輕加速極快。

在本文設計中，除了參考 Mu-3-S-II 入軌情形以外，並定義了一些基本任務需求：

- 一、30kg 之負載。
- 二、距地表 300km 之圓形軌道運行。
- 三、 $I_{sp}$  與燃料比率為 250 及 0.8。

### 3.1 物理參數的設計：

在 TVC 系統中，燃料的組成與重量影響發射效率極大，除了燃料所佔重量的比例以外，便是燃料的燃燒效率  $I_{sp}$ ，而重量以實作來說，一定是希望越輕越好，並找到最好的重量分布。

如任務需求所述，今考慮一發射載具與 30kg 的酬載，目標為距離地表 300km 的高空圓形軌道，若以  $I_{sp}$  及燃料比率為 250 及 0.8 較嚴苛的條件下，設計第三節火箭外殼加上 30kg 酬載之總重和為 120kg，因此該節火箭加上燃料之質量便已固定為 600kg。

第一、二節載具之質量則參考他國火箭之設計，第二節若高出第三節數倍，增加第二階段的燃料比率，可將推進效益增加。而第一節則參考 Mu-3-S-II，以能將此火箭在 60 秒內得以升空至 40km 左右空氣較為稀薄之處為設計基礎，經計算後設計整個火箭重量為 28200kg。而這些重量在一、二節應該如何分配為最佳比例，在此可以先做一個小測試，今載具重量固定為 28200kg，燃料比率與  $I_{sp}$  皆不變，而第二、三節的比例由 35% 慢慢減少至 15%，模擬並計算該 30kg 之酬載總共獲得的能量，希望可以找到最佳的狀況。



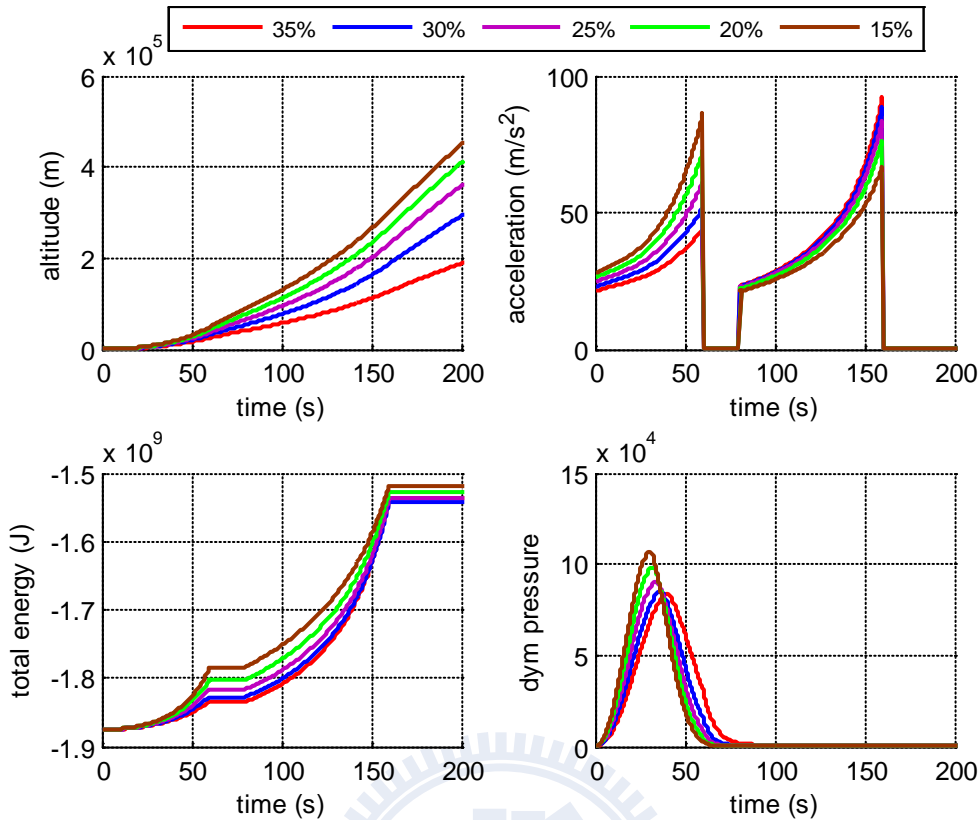


圖 3.3 二、三階段佔總質量不同比例下的飛行軌跡 (15%~35%)

圖 3.3 左下的總能量(total energy)定義為：

$$E = -\frac{GMm}{R} + \frac{1}{2}mV^2 \quad (3.1)$$

其中  $M$  為地球質量、 $m$  為 30kg 之酬載、 $R$  為與地心距離，而上式前項指的是酬載在該位置對地球的位能，後者則為動能，當載具漸漸增加高度與速度時，位能及動能都會增加。

在圖 3.3 中不同的五個重量比例，皆先控制令其穩定的重力轉彎，不做大幅度轉向，由圖中可看出，若一、二節自由飛行後，獲得能量在二、三節重量比率 30% 時有最少之值，35% 時則回升獲得較多能量，在沒有推力的時候自由飛行，因為能量守恆則沒有改變，若再提升至 40% 時，由於第一節推力過小無法推動火箭上升。

將圖 3.3 模擬結果整理可列出表 3.1：

第二、三階段重量和所佔比例	最大高度 (km)	t=60 高度 (km)	酬載總能量 (kJ)	酬載獲得能量 (kJ)	與入軌能量差 (kJ)
15%	1316	48.3	-1518600	356600	621851
20%	1198	42.5	-1526700	348500	629951
25%	1006	36.8	-1536900	338300	640151
30%	728	31.0	-1542000	333200	645251
35%	336	24.6	-1535900	339300	639151

表 3.1 不同重量比例的能量獲得測試結果

利用表 3.1 之數據進行第一節火箭重量的選擇，若預期入軌高度大於 300km 時，以現有之 TVC 推力系統，可使用之重量比也就為總重扣掉二、三階段重量和的 65~85% 之間。而在這範圍內應該如何選擇，在增加轉向機制後便可慢慢看出端倪，15% 的情形無法達到 300km 軌道之需求，因此捨棄，從 20%~35% 利用第二階段之推力轉向後，使軌跡在進入第三階段前接近 300km，希望能計算出大幅度轉向後的能量耗損，接著模擬新的能量獲得情形如圖 3.4。

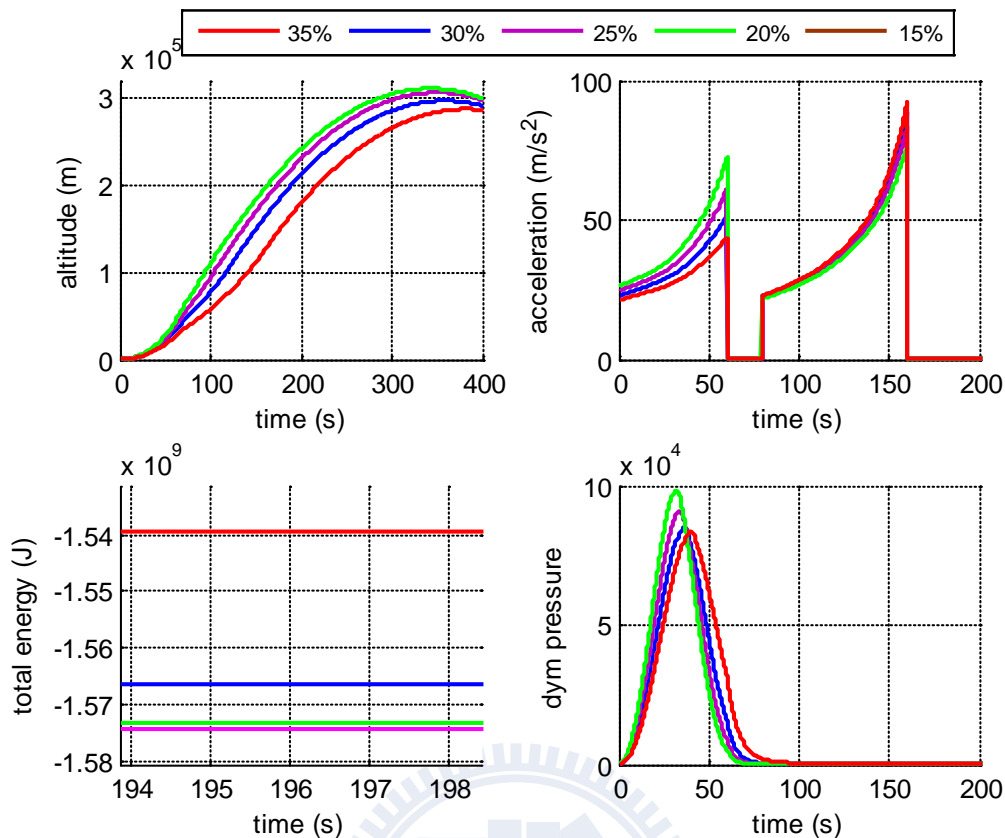


圖 3.4 二、三階段佔總質量不同比例下轉向後的飛行軌跡

由圖 3.4 之模擬結果可看出，一開始負重所佔比例越大，轉向留下的能量就越多，如二、三節總重佔 35% 的情況。而剛開始能量獲得較多的，在轉向後能量取得反而較少，是因剛開始速度方向與轉向後的角度差距較大，需要能量修正之故。但，其實不同重量分布所獲得能量的差異比率並不是很大，而圖 3.4 的模擬也說明了這些重量比率都可以到達 300km 高空，既然差距不大，由軌跡來選擇適合之重量分布會是較佳的做法。

二、三節質量總重 35% 的情況下，在第一階段推進結束後高度僅 24.6km，尚未離開大氣阻力較強的地方，無法符合要求，25% 的情況在第一階段結束後就有 60km 高度，至於 30% 左右時在 Stage 2 點火前高度已經逼近 60km，兩者皆在可接受之範圍，因此二、三節火箭之重量和應選擇在總重的 25% 至 30% 左右較為理想。

最後決定之火箭物理參數表 3.2：

	Stage 1	Stage 2	Stage3
Total mass(kg)	28200	7700	600
Propellant mass(kg)	16400	5680	480
$I_{sp}$	250	250	250
Mass ratio	0.8	0.8	0.8
Ignition time(s)	t=0	t=80	待定
Burn time(s)	60	80	100

表 3.2 目標為海拔 300km 圓形軌道運行入軌的火箭物理參數

當然，若能增加燃料比率或是  $I_{sp}$ ，必能以更輕量的載具發射，但本文先以此案例計算，目標是穩定入軌的設計。

### 3.2 時間參數的設計

第一階段與第二階段的初期因尚在空氣阻力較大之處，若有大幅度轉向使速度與姿態之間差異過大，會造成火箭的不穩定，甚至翻滾或是受力不均而損壞，為了降低攻角，此兩階段皆以重力轉彎為主，而在進入第二階段後段時，因為空氣較稀薄，使得阻力減小，可以方便進行轉向計算高度讓衛星能夠入軌，因此第二階段中後段開始會有轉向的控制，將俯仰角進行大角度的改變，進而改變加速方向，讓第二階段結束後的自由飛行時能穩定爬升到軌道附近，而第三階段則主要是精準控制將火箭定在一定高度。

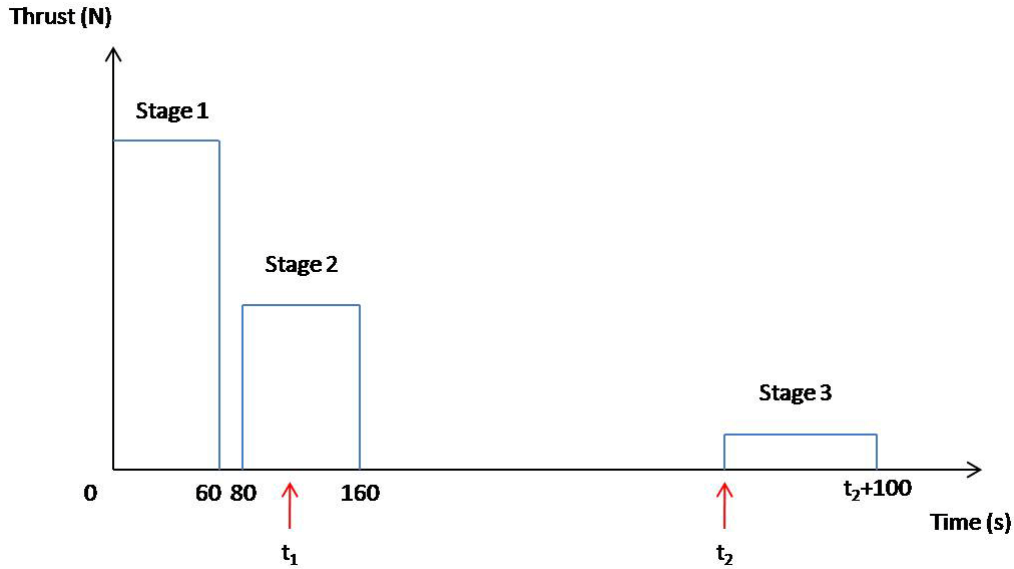


圖 3.5 轉向時間示意圖

此發射載具之推力與時間分布如圖3.5所示，縱軸為推力大小，橫軸則為時間，推力持續的時間已經固定，其中在第二階段的 $t_1$ 時進行火箭的轉向，目標是在 $t=160$ 時達到巡航的條件。

由(2.2)式及(2.13)式可知高度 $h$ 及速度對地表切面的夾角變化情形：

$$\dot{h} = V \sin \gamma$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{mV} \left[ (T \sin \alpha + L) \cos \mu - mg \cos \gamma \right] + \frac{V \cos \gamma}{R} + 2\omega \cos \tau \cos \psi + \frac{R\omega^2}{V} \cos \tau \left[ \cos \tau \cos \gamma + \sin \tau \sin \gamma \sin \psi \right]$$

而巡航條件為在第二階段開始巡航至進入第三階段啟動前，高度漸漸提高至接近300km，且速度方向漸漸與地球切面平行， $\gamma$ 的變化在 $t_1$ 至 $t=160$ 時以 $T$ 、 $g$ 、 $V$ 之影響最大，160秒後則剩下 $g$ 與 $V$ 對其產生較大的影響。

$t_1$ 之計算會影響到火箭飛行的高度，越早轉向飛行高度越低，反之則越高，計算上希望在點火之前速度方向及高度接近目標軌道，但因高度與 $\gamma$ 並不是線性關係，以及會有其他物理量的影響，會有一定的誤差存在，在 $t_2$ 及第三階段再行較精準的控制。

在時間估計時，直接由實際模擬可得知，飛行時的 $\gamma$ 改變量大致上是線性， $\gamma$ 可近似如圖3.6，因此可以直接計算其變化率，在進行轉向且仍有推力時，變化率約為 $-0.0130(\text{rad/s})$ ，而自由巡航時因推力消失，使得加速度降低，因此 $\gamma$ 改變率也降為 $-0.0019(\text{rad/s})$ 。

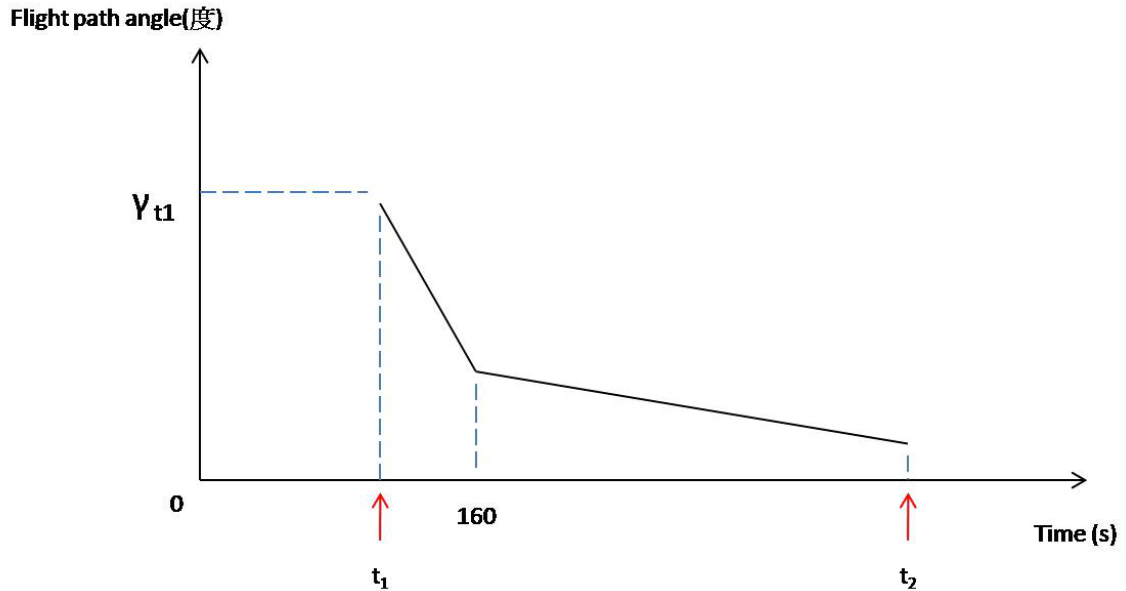


圖 3.6  $\gamma$  變化示意圖

將此變化對高度積分得：

$$\begin{aligned}
 h(t_2) = h(t_1) &+ \int_{t_1}^{160} V \sin(\gamma_{t1} - 0.013(t - t_1)) dt \\
 &+ \int_{160}^{t_2} V \sin(\gamma_{t1} - 0.013(160 - t_1) - 0.0019(160 - t_2)) dt
 \end{aligned} \quad (3.2)$$

其中 $h(t_1)$ 為轉向當時之高度，由(2.2)式及(2.13)式可算出這段時間會上升的高度，目標是在 $t_2$ 時 $\gamma$ 小且高度接近300km，但由於 $t_1$ 與 $t_2$ 未知，必須先假設 $t_2=300$ ，飛行時電腦利用(3.2)式進行判斷，若現在轉向會使高度在 $t_2$ 略低於300km，且 $\gamma$ 仍為正值時，即可進行轉向，最慢可以到 $\gamma$ 為負之前，這其中的區間皆為可行的轉向時間點 $t_1$ ，一般來說會希望 $\gamma$ 角度誤差不在5度以上。

然而 $t_1$ 的誤差會在第三階段進行彌補， $t_2$ 的選擇依然由自由飛行後當時狀態決定，因第三階段有高度的精準控制，需要較長時間保持高度以入軌，會希望留

下70%的時間進行校正高度，以持續燃燒100秒的第三階段來說，也就是大約30秒要達到高度。

$$h(t_2 + 30) = h(t_2) + 30 \times V \sin \gamma \quad (3.3)$$

滿足(3.3)式大於300km條件時則啟動第三階段。但若當初 $t_1$ 計算不夠精確，導致 $\gamma$ 太小無法達成(3.2)式之條件時便無法啟動。

因 $\gamma$ 與 $V$ 皆為漸漸遞減，若 $t_1$ 轉向時間計算過早， $\gamma$ 在漸漸變小時會發現無論如何達不到300km，便要提前啟動第三階段，啟動後便進行高度精準控制，但也有可能因為 $t_1$ 的計算失誤而使得火箭無法在預期軌道入軌。在第三階段的精準控制可以修正許多時間計算上的誤差，不論在本節的 $t_1$ 或是 $t_2$ ，於第四章會予以介紹。



## 第四章 控制系統

### 4.1 火箭轉向控制器

#### 4.1.1 重力轉彎

在第一階段及第二階段前段的發射會使用重力轉彎以減少攻角，進而減少空氣阻力之影響，重力轉彎的導引如下：

$$\dot{\theta}_c = \frac{g \sin \theta}{V} \quad (4.1)$$

為了使火箭以這個轉向速率前進，設計了如圖 4.1 的控制器：

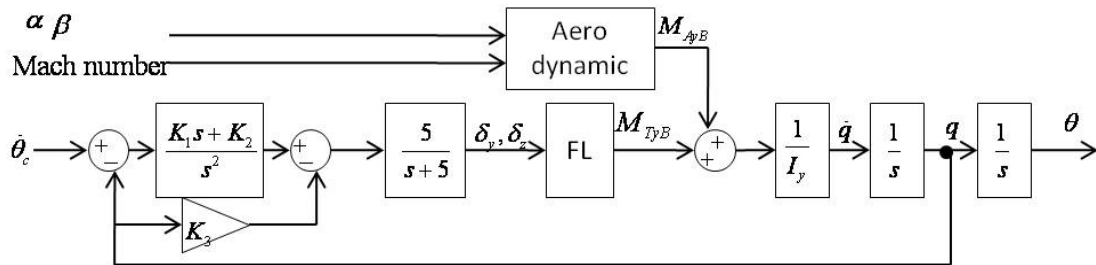


圖 4.1 重力轉彎控制方塊

將角速度回授後控制角速度的變化，在第一階段及第二階段前半段皆以控制角速度為主，除了 $\theta$ 角變化率如(4.1)式以外， $\psi_E$ 及 $\phi$ 之變化率則定為零。

#### 4.1.2 大幅度轉向

第二階段後半段時因無空氣阻力，轉向為較大幅度，會利用角度控制。讓轉向後的火箭直接朝平飛的方式加速，因此這階段的控制回授角速度及角度來控制俯仰角。

$$\theta_c = -\frac{\pi}{2} - \frac{R_a}{R_c} \times 2\pi \quad (4.2)$$

$R_a$  定義為射程，亦即將物體與地球最近之一點，與發射點在地表上畫出的弧長，而  $R_c$  定義為地球周長，我們利用控制俯仰角  $\theta$  的方式來改變火箭升空之姿態及加速方向，使入軌時的  $\gamma$  角為零度。若速度與姿態方向相同， $\theta$  控制至 -90 度時， $\gamma$



也會到零度，但因  $\gamma$  為速度方向與地表平面之夾角，將地球想像為正圓球體，會因在地球不同位置而改變。為控制角度變化設計如圖 4.2 的轉向控制器。

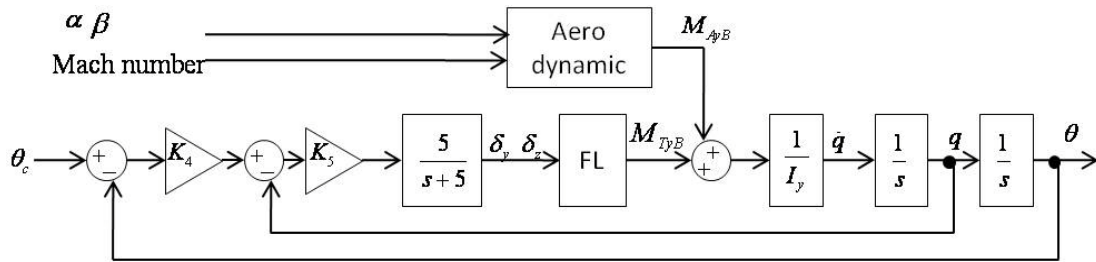


圖 4.2 進行轉向的角度控制方塊

以尤拉角及角速度回授，控制角度能達到(4.2)式的要求。

#### 4.2 入軌前的精準控制

衛星經過前兩階段的導引及轉向後，飛到近 300km 的高空，但若只靠第一、二階段之轉向並無法精準進入固定軌道，若要以正確角度以及高度航行，必須進行速度方向及高度的控制。

一樣利用圖 4.2 的控制器，輸入訊號若維持像(4.2)式新的  $\theta$  角作輸入訊號，可以將  $\gamma$  控制至極接近零度，速度方向會平行於地球表面，但卻無法對高度有精準的要求，然而，若要對高度有更精準的控制，則必須增加一高度之回授給控制器。由於高度的變化量由(2.2)式得知可表示為：

$$\dot{h} = V \sin \gamma \quad (4.3)$$

而在  $\theta$  很小時又可簡化出線性關係：

$$\dot{h} = V \gamma \quad (4.4)$$

因此，根據高度及高度變化量的回授我們可以設計出一高度修正，該控制方塊如圖 4.3 所示：

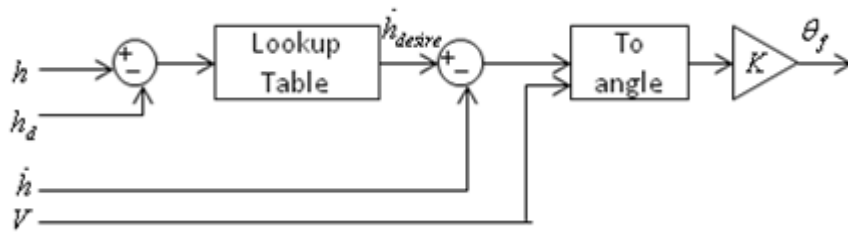


圖 4.3 新的  $\theta_c$  計算

將目前高度與目標高度相減後之差距查表，得到期望的高度改變量  $\dot{h}_{desire}$ ，

如表 4.1；

距目標高度(km)	預期的高度變化	距目標高度(km)	預期的高度變化
-20	400	+20	-400
-10	390	+10	-390
-5	260	+5	-260
-3	240	+3	-240
-2	220	+2	-220
-1.7	200	+1.7	-200
-1.4	180	+1.4	-180
-1.1	150	+1.1	-150
-0.9	130	+0.9	-130
-0.7	100	+0.7	-100
-0.3	60	+0.3	-60
-0.1	20	+0.1	-20
0	0		

表 4.1 預期的高度變化量

由表 4.1 查出預期的高度變化後，以實際高度改變量  $\dot{h}$  回授，代入下式：

$$\theta_f = \frac{K(\dot{h}_{desire} - \dot{h})}{V} \quad (4.5)$$

經過放大器後得到輸入訊號的改變量  $\theta_f$ ，因此輸入訊號改為：

$$\theta_c = -\frac{\pi}{2} - \frac{R_a}{R_c} \times 2\pi + \theta_f \quad (4.6)$$

由於已經固定高度，可以由速度的計算得到脫節時機，達到條件後便讓衛星脫離自行繞行地球，速度的條件由向心力計算如(4.7)式：

$$\begin{aligned} \frac{GMm}{R^2} &= \frac{mV^2}{R} \\ V &= \sqrt{\frac{GM}{R}} \end{aligned} \quad (4.7)$$

當速度值達到  $\sqrt{\frac{GM}{R}}$  時，第三節即進行脫節，使衛星在軌道上進行等速率圓周運動。利用這方法做精準的高度控制，可以做出在不同高度下維持高度進行加速的運動，只要轉向時間正確就能達到不同高度入軌的需求。

## 第五章 模擬結果與討論

以上述設計之火箭設定目標為海拔 300km 圓形軌道入軌結果，其中挑出入軌與否的重點繪圖如圖 5.1。

### 5.1 軌道高度 300km 入軌模擬結果

#### 5.1.1 入軌情形

未加誤差模擬結果：

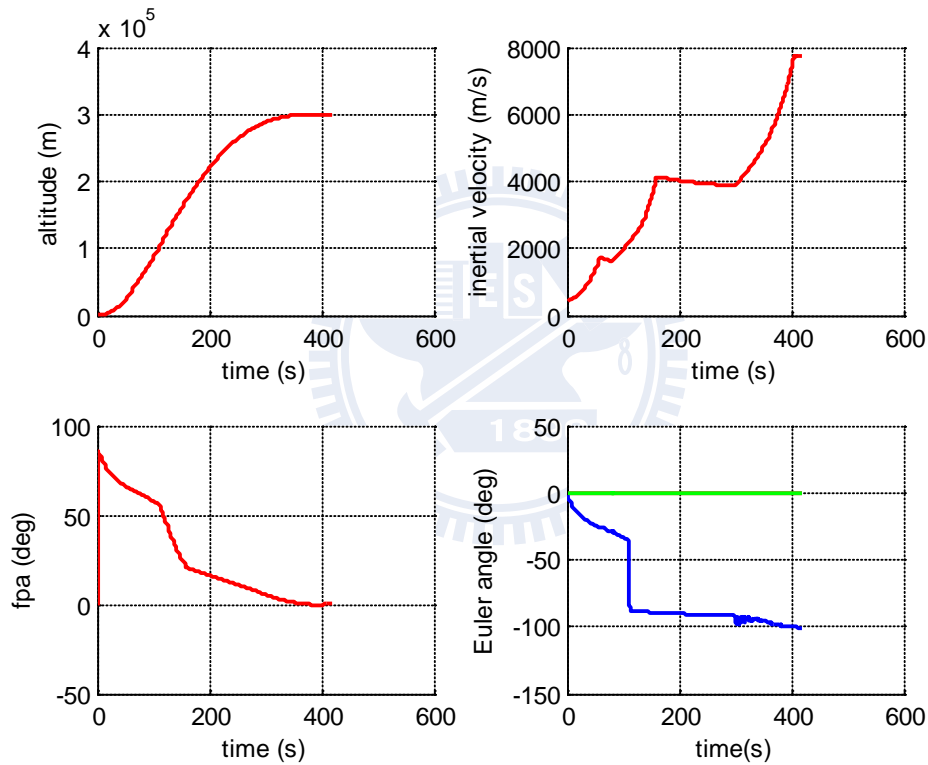


圖 5.1 未加誤差的控制情形（高度、速度、仰角、尤拉角）

如圖 5.1 所示，約在 399.8 秒處滿足等速率圓周運動之條件，第三階段達到速度要求，因此將衛星脫節結束控制。此時衛星的高度在圖 5.1 左上，海拔 300.02km，右上為速度 7732m/s，而左下圖為  $\gamma = -0.04^\circ$ ，誤差均不大。右下的則是尤拉角，變化明顯的為俯仰角  $\theta$ ，其他兩個角度維持零度。

繞地運行情形：

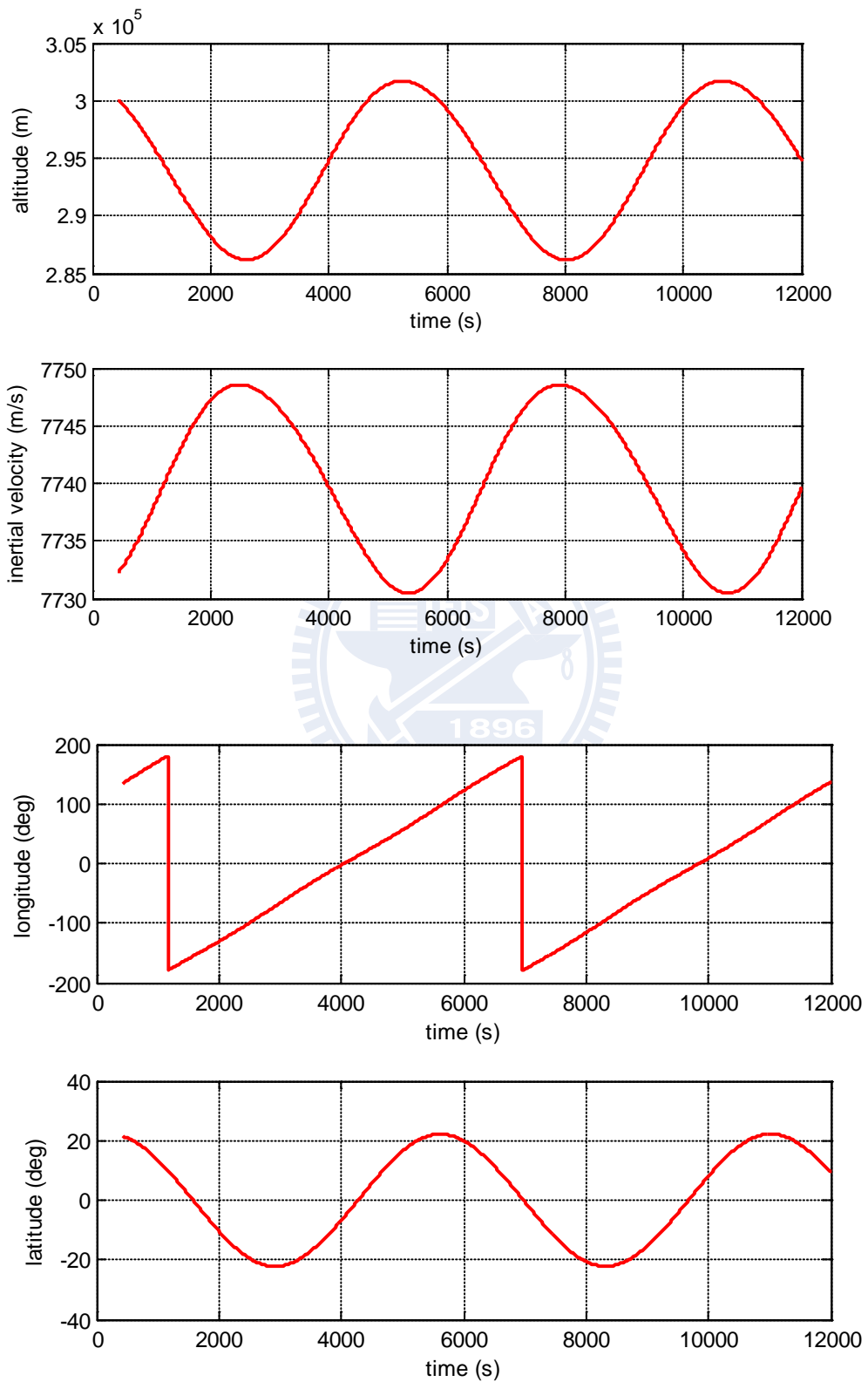


圖 5.2 未加誤差入軌後繞地運行（高度、速度、經度、緯度）

如圖 5.2 所示，衛星 成功繞地球飛行，雖在高度上有約正負 7km 左右的振幅，但大致上以離地心近七千公里處，穩定得以近圓形的軌道運行，且經緯度的變化也相當規律，約 6000 秒繞地球一圈。

若在計算時間處出現了誤差，高度控制器可以做一些小量的修正。

### 5.1.2 加上時間誤差

在第二階段的轉向時間  $t_1$  加上正負一秒誤差，由於轉向時間影響火箭平飛時的高度，計算上若是出現誤差會使火箭飛行入軌的高度錯誤，因此，高度控制的啟動便更加重要。圖 5.3 為在第二階段的大幅轉向時，增加轉向時間誤差正負一秒不控制下自由飛行，其高度誤差可能會到達十公里。

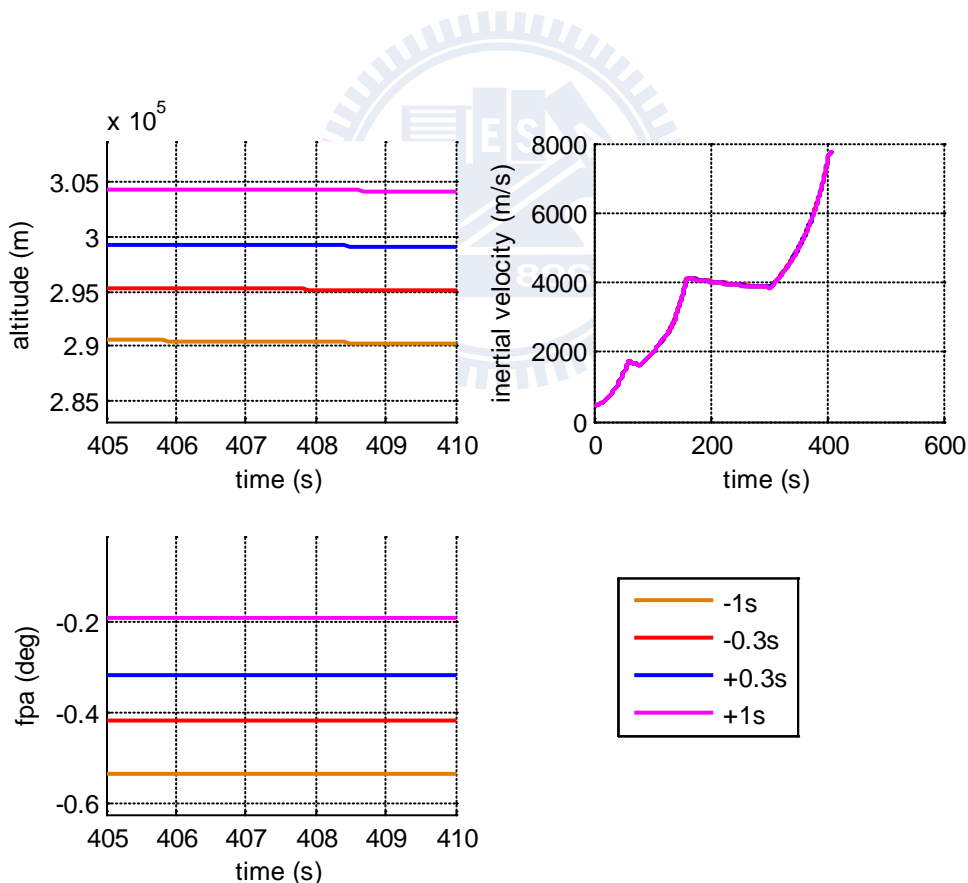


圖 5.3 轉向時間誤差 (-1s~+1s) 自由飛行 (高度、速度、仰角)

增加高度回授控制後的結果如圖 5.4 所示，誤差縮小到一公里上下，且仰角誤差不到 0.1 度。因提早轉向 (-1s) 飛行高度較低，因此第三階段要等火箭飛得更高後才啟動，所以在接近 407 秒時才加速完畢，仰角也開始固定，此外，四個誤差情況下的速率值皆能達到進行圓周運動的要求。

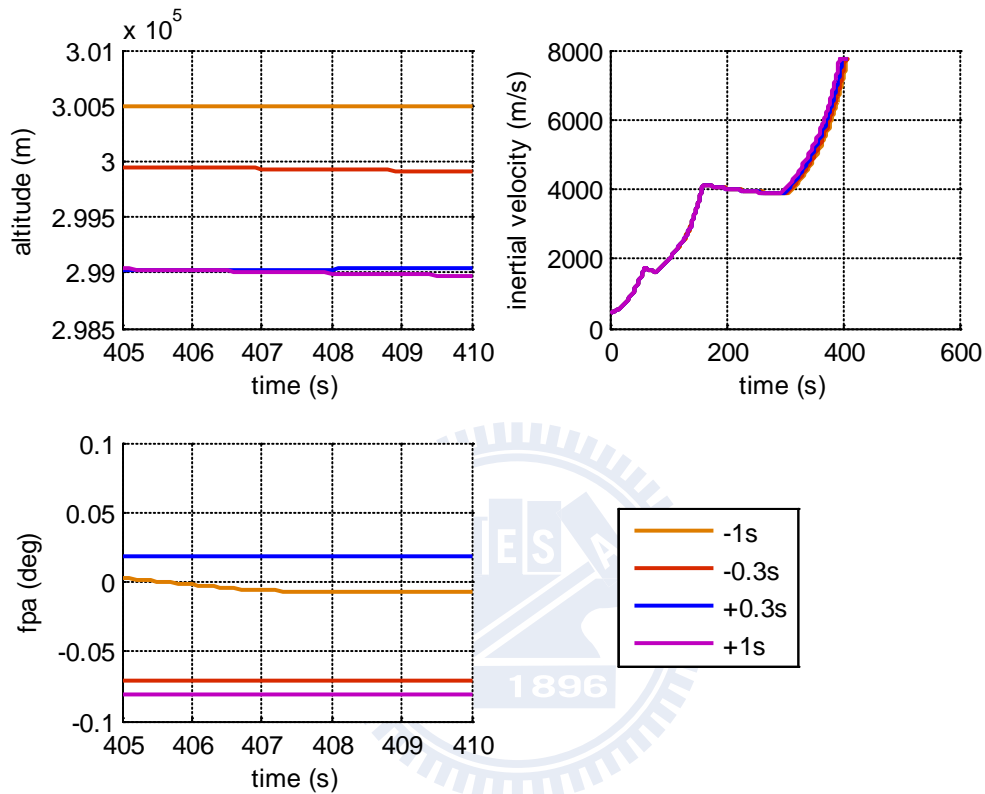


圖 5.4 轉向時間誤差 (-1s~+1s) 高度回授控制飛行 (高度、速度、仰角)

除了轉向時間的誤差以外，若在三階段啟動時間 $t_2$ 上加上正負5秒的誤差，同樣會偏離原本預設的入軌高度，在加上誤差後自由飛行的模擬結果如圖 5.5：

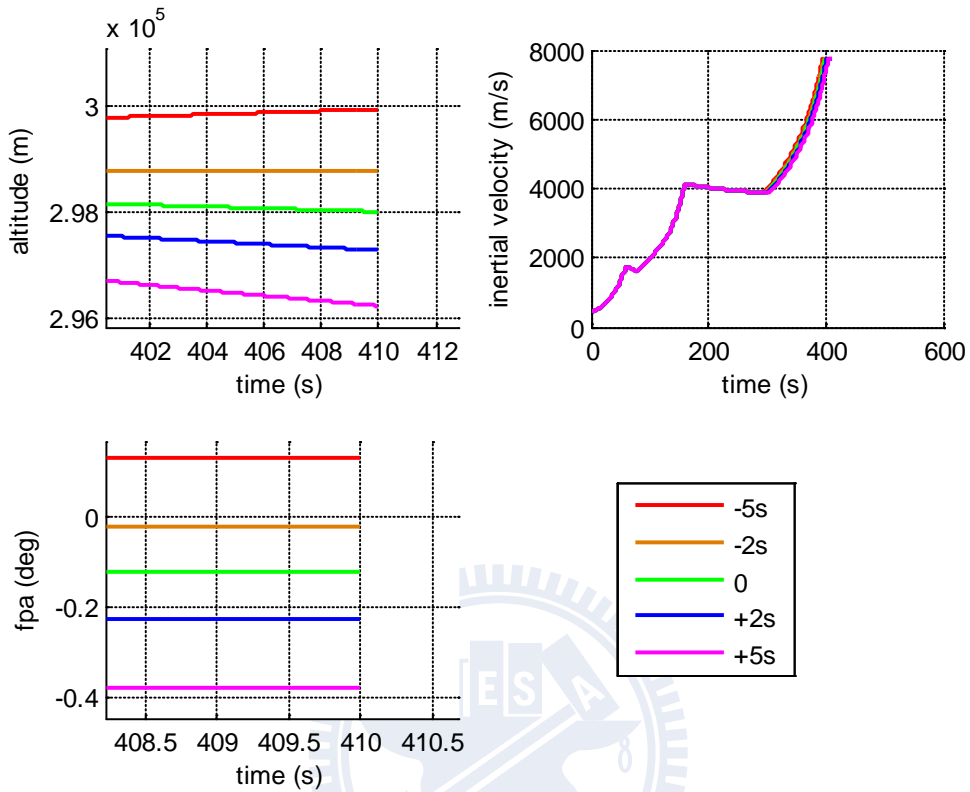


圖 5.5 第三階段時間啟動誤差 (-1s~+1s) 自由飛行 (高度、速度、仰角)

在圖 5.5 中，高度及 $\gamma$ 取即將入軌前的一小段時間來觀察，雖然左下圖的 $\gamma$ 維持一定角度，但角度已經會使高度產生了變化，誤差可能到達四、五公里，且未能穩定維持高度。透過高度回授仍能改善此種情形，在修正後的結果如圖 5.6 所示。



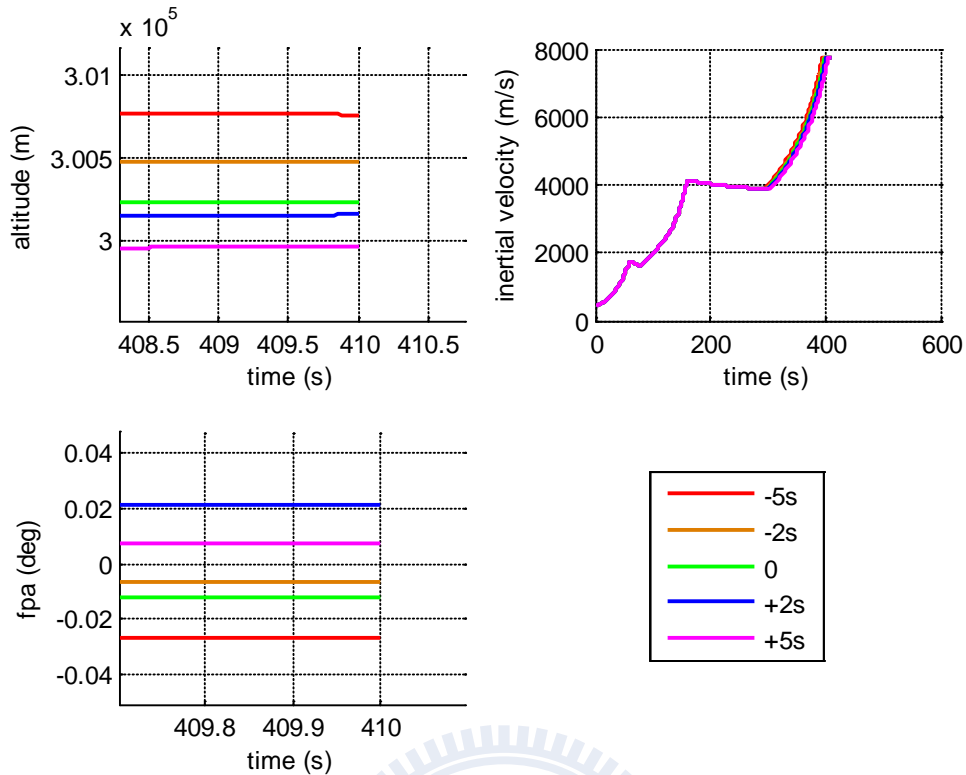


圖 5.6 第三階段啟動時間誤差 (-1s~+1s) 高度回授控制飛行 (高度、速度、仰角)

由圖 5.5 及圖 5.6 模擬結果可比較出是否回授的差別，為求精確高度和  $\gamma$ ，仍然拿即將入軌的前一段時間來觀察，加上高度回授控制後皆能以不到一公里的誤差平飛，且  $\gamma$  的誤差也減少很多，不到 0.1 度，而速度在每個情況皆能達到要求。因此，加上一個高度回授的控制器確實能夠使其穩定得以一定高度入軌。

## 5.2 以不同高度入軌的情形

為了討論該控制器是否只是在 300km 高空下的特例，因此利用二、三章所述之設計法則，重新設計一可爬升至 400km 之發射載具如表 5.1：

	Stage 1	Stage 2	Stage3
Total mass(kg)	42000	9000	600
Propellent mass(kg)	26400	6720	480
$I_{sp}$	250	250	250
mass ratio	0.8	0.8	0.8
Ignition time(s)	t=0	t=80	待定
Burn time(s)	60	80	100

表 5.1 目標 400km 高空的衛星物理參數

由於飛行高度較高，重量增加是必然的，重量分布同樣是以前述的軌跡觀測來決定，與前例無太大差距，而燃料比率及  $I_{sp}$  皆與 5.1 節之例子相同，目標為利用此載具以同樣的控制方式入軌 300km~400km 之間不同的軌道，並以圓形軌道繞地飛行。因此，利用轉向時間點  $t_1$  的切換使飛行高度增減，以及高度回授來精準控制入軌高度。

實際模擬情形：

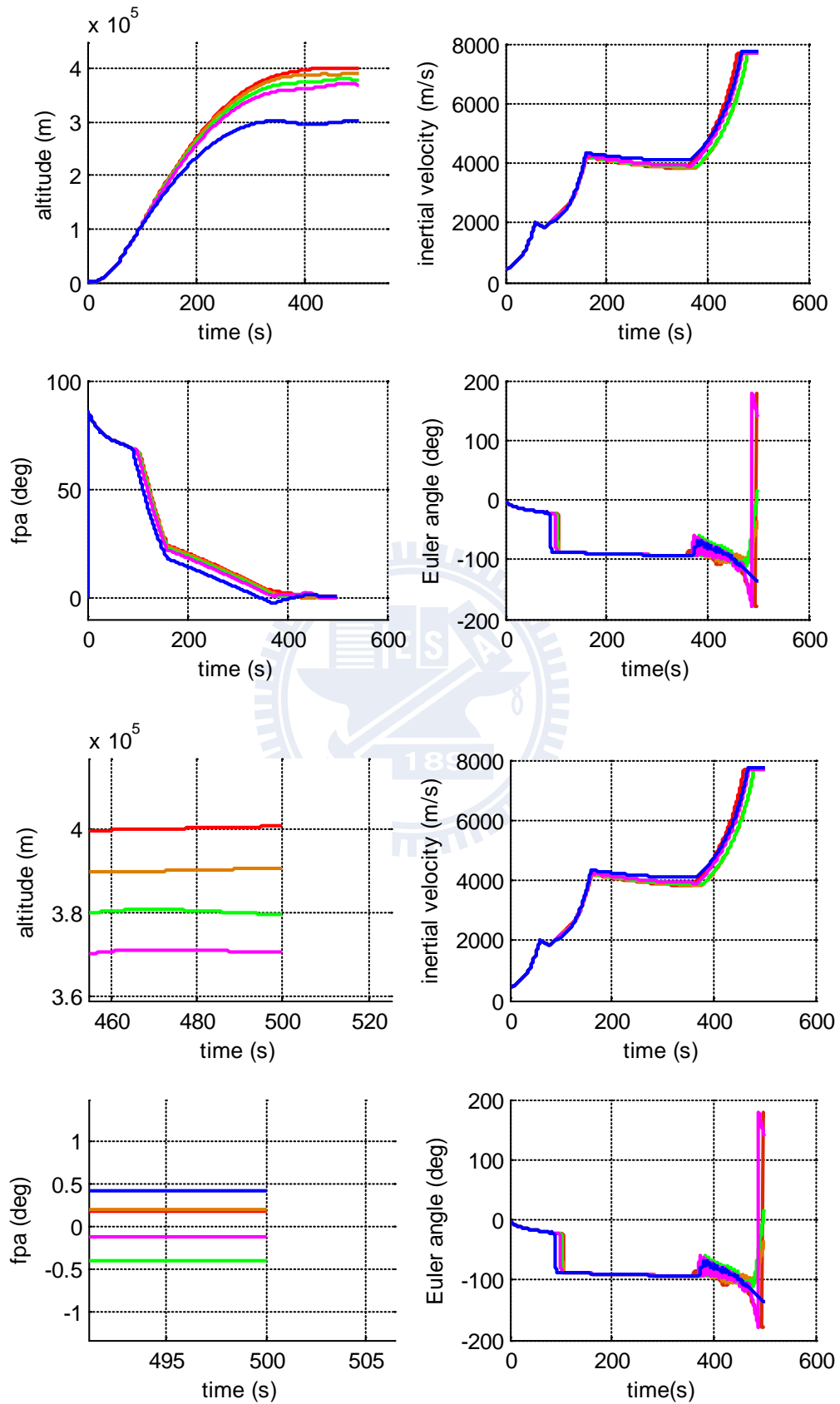


圖 5.7 以不同高度入軌情形 (高度、速度、仰角、尤拉角)

圖 5.7 的五個入軌情形，依序分別是目標為 400km、390km、380km、370km、300km 的入軌情形，均可以不到一公里的誤差長時間飛行， $\gamma$  也在能接受的小角度之內，不同入軌高度也有不同的速度要求，而本例中的速度也有因高度不同而有不同的修正而成功入軌，其中右下角小圖的尤拉角部分，在控制結束後仍有剩餘的角速度存在，因此會在第三階段脫節後有大的角度變化，但仍能控制衛星維持穩定，此階段已不在討論範圍中。

飛行中途在第一節脫節後高度約在 60km 左右，可脫離大氣層空氣密度最高處，而預期入軌高度越低者，其轉向時間  $t_1$  自然也就越早，而轉向後經過巡航進入第三階段時，則以同樣的高度回授來控制平飛。利用控制可以使高度維持水平飛行，而速度達到要求後脫節，故只要有能夠飛行至 400km 的載具，便能使他在不同高度下入軌。

### 5.3 討論燃料比率及 $I_{sp}$ 的影響

#### 5.3.1 不同燃料比率的模擬

利用前述之火箭物理參數設計方法，重新設計出三個類似的火箭，目標同樣是海拔 400km 的軌道如表 5.2，三個火箭飛行的模擬結果如圖 5.8 所示：

	Case 1	Case 2	Case 3
燃料比率	0.85	0.8	0.75
第一階段總質量	15000	42000	80000
第二階段總質量	4000	9000	20000
第三階段總質量	600	600	600
$I_{sp}$	250	250	250
成功入軌	是	是	否

表 5.2 三個不同燃料比率的火箭物理參數

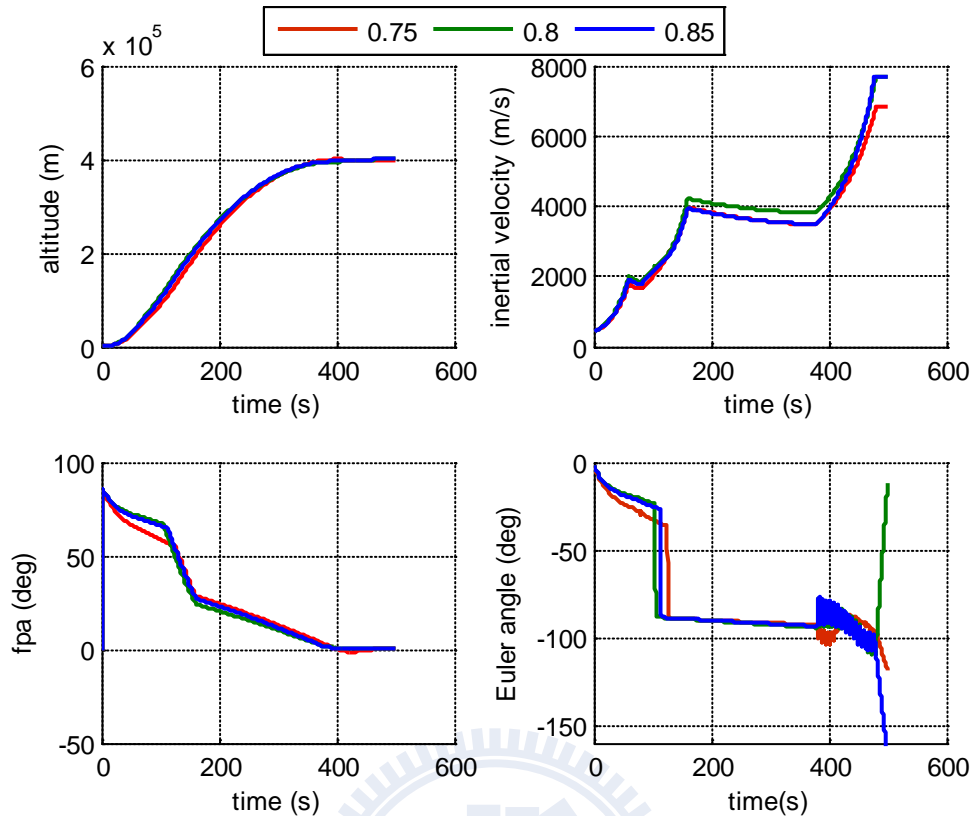


圖 5.8 不同燃料比率的入軌情形（高度、速度、仰角、尤拉角）

在本節中希望利用不同燃料比率來達到要求，圖 5.8 右下的尤拉角圖形同樣在最後脫離時有正常的持續轉向，但從模擬結果右上速度圖形中可看出，當載具之燃料比率為 0.75 的情況時，燃料用盡後的速度不足，並無法成功入軌，故以目前燃料的  $I_{sp}$  條件下，火箭之燃料比率應當有個入軌與否的臨界值位於 0.75 至 0.8 之間，若要改進則將其中幾段增加其燃料比率便能改善無法入軌的問題。

### 5.3.2 入軌條件的臨界值與修正

從  $\Delta V$  可以計算衛星是否能成功入軌，因衛星入軌與否與軌道上的速度有關，速度需求如(4.7)式計算出的：

$$V = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

而軌道高度可用前述控制方法讓他達到要求，但載具加速是由 TVC 系統提供加速度，必須有一定的條件才能達到，而考慮重力與空氣阻力可整理出加速情形如(2.13)式：

$$\dot{V} = \frac{1}{m}(T \cos \alpha - D - mg \sin \gamma) + R\omega^2 \cos \tau [\cos \tau \sin \gamma - \sin \tau \cos \gamma \sin \psi]$$

在做入軌臨界值的推算時，因離心力與科氏力影響較小，先予以忽略，因此可改寫如(5.1)式：

$$\Delta V = \Delta V_T - \Delta V_g - \Delta V_D \quad (5.1)$$

將主要影響的前三項分開計算並透過積分可得到(5.2)式：

$$\Delta V = \int \frac{T \cos \alpha(t)}{m(t)} dt - \int \frac{D(t)}{m(t)} dt - \int g(t) \sin \gamma(t) dt \quad (5.2)$$

要計算(5.2)式的加速效果時，必須先做一次模擬，以未能成功入軌的情形前兩階段  $T$ 、 $\gamma$ 、 $\alpha$  與時間的關係紀錄，示意如下圖，且將其變化量分段近似為線性關係：

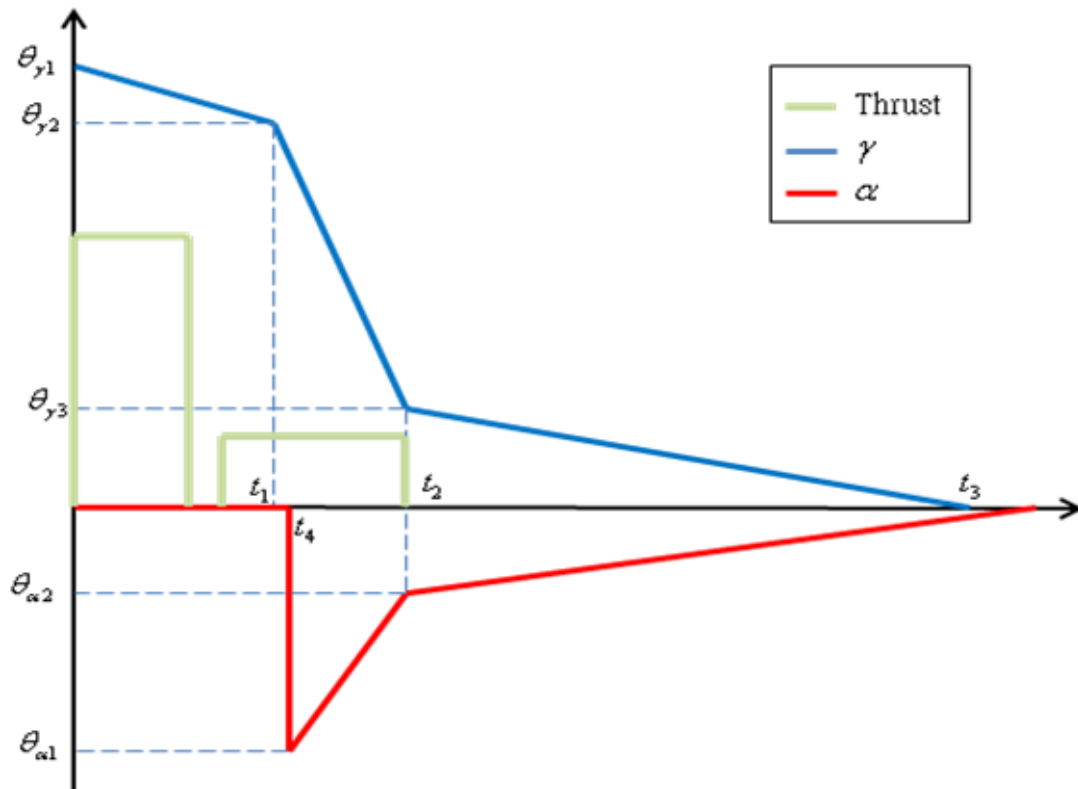


圖 5.9 入軌條件計算的時間關係

以四節火箭的推進來說，大致上的變化皆如圖 5.9 所示，其中， $t_1$  為轉向時間，亦即在第二階段推進時的大角度轉向，然而，因為角度轉向大，需要花一些時間，因此攻角達到最大值  $t_4$  會與轉向時間有一點差異，而  $t_4$  至  $t_2$  之間因為有加速攻角下降的改變速度較快。

### 推進系統所給予的速度改變量

當  $\alpha$  約等於零度時，如圖 5.9 前段，因進行重力轉彎攻角極小，(2.13)式可簡化如下：

$$\begin{aligned}
 \Delta V_T &= \int \frac{T}{m(t)} dt = \int \frac{I_{sp} \dot{m} g}{m_i - \dot{m} t} dt \\
 &= I_{sp} \dot{m} g \int \frac{1}{m_i - \dot{m} t} dt \\
 &= I_{sp} \dot{m} g \times \left( \frac{-1}{\dot{m}} \right) \times [\ln(m_i - \dot{m} t) \Big|_0^{\frac{X m_i}{\dot{m}}}] \\
 &= -I_{sp} g \times [\ln(m_i) - \ln(X m_i)] \\
 &= -I_{sp} g \times [\ln(1 - X)] \tag{5.3}
 \end{aligned}$$

其中定義  $X$  為該階段燃料所佔總重的比例。當  $\alpha$  不等於零度時，也就是轉向之後，根據(2.13)式，對速度有效者為一個餘弦值的分量，另一分量則造成速度方向的改變，其中加速的部分需要透過積分計算：

$$\begin{aligned}
 \omega_\alpha &= (\alpha_2 - \alpha_1) / (t_2 - t_4) \\
 \alpha(t) &= \theta_\alpha + \omega_\alpha (t - t_4) \\
 \Delta V_T &= \int \frac{T \cos \alpha(t)}{m(t)} dt \\
 &= \int \frac{I_{sp} \dot{m} g \cos \alpha(t)}{m_i - \dot{m} t} dt \\
 &= \int \frac{I_{sp} \dot{m} g \cos(\theta_\alpha + \omega_\alpha (t - t_4))}{m_i - \dot{m} t} dt \tag{5.4}
 \end{aligned}$$

### 重力所造成的速度改變量

同樣的，重力會因為速度方向而產生一個速度方向改變及正弦值的加速，一樣要以積分計算，可推導如下：

$$\Delta V_g = \int g(t) \sin \gamma(t) dt$$

其中，透過圖 5.10， $\gamma$  的可分為三段的變化，以 $(\omega_{\gamma_1}, \omega_{\gamma_2}, \omega_{\gamma_3})$  表示第一段重力轉彎、第二段轉向後的加速、第三段的自由飛行的變化率：

$$\omega_{\gamma_1} = (\theta_{\gamma_2} - \theta_{\gamma_1}) / (t_1 - 0)$$

$$\omega_{\gamma_2} = (\theta_{\gamma_3} - \theta_{\gamma_2}) / (t_2 - t_1)$$

$$\omega_{\gamma_3} = (0 - \theta_{\gamma_3}) / (t_3 - t_2)$$

$$\Delta V_g = g_{avg} \left( \int_0^{t_1} \sin(\theta_{\gamma_1} + \omega_{\gamma_1} t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \sin(\theta_{\gamma_2} - \omega_{\gamma_2} (t - t_1)) dt + \int_{t_2}^{t_3} \sin(\theta_{\gamma_3} - \omega_{\gamma_2} (t - t_2)) dt \right) \quad (5.5)$$

### 空氣阻力所造成的速度改變量

空氣阻力的改變量仍為一積分函數，約在前 60 秒會有較大的值，之後空氣稀薄處就幾乎為零不必計算，而力量的方向為朝向速度的反方向，因此不需計算其他角度：

$$\Delta V_D = \int \frac{D(t)}{m(t)} dt \quad (5.6)$$



實例：

以 5.3.1 節中燃料比率為 0.75 未能入軌的衛星為例，欲在燃料比率或其他方面上做一點改善希望其入軌成功，所作的分析如下；

重力部分：

為求出重力對速度影響，由圖 5.8 的第一次模擬結果，將  $\gamma$  做一些簡單的近似如圖 5.10：

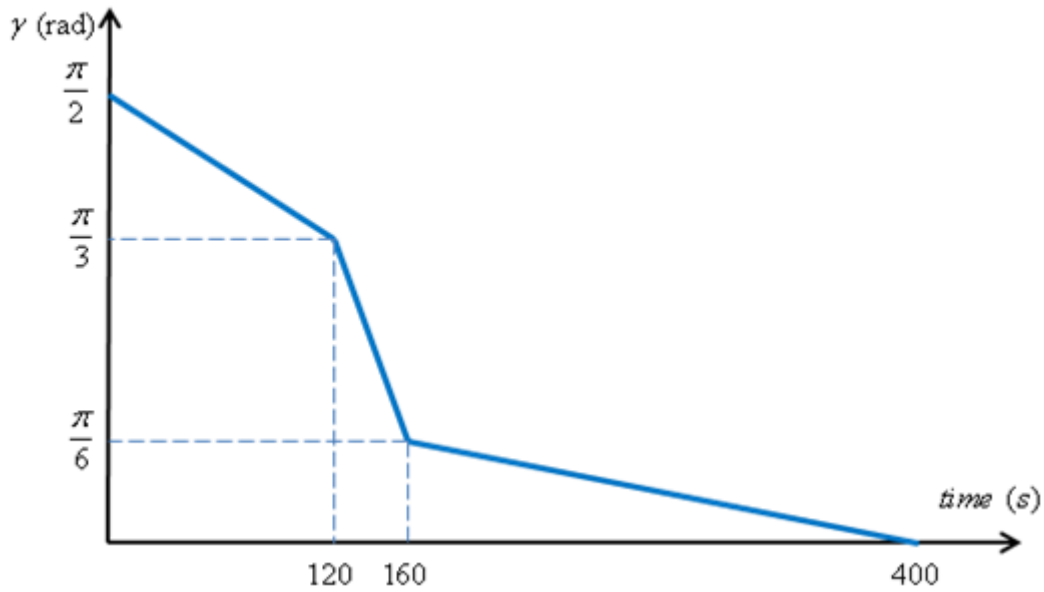


圖 5.10 飛行仰角的變化圖

分析時，重力取海拔 0~400km 空中的平均值  $9.24m/s^2$ ，再利用圖 5.10 的變化來求得重力對速度的改變量：

$$\begin{aligned}\Delta V_g &= 9.24 \int \sin \gamma(t) dt \\ &= 9.24 \left( \int_0^{120} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{720}t\right) dt + \int_0^{60} \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{240}t\right) dt + \int_0^{240} \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{1320}t\right) dt \right) \\ &= 9.24 \times (114.5916 + 27.9623 + 56.2920) \\ &= 1837.3(m/s)\end{aligned}\tag{5.7}$$

重力造成之速度減少會是最大的，但能量會漸漸轉為位能儲存起來。

空氣阻力部分：

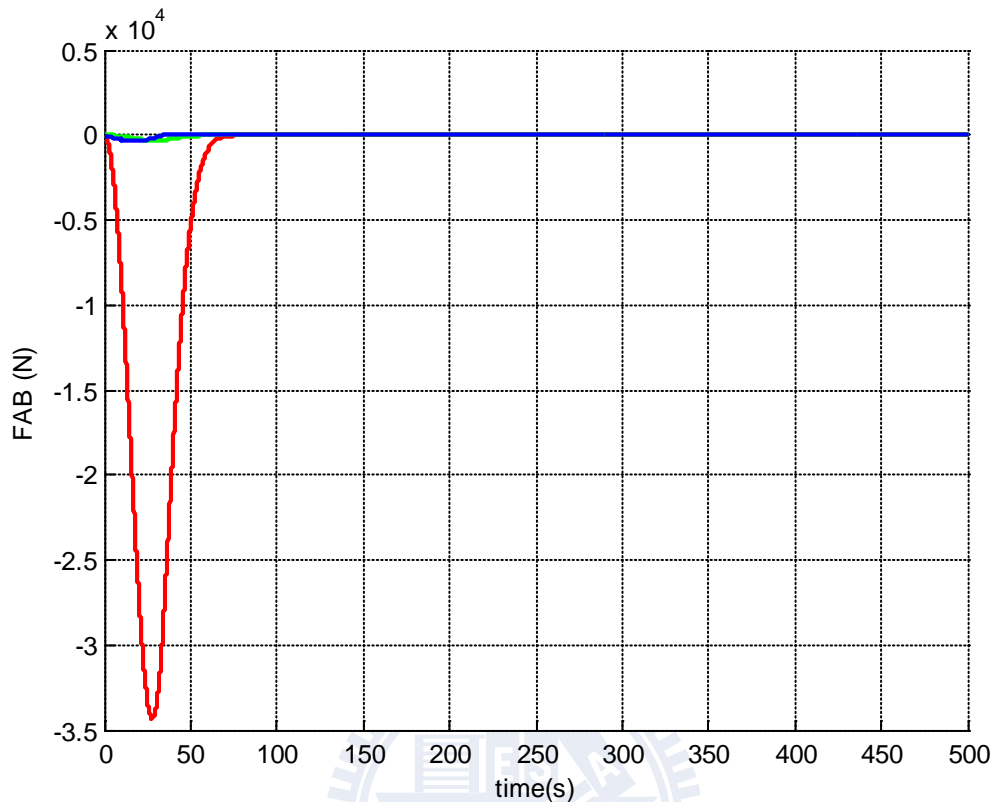


圖 5.11 空氣阻力的模擬圖

圖 5.11 為一簡單的模擬，做出在全程中空氣阻力的大小，可明顯看出，僅前 60 秒左右空氣阻力足以影響系統，經過簡單的近似為三角形後，可積分出空氣阻力造成之速度改變為  $32.9(m/s)$

經過簡單計算得到空氣阻力及重力對載具所造成的速度改變量，再利用(5.1)式可推算出載具本身必須提供的總衝量，由於  $\Delta V = \Delta V_T - \Delta V_g - \Delta V_D$ ，而載具跟著地球自轉時，會因為角速度與半徑的關係而具有  $430(m/s)$  的初速，而海拔高度 400km 的軌道入軌時要求之速度約為  $7700(m/s)$ ，由(5.1)式計算可推得：

$$7700 - 430 = \Delta V_T - 1837.3 - 32.9$$

$$\Delta V_T = 9140.2(m/s) \quad (5.8)$$

為求推力造成之速度改變，仍然從圖 5.8 之模擬結果，將  $\alpha$  與推力對時間關係近似如圖 5.12：

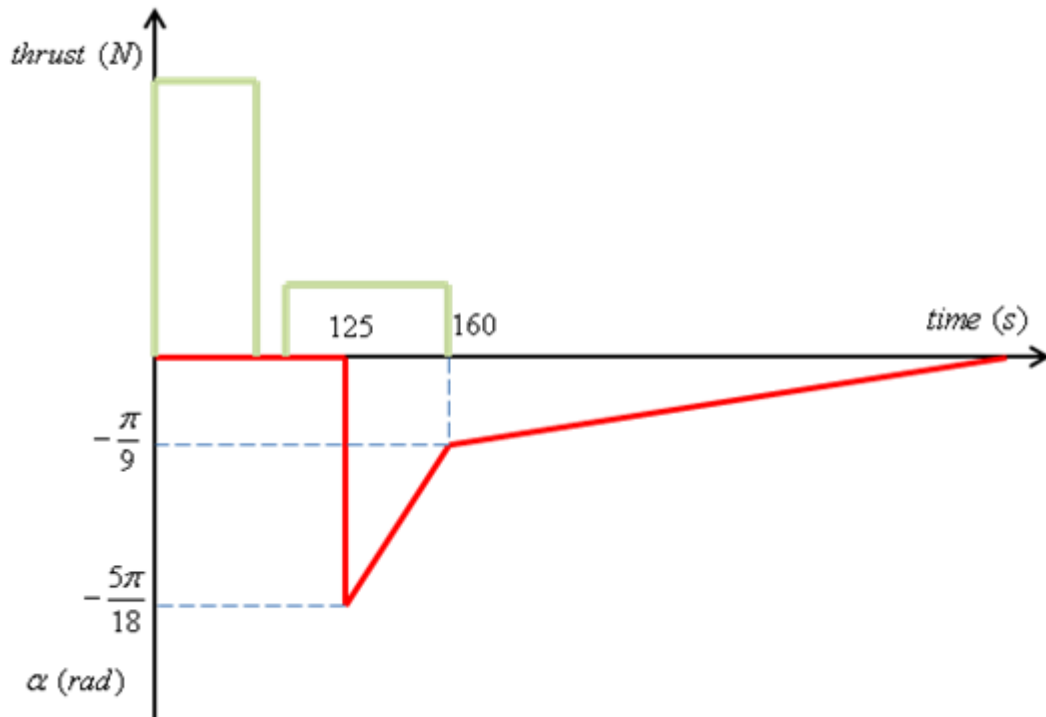


圖 5.12 推力與攻角對時間的關係圖

以此未能成功入軌的例子，在不改變  $\alpha$  及  $\gamma$  對時間的關係前提下，必須維持前兩段飛行的結果，而在姿態影響最小、加速卻最快的第三階段上進行改善，改善方向可由燃料比率或是  $I_{sp}$  進行。

由本例來說，第二階段之質量為原本總質量的 25%，此為第三章中所描述之設計，而第三階段質量固定為 600kg， $I_{sp}$  也維持 250，總質量為 80000kg 之載具，前兩階段之加速在積分後為 4934.4(m/s)，固定前兩階段之燃料比率為 0.75，以此求第三階段需要的速度改變量。

$$\Delta V_{T.stage3} = 9140.2 - 4934.4 = 4205.8(m/s) \quad (5.9)$$

從燃料比率上改善：

根據(5.9)式可知第三階段飛行要有  $4305.8(m/s)$  的速度改變，再從(5.3)式可得到第三階段應該有的燃料比率：

$$\Delta V_T = -I_{sp} g \times (\ln(1 - X))$$

$$\frac{\Delta V_T}{I_{sp} g} = -\ln(1 - X)$$

$$1.8128 = -\ln(1 - X)$$

$$X = 0.8275 \quad (5.10)$$

由(5.10)式之結果可得到燃料比率應改為 0.8275 以上才有可能正確入軌，因此在新的模擬中，將第三階段燃料比率改為 0.83，前兩階段維持 0.75 入軌如下：

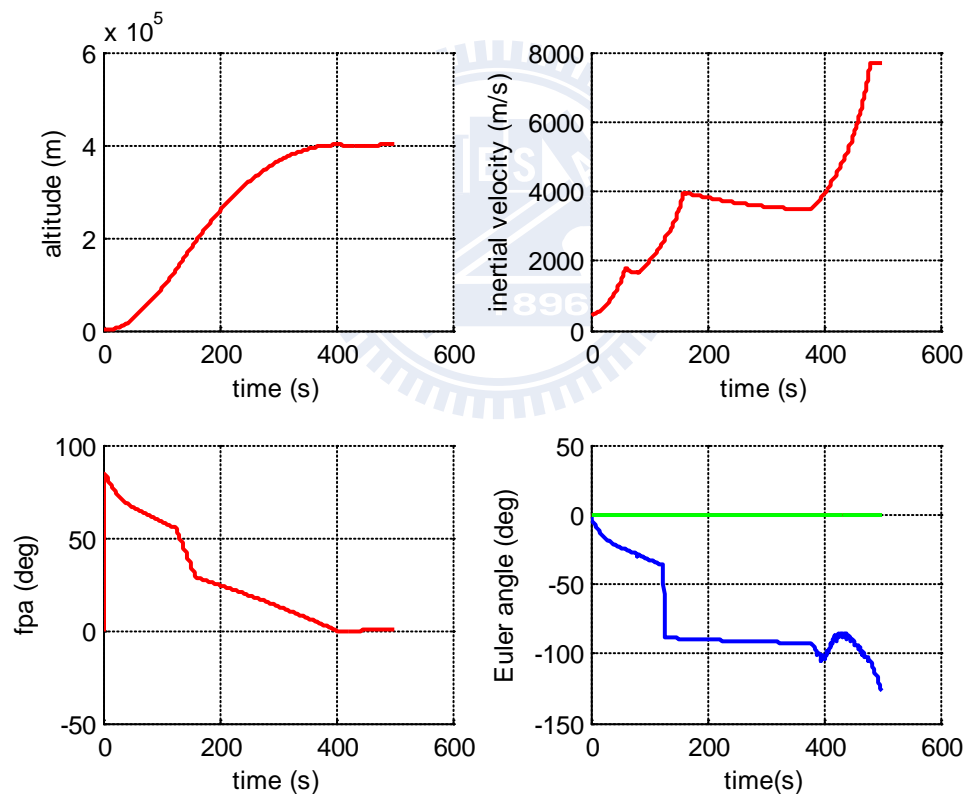


圖 5.13 改善燃料比率後的模擬結果（高度、速度、仰角、尤拉角）

由圖 5.13 看出前兩階段完全沒有不同，而第三階段由於燃料比率的提高，加速變快，到達了入軌的速度要求，而高度與速度方向的誤差小，是一個成功改良的結果。

從  $I_{sp}$  上改善：

同樣的利用(5.3)式，亦可從  $I_{sp}$  上進行改善：

$$\Delta V_T = -I_{sp} g \times (\ln(1 - X))$$

$$\frac{\Delta V_T}{I_{sp} g} = -\ln(1 - X)$$

$$I_{sp} = \frac{4305.8}{\ln(4) \times 9.81}$$

$$I_{sp} = 316.6135 \quad (5.11)$$

以  $I_{sp} = 330$  再做一次模擬：

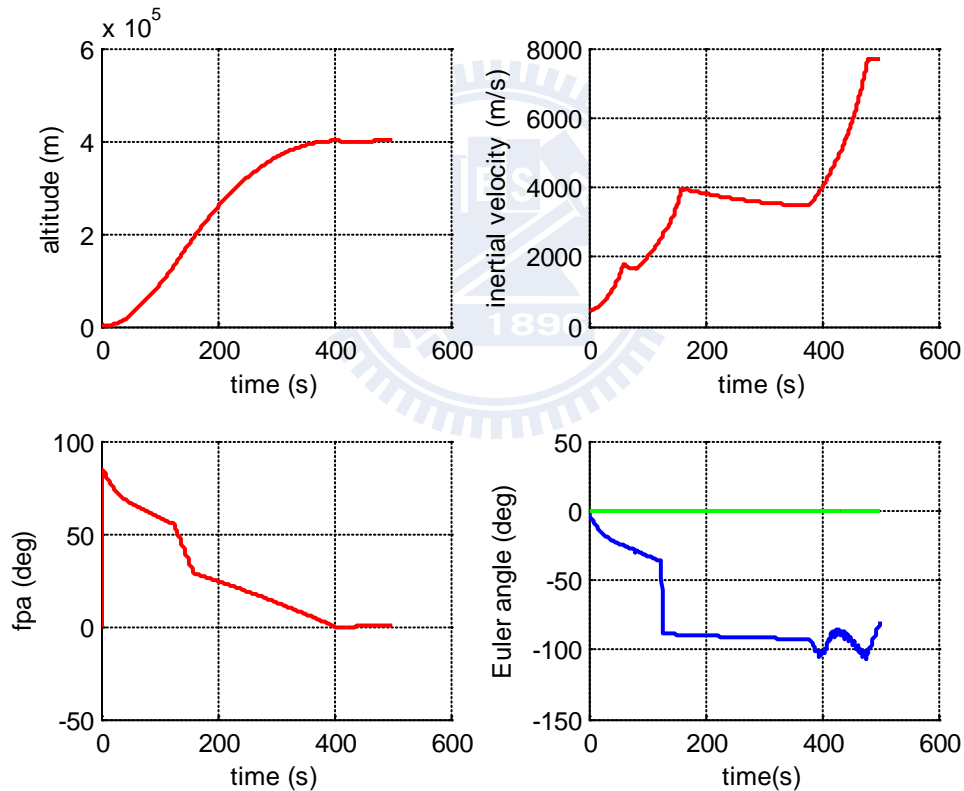


圖 5.14 改善  $I_{sp}$  後的模擬結果（高度、速度、仰角、尤拉角）

從此例中可看出，不論從燃料比率或  $I_{sp}$  下手，皆可以增加加速能力，而  $I_{sp} = 330$  的燃料在國外許多載具皆有使用，燃料比率達 0.9 以上也為常見，因此會是一個合理的改善方案。

## 第六章 結論

衛星入軌是一個相當困難且具有挑戰的問題。從台灣試射的幾顆探空火箭可看出載具研究已漸漸成熟，但欠缺就在於如何在發射後能瞄準軌道運行，不論軌跡的選擇與載具設計上都極度複雜，目前為止的結論有以下幾點：

- 一、一開始利用重力轉彎，可以讓載具避開空氣阻力最大的部分，接著在阻力小的位置轉向，最後階段固定高度平飛，使載具能在一定的高度入軌。
- 二、在第三階段能利用一高度回授進行修正，以利精準控制軌道的位置、速度、角度等等，而在衛星脫節後繞地運行，而衛星內部能量可修正少量的軌道誤差，便不在討論範圍[13]。
- 三、載具推力數據的估計，可幫助未來設計發射不同軌道與負載的發射載具，且在目前載具未能符合要求時能夠提供一個修正方式。

目前成功發射衛星的僅有俄、美、英、法、日、以、中國大陸與其他少數國家，但其他已開發國家無不致力投入研究。像是韓國在 2009 年及 2010 年各發射了 Naro 號衛星，雖然皆以失敗告終，但仍堅持要到成功為止。而台灣的發射載具已有一段時間的研究，本論文提供一些載具參數與入軌方式，希望能在未來的太空科技發展上提供一些參考價值。

## 參考資料

- [1] C. A. Lin, “Six Degree-of-Freedom Simulation of Launch Vehicle Dynamics A Preliminary Report”, Jan 2, 2007.
- [2] Wikipedia Low Earth Orbit [http://en.wikipedia.org/wiki/Low\\_Earth\\_orbit](http://en.wikipedia.org/wiki/Low_Earth_orbit)
- [3] Wikipedia CZ-1D <http://en.wikipedia.org/wiki/CZ-1D>
- [4] Wikipedia Titan IIIB [http://en.wikipedia.org/wiki/Titan\\_IIIB](http://en.wikipedia.org/wiki/Titan_IIIB)
- [5] Wikipedia List of rockets [http://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_rockets](http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_rockets)
- [6] Martin J. L. Turner, *Rocket and Spacecraft Propulsion*, Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [7] Taurus® Launch System Payload User’s Guide March 2006 Release 4.0, <http://www.orbital.com/NewsInfo/Publications/taurus-user-guide.pdf>
- [8] Herbert Goldstein, *Classical mechanics*, 2<sup>nd</sup> edition, Section 4-5, pp.148-158, Appendix B, pp.608-610, Addison-Wesley publishing company, 1980.
- [9] Maham add Marrdonny, and Mohammad Mobed, “A Guidance Algorithm for Launch to Equatorial Orbit” *Aircraft Engineering and Aerospace Technology: An International Journal* Volume, 81, Number 2, 2009, 137-148.
- [10] Stephen T. Thornton, and Jerry B. Marion, *Classical Dynamics of Particles and Systems*, Thomson 2004.
- [11] Francis Hale, *Introduction to Space Flight*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1994.
- [12] R.H. Battin, *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*, AIAA Education Series, New York, NY. 1987.
- [13] Jian Lin, Xiaohui Lin, Xibin Cao, “Mix Genetic and Simulated Annealing Algorithm for Low-Thrust Orbit Transfers”, *Research Center of Satellite Technology, Harbin Institute of Technology*, Harbin 150001, China.