

國 立 交 通 大 學

電 控 工 程 研 究 所

碩 士 論 文

提升聲源位置估測準確度之麥克風陣列幾何配置



Geometrical Arrangement of Microphone Array for
Accuracy Enhancement in Sound Source Localization

研 究 生： 蔡 傑 名

指 導 教 授： 胡 竹 生 博 士

中 華 民 國 九 十 九 年 七 月

提升聲源位置估測準確度之麥克風陣列幾何配置

Geometrical Arrangement of Microphone Array for Accuracy Enhancement in Sound Source Localization

研究 生：蔡 傑 名

Student : Chieh-Min Tsai

指 導 教 授：胡 竹 生 博 士

Advisor : Dr. Jwu-Sheng Hu

國立交通大學
電控工程研究所
碩士論文

A Thesis

Submitted to Institute of Electrical and Control Engineering
College of Electrical Engineering
National Chiao Tung University
in partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master
in

Electrical and Control Engineering

July 2010

Hsinchu , Taiwan , Republic of China

中 華 民 國 九 十 九 年 七 月

提升聲源位置估測準確度之麥克風陣列幾何配置

研究生：蔡傑名

指導教授：胡竹生博士

國立交通大學電控工程研究所碩士班

摘要

本論文提出一套在麥克風數量固定與麥克風間距離有最大限制的情況，在不同訊噪比(SNR)下找出一個對角度估測與位置估測的最佳麥克風陣列排列方法。文中所使用的角度和位置的估測方法乃基於麥克風之間聲源傳遞的時間差(Time Difference of Arrival, TDOA)。因為此時間差的估測在實際狀況下有誤差，因此導致聲源角度和位置的估測不準，而此不準度與陣列的幾何配置有密切關係。本論文提出以估測矩陣的奇異值(singular value)對估測變異量的影響，進而探討麥克風陣列的最佳排列方法。在遠聲場的條件下，本論文得到精確的全域解析解可以使角度估測的 Cramér-Rao Lower Bound (CRLB)最小，而在近聲場的情形下，其結果需要對非線性聯立方程式求解，且與聲源位置有關。因此本論文探討在額外的限制條件下，其數值解的結果與特性。

Geometrical Arrangement of Microphone Array for Accuracy Enhancement in Sound Source Localization

Student: Chieh-Min Tsai Advisor: Prof. Juw-Sheng Hu

Institute of Electrical and Control Engineering

ABSTRACT

This work proposes an optimal structure of microphone array for sound source localization under the conditions of fixed microphone numbers, limited distance between each microphone pair and different signal-to-noise ratios (SNR). The location estimation algorithm is based on the time difference of arrival (TDOA) of each microphone pair. The estimation accuracy is influenced by the TDOA errors and is dependent on the microphone array geometry. This work proposes a geometry optimization formulation using the relationship between the singular values of the estimation matrix and the estimation error. Under the far field condition, an analytical solution can be derived to minimize the Cramér-Rao Lower Bound (CRLB). In near field, the result leads to a set of nonlinear equations and is source location dependent. With additional constraints, several numerical solutions are discussed.

誌 謝

兩年的研究碩士生涯，或許也是最後的學生生涯，就要畫下句點了。由衷的感謝實驗室大家長，也是我的指導教授胡竹生博士兩年的教誨，感謝老師在我研究路上給予適時的提點及建議，而老師積極的態度、各領域深厚的研究理論基礎，都是應該追求的典範。

感謝實驗室的大家，感謝帶我進入聲音領域，也在我剛進入計畫時給我這小毛頭很多幫助的興哥，祝你今年順利畢業；實驗室的大姐大，也在最近剛成為人妻的鏗元學姊；在我研究生涯完成結婚和生小孩兩件人生大事的永融，祝你們全家幸福；還有跟我同天生日的聯誼達人丸子哥晉源；任何事都難不倒的實驗室強者阿吉；帥氣、認真的明唐，任何事總能解決，在計畫中一起度過了不少時光；同班加同實驗室 6 年的拳霸 judo，祝你在博班不歸路能快速秒殺它；還有做事認真的昌言學長；在我碩一陪我度過一年的強者戰神 dodo，歡迎你回到實驗室；衣著十分有個性、常跟我閒聊的 Lundy 大大；還有熱愛籃球的肉鬆；還有大學是電控也是實驗室同梯的前熱音社社長、衝浪男孩 simon；看似很閒，但還是有在認真做事的沛錡；還有題目換來換去，但都可以應付好的阿 him；還有實驗室的碩一以及碩零學弟；兩位跟我在地下室奮鬥的偉庭、新文；新任管理員&實驗室學妹湘筑；在九樓努力奮鬥的學文、昀軒、建安；兩位未來實驗室台柱昭男、耕維；新進來的學弟們建廷、哲鳴、宗翰。

除此之外，更要感謝蛋糕社的夥伴，這我在碩二這年生活更多的充實，阿宅&阿斯豆腐的修明；正在美國旅遊打工，陪我聊天及吃飯玩樂的文文；還有各個 101 級的幹部；正往菸酒生邁進，對人非常好的承閔；同年且打扮超夜店咖的周傑；即將考研究所的 judy 和羅心好，兩位請多加油。

更感謝我的父母和家人，在我有壓力的時候適時給予我鼓勵，讓我可以度過這一切難關。最後感謝所有的人，也感謝這陪伴我六年的交大。

目 錄

摘要	I
ABSTRACT	II
誌 謝	III
表 列	V
圖 列	VI
第一章 緒論	1
1.1 研究動機	1
1.2 文獻回顧	3
1.3 論文貢獻	6
1.4 論文架構	6
第二章 GCC 和聲源方位估測演算法	7
2.1 GCC 演算法	7
2.2 聲源方位估測演算法	9
2.2.1 聲源方位估測原理	9
2.2.2 有限制的最小平方演算法	12
第三章 麥克風位置擺放最佳化	14
3.1 奇異數(singular value)	14
3.1.1 奇異數介紹	14
3.1.2 奇異數與麥克風位置的關聯	14
3.2 麥克風最佳化擺放位置	17
3.2.1 遠聲場的最佳擺放位置	17
3.2.2 近聲場的最佳擺放位置	35
3.3 模擬結果與分析	52
第四章 結論與未來展望	59
Reference	60

表 列

表一、遠聲場聲源下不同麥克風陣列擺放對不同角度聲源的角度誤差變異量.....	34
表二、近聲場聲源下不同麥克風陣列對90度附近聲源的方位估測誤差(一).....	55
表三、近聲場聲源下不同麥克風陣列對90度附近聲源的方位估測誤差(二).....	56
表四、近聲場聲源下不同麥克風陣列對45度附近聲源的方位估測誤差(三).....	57
表五、近聲場聲源下不同time delay誤差對兩種麥克風擺放對90度來向聲源的方位誤差表.....	58



圖 列

圖一、遠聲場情況下二維麥克風最佳排列範例.....	22
圖二、Sensor示意圖.....	23
圖三、遠聲場情況下三維麥克風最佳排列範例.....	25
圖四、三維聲源示意圖.....	25
圖五、遠聲場情況下根據角度變異量設計不同的3種麥克風陣列擺放方式.....	33
圖六、近聲場聲源對遠聲場假設下之不同麥克風擺放的角度偏差值.....	36
圖七、牛頓法收斂曲線及結果.....	50
圖八、牛頓法步驟的變異量曲線圖.....	50
圖九、牛頓法收斂曲線及結果(二).....	51
圖十、牛頓法步驟的變異量曲線圖(二).....	51
圖十一、遠聲場聲源下麥克風擺放對多方位來向聲源的角度與聲速誤差(一)	52
圖十二、遠聲場聲源下麥克風擺放對多方位來向聲源的角度與聲速誤差(二)	53
圖十三、遠聲場聲源下麥克風擺放對多方位來向聲源的角度與聲速誤差(三).....	54
圖十四、近聲場聲源下麥克風擺放對多方位來向聲源的方位誤差(一).....	55
圖十五、近聲場聲源下麥克風擺放對多方位來向聲源的方位誤差(二).....	56
圖十六、近聲場聲源下麥克風擺放對多方位來向聲源的方位誤差(三).....	57
圖十七、近聲場聲源下不同時間延遲誤差不同麥克風擺放對90度來向聲源的方位誤差 圖	58

第一章 緒論

1.1 研究動機

空間中的聲源定位(Sound Source Localization)是聲音訊號處理領域中一項重要的技術，在聲源分離或是降低環境噪音干擾的研究上，目標或是干擾聲源的位置資訊對提升分離或降噪效能上有很大的幫助。此外，在語音處理相關應用中，聲源的位置也是整體系統中的一項重要資訊，例如在視訊會議中確認發言者的位置，或是智慧型機器人辨別交談者的方位等。一般較為準確的聲源定位均需仰賴麥克風陣列，指的是由若干麥克風按照一定的方式佈置在空間不同位置上組成的陣列。麥克風陣列因為其空間選擇性，可以在一定範圍內實現聲源的定位。

現有使用麥克風陣列的聲源定位技術大致可分為三類。第一類是基於最大輸出功率的可控波束形成(beamforming)技術。其基本概念是將各陣列元件採集的訊號進行加權求和形成波束，通過搜索聲源的可能位置來引導該波束，並修改權值使得麥克風陣列在聲源方向的輸出信號功率最大。在傳統的波束形成器中，權值取決於各陣列元件上訊號的相位延遲，相位延遲與聲達時間延遲(delay of arrival, DOA)有關，因此稱為延遲求和波束形成器(delay-and-sum beamformer)，第二類是基於訊號頻譜差異的空間特徵估計技術。此方法主要有自我回歸模型(autoregression)、最大熵法(maximum entropy)、最小平方差估計法(minimum variance estimation)和特徵值分解方法(multiple signal classification, MUSIC ; estimating signal parameters via rotational invariance techniques, ESPRIT)等方法。第三類是基於聲音到達各陣列元件的時間差(time difference of arrival, TDOA)的定位技術。TDOA的估測最常使用的方法就是取兩顆麥克風間的GCC(Generalized Cross-Correlation)，藉由找出GCC的最大值就等於找到

了聲音傳遞到這兩顆麥克風的時間差，在經由時間差的資訊便可以推測出聲源相對於這兩顆麥克風的方位。當麥克風個數變多時，即可以利用三角定位法的原理計算聲源的位置。TDOA的方法比之第一、二類方法有兩個優點，第一是可以經過變數轉換，可以間接估測聲音的傳遞速度，第二是其方法可同時適用在近聲場與遠聲場的情況。本論文及以TDOA的方法來探討定位的準確性。

一般很多研究著重在於如何逼近麥克風中的訊號空間轉換使得TDOA的誤差縮小，如此對聲源方位或位置估測的誤差就會變小。然而，一旦麥克風的數量增加，麥克風的排列方式也會影響到估測的準確性，例如不恰當的陣列幾何配置可能在某些角度的聲源會造成極大的誤差。其次，對陣列的設計而言，其基本的問題是在無可避免的TDOA估測誤差下，如何設計陣列的幾何配置以達到最佳的聲源定位。以往這方面的研究大部分以遠聲場為主，而本論文則嘗試以一統合遠近聲場的定位模型，基於最小方差無偏估計(minimum variance unbiased estimator)，分別探討在近聲場與遠聲場的情況下，麥克風陣列的最佳幾何配置關係。

1.2 文獻回顧

估測訊號在空間中的方位，或者是入射方向與感測裝置之間的關係，此類研究一般來說稱為Direction of arrival (DOA) estimation，DOA 的技術層面其中一類為基於聲音到達各陣列元件的時間差(time difference of arrival, TDOA)的定位技術，TDOA的估測最常使用的方法就是取兩顆麥克風間的GCC (Generalized Cross-Correlation)，藉由找出這個關係式的最大值就會等效於找到了聲音傳遞到這兩顆麥克風的時間差，而GCC的定義卻延伸出相當多的變化，也是推動此類方法持續演進的關鍵技術，這類方法主要都是轉換到頻率域，並且定義出各自的Weighting function。

Roth[1]所提出的Roth Processor，好處在於可以壓低第一顆麥克風電子雜訊和空間雜訊的所在頻率所產生的影響，估計的正確性。Carter等人[2]提出的PHAT，如果兩顆麥克風彼此的雜訊的分佈情況是無關的此法可以有相當好的效果，這也是本文中使用的方法。Carter等人[3]又提出的SCOT，此法是同時去考慮到兩顆麥克風的雜訊所造成的影响，而相較Roth只考慮到第一顆麥克風的雜訊所造成的影响，可說是SCOT的一個特例。Knapp以及Carter提出的ML (Maximum Likelihood)方法[4]，放鬆了高SNR 這樣的限制，且假設雜訊以及聲源的統計分佈都是高斯分佈(Gaussian)，最後推演出新的Weighting function、Brandstein等人的[5]，此方法並不需要求取channel的響應，而是利用新的統計函數(Tukey's Biweight)來重新定義Weighting function，並且推演出對於反射情況下更穩健的估測方法，以上都是在探討這方面的問題。

以上方法都是用於1-D情況，藉由時間差的資訊，便可以推測出聲源相對於這兩顆麥克風的方位，而一旦麥克風數量增加時，麥克風的位置就不一定單單只是一個一維的情況。在多麥克風的情況下，兩兩一對的麥克風對也就增加了，因此可以獲得的資訊也就變多，除了分別利用外，另一方

面也可以整合這些資訊來提升估測的效果，但原本的關係式為一個非線性的方程式，所以最常用的方法是固定其中一顆麥克風當做參考點，於是問題就可以轉換成一個線性方程式，Yao[6]中提出利用TDOA和最小平方法(Least square)，在假設聲速不知道的情況下去估測聲源位置與聲速，更加在[7]中提出了一套有限制的最小平方演算法，其中針對估測值之間的關係加以限制，在最小平方法的基礎和利用已知聲速的理想範圍，加以改良估測求得較合理的估測值，有利於提升估測的準確度。而後[8][9]也在聲速已知的條件下，分別提出限制的最小平方演算法的封閉解。[8]中也是利用估測值之間有個關係式，利用其當成一條限制方程式，使用Lagrange multiplier來達成限制的最小平方演算法，但因為要求得Lagrange multiplier的係數沒有一個封閉解，對於計算上比較麻煩，所以它提出另外一套近似的最小平方演算法，利用泰勒展開式線性，則可找到對估測的封閉疊代解。[9]中則是深入探討Lagrange multiplier的方法，且針對Range measurement和Range-difference measurement分別加以討論。

探討陣列形狀的文章，從最簡單的直線分布，[10]探討了在直線不同位置擺放，根據Power spectral dispersion，結論出要利用Stochastic Region Contraction (SRC) algorithm來找到最佳的解，[11]主要對線段上的sensor做最佳化，不限定在直線上。[11]中，限制麥克風只能分佈在已定的線段上，基於Cramér-Rao Lower Bound(CRBL)去最小化變異量的下界，並分別去探討三種不同的情況，角度估測、距離估測以及位置估測，都有其不同的擺放方式。在[12]中基於Cramér-Rao Lower Bound (CRLB)對聲源位置的變異量做最佳化，在不限制麥克風和聲源位置的情況下，可以得到當2維陣列以聲源為中心呈正多邊形分佈或3維陣列以聲源為中心呈正多面體分布時，可以得到最小的位置變異量，這跟一般的直覺是一樣的。[13]則延續[12]的工作，給予更多除了[12]提到之外的排法，更特別的探

討maximum Fisher information matrix, minimum Cramér-Rao Bound, spherical codes, uniform angular arrays之間的關係。[14]則是基於線性方程式係數矩陣的條件數(condition number)會影響估測誤差的上界，利用使條件數最小化來決定感應器(sensor)的位置，但只探討最簡單的情況，也就是4顆感應器依序分布於原點、以及3軸上，結果可看出來跟其他非條件數最佳化的陣列相比可以有較小的誤差。[15]則是針對遠聲場的聲源，考慮訊號及雜訊的功率譜密度(signal and noise power spectral densities)對時間延遲(time delay)的影響，找出方位角(azimuth)和仰角(elevation)的CRLB，進而可以推論出麥克風位置對其變異量的影響，為了最小化CRLB而提出對麥克風位置的一些條件，於這些條件下可以決定麥克風的位置。[16]則是也是針對遠聲場的聲源，加上在聲速已知的條件下，基於線性方程式對azimuth和elevation的估測，分別探討azimuth和elevation的CRLB，結論出線性方程式係數，也就是麥克風位置對CRLB的影響。



1.3 論文貢獻

本文假設聲源方位以及聲速未知的情況下，以最小方差無偏估計(minimum variance unbiased estimator)為基準，結合奇異數(singular value)的觀念，對於麥克風位置加以探討。以遠聲場聲源而言，對於全方位估測，結論出一套可任意擺放和即時調整的方法，該陣列對於所有方向的聲源都有相同的估測準度，並給予其滿足條件的方程式，更佳也證明正多邊形和正多面體都滿足條件；對於已知的小範圍方位估測，可近一步利用縮小角度變異量，可精確其估測準度。對近聲場聲源，對於誤差分布有進一步的分析，分析在方程式係數也有誤差的情況下，對近聲場該如何估測，在估測位置方面，一樣對全方位估測和區域方位估測有所分別探討，並提出一套演算法供區域方位估測設計出精確較佳的麥克風擺放結構。

1.4 論文架構



本論文從聲源估測方法講起，再依序介紹近聲場與遠聲場的差異及分析，最後透過模擬來比較，主要內容如下：

第二章：主要GCC演算法與聲源估測演算法及其改良方法。

第三章：從聲源估測演算法中探討奇異數與麥克風位置的關聯性，更加深入分析如何找出最好的麥克風位置，分開遠聲場和近聲場的情況，最後為模擬與討論。

第四張：結論與未來展望

第二章 GCC 和聲源方位估測演算法

2.1 GCC 演算法

首先假設空間中有一個聲源，在理想情況下兩個麥克風收到的聲音訊號可以分別表示為：

$$x_1(t) = s_1(t) + n_1(t) \quad (2.1.1)$$

$$x_2(t) = \alpha s_1(t+D) + n_2(t) \quad (2.1.2)$$

其中假設 $s_1(t)$ ， $n_1(t)$ 和 $n_2(t)$ 都是WSS，並且 $s_1(t)$ 和 $n_1(t)$ 以及 $n_2(t)$ 是 uncorrelated。其中D就是真正的延遲(Delay)，而 α 代表的是改變大小的Scale value，並且其D和 α 的改變相較於 $s_1(t)$ 是緩慢變化的，而此時麥克風之間的 cross correlation可以表示為：

$$R_{x_1, x_2}(\tau) = E[x_1(t)x_2(t-\tau)] \quad (2.1.3)$$

其中 E 代表期望值，而使得(2.1.3)達到最大值的 τ 即為兩個麥克風之間的時間延遲量，因為實際觀測的時間是有限的，所以cross correlation的估算可以表示為：

$$\hat{R}_{x_1, x_2}(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_{\tau}^T x_1(t)x_2(t-\tau)dt \quad (2.1.4)$$

其中 T 代表觀測的時間間隔，而 cross correlation 和 cross power spectrum 之間的關係可以用 Fourier Transform 表示成下面這個形式：

$$R_{x_1, x_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{x_1, x_2}(f) e^{j2\pi f\tau} df \quad (2.1.5)$$

現在來考慮實際空間的狀態，麥克風收到的聲音訊號是經過空間轉換後的狀態，因此實際麥克風之間的cross power spectrum 可以表示為：

$$G_{y_1, y_2}(f) = H_1(f)H_2^*(f)G_{x_1, x_2}(f) \quad (2.1.6)$$

其中， $H_1(f)$ 以及 $H_2(f)$ 分別代表聲源到第一個麥克風以及第二個麥克風的空間轉換函數，因此定義麥克風對之間的Generalized correlation 為：

$$R_{x_1, x_2}^{(g)}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_g(f) G_{x_1, x_2}(f) e^{j2\pi f\tau} df \quad (2.1.7)$$

其中 $\psi_g(f) = H_1(f)H_2^*(f)$

實際上，在有限的時間觀察下只能以估算的 $\hat{G}_{x_1, x_2}(f)$ 取代 $G_{x_1, x_2}(f)$ ，因此改寫為：

$$\hat{R}_{x_1, x_2}^{(g)}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_g(f) \hat{G}_{x_1, x_2}(f) e^{j2\pi f\tau} df \quad (2.1.8)$$

由(2.1.8)就可以估算麥克風對之間的時間延遲量，而 $\psi_g(f)$ 的選取對於時間延遲的估計也有一定的影響，而其中一種方法是由Carter 等人提出的名為 PHAT (The Phase Transform)的方法，也就是：

$$\psi_g(f) = \frac{1}{|G_{x_1, x_2}(f)|}$$

此方法在兩個麥克風彼此的雜訊分佈是無關的時候，有相當好的效果。



2.2 聲源方位估測演算法

2.2.1 聲源方位估測原理

傳統的聲源定位演算法如MUSIC[17]，必須將聲音傳遞的速度定為已知，雖然關於聲速的數值有理論值可以做為參考，但是實際上，並不知道聲音傳遞的速度，K. Yao 等人[6]提出了一套在聲速為未知的情況下依舊能夠估測聲源位置的方法，此方法以TDE的為基礎去完成的，本論文提出之方法是以此方法為基礎，同時考慮到麥克風陣列的形狀以及聲源距離對估計上的影響，以下將詳細說明及推導此演算法。

根據[6]提出的方法([6]中第(13)式)，可以得到以下的式子：

$$-\frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_1)}{v |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_1|} + \frac{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_1|^2}{2v |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_1|} - \frac{v(t_i - t_1)^2}{2 |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_1|} = (t_i - t_1) \quad (2.2.1)$$

其中， \mathbf{r}_s 代表聲源的位置向量， $\mathbf{r}_i = [x_i \ y_i \ z_i]$ 代表第i個麥克風的位置向量，而 $t_i - t_j$ 代表第i個麥克風和第j 個麥克風之間的時間延遲量差(在此都將j 設定為第一個麥克風)，而 v 代表聲速。接者定義以下兩個變數：

$$\hat{\mathbf{r}}_s = \frac{\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_1|} \quad \text{以及} \quad \rho_i = \frac{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_1|}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_1|} \quad (2.2.2)$$

$\hat{\mathbf{r}}_s$ 代表聲源位置向量的單位向量，而 ρ_i 代表聲源距離和麥克風陣列大小之間的比例，而當聲源屬於遠聲場的時候， $\rho_i \ll 1$ ，將(2.2.2)代入(2.2.1)，可以得到以下的式子：

$$-(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_1) \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}_s}{v} + \frac{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_1| \rho_i}{2} - \frac{1}{v} \frac{v^2(t_i - t_1)^2}{|\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_1|} \frac{\rho_i}{2} = (t_i - t_1) \quad (2.2.3)$$

(2.2.3)式中， $v(t_i - t_1)$ 代表聲源到第i個麥克風和到第1個麥克風之間的距離，定義這樣的距離差為 d_i ，也就是：

$$d_i = v(t_i - t_1) = |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_i| - |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_1| \quad (2.2.4)$$

因此，(2.2.3)可以改寫為：

$$-(r_i - r_1) \frac{\hat{r}_s}{v} + f_i \frac{\rho_i}{2} = (t_i - t_1) \quad (2.2.5)$$

$$\text{其中 } f_i = \frac{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_1|}{v} - \frac{|d_i|}{v} \frac{|d_i|}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_1|} \quad (2.2.6)$$

由(2.2.5)式可以發現，當 $\rho_i \ll 1$ 的時候，(2.2.5)式可以近似為：

$$-(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_1) \frac{\hat{\mathbf{r}}_s}{v} = (t_i - t_1) \quad (2.2.7)$$

將(2.2.7)視為遠聲場下的關係式，所以定義 ρ_i 為聲場遠近的比例，而 f_i 為近聲場的影響因數。

由於(2.2.1)式是一個線性的方程式，所以聲源位置的估算可以利用最小平方法解(2.2.1)式而求得，首先定義聲源方向單位向量為：

$$\mathbf{x}_s \equiv [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T = \frac{\mathbf{r}_s}{v |\mathbf{r}_s|} = \frac{\hat{\mathbf{r}}_s}{v} \quad (2.2.8)$$

以及定義另外兩個變數為：

$$x_4 = \frac{1}{2v |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_1|}, x_5 = \frac{v}{2 |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_1|} \quad (2.2.9)$$



因此M個麥克風的線性方程式可以寫成： $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) & |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2 & -(t_2 - t_1)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -(\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_1) & |\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_1|^2 & -(t_M - t_1)^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} t_2 - t_1 \\ \vdots \\ t_M - t_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \\ w_4 \\ w_5 \end{bmatrix} \quad (2.2.10)$$

在3D 的環境下，需要求的變數有5個，因此需要至少6個的麥克風才可以求解，利用最小平方法的解為：

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (2.2.11)$$

而聲源位置以及聲速的估算如下：

$$\hat{\mathbf{r}}_s = \frac{\hat{\mathbf{x}}_s}{2w_4} + \hat{\mathbf{r}}_1, \hat{v} = \sqrt{\frac{\hat{\mathbf{x}}_s}{\hat{x}_4}} \left(\text{or } \hat{v} = \frac{1}{|\hat{\mathbf{x}}_s|} \right) \quad (2.2.12)$$

當聲場接近遠聲場模型的時候($\rho_i \ll 1$)，由(2.2.5)式可以得到新的方程式為：

$$\mathbf{A}_s \mathbf{x}_s = \mathbf{b}$$

其中

$$\mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} -(r_2 - r_1) \\ \vdots \\ -(r_M - r_1) \end{bmatrix} \quad (2.2.13)$$

由於使用遠聲場模型的關係，無法求得聲源的座標，只能得到聲源的方向：

$$\hat{\mathbf{r}}_s = \frac{\mathbf{x}_s}{|\mathbf{x}_s|} = \frac{(\mathbf{A}_s^T \mathbf{A}_s)^{-1} \mathbf{A}_s^T \mathbf{b}}{\left|(\mathbf{A}_s^T \mathbf{A}_s)^{-1} \mathbf{A}_s^T \mathbf{b}\right|} \quad (2.2.14)$$

而聲速的估算為：

$$\hat{v} = \frac{1}{|\mathbf{x}_s|} = \frac{1}{\left|(\mathbf{A}_s^T \mathbf{A}_s)^{-1} \mathbf{A}_s^T \mathbf{b}\right|} \quad (2.2.15)$$

矩陣 A 和 A_s 必須是 full rank，[18]有探討 full rank 的條件，此條件會跟麥克風陣列的形狀有關係，所以在使用此方法必須避免這樣的情況發生。



2.2.2 有限制的最小平方演算法

K. Yao 等人在[7]提出一套有限制的最小平方法解

$$-\frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_1)}{v |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_1|} + \frac{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_1|^2}{2v |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_1|} - \frac{v(t_i - t_1)^2}{2 |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_1|} = (t_i - t_1)$$

經由移項可修改為

$$(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_1) + (t_i - t_1)v |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_1| + (t_i - t_1)^2 \frac{v^2}{2} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_1|^2 \quad (2.2.16)$$

因此 M 個麥克風的線性方程式可以寫成: $\mathbf{By} = \mathbf{c}$

其中

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} (r_2 - r_1) & (t_2 - t_1) & (t_2 - t_1)^2 / 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (r_M - r_1) & (t_M - t_1) & (t_M - t_1)^2 / 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} |r_2 - r_1|^2 \\ \vdots \\ |r_M - r_1|^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_s \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad (2.2.17)$$

其中

$$\mathbf{y}_s = [y_1 \quad y_2 \quad y_3]^T = \mathbf{r}_s - \mathbf{r}_1, \quad y_4 = v |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_1|, \quad y_5 = v^2$$

利用[7]所提出的方法，在[7](16)式， $\mathbf{B}'\mathbf{y}' = \mathbf{c} + v^2 \mathbf{d}$

$$\mathbf{B}' = \begin{bmatrix} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) & (t_2 - t_1) \\ \vdots & \vdots \\ (\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_1) & (t_M - t_1) \end{bmatrix} \quad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_s \\ x_4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} |r_2 - r_1|^2 \\ \vdots \\ |r_M - r_1|^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{d} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} (t_2 - t_1)^2 \\ \vdots \\ (t_M - t_1)^2 \end{bmatrix} \quad (2.2.18)$$

對於要求未知的向量，利用有限制的最小平方法解

$$\mathbf{y}' = \mathbf{B}'^\dagger \mathbf{c} + v^2 \mathbf{B}'^\dagger \mathbf{d} \quad \mathbf{B}'^\dagger = (\mathbf{B}'^T \mathbf{B}')^{-1} \mathbf{B}'^T \quad (2.2.19)$$

利用(2.2.19)，定義 $\mathbf{p} = \mathbf{B}'^\dagger \mathbf{c}$ $\mathbf{q} = \mathbf{B}'^\dagger \mathbf{d}$ 可以把式子表示成：

$$\begin{aligned} y_1 &= p_1 + v^2 q_1 \\ y_2 &= p_2 + v^2 q_2 \\ y_3 &= p_3 + v^2 q_3 \\ v \|\mathbf{r}_s\| &= p_4 + v^2 q_4 \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

在假設 $\|\mathbf{r}_1\| = 0$ 的情況下，這些參數之間有個關係式

$$\|\mathbf{r}_s\|^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \quad (2.2.21)$$

(2.2.20)帶入(2.2.21)式

$$\alpha(v^2)^3 + \beta(v^2)^2 + \gamma(v^2) + \delta = 0 \quad (2.2.22)$$

其中

$$\alpha = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$$

$$\beta = 2(p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3) - q_4^2$$

$$\gamma = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - 2p_4q_4$$

$$\delta = -p_4^2$$

對於聲速 v 來說，這個方程式最多存在3個解，利用聲速的數值是有範圍的，可以選取一個最適合的聲速 \hat{v} ，所以對於聲源估測可以寫成

$$\mathbf{y} = \mathbf{p} + \hat{v}^2 \mathbf{q}$$

但此方法必須確定所估測的TDOA都是正確的，否則在錯誤的TDOA情況下，他也可能算到合理的聲速，導致估測錯誤。但在TDOA估測無誤的情況下，相較一般的LS可以改善誤差的大小。



第三章 麥克風位置擺放最佳化

3.1 奇異數(singular value)

3.1.1 奇異數介紹

定義一個矩陣 \mathbf{A} ， $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$ ，矩陣 \mathbf{A} 的奇異數 $\sigma_i, i=1 \sim n$ ，滿足

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i \text{ for all } i$$

$$\Rightarrow \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \cdots & \mathbf{u}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \sigma_n \end{bmatrix} \quad (3.1.1a)$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{U}\Sigma, \quad \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (3.1.1b)$$

where $\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}_{n \times n}$, $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}_{m \times m}$

\mathbf{V} 和 \mathbf{U} 都必須是正交矩陣(orthogonal matrix)。

3.1.2 奇異數與麥克風位置的關聯

M 個麥克風的線性方程式可以寫成: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) & |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2 & -(t_2 - t_1)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -(\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_1) & |\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_1|^2 & -(t_M - t_1)^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} t_2 - t_1 \\ \vdots \\ t_M - t_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad (3.1.2)$$

首先探討觀測(observation) \mathbf{b} 的誤差對於估測(estimator) \mathbf{x} 的影響

假設觀測到的 $\hat{\mathbf{b}}$ 有一個誤差 $\Delta \mathbf{b}$

$$\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b} + \Delta \mathbf{b} = \mathbf{Ax} + \Delta \mathbf{b} \quad (3.1.3)$$

假設誤差是呈現高斯分佈且兩兩間沒關連

$$\Delta \mathbf{b} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}) \Rightarrow \hat{\mathbf{b}} = N(\mathbf{Ax}, \sigma^2 \mathbf{I}) \quad (3.1.4)$$

利用Cramer-Rao Lower Bound(CRLB)，可以求得我們的最小方差無偏估計(minimum variance unbiased estimator)和誤差下界(error lower bound)

$\hat{\mathbf{b}} = N(\mathbf{Ax}, \sigma^2 \mathbf{I})$ 為高斯分佈，因此可以得到其機率密度函數(pdf)

$$\Rightarrow p(\hat{\mathbf{b}}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{M/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{Ax})^T(\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{Ax})} \quad (3.1.5)$$

利用去計算CRLB，(3.1.5)對估測值 \mathbf{x} 做偏微分

$$\frac{\partial \ln p(\hat{\mathbf{b}}; \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[-(2\pi\sigma^2)^{M/2} - \frac{1}{2\sigma^2}(\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{Ax})^T(\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{Ax}) \right] \quad (3.1.6a)$$

$$= \frac{1}{2\sigma^2} 2\mathbf{A}^T(\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{Ax}) = \frac{1}{\sigma^2}(\mathbf{A}^T\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{A}^T\mathbf{Ax}) \quad (3.1.6b)$$

$$= \frac{\mathbf{A}^T\mathbf{A}}{\sigma^2} \left[(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{x} \right] \quad (3.1.6c)$$

根據CRLB定義，若可以表示(3.1.7)的形式，最小方差無偏估計則可以達到CRLB

$$\frac{\partial \ln p(\hat{\mathbf{b}}; \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{I}(\mathbf{x})(g(\mathbf{x}) - \mathbf{x}) \quad (3.1.7)$$

其中 $\mathbf{I}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{A}^T\mathbf{A}}{\sigma^2}$, $g(\mathbf{x}) = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\hat{\mathbf{b}}$



由(3.1.7)式，可得到最小方差無偏估計為

$$\hat{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x}) = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\hat{\mathbf{b}} \quad (3.1.8)$$

各估測值的變異量為

$$\text{var}(\hat{x}_i) \geq (\mathbf{I}(\mathbf{x})^{-1})_{ii} = (\sigma^2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1})_{ii} \quad (3.1.9)$$

所以估測的未知變數的分佈為

$$\hat{\mathbf{x}} \sim N(\mathbf{x}, \sigma^2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}) \quad (3.1.10)$$

由(3.1.10)可結論出誤差會正比於 $\sigma^2(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}$

σ 跟觀測值 $\hat{\mathbf{b}}$ 的誤差有關，假設此刻的影響固定，想要讓估測值的變異量和最小

$$\min \sum_i \text{var}(\hat{x}_i) = \min \text{tr}(\mathbf{I}(\mathbf{x})^{-1}) = \min \text{tr}((\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}) \quad (3.1.11a)$$

因為 $\text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = \sum_i \lambda_i$, $\text{tr}((\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}) = \sum_i \frac{1}{\lambda_i}$

$$\min \text{tr}((\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}) = \min \sum_i \frac{1}{\lambda_i}, \quad \lambda_i \text{ 是 } \mathbf{A}^T \mathbf{A} \text{ 的 eigenvalue} \quad (3.1.11b)$$

根據柯西不等式(Cauchy-Schwarz inequality)

$$D = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} \\ \vdots \\ \sqrt{\lambda_D} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1/\sqrt{\lambda_1} \\ \vdots \\ 1/\sqrt{\lambda_D} \end{bmatrix} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^D (\sqrt{\lambda_i})^2 \sum_{i=1}^D (1/\sqrt{\lambda_i})^2} = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \text{tr}((\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1})} \quad (3.1.12a)$$

$$\Rightarrow \text{tr}((\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}) \geq \frac{D^2}{\text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}, \quad D \text{ 為陣列的維度} \quad (3.1.12b)$$

當給定一些限制下， $\text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$ 可以固定為一個值，也就是說 $\text{tr}((\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1})$ 有一個固定的下界，接下來的目的則是在此限制條件下找到最小的情況，也就是等號成立。底下章節會根據近聲場或遠聲場，分別決定所要的限制條件。很明顯的，等式在 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 的 eigenvalue 都相同的情況下成立

$$\Rightarrow \mathbf{A}^T \mathbf{A} = \lambda \mathbf{I} \Rightarrow \text{cond}(\mathbf{A}) = 1. \quad (3.1.13)$$

所以可以看出來我們估測值的變異數會跟 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 的 eigenvalues 有關，也就是 \mathbf{A} 的奇異數。

3.2 麥克風最佳化排放位置

3.2.1 遠聲場的最佳擺放位置

首先先看A矩陣

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) & |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2 & -(t_2 - t_1)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -(\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_1) & |\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_1|^2 & -(t_M - t_1)^2 \end{bmatrix} \quad (3.2.1)$$

假設為遠聲場的環境下，在此條件下可以簡化(3.2.1)成

$$\mathbf{A}_s \mathbf{x}_s = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} -(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ -(\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_1) \end{bmatrix}, \mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_s \\ v \|\mathbf{r}_s\| \end{bmatrix} \quad (3.2.2)$$

根據最小平方(Least square)方法

$$\hat{\mathbf{x}}_s = (\mathbf{A}_s^T \mathbf{A}_s)^{-1} \mathbf{A}_s^T \mathbf{b} \quad (3.2.3)$$

可另 $\mathbf{r}_1 = \bar{\mathbf{0}}$ 讓我們矩陣更簡單 $\mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} -\mathbf{r}_2 \\ \vdots \\ -\mathbf{r}_M \end{bmatrix}$

\mathbf{A}_s 只跟麥克風的位置有關，也就是麥克風擺放的位置會影響 \mathbf{A}_s 的奇異數
根據(3.1.13)，如果要讓估測的變異量最少，所有的singular value要相同。

先從簡單的2維開始分析

Let $-(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_1) = [-a_{i-1} \quad -b_{i-1}]$ for $i = 2 \sim M$

$$\mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} -a_1 & -b_1 \\ \vdots & \vdots \\ -a_{M-1} & -b_{M-1} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}_s^T \mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} a_1^2 + \dots + a_{M-1}^2 & a_1 b_1 + \dots + a_{M-1} b_{M-1} \\ a_1 b_1 + \dots + a_{M-1} b_{M-1} & b_1^2 + \dots + b_{M-1}^2 \end{bmatrix} \quad (3.2.4)$$

目前要找出 $\lambda(\mathbf{A}_s^T \mathbf{A}_s) \Rightarrow \det(\mathbf{A}_s^T \mathbf{A}_s - \lambda \mathbf{I}) = 0$

$$\det(\mathbf{A}_s^T \mathbf{A}_s - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (3.2.5a)$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - \left(\sum_{i=1}^{M-1} a_i^2 + b_i^2 \right) \lambda + \left(\sum_{i=1}^{M-1} a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{M-1} b_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^{M-1} a_i b_i \right)^2 \quad (3.2.5b)$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\left(\sum_{i=1}^{M-1} a_i^2 + b_i^2 \right) \pm \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{M-1} a_i^2 + b_i^2 \right) - 4 \left(\sum_{i=1}^{M-1} a_i^2 \sum_{i=1}^{M-1} b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{M-1} a_i b_i \right)^2 \right)}}{2} \equiv \frac{\alpha \pm \sqrt{\beta}}{2} \quad (3.2.5c)$$

因為 $\mathbf{A}_s^T \mathbf{A}_s$ 是 symmetric 和 semi-positive definite 矩陣，所以 $\lambda_i \geq 0, \beta \geq 0$

$$\text{cond}(\mathbf{A}_s) = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}, \lambda_1 = \frac{\alpha + \sqrt{\beta}}{2}, \lambda_2 = \frac{\alpha - \sqrt{\beta}}{2} \quad (3.2.6)$$

目標是 λ_1 越靠近 λ_2 越好，同等於 β 要越小越好

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{optimum} = \arg \min_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \left(\left(\sum_{i=1}^{M-1} a_i^2 + b_i^2 \right) - 4 \left(\left(\sum_{i=1}^{M-1} a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{M-1} b_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^{M-1} a_i b_i \right)^2 \right) \right) \quad (3.2.7)$$

如果我們假設 $\sum_{i=1}^{M-1} a_i^2 + b_i^2 = K$ ，也就是第 2~M 顆麥克風到第一顆的距離平方

$\|-(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_1)\|^2$ 總合為一個定值，又可以進一步簡化(3.2.7)：

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{optimum} = \arg \min_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \left(-4 \left(\left(\sum_{i=1}^{M-1} a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{M-1} b_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^{M-1} a_i b_i \right)^2 \right) \right) \quad (3.2.8a)$$

$$= \arg \max_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \left(\left(\sum_{i=1}^{M-1} a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{M-1} b_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^{M-1} a_i b_i \right)^2 \right) \quad (3.2.8b)$$

$$= \arg \max_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \left(\left(\sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1, j \neq i}^{M-1} a_i^2 b_j^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1, j \neq i}^{M-1} a_i b_i a_j b_j \right) \right) \quad (3.2.8c)$$

$$= \arg \max_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \left(\left(\sum_{i=1}^{M-2} \sum_{j=i+1}^{M-1} (a_i^2 b_j^2 + a_j^2 b_i^2) \right) - 2 \left(\sum_{i=1}^{M-2} \sum_{j=i+1}^{M-1} a_i b_i a_j b_j \right) \right) \quad (3.2.8d)$$

$$= \arg \max_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \left(\left(\sum_{i=1}^{M-2} \sum_{j=i+1}^{M-1} (a_i^2 b_j^2 - 2a_i b_i a_j b_j + a_j^2 b_i^2) \right) \right) \quad (3.2.8e)$$

$$= \arg \max_{\mathbf{a}, \mathbf{b}} \left(\sum_{i=1}^{M-2} \sum_{j=i+1}^{M-1} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \right) \quad (3.2.8f)$$

$a_i b_j - a_j b_i$ 又可以看成 (a_i, b_i) 跟 $(b_j, -a_j)$ 的內積，進一步化簡(3.2.8f)

$$\sum_{i=1}^{M-2} \sum_{j=i+1}^{M-1} (a_i b_j - a_j b_i)^2 = \sum_{i=1}^{M-2} \sum_{j=i+1}^{M-1} ((a_i, b_i) \cdot (b_j, -a_j))^2 \quad (3.2.9a)$$

$$= \sum_{i=1}^{M-2} \sum_{j=i+1}^{M-1} ((a_i, b_i) \cdot (b_j, -a_j)) \cos(\theta_{i,j} - 90^\circ)^2 \quad (3.2.9b)$$

若假設 (a_i, b_i) 對所有 i 的長度固定 = K' :

$$= K'^2 \sum_{i=1}^{M-2} \sum_{j=i+1}^{M-1} \cos^2(\theta_{i,j} - 90^\circ) = K'^2 \sum_{i=1}^{M-2} \sum_{j=i+1}^{M-1} \sin^2(\theta_{i,j}) \quad (3.2.10a)$$

$$= K'^2 \sum_{i=1}^{M-2} \sum_{j=i+1}^{M-1} \sin^2 \left(\sum_{k=i}^{j-1} \theta_k \right), \sum_{i=1}^{M-1} \theta_k = 360^\circ \quad (3.2.10b)$$

M 是奇數跟偶數有點差別所以把(3.2.10b)分開表示

$$\sum_{i=1}^{M-2} \sum_{j=i+1}^{M-1} \sin^2 \left(\sum_{k=i}^{j-1} \theta_k \right)$$



$$= \begin{cases} \sum_{i=1}^{(M-3)/2} \sum_{j=1}^{M-1} \sin^2 \left(\sum_{k=j}^{j+(i-1)} \theta_{(k\%(n-1))} \right) + \sum_{i=1}^{(M-1)/2} \sin^2 \left(\sum_{k=i}^{i+(M-1)/2-1} \theta_k \right), & M \text{ is odd} \\ \sum_{i=1}^{(M-2)/2} \sum_{j=1}^{M-1} \sin^2 \left(\sum_{k=j}^{j+(i-1)} \theta_{(k\%(n-1))} \right), & M \text{ is even} \end{cases} \quad (3.2.11)$$

然而可以證明當所有角度都相同的時候是其中的一個解

$$\hat{S}_M = \sum_{i=1}^{M-2} \sum_{j=i+1}^{M-1} \sin^2 \left(\sum_{k=i}^j \theta_M \right), \theta_M = \frac{360^\circ}{M-1}, \text{is one of the solution.} \quad (3.2.12)$$

當 M 顆麥克風的時候我們的 eigenvalue 為底下所表示

$$\lambda_M = \frac{K(n-1) \pm K \sqrt{(M-1)^2 - 4S_M}}{2}, (n-1)^2 - 4S_M \geq 0 \quad (3.2.13)$$

代入(3.2.12)的答案

$$(M-1)^2 - 4\hat{S}_M = \begin{cases} (M-1)^2 - 2(M-1)\frac{(M-3)}{2} + 2(M-1) \sum_{i=1}^{(M-3)/2} \cos \frac{4 \times i}{M-1} \\ (M-1)^2 - 2(M-1)\frac{(M-2)}{2} + 2(M-1) \sum_{i=1}^{(M-2)/2} \cos \frac{2 \times i}{M-1} \end{cases} \quad (3.2.14a)$$

$$= \begin{cases} (M-1)^2 - 2(M-1)\frac{(M-3)}{2} - 2(M-1) = (M-1)(M-1-M+3-2) = 0 \\ (M-1)^2 - 2(M-1)\frac{(M-2)}{2} - (M-1) = (M-1)(M-1-M+2-1) = 0 \end{cases} \quad (3.2.14b)$$

由(3.2.14b)式可看出滿足 β 最小的情況，也就是兩個eigenvalue相同。

可以看出如果是使用硬算eigenvalue的情況下，算式會很複雜，一旦擴展到3維的空間，會變的更複雜，所以這邊考慮另一種分析方式：

L. Yu. Kolotilina的[19][20]中提到，如果有一個 $n \times n$ Hermitian positive

definite matrix \mathbf{A} ，把他表示成 2×2 block form $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{12}^* & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_{12} \neq \mathbf{0}$ ，而且假設

\mathbf{A}_{11} 和 \mathbf{A}_{22} 是正定矩陣，那可以證明 \mathbf{A} 的極端 eigenvalue 滿足底下的不等式：

$$\lambda_1(\mathbf{A}) \geq \frac{\|\mathbf{A}_{12}\|}{\|\mathbf{R}\|} (1 + \|\mathbf{R}\|), \quad \lambda_n(\mathbf{A}) \leq \frac{\|\mathbf{A}_{12}\|}{\|\mathbf{R}\|} (1 - \|\mathbf{R}\|) \quad (3.2.15)$$

其中 $\mathbf{R} = \mathbf{A}_{11}^{-1/2} \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1/2}$ (3.2.16)

從(3.2.15)可知道，若 $\mathbf{A}_{12} \neq \mathbf{0}$ ，則 $\mathbf{R} = \mathbf{A}_{11}^{-1/2} \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1/2} \neq \mathbf{0}$

所以可以看出來 $\lambda_1(\mathbf{A})$ 一定不會等於 $\lambda_n(\mathbf{A})$

反過來說，如果想要 $\lambda_1(\mathbf{A})$ 的下界 = $\lambda_n(\mathbf{A})$ 的上界， \mathbf{A}_{12} 一定要為 $\mathbf{0}$ 。

由式子可以知道要達到 $\text{cond}(\mathbf{A}) = 1$ 有兩個條件

以目前2維的例子， 2×2 矩陣的情況來說

$$\mathbf{A}_s^T \mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} a_1^2 + \dots + a_{M-1}^2 & a_1 b_1 + \dots + a_{M-1} b_{M-1} \\ a_1 b_1 + \dots + a_{M-1} b_{M-1} & b_1^2 + \dots + b_{M-1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{12}^* & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \quad (3.2.17)$$

滿足 $\lambda_1(\mathbf{A})$'s lower bound = $\lambda_n(\mathbf{A})$'s upper bound $\Rightarrow a_1 b_1 + \dots + a_{M-1} b_{M-1} = 0$ (3.2.18)

除此之外，因為 $a_1 b_1 + \dots + a_{M-1} b_{M-1} = 0$

$$\mathbf{A}_s^T \mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} a_1^2 + \dots + a_{M-1}^2 & 0 \\ 0 & b_1^2 + \dots + b_{M-1}^2 \end{bmatrix}$$

很容易看出來， $\lambda_1(\mathbf{A}) = a_1^2 + \dots + a_{M-1}^2$, $\lambda_n(\mathbf{A}) = b_1^2 + \dots + b_{M-1}^2$

要滿足 $\lambda_1(\mathbf{A}) = \lambda_n(\mathbf{A})$

$$a_1^2 + \dots + a_{M-1}^2 = b_1^2 + \dots + b_{M-1}^2 \quad (3.2.19)$$

所以可以結論

$$\lambda_1 = \lambda_n \Rightarrow \begin{cases} a_1 b_1 + \dots + a_{M-1} b_{M-1} = 0 \\ a_1^2 + \dots + a_{M-1}^2 = b_1^2 + \dots + b_{M-1}^2 \end{cases} \quad (3.2.20)$$

令 $a_i = R_i \cos(\theta_i)$, $b_i = R_i \sin(\theta_i)$

$$\begin{cases} R_1^2 a_1 b_1 + \dots + R_{M-1}^2 a_{M-1} b_{M-1} = 0 \\ R_1^2 a_1^2 + \dots + R_{M-1}^2 a_{M-1}^2 = R_1^2 b_1^2 + \dots + R_{M-1}^2 b_{M-1}^2 \end{cases} \quad (3.2.21a)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_1^2 \cos \theta_1 \sin \theta_1 + \dots + R_{M-1}^2 \cos \theta_{M-1} \sin \theta_{M-1} = 0 \\ R_1^2 \cos^2 \theta_1 - \sin^2 \theta_1 + \dots + R_{M-1}^2 \cos^2 \theta_{M-1} - \sin^2 \theta_{M-1} = 0 \end{cases} \quad (3.2.21b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R_1^2 \sin 2\theta_1 + \dots + R_{M-1}^2 \sin 2\theta_{M-1} = 0 \\ R_1^2 \cos 2\theta_1 + \dots + R_{M-1}^2 \cos 2\theta_{M-1} = 0 \end{cases} \quad (3.2.21c)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{M-1} R_i^2 e^{j2\theta_i} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{M-1} (R_i e^{j\theta_i})^2 = 0 \quad (3.2.21d)$$

也就是說要設計一個麥克風陣列，在決定以一顆麥克風為準，其餘麥克風與它的向量 $R_i e^{j\theta_i}$ 平方後相加要等於0。

可以把(3.2.21d)稍為移項

$$\sum_{i=1}^{M-1} (R_i e^{j\theta_i})^2 = 0$$

$$\Rightarrow (R_{M-1} e^{j\theta_{M-1}})^2 = - \sum_{i=1}^{M-2} (R_i e^{j\theta_i})^2$$

如果對 R_i 沒有任何限制，也就是說第 1 到 $M-1$ 顆麥克風任意擺放後，可以利用第 M 顆來使這個陣列達到最好的位置，位置會由前面 $M-1$ 顆決定。

有 M 顆麥克風，理論上有 $\frac{M(M-1)}{2}$ 個時間延遲資訊，但上面的理論只用到 $M-1$ 個，其中原因也可以用上面來解釋，一旦用了其他的資訊，算出來的變異量有可能很糟，也就是說多用了其他資訊不一定會幫助估測，還有可能讓估測變差。

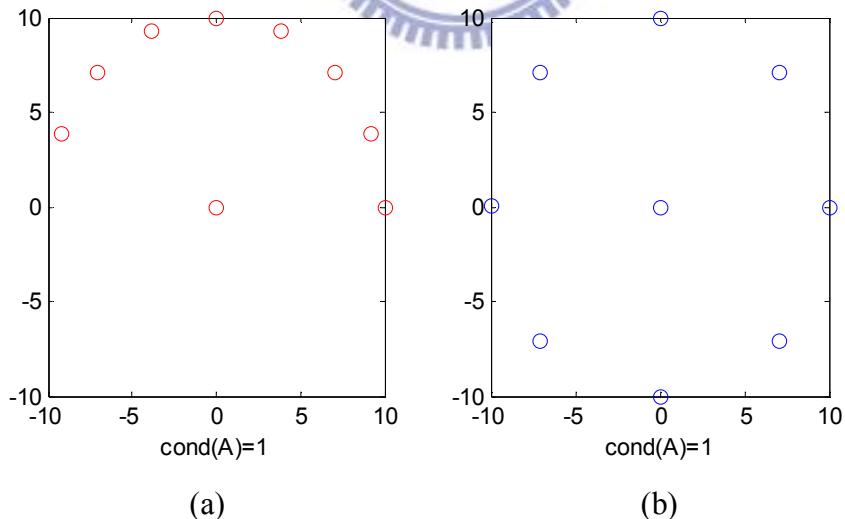
假設 R_i 都相同，則可以簡化(3.2.21d)的式子

要滿足 $\sum_{i=1}^{M-1} e^{j2\theta_i} = 0 \Rightarrow$ 極座標單位圓上的點總合為 0

明顯的 $\theta_i = (i-1) \frac{2\pi}{2(M-1)}$ 和 $\theta_i = (i-1) \frac{2\pi}{M-1}$ 為其中的一個解

但理論上還有其他很多組的解，以上只是提到比較明顯的解。

以 $M=9$ ，也就是 9 顆的例子為例，圖一兩個情況都會滿足：



圖一、遠聲場情況下二維麥克風最佳排列範例

近一步可以拓展，假設我們有 K 個 subarrays，這 K 個 subarrays 都使用相同一顆當基準點，而每個都滿足 $\lambda_1 = \lambda_n$ ，則這 K 個 subarrays 組成的 array 必定也滿足 $\lambda_1 = \lambda_n$ ，所以組合的總類其實是無限多種的。

接著拓展到3維分析

Let $-(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_l) = [a_{i-1} \quad b_{i-1} \quad c_{i-1}]$ for $i = 2 \sim M$

$$\mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{M-1} & b_{M-1} & c_{M-1} \end{bmatrix} \quad (3.2.22)$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}_s^T \mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} a_1^2 + \dots + a_{M-1}^2 & a_1 b_1 + \dots + a_{M-1} b_{M-1} & a_1 c_1 + \dots + a_{M-1} c_{M-1} \\ a_1 b_1 + \dots + a_{M-1} b_{M-1} & b_1^2 + \dots + b_{M-1}^2 & b_1 c_1 + \dots + b_{M-1} c_{M-1} \\ a_1 c_1 + \dots + a_{M-1} c_{M-1} & b_1 c_1 + \dots + b_{M-1} c_{M-1} & c_1^2 + \dots + c_{M-1}^2 \end{bmatrix} \quad (3.2.23)$$

以 L. Yu. Kolotilina 的理論來說，(3.2.25)式要滿足 condition number=1，需要以下的式子成立：

$$\text{cond}(\mathbf{A}) = 1 \Rightarrow \begin{cases} a_1 b_1 + \dots + a_{M-1} b_{M-1} = 0 \\ a_1 c_1 + \dots + a_{M-1} c_{M-1} = 0 \\ b_1 c_1 + \dots + b_{M-1} c_{M-1} = 0 \\ a_1^2 + \dots + a_{M-1}^2 = b_1^2 + \dots + b_{M-1}^2 = c_1^2 + \dots + c_{M-1}^2 \end{cases} \quad (3.2.24)$$

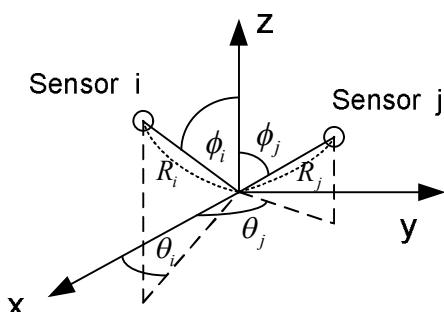
(3.2.26)式可以分成3區

$$a_1 b_1 + \dots + a_{M-1} b_{M-1} = 0, \quad a_1^2 + \dots + a_{M-1}^2 = b_1^2 + \dots + b_{M-1}^2 \quad (3.2.25a)$$

$$a_1 c_1 + \dots + a_{M-1} c_{M-1} = 0, \quad a_1^2 + \dots + a_{M-1}^2 = c_1^2 + \dots + c_{M-1}^2 \quad (3.2.25b)$$

$$b_1 c_1 + \dots + b_{M-1} c_{M-1} = 0, \quad b_1^2 + \dots + b_{M-1}^2 = c_1^2 + \dots + c_{M-1}^2 \quad (3.2.25c)$$

也就是說在 $x-y, x-z, y-z$ 平面都要滿足2維條件



圖二、Sensor 示意圖

假設 $a_i = R_i \sin(\phi_i) \cos(\theta_i)$, $b_i = R_i \sin(\phi_i) \sin(\theta_i)$ and $c_i = R_i \cos(\phi_i)$, 如圖二示意
帶入(3.2.25a), (3.2.25b), (3.2.25c)

$$\sum_{i=1}^{M-1} R_i^2 \sin^2 \phi_i \cos \theta_i \sin \theta_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{M-1} R_i^2 \sin^2 \phi_i (\cos^2 \theta_i - \sin^2 \theta_i) = 0 \quad (3.2.26a)$$

$$\sum_{i=1}^{M-1} R_i^2 \cos \phi_i \sin \phi_i \cos \theta_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{M-1} R_i^2 \cos \phi_i \sin \phi_i \sin \theta_i = 0 \quad (3.2.26b)$$

$$\sum_{i=1}^{M-1} R_i^2 (\sin^2 \phi_i \cos^2 \theta_i - \cos^2 \phi_i) = 0, \quad \sum_{i=1}^{M-1} R_i^2 (\sin^2 \phi_i \sin^2 \theta_i - \cos^2 \phi_i) = 0 \quad (3.2.26c)$$

可稍微合併和整理(3.2.26a),(3.2.26b),(3.2.26c)

$$\sum_{i=1}^{M-1} R_i^2 \sin^2 \phi_i e^{2j\theta_i} = 0 \quad (3.2.27a)$$

$$\sum_{i=1}^{M-1} R_i^2 \cos 2\phi_i e^{j\theta_i} = 0 \quad (3.2.27b)$$

$$\sum_{i=1}^{M-1} R_i^2 (1 - 3 \cos^2 \phi_i) = 0 \quad (3.2.27c)$$



簡化式子則假設 R_i 都相同，(3.2.27a)可改寫

$$\sum_{i=1}^{M-1} \sin^2 \phi_i e^{2j\theta_i} = 0 \quad (3.2.27a-1)$$

(3.2.27b)可改寫成

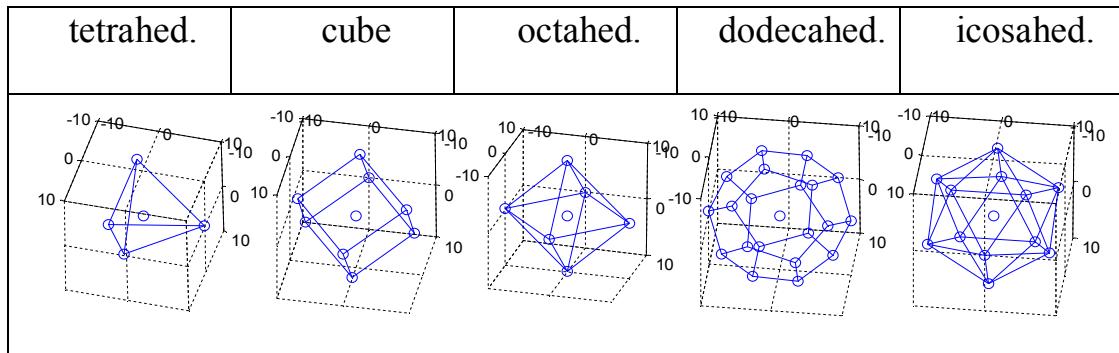
$$\sum_{i=1}^{M-1} \cos 2\phi_i e^{j\theta_i} = 0 \quad (3.2.27b-1)$$

(3.2.27c)可經過移項寫成

$$\sum_{i=1}^{M-1} (\cos^2 \phi_i) = \frac{M-1}{3} \quad (3.2.27c-1)$$

也就是高度平方總合是個定值 $\frac{M-1}{3}$ ，與麥克風數量有關。

所以當然當2顆到第M顆是以正多面體的分佈時，是其中的一個特殊解，如圖三所示。



圖三、遠聲場情況下三維麥克風最佳排列範例

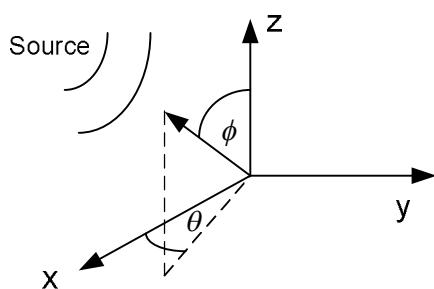
同理在相同原點情況下，任意K個正立方體組合也滿足。



以上的分析，是針對最小平方法的估測變數讓 x_s 的變異量最小，但實際上 x_s 不一定才是真正關心的值

$$\mathbf{x}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_s \\ v \|\mathbf{r}_s\| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \sin \phi \\ v \\ \sin \theta \sin \phi \\ v \\ \cos \phi \\ v \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (3.2.28)$$

遠聲場真正關心的是角度(azimuth θ 和 elevation ϕ)，如圖四中所表示



圖四、三維聲源示意圖

其中 $\theta = \tan(\frac{x_2}{x_1}) = g_1(\mathbf{x})$, $\phi = \tan(\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_3}) = g_2(\mathbf{x})$

也就是真正的估測(estimator)是 $\gamma = (\theta, \phi)$

所以CRLB分析的Fish imformation要改寫成

$$\mathbf{I}(\gamma)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(\mathbf{x})^T}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial g_2(\mathbf{x})^T}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} \mathbf{I}(\mathbf{x})^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial g_2(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \end{bmatrix} = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{I}(\mathbf{x})^{-1} \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.2.29)$$

其中 $\mathbf{I}(\mathbf{x})^{-1} = \sigma^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$

$$\text{var}(\hat{\gamma}) \geq \left(\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{I}(\mathbf{x})^{-1} \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right) = \sigma^2 \left(\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})^T}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right) \quad (3.2.30)$$

接著要找到一個好的估測方程式

$$\text{由 } p(\hat{\mathbf{b}}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{M/2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{Ax})^T(\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{Ax})} \quad (3.2.31)$$

因為現在的估測是角度，所以(3.2.31)式要對角度做偏微分

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \ln p(\hat{\mathbf{b}}; \gamma)}{\partial \gamma} \\ &= \frac{\partial}{\partial \gamma} \left[-(2\pi\sigma^2)^{M/2} - \frac{1}{2\sigma^2} (\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{Ax}(\gamma))^T (\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{Ax}(\gamma)) \right] \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

$$= \frac{1}{2\sigma^2} 2 \frac{\mathbf{x}^T(\gamma)}{\partial \gamma} \mathbf{A}^T (\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{Ax}(\gamma)) \quad (3.2.33)$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & 0 \\ \frac{v}{v} & \frac{v}{v} & \frac{0}{v} \\ -\cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \sin \phi & \frac{\cos \phi}{v} \end{bmatrix} (\mathbf{A}^T \hat{\mathbf{b}} - \mathbf{A}^T \mathbf{Ax}(\gamma)) \quad (3.2.34)$$

可以看出沒辦法找到一個CRLB形式

$$\frac{\partial \ln p(\hat{\mathbf{b}}; \gamma)}{\partial \gamma} = \mathbf{I}(\gamma)(g(\gamma) - \gamma)$$

所以說沒有一個對角度有效的估測封閉解。

但藉由ML(maximum-likelihood)

$$\hat{\theta}_{ML} = \arg \max_{\gamma} p(\tau; \gamma) \quad (3.2.35)$$

隨著M變大，估測會慢慢趨近CRBL。

ML(maximum-likelihood):

$$\text{找到 } \gamma, \text{ 使 } \frac{\partial p(\tau; \gamma)}{\partial \gamma} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \ln p(\tau; \gamma)}{\partial \gamma} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln p(\hat{\mathbf{b}}; \gamma)}{\partial \gamma} &= 0 \\ &= \begin{bmatrix} -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & 0 \\ \frac{v}{v} & \frac{v}{v} & \frac{v}{v} \\ -\cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} (\mathbf{A}^T \hat{\mathbf{b}} - \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x}(\gamma)) \end{aligned} \quad (3.2.36)$$

可以看出當 $(\mathbf{A}^T \hat{\mathbf{b}} - \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x}(\gamma)) = 0$ 可滿足(3.2.36)式

$$\Rightarrow \mathbf{x}_{ML}(\hat{\gamma}) = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \hat{\mathbf{b}} \quad (3.2.37)$$

求得 $\mathbf{x}_{ML}(\hat{\gamma})$ 則可以反推 $\hat{\gamma}$

$$\Rightarrow \hat{\gamma} = g(\mathbf{x}_{ML}(\hat{\gamma})) \quad (3.2.38)$$

也就是說一樣可以用 $\mathbf{x}_{ML}(\hat{\gamma}) = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \hat{\mathbf{b}}$ 來當作計算估測的式子



接著來分析Cramer-Rao Lower Bound，也就是誤差下界

$$\text{Let } (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

$$\text{誤差下界} = \mathbf{I}(\theta)^{-1} = \sigma^2 \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})^T}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$$

$$= \sigma^2 v^2 \begin{bmatrix} \frac{-\sin \theta}{\sin \phi} & \frac{\cos \theta}{\sin \phi} & 0 \\ \cos \theta \cos \phi & \sin \theta \cos \phi & -\sin \phi \end{bmatrix} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \begin{bmatrix} \frac{-\sin \theta}{\sin \phi} & \cos \theta \cos \phi \\ \frac{\cos \theta}{\sin \phi} & \sin \theta \cos \phi \\ 0 & -\sin \phi \end{bmatrix} \quad (3.2.39)$$

於是歸納出方位角跟仰角的變異量

$$\text{var}(\hat{\theta}) = \frac{\sigma^2 v^2}{\sin^2 \phi} [-\sin \theta \ \cos \theta \ 0] (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} [-\sin \theta \ \cos \theta \ 0]^T \quad (3.2.40a)$$

$$\text{var}(\hat{\theta}) = \frac{\sigma^2 v^2}{\sin^2 \phi} (\alpha_{11} \sin^2 \theta - 2\alpha_{12} \sin \theta \cos \theta + \alpha_{22} \cos^2 \theta) \quad (3.2.40b)$$

$$\text{var}(\hat{\phi}) = \sigma^2 v^2 [\cos \theta \cos \phi \ \sin \theta \cos \phi \ -\sin \phi] (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \cos \phi \\ -\sin \phi \end{bmatrix} \quad (3.2.41a)$$

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{\phi}) = \sigma^2 v^2 & (\alpha_{11} \cos^2 \theta \cos^2 \phi + 2\alpha_{12} \cos \theta \sin \theta \cos^2 \phi + \alpha_{22} \sin^2 \theta \cos^2 \phi \\ & - 2\alpha_{13} \cos \theta \cos \phi \sin \phi - 2\alpha_{23} \sin \theta \cos \phi \sin \phi + \alpha_{33} \sin^2 \phi) \end{aligned} \quad (3.2.41b)$$

如果 $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = c\mathbf{I}$

$$\text{var}(\hat{\theta}) = \frac{\sigma^2 v^2}{\sin^2 \phi} \alpha_{11} = \frac{\sigma^2 v^2}{\sin^2 \phi} \left(\sum_{i=1}^{M-1} a_i^2 \right)^{-1} \quad (3.2.42a)$$

$$\text{var}(\hat{\phi}) = \sigma^2 v^2 \alpha_{11} = \sigma^2 v^2 \left(\sum_{i=1}^{M-1} a_i^2 \right)^{-1} \quad (3.2.42b)$$

看的出來 $\hat{\theta}$ 只跟目前聲源的 ϕ 有關， $\hat{\phi}$ 則跟聲源在哪都沒有關係

對於全方位估測可說是最好的擺法。

如果 $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \neq c\mathbf{I}$

那聲源的 θ 跟 ϕ 對相同陣列就會造成影響

$$\text{var}(\hat{\theta}) = \frac{\sigma^2 v^2}{\sin^2 \phi} \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta & 0 \end{bmatrix} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.2.40)$$

$$\Rightarrow \text{var}(\hat{\theta}) = \frac{\sigma^2 v^2}{\sin^2 \phi} \mathbf{d}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{d}, \quad \|\mathbf{d}\| = \|[-\sin \theta \quad \cos \theta \quad 0]\| = 1$$

$$\text{var}(\hat{\phi}) = \sigma^2 v^2 \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi & \sin \theta \cos \phi & -\sin \phi \end{bmatrix} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \cos \phi \\ -\sin \phi \end{bmatrix} \quad (3.2.41)$$

$$\Rightarrow \text{var}(\hat{\phi}) = \sigma^2 v^2 \mathbf{e}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{e}, \quad \|\mathbf{e}\| = \|[\cos \theta \cos \phi \quad \sin \theta \cos \phi \quad -\sin \phi]\| = 1$$

可以看出來，一但決定一個陣列形狀， $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 就決定了

要 $\min \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}$ ，很明顯可以知道是要找到 $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$ 最小 eigenvalue 的 eigenvector，由此 eigenvector 可反推出 θ 跟 ϕ 。

$(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$ 最小 eigenvalue 也就是 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 的最大 eigenvalue。

但根據 \mathbf{d} 和 \mathbf{e} 來看，可以明顯看出來它們算出來的 θ 會差個 90 度，也就是說 $\text{var}(\hat{\theta})$ 小，則 $\text{var}(\hat{\phi})$ 會大，反之亦然。

或是也可以在已知 θ 跟 ϕ 下去找出最好的陣列位置

舉個例子：

假設已知聲源 $\theta = 90^\circ, \phi$ 固定

$$\text{var}(\hat{\theta}) = \frac{\sigma^2 v^2}{\sin^2 \phi} (\alpha_{11}) \quad (3.2.42)$$

$$\text{var}(\hat{\phi}) = \sigma^2 v^2 (\alpha_{22} \cos^2 \phi - 2\alpha_{23} \cos \phi \sin \phi + \alpha_{33} \sin^2 \phi) \quad (3.2.43)$$

由 (3.2.42) 式，也就是要找到一個陣列形狀讓 α_{11} 越小越好

先分析矩陣裡面元素，目前關心的元素是 α_{11}

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{M-1} a_i^2 & \sum_{i=1}^{M-1} a_i b_i & \sum_{i=1}^{M-1} a_i c_i \\ \sum_{i=1}^{M-1} a_i b_i & \sum_{i=1}^{M-1} b_i^2 & \sum_{i=1}^{M-1} b_i c_i \\ \sum_{i=1}^{M-1} a_i c_i & \sum_{i=1}^{M-1} b_i c_i & \sum_{i=1}^{M-1} c_i^2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{C} \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.2.44)$$

用區塊反矩陣的特性可知道

$$\alpha_{11} = \frac{1}{k} = \frac{1}{A - \mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^T}, \quad \begin{bmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{C}^{-1} + \frac{1}{k} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{C}^{-1} \quad (3.2.45)$$

要讓 α_{11} 最小，也是說 A 要越大越好且 $\mathbf{B}=0$

$$A = \sum_{i=1}^{M-1} a_i^2 = x \text{ 座標總和}$$

(3.2.45)式知道 $\text{var}(\hat{\phi})$ 跟 $\mathbf{C}^{-1} + \frac{1}{k} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{C}^{-1}$ 有關

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{M-1} b_i^2 & \sum_{i=1}^{M-1} b_i c_i \\ \sum_{i=1}^{M-1} b_i c_i & \sum_{i=1}^{M-1} c_i^2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{M-1} b_i^2 \sum_{i=1}^{M-1} c_i^2 - (\sum_{i=1}^{M-1} b_i c_i)^2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{M-1} c_i^2 & -\sum_{i=1}^{M-1} b_i c_i \\ -\sum_{i=1}^{M-1} b_i c_i & \sum_{i=1}^{M-1} b_i^2 \end{bmatrix} \quad (3.2.46)$$

看的出來因為 $\text{var}(\hat{\phi}) = \sigma^2 v^2 (\alpha_{22} \cos^2 \phi - 2\alpha_{23} \cos \phi \sin \phi + \alpha_{33} \sin^2 \phi)$

如果要讓 $\text{var}(\hat{\phi})$ 變小，則需要 $\sum_{i=1}^{M-1} b_i c_i = 0$ 且 $\sum_{i=1}^{M-1} b_i^2$ 或 $\sum_{i=1}^{M-1} c_i^2$ 要越大越好

但其實這會跟 $\text{var}(\hat{\theta})$ 有抵觸，因為我們對 $\sum_{i=1}^{M-1} a_i^2 + b_i^2 + c_i^2$ 有限制

一旦 $\sum_{i=1}^{M-1} a_i^2$ 要大，相對 $\sum_{i=1}^{M-1} b_i^2 + \sum_{i=1}^{M-1} c_i^2$ 則會變小

但由(3.2.42)和(3.2.43)看出來， $\text{var}(\hat{\theta})$ 會比 $\text{var}(\hat{\phi})$ 稍大，所以其實可以犧牲一點 $\text{var}(\hat{\phi})$ 的效果來改善 $\text{var}(\hat{\theta})$ 。

或者是說如果只有要 $\hat{\theta}$ 的資訊，則可忽略對 $\hat{\phi}$ 造成影響。

如果考慮對聲速的估測，聲速跟 \mathbf{x} 的關係為 $v = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = h(\mathbf{x})$

$$\text{var}(\hat{v}) = \frac{\partial h(\mathbf{x})^T}{\partial \mathbf{x}} \sigma^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.2.47a)$$

$$= \sigma^2 \begin{bmatrix} -v^3 \cdot \frac{\cos \theta \sin \phi}{v} & -v^3 \cdot \frac{\sin \theta \sin \phi}{v} & -v^3 \cdot \frac{\cos \phi}{v} \end{bmatrix} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \begin{bmatrix} -v^3 \cdot \frac{\cos \theta \sin \phi}{v} \\ -v^3 \cdot \frac{\sin \theta \sin \phi}{v} \\ -v^3 \cdot \frac{\cos \phi}{v} \end{bmatrix} \quad (3.2.47b)$$

$$= \sigma^2 v^4 \begin{bmatrix} \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \begin{bmatrix} \cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \phi \end{bmatrix} \quad (3.2.47c)$$

如果一樣讓 $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = c\mathbf{I}$ ，則可改寫成

$$\text{var}(\hat{v}) = \sigma^2 v^4 \alpha_{11} = \sigma^2 v^4 \left(\sum_{i=1}^{M-1} a_i^2 \right)^{-1} \quad (3.2.48)$$



也就是跟聲源從哪邊來沒有關係

如果 $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \neq c\mathbf{I}$

$$\text{var}(\hat{v}) = \sigma^2 v^4 \begin{bmatrix} \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \begin{bmatrix} \cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \phi \end{bmatrix} \quad (3.2.49)$$

$$\Rightarrow \text{var}(\hat{v}) = \sigma^2 v^4 \mathbf{f}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{f}, \quad \|\mathbf{f}\| = \|\begin{bmatrix} \cos \theta \sin \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}\| = 1$$

跟 $\text{var}(\hat{\theta})$, $\text{var}(\hat{\phi})$ 做比較

$$\text{var}(\hat{\theta}) = \frac{\sigma^2 v^2}{\sin^2 \phi} \mathbf{d}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{d}, \quad \|\mathbf{d}\| = \|\begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta & 0 \end{bmatrix}\| = 1$$

$$\text{var}(\hat{\phi}) = \sigma^2 v^2 \mathbf{e}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{e}, \quad \|\mathbf{e}\| = \|\begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi & \sin \theta \cos \phi & -\sin \phi \end{bmatrix}\| = 1$$

對相同的陣列來說

由 $\mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}$ 可看出來，

\mathbf{e}, \mathbf{f} 算出來的 θ 會跟 \mathbf{d} 算出來的互為補角

\mathbf{e} 算出來的 ϕ 會跟 \mathbf{f} 算出來的互為補角

但如果是一個2維的陣列在3維空間

$$\theta = \text{atan}\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = g_1(\mathbf{x}) \quad , \quad \phi = \text{acos}\left(\sqrt{1 - x_1^2 + x_2^2}\right) = g_2(\mathbf{x}) \quad (3.2.50)$$

$$\text{誤差下界} = \mathbf{I}(\theta)^{-1} = \sigma^2 \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})^T}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.2.51a)$$

$$= \sigma^2 v^2 \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \\ \sin \phi & \sin \phi \\ \cos \theta & \sin \theta \\ \cos \phi & \cos \phi \end{bmatrix} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \\ \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (3.2.51b)$$

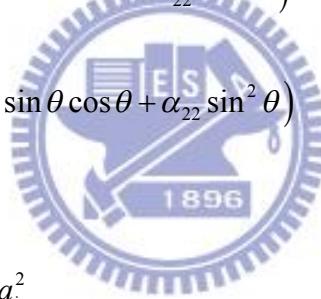
$$\text{var}(\hat{\theta}) = \frac{\sigma^2 v^2}{\sin^2 \phi} [-\sin \theta \quad \cos \theta] (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} [-\sin \theta \quad \cos \theta]^T \quad (3.2.52a)$$

$$\text{var}(\hat{\phi}) = \frac{\sigma^2 v^2}{\cos^2 \phi} [\cos \theta \quad \sin \theta] (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} [\cos \theta \quad \sin \theta]^T \quad (3.2.52b)$$

$$\text{var}(\hat{\theta}) = \frac{\sigma^2 v^2}{\sin^2 \phi} (\alpha_{11} \sin^2 \theta - 2\alpha_{12} \sin \theta \cos \theta + \alpha_{22} \cos^2 \theta) \quad (3.2.53a)$$

$$\text{var}(\hat{\phi}) = \frac{\sigma^2 v^2}{\cos^2 \phi} (\alpha_{11} \cos^2 \theta + 2\alpha_{12} \sin \theta \cos \theta + \alpha_{22} \sin^2 \theta) \quad (3.2.53b)$$

如果 $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = c\mathbf{I}$



$$\text{var}(\hat{\theta}) = \frac{\sigma^2 v^2}{\sin^2 \phi} (\alpha_{11}) = \frac{\sigma^2 v^2}{\sin^2 \phi} \sum_{i=1}^{M-1} a_i^2 \quad (3.2.54a)$$

$$\text{var}(\hat{\phi}) = \frac{\sigma^2 v^2}{\cos^2 \phi} (\alpha_{11}) = \frac{\sigma^2 v^2}{\cos^2 \phi} \sum_{i=1}^{M-1} a_i^2 \quad (3.2.54b)$$

則估測2種角度都會跟聲源仰角有關 ϕ

如果 $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \neq c\mathbf{I}$

$$\text{var}(\hat{\theta}) = \frac{\sigma^2 v^2}{\sin^2 \phi} [-\sin \theta \quad \cos \theta] (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} [-\sin \theta \quad \cos \theta]^T \quad (3.2.55a)$$

$$\text{var}(\hat{\phi}) = \frac{\sigma^2 v^2}{\cos^2 \phi} [\cos \theta \quad \sin \theta] (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} [\cos \theta \quad \sin \theta]^T \quad (3.2.55b)$$

可以看出來對相同的陣列

$\min \text{var}(\hat{\theta})$ 跟 $\min \text{var}(\hat{\phi})$ 得到的 θ 會互為補角

一樣也可以由已知的 θ 跟 ϕ 去分析陣列位置

若假設 $\theta = 90^\circ, \phi$ 固定

$$\text{var}(\hat{\theta}) = \frac{\sigma^2 v^2}{\sin^2 \phi} (\alpha_{11}) \quad (3.2.56a)$$

$$\text{var}(\hat{\phi}) = \frac{\sigma^2 v^2}{\cos^2 \phi} (\alpha_{22}) \quad (3.2.56b)$$

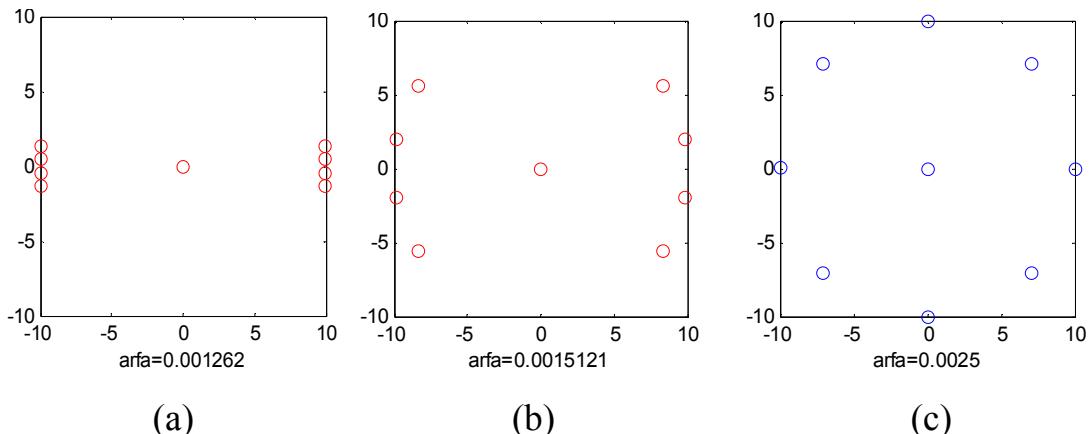
則可以看出來2個是完全相反的，如果要使 $\text{var}(\hat{\theta})$ 變小，則 α_{11} 要變小，但 α_{11} 變小則相對來說 α_{22} 就會變大，也就是 $\text{var}(\hat{\phi})$ 會變大，一樣跟3維陣列會有一個抵觸的現象，這時就要看使用而變。

但如果現在是一個平面的聲源，也就是 $\phi = 90^\circ$

需要估測的只有 $\hat{\theta}$ ，那就不會有抵觸的情況。

對 $\theta = 90^\circ$ 來說，需要設計的是讓 $\sum_{i=1}^{M-1} a_i^2$ 越大越好

也就是第2~M顆麥克風的x座標要越大越好，如果又限制麥克風要在一個圓上面，那也就是把麥克風角度趨近0或180度，以圖五中幾個例子模擬：



圖五、遠聲場情況下根據角度變異量設計不同的3種麥克風陣列擺放方式

因為這個陣列是針對90度方向設計的，可以知道對其他角度效果一定不好

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}'(\theta) &= K(\theta)(\alpha_{11} \sin^2 \theta - 2\alpha_{12} \sin \theta \cos \theta + \alpha_{22} \cos^2 \theta) \\
 &= K(\theta)\alpha_{11} \quad , \text{for } \theta = 90^\circ \\
 &= K(\theta)\alpha_{22} \quad , \text{for } \theta = 0^\circ \\
 &= K(\theta)(0.5\alpha_{11} - \alpha_{12} + 0.5\alpha_{22}) \quad , \text{for } \theta = 45^\circ
 \end{aligned} \tag{3.2.57}$$

$\mathbf{I}'(\theta) / K(\theta)$ (M=9)	(a)	(b)	(c)
$\theta=90^\circ$	0.001262	0.0015121	0.0025
$\theta=0^\circ$	0.132	0.0072105	0.0025
$\theta=45^\circ$	0.06631	0.0043613	0.0025

表一、不同麥克風擺放對不同角度聲源的角度誤差變異量

表一中可以看出尤其在0度方向的效果特別差，但這樣的設計在如果知道來的角度在某個範圍的情況下，是可以去使用的。



另外在2維的環境下分析一下對聲速的估測

$$v = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = h(\mathbf{x}) \tag{3.2.58}$$

$$\text{聲速估測誤差下界} = \frac{\partial h(\mathbf{x})^T}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \tag{3.2.59a}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-1}{v^3} \cdot \frac{2 \cos \theta}{v} & \frac{-1}{v^3} \cdot \frac{2 \sin \theta}{v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{v^3} \cdot \frac{2 \cos \theta}{v} \\ \frac{-1}{v^3} \cdot \frac{2 \sin \theta}{v} \end{bmatrix} \tag{3.2.59b}$$

$$= \frac{1}{v^8} [\cos \theta \quad \sin \theta] \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \tag{3.2.59c}$$

$$= K(v)(\alpha \cos^2 \theta + 2\beta \sin \theta \cos \theta + \gamma \sin^2 \theta) \tag{3.2.59d}$$

可以看到跟角度的估測其實是呈現相反的情況，也就是說當估測角度好的時候，估測聲速就會比較差，但對聲速的資訊比較不在乎，所以基本上還是以估測角度的為主。以上是對遠聲場下的分析。

3.2.2 近聲場的最佳擺放位置

在近聲場的情況下，有些在遠聲場下的省略的東西就不能刪除了

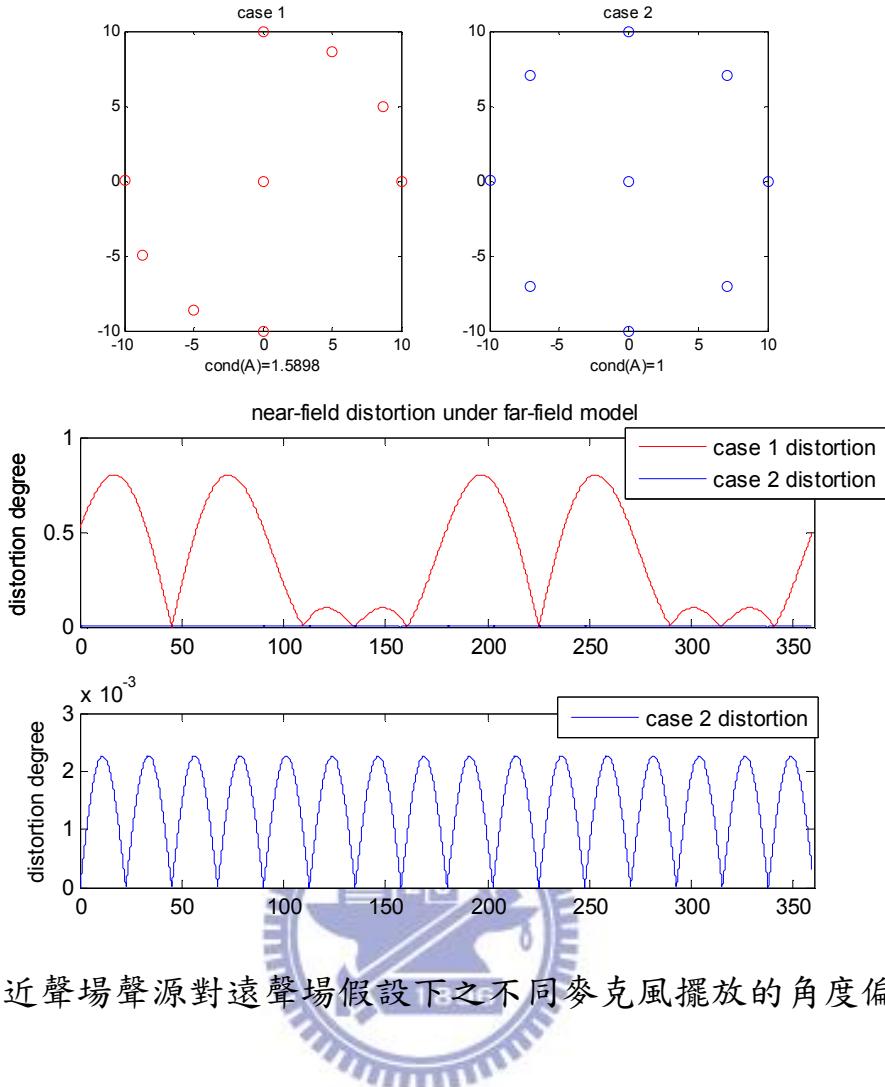
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) & |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2 & -(t_2 - t_1)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -(\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_1) & |\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_1|^2 & -(t_M - t_1)^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} t_2 - t_1 \\ \vdots \\ t_M - t_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad (3.2.60)$$

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}$$

而聲源位置以及聲速的估算如下：

$$\hat{\mathbf{r}}_s = \frac{\hat{\mathbf{x}}_s}{2\hat{x}_4} + \mathbf{r}_1, \hat{v} = \sqrt{\frac{\hat{\mathbf{x}}_s}{\hat{x}_4}} \left(\text{or } v = \frac{1}{|\hat{\mathbf{x}}_s|} \right) \quad (3.2.61)$$

如果我們在近聲場的情況下仍然用遠聲場的模型，則會因為太少的預估會造成估測的偏差，在大多的情況下會造成巨大的誤差。



圖六、近聲場聲源對遠聲場假設下之不同麥克風擺放的角度偏差值

圖六中可以看到在兩種陣列中(case 1和case 2)，大多數的角度都會有偏差的情況產生，但對有些角度來的聲音，並沒有偏差的產生，經由觀察和驗證，可以知道是因為Least square和對稱的麥克風陣列所造成的。當聲源方向看過來的麥克風陣列為以第一個為準左右對稱，則Least square的結果在遠聲場模型情況下就不會產生偏差。

假設3顆麥克風分別在

$$M_1 = (0, 0), M_2 = (\cos \theta_1, \sin \theta_1), M_3 = (\cos \theta_2, \sin \theta_2) ,$$

以及一個聲源在

$$S = (R \cos \phi, R \sin \phi), \phi = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$$

令我們Least square出來的解為 $\hat{\phi}$ ，則須滿足

$$\frac{d}{d\hat{\phi}}(t_1 - a)^2 + (t_2 - a)^2 = 0, \quad (3.2.62)$$

其中 $t_1 = \cos \theta_1 \cos \hat{\phi} + \sin \theta_1 \sin \hat{\phi} = \cos(\theta_1 - \hat{\phi})$, $t_2 = \cos \theta_2 \cos \hat{\phi} + \sin \theta_2 \sin \hat{\phi} = \cos(\theta_2 - \hat{\phi})$, $a = \|S - M_2\| = \|S - M_3\|$

$$f(\hat{\phi}) = \frac{d}{d\hat{\phi}}(t_1 - a)^2 + (t_2 - a)^2 \quad (3.2.63a)$$

$$= 2(\cos(\theta_1 - \hat{\phi}) - a) \sin(\theta_1 - \hat{\phi}) + 2(\cos(\theta_2 - \hat{\phi}) - a) \sin(\theta_2 - \hat{\phi}) \quad (3.2.63b)$$

$$= \sin 2(\theta_1 - \hat{\phi}) + \sin 2(\theta_2 - \hat{\phi}) - 2a(\sin(\theta_1 - \hat{\phi}) + \sin(\theta_2 - \hat{\phi})) \quad (3.2.63c)$$

$$\begin{aligned} & f(\hat{\phi}) \Big|_{\hat{\phi} = \phi = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}} \\ &= \sin 2\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) + \sin 2\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right) - 2a(\sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right)) = 0 \end{aligned} \quad (3.2.64)$$

一旦離開這個角度就會開始有偏差，越遠離偏差越大，想要讓偏差小一點的方法就是讓對稱的角度越多越好，然而最好的方法就是第一顆在正中間，其餘以正邊型在周圍環繞，以M顆麥克風為例，會有 $2(M-1)$ 個對稱的角度。由模擬也可以看到，以9顆為例，就算聲源在3倍陣列半徑的情況下，也幾乎沒有甚麼偏差。

主要的應用在於，如果想得到角度的資訊，看似在近聲場的情況下一定要考慮到聲源位置的影響，但這邊提供了一個陣列形狀使可以用比較簡易的計算也可以達到相對精確的角度，不受是近聲場或是遠聲場的影響。

但如果不僅只要角度的資訊，則需要使用近聲場模型，在使用近聲場模型的情況下，線性方程式就會表示程底下：

$$-\frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_1) \cdot (\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_1)}{v |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_1|} + \frac{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_1|^2}{2v |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_1|} - \frac{v(t_i - t_1)^2}{2 |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_1|} = (t_i - t_1) \quad \text{for } i=2 \sim M \quad (3.2.65)$$

M-1個方程式寫在一起可得到底下矩陣形式

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) & |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2 & -(t_2 - t_1)^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -(\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_1) & |\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_1|^2 & -(t_M - t_1)^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} t_2 - t_1 \\ \vdots \\ t_M - t_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad (3.2.66)$$

其中 $\mathbf{x}_s \equiv [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T = \frac{\mathbf{r}_s}{v |\mathbf{r}_s|} = \frac{\hat{\mathbf{r}}_s}{v}$ $x_4 = \frac{1}{2v |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_1|}$, $x_5 = \frac{v}{2 |\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_1|}$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{M-1} a_i^2 & \sum_{i=1}^{M-1} a_i b_i & \sum_{i=1}^{M-1} a_i c_i & -\sum_{i=1}^{M-1} a_i |\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i|^2 & \sum_{i=1}^{M-1} a_i (t_{i+1} - t_i)^2 \\ \sum_{i=1}^{M-1} a_i b_i & \sum_{i=1}^{M-1} b_i^2 & \sum_{i=1}^{M-1} b_i c_i & -\sum_{i=1}^{M-1} b_i |\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i|^2 & \sum_{i=1}^{M-1} b_i (t_{i+1} - t_i)^2 \\ \sum_{i=1}^{M-1} a_i c_i & \sum_{i=1}^{M-1} b_i c_i & \sum_{i=1}^{M-1} c_i^2 & -\sum_{i=1}^{M-1} c_i |\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i|^2 & \sum_{i=1}^{M-1} c_i (t_{i+1} - t_i)^2 \\ -\sum_{i=1}^{M-1} a_i |\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i|^2 & -\sum_{i=1}^{M-1} b_i |\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i|^2 & -\sum_{i=1}^{M-1} c_i |\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i|^2 & \sum_{i=1}^{M-1} |\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i|^4 & -\sum_{i=1}^{M-1} |\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i|^2 (t_{i+1} - t_i)^2 \\ \sum_{i=1}^{M-1} a_i (t_{i+1} - t_i)^2 & \sum_{i=1}^{M-1} b_i (t_{i+1} - t_i)^2 & \sum_{i=1}^{M-1} c_i (t_{i+1} - t_i)^2 & -\sum_{i=1}^{M-1} |\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i|^2 (t_{i+1} - t_i)^2 & \sum_{i=1}^{M-1} (t_{i+1} - t_i)^4 \end{bmatrix}$$

利用最小平方法可以解出 \mathbf{x} 的解

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (3.2.67)$$

而聲源位置以及聲速的估算如下：

$$\hat{\mathbf{r}}_s = \frac{\hat{\mathbf{x}}_s}{2\hat{x}_3} + \mathbf{r}_1, \hat{v} = \sqrt{\frac{\hat{x}_4}{\hat{x}_3}} \left(\text{or } v = \frac{1}{|\hat{\mathbf{x}}_s|} \right) \quad (3.2.68)$$

在近聲場的情況下，A矩陣也包含了time delay的資訊，所以重新分析誤差對該系統的影響：

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{A}_s & -\mathbf{b}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \\ x_5 \end{bmatrix} = \mathbf{b} \\ &\Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{A}_s & -(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b})^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \\ x_5 \end{bmatrix} = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b} \\ &\Rightarrow \mathbf{A}_s \mathbf{x}_s - (\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b})^2 x_5 = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b} \\ &\Rightarrow \mathbf{Y} = \mathbf{A}_s \mathbf{x}_s - \mathbf{b} - \mathbf{b}^2 x_5 = (1 + 2\mathbf{b}x_5)\Delta\mathbf{b} + x_5\Delta\mathbf{b}^2 \end{aligned} \quad (3.2.69)$$

可以把方程式分成固定項和隨機的部分，各別針對每個隨機部分加以探討。

$$Y_i = (1 + 2b_i x_5)\Delta b_i + x_5 \Delta b_i^2$$

$$\begin{aligned} F_{Y_i}(y_i) &= P(Y_i \leq y_i) = P((1 + 2b_i x_5)\Delta b_i + x_5 \Delta b_i^2 \leq y_i) \\ &= P(x_5 \Delta b_i^2 + (1 + 2b_i x_5)\Delta b_i - y_i \leq 0) \\ &= P\left(\frac{-(1 + 2b_i x_5) - \sqrt{(1 + 2b_i x_5)^2 + 4x_5 y_i}}{2x_5} \leq \Delta b_i \leq \frac{-(1 + 2b_i x_5) + \sqrt{(1 + 2b_i x_5)^2 + 4x_5 y_i}}{2x_5}\right) \end{aligned} \quad (3.2.70)$$

根據(3.2.70)，可經由一些計算可以得到目標的pdf(probability density function)，得到pdf則可作進一步的分析。

$$\begin{aligned} f_{Y_i}(y_i) &= \frac{d}{dy_i} F_{Y_i}(y_i) = \frac{d}{dy_i} \int_{\frac{-(1+2b_i x_5) - \sqrt{(1+2b_i x_5)^2 + 4x_5 y_i}}{2x_5}}^{\frac{-(1+2b_i x_5) + \sqrt{(1+2b_i x_5)^2 + 4x_5 y_i}}{2x_5}} f_{\Delta b_i}(t) dt \\ &= \frac{d}{dy_i} \frac{-(1+2b_i x_5) + \sqrt{(1+2b_i x_5)^2 + 4x_5 y_i}}{2x_5} f_{\Delta b_i}\left(\frac{-(1+2b_i x_5) + \sqrt{(1+2b_i x_5)^2 + 4x_5 y_i}}{2x_5}\right) \\ &\quad - \frac{d}{dy_i} \frac{-(1+2b_i x_5) - \sqrt{(1+2b_i x_5)^2 + 4x_5 y_i}}{2x_5} f_{\Delta b_i}\left(\frac{-(1+2b_i x_5) - \sqrt{(1+2b_i x_5)^2 + 4x_5 y_i}}{2x_5}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1+2b_i x_5)^2 + 4x_5 y_i}} \left(f_{\Delta b_i}\left(\frac{-(1+2b_i x_5) + \sqrt{(1+2b_i x_5)^2 + 4x_5 y_i}}{2x_5}\right) + f_{\Delta b_i}\left(\frac{-(1+2b_i x_5) - \sqrt{(1+2b_i x_5)^2 + 4x_5 y_i}}{2x_5}\right) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1+2b_i x_5)^2 + 4x_5 y_i} \sqrt{2\pi} \sigma} \left(e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{-(1+2b_i x_5) + \sqrt{(1+2b_i x_5)^2 + 4x_5 y_i}}{2x_5} \right)^2} + e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{-(1+2b_i x_5) - \sqrt{(1+2b_i x_5)^2 + 4x_5 y_i}}{2x_5} \right)^2} \right) \end{aligned} \quad (3.2.71)$$

於是現在可以重寫方程式 $\mathbf{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}'$ ，然而 $\Delta\mathbf{b}'$ 的pdf我們是已知的

$$\mathbf{Y} = \Delta\mathbf{b} = (\Delta b_1, \Delta b_2, \dots, \Delta b_{M-1})$$

$(\Delta b_1, \Delta b_2, \dots, \Delta b_{M-1})$'s joint pdf :

$$\begin{aligned} f_Y(\mathbf{y}) &= \prod_{i=1}^{M-1} f_{Y_i}(y_i) \\ \Rightarrow \ln f_Y(\mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^{M-1} \ln f_{Y_i}(y_i) \\ &= \sum_{i=1}^{M-1} \left(-\ln \sqrt{2\pi}\sigma - \ln \sqrt{(1+2b_i x_5)^2 + 4x_5 y_i} \right. \\ &\quad \left. + \ln \left(e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{-(1+2b_i x_5) + \sqrt{(1+2b_i x_5)^2 + 4x_5 y_i}}{2x_5} \right)^2} + e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{-(1+2b_i x_5) - \sqrt{(1+2b_i x_5)^2 + 4x_5 y_i}}{2x_5} \right)^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.2.72)$$

得到joint pdf後，則可針對其ML來找到一個良好的估測

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sum_i \ln f_{Y_i}(y_i)}{\partial \mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \sum_i \ln f_{Y_i}(y_i)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \sum_i \ln f_{Y_i}(y_i)}{\partial x_5} \end{bmatrix}, y_i = \sum_{k=1}^4 \mathbf{A}_{ik} x_k - b_i - b_i^2 x_5 \\ &= \begin{bmatrix} \sum -\frac{2x_5(\mathbf{A}_s)_{i1}}{(1+2b_i x_5)^2 + 4x_5 y_i} + \frac{1}{\sigma^2} \frac{(\mathbf{A}_s)_{i1}}{\sqrt{(1+2b_i x_5)^2 + 4x_5 y_i}} \left(\frac{(1+2b_i x_5)(A-B)}{2x_5} - \frac{\sqrt{(1+2b_i x_5)^2 + 4x_5 y_i}}{2x_5} \right) \\ \sum -\frac{2x_5(\mathbf{A}_s)_{i2}}{(1+2b_i x_5)^2 + 4x_5 y_i} + \frac{1}{\sigma^2} \frac{(\mathbf{A}_s)_{i2}}{\sqrt{(1+2b_i x_5)^2 + 4x_5 y_i}} \left(\frac{(1+2b_i x_5)(A-B)}{2x_5} - \frac{\sqrt{(1+2b_i x_5)^2 + 4x_5 y_i}}{2x_5} \right) \\ \sum -\frac{2x_5(\mathbf{A}_s)_{i3}}{(1+2b_i x_5)^2 + 4x_5 y_i} + \frac{1}{\sigma^2} \frac{(\mathbf{A}_s)_{i3}}{\sqrt{(1+2b_i x_5)^2 + 4x_5 y_i}} \left(\frac{(1+2b_i x_5)(A-B)}{2x_5} - \frac{\sqrt{(1+2b_i x_5)^2 + 4x_5 y_i}}{2x_5} \right) \\ \sum -\frac{2x_5(\mathbf{A}_s)_{i4}}{(1+2b_i x_5)^2 + 4x_5 y_i} + \frac{1}{\sigma^2} \frac{(\mathbf{A}_s)_{i4}}{\sqrt{(1+2b_i x_5)^2 + 4x_5 y_i}} \left(\frac{(1+2b_i x_5)(A-B)}{2x_5} - \frac{\sqrt{(1+2b_i x_5)^2 + 4x_5 y_i}}{2x_5} \right) \\ \sum -\frac{2b_i(1+2b_i x_5) + 2y_i - 2x_5 b_i^2}{(1+2b_i x_5)^2 + 4x_5 y_i} + \frac{1}{\sigma^2 4x_5^2} \left(\begin{aligned} &\left(\frac{(1+2b_i x_5)}{2x_5} + \frac{\sqrt{(1+2b_i x_5)^2 + 4x_5 y_i}}{2x_5} \right) \left(2x_5 \left(\frac{4b_i(1+2b_i x_5) + 4y_i - 4x_5 b_i^2}{2\sqrt{(1+2b_i x_5)^2 + 4x_5 y_i}} \right) - \sqrt{(1+2b_i x_5)^2 + 4x_5 y_i} \right) \\ &+ \frac{(A-B)}{(A+B)} \left(\left(\frac{(1+2b_i x_5)}{2x_5} \right) \left(2x_5 \left(\frac{4b_i(1+2b_i x_5) + 4y_i - 4x_5 b_i^2}{2\sqrt{(1+2b_i x_5)^2 + 4x_5 y_i}} \right) - \sqrt{(1+2b_i x_5)^2 + 4x_5 y_i} \right) - \frac{\sqrt{(1+2b_i x_5)^2 + 4x_5 y_i}}{2x_5} 2 \right) \end{aligned} \right) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.2.73)$$

$$\text{其中 } A = e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{-(1+2b_i x_5) + \sqrt{(1+2b_i x_5)^2 + 4x_5 y_i}}{2x_5} \right)^2}, B = e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{-(1+2b_i x_5) - \sqrt{(1+2b_i x_5)^2 + 4x_5 y_i}}{2x_5} \right)^2}$$

根據ML步驟，此時要找到符合 \mathbf{x} 使 $\frac{\partial \sum_i \ln f_{Y_i}(y_i)}{\partial \mathbf{x}} = 0$

可以看到是一個很複雜的非線性方程式，於求解時不是很容易。

所以試著簡化上面的分析

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{A}_s & -\mathbf{b}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \\ x_5 \end{bmatrix} = \mathbf{b} \\ &\Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{A}_s & -(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b})^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \\ x_5 \end{bmatrix} = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b} \\ &\Rightarrow \mathbf{A}_s \mathbf{x}_s - (\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b})^2 x_5 = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b} \\ &\Rightarrow \mathbf{Y} = \mathbf{A}_s \mathbf{x}_s - \mathbf{b} - \mathbf{b}^2 x_5 = (1 + 2\mathbf{b}x_5)\Delta\mathbf{b} + x_5\Delta\mathbf{b}^2 \end{aligned}$$

因為 $\Delta\mathbf{b}^2$ 相對來的小，所以在分析上可近似省略它

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}_s \mathbf{x}_s - \mathbf{b} - \mathbf{b}^2 x_5 = (1 + 2\mathbf{b}x_5)\Delta\mathbf{b} + x_5\Delta\mathbf{b}^2 \cong (1 + 2\mathbf{b}x_5)\Delta\mathbf{b} \quad (3.2.74)$$

$$\Rightarrow Y_i = (1 + 2b_i x_5)\Delta b_i \quad (3.2.75)$$

根據(3.2.75)，於是可以得到其pdf

$$F_{Y_i}(y_i) = P(Y_i \leq y_i) = P((1 + 2b_i x_5)\Delta b_i \leq y_i) = P(\Delta b_i \leq \frac{y_i}{(1 + 2b_i x_5)}) \quad (3.2.76)$$

$$\begin{aligned} f_{Y_i}(y_i) &= \frac{d}{dy_i} \frac{y_i}{(1 + 2b_i x_5)} f_{\Delta b_i}\left(\frac{y_i}{(1 + 2b_i x_5)}\right) \\ &= \frac{1}{(1 + 2b_i x_5)} \left(f_{\Delta b_i}\left(\frac{y_i}{(1 + 2b_i x_5)}\right) \right) \\ &= \frac{1}{(1 + 2b_i x_5)\sqrt{2\pi}\sigma} \left(e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\frac{y_i}{(1 + 2b_i x_5)}\right)^2} \right) \end{aligned} \quad (3.2.77)$$

(3.2.77)可以看出來pdf有比較簡單的形式，於是也是利用ML來分析

$$\begin{aligned} f_Y(\mathbf{y}) &= \prod_{i=1}^{M-1} f_{Y_i}(y_i) \Rightarrow \ln f_Y(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{M-1} \ln f_{Y_i}(y_i) \\ &= \sum_{i=1}^{M-1} -\ln \sqrt{2\pi}\sigma - \ln(1 + 2b_i x_5) - \frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{y_i}{(1 + 2b_i x_5)} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.2.78)$$

By ML:

$$\frac{\partial \sum \ln f_{Y_i}(y_i)}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sum \ln f_{Y_i}(y_i)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \sum \ln f_{Y_i}(y_i)}{\partial x_5} \end{bmatrix}, y_i = \sum_k \mathbf{A}_{ik} x_k - b_i - b_i^2 x_5$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \sum \ln f_{Y_i}(y_i)}{\partial \mathbf{x}} \\
&= \left[\begin{array}{c} \sum -\frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{y_i}{(1+2b_i x_5)} \right) \frac{\mathbf{A}_{i1}}{(1+2b_i x_5)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum -\frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{y_i}{(1+2b_i x_5)} \right) \frac{\mathbf{A}_{i4}}{(1+2b_i x_5)} \\ \sum -\frac{2b_i}{(1+2b_i x_5)} - \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{y_i}{(1+2b_i x_5)} \right) \frac{-b_i^2(1+2b_i x_5) - y_i 2b_i}{(1+2b_i x_5)^2} \end{array} \right] = 0, -\frac{|r_i - r_1|}{|r_s - r_1|} \leq 2b_i x_5 \leq \frac{|r_i - r_1|}{|r_s - r_1|} \quad (3.2.79)
\end{aligned}$$

其中有些較小的項可以省略掉

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} \sum_{i=1}^{M-1} \left(\frac{\mathbf{A}_{i1} y_i}{(1+2b_i x_5)^2} \right) \\ \sum_{i=1}^{M-1} \left(\frac{\mathbf{A}_{i2} y_i}{(1+2b_i x_5)^2} \right) \\ \sum_{i=1}^{M-1} \left(\frac{\mathbf{A}_{i3} y_i}{(1+2b_i x_5)^2} \right) \\ \sum_{i=1}^{M-1} \left(\frac{\mathbf{A}_{i4} y_i}{(1+2b_i x_5)^2} \right) \\ \sum_{i=1}^{M-1} \left(\frac{(-b_i^2(1+2b_i x_5) - y_i 2b_i) y_i}{(1+2b_i x_5)^3} \right) \end{array} \right] = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc} \frac{\mathbf{A}_{11}}{(1+2b_1 x_5)^2} & \frac{\mathbf{A}_{21}}{(1+2b_2 x_5)^2} & \frac{\mathbf{A}_{31}}{(1+2b_3 x_5)^2} & \dots & \frac{\mathbf{A}_{M-1,1}}{(1+2b_{M-1} x_5)^2} \\ \frac{\mathbf{A}_{12}}{(1+2b_1 x_5)^2} & \frac{\mathbf{A}_{22}}{(1+2b_2 x_5)^2} & \frac{\mathbf{A}_{32}}{(1+2b_3 x_5)^2} & \dots & \frac{\mathbf{A}_{M-1,2}}{(1+2b_{M-1} x_5)^2} \\ \frac{\mathbf{A}_{13}}{(1+2b_1 x_5)^2} & \frac{\mathbf{A}_{23}}{(1+2b_2 x_5)^2} & \frac{\mathbf{A}_{33}}{(1+2b_3 x_5)^2} & \dots & \frac{\mathbf{A}_{M-1,3}}{(1+2b_{M-1} x_5)^2} \\ \frac{\mathbf{A}_{14}}{(1+2b_1 x_5)^2} & \frac{\mathbf{A}_{24}}{(1+2b_2 x_5)^2} & \frac{\mathbf{A}_{34}}{(1+2b_3 x_5)^2} & \dots & \frac{\mathbf{A}_{M-1,4}}{(1+2b_{M-1} x_5)^2} \\ \frac{k_1}{(1+2b_1 x_5)^2} & \frac{k_2}{(1+2b_2 x_5)^2} & \frac{k_3}{(1+2b_3 x_5)^2} & \dots & \frac{k_{M-1}}{(1+2b_{M-1} x_5)^2} \end{array} \right] \mathbf{y} = 0 \quad (3.2.80)$$

$$\text{其中 } k_i = \frac{-b_i^2(1+2b_i x_5) - y_i 2b_i}{(1+2b_i x_5)}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc} \frac{\mathbf{A}_{11}}{(1+2b_1 x_5)^2} & \frac{\mathbf{A}_{21}}{(1+2b_2 x_5)^2} & \frac{\mathbf{A}_{31}}{(1+2b_3 x_5)^2} & \dots & \frac{\mathbf{A}_{M-1,1}}{(1+2b_{M-1} x_5)^2} \\ \frac{\mathbf{A}_{12}}{(1+2b_1 x_5)^2} & \frac{\mathbf{A}_{22}}{(1+2b_2 x_5)^2} & \frac{\mathbf{A}_{32}}{(1+2b_3 x_5)^2} & \dots & \frac{\mathbf{A}_{M-1,2}}{(1+2b_{M-1} x_5)^2} \\ \frac{\mathbf{A}_{13}}{(1+2b_1 x_5)^2} & \frac{\mathbf{A}_{23}}{(1+2b_2 x_5)^2} & \frac{\mathbf{A}_{33}}{(1+2b_3 x_5)^2} & \dots & \frac{\mathbf{A}_{M-1,3}}{(1+2b_{M-1} x_5)^2} \\ \frac{\mathbf{A}_{14}}{(1+2b_1 x_5)^2} & \frac{\mathbf{A}_{24}}{(1+2b_2 x_5)^2} & \frac{\mathbf{A}_{34}}{(1+2b_3 x_5)^2} & \dots & \frac{\mathbf{A}_{M-1,4}}{(1+2b_{M-1} x_5)^2} \\ \frac{k_1}{(1+2b_1 x_5)^2} & \frac{k_2}{(1+2b_2 x_5)^2} & \frac{k_3}{(1+2b_3 x_5)^2} & \dots & \frac{k_{M-1}}{(1+2b_{M-1} x_5)^2} \end{array} \right] (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) = 0 \quad (3.2.81)$$

(3.2.81)可以看出來當A有不確定項時，一樣可以推得滿足 $\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} = 0$ 的 \mathbf{x} 一樣是其中的特殊解，且符合ML。當然這個比較簡單的方程式一樣是一個非線性方程式，要解出 \mathbf{x} 一樣需要使用疊代法慢慢求出。

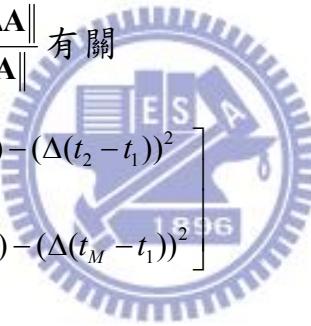
或是可以從另一個角度來看：

可以看到因為這時候誤差出現在**b**也出現在**A**

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b} \\
 \Rightarrow & \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{b} - \Delta\mathbf{A}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) \\
 \Rightarrow & \|\Delta\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\Delta\mathbf{b}\| + \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\Delta\mathbf{A}\| \|\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}\| \\
 \Rightarrow & \|\Delta\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\Delta\mathbf{b}\| + \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{A}\| \frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \|\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}\| \\
 \Rightarrow & \frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\|\mathbf{A}^{-1}\| \|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{x}\|} + \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{A}\| \frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \frac{\|\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}, \|\mathbf{x}\| \geq \frac{\|\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{A}\|} \\
 \Rightarrow & \frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\| \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} + \|\mathbf{A}^{-1}\| \|\mathbf{A}\| \frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \frac{\|\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}
 \end{aligned} \tag{3.2.82}$$

$\Delta\mathbf{b}$ 和 $\Delta\mathbf{A}$ 的影響跟 $\frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$ 和 $\frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}$ 有關

$$\Delta\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2(t_2 - t_1)\Delta(t_2 - t_1) - (\Delta(t_2 - t_1))^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -2(t_M - t_1)\Delta(t_M - t_1) - (\Delta(t_M - t_1))^2 \end{bmatrix}$$



看的出來 $\|\mathbf{A}\|$ 相較 $\|\Delta\mathbf{A}\|$ 大很多，於是先省略 $\Delta\mathbf{A}$ 的影響。

由前面推導也可以看的出來，一旦加入 \mathbf{A} 的不確定性時，整個分析會變得很複雜，所以這邊會暫時忽略 $\Delta\mathbf{A}$ 的影響。

也就是現在還是一個 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$ 的問題。

所以說最小平方法一樣是一個對 \mathbf{x} 好的估測方法。

接著來分析聲源位置的變異量，因為 \mathbf{x} 並不是真正關心的值，真正關心的位置經過一個非線性的轉換。

$$g(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} r_{sx} & r_{sy} & r_{sz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{2x_4} & \frac{x_2}{2x_4} & \frac{x_3}{2x_4} \end{bmatrix} \tag{3.2.83}$$

$$\text{Let } (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{sub} & \mathbf{d} \\ \mathbf{d}^T & e \end{bmatrix}$$

聲源位置的變異量下界會經過一個轉換

$$\mathbf{I}'(\hat{\mathbf{r}}_s) = \frac{\partial g(\mathbf{x})^T}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.2.84a)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2x_4} & 0 & 0 & \frac{-x_1}{2x_4^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2x_4} & 0 & \frac{-x_2}{2x_4^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2x_4} & \frac{-x_3}{2x_4^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{sub} & \mathbf{d} \\ \mathbf{d}^T & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2x_4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2x_4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2x_4} \\ \frac{-x_1}{2x_4^2} & \frac{-x_2}{2x_4^2} & \frac{-x_3}{2x_4^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.84b)$$

可以知道其聲源位置估測的變異量

$$\begin{cases} \text{var}(\hat{r}_{sx}) \geq \frac{1}{4x_4^2} ((\mathbf{A}_{sub})_{11} - 2(\mathbf{A}_{sub})_{14} \frac{r_{sx}}{2} + (\mathbf{A}_{sub})_{44} \frac{r_{sx}^2}{4}) \\ \text{var}(\hat{r}_{sy}) \geq \frac{1}{4x_4^2} ((\mathbf{A}_{sub})_{22} - 2(\mathbf{A}_{sub})_{24} \frac{r_{sy}}{2} + (\mathbf{A}_{sub})_{44} \frac{r_{sy}^2}{4}) \\ \text{var}(\hat{r}_{sz}) \geq \frac{1}{4x_4^2} ((\mathbf{A}_{sub})_{33} - 2(\mathbf{A}_{sub})_{34} \frac{r_{sz}}{2} + (\mathbf{A}_{sub})_{44} \frac{r_{sz}^2}{4}) \end{cases} \quad (3.2.85)$$

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \text{var}(\hat{r}_{sx}) + \text{var}(\hat{r}_{sy}) + \text{var}(\hat{r}_{sz}) \\ & = \text{minimize } \text{tr}(\mathbf{I}'(\hat{\mathbf{r}}_s)) \end{aligned} \quad (3.2.86a)$$

$$= \min \text{imize } \text{tr}(\mathbf{G}^T(\mathbf{x})(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{x})), \mathbf{G}(\mathbf{x}) = \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.2.86b)$$

由柯西不等式

$$\text{tr}((\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}) \geq \frac{2}{\text{tr}((\mathbf{A}^T \mathbf{A}))} \quad (3.2.87)$$

$\text{tr}((\mathbf{A}^T \mathbf{A}))$ 的主要影響項為 $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^4 + \dots + |\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_1|^4$

所以把 $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^4 + \dots + |\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_1|^4$ 設為定值來分析，可以保證在幾乎相同的下界來分析。

要分析這些element的影響，首先先看塊狀矩陣的反矩陣(inverse of block matrix)。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{block} & \mathbf{d} \\ \mathbf{d}^T & e \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \left(\mathbf{A}_{block} - \frac{1}{e} \mathbf{d} \mathbf{d}^T\right)^{-1} & -\frac{1}{k} \mathbf{A}_{block}^{-1} \mathbf{d} \\ -\frac{1}{k} \mathbf{d}^T \mathbf{A}_{block}^{-1} & \frac{1}{k} \end{bmatrix} \quad (3.2.88a)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{block}^{-1} + \frac{1}{k} \mathbf{A}_{block}^{-1} \mathbf{d} \mathbf{d}^T \mathbf{A}_{block}^{-1} & -\frac{1}{k} \mathbf{A}_{block}^{-1} \mathbf{d} \\ -\frac{1}{k} \mathbf{d}^T \mathbf{A}_{block}^{-1} & \frac{1}{k} \end{bmatrix} \quad (3.2.88b)$$

$$k = e - \mathbf{d}^T \mathbf{A}_{block}^{-1} \mathbf{d}$$

所關注的element集中在左上方的block，也就是

$$\mathbf{A}_{block}^{-1} + \frac{1}{k} \mathbf{A}_{block}^{-1} \mathbf{d} \mathbf{d}^T \mathbf{A}_{block}^{-1}$$

其中



$$\mathbf{A}_{block} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{M-1} a_i^2 & \sum_{i=1}^{M-1} a_i b_i & \sum_{i=1}^{M-1} a_i c_i & -\sum_{i=1}^{M-1} a_i |\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i|^2 \\ \sum_{i=1}^{M-1} a_i b_i & \sum_{i=1}^{M-1} b_i^2 & \sum_{i=1}^{M-1} b_i c_i & -\sum_{i=1}^{M-1} b_i |\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i|^2 \\ \sum_{i=1}^{M-1} a_i c_i & \sum_{i=1}^{M-1} b_i c_i & \sum_{i=1}^{M-1} c_i^2 & -\sum_{i=1}^{M-1} c_i |\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i|^2 \\ -\sum_{i=1}^{M-1} a_i |\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i|^2 & -\sum_{i=1}^{M-1} b_i |\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i|^2 & -\sum_{i=1}^{M-1} c_i |\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i|^2 & \sum_{i=1}^{M-1} |\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i|^4 \end{bmatrix} \quad (3.2.89)$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{M-1} a_i (t_{i+1} - t_i)^2 \\ \sum_{i=1}^{M-1} b_i (t_{i+1} - t_i)^2 \\ \sum_{i=1}^{M-1} c_i (t_{i+1} - t_i)^2 \\ -\sum_{i=1}^{M-1} |\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i|^2 (t_{i+1} - t_i)^2 \end{bmatrix} \quad (3.2.90)$$

所以可以把關注的變異量分成兩部分

$$\text{var}(\hat{r}_{sx}) + \text{var}(\hat{r}_{sy}) + \text{var}(\hat{r}_{sz}) \geq f(\mathbf{A}_{block}^{-1}) + f\left(\frac{1}{k} \mathbf{A}_{block}^{-1} \mathbf{d} \mathbf{d}^T \mathbf{A}_{block}^{-1}\right) \quad (3.2.91)$$

所以現在就可以朝兩部分去進行

第一個部分是 $\min f(\mathbf{A}_{block}^{-1})$ ，另一部分就是 $\min f\left(\frac{1}{k} \mathbf{A}_{block}^{-1} \mathbf{d} \mathbf{d}^T \mathbf{A}_{block}^{-1}\right)$ ，這兩部

分不一定可以同時進行，所以分別討論。

首先探討 $\min f(\mathbf{A}_{block}^{-1})$

$$\mathbf{A}_{block} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{M-1} a_i^2 & \sum_{i=1}^{M-1} a_i b_i & \sum_{i=1}^{M-1} a_i c_i & -\sum_{i=1}^{M-1} a_i |\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i|^2 \\ \sum_{i=1}^{M-1} a_i b_i & \sum_{i=1}^{M-1} b_i^2 & \sum_{i=1}^{M-1} b_i c_i & -\sum_{i=1}^{M-1} b_i |\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i|^2 \\ \sum_{i=1}^{M-1} a_i c_i & \sum_{i=1}^{M-1} b_i c_i & \sum_{i=1}^{M-1} c_i^2 & -\sum_{i=1}^{M-1} c_i |\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i|^2 \\ -\sum_{i=1}^{M-1} a_i |\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i|^2 & -\sum_{i=1}^{M-1} b_i |\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i|^2 & -\sum_{i=1}^{M-1} c_i |\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i|^2 & \sum_{i=1}^{M-1} |\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i|^4 \end{bmatrix}$$

$$f(\mathbf{A}_{block}^{-1}) = \frac{1}{4x_4^2} ((\mathbf{A}_{block}^{-1})_{11} + (\mathbf{A}_{block}^{-1})_{22} + (\mathbf{A}_{block}^{-1})_{33} - ((\mathbf{A}_{block}^{-1})_{14} r_{sx} + (\mathbf{A}_{block}^{-1})_{24} r_{sy} + (\mathbf{A}_{block}^{-1})_{34} r_{sz}) + \frac{1}{4} (\mathbf{A}_{block}^{-1})_{44} (r_{sx}^2 + r_{sy}^2 + r_{sz}^2)) \quad (3.2.92)$$

由塊狀矩陣的反矩陣的特性可以知道，當非主對角塊狀的矩陣不為0的時候，會使 $(\mathbf{A}_{block}^{-1})_{11}, (\mathbf{A}_{block}^{-1})_{22}, (\mathbf{A}_{block}^{-1})_{33}, (\mathbf{A}_{block}^{-1})_{44}$ 變大，讓 $f(\mathbf{A}_{block}^{-1})$ 也變大。

所以由上面條件可以歸類出要符合底下六條方程式：

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{M-1} a_i b_i = \sum_{i=1}^{M-1} a_i c_i = \sum_{i=1}^{M-1} b_i c_i = 0 \\ -\sum_{i=1}^{M-1} a_i |\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i|^2 = 0 \\ -\sum_{i=1}^{M-1} b_i |\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i|^2 = 0 \\ -\sum_{i=1}^{M-1} c_i |\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i|^2 = 0 \end{array} \right. \quad (3.2.93)$$

而由經驗得知，當 $a_1^2 + \dots + a_{M-1}^2 = b_1^2 + \dots + b_{M-1}^2 = c_1^2 + \dots + c_{M-1}^2$ 時，會有最好的效果，但 $a_1^2 + \dots + a_{M-1}^2 + b_1^2 + \dots + b_{M-1}^2 + c_1^2 + \dots + c_{M-1}^2$ 會受到 $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^4 + \dots + |\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_1|^4$ 為定值的影響。

由柯西不等式

$$\begin{aligned} & ((a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)^2 + \dots + (a_{M-1}^2 + b_{M-1}^2 + c_{M-1}^2)^2) (1^2 + \dots + 1^2) \\ & \geq ((a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) + \dots + (a_{M-1}^2 + b_{M-1}^2 + c_{M-1}^2)) \end{aligned} \quad (3.2.94a)$$

$$\Rightarrow (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) + \dots + (a_{M-1}^2 + b_{M-1}^2 + c_{M-1}^2) \leq \sum_{i=1}^{M-1} |\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i|^4 \quad (3.2.94b)$$

等號成立當

$$(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) = \dots = (a_{M-1}^2 + b_{M-1}^2 + c_{M-1}^2) \Rightarrow |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2 = \dots = |\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_1|^2 \quad (3.2.95)$$

也就是第2~M顆在同一個圓上



總結所有條件為

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{M-1} a_i b_i = \sum_{i=1}^{M-1} a_i c_i = \sum_{i=1}^{M-1} b_i c_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{M-1} a_i^2 = \sum_{i=1}^{M-1} b_i^2 = \sum_{i=1}^{M-1} c_i^2 \\ \sum_{i=1}^{M-1} a_i = \sum_{i=1}^{M-1} b_i = \sum_{i=1}^{M-1} c_i \end{array} \right. \quad (3.2.96)$$

可以證明當正多面體滿足此式子。

這邊沒有探討 $(\mathbf{A}_{block}^{-1})_{14}, (\mathbf{A}_{block}^{-1})_{24}$ 跟 $(\mathbf{A}_{block}^{-1})_{34}$ 的影響，因為假設他們不是主要影響項。也就是在 $\min f(\mathbf{A}_{block}^{-1})$ 的情況下，得到的結論為2~M顆呈正多面體分佈。

接著我們探討 $\min f(\frac{1}{k} \mathbf{A}_{block}^{-1} \mathbf{d} \mathbf{d}^T \mathbf{A}_{block}^{-1})$

可以明顯看出，如果 $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ 則 $f(\frac{1}{k} \mathbf{A}_{block}^{-1} \mathbf{d} \mathbf{d}^T \mathbf{A}_{block}^{-1}) = 0$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{M-1} a_i (t_{i+1} - t_i)^2 \\ \sum_{i=1}^{M-1} b_i (t_{i+1} - t_i)^2 \\ \sum_{i=1}^{M-1} c_i (t_{i+1} - t_i)^2 \\ -\sum_{i=1}^{M-1} |\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i|^2 (t_{i+1} - t_i)^2 \end{bmatrix}$$

由 \mathbf{d} 的 element 可知要滿足 $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ ，唯一的可能是

$$(t_2 - t_1) = \dots = (t_M - t_1) = 0 \quad (3.2.97)$$

$$\Rightarrow t_1 = t_2 = \dots = t_{M-1} = t_M$$

也就是說聲源到每顆麥克風距離是相同的。

但根據[18]中可知道，對這樣的線性系統來說，麥克風的分佈不能在同一個圓上面，不然會造成 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 的 rank 少一，如此形狀不能做 Least square 演算法。

但一樣要減少 $f(\frac{1}{k} \mathbf{A}_{block}^{-1} \mathbf{d} \mathbf{d}^T \mathbf{A}_{block}^{-1}) = 0$ 所造成的影響，於是使用數值方法解讓

\mathbf{d} 變小，但不要讓他趨近 0。

要去解的是一個非線性方程組的解

$$\mathbf{s}(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k) = \begin{bmatrix} s_1(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k) \\ s_2(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k) \\ s_3(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k) \\ s_4(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,k} (t_{2,k} - t_1)^2 + \dots + a_{M-1,k} (t_{M,k} - t_1)^2 \\ b_{1,k} (t_{2,k} - t_1)^2 + \dots + b_{M-1,k} (t_{M,k} - t_1)^2 \\ c_{1,k} (t_{2,k} - t_1)^2 + \dots + c_{M-1,k} (t_{M,k} - t_1)^2 \\ -|\mathbf{r}_{2,k} - \mathbf{r}_1|^2 (t_{2,k} - t_1)^2 - \dots - |\mathbf{r}_{M,k} - \mathbf{r}_1|^2 (t_{M,k} - t_1)^2 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.2.98)$$

其中 $(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k) = (a_{1,k}, \dots, a_{M-1,k}, b_{1,k}, \dots, b_{M-1,k})$

在這邊使用的方法是牛頓法

由於最初有一個條件 $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^4 + \dots + |\mathbf{r}_M - \mathbf{r}_1|^4$ 為定值

所以在方程組中加入一組

$$\mathbf{s}(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k) = \begin{bmatrix} s_1(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k) \\ s_2(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k) \\ s_3(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k) \\ s_4(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k) \\ s_5(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,k}(t_{2,k} - t_1)^2 + \dots + a_{M-1,k}(t_{M,k} - t_1)^2 \\ b_{1,k}(t_{2,k} - t_1)^2 + \dots + b_{M-1,k}(t_{M,k} - t_1)^2 \\ c_{1,k}(t_{2,k} - t_1)^2 + \dots + c_{M-1,k}(t_{M,k} - t_1)^2 \\ -|\mathbf{r}_{2,k} - \mathbf{r}_1|^2(t_{2,k} - t_1)^2 - \dots - |\mathbf{r}_{M,k} - \mathbf{r}_1|^2(t_{M,k} - t_1)^2 \\ |\mathbf{r}_{2,k} - \mathbf{r}_1|^4 + \dots + |\mathbf{r}_{M,k} - \mathbf{r}_1|^4 - K \end{bmatrix} = 0 \quad (3.2.99)$$

接著依照牛頓法的步驟

$$J(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial a_1} s_1(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k) & \dots & \frac{\partial}{\partial b_k} s_1(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial a_1} s_5(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k) & \dots & \frac{\partial}{\partial b_k} s_5(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k) \end{bmatrix} \quad (3.2.100a)$$

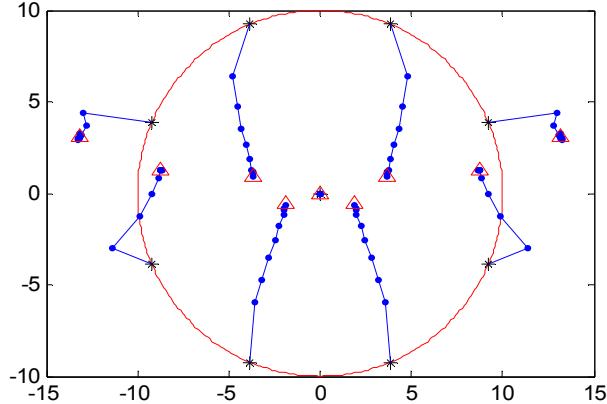
$$J(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k) \Delta(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k) = -\mathbf{s}(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k), \text{ solve } \Delta(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k) \quad (3.2.100b)$$

$$(\mathbf{a}_{k+1}, \mathbf{b}_{k+1}) = (\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k) + \beta \Delta(\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k) \quad (3.2.100c)$$

(3.2.100c) 中 β 正常來說是設為 1，但如果想要減慢更新的速度，可以減少 β 的值。理論上牛頓法的目標是要讓 \mathbf{d} 趨近於 0 才停止迴圈，但由上面說明知道 \mathbf{d} 不能讓他趨近 0，所以停止迴圈的條件要放寬。

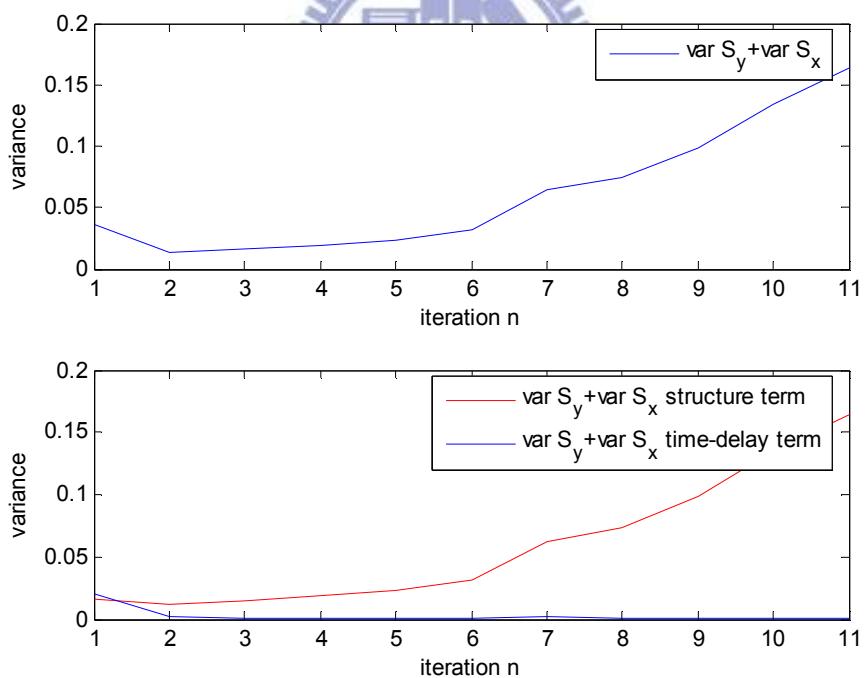
當然使用牛頓法一開始要有個初始值，不同的初始值收斂曲線和結果是會不一樣的，一開始使用的初始值是 $\min f(\mathbf{A}_{block}^{-1})$ 的結果。

假設在2維的環境聲源在(0,30)，圖七是經上面的方法跑出來的模擬，且停止迴圈的條件是 $\|s\| < 50$ ，*號代表初始值，•號代表每個iteration後的點， Δ 代表收斂時的值。



圖七、牛頓法收斂曲線及結果

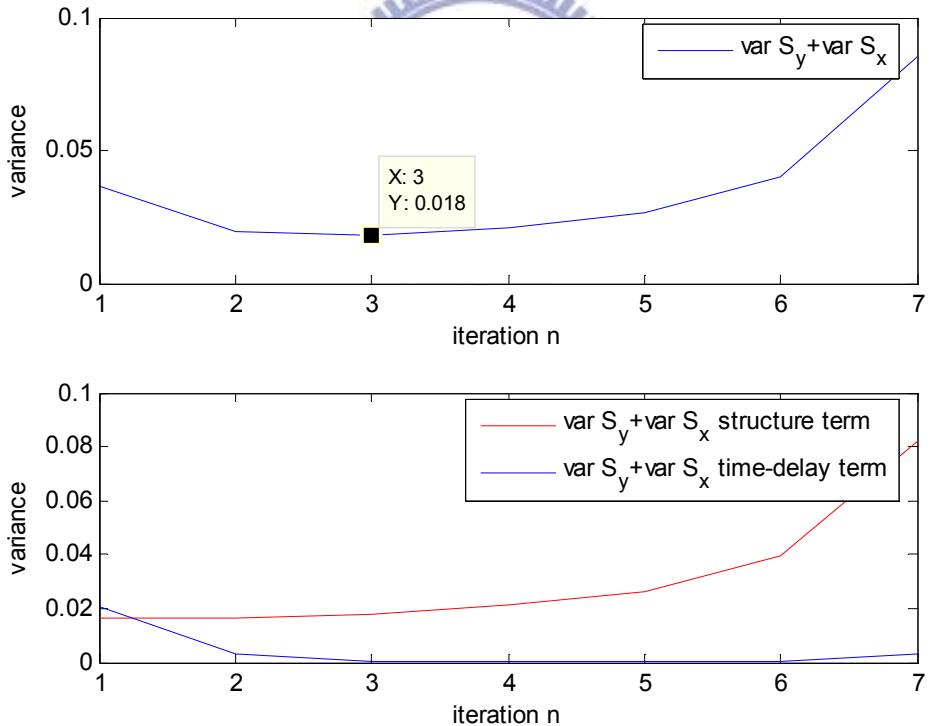
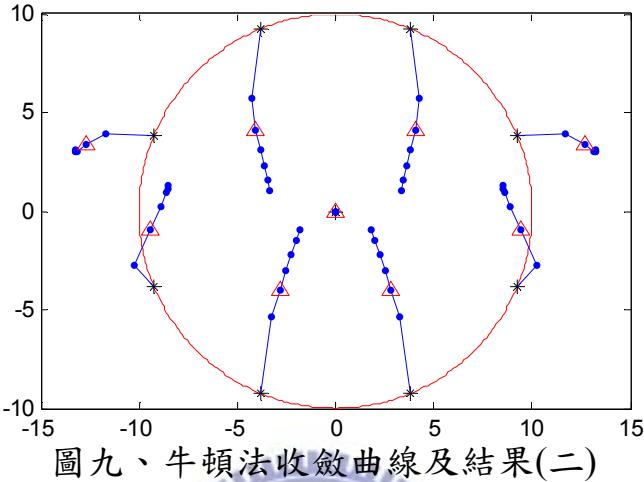
圖七很明顯的可以看出來，最後會收斂在一個圓弧周圍，但因為放寬了收斂條件，所以不會完全圓弧上。接著觀察主要重點的變異量：



圖八、牛頓法步驟的變異量曲線圖

圖八發現一旦麥克風分佈越接近一個圓弧，其structure term的變異量就會激增，這根推論的結果一樣，另一方面比較讓人驚訝的是time-delay term的影響下降的速度比想像的快，也就是 \mathbf{d} 的影響比想像中的小，只要讓他足夠小就有一定的效果。

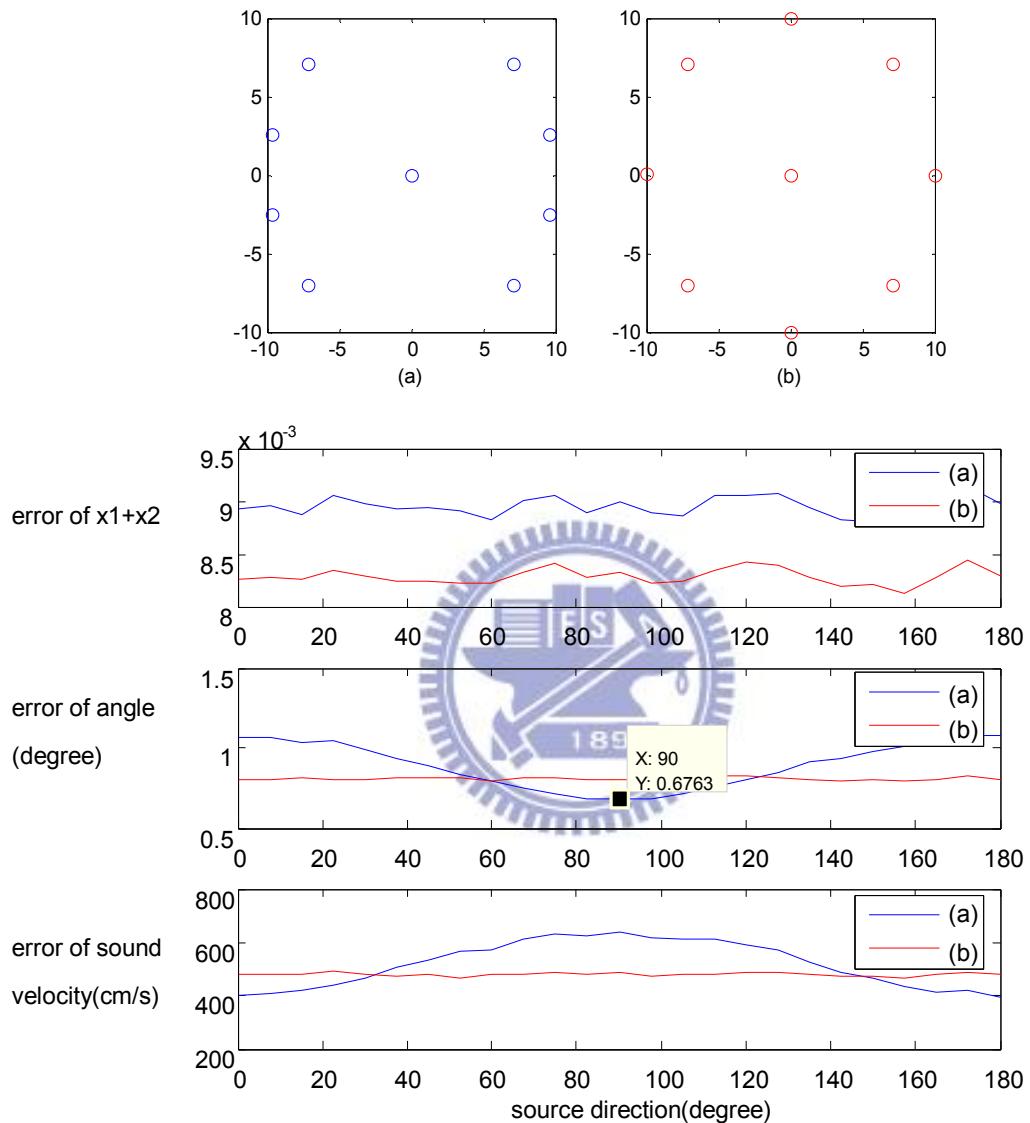
於是在看的出來要選的情況大概在2~4個iteration的時候，但在那個時候不一定會滿足 $|r_{2,k} - r_1|^4 + \dots + |r_{M,k} - r_1|^4 = K$ ，所以在程式中必須在每個iteration都在做一次normalize，重新在跑一次演算法。圖九中△標示為變異量最小時的麥克風位置。



亦可在選取的iteration附近減少 β 的值，讓更新的速度不要那麼快，有可能可以找到更好的位置。有normalize之後代表每個iteration中都有相同的變異量下界，也就是說初始值的structure term幾乎會是最小的，圖中也可看出有這個趨勢。圖十中選取iteration 3當作麥克風陣列的擺放位置。

3.3 模擬結果與分析

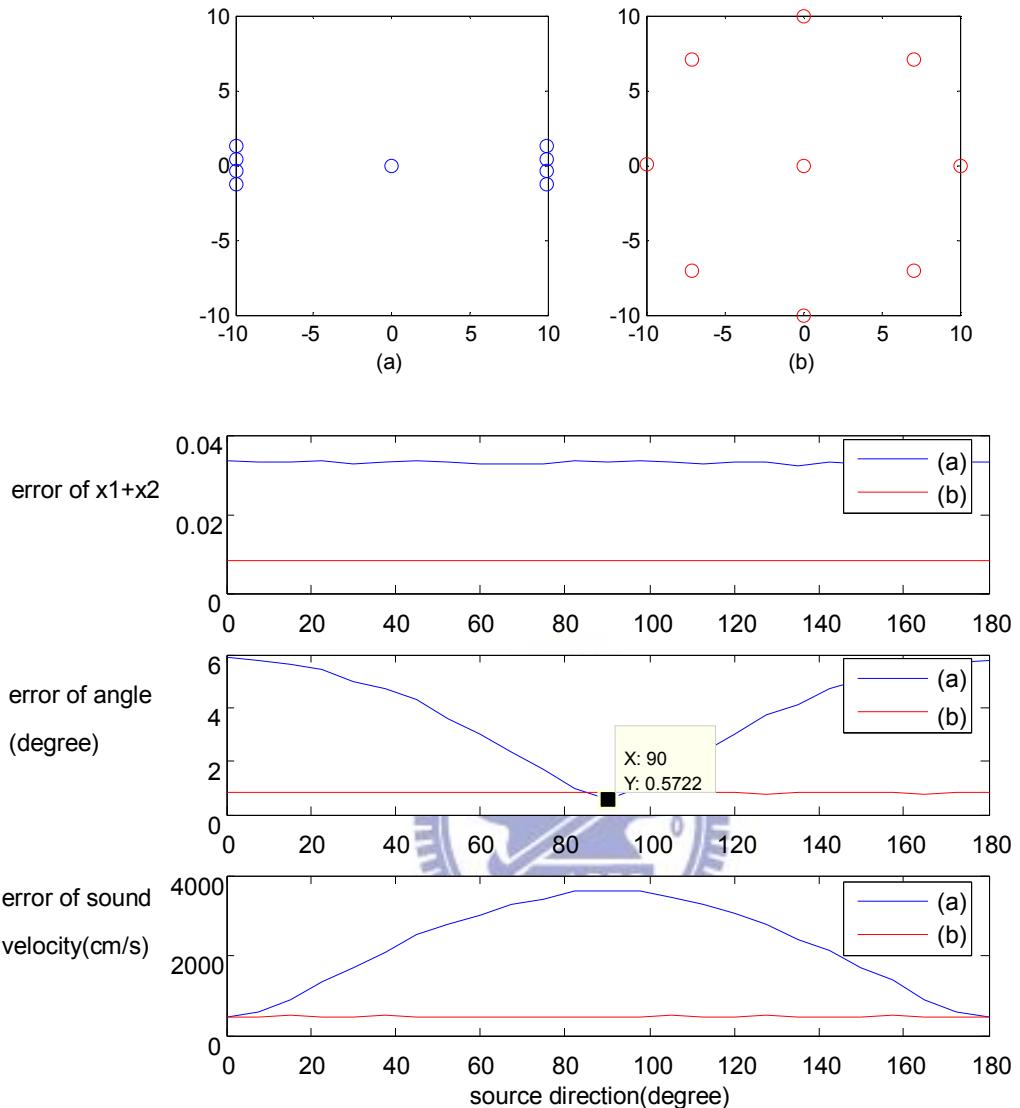
此小節分別展示遠聲場和近聲場下，不同的麥克風擺放方式下對聲源角度與方位估測的模擬。模擬假設聲速為34000cm/s



圖十一、遠聲場聲源下麥克風擺放對多方位來向聲源角度與聲速誤差(一)

在圖十一中要看的有幾個重點，可以看到如果陣列擺放呈(b)的形狀，會讓估測 x_1 跟 x_2 有最好的效果，圖中也可以看到(a)的形狀造成的誤差就會比較大，但根據推導，(a)是針對90度方向來的聲源所設計的陣列，圖八中可以看到(a)在90度附近對角度確實有較好的效果，經由之前推導，的確對聲速的估測會比較差。

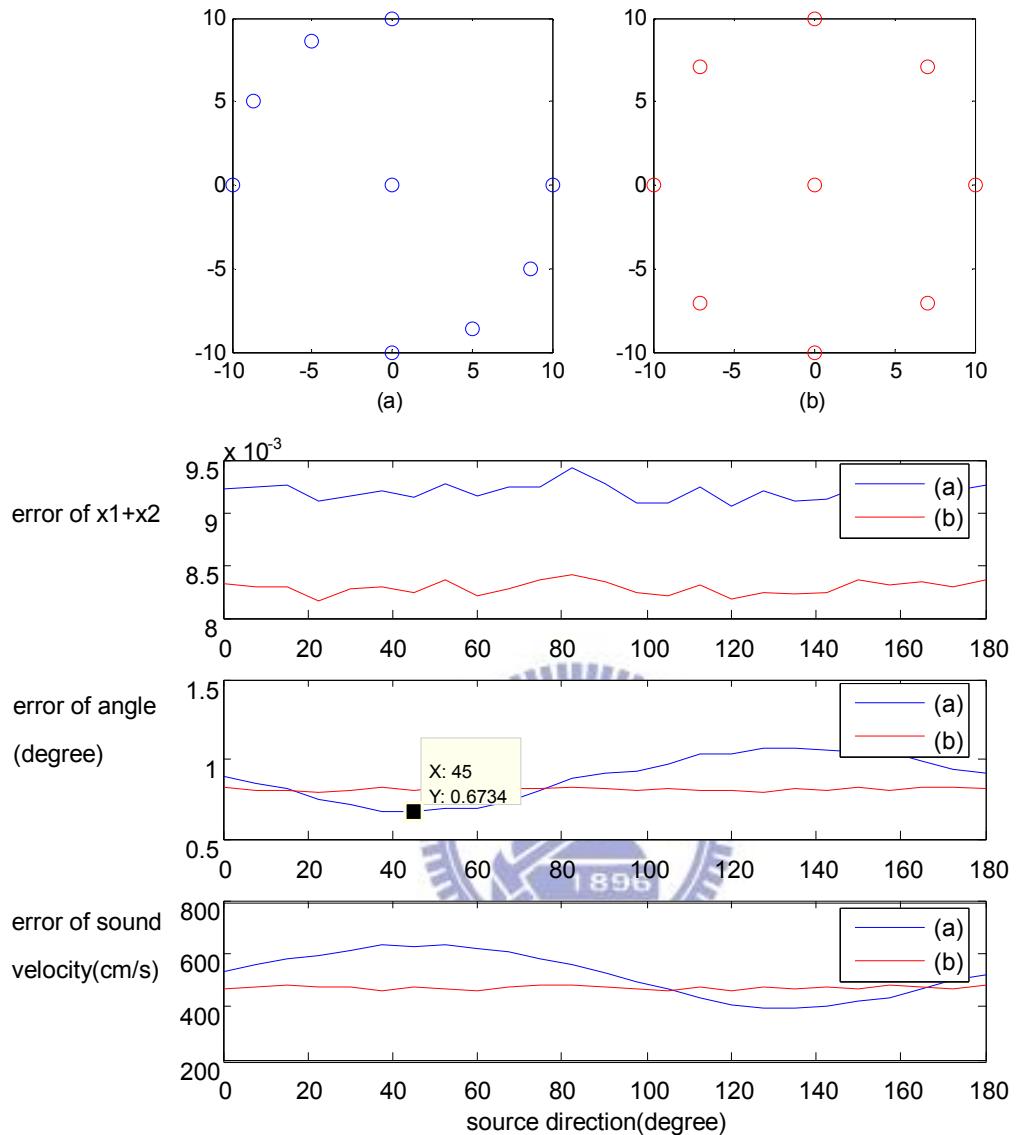
接著用更極端的例子在針對90度方向的聲源：



圖十二、遠聲場聲源下麥克風擺放對多方位來向聲源角度與聲速誤差(二)

圖十二中可以看到雖然在90度方向的誤差有變小，但對其他方向來的誤差卻是急速上升，不僅如此，在90方向的聲速估測也有很大的誤差，誤差大的幾乎會認定這聲速是有問題的，也就是說這樣的一個設計方式其實不是很好，改進了一點效果卻失去更多其他的估測準度。

如果現在聲源的來向是45度，則可以針對該方向設計一個陣列



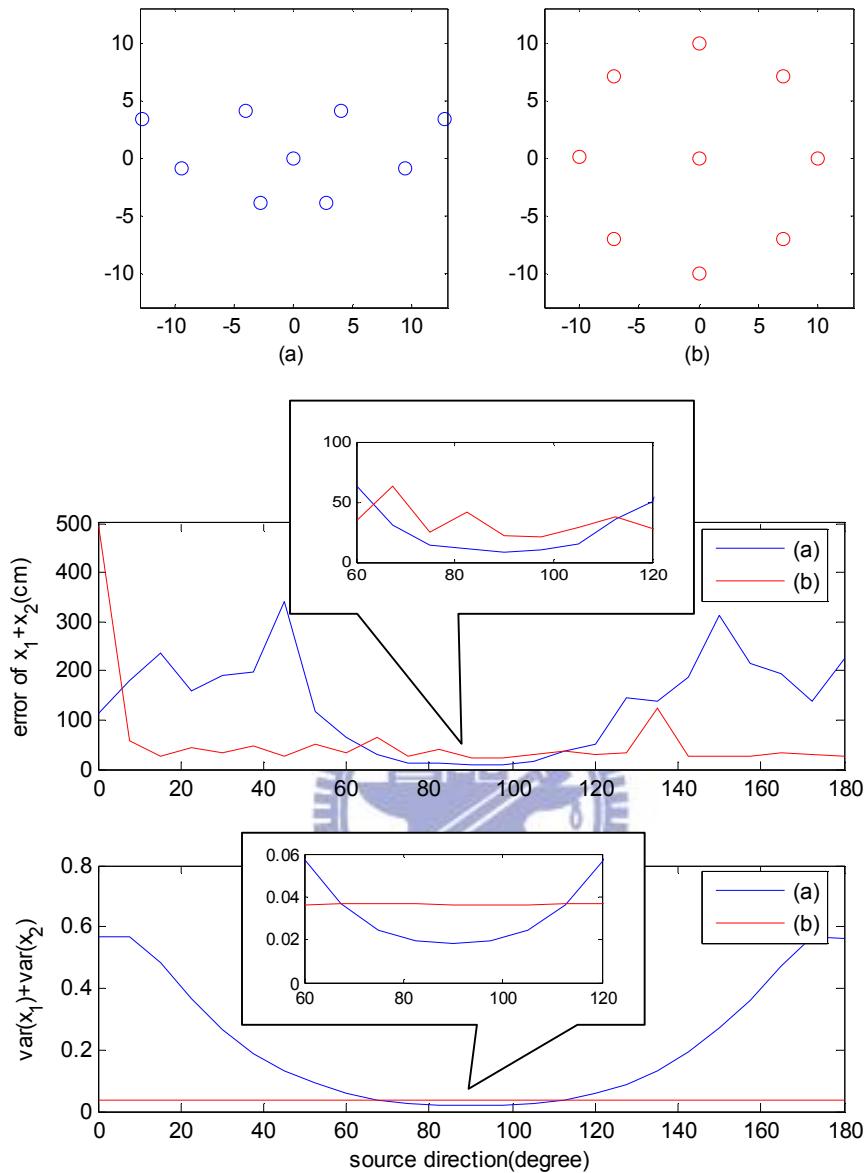
圖十三、遠聲場聲源下麥克風擺放對多方位來向聲源角度與聲速誤差(三)

圖十三中可以看出只要把原本設計的陣列轉一個角度會有一樣的效果。

以上是針對遠聲場的環境下模擬不同陣列形狀所造成的誤差，接著模擬在近聲場環境下的陣列。用來比較的兩個例子分別為 $\min f(\mathbf{A}_{block}^{-1})$ 的結果跟

$\min f\left(\frac{1}{k}\mathbf{A}_{block}^{-1}\mathbf{d}\mathbf{d}^T\mathbf{A}_{block}^{-1}\right)$ 結合牛頓法的結果

在這邊假設聲源距離第一顆麥克風為30公分，針對90度去設計陣列



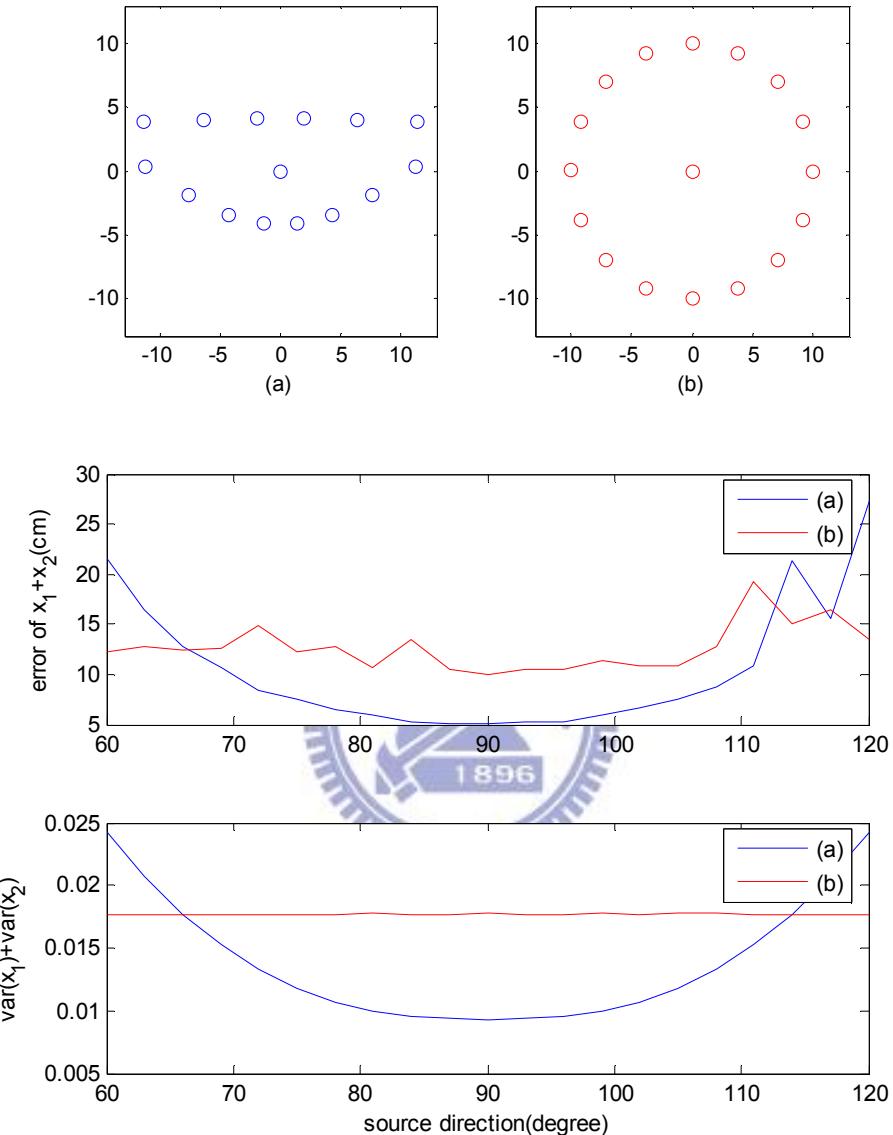
圖十四、近聲場聲源下麥克風擺放對多方位來向聲源的方位誤差(一)

可以看到針對(0,30)的聲音，相對於(a)的效果，(b)明顯起來有不少的改善，

Error of S (cm) $S = \sqrt{x^2 + y^2}$	75度	82.5度	90度	97.5度	105度
Error of S(a)	10.886	9.3236	7.6025	8.5557	11.708
Error of S(b)	20.227	37.015	19.988	18.386	23.184

表二、近聲場聲源下不同麥克風陣列對90度附近聲源的方位估測誤差(一)

一旦增加麥克風數量，會讓變異量越趨近最低下界，於是增加麥克風來模擬。



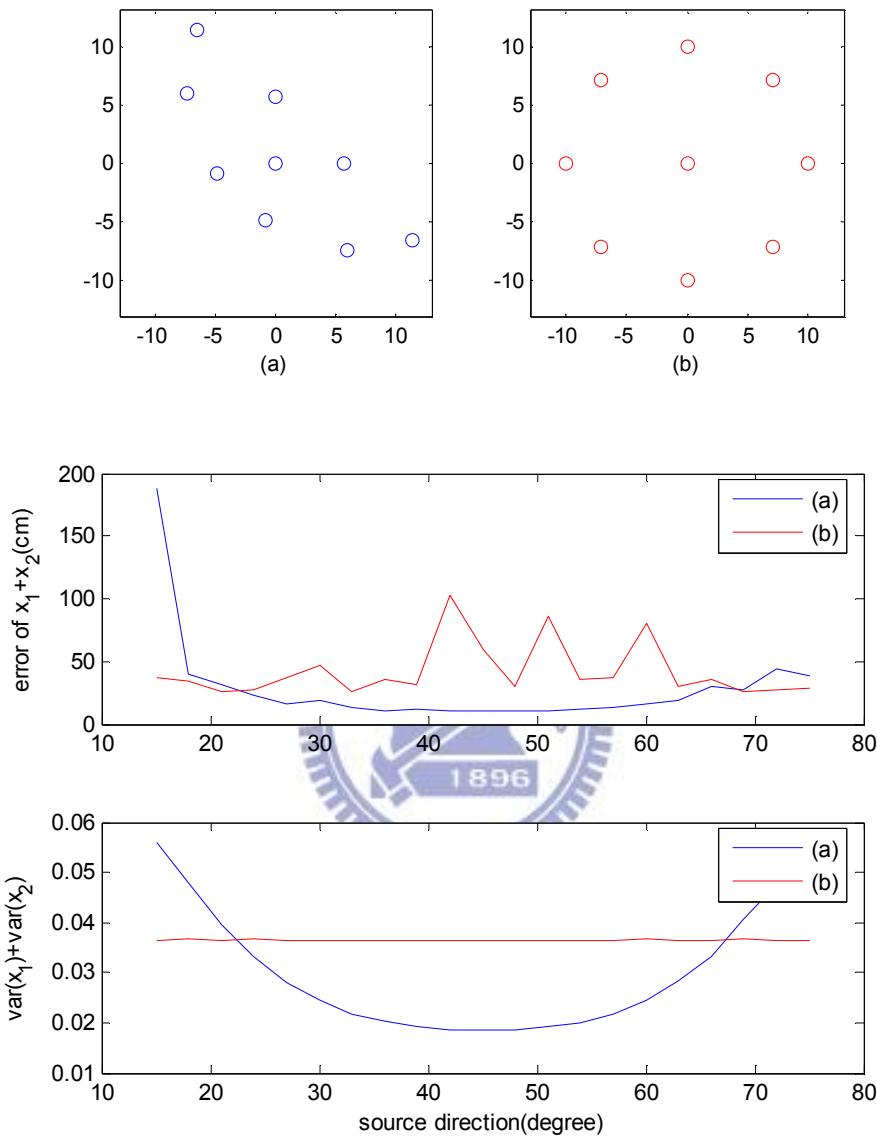
圖十五、近聲場聲源下麥克風擺放對多方位來向聲源的方位誤差(二)

Error of S (cm) $S = \sqrt{x^2 + y^2}$	78度	84度	90度	96度	102度
Error of S(a)	5.3299	4.5012	4.3602	4.4965	5.394
Error of S(b)	10.622	11.849	9.0799	9.2502	9.0589

表三、近聲場聲源下不同麥克風陣列對90度附近聲源的方位估測誤差(二)

可看到誤差很明顯的下降。

接下來對假設知道聲源為 $(30/\sqrt{2}, 30/\sqrt{2})$ ，也可以設計一套針對該聲源的陣列，以下模擬該情況。

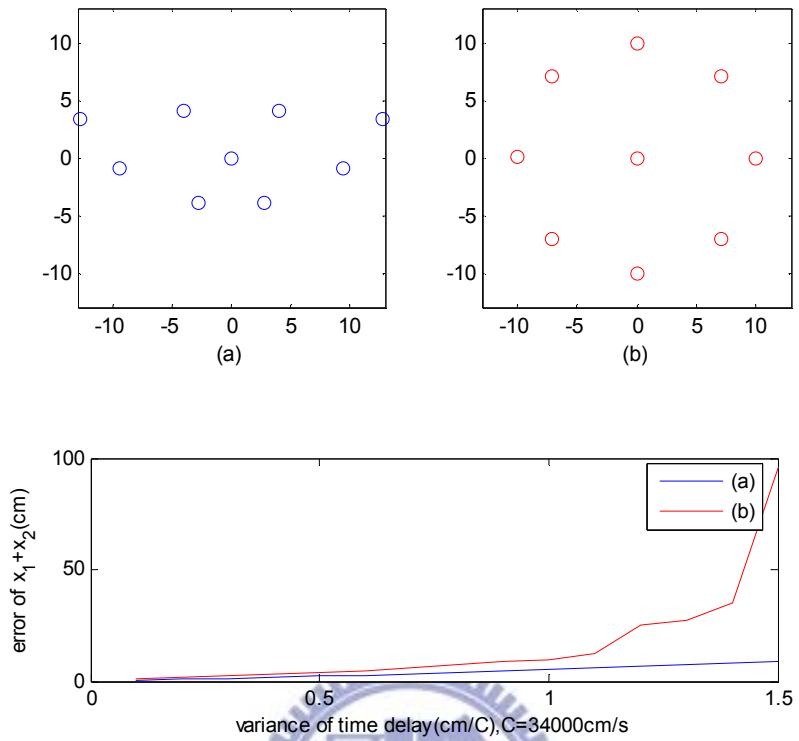


圖十六、近聲場聲源下麥克風擺放對多方位來向聲源的方位誤差(三)

Error of S (cm) $S = \sqrt{x^2 + y^2}$	33度	39度	45度	51度	57度
Error of S(a)	10.068	8.1797	7.1692	7.3981	9.782
Error of S(b)	18.616	22.392	42.215	60.559	26.357

表四、近聲場聲源下不同麥克風陣列對45度附近聲源的方位估測誤差(三)

接著我們分析在不同時間延遲誤差的變異量中，對方位估測的影響。



圖十七、近聲場聲源下不同時間延遲誤差

對兩種麥克風擺放對90度來向聲源的方位誤差圖

Error of S (cm) $S = \sqrt{x^2 + y^2}$	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4
Error of S(a)	0.7729	1.5961	2.4066	3.3172	4.2635	5.7651	7.143
Error of S(b)	1.2887	2.7089	4.2143	6.3676	8.7245	23.269	32.648

表五、近聲場聲源下不同time delay誤差

對兩種麥克風擺放對90度來向聲源的方位誤差表

可以看出來一但時間延遲估測的誤差增加，經調整設計過的陣列的誤差會比沒有的好很多。

第四章 結論與未來展望

本論文提出當方位估測變異量最小時，如何找出所相對應的麥克風陣列位置，利用所設計出來的陣列，對於全方位的聲源，有一套固定的陣列可以確保在任何角度都有相同的效果。若是知道聲音只從某個範圍來，可以更加進一步的設計專門的陣列，由模擬中可以看出對誤差會有很明顯的減少，對近聲場跟遠聲場各有一套設計的方法，本文對於多顆麥克風的聲源方位估測定義其麥克風應該擺放的位置。

當然本文只單單考慮位置對估測的影響，並沒有考慮到實際環境對時間延遲(time delay)估測的不準度，或是反射的問題，這些都有還有探討的空間。

在實際應用時還需要考慮空間上的問題，這套位置組合可能會因為它應用的地方會有一些擺放的限制，陣列的形狀還需要依環境做調整，但對之後需要使用聲源方位估測的相關研究，可以提供他們一個更好的估測結果。

Reference

- [1]. P. R. Roth, "Effective measurements using digital signal analysis," *IEEE Spectrum*, vol. 8, pp. 62-70, Apr. 1971.
- [2]. G. C. Carter, A. H. Nuttall, and P. G. Cable, "The smoothed coherence transform(SCOT)," *Naval Underwater Systems Center, New London Lab., New London Lab., New London, CT*, Tech. Memo TC-159-72, Aug. 8, 1972.
- [3]. G. C. Carter, A. H. Nuttall, and P. G. Cable, "The smoothed coherence transform," *Proceedings of the IEEE*, vol. 61, pp. 1497-1498, Oct. 1973.
- [4]. C. H. Knapp and G. C. Carter, "The generalized correlation method for estimation of time delay," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, ASSP-24(4):320-327, Aug. 1976.
- [5]. M. S. Brandstein, H. F. Silverman, "A Robust Method for Speech Signal Time-Delay Estimation in Reverberant Rooms," *ICASSP-97*, vol. 1, April 1997.
- [6]. K. Yao, R. Hudson, C. Reed, D. Chen, and F. Lorenzelli, "Blind beamforming on a randomly distributed sensor array system," *IEEE J. Select. Areas Comm.* 16, 8 (Oct. 1998), 1555–1567.
- [7]. J. C. Chen, K. Yao, T. L. Tung, C. W. Reed, and D. Chen, "Source localization and tracking of a wideband source using a randomly distributed beamforming sensor array," *International Journal of High Performance Computing Applications*, 16(3):52–65, August 2002.
- [8]. P. Stoica and J. Li, "Source localization from range-difference measurements," *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 23, pp. 63–65, 69, Nov. 2006.
- [9]. A. Beck, P. Stoica, and J. Li, "Exact and approximate solutions of source localization problems," *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56:1770–1778, 2008.
- [10] Alvarado, V. M., Silverman, H. F., "Experimental Results Showing the

Effects of Optimal Spacing Between Elements of a Linear Microphone Array", *ICASSP-90*, April 1990, pp. 837-840.

- [11] J. S. Abel, "Optimal sensor placement for passive source localization," in *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Albuquerque, NM, April 1990.
- [12]. B. Yang and J. Scheuing, "Cramer-Rao bound and optimum sensor array for source localization from time differences of arrival," *Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)* , vol. 4, pp. 961-964, Philadelphia, USA, 2005.
- [13]. B. Yang, "Different sensor placement strategies for TDOA based localization," in: *Proc. ICASSP*, vol. 2, pp. 1093–1096, Honolulu, Hawaii, USA, Apr. 2007.
- [14]. T. Hegazy and G. Vachtsevanos, "Sensor placement for isotropic source localization," in *Proceedings of the Second International Workshop on Information Processing in Sensor Networks*, Palo Alto, CA, April 2003.
- [15]. R. O. Nielsen, "Azimuth and elevation angle estimation with a three dimensional array," *IEEE J. Oceanic Eng.*, vol. 19, pp. 84–86, Jan. 1994.
- [16]. B. Berdugo, M. A. Doron, J. Rosenhouse, and H. Azhari, "On direction finding of an emitting source from time delays," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 105, No. 6, pp. 3355–3363, 1999.
- [17]. R. O. Schmidt, "Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation," *IEEE Transaction Antennas and Propagation*, vol. AP-34, no. 3, pp.276-280, March 1986
- [18]. 汪正剛, "多聲源方位偵測與聲源數量估算,"交大電控碩士論文, 2008
- [19]. L. Yu. Kolotilina, "Bounds for the extreme eigenvalues of block 2×2 Hermitian matrices," *Zap. Nauchn. Semin. POMI*, 301, 172–194 (2003).
- [20]. L. Yu. Kolotilina, "A class of optimally conditioned block 2×2 matrices," *Zap. Nauchn. Semin. POMI*, 284, 64–76 (2002).