

國立交通大學

土木工程研究所

博士論文

重力波之 Lagrangian 解析及
其與 Eulerian 近似解之相互轉換

Lagrangian Approach to Gravity Waves and
Two-way Transformations between Lagrangian and
Eulerian Approximations

The logo of National Central University (NCU) is a circular emblem with a blue border. Inside the circle, there is a stylized representation of a building or a gear-like structure. The year '1896' is inscribed at the bottom of the emblem.

指導教授：張憲國

研究生：劉勁成

中華民國九十四年六月

摘要

本文應用 Eulerian 與 Lagrangian 座標系統間的轉換關係，推導出在 Lagrangian 座標下均勻水深上規則前進重力波之控制方程式，並利用攝動展開技巧解析獲得五階解。本文所得 Lagrangian 近似解的質點運動週波率包含二部份，一部份為含深度 b 的 \cosh 函數，可表現質點運動的週波率隨深度增加而增加的特性；另一部份為不隨空間中任何一個位置點而改變的常數。本文進一步比較 Eulerian 及 Lagrangian 座標的波浪運動週波率的關係，發現本文的 Lagrangian 近似解的質點運動週波率可轉換至 Eulerian 座標下固定點觀測波動的週波率。由解析結果可知，Lagrangian 系統中奇數階近似解主要進行週波率修正，偶數階近似解主要進行高程修正，且由結果中可知，本文近似解可求得平均靜水位上的波壓。本文的 Lagrangian 近似解可描述流體質點運動軌跡於波動一週期後，不會封閉而有微量前進的質量傳輸量，且可表現上層質點運動軌跡的位移範圍較下層者大的特性。

本文接著探討 Lagrangian 與 Eulerian 兩種描述方式間的轉換關係。在相同攝動參數的選定下，本文探討本文提出的 Lagrangian 五階解與 Fenton (1985) Eulerian 五階解之間的轉換方法及結果。本文透過連續泰勒展開的方式，成功的將 Lagrangian 五階解轉換至 Fenton (1985) 的 Eulerian 五階解。在 Eulerian 解轉換至 Lagrangian 解方面，往昔學者在進行 Eulerian 三階解轉換至 Lagrangian 三階解時，會產生含時間的不合理結果，本文主要考慮 Lagrangian 週波率與 Eulerian 週波率之不同，首先提出對週波率進行轉換的概念，透過泰勒展開，成功的將 Fenton (1985) 的 Eulerian 五階速度轉換至 Lagrangian 五階流體質點運動軌跡，解決往昔學者無法將三階 Eulerian 解轉換至 Lagrangian 解的問題。由本文轉換結果可知，針對同一個波浪現象的兩種描述方式可以互相轉換。

最後，本文探討 Lagrangian 與 Eulerian 兩種描述方式動力特性間的關係。本文首先由動力特性的基本定義，獲得 Eulerian 系統的動力特性至第四階解，並符合 Longuet-Higgins (1975)動力特性間的關係。本文同時探討有限振幅波與微小振幅波能量傳遞速度的關係，發現波浪非線性交互作用會增加波浪能量傳遞速度，且較微小振幅波理論高。本文接著透過 Jacobian 轉換，求得 Lagrangian 系統的動力特性至第四階解，並將此結果與 Eulerian 系統的動力特性比對，而有 Lagrangian 與 Eulerian 系統的動力特性公式相同。本文主要的學術貢獻為推導出 Lagrangian 五階近似解，並證明 Eulerian 與 Lagrangian 兩種解析結果可以互相轉換，且其波浪的動力特性皆相同。



ABSTRACT

A set of governing equations in Lagrangian form transformed from the Eulerian system was derived for the propagating gravity waves in water of uniform depth in this paper. The technique of Lindstedt-Poincaré perturbation method was used to obtain the approximations up to fifth-order for these nonlinear governing equations. The Lagrangian frequency of the present solution consists of two parts. One part is a function of depth and increases as the water depth increases. The other part is constant for all particles and equivalent with that of Stokes' wave theory of third-order. The present Lagrangian solution for the particle motion shows that the water particle has a drift displacement of second order, which decreases exponentially with water depth, after a period of time. The pressure of the present solution has zero value at the free surface and this exactly satisfies the dynamic boundary condition.

This study investigates two-way transformations between the Eulerian and Lagrangian solutions for gravity waves propagating on a uniform depth. The Eulerian and Lagrangian fifth-order approximations with the same perturbation parameter are used to examine such possibility. Up to now, it is known that the Eulerian solution of Stokes waves up to the third order cannot be transformed into the corresponding Lagrangian solution. A key to resolve this problem is to recognize the fact that the Lagrangian frequency is not constant with water depth. With this correction, two-way transformations between the Lagrangian and Eulerian solution are shown to be possible.

The dynamic properties of regular gravity waves are obtained using both Eulerian and Lagrangian approximations, based on the fundamental

definition. Both obtained results are identical and satisfy some possible relationships between these dynamic properties. The energy transport velocity of high waves are demonstrated to be greater than that of low waves which can be also represented by the group velocity. The main academic contributions of the paper are that the Lagrangian approximations to the gravity wave are systematically derived, and two-way transformations between the Lagrangian and Eulerian governing equations and solutions are successfully obtained, and high order dynamic properties are first obtained.



誌謝

求學期間，承蒙恩師張憲國教授在為人處事，治學態度上之諄諄教誨與潛移默化，使我在研究生涯中受益匪淺，在此謹致由衷之謝忱與敬意。論文寫作期間，特別感謝陳陽益教授對本文之精神鼓勵、觀念澄清與提供重要參考資料，使本文更加完整豐富。論文口試時，承蒙林銘崇教授、黃良雄教授、李兆芳教授、林西川教授、陳陽益教授、郭一羽教授及吳永照教授提供寶貴意見與指導，使本文更趨完善，特此銘謝。

感謝研究室的伙伴們，在研究期間對於研究計畫的協助及好友們在研究上的幫忙與鼓勵，因為有你們的陪伴，使得求學的生涯更加多采多姿。

父母、愛妻及兄嫂們長期的關懷是我研究旅途上最大的精神支柱，感謝您們在這些日子的支持與鼓勵，使我得以順利完成學業，僅以本文獻給您們。



目錄

中文摘要.....	I
英文摘要.....	III
誌謝.....	V
目錄.....	VI
圖目錄.....	VIII
表目錄.....	IX
符號說明.....	X
第一章 前言.....	1
1-1 研究目的	1
1-2 文獻回顧	2
1-3 研究課題	5
第二章 Lagrangian攝動近似解.....	8
2-1 控制方程式	8
2-2 理論解析	12
2-2-1 第一階近似解	13
2-2-2 第二階近似解	15
2-2-3 第三階近似解	19
2-2-4 第四及第五階近似解	22
2-3 解析解之印證	24
2-3-1 正確性之印證	24
2-3-2 連續方程式的檢驗	27
2-4 結果與討論	27
2-4-1 波浪週波率	27
2-4-2 波形	28
2-4-3 波壓	29

2-4-4 流體質點運動軌跡	30
2-4-5 質量傳輸速度	32
第三章 Eulerian與Lagrangian近似解的轉換	39
3-1 Lagrangian解轉換至Eulerian解	39
3-2 Eulerian解轉換至Lagrangian解	45
第四章 Eulerian與Lagrangian近似解的動力特性	56
4-1 Eulerian近似解的動力特性	56
4-2 Lagrangian近似解的動力特性	59
第五章 結論	63
參考文獻	66
附錄A 第二種限制條件下的解析結果	71
附錄B 第三種限制條件下的解析結果	79
附錄C 第三至五階解析結果的係數	89
附錄D Lagrangian流速勢的係數	95



圖目錄

圖 1-1 本文探討主題	7
圖 2-1 波形的五階近似解與數值解之比較($h/L=0.2$, $H/L=0.114$)..	29
圖 2-2 第五階波壓隨水深變化圖($h/L=0.2$, $H/L=0.08$).....	30
圖 2-3 不同深度第三階及第五階流體質點的運動軌跡($h/L=0.2$, $H/L=0.08$)	31
圖 2-4 不同深度第五階流體質點的運動軌跡($h/L=0.2$, $H/L=0.08$)	32
圖 2-5 第二階及第四階質量傳輸速度分佈($h/L=0.2$, $H/L=0.114$)..	35
圖 2-6 自由表面處四階與二階質量傳輸速度的比值	36
圖 2-7 底部四階與二階質量傳輸速度的比值	37
圖 2-8 四階與二階質量傳輸速度分佈曲線相交點的變化.....	38
圖 4-1 不同波高之能量傳遞速度與微小振幅波理論值之比值 ($T_E=8\text{sec}$, $h=5\text{m}$, $h/L\approx 1/11$).....	58

表目錄

表 2-1 五階解在控制方程式的誤差階數指標	26
表 2-2 深水波於自由表面處質量傳輸速度的比較	33



符號說明

c	波速
E_E	波浪總能
E_{kE}	Eulerian 平均動能
E_{kL}	Lagrangian 平均動能
E_{pE}	Eulerian 平均位能
E_{pL}	Lagrangian 平均位能
F_E	Eulerian 平均能通率
F_L	Lagrangian 平均能通率
g	重力加速度
H	波高
H_{\max}	極限波高
h	平均水深
I_E	Eulerian 平均動量
I_L	Lagrangian 平均動量
J	Jacobian 運算
k	波數
L	波長
P	流場中之壓力
P_E	Eulerian 平均總動壓
P_L	Lagrangian 平均總動壓
R	伯努力常數
S_E	Eulerian 輻射應力
S_L	Lagrangian 輻射應力
T_E	Eulerian 週期
T_L	Lagrangian 週期



$T_L(0)$	自由表面處之 Lagrangian 週期
U_M	質量傳輸速度
$U_M(0)$	自由表面處之質量傳輸速度
$U(x, y, t)$	Lagrangian 系統中流體質點之水平速度
$u(x, y, t)$	Eulerian 系統中 (x, y) 處之水平速度
\vec{V}	水粒子速度向量
V_e	能量傳遞速度
$V(x, y, t)$	Lagrangian 系統中流體質點之垂直速度
$v(x, y, t)$	Eulerian 系統中 (x, y) 處之垂直速度
x	水粒子運動軌跡之水平分量
y	水粒子運動軌跡之垂直分量
\bar{y}	流體質點於空間中之平均位置
Z_E	Eulerian 高程
Z_L	Lagrangian 高程
ε	攝動參數
ε_i	不同攝動參數值 ($i = 1, 2$)
η	變動水位
ρ	流體密度
Φ	Lagrangian 流速勢
ϕ	Eulerian 流速勢
σ_E	Eulerian 週波率
σ_L	Lagrangian 週波率
$\sigma_L(0)$	自由表面處之 Lagrangian 週波率
θ_E	Eulerian 位相函數
θ_L	Lagrangian 位相函數



第一章 前言

1-1 研究目的

海洋之水面隨著空間及時間而變化，該變化的水面會導致海水內水粒子運動及水壓變動等現象，此現象為研究海洋科學及海岸專家學者探討的古典力學機制的範疇。平底床上規則波浪理論是個古典的問題，描述流體運動狀態的數學解析有 Lagrangian 方法和 Eulerian 方法兩種。Lagrangian 方法為觀測各個特定的流體質點，來描述該流體質點於其運動路徑上之運動行為；而 Eulerian 方法為在空間各個固定的位置上，描述流場之時空特性。從數學的觀點，以 Eulerian 方法研究流體力學較 Lagrangian 方法簡易，故一般常採用 Eulerian 方法來探究流場的特性(見 Pao, 1967)。

自 Airy (1845) 省略波浪的非線性量，提出微小振幅波理論。Stokes (1847) 利用攝動解析的技術，解析等水深有限振幅波的問題。爾後有關波浪問題幾乎多採用 Eulerian 座標系統，至今，理論解析部份已推展到五階解(如 Skjelbreia 和 Hendrickson, 1960; Isobe 等人, 1978; Fenton, 1985)。然而，由於 Eulerian 方法為觀測空間中之固定位置，並不能正確地轉換成可描述出各個流體質點於時空中的運動軌跡的形式(見陳, 1996)。若採用 Lagrangian 座標來描述前進重力波，可處理波動流場有污染源擴散(如陳等人, 1998)，及波浪於斜坡底床上造成波形的變形不對稱的問題(如 Biesel, 1951; 陳, 1997; 陳和黃, 2000)，且由於完全滿足邊界條件，而可求出平均水位上的波壓，此為 Eulerian 解所無法表現的限制。雖然 Lagrangian 方法的解析較採用 Eulerian 方法複雜，但 Lagrangian 方法具有可描述質點運動軌跡的優點。本文嘗試以 Lagrangian 方法解析波動場中流體質點的運動路徑。

Truesdell (1953)提出 Eulerian 座標系統與 Lagrangian 座標系統的微分的轉換關係，透過此轉換關係可知，Eulerian 系統與 Lagrangian 系統間的控制方程式可互相轉換。Eulerian 與 Lagrangian 系統雖然描述方式不同，但皆是在描述同一個波浪現象，因此，這兩種描述方式之特性是否具有關係，應值得探討。故此兩種控制方程式，經過相同攝動參數及攝動方法所獲得之各物理之解，是否能轉換是本文探討的另一主題。

波浪有水位起伏及水粒子運動，即有能量存在，而波浪在運動及有壓力變化時，就會產生運動量，此種物理量不能直接觀察。且當波浪在運動時會將各物理量沿波浪進行方向傳遞，即產生各物理量的通率，一般稱此種物理量及其通率為動力特性，動力特性為研究判斷波浪各種變化的根據，故研究波浪的動力特性亦是一個重要的課題。

本文研究主要目的為探討水平底重力規則波之 Lagrangian 解析，並提出與 Eulerian 解析完整的相互轉換方式，以解決往昔兩種方法解析波動無法轉換之問題。本文探討主題分為解析 Lagrangian 近似解，並說明波動之運動特性，接著探討 Eulerian 與 Lagrangian 近似解間的轉換方法，最後比較 Eulerian 與 Lagrangian 近似解動力特性的差異性。期望藉此基本研究，以 Eulerian 與 Lagrangian 兩種不同座標系統下，對水平底床有限振幅波的運動與動力特性進行完整的探討。

1-2 文獻回顧

在 Lagrangian 座標系統的理論解析方面，由於 Lagrangian 方法描述波浪問題的控制方程式皆為非線性，理論解析較為困難，故相關的探討文獻並不多。von Gerstner (1802)由幾何學及運動學的觀點，首先提出以 Lagrangian 方法來解析波浪運動現象，其解即所謂的餘擺線波理論(trochoidal wave)，爾後 Rankine (1863)亦利用 Lagrangian 方法導

出完全相同的理論，但是二者均為第一階線性解，而僅適用於深海中之波動。Gaillard (1904)提出有限水深規則波的 Lagrangian 方法的線性解。Miche (1944)採用 Lagrangian 座標系統的連續方程式及 x 、 y 方向的運動方程式，結合自由表面及底床邊界條件，探討有限均勻等水深中之波動現象，並在假設流體質點從起始位置開始運動的位移量很小的情況下，分別對 x 、 y 方向的質點運動軌跡及壓力進行攝動展開，而求得波動場之二階解，同時在限制旋轉量為零及垂直方向質量守恆的條件下，求得質量傳輸速度隨深度變化的特性。Moe 等人(1998)根據 Miche (1944)的推導方式，求出在有限水深下的二階 Lagrangian 波浪解，並將理論結果與實驗值相比較。上述以 Lagrangian 座標系統描述的波動問題所得之研究結果，其流體質點的運動皆為旋轉性，故與理想流體的非旋轉性的基本假設互相矛盾，且由於未對週波率進行攝動展開，故無法表現不同深度下質點運動的週波率隨深度增加而增加的特性。

陳(1994a)在 Lagrangian 系統中，將運動方程式透過 Weber 轉換轉成能量方程式，並在流速勢的定義下，推導出非旋轉流條件。在同時考慮連續方程式、能量方程式、非旋轉流條件及自由表面和底部邊界條件下，對 x 、 y 方向的質點運動軌跡、壓力、流速勢及週波率進行攝動展開，求得非旋轉性重力波動場至三階解。其解析結果與往昔最大的不同，在於其滿足了理想流體非旋轉的特性，且因考慮了週波率的攝動展開，而可表現出週波率於不同深度下的變化特性。陳(1994b)進而將其結果展開至第五階解。除了解析水平底波動的 Lagrangian 解外，尚有 Biesel (1951)與陳(1997)解析出微小振幅前進波於斜坡上的 Eulerian 解，並將其結果轉移成 Lagrangian 形式，用以表現斜坡上波形的不對稱特性。陳和黃(2000)直接解析斜坡上前進波的 Lagrangian 解，但由於解析過程中忽略波浪的非線性部份，故其解仍

僅適用於微小振幅波浪。另外，Pierson (1962)推導出 Lagrangian 的 Navier-Stokes 方程式，並求得其波動場的第一階線性解，探究深水中的自由表面前進重力波受黏滯性的影響。

往昔學者的探討在 Eulerian 與 Lagrangian 近似解的轉換方面不多。Longuet-Higgins (1953)利用泰勒展開的方式，將 Eulerian 速度解轉換至 Lagrangian 速度解，並對其取時間平均，以求得質量傳輸速度，但僅能對二階 Eulerian 速度解進行轉換，而求得二階的質量傳輸速度，在進行第三階 Eulerian 速度解的轉換時，會產生隨時間成長的不合理 Lagrangian 三階速度解。陳(1996)探討 Eulerian 三階解與 Lagrangian 三階解間的轉換關係，並首先提出 Lagrangian 解轉換至 Eulerian 解的方式，結果顯示，Eulerian 解在第三階無法轉換至 Lagrangian 解，亦會產生不合理的時間項，而 Lagrangian 三階解可成功轉換至 Eulerian 三階解。

在探討波浪的動力特性方面，往昔學者已有相當多的研究(如 Lighthill, 1965; Peregrine 和 Thomas, 1979; Jonsson 和 Arneborg, 1995; Jonsson 和 Steenberg, 1999)。傳統上，在探討波動場之動力特性，皆是採用 Eulerian 近似解，依照基本定義求取平均動量、平均動能、平均位能、輻射應力、平均總動壓及平均能通率，爾後，部份學者推導出各動力特性間之關係 (如 Longuet-Higgins, 1975; Cokelet, 1977; Rienecker 和 Fenton, 1981; Sobey 等人, 1987; Klopman, 1990)。而動力特性間的關係亦可作為求得動力特性結果的正確性檢驗(如 Jonsson 和 Steenberg, 1999)。Eulerian 與 Lagrangian 系統雖然描述方式不同，但皆是在描述同一個波浪現象，故此兩種描述方式之動力特性是否具有關係，便顯的非常重要。陳(1995)首先比較前進重力波與重力駐波 Eulerian 與 Lagrangian 近似解的動力特性，但仍僅限於第二階量。由

陳(1995)的比較結果可知，Eulerian 與 Lagrangian 近似解至第二階量的動力特性公式是相同的。

1-3 研究課題

本文的欲探討主題示如圖 1-1 之流程。圖 1-1 中打問號的部分為本文欲解析或證明的部分。本文主要探討針對水平底床下有限振幅波的物理現象，描述該現象的 Eulerian 與 Lagrangian 系統，其控制方程式是否可相互轉換，並進行 Lagrangian 近似解的解析。接著瞭解針對同一個波浪現象的兩種描述方式是否可以互相轉換，故將進行 Eulerian 與 Lagrangian 近似解的轉換研究。最後為了瞭解同一個波浪現象下，兩種描述方式的動力特性之間的差異，於是將分別求解出 Eulerian 與 Lagrangian 系統中的動力特性，並進行比較。透過如此的研究，我們可以瞭解針對同一個物理現象，採用不同系統來描述，其間的差異與其優缺點。

在 Lagrangian 座標系統的理論解析方面，雖然往昔學者已有應用 Lagrangian 方法解析斜坡波浪運動及黏滯性波動的研究，然而對於最基本的水平底床上的波動問題，除陳(1994a, b)外，早期的研究僅為低階解，或甚至僅適用於深水情況，但對於有限水深適用於波動非線性的高階解的解析技巧及對波動特性的描述尚沒有系統而完整的探討。本文第二章乃針對有限水深水平底床上規則重力波的 Lagrangian 特性的問題，首先應用 Eulerian 與 Lagrangian 座標系統之間的轉換關係，將一般常用的均勻水深上非旋轉性重力波的 Eulerian 控制方程式轉換至 Lagrangian 系統的控制方程式，簡化直接由 Lagrangian 系統中推導控制方程式的複雜性，再利用攝動展開技巧，進行理論解析，由於在 Eulerian 系統中，往昔學者皆解析至第五階解，於是為了 Lagrangian 系統的完整性，且方便第二部份進行系統轉換上各階量的

比較，本文亦將解析至第五階解。接著探討 Eulerian 與 Lagrangian 兩種不同觀點下，波浪週波率、波形及波壓的關係，最後再探討流體質點在不同深度下水平位移的特性及質量傳輸速度。

在 Eulerian 與 Lagrangian 近似解的轉換方面，往昔學者對於三階 Eulerian 解，尚無法成功轉換至合理的 Lagrangian 解。本文第三章將針對有限水深水平底床上規則重力波的問題，在相同攝動參數的考慮下，首先應用陳(1996)將 Lagrangian 解轉換至 Eulerian 解的轉換技術，驗證本文所提出 Lagrangian 五階解是否可以轉換至 Fenton (1985)的 Eulerian 五階解，接著解決高階 Eulerian 解無法轉換至 Lagrangian 解的問題。

在探討波浪的動力特性方面，往昔學者雖然已有探討 Eulerian 與 Lagrangian 近似解的動力特性，但僅限於第二階解，對於高於二階近似解的部份尚無法確認兩種描述方式之間的關係。本文第四章首先應用 Fenton (1985)的 Eulerian 近似解求得 Eulerian 系統的動力特性至第四階量，並應用 Longuet-Higgins (1975)所提出動力特性的關係來檢驗動力特性的正確性。接著應用本文的 Lagrangian 近似解求得 Lagrangian 系統的動力特性至第四階量，並加以比對此兩種描述方式動力特性間之關係。

第五章為對本文所歸納出的綜合結論。

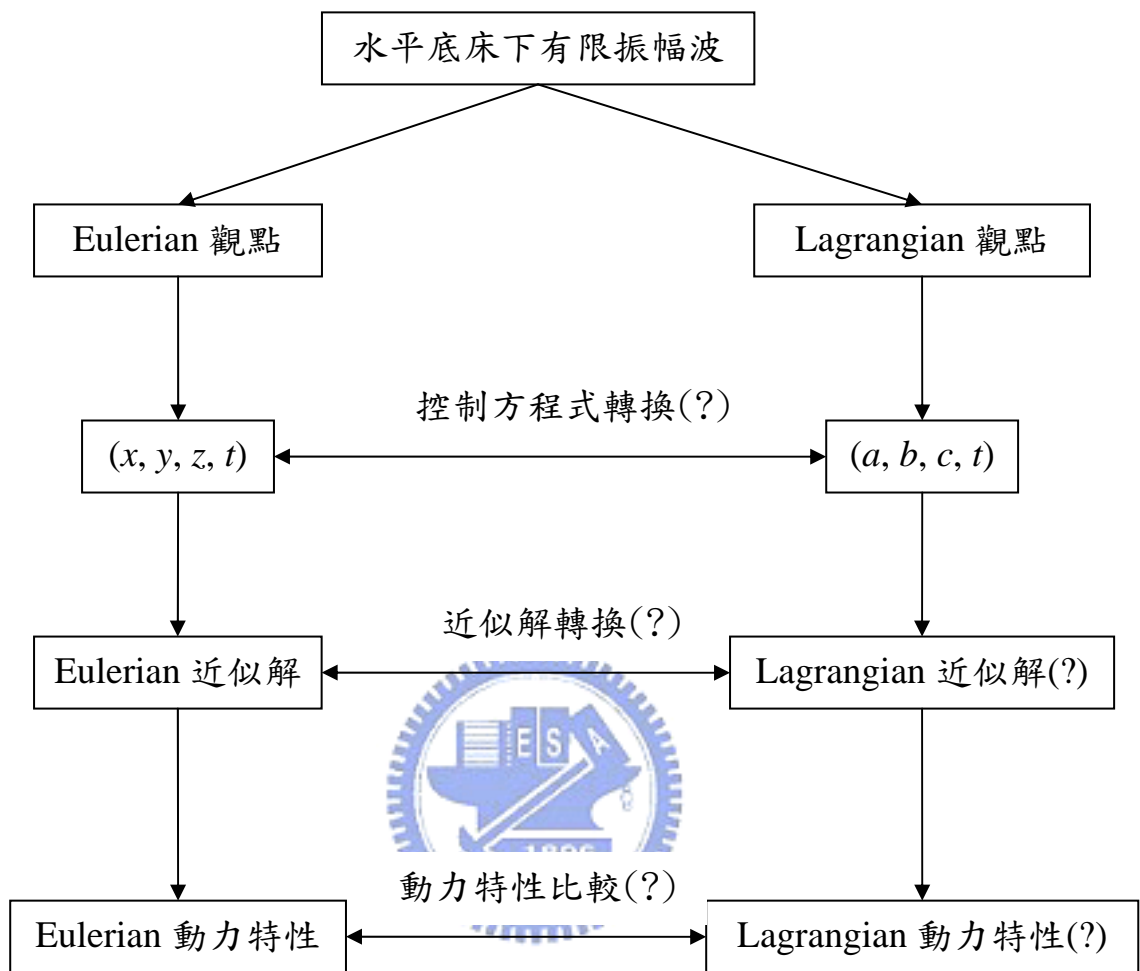


圖 1-1 本文探討主題

第二章 Lagrangian 攝動近似解

2-1 控制方程式

在均勻等水深中，二維非旋轉性的自由表面規則前進重力波向卡氏座標(Cartesian coordinate)之正 x 軸前進，選擇此座標的 x 軸恰位於平均水位上且 y 軸向上為正， h 為平均水深， η 為變動水位。波浪的波長與週期分別為 L 與 T_E ，下標 E 代表 Eulerian 座標系統，而所對應的波數與週波率分別為 $k = 2\pi/L$ 與 $\sigma_E = 2\pi/T_E$ 。

1. 連續方程式

考慮流體為不可壓縮流體時，Eulerian 座標描述的連續方程式 (continuity equation) 為

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2-1)$$

式(2-1)中 $\nabla = (\partial/\partial x\vec{i}, \partial/\partial y\vec{j})$ 為空間的散度運算子(divergence operator)， $\vec{V} = (u\vec{i}, v\vec{j})$ 為水粒子速度向量。Truesdell (1953) 提出 Eulerian 座標系統與 Lagrangian 座標系統的微分的轉換關係為

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{J} \frac{\partial(u, y)}{\partial(a, b)}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{J} \frac{\partial(x, u)}{\partial(a, b)} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{J} \frac{\partial(v, y)}{\partial(a, b)}, & \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{J} \frac{\partial(x, v)}{\partial(a, b)} \end{aligned} \quad (2-2)$$

其中 $J = \partial(x, y)/\partial(a, b)$ 為 Jacobian 運算，表示體積膨脹率(dilatation)，而 (a, b) 為 Lagrangian 座標系統中的獨立變數，用來描述任一特定流體質點在某一時間的位置。將式(2-2)代入式(2-1)可得

$$\frac{1}{J} \frac{\partial(u, y)}{\partial(a, b)} + \frac{1}{J} \frac{\partial(x, v)}{\partial(a, b)} = \frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial t} = 0 \quad (2-3)$$

式(2-3)為 Eulerian 座標轉換至 Lagrangian 座標之連續方程式。由式(2-3)右式的 Jacobian 值對時間微分為零，代表其物理意義為體積膨脹率不

隨時間變化。在質量守恆定律下，當密度不變的不可壓縮流體，其體積必需保持固定不變，因此微小控制體的體積對時間的微分必等於零。

同樣的，依照質量守恆的原則，以 Lagrangian 座標描述不可壓縮流體的連續方程式為(見 Lamb (1945)第 16 節)

$$\frac{\partial(x(a,b,t), y(a,b,t))}{\partial(a,b)} = \frac{\partial(x(a,b,0), y(a,b,0))}{\partial(a,b)} \quad (2-4)$$

因為式(2-4)中等號右邊項為代入起始時間 $t=0$ 的 Jacobian 值，此值不為時間的函數且等於等號左邊任何一時間的 Jacobian 值，所以得知任何時間的 Jacobian 值應與時間 t 無關。式(2-4)代表 Lagrangian 座標系統下不可壓縮流體的質量守恆方程式之物理意義與式(2-3)經由座標轉換所得之連續方程式的結論是相同的。



2. 非旋轉流條件

以 Eulerian 座標描述質點運動的非旋轉流條件為速度的外積 (cross product) 為零，即為

$$\nabla \times \vec{V} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (2-5)$$

同樣地，利用式(2-2)的轉換關係式可得以 Lagrangian 座標系統描述的非旋轉流條件為

$$\frac{1}{J} \frac{\partial(v, y)}{\partial(a, b)} - \frac{1}{J} \frac{\partial(x, u)}{\partial(a, b)} = 0 \quad (2-6)$$

3. 運動方程式

若同時在不可壓縮流體及非旋轉流的兩個假設，流場的運動特性主要受壓力及重力之平衡影響，黏滯力並不發生於流場中，因此流體質點的動量方程式(momentum equation)為

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2-7a)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (2-7b)$$

其中 ρ 為流體的密度， g 為重力加速度， P 為流場中之壓力。由於系統之獨立變數為 a 、 b 、 t ，於是將式(2-7a)乘上 x_a 與式(2-7b)乘上 y_a 後相加；同樣地，將式(2-7a)乘上 x_b 與式(2-7b)乘上 y_b 後相加；並利用 $P_x x_a + P_y y_a = P_a$ 與 $P_x x_b + P_y y_b = P_b$ 之關係，可得 Lagrangian 座標系統在 x 方向及 y 方向之動量守恆方程式分別為(見 Lamb (1945)第 13 節)

$$x_{tt} x_a + y_{tt} y_a = -g y_a - \frac{1}{\rho} P_a \quad (2-8a)$$

$$x_{tt} x_b + y_{tt} y_b = -g y_b - \frac{1}{\rho} P_b \quad (2-8b)$$

4. 平均高程條件

在質量守恆的條件下，水平底床上的規則波動中，流體質點的平均高程經過一個波長的運動，其平均高程不變（見 Milne-Thomson (1968)第 14.41 節）

$$\frac{1}{L} \int_0^L (y(a,b,t) - \bar{y}) dx = 0 \quad (2-9)$$

式(2-9)中的 \bar{y} 為流體質點於空間中之平均位置。

5. 邊界條件

本研究探討的波浪運動，除了在水平方向及時間上具有週期性外，在自由表面處為定常大氣壓力，因此可假設相對為零而得表面條件為

$$P = 0 \quad (2-10)$$

另外在底部的條件為位於不透水的底床上之流體質點的垂直流速為零，則得

$$y_t = 0 \quad (2-11)$$

6. 分離控制方程式

若將任何一點的質點軌跡分離出不含時間部份，而總壓力分離出靜壓力及動壓力部份時，座標 (x, y) 及壓力 P 分別可表示為

$$x = a + x'(a, b, t) \quad (2-12a)$$

$$y = b + y'(a, b, t) \quad (2-12b)$$

$$P = -\rho gb + p(a, b, t) \quad (2-12c)$$

上述變數 a 和 b 所代表之意義並非為起始流體質點的位置，而僅是方便標註流體質點位置的獨立變數， x' 和 y' 代表流體質點的運動軌跡，為時間的週期函數。本文利用 Adrian (2001) 的映射概念 (diffeomorphism) 處理邊緣波 (edge wave) 問題，其以 Lagrangian 方法描述一個已存在的波浪現象，而非解析自靜止水面至形成波浪的過程

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a + x' \\ b + y' \end{pmatrix} \quad (2-13)$$

由式(2-13)可知，當 $b=0$ 時，代表表面水粒子的運動高程，而 $b=-h$ 則為底部水粒子的運動高程，故式(2-10)之表面條件可設定在 $b=0$ ，而式(2-11)之底部條件則可設定在 $b=-h$ 。

若假設 (a, b) 原點恰位於平均水位上，變數 b 取向上為正。將式(2-12)代入式(2-3)、式(2-6)、式(2-8)、式(2-9)、式(2-10)及式(2-11)的控制方程式及邊界條件中，分別得到

$$x'_{at} + y'_{bt} + \frac{\partial(x'_t, y'_t)}{\partial(a, b)} + \frac{\partial(x', y')}{\partial(a, b)} = 0 \quad (2-14a)$$

$$y'_{at} - x'_{bt} + \frac{\partial(y'_t, y'_t)}{\partial(a, b)} - \frac{\partial(x', x'_t)}{\partial(a, b)} = 0 \quad (2-14b)$$

$$\frac{\partial^2 x'}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial a} + g \frac{\partial y'}{\partial a} + x''_a x'_a + y''_a y'_a = 0 \quad (2-14c)$$

$$\frac{\partial^2 y'}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial b} + g \frac{\partial y'}{\partial b} + x'_u x'_b + y'_u y'_b = 0 \quad (2-14d)$$

$$\frac{1}{L} \int_0^L y' (1 + x'_a) da = 0 \quad (2-14e)$$

$$p = 0, \quad b = 0 \quad (2-14f)$$

$$y'_i = 0, \quad b = -h \quad (2-14g)$$

由式(2-14)可知，透過式(2-12)的處理，將原本為非線性的控制方程式分離成線性部份(如式(2-14a, b)之前二項，與式(2-14c, d)之前三項)及非線性部份。數學在解析過程，式(2-14)比原方程式更能清楚表示出線性及非線性的作用。

2-2 理論解析

因為式(2-14a)-式(2-14e)等式為非線性方程式，所以不能獲得理論解析解，然而可利用攝動法求取近似解來克服此問題。由 Stokes (1847)波浪理論可知，波浪水粒子在表面的運動速度比底部還大，因此假設在不同深度下流體質點的運動週期不同，而週波率是個變量，需要進行攝動展開，因此本文採用 Lindstedt-Poincaré 的攝動解析技術(見 Nayfeh (1993))，可將週波率的攝動量轉入至控制方程式中，並參考陳(1994a, b)的解析過程，將要求解的變數表示為

$$x' = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n x_n(a, b, t) \quad (2-15a)$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n y_n(a, b, t) \quad (2-15b)$$

$$p = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n p_n(a, b, t) \quad (2-15c)$$

$$\sigma_L = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \sigma_{Ln}(a, b) = \frac{2\pi}{T_L} \quad (2-15d)$$

式(2-15)中， ε 如同 Pierson (1962)及陳(1994a, b)所提者，為一個代表階量的參數(perturbation parameter)；式(2-15d)中， T_L 是 Lagrangian 系統中流體質點運動時重現其高度的週期，而 σ_L 乃對應的週波率。式(2-15d)表示水粒子的 Lagrangian 運動週期，先假設為 (a,b) 的函數，其最後形式視解析結果，此為陳(1994a)首先提出的觀念，往昔學者均尚無人提及，且其發現 σ_L 僅與 b 有關。應用式(2-15)的攝動表示式至式(2-14)的控制方程式及邊界條件作系統的展開，當收集相同的階量 ε 後，依攝動技巧及求解步驟，由最低階逐次求至高階解。今為方便運算起見，設定 $\tau = \sigma_L t$ ，則以 Lagrangian 座標描述的波動場可被逐階的求出解答，為能與 Eulerian 五階近似解進行比較，且為了確定高階近似解是否能相互轉換，故本文將求解到 Lagrangian 第五階解。

2-2-1 第一階近似解

將式(2-15)代入式(2-14)後，若取出攝動展開式中所有包含 $O(\varepsilon)$ 的項，則 Lagrangian 座標系統的第一階控制方程式及邊界條件為

$$\sigma_{L0}(x_{1a\tau} + y_{1b\tau}) + \sigma_{L0a}x_{1\tau} + \sigma_{L0b}y_{1\tau} + \sigma_{L0}(\sigma_{L0a}x_{1\tau\tau} + \sigma_{L0b}y_{1\tau\tau})t = 0 \quad (2-16a)$$

$$\sigma_{L0}(y_{1a\tau} - x_{1b\tau}) + \sigma_{L0a}y_{1\tau} - \sigma_{L0b}x_{1\tau} + \sigma_{L0}(\sigma_{L0a}y_{1\tau\tau} - \sigma_{L0b}x_{1\tau\tau})t = 0 \quad (2-16b)$$

$$\sigma_{L0}^2 x_{1\tau\tau} + \frac{1}{\rho} p_{1a} + g y_{1a} + \sigma_{L0a} \left(\frac{1}{\rho} p_{1\tau} + g y_{1\tau} \right) t = 0 \quad (2-16c)$$

$$\sigma_{L0}^2 y_{1\tau\tau} + \frac{1}{\rho} p_{1b} + g y_{1b} + \sigma_{L0b} \left(\frac{1}{\rho} p_{1\tau} + g y_{1\tau} \right) t = 0 \quad (2-16d)$$

$$\frac{1}{L} \int_0^L y_1 da = 0 \quad (2-16e)$$

$$p_1 = 0, \quad b = 0 \quad (2-16f)$$

$$y_{1\tau} = 0, \quad b = -h \quad (2-16g)$$

由攝動理論可知，將非線性方程式的非線性部份去除後，即為該非線性方程式第一階的線性控制方程式。若忽略式(2-14)的非線性部份，並與式(2-16)進行比較可知，且本文探討的波動特性並不隨時間增加而增加的漸變(transient)問題，因此方程式中含有隨時間 t 成長之項均需為零，以確保獲得不隨時間增加的合理解，故可得 $\sigma_{L0a} = \sigma_{L0b} = 0$ 。同時調整座標原點，使得在時間 $t=0$ 且 $a=0$ 的位置上，波峰正好通過座標原點的正上方。今由式(2-16a)的連續方程式及式(2-16b)的非旋轉流條件可知， x_1 及 y_1 滿足控制方程式，故可利用分離變數法於滿足式(2-16g)的底床邊界條件下，求得

$$x_1 = -B \cosh k(b+h) \sin(ka - \sigma_L t) \quad (2-17a)$$

$$y_1 = B \sinh k(b+h) \cos(ka - \sigma_L t) \quad (2-17b)$$

其中， $k = 2\pi/L$ 為週波數(wave number)， L 為波長，式(2-17b)若令 $b=0$ 為表面水粒子的位置高程，此時可知 y_1 表示為 \cos 函數週期運動的水位變化，因此可令 $a_0 = B \sinh kh$ 為波動的水位振幅。在式(2-17b)滿足式(2-16e)的條件下，將 x_1 及 y_1 代入式(2-16c)及式(2-16d)中，並在式(2-16f)自由表面邊界條件的應用下，可得

$$\sigma_{L0}^2 = gk \tanh kh \quad (2-17c)$$

$$p_1 = -B\rho g \frac{\sinh kb}{\cosh kh} \cos(ka - \sigma_L t) \quad (2-17d)$$

式(2-17c)顯示第一階解的分散關係(dispersion relation)，此與Eulerian座標下所得第一階線性解是相同的，即 $\sigma_{L0} = \sigma_{E0} = \sigma_0$ 。式(2-17d)為波動壓的解，在表面上任何一點均為零，完全滿足邊界條件，而隨水深以 \sinh 函數遞減，此結果比Eulerian座標下的解在表面上無法完全滿足壓力為零的表面條件是此解之優點。

2-2-2 第二階近似解

若取出攝動展開式中所有包含 $O(\varepsilon^2)$ 的項，且應用 $\sigma_{0a} = \sigma_{0b} = 0$ 的條件，則可得 Lagrangian 座標的第二階控制方程式及邊界條件，在連續方程式中包含了 $\sigma_0(\sigma_{L1a}x_{1\tau\tau} + \sigma_{L1b}y_{1\tau\tau})t$ 的時間項，而在非旋轉流條件中包含了 $\sigma_0(\sigma_{L1a}y_{1\tau\tau} - \sigma_{L1b}x_{1\tau\tau})t$ 的時間項，由於波動場中的特性並不隨時間成長，所以如同第一階的處理方式，使含有隨時間成長之項均令為零，而可得 $\sigma_{L1a} = \sigma_{L1b} = 0$ 。今將第一階解代入連續方程式及非旋轉流條件中，可得有

$$\sigma_0(x_{2a\tau} + y_{2b\tau}) = B^2 k^2 \sigma_0 \sin 2(ka - \sigma_L t) \quad (2-18a)$$

$$\sigma_0(y_{2a\tau} - x_{2b\tau}) = -B^2 k^2 \sigma_0 \sinh 2k(b+h) \quad (2-18b)$$

由式 (2-18) 右邊的外力項 (forcing term) 或稱非齊次項 (non-homogeneous term) 及底部邊界條件之函數形式，透過待定係數法 (undetermined coefficient) 解非齊次方程式之特殊解的方法，假設 x_2 及 y_2 的形式為

$$x_2 = [-N_{222} \cosh 2k(b+h) + M_{202}] \sin 2(ka - \sigma_L t) - N_{211} \cosh k(b+h) \sin(ka - \sigma_L t) + M_{220} \cosh 2k(b+h) \sigma_0 t \quad (2-19a)$$

$$y_2 = N_{222} \sinh 2k(b+h) \cos 2(ka - \sigma_L t) + N_{211} \sinh k(b+h) \cos(ka - \sigma_L t) \quad (2-19b)$$

其中 N_{222} 及 N_{211} 為齊次方程式 (homogeneous) 的調和解 (harmonic solution)，而 M_{202} 及 M_{220} 為非齊次方程式 (non-homogeneous) 的特解 (particular solution)。今將式 (2-19) 代入式 (2-18) 中，則可求得特解為

$$M_{202} = \frac{1}{4} B^2 k \quad (2-20a)$$

$$M_{220} = \frac{1}{2} B^2 k \quad (2-20b)$$

在式 (2-19) 滿足平均高程的條件下，可獲得 y_2 的正確解為

$$y_2 = N_{222} \sinh 2k(b+h) \cos 2(ka - \sigma_L t) + N_{211} \sinh k(b+h) \cos(ka - \sigma_L t) + \frac{1}{4} B^2 k \sinh 2k(b+h) \quad (2-21)$$

接著將第一階及第二階的 x 及 y 代入 x 方向運動方程式後，再對 a 積分，則可得壓力為

$$p_2 = \rho \left\{ \frac{\sigma_0^2}{2k} [-2N_{222} \coth kh \sinh 2k(b+h) + 4N_{222} \cosh 2k(b+h) - \frac{3}{2} B^2 k] \cos 2(ka - \sigma_L t) + \frac{1}{k} [-N_{211} \coth kh \sinh k(b+h) \sigma_0^2 + \sigma_0 (N_{211} \sigma_0 + 2B\sigma_{L1}) \cosh k(b+h)] \cos(ka - \sigma_L t) \right\} + pb_2(b, \tau) \quad (2-22)$$

式(2-22)中， $pb_2(b, \tau)$ 為積分常數，此值需將式(2-22)代入 y 方向運動方程式獲得 pb_2 對 b 微分的方程式。因此再對 b 積分而得

$$pb_2(b, \tau) = -\frac{1}{4} B^2 \sigma_0^2 \rho [\coth kh \sinh 2k(b+h) - \cosh 2k(b+h)] + pc_2(\tau) \quad (2-23)$$

其中， $pc_2(\tau)$ 為積分常數。最後應用表面壓力為零的邊界條件，可得

$$N_{222} = \frac{3}{8} \frac{B^2 k}{\sinh^2 kh} \quad (2-24a)$$

$$\sigma_{L1} = 0 \quad (2-24b)$$

$$pc_2(\tau) = \frac{1}{4} B^2 \rho \sigma_0^2 \quad (2-24c)$$

至此僅剩調和解 N_{211} 尚未求出，於 Lagrangian 系統中，調和解 N_{211} 可以是任意值，上述結果均能滿足控制方程式。但若要求 Lagrangian 系統的解析結果與 Eulerian 系統解析結果是一致時，可用 Eulerian 解的特性定出一個限制條件來求出該值的大小。往昔於 Eulerian 系統的 Stokes 波的解析結果可歸納出三種形式，第一種為 Isobe 等人(1978)和 Fenton (1985)提出的，二者選定攝動參數均為 $kH/2$ ，其波形具有奇數倍角週期函數的係數的各高階量和為零的特性。第二種和第三種皆選定攝動參數為 ka_0 ， a_0 約為振幅之半。第二種為 Skjelbreia 和 Hendrickson (1960)解析結果有在波形的一倍角週期函數的係數沒有

高階量的特性。第三種解析結果的特性如 Dingemans (1997)，為二階解以上的流速勢沒有一倍角週期函數的係數。透過此三種 Eulerian 解的特性額外當為條件分別求出三種可能的調和解係數 N_{211} 。若選定第一類 Stokes 波的 Eulerian 解做為限制條件時，本文的攝動參數 ε 則代表 $kH/2$ ，而 $a_0 = H/2$ 。倘若選定第二類或第三類 Eulerian 解做為限制條件時，則本文的攝動參數 ε 即為 ka_0 ，而 a_0 為相近於振幅，其值需由波高為波峰減去波谷的關係求得。本文已分別推導出以此三類 Eulerian 解做為限制條件所得的解析結果。因解析過程三者均相同，本文接著以選定 $kH/2$ 為攝動參數的第一類 Stokes 波解的波形奇數倍角週期函數的係數高階量和為零做為限制條件進行討論，而後續的解析說明，第二和第三類的限制條件所得的解析結果將詳列於附錄 A 和附錄 B 以做參考。調和解 N_{211} 的求解過程需先將 Lagrangian 的水位轉換至 Eulerian 的水位。將本文 Lagrangian 的表面水位 $y(a,0,t)$ 轉換至 Eulerian 系統中的表面水位 $\eta(x,t)$ 時，為方便起見，先令 Lagrangian 的位相函數 $\theta_L = ka - \sigma_L t$ 及 Eulerian 的位相函數 $\theta_E = kx - \sigma_E t$ ， σ_E 為在 Eulerian 座標的前進波的週波率，此值在任何一個 x 上均相同。Lagrangian 系統與 Eulerian 系統之位相關係在第一階時可表示為

$$\theta_L = \theta_E + \xi \quad (2-25)$$

其中

$$\xi = k(a - x + U_M t) = -kx_1 = kB \cosh k(b+h) \sin \theta_L \quad (2-26)$$

其中 U_M 為流體質點於水平方向位移之速度，即漂移速度(drift velocity)或稱質量傳輸速度(mass transport velocity)。若將 Lagrangian 系統流體質點運動軌跡的垂直分量，其中 θ_L 的函數經泰勒級數展開在 θ_E 處

$$\begin{aligned}
ky &= kb + kB \sinh k(b+h)(\cos \theta_E - \xi \sin \theta_E) \\
&\quad + kN_{222} \sinh 2k(b+h) \cos 2\theta_E + kN_{211} \sinh k(b+h) \cos \theta_E \\
&\quad + \frac{1}{4} B^2 k^2 \sinh 2k(b+h)
\end{aligned} \tag{2-27}$$

將式(2-27)取 $b=0$ 可得到 Eulerian 的水位表示式，再利用奇數倍角週期函數的係數和為零的條件，令在一倍角週期函數的係數的二階量為零

$$kN_{211} \sinh kh = 0 \tag{2-28}$$

因此，由式(2-28)即可得

$$N_{211} = 0 \tag{2-29}$$

至此，第二階量已完全求出。當時間由 t 至 $t+T_L$ 時，則流體質點將運動一位移，稱為都卜勒位移(Doppler shift)，令其水平與垂直分量分別被表示為 l_x 及 l_y ，結果為

$$\begin{aligned}
l_x &= x(a,b,t+T_L) - x(a,b,t) \\
&= \frac{1}{2} B^2 k \cosh 2k(b+h) \sigma_0 T_L
\end{aligned} \tag{2-30a}$$

$$l_y = y(a,b,t+T_L) - y(a,b,t) = 0 \tag{2-30b}$$

因式(2-30a)不等於零，表示質點在時間 T_L 間，會前進 l_x 距離，若 l_x 除以質點運動的時間，可得第二階的質量傳輸速度為

$$U_{M2} = \frac{1}{2} B^2 k \cosh 2k(b+h) \sigma_0 \tag{2-31}$$

但在 y 方向的流體質點平均位移為零，則以 Lagrangian 座標描述的第二階解為

$$\begin{aligned}
x_2 &= B^2 k \left[-\frac{3}{8 \sinh^2 kh} \cosh 2k(b+h) + \frac{1}{4} \right] \sin 2(ka - \sigma_L t) \\
&\quad + \frac{1}{2} B^2 k \cosh 2k(b+h) \sigma_0 t
\end{aligned} \tag{2-32a}$$

$$y_2 = \frac{3}{8} \frac{B^2 k}{\sinh^2 kh} \sinh 2k(b+h) \cos 2(ka - \sigma_L t) + \frac{1}{4} B^2 k \sinh 2k(b+h) \tag{2-32b}$$

$$p_2 = B^2 k \rho g \left\{ \left[\frac{3 \cosh 2k(b+h)}{4 \cosh kh \sinh kh} - \frac{3 \sinh 2k(b+h)}{8 \sinh^2 kh} - \frac{3}{4} \tanh kh \right] \cos 2(ka - \sigma_L t) \right. \\ \left. + \frac{1}{4} [\tanh kh \cosh 2k(b+h) - \sinh 2k(b+h) + \tanh kh] \right\} \quad (2-32c)$$

$$\sigma_{L1} = 0 \quad (2-32d)$$

第二階解 x_2 除了有第二項二倍角週期性運動外，還有隨時間線性增加的量，此項即表示流體質點運動一週期後會前進一段水平距離。 y_2 的解除了有二階的二倍角週期性運動外，還有不含時間而僅為 b 函數的水位修正量，此修正量在後節有詳細的論述其物理意義。第二階的壓力顯示有二倍角週期的成分，亦有隨深度不同的常數階量。二階的壓力在表面亦保持為零的常數。第二階的頻率的修正量為零。

2-2-3 第三階近似解

若取出攝動展開式中所有包含 $O(\varepsilon^3)$ 的項，且應用 $\sigma_{0a} = \sigma_{0b} = 0$ 及 $\sigma_{L1} = 0$ 的條件，可得 Lagrangian 座標系統描述下的第三階控制方程式及邊界條件。如同第二階解的求解過程，在連續方程式中包含了 $\sigma_0 (\sigma_{L2a} x_{1\tau\tau} + \sigma_{L2b} y_{1\tau\tau} + B^3 k^3 \sinh k(b+h) \sinh 2k(b+h) \sigma_0) t$ 的時間項，而在非旋轉流條件中，亦如同第二階解的求解過程，發現有包含了 $\sigma_0 (\sigma_{L2a} y_{1\tau\tau} - \sigma_{L2b} x_{1\tau\tau} + B^3 k^3 \cosh k(b+h) \sinh 2k(b+h) \sigma_0) t$ 的時間項，為避免解中有隨時間成長的結果產生，將連續方程式及非旋轉流條件含有隨時間成長的項均取零而分別得

$$\sigma_{L2a} = 0 \quad (2-33a)$$

$$\sigma_{L2b} = -B^2 k^3 \sigma_0 \sinh 2k(b+h) \quad (2-33b)$$

將式(2-33b)對 b 積分，則可得

$$\sigma_{L2} = -\frac{1}{2} B^2 k^2 \sigma_0 \cosh 2k(b+h) + \omega_2 \quad (2-34)$$

其中， ω_2 為積分常數。式(2-34)的第二階水粒子運動的週波率 σ_{L2} 包括二項，一項為含深度 b 的 \cosh 函數，即隨深度 b 愈深，其值愈小，在底部時變為 $-B^2 k^2 \sigma_0 / 2$ ；而另外一項不為 b 函數的常數， ω_2 ，即空間任何一點水粒子均有相同的第二階頻率修正量的部份，此值可如同求第二階解相同，由自由表面邊界條件求出。

今將第一階及第二階解代入連續方程式及非旋轉流條件中得

$$\begin{aligned} \sigma_0(x_{3a\tau} + y_{3b\tau}) &= \frac{B^3 k^3 \sigma_0}{\sinh^2 kh} \left[\frac{1}{16} (10 + 2 \cosh 2kh) \cosh 3k(b+h) \right. \\ &\times \sin(ka - \sigma_L t) - \left. \frac{3}{8} (-7 + \cosh 2kh) \cosh k(b+h) \sin 3(ka - \sigma_L t) \right] \end{aligned} \quad (2-35a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_0(y_{3a\tau} - x_{3b\tau}) &= \frac{B^3 k^3 \sigma_0}{\sinh^2 kh} \left[-\frac{1}{16} (26 + 10 \cosh 2kh) \sinh 3k(b+h) \right. \\ &\times \cos(ka - \sigma_L t) - \left. \frac{1}{8} (5 + \cosh 2kh) \sinh k(b+h) \cos 3(ka - \sigma_L t) \right] \end{aligned} \quad (2-35b)$$

x_3 及 y_3 於滿足水平底床邊界條件下，並由式(2-35)等號右邊的外力項的函數特性，可將其形式假設為

$$\begin{aligned} x_3 &= [-N_{333} \cosh 3k(b+h) + M_{313} \cosh k(b+h)] \sin 3(ka - \sigma_L t) \\ &+ [M_{331} \cosh 3k(b+h) - N_{311} \cosh k(b+h)] \sin(ka - \sigma_L t) \end{aligned} \quad (2-36a)$$

$$\begin{aligned} y_3 &= [N_{333} \sinh 3k(b+h) + N_{313} \sinh k(b+h)] \cos 3(ka - \sigma_L t) \\ &+ [N_{331} \sinh 3k(b+h) + N_{311} \sinh k(b+h)] \cos(ka - \sigma_L t) \end{aligned} \quad (2-36b)$$

其中 N_{333} 、 N_{311} 為滿足式(2-35a)及式(2-35b)的左式為零的齊次方程式的調和解，而 M_{313} 、 M_{331} 、 N_{313} 、 N_{331} 為上二式(2-35)之非齊次方程式的特解。將式(2-36)代入式(2-35)，可先求得特解為

$$M_{313} = \frac{1}{48} \frac{B^3 k^2}{\sinh^2 kh} (17 - 2 \cosh 2kh) \quad (2-37a)$$

$$M_{331} = -\frac{1}{16} \frac{B^3 k^2}{\sinh^2 kh} (11 + 4 \cosh 2kh) \quad (2-37b)$$

$$N_{313} = -\frac{3}{16} \frac{B^3 k^2}{\sinh^2 kh} \quad (2-37c)$$

$$N_{331} = \frac{1}{16} \frac{B^3 k^2}{\sinh^2 kh} (7 + 2 \cosh 2kh) \quad (2-37d)$$

在式(2-36)滿足平均高程條件下，知對 y_3 無任何平均水位的修正。如同第二階求壓力的方法，將第一階至第三階的 x 及 y 代入 x 方向運動方程式後對 a 積分，再代入 y 方向運動方程式後對 b 積分，可得壓力為

$$\begin{aligned} p_3 = & \rho g \{ [3N_{333} \tanh kh \cosh 3k(b+h) - N_{333} \sinh 3k(b+h) \\ & + \frac{1}{8} \frac{B^3 k^2}{\sinh 2kh} (-25 + 4 \cosh 2kh) \cosh k(b+h) \\ & + \frac{3}{16} \frac{B^3 k^2}{\sinh^2 kh} \sinh k(b+h)] \cos 3(ka - \sigma_L t) \\ & + [\frac{9}{8} \frac{B^3 k^2}{\sinh 2kh} \cosh 3k(b+h) \\ & - \frac{1}{16} \frac{B^3 k^2}{\sinh^2 kh} (7 + 2 \cosh 2kh) \sinh 3k(b+h) \\ & + (-\frac{1}{4} \tanh kh (B^3 k^2 - 4N_{311}) + \frac{2B\omega_2 \sigma_0}{gk}) \cosh k(b+h) \\ & - N_{311} \sinh k(b+h)] \cos(ka - \sigma_L t) \} + pc_3(\tau) \end{aligned} \quad (2-38)$$

其中， $pc_3(\tau)$ 為積分常數。於自由表面邊界條件的應用下，由式(2-38)可得

$$N_{333} = -\frac{1}{64} \frac{B^3 k^2}{\sinh^4 kh} (-11 + 2 \cosh 2kh) \quad (2-39a)$$

$$\omega_2 = \frac{1}{16} \frac{B^2 k^2 \sigma_0}{\sinh^2 kh} (8 + \cosh 4kh) \quad (2-39b)$$

$$pc_3(\tau) = 0 \quad (2-39c)$$

如同第二階的處理方式，利用 Lagrangian 系統與 Eulerian 系統之位相關係，式(2-25)，其中

$$\begin{aligned} \xi = & -k(x_1 + x_2 - U_{M2} t) \\ & = kB \cosh k(b+h) \sin \theta_L + kN_{222} \cosh 2k(b+h) \sin 2\theta_L - kM_{202} \sin 2\theta_L \end{aligned} \quad (2-40)$$

接著透過泰勒級數以 θ_E 為中心連續展開 θ_L 的函數

$$\begin{aligned}
ky &= kb + kB \sinh k(b+h)(\cos \theta_E - \xi \sin \theta_E - \frac{1}{2} \xi^2 \cos \theta_E) \\
&+ kN_{222} \sinh 2k(b+h)(\cos 2\theta_E - 2\xi \sin 2\theta_E) + \frac{1}{4} B^2 k^2 \sinh 2k(b+h) \quad (2-41) \\
&+ kN_{333} \sinh 3k(b+h) \cos 3\theta_E + kN_{311} \sinh k(b+h) \cos \theta_E \\
&+ kN_{313} \sinh k(b+h) \cos 3\theta_E + kN_{331} \sinh 3k(b+h) \cos \theta_E
\end{aligned}$$

最後取 $b=0$ ，利用限制在奇數倍角週期函數的係數和為零的條件，令三階量的一倍角週期性函數和三倍角週期性函數的係數和為零

$$\begin{aligned}
\frac{4k}{\sinh^3 kh} [13B^3 k^2 + 24N_{311} + 2(B^3 k^2 - 16N_{311}) \cosh 2kh \\
+ 2(5B^3 k^2 + 4N_{311}) \cosh 4kh + 2B^3 k^2 \cosh 6kh] = 0 \quad (2-42)
\end{aligned}$$

則係數 N_{311} 為

$$N_{311} = -\frac{1}{64} \frac{B^3 k^2}{\sinh^4 kh} (13 + 2 \cosh 2kh + 10 \cosh 4kh + 2 \cosh 6kh) \quad (2-43)$$

於是以 Lagrangian 座標描述的第三階解整理如下

$$x_3 = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 M_{3mn} \cosh mk(b+h) \sin n(ka - \sigma_L t) \quad (\text{for } m, n : \text{odd}) \quad (2-44a)$$

$$y_3 = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 N_{3mn} \sinh mk(b+h) \cos n(ka - \sigma_L t) \quad (\text{for } m, n : \text{odd}) \quad (2-44b)$$

$$\begin{aligned}
p_3 = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 [E_{3mn} \cosh mk(b+h) \\
+ F_{3mn} \sinh mk(b+h)] \cos n(ka - \sigma_L t) \quad (\text{for } m, n : \text{odd}) \quad (2-44c)
\end{aligned}$$

$$\sigma_{L2} = \sum_{m=0}^2 G_{2m} \cosh mk(b+h) \sigma_0 \quad (\text{for } m : \text{even}) \quad (2-44d)$$

其中係數詳列於附錄 C。第三階解 x_3 、 y_3 及 p_3 均為有一倍角及三倍角週期性運動的三階量。

2-2-4 第四及第五階近似解

如同第一階至第三階的解析過程，以下為第四階的解析結果

$$x_4 = \sum_{m=0}^4 \sum_{n=2}^4 M_{4mn} \cosh mk(b+h) \sin n(ka - \sigma_L t) \quad (\text{for } m, n: \text{even}) \quad (2-45a)$$

$$+ \sum_{m=2}^4 M_{4m0} \cosh mk(b+h) \sigma_0 t \quad (\text{for } m: \text{even})$$

$$y_4 = \sum_{m=2}^4 \sum_{n=2}^4 N_{4mn} \sinh mk(b+h) \cos n(ka - \sigma_L t) \quad (\text{for } m, n: \text{even}) \quad (2-45b)$$

$$+ \sum_{m=2}^4 N_{4m0} \sinh mk(b+h) \quad (\text{for } m: \text{even})$$

$$p_4 = \sum_{m=0}^4 \sum_{n=0}^4 E_{4mn} \cosh mk(b+h) \cos n(ka - \sigma_L t) \quad (\text{for } m, n: \text{even}) \quad (2-45c)$$

$$+ \sum_{m=2}^4 \sum_{n=0}^4 F_{4mn} \sinh mk(b+h) \cos n(ka - \sigma_L t) \quad (\text{for } m, n: \text{even})$$

$$\sigma_{L3} = 0 \quad (2-45d)$$

$$U_{M4} = \sum_{m=2}^4 M_{4m0} \cosh mk(b+h) \sigma_0 \quad (\text{for } m: \text{even}) \quad (2-45e)$$

式(2-45)中，係數詳列於附錄 C。由第四階的解析結果可知， x_4 及 y_4 除有二倍角及四倍角函數的週期性運動模態外， x_4 如同 x_2 般，有一隨時間線性向前進的傳輸量，而 y_4 如同 y_2 般，有一垂直方向的修正量。

將前述四階解代入原控制方程式，獲得五階的控制方程式，再利用上述攝動求解方法，獲得第五階的解析結果為

$$x_5 = \sum_{m=1}^5 \sum_{n=1}^5 M_{5mn} \cosh mk(b+h) \sin n(ka - \sigma_L t) \quad (\text{for } m, n: \text{odd}) \quad (2-46a)$$

$$y_5 = \sum_{m=1}^5 \sum_{n=1}^5 N_{5mn} \sinh mk(b+h) \cos n(ka - \sigma_L t) \quad (\text{for } m, n: \text{odd}) \quad (2-46b)$$

$$p_5 = \sum_{m=1}^5 \sum_{n=1}^5 [E_{5mn} \cosh mk(b+h) + F_{5mn} \sinh mk(b+h)] \cos n(ka - \sigma_L t) \quad (\text{for } m, n: \text{odd}) \quad (2-46c)$$

$$\sigma_{L4} = \sum_{m=0}^4 G_{4m} \cosh mk(b+h) \sigma_0 \quad (\text{for } m: \text{even}) \quad (2-46d)$$

式(2-46)中，係數詳列於附錄 C。由第五階解 x_5 及 y_5 可知，運動軌跡的第五階量均包括有一倍、三倍及五倍週期函數。而式(2-46d)顯示週波率四階量的修正，此修正量亦包括有含水深相關的 cosh 函數部份及常數二部份。

2-3 解析解之印證

2-3-1 正確性之印證

攝動法主要是將低階解代入高階方程式而求出高階解，在攝動解析過程相當的繁複，有可能在程式化或推導時發生錯誤，為避免此種錯誤，Fenton (1985) 提出一種數值的檢驗方法，以確認近似解的正確性，本文利用此數值檢定法來檢驗攝動解析近似解中係數的正確性。其方法為將二個不同的微小攝動參數值代入邊界條件中，由所產生不同水平空間或時間的誤差值，經富立葉級數求出各倍角的振幅後，由二個調和項的振幅的比值可獲得一個判斷誤差階數的指標，來判斷攝動近似解的正確性。其原理簡述如下，當假設近似解是以 ε 為攝動參數推導求得至 $n-1$ 階時，此解代入控制方程式或邊界條件所產生的誤差值 $e_j(\varepsilon)$ 應為 n 階量，可表示為

$$e_j(\varepsilon) = \alpha(j)\varepsilon^{n(j)} + O(\varepsilon^{n+1}) \quad (2-47)$$

其中 $\alpha(j)$ 及 $n(j)$ 為與 ε 無關的係數， $O(\varepsilon^{n+1})$ 為 $n+1$ 階的誤差量。

由式(2-47)中可知， n 為各調和項振幅的誤差階數指標。此值可經由給定兩組不同的攝動參數值來決定，為

$$n(j) = \frac{\log\left[\frac{e_j(\varepsilon_2)}{e_j(\varepsilon_1)}\right]}{\log\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)} + O(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \quad (2-48)$$

式(2-48)中， ε_1 及 ε_2 為二個任意給定的攝動參數數值，若近似解正確至五階，則 n 值需約為6左右。今給定不同的深度及時間，求其誤差的階數指標，以確定本文推導所得近似解中係數的正確性。在 Eulerian 系統中，由於所解析的控制方程式是 Laplace 方程式，近似解均會滿足方程式，因此僅需確定表面邊界條件是否滿足。但在 Lagrangian 系統中，由於除了邊界條件外，所有控制方程式皆為非線性，故近似解無法滿足控制方程式。若將本文近似解代入式(2-14a)至式(2-14d)四個控制方程式於時間及空間中所產生誤差的階數指標如表 2-1 所示。

表 2-1 的計算條件為 $h/L=0.2$ ， $H/L=0.009$ ， $\varepsilon_1 = kH/2$ ， $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1$ 。表 2-1 中，富立葉成分欄代表各富立葉級數的調和項，由表 2-1 可知四個控制方程式的富立葉級數第 1、第 3 及第 5 調和項振幅所求的 n 值均為 7，而由第 2 及第 4 調和項所求得之 n 值為 6。由表 2-1 可知，在選擇二個時間及二個水深，本文五階解代入四個方程式所計算的 n 值均為 6 或 7，顯示本文五階近似解滿足各方程式至五階量均正確。由本文獲得的各階解可知，奇數階解僅有奇數倍角的調和項而無偶數倍角的調和項，反過來說，偶數階解僅有偶數倍角的調和項，而無奇數倍角的調和項。因此當解析至五階時，偶數倍角調和項並無修正量，因此誤差應產生於六階，故 n 值為 6，而奇數倍角調和項有五階量的修正，此量保留至第七階才會再修正，第六階並不修正，因此 n 值才會為 7。

表 2-1 五階解在控制方程式的誤差階數指標

控制 方程式	富立葉 成分	$b=0$ $t=0$	$b=-h/4$ $t=0$	$b=0$ $t=T_L(0)/2$	$b=-h/4$ $t=T_L(0)/2$
連續 方程式	1	7.0	7.0	7.0	7.0
	2	6.0	6.0	6.0	6.0
	3	7.0	7.0	7.0	7.0
	4	6.0	6.0	6.0	6.0
	5	7.0	7.0	7.0	7.0
非旋轉 流條件	1	7.0	7.0	7.0	7.0
	2	6.0	6.0	6.0	6.0
	3	7.0	7.0	7.0	7.0
	4	6.0	6.0	6.0	6.0
	5	7.0	7.0	7.0	7.0
X 方向 運動 方程式	1	7.0	7.0	7.0	7.0
	2	6.0	6.0	6.0	6.0
	3	7.0	7.0	7.0	7.0
	4	6.0	6.0	6.0	6.0
	5	7.0	7.0	7.0	7.0
Y 方向 運動 方程式	1	7.0	7.0	7.0	7.0
	2	6.0	6.0	6.0	6.0
	3	7.0	7.0	7.0	7.0
	4	6.0	6.0	6.0	6.0
	5	7.0	7.0	7.0	7.0

2-3-2 連續方程式的檢驗

假設流體質點於靜止水深時，恰位於 a 、 b 位置，在滿足質量守恆的原則及密度不變的條件，流體元素在靜止水深中與其在波浪運動中的大小應該相同，於是可推導出 Lagrangian 系統下的另外一種連續方程式形式為(見 Miche, 1944)

$$J = 1 \quad (2-49)$$

本文解析結果來自於式(2-14a)之連續方程式，其物理意義與式(2-49)相同，為檢驗本近似解析結果能否滿足式(2-49)，於是將五階近似解析結果代入式(2-49)中，而獲得

$$J = 1 + O(\varepsilon^6) \quad (2-50)$$

因本五階解為近似解，無法完全滿足式(2-49)，而有第六階以上誤差量，故本文解析結果滿足至五階量的質量守恆方程式。若依本文方法求至更高階解答，再代入式(2-49)，誤差必定為更高階量。

2-4 結果與討論

2-4-1 波浪週波率

依 Longuet-Higgins (1986) 提出於 Eulerian 與 Lagrangian 兩種不同系統下，波浪週波率的關係可表示為

$$\sigma_L(0) = \sigma_E - kU_M(0) \quad (2-51)$$

其中 $\sigma_L(0)$ 為自由表面處的 Lagrangian 週波率， σ_E 為 Eulerian 週波率， $U_M(0)$ 為自由表面處的质量傳輸速度。將式(2-31)、式(2-34)、式(2-45e)及式(2-46d)代入式(2-51)，可得

$$\sigma_E = \sigma_0 + \omega_2 + \omega_4 \quad (2-52a)$$

$$\omega_2 = \sigma_0 k^2 a_0^2 \frac{2+7S^2}{4(1-S)^2} \quad (2-52b)$$

$$\omega_4 = \sigma_0 k^4 a_0^4 \frac{4+32S-116S^2-400S^3-71S^4+146S^5}{32(1-S)^5} \quad (2-52c)$$

其中 $B \sinh kh = a_0 = H/2$ ， $S = 1/\cosh 2kh$ 。式(2-52)與 Fenton (1985)攝動展開 Stokes 波所得之五階週波率是相同的。由上面的導証可知，本文所推導之 Lagrangian 系統任何一點流體質點的週波率皆可經由式(2-51)而轉換至 Eulerian 系統空間中任何一個位置點的週波率，且此空間中之週波率為一常數，不隨空間任何位置而有所不同。本文透過導証將式(2-51)推展至空間中任一位置皆適用，而不僅限於自由表面處。

2-4-2 波形

為瞭解本文攝動近似解描述波形的能力，本文選擇 Rienecker 和 Fenton (1981)所提高精度的富立葉近似的數值解當作標準來和本文近似解的波形比較。圖 2-1 為選擇計算條件 $h/L=0.2$ ， $H/L=0.114$ ，五階近似解與數值解的波形之比較，本文選定的計算條件接近於 Stokes 極限波 $H_{\max}/L=0.142 \tanh kh$ ，其中 H_{\max} 為極限波高，以此條件計算的結果將落於 Stokes 五階的適用範圍中(見 Dean 和 Dalrymple, 1991)。圖中實線上有三角空心點為 Rienecker 和 Fenton (1981)的數值解波形，虛線為 Fenton (1985)的 Stokes 五階解，實線為本近似解至五階的波形。由圖 2-1 中可知，本近似解至五階的波形已非常逼近數值解的波形，且在波谷的部分，並不會產生如 Fenton (1985)五階解的二次波形，此二次波形的產生主要是在 Eulerian 系統中，需經泰勒展開求解波形所造成的，二次波的產生亦是檢驗波浪理論缺失的一種指標(見 Ebbesmeyer, 1974)。

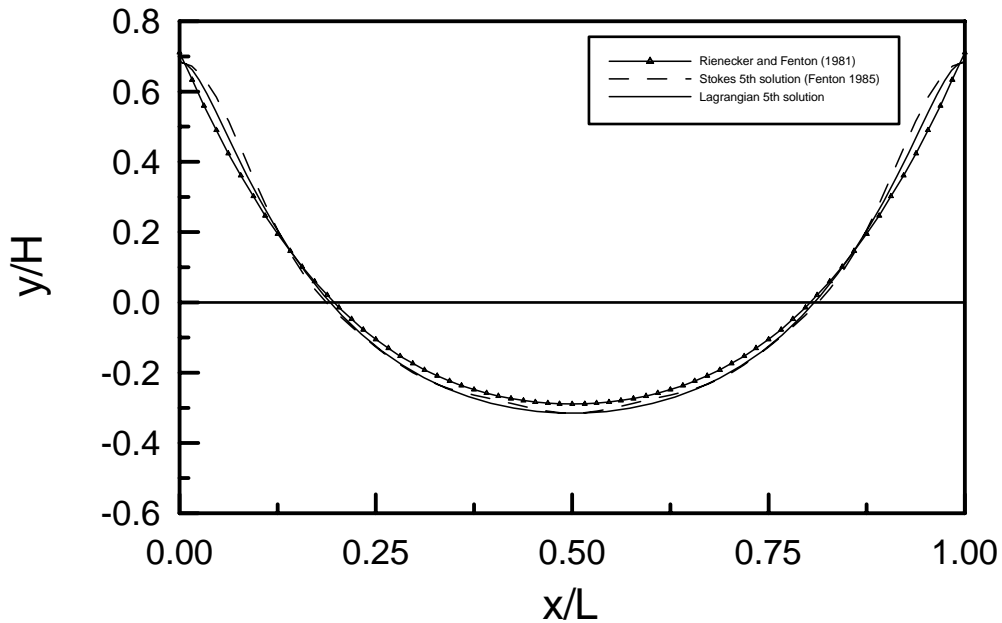


圖 2-1 波形的五階近似解與數值解之比較($h/L=0.2$ ， $H/L=0.114$)

2-4-3 波壓

如 Stokes (1847) 波浪理論，在 Eulerian 系統求解過程，乃以平均靜水位為中心進行泰勒展開，因此波壓公式僅適用於平均靜水位以下的部份，至於平均靜水位以上部份，則以平均靜水位為基準線所得靜壓力來近似。然而在 Lagrangian 系統的求解過程完全滿足在自由表面邊界的壓力為零，故可求得在波形下的波壓。圖 2-2 為選擇 $h/L=0.2$ ， $H/L=0.08$ 條件，所計算的無因次化波壓隨水深的變化，其無因次化為 $P/(\rho g L)$ 。圖 2-2 中隨水深成線性增加的虛線為該處水深的靜水壓，位於兩虛線中的細實線為本近似解至五階的壓力。由圖 2-2 中可知，由自由表面算起，位於波峰部份，其壓力低於靜水壓，而位於波谷部份，其壓力大於靜壓力，水中每一位置處的壓力值皆介於該時刻不同水位的靜水壓及平均靜水位的靜壓力之間。

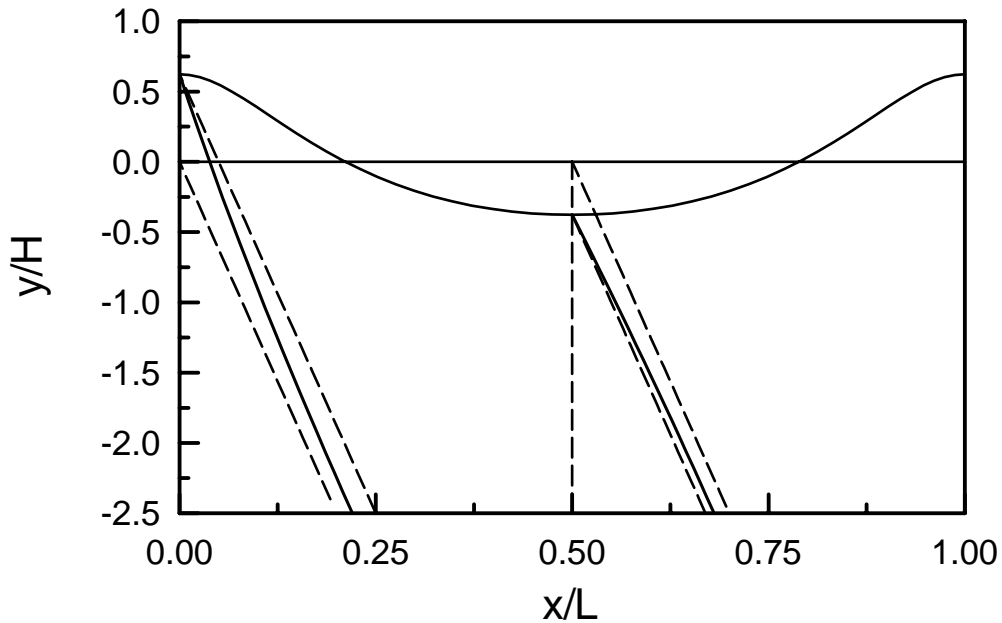


圖 2-2 第五階波壓隨水深變化圖($h/L=0.2$, $H/L=0.08$)

2-4-4 流體質點運動軌跡

往昔描述流體質點的運動軌跡，常採用 Eulerian 解的速度，以平均位移量為中心，透過泰勒級數展開水平及垂直速度，然後再對時間積分獲得，但其結果僅限於運動位移不大的情形。根據 Lagrangian 與 Eulerian 系統分別從流體質點與空間中固定位置兩種不同觀點來描述波場的特性可知，Lagrangian 座標系統才能方便且正確的描述流體質點的運動軌跡。為瞭解本文攝動解描述質點運動軌跡的能力，以條件為 $h/L=0.2$, $H/L=0.08$ 計算在不同深度下流體質點的運動軌跡示如圖 2-3。圖 2-3 中以 $y/L=0$ 為運動中心的軌跡線即是標註為 $b/L=0$ ，而向下則分別是標註為 $b/L=-0.075$ 及 $b/L=-0.15$ 的流體質點的運動軌跡。計算不同深度之三個質點的時間均為五倍的 $T_L(0)$ ， $T_L(0)$ 為在表面處質點的運動週期。圖 2-3 中實線為本近似解至五階的軌跡線，虛線為本近似解至三階的軌跡線。由圖中可知，在不同深度下，流體質點之運動軌跡的大小及形狀並不相同。在自由表面處，運動軌跡的位

移範圍較下層者大，且其 x 、 y 位移範圍較相近，而在接近底部的地方，則軌跡較為扁平，即 x 方向移動相對較 y 方向移動為大。流體質點運動軌跡於波動一週期後，不會封閉，而有微量的前進，此前進量即所謂質量傳輸量。圖 2-3 亦顯示了在相同的運動時間，愈接近底部的流體質點重覆的次數愈多，此說明底部質點的運動週期較短的緣故。而且由圖 2-3 可知，於自由表面處，五階解位移的距離較三階解者長，但是於自由表面之下，位於 $b/L = -0.075$ 及 $b/L = -0.15$ 的深度，五階解位移的距離反而較三階解者短。圖 2-4 為不同深度第五階流體質點的運動軌跡，由圖中可知，不同深度之流體質點將維持在其平均高程持續向前傳遞。

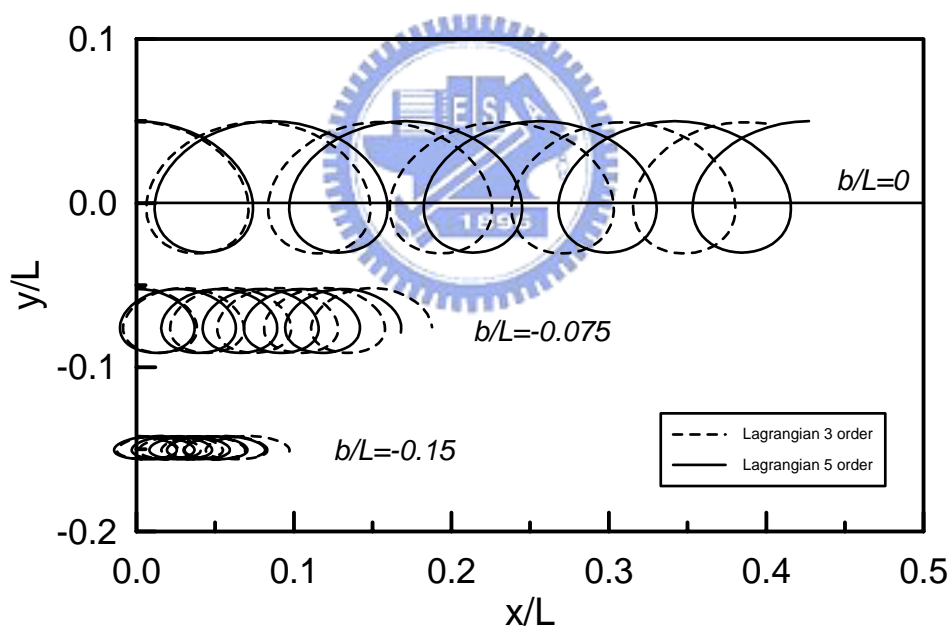


圖 2-3 不同深度第三階及第五階流體質點的運動軌跡($h/L = 0.2$ ， $H/L = 0.08$)

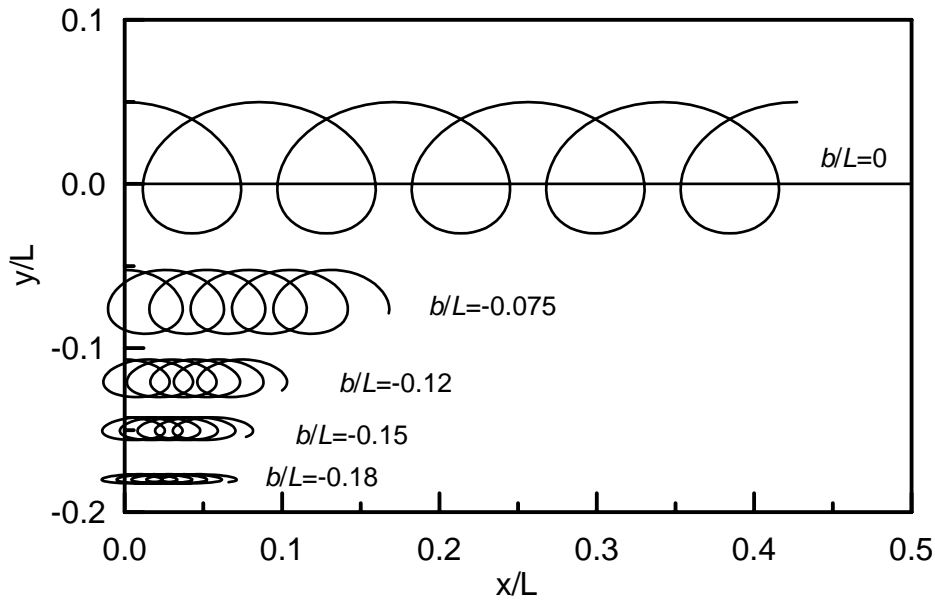


圖 2-4 不同深度第五階流體質點的運動軌跡($h/L=0.2$, $H/L=0.08$)

2-4-5 質量傳輸速度

往昔求取質量傳輸速度的方法來自於二種觀念。其一以 Eulerian 觀念求質量傳輸速度，乃對平均靜水位處的 Eulerian 解的速度採用泰勒級數展開，求得近似的波浪表面處的流場速度，再對此近似的速度取一波浪週期平均值(如 Longuet-Higgins, 1986; Ursell, 1953)。另一為以 Lagrangian 觀念求質量傳輸速度，是先利用泰勒展開的方式，將 Eulerian 系統的解轉換至 Lagrangian 參數(a, b)，再對其取一水粒子運動週期平均值。往昔方法不論採用 Eulerian 或 Lagrangian 觀點，皆採用 Eulerian 系統中的解來近似，需經過泰勒展開的過程，增加了求解的複雜性。本文因直接解析的偶數階部份會有一隨時間向前進的水平量項，若將此項除以質點運動的時間，即可得質量傳輸速度，大大簡化了往昔求取需經由泰勒展開的複雜性。

Longuet-Higgins (1987)提出深水波自由表面處的質量傳輸速度高階數值解，在此稱為正確解。表 2-2 為深水波於自由表面處質量傳輸速度的比較，表中第二欄為 Longuet-Higgins (1987)的無因次化質量

傳輸速度，表中第三欄為本文的結果，表中最後一欄為本文結果與正確解間的誤差。當 $kH/2=0.35$ ($H/L \approx 0.11$) 時，本文結果與 Longuet-Higgins (1987) 的正確解僅有 3.63% 的誤差，而只在接近極限波時有 27.82% 的誤差，說明本近似解僅不適用於探討碎波極限附近的問題，而可正確描述表面質量傳輸速度。

表 2-2 深水波於自由表面處質量傳輸速度的比較

$kH/2$	U_L	$kU_M(0)/\sigma_0$	Error (%)
0.1	0.01005	0.01005	0
0.2	0.04090	0.04080	0.24
0.3	0.09558	0.09405	1.6
0.35	0.13491	0.13001	3.63
0.4	0.18797	0.17280	8.07
0.42	0.21779	0.19196	11.86
0.44316	0.29882	0.21568	27.82

若假設通過垂直的單位寬度平面的總質量通率為零，因此需將質量傳輸速度修正為

$$\int_{-h}^0 u^* db = \int_{-h}^0 (U_M + D) db = 0 \quad (2-53)$$

其中 D 為一常數項。透過式(2-53)積分後可得總質量通率為零的修正質量傳輸速度為

$$u^* = U_{M2} - \frac{a_0^2 \sigma_0}{2h} \coth kh + U_{M4} + \frac{a_0^4 k^2 \sigma_0 (21 \cosh kh + 9 \cosh 3kh + 5 \cosh 5kh + \cosh 7kh)}{256h \sinh^7 kh} \quad (2-54)$$

式(2-54)等號右邊的第一項及第二項為二階近似解，此與 Longuet-Higgins (1953)解析非旋性前進波的质量傳輸速度結果一致，而第三項及第四項則為四階量的質量傳輸速度。圖 2-5 為以條件 $h/L=0.2$ ， $H/L=0.114$ 所計算的質量傳輸速度隨水深的分佈。圖 2-5 中實線為本近似解至四階的質量傳輸速度，虛線為本近似解至二階的質量傳輸速度。由式(2-54)可知，質量傳輸速度與振幅平方及四次方成正比，故波高越大，波浪的質量傳輸速度越顯著。由圖 2-5 中可知，質量傳輸速度在水面時最大，隨水深增加而逐漸減小並由正值轉為負值，在水底時達到最小值。圖 2-5 亦顯示，於自由表面處，四階解的質量傳輸速度較二階解大，而隨水深增加而遞減的速度亦較二階解快，當考慮的波浪條件小時，此現象並不明顯，僅可於表面處看出四階解的質量傳輸速度較二階解大，若考慮的波浪條件越大，則此現象越顯著，且四階解於底部的 ku^*/σ_0 較二階解小，並非落於同一數值，此與流體質點於自由表面處，五階解位移的距離較三階解者長的結果一致，而圖中二階解與四階解相交位置的深度即表示五階解位移的距離與三階解者相同，在此深度之上五階解位移的距離較三階解者長，在此深度之下，則五階解位移的距離較三階解者短，此現象將隨著波浪條件的增大而越顯著。

將式(2-54)對 b 微分可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial b} = & B^2 k^2 \sigma_0 \sinh 2k(b+h) \\ & + \frac{B^4 k^4 \sigma_0}{64 \sinh^4 kh} [-(24 + 7 \cosh 2kh + 20 \cosh 4kh) \\ & + 3 \cosh 6kh] \sinh 2k(b+h) \\ & + 16(8 \cosh 2kh + \cosh 4kh) \sinh 2k(b+h) \cosh 2k(b+h)]. \end{aligned} \quad (2-55)$$

式(2-55)等號右邊的第一項為二階質量傳輸速度的梯度，此梯度值自表面至底部皆為正值，由此可知，二階質量傳輸速度為非遞減函數，且於底部梯度值為零。式(2-55)等號右邊其餘項為四階量的修正，由

於 $\cosh 2k(b+h) \geq 1$ ，若取 $\cosh 2k(b+h)$ 的最小值，式(2-55)可被證明為正值，故四階質量傳輸速度的梯度在任意水深和波浪條件下皆為正值，此結果與 Ursell (1953)一致。由於非線性交互作用，自由表面處流體質點的運動速度較快，因而提高了質量傳輸速度，故在表面處四階質量傳輸速度較二階質量傳輸速度快，另一方面，為了滿足質量守恆定律，在底部四階質量傳輸速度較二階質量傳輸速度慢。Longuet-Higgins (1953)考慮流體黏滯性所得波動質量傳輸之分布與本文不考慮流體黏滯性之非旋轉波動下之結果不同。

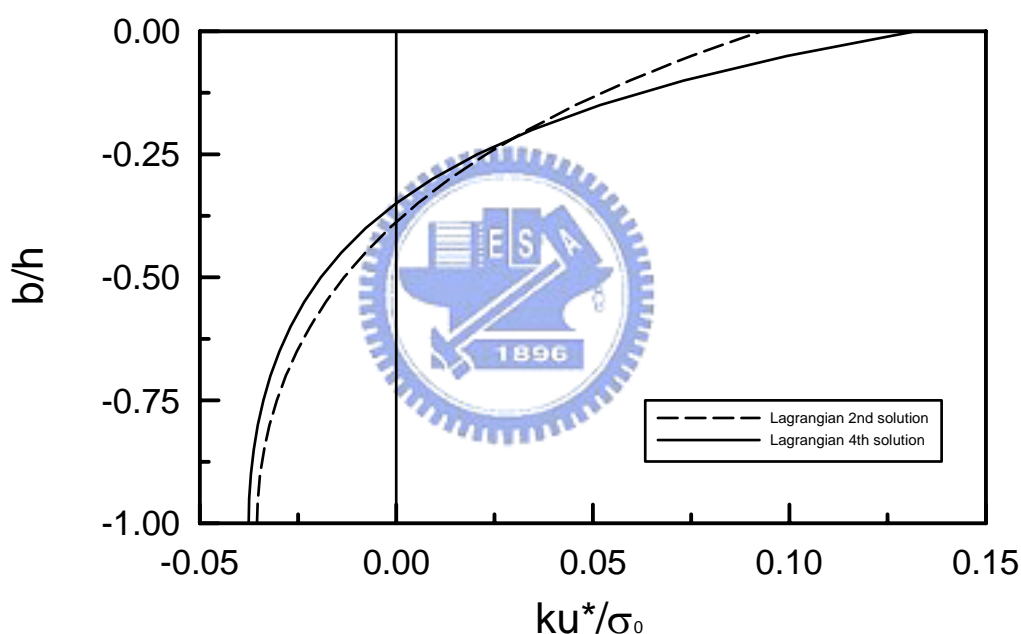


圖 2-5 第二階及第四階質量傳輸速度分佈($h/L=0.2$ ， $H/L=0.114$)

圖 2-6 為自由表面處，四階與二階質量傳輸速度比值隨著波高及水深的變化，此處極限波高的條件採用 Miche (1944)的公式估算，由圖中可知，比值隨著波高的增加而變大。在相同的相對水深，比值隨著波高的增加而漸增，表示在波浪非線性作用增強時，四階的貢獻將增加。在相同的波高條件下，比值將隨著相對水深的減少而增加，然

在相對水深為 $kh=0.3937$ 時，比值將降至 0，此時表示四階並無修正量，故將式(2-55)中的四階量令為零，可得極限水深為 $h/L=0.0627$ 。

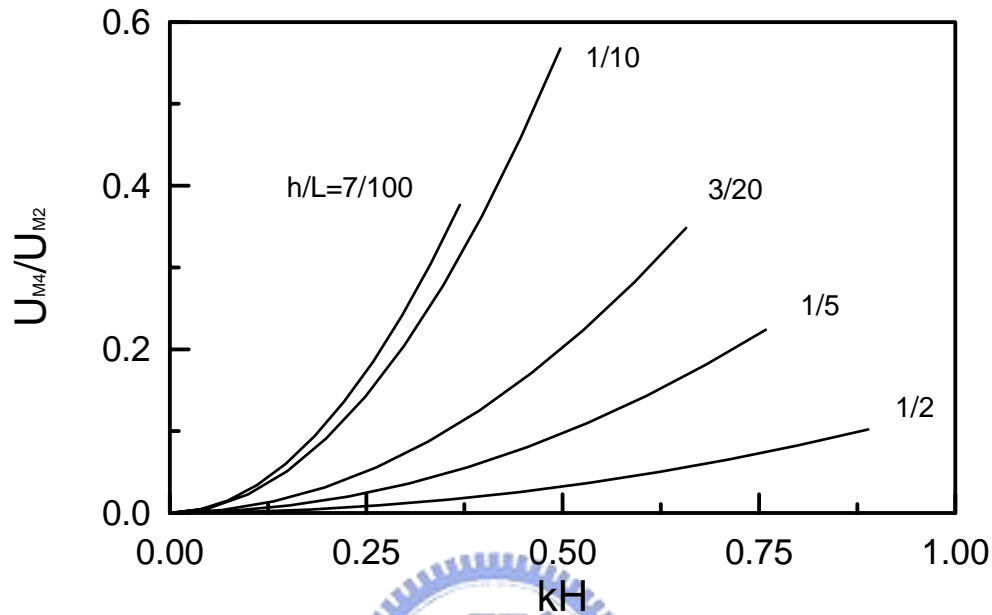


圖 2-6 自由表面處四階與二階質量傳輸速度的比值

圖 2-7 為底部四階與二階質量傳輸速度比值隨著波高及水深的變化，計算條件相同於圖 2-6，由圖中可知，在相同的相對水深，比值將隨著波高的增加而減少，表示向後的速度越強，此結果由圖 2-5 四階與二階的比較可知，而在相同的波高條件下，比值亦將隨著相對水深的減小而變小，由此可知，當非線性效應增強時，底部流體質點向後運動的速度將增強。

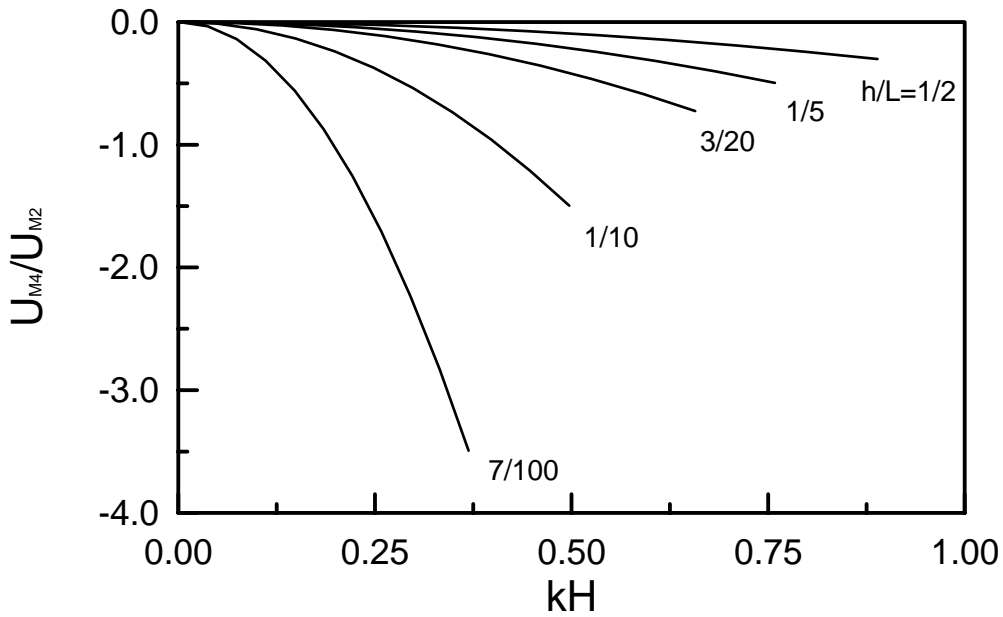


圖 2-7 底部四階與二階質量傳輸速度的比值

由圖 2-5 可知，四階與二階質量傳輸速度有一交叉點，該點表示此處無四階的修正量，由式(2-54)可得

$$\begin{aligned}
 kb = -kh + \frac{1}{2} \cosh^{-1} & \left(\frac{1}{32(8 \cosh 2kh + \cosh 4kh)} \sqrt{48 + 14 \cosh 2kh} \right. \\
 & + 40 \cosh 4kh + 6 \cosh 6kh + (6(3310 + 1040 \cosh 2kh + 3401 \cosh 4kh) \\
 & \left. + 872 \cosh 6kh + 190 \cosh 8kh + 40 \cosh 10kh + 3 \cosh 12kh) \right)^{1/2} \quad (2-56)
 \end{aligned}$$

將式(2-56)繪圖如圖 2-8 所示。圖 2-8 為圖 2-5 中四階與二階質量傳輸速度分佈曲線相交位置隨著水深的變化，此位置點僅為水深的函數，與波高的變化並無相關性，由此可知，在相同的相對水深下，圖 2-5 中四階與二階速度曲線相交的位置將不變，改變波高條件僅會改變此位置處上下的速度分佈。由圖 2-8 中可知，此位置在深水時，幾乎為一定值($kb = -0.1451$)，隨著水深的減小而降低，直到 $kh = 0.425\pi$ 時降至最低($kb = -0.1651$)，而在接近淺水時，再向上移動，當 $kh = 0.125\pi$ 時，四階與二階速度分佈曲線將相交於自由表面處。

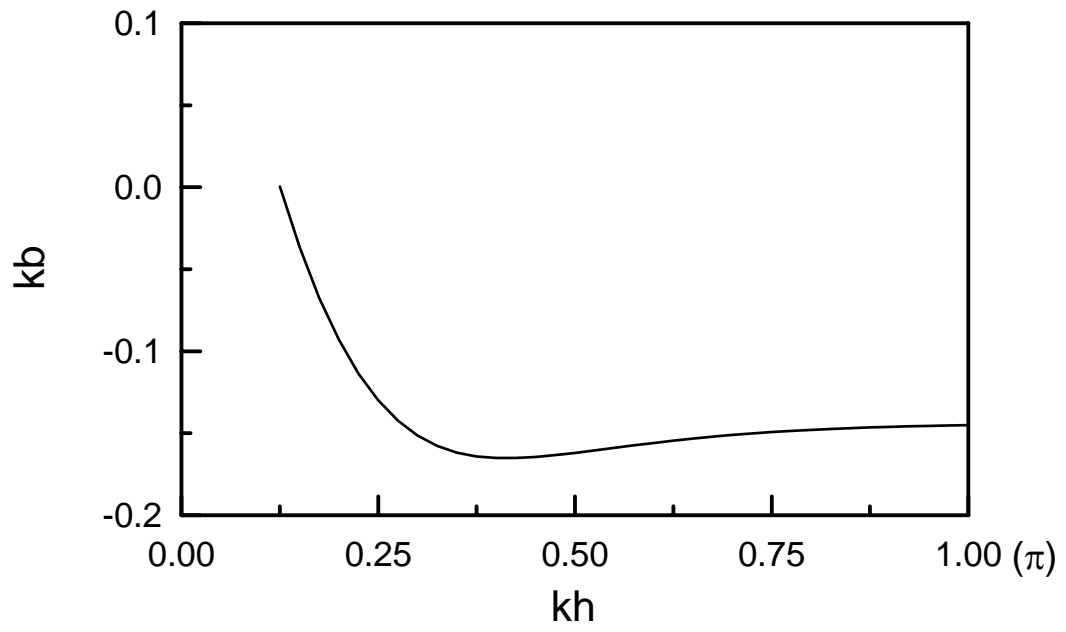


圖 2-8 四階與二階質量傳輸速度分佈曲線相交點的變化



第三章 Eulerian 與 Lagrangian 近似解的轉換

3-1 Lagrangian 解轉換至 Eulerian 解

本文首先選定本文第二章所提出的 Lagrangian 五階解和大家所熟悉 Fenton (1985) 的 Eulerian 五階解，二者均以 $kH/2$ 為攝動參數。Fenton (1985) 指出此攝動參數明確，推導結果之計算較以其他攝動參數之理論方便。

確認 Lagrangian 系統及 Eulerian 系統流場中速度是否可以進行轉換的方式有兩種。第一種為求出相對應於 Eulerian 系統中流速勢的 Lagrangian 流速勢，再將此解轉換至 Eulerian 系統中與 Eulerian 流速勢比較。第二種為將 Lagrangian 系統中的流體質點運動軌跡對時間微分，得到流體質點的速度，再將速度解轉換至 Eulerian 系統中，並與 Eulerian 系統中流速勢對空間位置微分所得的速度相比較。本文採用第一種方式，先求出 Lagrangian 的流速勢，再將其轉換至 Eulerian 系統中，以瞭解流速勢是否可以進行轉換。

在考慮非旋轉流條件下，Eulerian 座標系統的流場流速勢為

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (3-1)$$

其中 ϕ 為 Eulerian 系統的流速勢，如同 Truesdell (1953) 提出的微分轉換關係，則透過 $\partial \phi / \partial x = \partial(\Phi, y) / J \partial(a, b)$ 及 $\partial \phi / \partial y = \partial(x, \Phi) / J \partial(a, b)$ 的轉換關係式，可將式(3-1)轉換成

$$x_t = \frac{1}{J} (\Phi_a y_b - \Phi_b y_a) \quad (3-2a)$$

$$y_t = \frac{1}{J} (x_a \Phi_b - x_b \Phi_a) \quad (3-2b)$$

其中 $J = \partial(x, y) / \partial(a, b)$ 為 Jacobian 運算，表示體積膨脹率， Φ 為 Lagrangian 系統的流速勢。由式(3-2a)及式(3-2b)可知，利用 Cramer

法則，即可獲得 Lagrangian 座標系統中流速勢對水平及垂直方向的梯度表示式如下

$$\Phi_a = x_t x_a + y_t y_a \quad (3-3a)$$

$$\Phi_b = x_t x_b + y_t y_b \quad (3-3b)$$

如同第 2-2 節的攝動解析技術，對式(3-3a)及式(3-3b)進行攝動展開後，將流體質點運動軌跡的五階近似解代入攝動展開式，並將式(3-3a)對 a 積分，再代入式(3-3b)，對 b 積分，則可得 Lagrangian 流速勢為

$$\begin{aligned} \frac{k^2 \Phi}{\sigma_0} = & \sum_{i=1}^5 \sum_{m=1}^i \sum_{n=1}^i D_{imn} \cosh mk(b+h) \sin n(ka - \sigma t) \quad (\text{for } i, m, n : \text{odd}) \\ & + \sum_{i=2}^4 \sum_{m=0}^i \sum_{n=2}^i D_{imn} \cosh mk(b+h) \sin n(ka - \sigma t) \quad (\text{for } i, m, n : \text{even}) \\ & + \sum_{i=2}^4 D_{i00} \sigma_0 t \quad (\text{for } i : \text{even}) \end{aligned} \quad (3-4)$$

其中 D_i 為係數，為便於閱讀，將此係數詳列於附錄 D。

由第 2-4-1 節可知，透過 Longuet-Higgins (1986) 提出波浪週波率於 Lagrangian 與 Eulerian 兩種不同系統的關係

$$\sigma_L = \sigma_E - kU_M \quad (3-5)$$

其中 σ_L 為 Lagrangian 週波率， σ_E 為 Eulerian 週波率， U_M 為質量傳輸速度。式(3-5)表示 Lagrangian 系統的週波率與 Eulerian 系統的週波率的關係，且本文經轉換而得與 Fenton (1985) 的 Stokes 波之五階週波率是相同的。

陳(1996)透過連續泰勒展開的方式將 Lagrangian 解成功轉換至 Eulerian 解。本文應用陳(1996)提出的轉換技術，驗證本文所提出的 Lagrangian 五階解是否可轉換至相同攝動參數 Fenton (1985) 的 Eulerian 五階解。令 Lagrangian 系統與 Eulerian 系統之位相關係及高程關係分別表示為

$$\theta_L = \theta_E + \xi \quad (3-6a)$$

$$Z_L = Z_E - \zeta \quad (3-6b)$$

其中 $\theta_L = ka - \sigma_L t$ 為 Lagrangian 位相函數， $\theta_E = kx - \sigma_E t$ 為 Eulerian 位相函數， $Z_L = k(b+h)$ 為 Lagrangian 高程， $Z_E = k(h+y)$ 為 Eulerian 高程， h 為平均水位。在式(3-5)的應用下，式(3-6a)及式(3-6b)可改為

$$\xi = \theta_L - \theta_E = k(a-x) + (\sigma_E - \sigma_L)t = k(a-x + U_M t) \quad (3-7a)$$

$$\zeta = Z_E - Z_L = k(y-b) \quad (3-7b)$$

式(3-4)中，最後一項與 $\sigma_0 t$ 相乘，僅於偶數階才會出現，此項透過轉換後會產生時間常數項。今將式(3-4)中， θ_L 的函數和 Z_L 的函數，分別在 θ_E 處和 Z_E 處展開泰勒級數

$$\begin{aligned} \frac{k^2 \Phi}{\sigma_0} &= \sum_{i=1}^5 \sum_{m=1}^i \sum_{n=1}^i D_{imn} \cosh mZ_L \sin n\theta_L \quad (\text{for } i, m, n : \text{odd}) \\ &+ \sum_{i=2}^4 \sum_{m=0}^i \sum_{n=2}^i D_{imn} \cosh mZ_L \sin n\theta_L \quad (\text{for } i, m, n : \text{even}) \\ &+ \sum_{i=2}^4 D_{i00} \sigma_0 t \quad (\text{for } i : \text{even}) \\ &= D_{111} \left(\sum_{r=0}^4 \frac{(-\zeta)^r}{r!} \frac{\partial^r}{\partial Z_L^r} \cosh Z_L \right)_{Z_L=Z_E} \left(\sum_{s=0}^4 \frac{\xi^s}{s!} \frac{\partial^s}{\partial \theta_L^s} \sin \theta_L \right)_{\theta_L=\theta_E} \\ &+ \sum_{m=0}^2 D_{2m2} \left(\sum_{r=0}^3 \frac{(-m\zeta)^r}{r!} \frac{\partial^r}{\partial Z_L^r} \cosh mZ_L \right)_{Z_L=Z_E} \left(\sum_{s=0}^3 \frac{(2\xi)^s}{s!} \frac{\partial^s}{\partial \theta_L^s} \sin 2\theta_L \right)_{\theta_L=\theta_E} \\ &+ \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 D_{3mn} \left(\sum_{r=0}^2 \frac{(-m\zeta)^r}{r!} \frac{\partial^r}{\partial Z_L^r} \cosh mZ_L \right)_{Z_L=Z_E} \\ &\quad \times \left(\sum_{s=0}^2 \frac{(n\xi)^s}{s!} \frac{\partial^s}{\partial \theta_L^s} \sin n\theta_L \right)_{\theta_L=\theta_E} \\ &+ \sum_{m=0}^4 \sum_{n=2}^4 D_{4mn} (\cosh mZ_E - m\zeta \sinh mZ_E) (\sin n\theta_E + n\xi \cos n\theta_E) \quad (3-8) \\ &+ \sum_{m=1}^5 \sum_{n=1}^5 D_{5mn} \cosh mZ_E \sin n\theta_E + (D_{200} + D_{400}) \sigma_0 t \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
& \xi = k(a - x + U_M t) \\
& = -M_{111} \left(\sum_{r=0}^3 \frac{(-\zeta)^r}{r!} \frac{\partial^r}{\partial Z_L^r} \cosh Z_L \right)_{Z_L=Z_E} \left(\sum_{s=0}^3 \frac{\xi^s}{s!} \frac{\partial^s}{\partial \theta_L^s} \sin \theta_L \right)_{\theta_L=\theta_E} \\
& \quad - \sum_{m=0}^2 M_{2m2} \left(\sum_{r=0}^2 \frac{(-m\zeta)^r}{r!} \frac{\partial^r}{\partial Z_L^r} \cosh mZ_L \right)_{Z_L=Z_E} \\
& \quad \quad \times \left(\sum_{s=0}^2 \frac{(2\xi)^s}{s!} \frac{\partial^s}{\partial \theta_L^s} \sin 2\theta_L \right)_{\theta_L=\theta_E} \\
& \quad - \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 M_{3mn} (\cosh mZ_E - m\zeta \sinh mZ_E) (\sin n\theta_E + n\xi \cos n\theta_E) \\
& \quad - \sum_{m=0}^4 \sum_{n=2}^4 M_{4mn} \cosh mZ_E \sin n\theta_E
\end{aligned} \tag{3-9a}$$

$$\begin{aligned}
& \zeta = k(y - b) \\
& = N_{111} \left(\sum_{r=0}^3 \frac{(-\zeta)^r}{r!} \frac{\partial^r}{\partial Z_L^r} \sinh Z_L \right)_{Z_L=Z_E} \left(\sum_{s=0}^3 \frac{\xi^s}{s!} \frac{\partial^s}{\partial \theta_L^s} \cos \theta_L \right)_{\theta_L=\theta_E} \\
& \quad + N_{222} \left(\sum_{r=0}^2 \frac{(-2\zeta)^r}{r!} \frac{\partial^r}{\partial Z_L^r} \sinh 2Z_L \right)_{Z_L=Z_E} \left(\sum_{s=0}^2 \frac{(2\xi)^s}{s!} \frac{\partial^s}{\partial \theta_L^s} \cos 2\theta_L \right)_{\theta_L=\theta_E} \\
& \quad + N_{220} \left(\sum_{r=0}^2 \frac{(-2\zeta)^r}{r!} \frac{\partial^r}{\partial Z_L^r} \sinh 2Z_L \right)_{Z_L=Z_E} \\
& \quad + \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 N_{3mn} (\sinh mZ_E - m\zeta \cosh mZ_E) (\cos n\theta_E - n\xi \sin n\theta_E) \\
& \quad + \sum_{m=2}^4 \sum_{n=2}^4 N_{4mn} \sinh mZ_E \cos n\theta_E + \sum_{m=2}^4 N_{4m0} \sinh mZ_E
\end{aligned} \tag{3-9b}$$

則透過連續的泰勒展開，並收集相同的階量至第五階，即可將 Lagrangian 系統中的五階流速勢轉換至 Eulerian 系統中，將轉換結果與 Fenton (1985) 的解析結果比較，發現轉換結果比 Fenton (1985) 原文在偶數階部份多了一項時間常數項，這是因為本文是以固定座標處理前進波，而 Fenton (1985) 是在移動座標下處理，然此項在穩定運動座標 (steady motion) 下將會消失。另外，經過比對發現 Fenton (1985) 的解析結果中五階解的係數 A_{55} 是錯誤的，其分母的係數應為 64，正確形式為 $64 \sinh kd(3 + 2S)(1 - S)^6$ 。

本文所推導出 Lagrangian 系統中之五階壓力，在式(3-7a)、式(3-7b)及 $\sinh kb = \sinh k(b+h) \cosh kh - \cosh k(b+h) \sinh kh$ 的應用下，如同流速勢的轉換，將 θ_L 和 Z_L 的函數，透過泰勒級數，分別展開在 θ_E 處和 Z_E 處

$$\begin{aligned}
\frac{kP}{\rho g} &= -kb - kB \frac{\sinh Z_L \cosh kh - \cosh Z_L \sinh kh}{\cosh kh} \cos \theta_L \\
&+ \sum_{i=3}^5 \sum_{m=1}^i \sum_{n=1}^i [E_{imn} \cosh mZ_L + F_{imn} \sinh mZ_L] \cos n\theta_L \quad (\text{for } i, m, n : \text{odd}) \\
&+ \sum_{i=2}^4 \sum_{m=0}^i \sum_{n=0}^i E_{imn} \cosh mZ_L \cos n\theta_L \quad (\text{for } i, m, n : \text{even}) \\
&+ \sum_{i=2}^4 \sum_{m=2}^i \sum_{n=0}^i F_{imn} \sinh mZ_L \cos n\theta_L \quad (\text{for } i, m, n : \text{even}) \\
&= -kb - kB \left[\sum_{r=0}^4 \frac{(-\zeta)^r}{r!} \frac{\partial^r}{\partial Z_L^r} \sinh Z_L \right]_{Z_L=Z_E} \\
&- \tanh kh \left[\sum_{r=0}^4 \frac{(-\zeta)^r}{r!} \frac{\partial^r}{\partial Z_L^r} \cosh Z_L \right]_{Z_L=Z_E} \left[\sum_{s=0}^4 \frac{\xi^s}{s!} \frac{\partial^s}{\partial \theta_L^s} \cos \theta_L \right]_{\theta_L=\theta_E} \\
&+ \sum_{m=0}^2 \sum_{n=0}^2 E_{2mn} \left(\sum_{r=0}^3 \frac{(-m\zeta)^r}{r!} \frac{\partial^r}{\partial Z_L^r} \cosh mZ_L \right)_{Z_L=Z_E} \\
&\times \left(\sum_{s=0}^3 \frac{(n\xi)^s}{s!} \frac{\partial^s}{\partial \theta_L^s} \cos n\theta_L \right)_{\theta_L=\theta_E} \\
&+ \sum_{n=0}^2 F_{22n} \left(\sum_{r=0}^3 \frac{(-2\zeta)^r}{r!} \frac{\partial^r}{\partial Z_L^r} \sinh 2Z_L \right)_{Z_L=Z_E} \left(\sum_{s=0}^3 \frac{(n\xi)^s}{s!} \frac{\partial^s}{\partial \theta_L^s} \cos n\theta_L \right)_{\theta_L=\theta_E} \\
&+ \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 [E_{3mn} \left(\sum_{r=0}^2 \frac{(-m\zeta)^r}{r!} \frac{\partial^r}{\partial Z_L^r} \cosh mZ_L \right)_{Z_L=Z_E} \\
&+ F_{3mn} \left(\sum_{r=0}^2 \frac{(-m\zeta)^r}{r!} \frac{\partial^r}{\partial Z_L^r} \sinh mZ_L \right)_{Z_L=Z_E}] \left(\sum_{s=0}^2 \frac{(n\xi)^s}{s!} \frac{\partial^s}{\partial \theta_L^s} \cos n\theta_L \right)_{\theta_L=\theta_E} \\
&+ \sum_{m=0}^4 \sum_{n=0}^4 E_{4mn} (\cosh mZ_E - m\zeta \sinh mZ_E) (\cos n\theta_E - n\xi \sin n\theta_E) \\
&+ \sum_{m=2}^4 \sum_{n=0}^4 F_{4mn} (\sinh mZ_E - m\zeta \cosh mZ_E) (\cos n\theta_E - n\xi \sin n\theta_E) \\
&+ \sum_{m=1}^5 \sum_{n=1}^5 (E_{5mn} \cosh mZ_E + F_{5mn} \sinh mZ_E) \cos n\theta_E \tag{3-10}
\end{aligned}$$

式(3-10)中的第一項 $-kb$ 可由垂直方向的流體質點運動軌跡得到

$$\begin{aligned}
- kb = & N_{111} \left(\sum_{r=0}^4 \frac{(-\zeta)^r}{r!} \frac{\partial^r}{\partial Z_L^r} \sinh Z_L \right)_{Z_L=Z_E} \left(\sum_{s=0}^4 \frac{\xi^s}{s!} \frac{\partial^s}{\partial \theta_L^s} \cos \theta_L \right)_{\theta_L=\theta_E} \\
& + N_{222} \left(\sum_{r=0}^3 \frac{(-2\zeta)^r}{r!} \frac{\partial^r}{\partial Z_L^r} \sinh 2Z_L \right)_{Z_L=Z_E} \left(\sum_{s=0}^3 \frac{(2\xi)^s}{s!} \frac{\partial^s}{\partial \theta_L^s} \cos 2\theta_L \right)_{\theta_L=\theta_E} \\
& + N_{220} \left(\sum_{r=0}^3 \frac{(-2\zeta)^r}{r!} \frac{\partial^r}{\partial Z_L^r} \sinh 2Z_L \right)_{Z_L=Z_E} \\
& + \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 N_{3mn} \left(\sum_{r=0}^2 \frac{(-m\zeta)^r}{r!} \frac{\partial^r}{\partial Z_L^r} \sinh mZ_L \right)_{Z_L=Z_E} \\
& \times \left(\sum_{s=0}^2 \frac{(n\xi)^s}{s!} \frac{\partial^s}{\partial \theta_L^s} \cos n\theta_L \right)_{\theta_L=\theta_E} \\
& + \sum_{m=2}^4 \sum_{n=2}^4 N_{4mn} (\sinh mZ_E - m\zeta \cosh mZ_E) (\cos n\theta_E - n\xi \sin n\theta_E) \\
& + \sum_{m=2}^4 N_{4m0} (\sinh mZ_E - m\zeta \cosh mZ_E) + \sum_{m=1}^5 \sum_{n=1}^5 N_{5mn} \sinh mZ_E \cos n\theta_E \quad (3-11)
\end{aligned}$$

將式(3-9a)及式(3-9b)代入式(3-10)和式(3-11)中，並透過連續的泰勒展開，在收集相同的階量至第五階後，即可將 Lagrangian 系統中的五階壓力轉換至 Eulerian 系統中。

若將 Lagrangian 系統流體質點運動軌跡的垂直分量，其中 θ_L 的函數經泰勒級數展開在 θ_E 處，再取 $b=0$ ，即可得到 Eulerian 的水位表示式

$$\begin{aligned}
ky = & N_{111} \sinh kh \left(\sum_{s=0}^4 \frac{\xi^s}{s!} \frac{\partial^s}{\partial \theta_L^s} \cos \theta_L \right)_{\theta_L=\theta_E} \\
& + N_{222} \sinh 2kh \left(\sum_{s=0}^3 \frac{(2\xi)^s}{s!} \frac{\partial^s}{\partial \theta_L^s} \cos 2\theta_L \right)_{\theta_L=\theta_E} + N_{220} \sinh mkh \\
& + \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 N_{3mn} \sinh mkh \left(\sum_{s=0}^2 \frac{(n\xi)^s}{s!} \frac{\partial^s}{\partial \theta_L^s} \cos n\theta_L \right)_{\theta_L=\theta_E} \quad (3-12) \\
& + \sum_{m=2}^4 \sum_{n=2}^4 N_{4mn} \sinh mkh (\cos n\theta_E - n\xi \sin n\theta_E) \\
& + \sum_{m=2}^4 N_{4m0} \sinh mkh + \sum_{m=1}^5 \sum_{n=1}^5 N_{5mn} \sinh mkh \cos n\theta_E
\end{aligned}$$

將式(3-9a)代入式(3-12)中，並透過連續的泰勒展開，在收集相同的階量至第五階後，即可將 Lagrangian 系統中的五階水位轉換至 Eulerian

系統中，由轉換結果可知，Lagrangian 系統中的水位可完全轉換至 Eulerian 系統中，且與 Fenton (1985) 攝動展開 Stokes 波所得之五階波形是相同的。

至此，本文中週波率、波壓及波形的 Lagrangian 五階解和依照第 2-2 節的攝動解析技術所導出的 Lagrangian 五階流速勢皆可完全轉換至 Fenton (1985) 的 Eulerian 五階解。

3-2 Eulerian 解轉換至 Lagrangian 解

往昔學者在進行 Eulerian 解轉換至 Lagrangian 解時，皆如同 Longuet-Higgins (1953) 一般，利用泰勒展開的方式，將 Eulerian 速度解的 x 展開在 a ， y 展開在 b ，以得到 Lagrangian 速度解，但此種轉換方式僅能對二階 Eulerian 速度解進行轉換，而在三階由於會產生隨時間成長的不合理項，故至目前為止均無法成功轉換出 Lagrangian 三階或以上的結果。由式(3-5)可知，Eulerian 系統與 Lagrangian 系統中的週波率並不相同，為了能轉換出合理的 Lagrangian 解，於是本文在考慮週波率的影響因素下，首先提出對週波率進行轉換的概念，故除了將 Eulerian 速度解的 x 展開在 a ， y 展開在 b 外，亦同時將 σ_E 轉換至 σ_L 。

考慮於時間 t 時，位於 (x, y) 位置的流體質點，是由 $t=0$ 時，位於 (a, b) 位置的流體質點流來的。因此，對同一流體質點，其速度於 Eulerian 系統與 Lagrangian 系統中應相同，即

$$u(x, y, t) = U(a, b, t) \quad (3-13a)$$

$$v(x, y, t) = V(a, b, t) \quad (3-13b)$$

而

$$x = a + \int_0^t U(a, b, t) dt \quad (3-14a)$$

$$y = b + \int_0^t V(a, b, t) dt \quad (3-14b)$$

其中 $u(x, y, t)$ 和 $v(x, y, t)$ 分別為 Eulerian 系統中 (x, y) 處的水平及垂直速度，而 $U(a, b, t)$ 和 $V(a, b, t)$ 分別為 Lagrangian 系統中流體質點的水平及垂直速度。

依照攝動理論，可將變動的變數表示為各變動量的和

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x, y, t) \quad (3-15a)$$

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n v_n(x, y, t) \quad (3-15b)$$

$$x = a + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n x_n(a, b, t) \quad (3-15c)$$

$$y = b + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n y_n(a, b, t) \quad (3-15d)$$

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n U_n(a, b, t) \quad (3-15e)$$

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n V_n(a, b, t) \quad (3-15f)$$

$$U_M = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{2n} U_{M2n}(a, b) \quad (3-15g)$$

$$\sigma_L = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} \sigma_{L2n}(a, b) \quad (3-15h)$$

$$\sigma_E = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} \sigma_{E2n} \quad (3-15i)$$



其中 ε 為一代表階量的參數，式(3-15g)為質量傳輸速度，僅在偶數階出現，式(3-15h)和式(3-15i)分別為 Lagrangian 週波率及 Eulerian 週波率，僅在奇數階會產生修正量。由於本文將對 Fenton (1985) 於 Eulerian 系統中攝動展開 Stokes 波所得之五階解進行轉換，故 $\varepsilon = kH/2$ ， x 和 y 為 Lagrangian 系統中流體質點的軌跡。

今將式(3-15a)、式(3-15b)、式(3-15e)及式(3-15f)代入式(3-13a)和式(3-13b)中，並利用泰勒級數及式(3-14a)、式(3-14b)的關係，將 x 展開在 a ，將 y 展開在 b ，收集相同的 ε ，即可得各階 Eulerian 系統與 Lagrangian 系統的關係。

今若取出 $O(\varepsilon)$ ，可得第一階為

$$U_1(a,b,t) = u_1(x,y,t)|_{x=a,y=b} \quad (3-16a)$$

$$V_1(a,b,t) = v_1(x,y,t)|_{x=a,y=b} \quad (3-16b)$$

由式(3-16)可知，該式僅將 Eulerian 位相函數中的 (x,y) 代換成 Lagrangian 位相函數中的 (a,b) ，並未對 Eulerian 位相函數中週波率進行轉換。Flierl (1981)提出當有質量傳輸速度存在時，Eulerian 週波率與 Lagrangian 週波率將不同。Eulerian 週波率與 Lagrangian 週波率間的差異量可表示為

$$\Delta\sigma(a,b) = \sigma_E - \sigma_L = kU_M \quad (3-17)$$

由於 Eulerian 系統與 Lagrangian 系統中的週波率並不相同，應用式(3-17)至 $\cos(ka - \sigma_E t)$ 和 $\sin(ka - \sigma_E t)$ ，並將其中差異量造成的函數展開成 MacLaurin 級數的形式，則可將式(3-16a)及式(3-16b)的位相分別表示成

$$\begin{aligned} \cos(ka - \sigma_E t) &= \cos(ka - \sigma_L t - \Delta\sigma t) \\ &= \cos(ka - \sigma_L t)\cos(\Delta\sigma t) + \sin(ka - \sigma_L t)\sin(\Delta\sigma t) \\ &= \cos(ka - \sigma_L t)\left[1 - \frac{(\Delta\sigma t)^2}{2} + \frac{(\Delta\sigma t)^4}{24} + \dots\right] \\ &\quad + \sin(ka - \sigma_L t)\left[\Delta\sigma t - \frac{(\Delta\sigma t)^3}{6} + \frac{(\Delta\sigma t)^5}{120} + \dots\right] \end{aligned} \quad (3-18a)$$

$$\begin{aligned} \sin(ka - \sigma_E t) &= \sin(ka - \sigma_L t - \Delta\sigma t) \\ &= \sin(ka - \sigma_L t)\cos(\Delta\sigma t) - \cos(ka - \sigma_L t)\sin(\Delta\sigma t) \\ &= \sin(ka - \sigma_L t)\left[1 - \frac{(\Delta\sigma t)^2}{2} + \frac{(\Delta\sigma t)^4}{24} + \dots\right] \\ &\quad - \cos(ka - \sigma_L t)\left[\Delta\sigma t - \frac{(\Delta\sigma t)^3}{6} + \frac{(\Delta\sigma t)^5}{120} + \dots\right] \end{aligned} \quad (3-18b)$$

式(3-18a)及式(3-18b)等號右邊中， $\cos(ka - \sigma_L t)$ 與 $\sin(ka - \sigma_L t)$ 之係數為 $\cos(\Delta\sigma t)$ 及 $\sin(\Delta\sigma t)$ 的 MacLaurin 級數，此級數任一後項比前項值為高二階量。將 Fenton (1985) 一階解代入式(3-16)並應用式(3-18)，可得 Lagrangian 速度

$$U_1(a, b, t) = U_{1(1)} + U_{1(3)} + U_{1(5)} + \dots \quad (3-19a)$$

$$V_1(a, b, t) = V_{1(1)} + V_{1(3)} + V_{1(5)} + \dots \quad (3-19b)$$

式(3-19a)及式(3-19b)中下方的括號代表階量，由式中可知在位相進行轉換時會產生高階量，而此高階量 $U_{1(3)}$ 、 $U_{1(5)}$ 、 $V_{1(3)}$ 和 $V_{1(5)}$ 將合併至三階及五階的轉換過程中，今取出第一項來說明

$$\begin{aligned} \int U_{1(1)} dt &= -\frac{\sigma_0}{\sigma_L} B \cosh k(b+h) \sin(ka - \sigma_L t) \\ &= x_1 + x_{1(3)} + x_{1(5)} + \dots \end{aligned} \quad (3-20a)$$

$$\begin{aligned} \int V_{1(1)} dt &= \frac{\sigma_0}{\sigma_L} B \sinh k(b+h) \cos(ka - \sigma_L t) \\ &= y_1 + y_{1(3)} + y_{1(5)} + \dots \end{aligned} \quad (3-20b)$$

其中， $a_0 = B \sinh kh = H/2$ 為波動的水位振幅，透過式(3-5)可知， $\sigma_{L0} = \sigma_{E0} = \sigma_0$ ，故

$$x_1 = -B \cosh k(b+h) \sin(ka - \sigma_L t) \quad (3-21a)$$

$$y_1 = B \sinh k(b+h) \cos(ka - \sigma_L t) \quad (3-21b)$$

式(3-20)積分過程中產生的高階量 $x_{1(3)}$ 、 $x_{1(5)}$ 、 $y_{1(3)}$ 和 $y_{1(5)}$ ，將合併至三階及五階的轉換過程中，由式(3-21a)及式(3-21b)可知，Eulerian 系統中速度的第一階解可轉換至 Lagrangian 系統中運動軌跡的第一階解。

今若取出 $O(\varepsilon^2)$ ，可得第二階為

$$U_2(a, b, t) = [u_2 + x_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + y_1 \frac{\partial u_1}{\partial y}]_{x=a, y=b} \quad (3-22a)$$

$$V_2(a, b, t) = [v_2 + x_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + y_1 \frac{\partial v_1}{\partial y}]_{x=a, y=b} \quad (3-22b)$$

式(3-22a)及式(3-22b)的第一項為直接將 Eulerian 解轉換的結果，第二及第三項為對 (x, y) 泰勒展開後所產生的非線性交互作用量。將 Fenton (1985) 第一階及第二階的流場速度和第一階的流體質點運動軌跡代入式(3-20a)和式(3-20b)的等號右邊，並如同第一階對位相進行轉換一般，透過式(3-17)，並將其中差異量造成的函數展開成級數的形式，可得

$$U_2(a, b, t) = U_{2(2)} + U_{2(4)} + \dots \quad (3-23a)$$

$$V_2(a, b, t) = V_{2(2)} + V_{2(4)} + \dots \quad (3-23b)$$

式(3-23a)及式(3-23b)中 $U_{2(4)}$ 和 $V_{2(4)}$ 將合併至四階的轉換過程中，今取出第二階量則可得到 Lagrangian 系統中第二階的質點運動速度。

將式(3-23)中第一項進行積分，可得

$$\int U_{2(2)} dt = x_2 + x_{2(4)} + \dots \quad (3-24a)$$

$$\int V_{2(2)} dt = y_2 + y_{2(4)} + \dots \quad (3-24b)$$

其中

$$x_2 = B^2 k \left[-\frac{3}{8 \sinh^2 kh} \cosh 2k(b+h) + \frac{1}{4} \right] \sin 2(ka - \sigma_L t) + \frac{1}{2} B^2 k \cosh 2k(b+h) \sigma_0 t \quad (3-25a)$$

$$y_2 = \frac{3}{8} \frac{B^2 k}{\sinh^2 kh} \sinh 2k(b+h) \cos 2(ka - \sigma_L t) \quad (3-25b)$$

由第 2-2 節可知，於 Eulerian 系統與 Lagrangian 系統中的平均水位不同，故將 Eulerian 系統轉換至 Lagrangian 系統時，需進行水位修正，於是依照第 2-2 節的攝動展開技術，攝動展開 Lagrangian 系統中連續方程式 $J=1$ ，並將轉換所得的 Lagrangian 解代入攝動展開式中，故在滿足連續方程式下， y_2 應修正為

$$y_2 = \frac{3}{8} \frac{B^2 k}{\sinh^2 kh} \sinh 2k(b+h) \cos 2(ka - \sigma_L t) + \frac{1}{4} B^2 k \sinh 2k(b+h) \quad (3-26)$$

式(3-26)的第二項為水位的修正量，往昔學者並未做此修正，故無法滿足 Lagrangian 系統中最基本的連續方程式。由式(3-25a)及式(3-26)可知，Eulerian 系統可轉換至 Lagrangian 系統至第二階解。接著透過式(2-29)，可求得質量傳輸速度

$$U_{M2}(a,b) = \frac{1}{2} B^2 k \cosh 2k(b+h) \sigma_0 \quad (3-27)$$

若取出 $O(\varepsilon^3)$ ，可得第三階為

$$U_3(a,b,t) = [u_3 + x_2 \frac{\partial u_1}{\partial x} + x_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{x_1^2}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + y_2 \frac{\partial u_1}{\partial y} + y_1 \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{y_1^2}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + x_1 y_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y}]_{x=a, y=b} \quad (3-28a)$$

$$V_3(a,b,t) = [v_3 + x_2 \frac{\partial v_1}{\partial x} + x_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{x_1^2}{2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + y_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + y_1 \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{y_1^2}{2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + x_1 y_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y}]_{x=a, y=b} \quad (3-28b)$$

式(3-28a)及式(3-28b)的第一項為直接將 Eulerian 解轉換的結果，第二至第八項為對 (x, y) 泰勒展開後所產生的非線性交互作用量。代入 Fenton (1985) 的 Eulerian 解及第一階、第二階的轉換結果，且如同前二階一般，對位相進行轉換，並加入式(3-19a)及式(3-19b)中第二項，對位相轉換造成的三階量，可得

$$U_3(a,b,t) = U_{3(3)} + U_{1(3)} + U_{3(5)} + \dots \quad (3-29a)$$

$$V_3(a,b,t) = V_{3(3)} + V_{1(3)} + V_{3(5)} + \dots \quad (3-29b)$$

式(3-29a)及式(3-29b)中， $U_{3(5)}$ 和 $V_{3(5)}$ 為轉換過程中產生的五階量，將合併至第五階的轉換結果，由式(3-29a)及式(3-29b)中第一及第二項即可得到 Lagrangian 系統中第三階的質點運動速度。往昔學者在轉換三階解時，於質點運動速度會產生不合理的時間項，主要是因為沒有對週波率進行轉換，本文對週波率進行轉換後，會產生如式(3-29a)

的 $U_{1(3)}$ 和式(3-29b)的 $V_{1(3)}$ ，此二項即可消去不合理的時間項。透過式(3-5)可知，流體質點的第二階運動週波率為

$$\begin{aligned}\sigma_{L2} &= \sigma_{E2} - kU_{M2} \\ &= \frac{B^2 k^2 \sigma_0 (8 + \cosh 4kh)}{16 \sinh^2 kh} - \frac{1}{2} B^2 k^2 \sigma_0 \cosh 2k(b+h)\end{aligned}\quad (3-30)$$

在考慮週波率影響的情況下，第一階的質點運動速度經過積分後會產生三階量，故

$$\int (U_{3(3)} + U_{1(3)}) dt + x_{1(3)} = x_3 + x_{3(5)} + \dots \quad (3-31a)$$

$$\int (V_{3(3)} + V_{1(3)}) dt + y_{1(3)} = y_3 + y_{3(5)} + \dots \quad (3-31b)$$

其中

$$\begin{aligned}x_{1(3)} &= -\frac{\sigma_0}{\sigma_L} B \cosh k(b+h) \sin(ka - \sigma_L t) \\ &= -\frac{\sigma_0}{\sigma_{L0} + \sigma_{L2}} B \cosh k(b+h) \sin(ka - \sigma_L t)\end{aligned}\quad (3-32)$$

由於 $\sigma_{L0} + \sigma_{L2} = \sigma_0 (1 + \sigma'_{L2})$ ，利用二項式定理，則 $x_{1(3)} = -\sigma'_{L2} x_1$ 。同理， $y_{1(3)} = -\sigma'_{L2} y_1$ 。故第三階的運動軌跡為

$$\begin{aligned}x_3 &= \frac{B^3 k^2}{\sinh^2 kh} \left\{ \left[\frac{-11 + 2 \cosh 2kh}{64 \sinh^2 kh} \cosh 3k(b+h) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{17 - 2 \cosh 2kh}{48} \cosh k(b+h) \right] \sin 3(ka - \sigma_L t) \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{-11 - 4 \cosh 2kh}{16} \cosh 3k(b+h) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{64 \sinh^4 kh} (13 + 2 \cosh 2kh + 10 \cosh 4kh \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \cosh 6kh) \cosh k(b+h) \right] \sin(ka - \sigma_L t) \right\}\end{aligned}\quad (3-33a)$$

$$\begin{aligned}
y_3 = & \frac{B^3 k^2}{\sinh^2 kh} \left\{ \left[-\frac{11 + 2 \cosh 2kh}{64 \sinh^2 kh} \sinh 3k(b+h) \right. \right. \\
& - \frac{3}{16} \sinh k(b+h) \left. \right] \cos 3(ka - \sigma_L t) \\
& + \left[\frac{7 + 2 \cosh 2kh}{16} \sinh 3k(b+h) \right. \\
& - \frac{1}{64 \sinh^2 kh} (13 + 2 \cosh 2kh + 10 \cosh 4kh \\
& \left. + 2 \cosh 6kh) \sinh k(b+h) \right] \cos(ka - \sigma_L t) \left. \right\} \quad (3-33b)
\end{aligned}$$

如同第二階一般，將轉換所得的 Lagrangian 解代入 Lagrangian 系統中連續方程式的攝動展開式中，在滿足連續方程式下，知對 y_3 不用進行修正，此結論與第 2-2-3 節一致，僅於偶數階才会有垂直方向的修正量。式(3-33a)和式(3-33b)與第 2-2-3 節解析 Lagrangian 系統的三階流體質點運動軌跡一致，故 Eulerian 系統可完全轉換到 Lagrangian 系統至第三階解。與 Longuet-Higgins (1953)之轉換方法比較，本文能成功轉換的處理關鍵有三。一為質點的 Lagrangian 週波率與空間點 Eulerian 週波率不同，而二者之轉換如式(3-18a)及式(3-18b)。第二為 Lagrangian 解在偶數階需經質量守恆條件($J=1$)有垂直修正量。第三為積分質點速度至軌跡時，需經式(3-32)之二項式展開 $1/\sigma_L$ 之高階量。

若取出 $O(\varepsilon^4)$ ，可得第四階為

$$\begin{aligned}
U_4(a, b, t) = & [u_4 + x_3 \frac{\partial u_1}{\partial x} + x_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + x_1 \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{x_1^2}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{x_1^3}{6} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} \\
& + y_3 \frac{\partial u_1}{\partial y} + y_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} + y_1 \frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{y_1^2}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{y_1^3}{6} \frac{\partial^3 u_1}{\partial y^3} \\
& + x_1 x_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + y_1 y_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \\
& + x_1 (y_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + y_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + \frac{y_1^2}{2} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x \partial y^2}) \\
& + x_2 y_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + \frac{x_1^2 y_1}{2} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^2 \partial y}]_{x=a, y=b} \quad (3-34a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_4(a,b,t) = & [v_4 + x_3 \frac{\partial v_1}{\partial x} + x_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} + x_1 \frac{\partial v_3}{\partial x} + \frac{x_1^2}{2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{x_1^3}{6} \frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3} \\
& + y_3 \frac{\partial v_1}{\partial y} + y_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + y_1 \frac{\partial v_3}{\partial y} + \frac{y_1^2}{2} \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + \frac{y_1^3}{6} \frac{\partial^3 v_1}{\partial y^3} \\
& + x_1 x_2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + y_1 y_2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} \\
& + x_1 (y_1 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y} + y_2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} + \frac{y_1^2}{2} \frac{\partial^3 v_1}{\partial x \partial y^2}) \\
& + x_2 y_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} + \frac{x_1^2 y_1}{2} \frac{\partial^3 v_1}{\partial x^2 \partial y}]_{x=a, y=b}
\end{aligned} \tag{3-34b}$$

代入 Fenton (1985) 的 Eulerian 解及各階的轉換結果，並對位相進行轉換，同時加入式(3-23a)及式(3-23b)中第二項，對位相轉換產生的四階量，可得

$$U_4(a,b,t) = U_{4(4)} + U_{2(4)} + \dots \tag{3-35a}$$

$$V_4(a,b,t) = V_{4(4)} + V_{2(4)} + \dots \tag{3-35b}$$

由式(3-35a)及式(3-35b)中可得到 Lagrangian 系統中第四階的質點運動速度，如同第三階轉換一般，式(3-35a)和式(3-35b)中的 $U_{2(4)}$ 及 $V_{2(4)}$ ，主要在消去不合理的時間項。由此，對質點速度取時間平均，可求得質量傳輸速度 U_{M4} 。而第四階的運動軌跡為

$$\int (U_{4(4)} + U_{2(4)}) dt + x_{2(4)} = x_4 + x_{4(6)} + \dots \tag{3-36a}$$

$$\int (V_{4(4)} + V_{2(4)}) dt + y_{2(4)} = y_4 + y_{4(6)} + \dots \tag{3-36b}$$

如同第三階解一般，利用二項式定理，可得 $x_{2(4)} = -\sigma'_{L2} x_2$ 和 $y_{2(4)} = -\sigma'_{L2} y_2$ 。式(3-36a)及式(3-36b)在滿足 Lagrangian 系統中的連續方程式下，需對 y_4 進行水位修正，而 x_4 與修正後的 y_4 如第 2-2-4 節解析 Lagrangian 系統的第四階流體質點運動軌跡，故 Eulerian 系統中流場速度的四階解可轉換至 Lagrangian 系統中流體質點運動軌跡的四階解。

若取出 $O(\varepsilon^5)$ ，可得第五階為

$$\begin{aligned}
U_5(a,b,t) = & [u_5 + x_4 \frac{\partial u_1}{\partial x} + x_3 \frac{\partial u_2}{\partial x} + x_2 \frac{\partial u_3}{\partial x} + x_1 \frac{\partial u_4}{\partial x} \\
& + \frac{x_2^2}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{x_1^2}{2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{x_1^3}{6} \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} + \frac{x_1^4}{24} \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} \\
& + y_4 \frac{\partial u_1}{\partial y} + y_3 \frac{\partial u_2}{\partial y} + y_2 \frac{\partial u_3}{\partial y} + y_1 \frac{\partial u_4}{\partial y} \\
& + \frac{y_2^2}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{y_1^2}{2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} + \frac{y_1^3}{6} \frac{\partial^3 u_2}{\partial y^3} + \frac{y_1^4}{24} \frac{\partial^4 u_1}{\partial y^4} \\
& + x_1 x_3 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + x_1 x_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{x_1^2 x_2}{2} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} \\
& + y_1 y_3 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + y_1 y_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{y_1^2 y_2}{2} \frac{\partial^3 u_1}{\partial y^3} \\
& + x_1 (y_3 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + y_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + y_1 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial y} + \frac{y_1^2}{2} \frac{\partial^3 u_2}{\partial x \partial y^2} \\
& + \frac{y_1^3}{6} \frac{\partial^4 u_1}{\partial x \partial y^3} + y_1 y_2 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x \partial y^2} + x_2 y_1 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^2 \partial y}) \\
& + x_2 (y_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + y_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + \frac{y_1^2}{2} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x \partial y^2}) + x_3 y_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} \\
& + \frac{x_1^2}{2} (y_2 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^2 \partial y} + y_1 \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^2 \partial y} + \frac{y_1^2}{2} \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^2 \partial y^2}) + \frac{x_1^3 y_1}{6} \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^3 \partial y}]_{x=a, y=b}
\end{aligned} \tag{3-37a}$$

$$\begin{aligned}
V_5(a,b,t) = & [v_5 + x_4 \frac{\partial v_1}{\partial x} + x_3 \frac{\partial v_2}{\partial x} + x_2 \frac{\partial v_3}{\partial x} + x_1 \frac{\partial v_4}{\partial x} \\
& + \frac{x_2^2}{2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{x_1^2}{2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + \frac{x_1^3}{6} \frac{\partial^3 v_2}{\partial x^3} + \frac{x_1^4}{24} \frac{\partial^4 v_1}{\partial x^4} \\
& + y_4 \frac{\partial v_1}{\partial y} + y_3 \frac{\partial v_2}{\partial y} + y_2 \frac{\partial v_3}{\partial y} + y_1 \frac{\partial v_4}{\partial y} \\
& + \frac{y_2^2}{2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + \frac{y_1^2}{2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial y^2} + \frac{y_1^3}{6} \frac{\partial^3 v_2}{\partial y^3} + \frac{y_1^4}{24} \frac{\partial^4 v_1}{\partial y^4} \\
& + x_1 x_3 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + x_1 x_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{x_1^2 x_2}{2} \frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3} \\
& + y_1 y_3 \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + y_1 y_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + \frac{y_1^2 y_2}{2} \frac{\partial^3 v_1}{\partial y^3} \\
& + x_1 (y_3 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} + y_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y} + y_1 \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial y} + \frac{y_1^2}{2} \frac{\partial^3 v_2}{\partial x \partial y^2} \\
& + \frac{y_1^3}{6} \frac{\partial^4 v_1}{\partial x \partial y^3} + y_1 y_2 \frac{\partial^3 v_1}{\partial x \partial y^2} + x_2 y_1 \frac{\partial^3 v_1}{\partial x^2 \partial y}) \\
& + x_2 (y_2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} + y_1 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y} + \frac{y_1^2}{2} \frac{\partial^3 v_1}{\partial x \partial y^2}) + x_3 y_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} \\
& + \frac{x_1^2}{2} (y_2 \frac{\partial^3 v_1}{\partial x^2 \partial y} + y_1 \frac{\partial^3 v_2}{\partial x^2 \partial y} + \frac{y_1^2}{2} \frac{\partial^4 v_1}{\partial x^2 \partial y^2}) + \frac{x_1^3 y_1}{6} \frac{\partial^4 v_1}{\partial x^3 \partial y}]_{x=a, y=b}
\end{aligned} \tag{3-37b}$$

由式(3-37a)及式(3-37b)並透過週波率的轉換再加上第一階及第三階解在週波率轉換過程中產生的五階量可得

$$U_5(a,b,t) = U_{5(5)} + U_{1(5)} + U_{3(5)} + \dots \quad (3-38a)$$

$$V_5(a,b,t) = V_{5(5)} + V_{1(5)} + V_{3(5)} + \dots \quad (3-38b)$$

由式(3-38a)及式(3-38b)可得到 Lagrangian 系統中第五階的質點運動速度，而透過式(3-5)可求得流體質點的第四階運動週波率 σ_{L4} ，故第五階的運動軌跡為

$$\int (U_{5(5)} + U_{1(5)} + U_{3(5)}) dt + x_{1(5)} + x_{3(5)} = x_5 + x_{5(7)} + \dots \quad (3-39a)$$

$$\int (V_{5(5)} + V_{1(5)} + V_{3(5)}) dt + y_{1(5)} + y_{3(5)} = y_5 + y_{5(7)} + \dots \quad (3-39b)$$

同樣利用二項式定理可得 $x_{1(5)} = (\sigma'_{L2} - \sigma'_{L4})x_1$ 、 $x_{3(5)} = -\sigma'_{L2}x_3$ 、 $y_{1(5)} = (\sigma'_{L2} - \sigma'_{L4})y_1$ 、 $y_{3(5)} = -\sigma'_{L2}y_3$ 。由式(3-39a)及式(3-39b)可得如 2-2-4 解析 Lagrangian 系統的第五階流體質點運動軌跡。至此，本文已將 Fenton (1985) 的 Eulerian 五階解完全轉換至本文所提出的 Lagrangian 五階解。

第四章 Eulerian 與 Lagrangian 近似解的動力特性

4-1 Eulerian 近似解的動力特性

本文應用 Fenton (1985) 的 Eulerian 近似解，將第一至第四階的解析結果代入往昔學者所提出的動力特性公式中，因公式中的積分上標為波形，其為時間及空間變動量，故需先將波形 η 先透過泰勒級數展開在 $y=0$ ，再取波長或週期平均，才能得到正確的階量。所獲得 Eulerian 近似解的動力特性至第四階量如下。其中 $u = \partial\phi/\partial x$ 與 $v = \partial\phi/\partial y$ ， ϕ 為 Fenton (1985) 所獲得之流速勢(velocity potential)， u 、 v 為穩定化座標之水平及垂直的水粒子速度。

1. 平均動量(momentum) I_E

$$I_E = \overline{\rho \int_{-h}^{\eta} u dy} = \frac{1}{8} \rho \sigma_0 H^2 \coth kh - \frac{\rho \sigma_0 k^2 H^4}{4096 \sinh^7 kh} (21 \cosh kh + 9 \cosh 3kh + 5 \cosh 5kh + \cosh 7kh) \quad (4-1)$$

2. 平均動能(kinetic energy) E_{KE}

$$E_{KE} = \overline{\frac{\rho}{2} \int_{-h}^{\eta} (u^2 + v^2) dy} = \frac{1}{16} \rho g H^2 - \frac{3 \rho g k^2 H^4}{2048 \sinh^6 kh} (4 - 2 \cosh 2kh + \cosh 4kh) \quad (4-2)$$

3. 平均位能(potential energy) E_{PE}

$$E_{PE} = \overline{\rho g \int_{-h}^{\eta} y dy} - \frac{1}{2} \rho g h^2 = \frac{1}{16} \rho g H^2 - \frac{\rho g k^2 H^4}{4096 \sinh^6 kh} (8 + 5 \cosh 2kh + 4 \cosh 4kh + \cosh 6kh) \quad (4-3)$$

4. 輻射應力(radiation stress) S_E

輻射應力為波動額外增加的應力，此外力包括壓力及動量。其定義為在與 x 軸垂直的單位面積，週期平均的動量通率

$$\begin{aligned}
 S_{xxE} = & \overline{\int_{-h}^{\eta} (p + \rho u^2) dy} - \int_{-h}^0 p_0 dy = \frac{1}{8} \rho g H^2 \left(\frac{2kh}{\sinh 2kh} + \frac{1}{2} \right) \\
 & + \frac{\rho g k^2 H^4}{16384 \sinh^7 kh \cosh kh} (80kh - 112kh \cosh 2kh \\
 & + 160kh \cosh 4kh + 16kh \cosh 6kh + 132 \sinh 2kh - 60 \sinh 4kh \\
 & + 12 \sinh 6kh - 3 \sinh 8kh)
 \end{aligned} \quad (4-4a)$$

式(4-4a)中， p_0 為靜水壓。式(4-4a)中二階量與 Longuet-Higgins 和 Stewart (1960)推導出的結果相同。在水平與 x 軸垂直之 z 方向，因 z 方向的流體質點運動速度 $w=0$ ，故在 z 軸上 z 方向的輻射應力分量為

$$\begin{aligned}
 S_{zzE} = & \overline{\int_{-h}^{\eta} (p + \rho w^2) dy} - \int_{-h}^0 p_0 dy = \frac{1}{8} \rho g H^2 \frac{kh}{\sinh 2kh} \\
 & + \frac{\rho g k^2 H^4}{16384 \sinh^7 kh \cosh kh} (-40kh + 56kh \cosh 2kh - 80kh \cosh 4kh \\
 & - 8kh \cosh 6kh - 30 \sinh 2kh + 16 \sinh 4kh - 2 \sinh 6kh + \sinh 8kh)
 \end{aligned} \quad (4-4b)$$

而 z 軸平面上 x 方向和 x 軸平面上 z 方向的分量均為

$$S_{zxE} = S_{xzE} = \overline{\int_{-h}^{\eta} \rho u w dy} = 0 \quad (4-4c)$$

故前進波二階輻射應力之向量形式為

$$S_E = \begin{pmatrix} S_{xxE} & S_{xzE} \\ S_{zxE} & S_{zzE} \end{pmatrix} \quad (4-4d)$$

5. 平均總動壓 P_E

$$P_E = \overline{\int_{-h}^{\eta} (p + \rho w^2) dy} - \int_{-h}^0 p_0 dy = S_{zzE} \quad (4-5)$$

6. 平均能通率(energy flux) F_E

$$\begin{aligned}
F_E &= \int_{-h}^{\eta} (p + \frac{\rho}{2}(u^2 + v^2) + \rho gy) u dy = \frac{1}{16} \rho g H^2 \frac{\sigma_0}{k} (1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh}) \\
&+ \frac{\rho g \sigma_0 k H^4}{16384 \sinh^7 kh \cosh kh} (104kh - 124kh \cosh 2kh + 88kh \cosh 4kh \\
&+ 4kh \cosh 6kh + 112 \sinh 2kh - 44 \sinh 4kh + 8 \sinh 6kh - 3 \sinh 8kh) \\
&\equiv E_E V_e
\end{aligned} \quad (4-6)$$

波浪能通率之定義為波浪能量與能量傳遞速度之乘積。式(4-6)中， E_E 為波浪能量，即動能與位能的和， V_e 為能量傳遞速度，當考慮微小振幅波時，由微小振幅波理論(見 Dean 和 Dalrymple, 1991)可知，波浪能量及能量傳遞速度分別為 $\rho g H^2 / 8$ 和 $C_g = (1 + 2kh / \sinh 2kh)c / 2$ 。若比較不同波高能量傳遞速度與微小振幅波之能量傳遞速度，示如圖 4-1。由圖 4-1 之比值都大於 1 之結果，顯示非線性波浪理論比線性波浪理論有較高之能量傳遞速度。當波高小時，能量傳遞速度比值接近於 1，線性波理論足可描述能量傳遞速度，若波高較大時，能量傳遞速度比值約為 1.42，顯示能量傳遞速度高於以微小振幅波理論估算者差 42%。

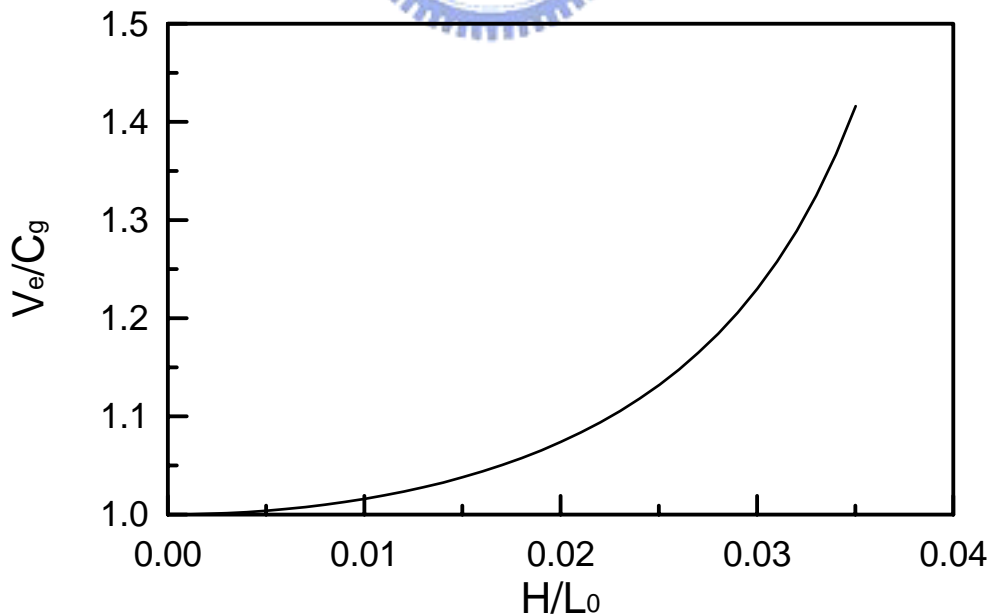


圖 4-1 不同波高之能量傳遞速度與微小振幅波理論值之比值

$$(T_E = 8 \text{ sec} , h = 5 \text{ m} , h/L \approx 1/11)$$

7. 動力特性間的關係

Longuet-Higgins (1975) 考慮波動場在平均 Eulerian 流速為零之參考座標下，推導出動力特性間之公式。本文利用 Longuet-Higgins (1975) 所提出動力特性的關係來檢驗高階 Eulerian 近似解動力特性的正確性。依照其所推導之公式，先求出底部水粒子速度之平方均值

$$\begin{aligned} \overline{u_b^2} &= 2(R - gh) - c^2 = \frac{gkH^2}{4\sinh 2kh} \\ &\quad - \frac{gk^3H^4}{1024\sinh^7 kh \cosh kh} (5 - 7\cosh 2kh + 10\cosh 4kh + \cosh 6kh) \end{aligned} \quad (4-7)$$

其中 R 為伯努力常數， c 為波速。本文引用 Fenton (1985) 的 Eulerian 近似解結果。水平輻射應力與平均動能、平均位能及底部水粒子速度之平方均值的關係如式(4-8)

$$S_{xx} = 4E_{KE} - 3E_{PE} + \rho \overline{u_b^2} \quad (4-8)$$

本文發現將式(4-2)、式(4-3)與式(4-7)代入式(4-8)中所求得之 S_{xx} ，與本文由定義所求得之 S_{xxE} 相同。故由式(4-8)可確認 Eulerian 近似解平均水平輻射應力是正確的。

同樣的，透過平均動量、平均動能、平均位能及底部水粒子速度之平方均值的關係可求出平均能通率為式(4-9)

$$F = c(3E_{KE} - 2E_{PE}) + \frac{1}{2} \overline{u_b^2} (I_E + \rho ch) = F_E \quad (4-9)$$

由式(4-9)的運算結果亦與 Eulerian 近似解平均能通率相同，說明本文之推導結果是正確的。

4-2 Lagrangian 近似解的動力特性

由於 Lagrangian 系統是採用參數來描述流體質點的運動行為，故在計算 Lagrangian 近似解的動力特性時，需先將空間位置 (x, y) 變換至流體質點的參數 (a, b) ，故

$$dxdy = J(a,b)dadb \quad (4-10)$$

其中 $J(a,b) = \partial(x,y)/\partial(a,b)$ 為 Jacobian。在本文之水粒子為不可壓縮流體，因此 $J(a,b) = 1$ ，滿足 Lagrangian 系統中的連續方程式。本文應用第二章本文提出的 Lagrangian 近似解，將第一至第四階的解析結果代入往昔學者所提出的動力特性公式中，則 Lagrangian 近似解的動力特性至第四階量如下，其中 $u = x_i$ 與 $v = y_i$ 。各種動力特性依其定義推導，其過程不再贅述，簡列如下。

1. 平均動量 I_L

$$\begin{aligned} I_L &= \overline{\rho \int_{-h}^{\eta} u dy} = \frac{\rho}{L} \int_0^L \int_{-h}^0 u J(a,b) db da = \frac{1}{8} \rho \sigma_0 H^2 \coth kh \\ &\quad - \frac{\rho \sigma_0 k^2 H^4}{4096 \sinh^7 kh} (21 \cosh kh + 9 \cosh 3kh + 5 \cosh 5kh + \cosh 7kh) = I_E \end{aligned} \quad (4-11)$$

2. 平均動能 E_{kL}

$$\begin{aligned} E_{kL} &= \overline{\frac{\rho}{2} \int_{-h}^{\eta} (u^2 + v^2) dy} = \frac{\rho}{2L} \int_0^L \int_{-h}^0 (u^2 + v^2) J(a,b) db da \\ &= \frac{1}{16} \rho g H^2 - \frac{3 \rho g k^2 H^4}{2048 \sinh^6 kh} (4 - 2 \cosh 2kh + \cosh 4kh) = E_{kE} \end{aligned} \quad (4-12)$$

3. 平均位能 E_{pL}

$$\begin{aligned} E_{pL} &= \overline{\rho g \int_{-h}^{\eta} y dy} - \frac{1}{2} \rho g h^2 = \frac{\rho g}{L} \int_0^L \int_{-h}^0 y J(a,b) db da - \frac{1}{2} \rho g h^2 \\ &= \frac{1}{16} \rho g H^2 - \frac{\rho g k^2 H^4}{4096 \sinh^6 kh} (8 + 5 \cosh 2kh + 4 \cosh 4kh + \cosh 6kh) \\ &= E_{pE} \end{aligned} \quad (4-13)$$

4. 輻射應力 S_L

$$\begin{aligned}
 S_{xxL} &= \overline{\int_{-h}^{\eta} (P + \rho u^2) dy} - \int_{-h}^0 P_0 dy \\
 &= \frac{1}{L} \int_0^L \int_{-h}^0 (P + \rho u^2) J(a, b) db da - \frac{1}{L} \int_0^L \int_{-h}^0 (-\rho g b) J(a, b) db da \\
 &= \frac{1}{8} \rho g H^2 \left(\frac{2kh}{\sinh 2kh} + \frac{1}{2} \right) \\
 &\quad + \frac{\rho g k^2 H^4}{16384 \sinh^7 kh \cosh kh} (80kh - 112kh \cosh 2kh \\
 &\quad + 160kh \cosh 4kh + 16kh \cosh 6kh + 132 \sinh 2kh - 60 \sinh 4kh \\
 &\quad + 12 \sinh 6kh - 3 \sinh 8kh) \\
 &= S_{xxE}
 \end{aligned} \tag{4-14a}$$

$$\begin{aligned}
 S_{zzL} &= \overline{\int_{-h}^{\eta} (P + \rho w^2) dy} - \int_{-h}^0 p_0 dy \\
 &= \frac{1}{L} \int_0^L \int_{-h}^0 P J(a, b) db da - \frac{1}{L} \int_0^L \int_{-h}^0 (-\rho g b) J(a, b) db da \\
 &= \frac{1}{8} \rho g H^2 \frac{kh}{\sinh 2kh} \\
 &\quad + \frac{\rho g k^2 H^4}{16384 \sinh^7 kh \cosh kh} (-40kh + 56kh \cosh 2kh - 80kh \cosh 4kh \\
 &\quad - 8kh \cosh 6kh - 30 \sinh 2kh + 16 \sinh 4kh - 2 \sinh 6kh + \sinh 8kh) \\
 &= S_{zzE}
 \end{aligned} \tag{4-14b}$$

$$S_{zxL} = S_{xzL} = \overline{\int_{-h}^{\eta} \rho u w dy} = \frac{1}{L} \int_0^L \int_{-h}^0 \rho u w J(a, b) db da = 0 \tag{4-14c}$$

$$S_L = \begin{pmatrix} S_{xxL} & S_{xzL} \\ S_{zxL} & S_{zzL} \end{pmatrix} = S_E \tag{4-14d}$$

5. 平均總動壓 P_L

$$P_L = \overline{\int_{-h}^{\eta} (P + \rho w^2) dy} - \int_{-h}^0 P_0 dy = S_{zzL} = P_E \tag{4-15}$$

6. 平均能通率 F_L

$$\begin{aligned}
 F_L &= \int_{-h}^{\eta} (p + \frac{\rho}{2}(u^2 + v^2) + \rho gy) u dy \\
 &= \frac{1}{L} \int_0^L \int_{-h}^0 (P + \frac{\rho}{2}(u^2 + v^2) + \rho gy) u J(a, b) db da \\
 &= \frac{1}{16} \rho g H^2 \frac{\sigma_0}{k} (1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh}) \\
 &\quad + \frac{\rho g \sigma_0 k H^4}{16384 \sinh^7 kh \cosh kh} (104kh - 124kh \cosh 2kh + 88kh \cosh 4kh \\
 &\quad + 4kh \cosh 6kh + 112 \sinh 2kh - 44 \sinh 4kh + 8 \sinh 6kh - 3 \sinh 8kh) \\
 &= F_E
 \end{aligned} \tag{4-16}$$

透過式(4-11)至式(4-16)的計算結果可知，Lagrangian 近似解與 Eulerian 近似解的動力特性公式相同，表示針對同一個波浪現象，不論用 Eulerian 方法或 Lagrangian 方法來描述波動場，其動力特性皆相同。



第五章 結論

本文利用 Lagrangian 方法，探討有限振幅波於水平底上的波動傳統問題。本文首先透過 Eulerian 與 Lagrangian 系統間的轉換關係，推導出 Lagrangian 座標中非旋性前進波的控制方程式，簡化直接由 Lagrangian 系統中推導控制方程式的複雜性，本文使用的攝動技巧主要因假設質點的運動週波率包括水深的函數，才能獲得合理的五階解，甚至可延伸至更高階。本文根據 Fenton (1985) 的數值檢驗方法，確認本近似解的係數是完全正確的。透過轉換關係，本文所推導之 Lagrangian 系統流體質點的週波率皆可轉換至 Eulerian 系統空間中任何一個位置點的週波率，而不僅限於自由表面處 (Longuet-Higgins, 1986)，且此空間中之週波率為一常數不隨空間任何位置而有所不同。

本文比較本文 Lagrangian 五階解、Fenton (1985) 的 Stokes 五階解與 Rienecker 和 Fenton (1981) 之數值解的波形，本近似解至五階的波形已非常逼近數值解的波形，且在波谷的部分，並不會產生如 Fenton (1985) 五階解的二次波形，說明 Lagrangian 的解可正確描述重力波的波形。

本文的 Lagrangian 近似解能在自由表面任何一點完全滿足表面邊界條件，即波動在自由表面的壓力為大氣壓力，而自自由表面以下的波動壓呈現雙曲線 \cosh 函數 (hyperbolic) 隨水深遞減。而且由自由表面算起，位於波峰的波壓低於靜水壓，而位於波谷的波壓力大於靜壓力。比較 Eulerian 波壓解在表面不為大氣壓力且不能計算水面上的波動壓力，本文的波壓解更能符合實在物理現象，而有較優的描述波壓的能力。至於質點運動軌跡方面，本文可表現不同深度下，流體質點運動軌跡的大小及形狀並不完全相同的特性。本五階解的質量傳輸速度包括在二階量及四階量上，此二階量與往昔學者利用 Eulerian 解推導結果相同，但四階量的部份則是往昔的 Eulerian 解無法求得，亦是

本文解析首先獲得。本文的質量傳輸速度顯示在表面高階的傳輸速度較低階者快，但在底部高階的質量傳輸速度反而比低階者慢。

本文接著探討 Eulerian 與 Lagrangian 兩種不同描述方式間的轉換關係。在 Lagrangian 解轉換至 Eulerian 解方面。由本文可知，Lagrangian 系統的週波率可轉換至 Eulerian 系統的週波率。本文並利用陳(1996)的轉換技術，將 Lagrangian 的位相及高程，透過泰勒級數，連續展開在 Eulerian 的位相及高程，透過週波率、流速勢、波壓及水位的轉換結果可知，本文的 Lagrangian 五階解可轉換至 Fenton (1985)的 Eulerian 五階解。

在 Eulerian 解轉換至 Lagrangian 解方面。因 Eulerian 系統與 Lagrangian 系統中的週波率並不相同，於是本文考慮週波率的影響，除了將 Eulerian 速度中的 (x, y) 展開在 (a, b) 外，亦將 σ_E 轉換至 σ_L ，經由週波率的轉換，在進行三階以上轉換時，會合併低階解在進行週波率轉換時產生的高階量，這些項可消去三階以上 Eulerian 速度解轉換至 Lagrangian 速度解所產生不合理的時間項。由本文可知，為了滿足 Lagrangian 系統中連續方程式，轉換所得的 Lagrangian 偶數階解需進行平均水位修正。另外，由於考慮週波率的影響，故在三階以上，透過積分求取 Lagrangian 系統中流體質點運動軌跡時，亦需考慮低階解對高階結果的影響量。經由本文的轉換技術，可將 Fenton (1985)的 Eulerian 五階速度解轉換至 Lagrangian 系統中，並透過積分求得 Lagrangian 系統中流體質點運動軌跡，而此運動軌跡經由比對，與本文的 Lagrangian 五階解一致，故 Fenton (1985)的 Eulerian 五階解可轉換至本文的 Lagrangian 五階解。本文能成功轉換的處理關鍵有三。一為質點的 Lagrangian 週波率與空間點 Eulerian 週波率不同，需進行轉換。第二為 Lagrangian 解在偶數階需經質量守恆條件($J=1$)有垂直修正量。第三為積分質點速度至軌跡時，需經二項式展開 $1/\sigma_L$ 之高階

量。透過本文探討的結果可知，描述等水深非旋轉性前進重力波的 Lagrangian 及 Eulerian 解，在本文轉換技術的應用下，二者是可互相轉換的。

本文並探討 Eulerian 與 Lagrangian 兩種不同描述方式之動力特性間的關係。本文首先探討 Eulerian 系統的動力特性。依照動力特性的基本定義，可由 Fenton (1985) 的 Eulerian 解求得平均動量、動能、位能、輻射應力、總動壓及能通率至第四階解。本文並同時探討有限振幅波與微小振幅波能量傳遞速度的差異，結果顯示，波浪非線性交互作用會增加波浪能量傳遞速度，且較微小振幅波理論高。

本文接著應用動力特性間的關係來確認本文求得之動力特性至第四階解的正確性。在 Longuet-Higgins (1975) 所導出動力特性間關係式的應用下，可說明本文所求得 Eulerian 系統的動力特性至第四階解是正確的。

本文最後探討 Lagrangian 系統的動力特性。透過動力特性的基本定義，將本文的 Lagrangian 解代入，即可求得 Lagrangian 系統動力特性至第四階解，經由結果比對可知，Lagrangian 與 Eulerian 系統的動力特性公式相同，故針對同一個波浪現象，不論用 Eulerian 或 Lagrangian 方法描述，其動力特性皆相同。

參考文獻

1. 陳陽益，「等深水中非旋轉性的自由表面前進重力波之 Lagrangian 方式的攝動解析」，第十六屆海洋工程研討會論文集，高雄，第 A1-A29 頁(1994a)。
2. 陳陽益，「等深水中非旋轉性的自由表面前進重力波之 Lagrangian 形式第五階解」，手稿(1994b)。
3. 陳陽益，「Eulerian 與 Lagrangian 解下前進重力波與重力駐波的動力特性」，第十七屆海洋工程研討會論文集暨 1995 兩岸港口及海岸開發研討會論文集，第 19-36 頁(1995)。
4. 陳陽益，「非旋轉性前進波的 Eulerian 與 Lagrangian 解間的轉換性」，第十八屆海洋工程研討會論文集，第 1-13 頁(1996)。
5. 陳陽益，「平緩坡度底床上前進的表面波」，第十九屆海洋工程研討會論文集，台中，第 112-121 頁(1997)。
6. 陳陽益、許弘莒、許志宏，「海潮流軌跡之數理推測與實測」，第二十屆海洋工程研討會論文集，基隆，第 71-79 頁(1998)。
7. 陳陽益、黃啟暘，「Lagrangian 方式下緩坡底床上之前進波」，第二十二屆海洋工程研討會論文集，高雄，第 79-88 頁(2000)。
8. Airy, G.B., "Tides and Waves," *Encyclopaedia Metropolitana*, Vol. 5, pp. 241-396 (1845).
9. Adrian, C., "Edge Waves along a Sloping Beach," *Journal of Physics A: Mathematical and General*, Vol. 34, pp. 9723-9731.
10. Biesel, F., "Study of Propagation in Water of Gradually Varying Depth," *Gravity Waves*, U.S. National Bureau of Standards, Circular 521, pp. 243-253 (1951).

11. Cokelet, E.D., "Steep Gravity Waves in Water of Arbitrary Uniform Depth," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A*, Vol. 286, pp. 183-230 (1977).
12. Dean, R.G., and Dalrymple, R.A., *Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists*, World Scientific, Singapore, (1991).
13. Dingemans, M.W., *Water Wave Propagation over Uneven Bottoms*, World Scientific, Singapore, pp. 171-184 (1997).
14. Ebbesmeyer, C.C., "Fifth Order Stokes Wave Profiles," *Journal of Waterways, Harbors, and Coastal Engineering Division, ASCE*, Vol. 100, No. 3, pp. 264-265 (1974).
15. Flierl, G.R., "Particle Motions in Large-amplitude Wave Field," *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, Vol. 18, pp. 39-74 (1981).
16. Fenton, J.D., "A Fifth-Order Stokes Theory for Steady Waves," *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, ASCE*, Vol. 111, No. 2, pp. 216-234 (1985).
17. Gaillard, D.D., "Wave Action in Relation to Engineering Structures," *Professional Papers of the U.S. Army Corps of Engineers*, No. 31, U.S. Government Printing Office, Washington D.C. (1904).
18. Gerstner, F.J.von, "Theorie der Wellen," *Abhandlungen der Königliche Böhmischen, Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag für das Jahr 1802* (1802); also reprinted in Gilbert, L.W., *Annalen der Physik*, Vol. 2, Leipzig, pp. 412-445 (1809).
19. Isobe, M., Nishimura, H., and Horikawa, K., "Expressions of Perturbation Solutions for Conservative Waves by Using Wave Height," *Proceedings of 33rd Annual Conference of JSCE*, pp.

- 760-761 (1978) (In Japanese). Reprinted in Horikawa, K., *Nearshore Dynamics and Coastal Processes*, University of Tokyo Press, pp. 28-29 (1988).
20. Jonsson, I.G., and Arneborg, L., “Energy Properties and Shoaling of Higher-order Stokes Waves on a Current,” *Ocean Engineering*, Vol. 22, No. 8, pp. 819-857 (1995).
21. Jonsson, I.G., and Steenberg, C.M., “Characteristic Velocities for Higher-order Stokes Waves in Deep Water,” *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, ASCE, Vol. 125, No. 3, pp. 109-117 (1999).
22. Klopman, G., “A Note on Integral Properties of Periodic Gravity Waves in the Case of a Non-zero Mean Eulerian Velocity,” *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 221, pp. 609-615 (1990).
23. Lamb, H., *Hydrodynamics*, 6th Edition, Dover, New York, pp. 13-15 (1945).
24. Lighthill, J., “Group velocity,” *Journal of the Institute of Mathematics and its Applications*, Vol. 1, pp. 1-28 (1965).
25. Longuet-Higgins, M.S., “Mass Transport in Water Waves” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A*, Vol. 245, pp. 535-581 (1953).
26. Longuet-Higgins, M.S., and Stewart, R.W., “Changes in the Form of Short Gravity Waves on Long Waves and Tidal Currents,” *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 8, pp. 565-581 (1960).
27. Longuet-Higgins, M.S., “Integral Properties of Periodic Gravity Waves of Finite Amplitude,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A*, Vol. 342, pp. 157-174 (1975).

28. Longuet-Higgins, M.S., "Eulerian and Lagrangian Aspects of Surface Waves," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 173, pp. 683-707 (1986).
29. Longuet-Higgins, M.S., "Lagrangian moments and mass transport in Stokes waves," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 179, pp. 547-555 (1987).
30. Miche, R., "Mouvements Ondulatoires de la Mer en Profondeur Constante ou Décroissante. Forme Limite de la Houle Lors de Son Déferlement. Application Aux Dignes Maritimes," *Annales des Ponts et Chaussées*, Vol. 114, pp. 25-78, 131-164, 270-292, 369-406 (1944).
31. Milne-Thomson, L.M., *Theoretical Hydrodynamics*, 5th Edition, The Macmillan Company, New York, pp. 401-404 (1968).
32. Moe, G., Arntsen, Ø.A., and Gjø sund, S.H., "Wave Kinematics Based on a Lagrangian Formulation," *Proceedings of the International OTRC Symposium*, Norway, pp. 56-63 (1998).
33. Nayfeh, A.H., *Introduction to Perturbation Techniques*, John Wiley & Sons, Inc. (1993).
34. Pao, R.H.F., *Fluid Dynamics*, Charles E. Merrill Books, Inc. (1967).
35. Pierson, W.J., "Perturbation Analysis of the Navier-Stokes Equations in Lagrangian Form with Selected Linear Solutions," *Journal of Geophysical Research*, Vol. 67, No. 8, pp. 3151-3160 (1962).
36. Peregrine, D.H., and Thomas, G.P., "Finite-amplitude Deep-water Waves on Current," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A*, Vol. 292, pp. 371-390 (1979).
37. Rankine, W.J.M., "On the Exact Form of Waves near the Surface of Deep Water," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A*, Vol. 153, pp. 127-138 (1863).

38. Rienecker, M.M., and Fenton, J.D., "A Fourier Approximation Method for Steady Water Waves," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 104, pp. 119-137 (1981).
39. Skjelbreia, L., and Hendrickson, J., "Fifth Order Gravity Wave Theory," *Proceedings of the 7th International Conference on Coastal Engineering*, ASCE, pp. 184-196 (1960).
40. Stokes, G.G., "On the Theory of Oscillatory Waves," *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 8, pp. 441-473 (1847); also reprinted in *Mathematical and Physical Papers*, Vol. 1, Cambridge University Press, pp. 197-229 (1880).
41. Sobey, R.J., Goodwin, P., Thieke, R.J., and Westberg, R.J., "Application of Stokes, Cnoidal, and Fourier wave theories," *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, ASCE, Vol. 113, No. 6, pp. 565-587 (1987).
42. Truesdell, C., "Two Measures of Vorticity," *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 2, pp. 173-217 (1953).
43. Ursell, F., "Mass Transport in Gravity Waves," *Proc. Camb. Phil. Soc.* Vol. 49, pp. 145-150 (1953).

附錄 A 第二種限制條件下的解析結果

選定攝動參數為 ka_0 ，並限制高階解在波形一倍角週期函數的係數沒有高階水位的結果的條件下，可得解析結果為

$$\begin{aligned}
 kx = & ka + \sum_{i=1}^5 \sum_{m=1}^i \sum_{n=1}^i M_{imn} \cosh mk(b+h) \sin n(ka - \sigma_L t) \quad (\text{for } i, m, n : \text{odd}) \\
 & + \sum_{i=2}^4 \sum_{m=0}^i \sum_{n=2}^i M_{imn} \cosh mk(b+h) \sin n(ka - \sigma_L t) \quad (\text{for } i, m, n : \text{even}) \\
 & + \sum_{i=2}^4 \sum_{m=2}^i M_{im0} \cosh mk(b+h) \sigma_0 t \quad (\text{for } i, m : \text{even})
 \end{aligned} \tag{A-1}$$

$$\begin{aligned}
 ky = & kb + \sum_{i=1}^5 \sum_{m=1}^i \sum_{n=1}^i N_{imn} \sinh mk(b+h) \cos n(ka - \sigma_L t) \quad (\text{for } i, m, n : \text{odd}) \\
 & + \sum_{i=2}^4 \sum_{m=2}^i \sum_{n=2}^i N_{imn} \sinh mk(b+h) \cos n(ka - \sigma_L t) \quad (\text{for } i, m, n : \text{even}) \\
 & + \sum_{i=2}^4 \sum_{m=2}^i N_{im0} \sinh mk(b+h) \quad (\text{for } i, m : \text{even})
 \end{aligned} \tag{A-2}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{kP}{\rho g} = & -kb - kB \frac{\sinh kb}{\cosh kh} \cos(ka - \sigma_L t) \\
 & + \sum_{i=3}^5 \sum_{m=1}^i \sum_{n=1}^i [E_{imn} \cosh mk(b+h) \\
 & \quad + F_{imn} \sinh mk(b+h)] \cos n(ka - \sigma_L t) \quad (\text{for } i, m, n : \text{odd}) \\
 & + \sum_{i=2}^4 \sum_{m=0}^i \sum_{n=0}^i E_{imn} \cosh mk(b+h) \cos n(ka - \sigma_L t) \quad (\text{for } i, m, n : \text{even}) \\
 & + \sum_{i=2}^4 \sum_{m=2}^i \sum_{n=0}^i F_{imn} \sinh mk(b+h) \cos n(ka - \sigma_L t) \quad (\text{for } i, m, n : \text{even})
 \end{aligned} \tag{A-3}$$

$$\frac{\sigma_L}{\sigma_0} = \sum_{i=2}^4 \sum_{m=0}^i G_{im} \cosh mk(b+h) \quad (\text{for } i, m : \text{even}) \tag{A-4}$$

今為能簡潔表示解析結果，於是設定 $sh^n m = \sinh^n mkh$ 和 $ch^n m = \cosh^n mkh$ ，其中 n 表示雙曲函數的次方，而 m 表示雙曲函數內幅數的倍角，故式(A-1)至式(A-4)中的係數如下

$$M_{111} = -kB$$

$$M_{202} = \frac{1}{4} B^2 k^2$$

$$M_{222} = -\frac{3B^2k^2}{8sh^2}$$

$$M_{220} = \frac{1}{2}B^2k^2$$

$$M_{311} = \frac{B^3k^3}{64sh^2}(11 + 32ch2 + 5ch4)$$

$$M_{313} = \frac{B^3k^3}{48sh^2}(17 - 2ch2)$$

$$M_{331} = -\frac{B^3k^3}{16sh^2}(11 + 4ch2)$$

$$M_{333} = \frac{B^3k^3}{64sh^4}(-11 + 2ch2)$$

$$M_{402} = \frac{B^4k^4}{1536sh^4}(-66 + 143ch2 - 62ch4 - 15ch6)$$

$$M_{404} = -\frac{B^4k^4}{384sh^4}(-54 + 28ch2 - ch4)$$

$$M_{422} = -\frac{B^4k^4}{1024sh^6}(-40 + 63ch2 - 134ch4 + ch6 + 2ch8) + \frac{B^4k^4}{192sh^4}(-27 + 20ch2 + 7ch4)$$

$$M_{424} = \frac{B^4k^4}{768sh^4}(198 - 64ch2 + ch4)$$

$$M_{442} = \frac{B^4k^4}{384sh^4}(-126 - 10ch2 + ch4)$$

$$M_{444} = \frac{B^4k^4}{3072(2 + 3ch2)sh^6}(382 + 597ch2 - 174ch4 + 5ch6)$$

$$M_{420} = \frac{B^4k^4}{256sh^4}(-6 + 31ch2 - 22ch4 - 3ch6)$$

$$M_{440} = \frac{B^4k^4}{32sh^4}(8ch2 + ch4)$$

$$M_{511} = \frac{B^5k^5}{24576sh^6}(978 + 2726ch2 - 262ch4 - 987ch6 + 100ch8 + 37ch10) - \frac{B^5k^5}{192sh^4}(30 + 7ch2 - ch4)$$

$$M_{513} = \frac{B^5 k^5}{12288sh^6} (-2443 + 3093ch2 - 1694ch4 - 71ch6 + 35ch8)$$

$$M_{515} = \frac{B^5 k^5}{30720sh^6} (7733 - 6282ch2 + 666ch4 - 11ch6)$$

$$M_{531} = \frac{B^5 k^5}{6144sh^6} (-671 + 111ch2 + 1908ch4 + 257ch6 + 15ch8)$$

$$M_{533} = -\frac{B^5 k^5}{32768(2 + 3ch2)sh^8} (909 - 5410ch2 - 538ch4 - 5267ch6 + 491ch8 \\ + 93ch10 + 2ch12) - \frac{B^5 k^5}{512sh^4} (-90 + 4ch2 + 5ch4)$$

$$M_{535} = -\frac{B^5 k^5}{61440(2 + 3ch2)sh^6} (-13802 - 22554ch2 + 9357ch4 - 544ch6 + 3ch8)$$

$$M_{551} = \frac{B^5 k^5}{4096sh^6} (134 - 1115ch2 - 370ch4 - 53ch6)$$

$$M_{553} = -\frac{B^5 k^5}{24576(2 + 3ch2)sh^6} (8333 + 12330ch2 - 2084ch4 - 218ch6 - ch8)$$

$$M_{555} = -\frac{B^5 k^5}{32768(2 + 3ch2)(1 + 4ch2)sh^8} (7664 + 6890ch2 + 4496ch4 - 3119ch6 \\ + 272ch8 - 3ch10)$$

$$N_{111} = -M_{111}$$

$$N_{222} = -M_{222}$$

$$N_{220} = \frac{1}{4} B^2 k^2$$

$$N_{311} = -M_{311}$$

$$N_{313} = \frac{3B^3 k^3}{16sh^2}$$

$$N_{331} = \frac{B^3 k^3}{16sh^2} (7 + 2ch2)$$

$$N_{333} = -M_{333}$$

$$N_{422} = \frac{B^4 k^4}{1024sh^6} (-40 + 63ch2 - 134ch4 + ch6 + 2ch8)$$

$$N_{424} = \frac{3B^4k^4}{64sh^4}(-4 + ch2)$$

$$N_{442} = \frac{B^4k^4}{192sh^4}(54 + ch2 - ch4)$$

$$N_{444} = -M_{444}$$

$$N_{420} = \frac{B^4k^4ch^2}{32sh^2}(13 + 5ch2)$$

$$N_{440} = \frac{3B^4k^4}{128sh^4}(-2 + 4ch2 + ch4)$$

$$N_{511} = -\frac{B^5k^5}{24576sh^6}(978 + 2726ch2 - 262ch4 - 987ch6 + 100ch8 + 37ch10)$$

$$N_{513} = -\frac{B^5k^5}{4096sh^6}(-16 + 171ch2 - 358ch4 - 17ch6 + 4ch8)$$

$$N_{515} = \frac{3B^5k^5}{2048sh^6}(-57 + 43ch2 - 4ch4)$$

$$N_{531} = -\frac{B^5k^5}{4096sh^6}(-247 + 2ch2 + 796ch4 + 94ch6 + 3ch8)$$

$$N_{533} = \frac{B^5k^5}{32768(2 + 3ch2)sh^8}(909 - 5410ch2 - 538ch4 - 5267ch6 + 491ch8 + 93ch10 + 2ch12)$$

$$N_{535} = -\frac{B^5k^5}{4096(2 + 3ch2)sh^6}(797 + 1280ch2 - 479ch4 + 22ch6)$$

$$N_{551} = \frac{B^5k^5}{4096sh^6}(-246 + 595ch2 + 170ch4 + 21ch6)$$

$$N_{553} = \frac{B^5k^5}{8192(2 + 3ch2)sh^6}(2509 + 3714ch2 - 740ch4 - 82ch6 - ch8)$$

$$N_{555} = -M_{555}$$

$$E_{200} = \frac{1}{4}B^2k^2 \tanh kh$$

$$E_{202} = -\frac{3}{4}B^2k^2 \tanh kh$$

$$E_{220} = \frac{1}{4}B^2k^2 \tanh kh$$

$$E_{222} = \frac{3B^2k^2}{4chsh}$$

$$F_{220} = -\frac{1}{4}B^2k^2$$

$$F_{222} = -\frac{3B^2k^2}{8sh^2}$$

$$E_{311} = \frac{B^3k^3}{64chsh}(61 - 40ch2 + 3ch4)$$

$$E_{313} = \frac{B^3k^3}{16chsh}(-25 + 4ch2)$$

$$E_{331} = \frac{9B^3k^3}{16chsh}$$

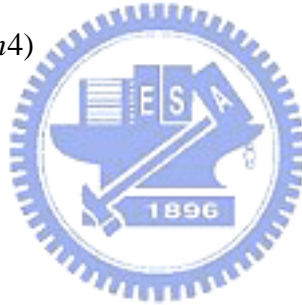
$$E_{333} = -\frac{3B^3k^3}{64chsh^3}(-11 + 2ch2)$$

$$F_{311} = \frac{B^3k^3}{64sh^2}(11 + 32ch2 + 5ch4)$$

$$F_{313} = \frac{3B^3k^3}{16sh^2}$$

$$F_{331} = -\frac{B^3k^3}{16sh^2}(7 + 2ch2)$$

$$F_{333} = \frac{B^3k^3}{64sh^4}(-11 + 2ch2)$$



$$E_{400} = -\frac{B^4k^4}{512chsh^3}(-22 - 73ch2 + 22ch4 + ch6)$$

$$E_{402} = \frac{B^4k^4}{384chsh}(-325 + 268ch2 + 9ch4)$$

$$E_{404} = -\frac{B^4k^4}{192chsh^3}(-104ch2 + 5(36 + ch4))$$

$$E_{420} = -\frac{B^4k^4}{128chsh}(-5 + 28ch2 + ch4)$$

$$E_{422} = \frac{B^4k^4}{1536chsh^5}(-1232 + 1509ch2 - 642ch4 + 35ch6 + 6ch8)$$

$$E_{424} = -\frac{B^4 k^4}{384chsh^3} (558 - 212ch2 + 5ch4)$$

$$E_{440} = \frac{B^4 k^4}{64chsh^3} (8ch2 + ch4)$$

$$E_{442} = -\frac{B^4 k^4}{384chsh^3} (-234 + 40ch2 + 5ch4)$$

$$E_{444} = \frac{B^4 k^4}{768(2 + 3ch2)chsh^5} (382 + 597ch2 - 174ch4 + 5ch6)$$

$$F_{420} = \frac{B^4 k^4 ch^2}{32sh^2} (13 + 5ch2)$$

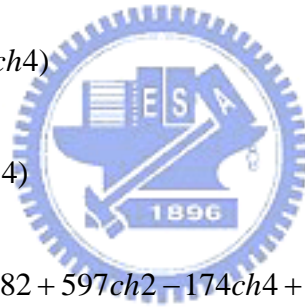
$$F_{422} = -\frac{B^4 k^4}{1024sh^6} (-40 + 63ch2 - 134ch4 + ch6 + 2ch8)$$

$$F_{424} = -\frac{3B^4 k^4}{64sh^4} (-4 + ch2)$$

$$F_{440} = -\frac{3B^4 k^4}{128sh^4} (-2 + 4ch2 + ch4)$$

$$F_{442} = \frac{B^4 k^4}{192sh^4} (-54 - ch2 + ch4)$$

$$F_{444} = -\frac{B^4 k^4}{3072(2 + 3ch2)sh^6} (382 + 597ch2 - 174ch4 + 5ch6)$$



$$E_{511} = \frac{B^5 k^5}{24576chsh^5} (-3864 + 12706ch2 - 8906ch4 + 1173ch6 + 194ch8 - 7ch10)$$

$$E_{513} = -\frac{B^5 k^5}{4096chsh^5} (-7930 + 9815ch2 - 3614ch4 + 175ch6 + 42ch8)$$

$$E_{515} = \frac{B^5 k^5}{2048chsh^5} (-4403 + 3832ch2 - 466ch4 + 11ch6)$$

$$E_{531} = \frac{B^5 k^5}{1024chsh^5} (-264 + 398ch2 - 293ch4 - 6ch6 + 3ch8)$$

$$E_{533} = \frac{B^5 k^5}{32768(2 + 3ch2)chsh^7} (2047 - 38686ch2 + 30530ch4 - 26731ch6 + 3353ch8 + 321ch10 + 6ch12)$$

$$E_{535} = \frac{B^5 k^5}{4096(2 + 3ch2)chsh^5} (-9754ch2 + 4567ch4 + 3(-1944 - 108ch6 + ch8))$$

$$E_{551} = \frac{B^5 k^5}{4096chsh^5} (-406 + 1079ch2 + 82ch4 + ch6)$$

$$E_{553} = -\frac{B^5 k^5}{8192(2 + 3ch2)chsh^5} (-6937 - 10506ch2 + 3196ch4 + 202ch6 + 5ch8)$$

$$E_{555} = \frac{5B^5 k^5}{32768(2 + 3ch2)(1 + 4ch2)chsh^7} (7664 + 6890ch2 + 4496ch4 - 3119ch6 + 272ch8 - 3ch10)$$

$$F_{511} = \frac{B^5 k^5}{24576sh^6} (978 + 2726ch2 - 262ch4 - 987ch6 + 100ch8 + 37ch10)$$

$$F_{513} = \frac{B^5 k^5}{4096sh^6} (-16 + 171ch2 - 358ch4 - 17ch6 + 4ch8)$$

$$F_{515} = \frac{3B^5 k^5}{2048sh^6} (57 - 43ch2 + 4ch4)$$

$$F_{531} = \frac{B^5 k^5}{4096sh^6} (-247 + 2ch2 + 796ch4 + 94ch6 + 3ch8)$$

$$F_{533} = -\frac{B^5 k^5}{32768(2 + 3ch2)sh^8} (909 - 5410ch2 - 538ch4 - 5267ch6 + 491ch8 + 93ch10 + 2ch12)$$

$$F_{535} = \frac{B^5 k^5}{4096(2 + 3ch2)sh^6} (797 + 1280ch2 - 479ch4 + 22ch6)$$

$$F_{551} = -\frac{B^5 k^5}{4096sh^6} (-246 + 595ch2 + 170ch4 + 21ch6)$$

$$F_{553} = \frac{B^5 k^5}{8192(2 + 3ch2)sh^6} (-2509 - 3714ch2 + 740ch4 + 82ch6 + ch8)$$

$$F_{555} = -\frac{B^5 k^5}{32768(2 + 3ch2)(1 + 4ch2)sh^8} (7664 + 6890ch2 + 4496ch4 - 3119ch6 + 272ch8 - 3ch10)$$

$$G_{20} = \frac{B^2 k^2}{16sh^2} (8 + ch4)$$

$$G_{22} = -\frac{1}{2} B^2 k^2$$

$$G_{40} = \frac{B^4 k^4}{2048sh^6} (261 + 73ch2 - 182ch4 - 9ch6 + 17ch8 + 2ch10)$$

$$G_{42} = \frac{B^4 k^4}{64sh^2} (11 + 28ch2 + 3ch4)$$

$$G_{44} = -\frac{2B^4 k^4}{64sh^4} (8ch2 + ch4)$$



附錄 B 第三種限制條件下的解析結果

第三種解析結果的特性為流速勢的高階解沒有一倍角週期函數的係數。若要求得第三種限制條件下的解析結果需再多求一變數，流速勢。

在考慮非旋轉流條件下，於 Eulerian 座標系統中，可定義一流速勢為

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (\text{B-1})$$

透過 $\partial \phi / \partial x = \partial(\Phi, y) / J \partial(a, b)$ 及 $\partial \phi / \partial y = \partial(x, \Phi) / J \partial(a, b)$ 的轉換關係式，可將式(B-1)轉換成

$$x_t = \frac{1}{J} (\Phi_a y_b - \Phi_b y_a) \quad (\text{B-2})$$

$$y_t = \frac{1}{J} (x_a \Phi_b - x_b \Phi_a) \quad (\text{B-3})$$

再利用 Cramer 法則，即可獲得 Lagrangian 座標系統中流速勢於水平及垂直方向的梯度表示式

$$\Phi_a = x_t x_a + y_t y_a \quad (\text{B-4})$$

$$\Phi_b = x_t x_b + y_t y_b \quad (\text{B-5})$$

如同上述的攝動解析技術，對式(B-4)及式(B-5)進行攝動展開，即可求得流速勢於各階的解析結果，而調和解 N_{211} 的求解過程需將 Lagrangian 的流速勢轉換至 Eulerian 的流速勢。利用 Lagrangian 系統與 Eulerian 系統之位相關係及高程關係 $Z_L = Z_E - \zeta$ ，其中 $\zeta = k(y - b)$ ，將 Lagrangian 系統中流速勢，其中 θ_L 的函數和 Z_L 的函數經泰勒級數分別展開在 θ_E 處及 Z_E 處，再利用高階解沒有一倍角週期函數的係數，即可求得調和解 N_{211} 。於是選定攝動參數為 ka_0 ，並限制流速勢的高階解沒有一倍角週期函數的係數，可得解析結果為

$$\begin{aligned}
kx &= ka + \sum_{i=1}^5 \sum_{m=1}^i \sum_{n=1}^i M_{imn} \cosh mk(b+h) \sin n(ka - \sigma_L t) \quad (\text{for } i, m, n : \text{odd}) \\
&+ \sum_{i=2}^4 \sum_{m=0}^i \sum_{n=2}^i M_{imn} \cosh mk(b+h) \sin n(ka - \sigma_L t) \quad (\text{for } i, m, n : \text{even}) \\
&+ \sum_{i=2}^4 \sum_{m=2}^i M_{im0} \cosh mk(b+h) \sigma_0 t \quad (\text{for } i, m : \text{even})
\end{aligned} \tag{B-6}$$

$$\begin{aligned}
ky &= kb + \sum_{i=1}^5 \sum_{m=1}^i \sum_{n=1}^i N_{imn} \sinh mk(b+h) \cos n(ka - \sigma_L t) \quad (\text{for } i, m, n : \text{odd}) \\
&+ \sum_{i=2}^4 \sum_{m=2}^i \sum_{n=2}^i N_{imn} \sinh mk(b+h) \cos n(ka - \sigma_L t) \quad (\text{for } i, m, n : \text{even}) \\
&+ \sum_{i=2}^4 \sum_{m=2}^i N_{im0} \sinh mk(b+h) \quad (\text{for } i, m : \text{even})
\end{aligned} \tag{B-7}$$

$$\begin{aligned}
\frac{k^2 \Phi}{\sigma_0} &= \sum_{i=1}^5 \sum_{m=1}^i \sum_{n=1}^i D_{imn} \cosh mk(b+h) \sin n(ka - \sigma_L t) \quad (\text{for } i, m, n : \text{odd}) \\
&+ \sum_{i=2}^4 \sum_{m=0}^i \sum_{n=2}^i D_{imn} \cosh mk(b+h) \sin n(ka - \sigma_L t) \quad (\text{for } i, m, n : \text{even}) \\
&+ \sum_{i=2}^4 D_{i00} \sigma_0 t \quad (\text{for } i : \text{even})
\end{aligned} \tag{B-8}$$

$$\begin{aligned}
\frac{kP}{\rho g} &= -kb - kB \frac{\sinh kb}{\cosh kh} \cos(ka - \sigma_L t) \\
&+ \sum_{i=3}^5 \sum_{m=1}^i \sum_{n=1}^i [E_{imn} \cosh mk(b+h) \\
&\quad + F_{imn} \sinh mk(b+h)] \cos n(ka - \sigma_L t) \quad (\text{for } i, m, n : \text{odd}) \\
&+ \sum_{i=2}^4 \sum_{m=0}^i \sum_{n=0}^i E_{imn} \cosh mk(b+h) \cos n(ka - \sigma_L t) \quad (\text{for } i, m, n : \text{even}) \\
&+ \sum_{i=2}^4 \sum_{m=2}^i \sum_{n=0}^i F_{imn} \sinh mk(b+h) \cos n(ka - \sigma_L t) \quad (\text{for } i, m, n : \text{even})
\end{aligned} \tag{B-9}$$

$$\frac{\sigma_L}{\sigma_0} = \sum_{i=2}^4 \sum_{m=0}^i G_{im} \cosh mk(b+h) \quad (\text{for } i, m : \text{even}) \tag{B-10}$$

今為能簡潔表示解析結果，於是設定 $sh^n m = \sinh^n mkh$ 和 $ch^n m = \cosh^n mkh$ ，其中 n 表示雙曲函數的次方，而 m 表示雙曲函數內幅數的倍角，故式(B-6)至式(B-10)中的係數如下

$$M_{111} = -kB$$

$$M_{202} = \frac{1}{4} B^2 k^2$$

$$M_{222} = -\frac{3B^2k^2}{8sh^2}$$

$$M_{220} = \frac{1}{2}B^2k^2$$

$$M_{311} = \frac{B^3k^3}{16sh^2}(6 + 2ch2 + ch4)$$

$$M_{313} = \frac{B^3k^3}{48sh^2}(17 - 2ch2)$$

$$M_{331} = -\frac{B^3k^3}{16sh^2}(11 + 4ch2)$$

$$M_{333} = \frac{B^3k^3}{64sh^4}(-11 + 2ch2)$$

$$M_{402} = -\frac{B^4k^4}{384sh^4}(-21 + 19ch2 - ch4 + 3ch6)$$

$$M_{404} = -\frac{B^4k^4}{384sh^4}(-54 + 28ch2 - ch4)$$

$$M_{422} = -\frac{B^4k^4}{512sh^6}(55 - 78ch2 - 34ch4 + 2ch6 + ch8) + \frac{B^4k^4}{192sh^4}(-27 + 20ch2 + 7ch4)$$

$$M_{424} = \frac{B^4k^4}{768sh^4}(198 - 64ch2 + ch4)$$

$$M_{442} = \frac{B^4k^4}{384sh^4}(-126 - 10ch2 + ch4)$$

$$M_{444} = \frac{B^4k^4}{3072(2 + 3ch2)sh^6}(382 + 597ch2 - 174ch4 + 5ch6)$$

$$M_{420} = -\frac{B^4k^4}{128sh^4}(-22 + 21ch2 + ch6)$$

$$M_{440} = \frac{B^4k^4}{32sh^4}(8ch2 + ch4)$$

$$M_{511} = \frac{B^5k^5}{4096sh^6}(-730ch2 + 40ch4 + 3(360 - 39ch6 + 16ch8 + ch10)) - \frac{B^5k^5}{192sh^4}(30 + 7ch2 - ch4)$$

$$M_{513} = \frac{B^5 k^5}{6144sh^6} (163 - 498ch2 - 178ch4 - 43ch6 + 16ch8)$$

$$M_{515} = \frac{B^5 k^5}{30720sh^6} (7733 - 6282ch2 + 666ch4 - 11ch6)$$

$$M_{531} = \frac{B^5 k^5}{12288sh^6} (-4978 + 5253ch2 + 2934ch4 + 19ch6 + 12ch8)$$

$$M_{533} = -\frac{B^5 k^5}{16384(2 + 3ch2)sh^8} (30 - 1235ch2 - 2597ch4 - 1291ch6 + 190ch8 + 42ch10 + ch12) - \frac{B^5 k^5}{512sh^4} (-90 + 4ch2 + 5ch4)$$

$$M_{535} = -\frac{B^5 k^5}{61440(2 + 3ch2)sh^6} (-13802 - 22554ch2 + 9357ch4 - 544ch6 + 3ch8)$$

$$M_{551} = \frac{B^5 k^5}{4096sh^6} (134 - 1115ch2 - 370ch4 - 53ch6)$$

$$M_{553} = -\frac{B^5 k^5}{24576(2 + 3ch2)sh^6} (8333 + 12330ch2 - 2084ch4 - 218ch6 - ch8)$$

$$M_{555} = -\frac{B^5 k^5}{32768(2 + 3ch2)(1 + 4ch2)sh^8} (7664 + 6890ch2 + 4496ch4 - 3119ch6 + 272ch8 - 3ch10)$$

$$N_{111} = -M_{111}$$

$$N_{222} = -M_{222}$$

$$N_{220} = \frac{1}{4} B^2 k^2$$

$$N_{311} = -M_{311}$$

$$N_{313} = -\frac{3B^3 k^3}{16sh^2}$$

$$N_{331} = \frac{B^3 k^3}{16sh^2} (7 + 2ch2)$$

$$N_{333} = -M_{333}$$

$$N_{422} = \frac{B^4 k^4}{512sh^6} (55 - 78ch2 - 34ch4 + 2ch6 + ch8)$$

$$N_{424} = \frac{3B^4k^4}{64sh^4}(-4 + ch2)$$

$$N_{442} = \frac{B^4k^4}{192sh^4}(54 + ch2 - ch4)$$

$$N_{444} = -M_{444}$$

$$N_{420} = -\frac{B^4k^4}{32sh^2}(11 + 3ch2 + ch4)$$

$$N_{440} = \frac{3B^4k^4}{128sh^4}(-2 + 4ch2 + ch4)$$

$$N_{511} = -\frac{B^5k^5}{4096sh^6}(-730ch2 + 40ch4 + 3(360 - 39ch6 + 16ch8 + ch10))$$

$$N_{513} = \frac{B^5k^5}{2048sh^6}(-217 + 243ch2 + 80ch4 + 4ch6 - 2ch8)$$

$$N_{515} = \frac{3B^5k^5}{2048sh^6}(-57 + 43ch2 - 4ch4)$$

$$N_{531} = -\frac{B^5k^5}{4096sh^6}(-1078 + 1169ch2 + 550ch4 + 7ch6)$$

$$N_{533} = \frac{B^5k^5}{16384(2 + 3ch2)sh^8}(30 - 1235ch2 - 2597ch4 - 1291ch6 + 190ch8 + 42ch10 + ch12)$$

$$N_{535} = -\frac{B^5k^5}{4096(2 + 3ch2)sh^6}(797 + 1280ch2 - 479ch4 + 22ch6)$$

$$N_{551} = \frac{B^5k^5}{4096sh^6}(-246 + 595ch2 + 170ch4 + 21ch6)$$

$$N_{553} = \frac{B^5k^5}{8192(2 + 3ch2)sh^6}(2509 + 3714ch2 - 740ch4 - 82ch6 - ch8)$$

$$N_{555} = -M_{555}$$

$$D_{111} = kB$$

$$D_{202} = -\frac{1}{2}B^2k^2$$

$$D_{222} = \frac{3B^2k^2}{8sh^2}$$

$$D_{200} = -\frac{1}{4}B^2k^2$$

$$D_{311} = -\frac{1}{4}B^3k^3$$

$$D_{313} = \frac{B^3k^3}{16sh^2}(-11 + 2ch2)$$

$$D_{331} = \frac{3B^3k^3}{16sh^2}$$

$$D_{333} = -\frac{B^3k^3}{64sh^4}(-11 + 2ch2)$$

$$D_{402} = \frac{B^4k^4}{96sh^2}(1 + 8ch2 + 3ch4)$$

$$D_{404} = -\frac{B^4k^4}{192sh^4}(63 - 38ch2 + 2ch4)$$

$$D_{422} = \frac{B^4k^4}{1536sh^6}(-187 + 183ch2 - 168ch4 + 7ch6 + 3ch8)$$

$$D_{424} = -\frac{B^4k^4}{192sh^4}(90 - 37ch2 + ch4)$$

$$D_{442} = -\frac{B^4k^4}{192sh^4}(-36 + 7ch2 + 2ch4)$$

$$D_{444} = \frac{B^4k^4}{3072(2 + 3ch2)sh^6}(382 + 597ch2 - 174ch4 + 5ch6)$$

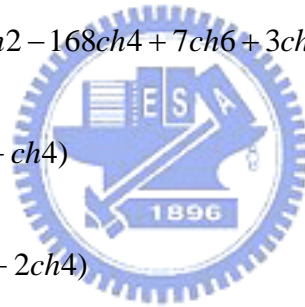
$$D_{400} = -\frac{9B^4k^4}{64sh^4}$$

$$D_{511} = \frac{B^5k^5}{768sh^4}(-27 + 68ch2 - 2ch4 + 6ch6)$$

$$D_{513} = -\frac{B^5k^5}{2048sh^6}(-213 + 88ch2 - 206ch4 - 3ch6 + 10ch8)$$

$$D_{515} = \frac{B^5k^5}{6144sh^6}(-3737 + 3342ch2 - 426ch4 + 11ch6)$$

$$D_{531} = \frac{B^5k^5}{12288sh^6}(458 - 585ch2 - 462ch4 - 71ch6 + 12ch8)$$



$$D_{533} = \frac{B^5 k^5}{16384(2 + 3ch2)sh^8} (48 - 4083ch2 + 1623ch4 - 2884ch6 + 360ch8 + 75ch10 + ch12)$$

$$D_{535} = \frac{B^5 k^5}{12288(2 + 3ch2)sh^6} (-4238 - 7194ch2 + 3609ch4 - 280ch6 + 3ch8)$$

$$D_{551} = \frac{B^5 k^5}{4096sh^6} (227ch2 + 34ch4 - 3(50 + ch6))$$

$$D_{553} = -\frac{B^5 k^5}{8192(2 + 3ch2)sh^6} (-1703 - 2526ch2 + 876ch4 + 110ch6 + 3ch8)$$

$$D_{555} = \frac{B^5 k^5}{32768(2 + 3ch2)(1 + 4ch2)sh^8} (7664 + 6890ch2 + 4496ch4 - 3119ch6 + 272ch8 - 3ch10)$$

$$E_{200} = \frac{1}{4} B^2 k^2 \tanh kh$$

$$E_{202} = -\frac{3}{4} B^2 k^2 \tanh kh$$

$$E_{220} = \frac{1}{4} B^2 k^2 \tanh kh$$

$$E_{222} = \frac{3B^2 k^2}{4chsh}$$

$$F_{220} = -\frac{1}{4} B^2 k^2$$

$$F_{222} = -\frac{3B^2 k^2}{8sh^2}$$

$$E_{311} = \frac{B^3 k^3}{16chsh} (12 - 4ch2 + ch4)$$

$$E_{313} = \frac{B^3 k^3}{16chsh} (-25 + 4ch2)$$

$$E_{331} = \frac{9B^3 k^3}{16chsh}$$

$$E_{333} = -\frac{3B^3 k^3}{64chsh^3} (-11 + 2ch2)$$



$$F_{311} = \frac{B^3 k^3}{16sh^2} (6 + 2ch2 + ch4)$$

$$F_{313} = \frac{3B^3 k^3}{16sh^2}$$

$$F_{331} = -\frac{B^3 k^3}{16sh^2} (7 + 2ch2)$$

$$F_{333} = \frac{B^3 k^3}{64sh^4} (-11 + 2ch2)$$

$$E_{400} = \frac{9B^4 k^4}{64chsh^3}$$

$$E_{402} = \frac{13B^4 k^4}{96chsh} (-4 + ch2)$$

$$E_{404} = -\frac{B^4 k^4}{192chsh^3} (-104ch2 + 5(36 + ch4))$$

$$E_{420} = -\frac{B^4 k^4}{32chsh} (2 + ch2)$$

$$E_{422} = \frac{B^4 k^4}{768chsh^5} (-391 + 426ch2 - 222ch4 + 22ch6 + 3ch8)$$

$$E_{424} = -\frac{B^4 k^4}{384chsh^3} (558 - 212ch2 + 5ch4)$$

$$E_{440} = \frac{B^4 k^4}{64chsh^3} (8ch2 + ch4)$$

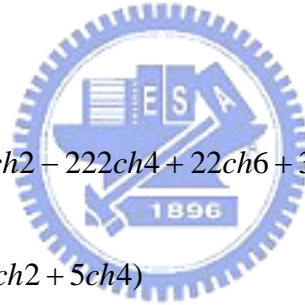
$$E_{442} = -\frac{B^4 k^4}{384chsh^3} (-234 + 40ch2 + 5ch4)$$

$$E_{444} = \frac{B^4 k^4}{768(2 + 3ch2)chsh^5} (382 + 597ch2 - 174ch4 + 5ch6)$$

$$F_{420} = \frac{B^4 k^4}{32sh^2} (11 + 3ch2 + ch4)$$

$$F_{422} = -\frac{B^4 k^4}{512sh^6} (55 - 78ch2 - 34ch4 + 2ch6 + ch8)$$

$$F_{424} = -\frac{3B^4 k^4}{64sh^4} (-4 + ch2)$$



$$F_{440} = -\frac{3B^4k^4}{128sh^4}(-2 + 4ch2 + ch4)$$

$$F_{442} = \frac{B^4k^4}{192sh^4}(-54 - ch2 + ch4)$$

$$F_{444} = -\frac{B^4k^4}{3072(2 + 3ch2)sh^6}(382 + 597ch2 - 174ch4 + 5ch6)$$

$$E_{511} = \frac{B^5k^5}{4096chsh^5}(1424 - 1222ch2 + 136ch4 - 83ch6 + 64ch8 + 5ch10)$$

$$E_{513} = -\frac{B^5k^5}{2048chsh^5}(-1871 + 1804ch2 - 766ch4 + 59ch6 + 18ch8)$$

$$E_{515} = \frac{B^5k^5}{2048chsh^5}(-4403 + 3832ch2 - 466ch4 + 11ch6)$$

$$E_{531} = \frac{B^5k^5}{4096chsh^5}(-379ch2 - 578ch4 + 3(98 + ch6 + 4ch8))$$

$$E_{533} = \frac{B^5k^5}{16384(2 + 3ch2)chsh^7}(-250 - 14933ch2 + 8281ch4 - 9338ch6 + 1510ch8 + 147ch10 + 3ch12)$$

$$E_{535} = \frac{B^5k^5}{4096(2 + 3ch2)chsh^5}(-9754ch2 + 4567ch4 + 3(-1944 - 108ch6 + ch8))$$

$$E_{551} = \frac{B^5k^5}{4096chsh^5}(-406 + 1079ch2 + 82ch4 + ch6)$$

$$E_{553} = -\frac{B^5k^5}{8192(2 + 3ch2)chsh^5}(-6937 - 10506ch2 + 3196ch4 + 202ch6 + 5ch8)$$

$$E_{555} = \frac{5B^5k^5}{32768(2 + 3ch2)(1 + 4ch2)chsh^7}(7664 + 6890ch2 + 4496ch4 - 3119ch6 + 272ch8 - 3ch10)$$

$$F_{511} = \frac{B^5k^5}{4096sh^6}(-730ch2 + 40ch4 + 3(360 - 39ch6 + 16ch8 + ch10))$$

$$F_{513} = \frac{B^5k^5}{2048sh^6}(217 - 243ch2 - 80ch4 - 4ch6 + 2ch8)$$

$$F_{515} = \frac{3B^5k^5}{2048sh^6}(57 - 43ch2 + 4ch4)$$

$$F_{531} = \frac{B^5 k^5}{4096 sh^6} (1169ch2 + 550ch4 + 7(-154 + ch6))$$

$$F_{533} = -\frac{B^5 k^5}{16384(2 + 3ch2)sh^8} (30 - 1235ch2 - 2597ch4 - 1291ch6 + 190ch8 + 42ch10 + ch12)$$

$$F_{535} = \frac{B^5 k^5}{4096(2 + 3ch2)sh^6} (797 + 1280ch2 - 479ch4 + 22ch6)$$

$$F_{551} = -\frac{B^5 k^5}{4096 sh^6} (-246 + 595ch2 + 170ch4 + 21ch6)$$

$$F_{553} = \frac{B^5 k^5}{8192(2 + 3ch2)sh^6} (-2509 - 3714ch2 + 740ch4 + 82ch6 + ch8)$$

$$F_{555} = -\frac{B^5 k^5}{32768(2 + 3ch2)(1 + 4ch2)sh^8} (7664 + 6890ch2 + 4496ch4 - 3119ch6 + 272ch8 - 3ch10)$$

$$G_{20} = \frac{B^2 k^2}{16 sh^2} (8 + ch4)$$

$$G_{22} = -\frac{1}{2} B^2 k^2$$

$$G_{40} = \frac{B^4 k^4}{4096 sh^6} (1344 - 1094ch2 + 88ch4 - 75ch6 + 56ch8 + 5ch10)$$

$$G_{42} = \frac{B^4 k^4}{128 sh^4} (-22 + 21ch2 + ch6)$$

$$G_{44} = -\frac{4B^4 k^4}{128 sh^4} (8ch2 + ch4)$$



附錄 C 第三至五階解析結果的係數

今為能簡潔表示解析結果，於是設定 $sh^m = \sinh^m mkh$ 和 $ch^m = \cosh^m mkh$ ，其中 n 表示雙曲函數的次方，而 m 表示雙曲函數內幅數的倍角，故係數如下

$$M_{311} = \frac{B^3 k^2}{64 sh^4} (13 + 2ch2 + 10ch4 + 2ch6)$$

$$M_{313} = \frac{B^3 k^2}{48 sh^2} (17 - 2ch2)$$

$$M_{331} = -\frac{B^3 k^2}{16 sh^2} (11 + 4ch2)$$

$$M_{333} = \frac{B^3 k^2}{64 sh^4} (-11 + 2ch2)$$

$$M_{402} = \frac{B^4 k^3}{384 sh^4} (-48 + 2ch2 - 29ch4 - 6ch6)$$

$$M_{404} = \frac{B^4 k^3}{384 sh^4} (54 - 28ch2 + ch4)$$

$$M_{422} = -\frac{B^4 k^3}{1536 sh^6} (-397 + 66ch2 - 294ch4 - 26ch6 + 3ch8)$$

$$M_{424} = \frac{B^4 k^3}{768 sh^4} (198 - 64ch2 + ch4)$$

$$M_{442} = \frac{B^4 k^3}{384 sh^4} (-126 - 10ch2 + ch4)$$

$$M_{444} = -\frac{B^4 k^3}{3072(2 + 3ch2)sh^6} (382 + 597ch2 - 174ch4 + 5ch6)$$

$$M_{420} = -\frac{B^4 k^3}{128 sh^4} (24 + 7ch2 + 20ch4 + 3ch6)$$

$$M_{440} = \frac{B^4 k^3}{32 sh^4} (8ch2 + ch4)$$

$$M_{511} = -\frac{B^5 k^4}{98304(2 + 3ch2)(1 + 4ch2)sh^8} (251684 + 451945ch2 + 371950ch4 + 236947ch6 + 132468ch8 + 48553ch10 + 12786ch12 + 435ch14 - 168ch16)$$

$$M_{513} = \frac{B^5 k^4}{6144sh^6} (-2225 + 552ch2 - 1234ch4 - 85ch6 + 22ch8)$$

$$M_{515} = \frac{B^5 k^4}{30720sh^6} (7733 - 6282ch2 + 666ch4 - 11ch6)$$

$$M_{531} = \frac{B^5 k^4}{12288sh^6} (3626 + 6513ch2 + 6462ch4 + 1135ch6 + 84ch8)$$

$$M_{533} = -\frac{B^5 k^4}{16384(2 + 3ch2)sh^8} (-3836 - 10383ch2 - 1533ch4 - 3932ch6 + 168ch8 + 75ch10 + ch12)$$

$$M_{535} = \frac{B^5 k^4}{61440(2 + 3ch2)sh^6} (13802 + 22554ch2 - 9357ch4 + 544ch6 - 3ch8)$$

$$M_{551} = \frac{B^5 k^4}{4096sh^6} (134 - 1115ch2 - 370ch4 - 53ch6)$$

$$M_{553} = -\frac{B^5 k^4}{24576(2 + 3ch2)sh^6} (8333 + 12330ch2 - 2084ch4 - 218ch6 - ch8)$$

$$M_{555} = -\frac{B^5 k^4}{32768(2 + 3ch2)(1 + 4ch2)sh^8} (7664 + 6890ch2 + 4496ch4 - 3119ch6 + 272ch8 - 3ch10)$$

$$N_{311} = -M_{311}$$

$$N_{313} = -\frac{3B^3 k^2}{16sh^2}$$

$$N_{331} = \frac{B^3 k^2}{16sh^2} (7 + 2ch2)$$

$$N_{333} = -M_{333}$$

$$N_{422} = \frac{B^4 k^3}{512sh^6} (-83 - 36ch2 - 94ch4 - 4ch6 + ch8)$$

$$N_{424} = \frac{3B^4 k^3}{64sh^4} (-4 + ch2)$$

$$N_{442} = \frac{B^4 k^3}{192sh^4} (54 + ch2 - ch4)$$

$$N_{444} = -M_{444}$$

$$N_{420} = -\frac{B^4 k^3}{128sh^4} (4 + 10ch2 + 11ch4 + 2ch6)$$

$$N_{440} = \frac{3B^4 k^3}{128sh^4} (-2 + 4ch2 + ch4)$$

$$N_{511} = -\frac{B^5 k^4}{32768(2 + 3ch2)(1 + 4ch2)sh^8} (81148 + 152995ch2 + 122458ch4 + 82561ch6 + 42764ch8 + 15891ch10 + 4294ch12 + 145ch14 - 56ch16)$$

$$N_{513} = \frac{B^5 k^4}{2048sh^6} (197 + 117ch2 + 260ch4 + 22ch6 - 2ch8)$$

$$N_{515} = \frac{3B^5 k^4}{2048sh^6} (-57 + 43ch2 - 4ch4)$$

$$N_{531} = -\frac{B^5 k^4}{4096sh^6} (770 + 1253ch2 + 1318ch4 + 211ch6 + 12ch8)$$

$$N_{533} = \frac{B^5 k^4}{16384(2 + 3ch2)sh^8} (-3816 - 9491ch2 - 3005ch4 - 3385ch6 + 196ch8 + 60ch10 + ch12)$$

$$N_{535} = -\frac{B^5 k^4}{4096(2 + 3ch2)sh^6} (797 + 1280ch2 - 479ch4 + 22ch6)$$

$$N_{551} = \frac{B^5 k^4}{4096sh^6} (-246 + 595ch2 + 170ch4 + 21ch6)$$

$$N_{553} = \frac{B^5 k^4}{8192(2 + 3ch2)sh^6} (2509 + 3714ch2 - 740ch4 - 82ch6 - ch8)$$

$$N_{555} = -M_{555}$$

$$E_{311} = -\frac{B^3 k^2 \rho g}{64chsh^3} (51 - 40ch2 + 16ch4)$$

$$E_{313} = \frac{B^3 k^2 \rho g}{16chsh} (-25 + 4ch2)$$

$$E_{331} = \frac{9B^3 k^2 \rho g}{16chsh}$$

$$E_{333} = -\frac{3B^3 k^2 \rho g}{64chsh^3} (-11 + 2ch2)$$

$$F_{311} = \frac{B^3 k^2 \rho g}{64sh^4} (13 + 2ch2 + 10ch4 + 2ch6)$$

$$F_{313} = \frac{3B^3 k^2 \rho g}{16sh^2}$$

$$F_{331} = -\frac{B^3 k^2 \rho g}{16sh^2} (7 + 2ch2)$$

$$F_{333} = \frac{B^3 k^2 \rho g}{64sh^4} (-11 + 2ch2)$$

$$E_{400} = -\frac{B^4 k^3 \rho g}{128chsh^3} (5 - 7ch2 + 10ch4 + ch6)$$

$$E_{402} = \frac{B^4 k^3 \rho g}{384chsh^3} (-193ch2 + 103ch4 + 9(36 + ch6))$$

$$E_{404} = \frac{B^4 k^3 \rho g}{192chsh^3} (104ch2 - 5(36 + ch4))$$

$$E_{420} = -\frac{B^4 k^3 \rho g}{128chsh^3} (20 - 5ch2 + 11ch4 + ch6)$$

$$E_{422} = \frac{B^4 k^3 \rho g}{768chsh^5} (-805 + 552ch2 - 402ch4 + 4ch6 + 3ch8)$$

$$E_{424} = -\frac{B^4 k^3 \rho g}{384chsh^3} (558 - 212ch2 + 5ch4)$$

$$E_{440} = \frac{B^4 k^3 \rho g}{64chsh^3} (8ch2 + ch4)$$

$$E_{442} = \frac{B^4 k^3 \rho g}{384chsh^3} (234 - 40ch2 - 5ch4)$$

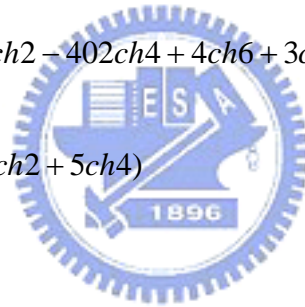
$$E_{444} = \frac{B^4 k^3 \rho g}{768(2 + 3ch2)chsh^5} (382 + 597ch2 - 174ch4 + 5ch6)$$

$$F_{420} = \frac{B^4 k^3 \rho g}{128sh^4} (4 + 10ch2 + 11ch4 + 2ch6)$$

$$F_{422} = -\frac{B^4 k^3 \rho g}{512sh^6} (83 + 36ch2 + 94ch4 + 4ch6 - ch8)$$

$$F_{424} = -\frac{3B^4 k^3 \rho g}{64sh^4} (-4 + ch2)$$

$$F_{440} = -\frac{3B^4 k^3 \rho g}{128sh^4} (-2 + 4ch2 + ch4)$$



$$F_{442} = \frac{B^4 k^3 \rho g}{192 sh^4} (-54 - ch2 + ch4)$$

$$F_{444} = -\frac{B^4 k^3 \rho g}{3072(2 + 3ch2)sh^6} (382 + 597ch2 - 174ch4 + 5ch6)$$

$$E_{511} = \frac{B^5 k^4 \rho g}{32768(2 + 3ch2)(1 + 4ch2)chsh^7} (109164 + 134239ch2 + 155670ch4 + 52365ch6 + 47156ch8 + 495ch10 + 3018ch12 + 173ch14 - 80ch16)$$

$$E_{513} = \frac{B^5 k^4 \rho g}{2048chsh^5} (5405 - 3526ch2 + 2338ch4 - 29ch6 - 30ch8)$$

$$E_{515} = \frac{B^5 k^4 \rho g}{2048chsh^5} (-4403 + 3832ch2 - 466ch4 + 11ch6)$$

$$E_{531} = \frac{B^5 k^4 \rho g}{4096chsh^5} (-2190 + 377ch2 - 1658ch4 - 105ch6 + 12ch8)$$

$$E_{533} = \frac{B^5 k^4 \rho g}{16384(2 + 3ch2)chsh^7} (-11788 - 39701ch2 + 7057ch4 - 15620ch6 + 1528ch8 + 201ch10 + 3ch12)$$

$$E_{535} = \frac{B^5 k^4 \rho g}{4096(2 + 3ch2)chsh^5} (-9754ch2 + 4567ch4 + 3(-1944 - 108ch6 + ch8))$$

$$E_{551} = \frac{B^5 k^4 \rho g}{4096chsh^5} (-406 + 1079ch2 + 82ch4 + ch6)$$

$$E_{553} = \frac{B^5 k^4 \rho g}{8192(2 + 3ch2)chsh^5} (6937 + 10506ch2 - 3196ch4 - 202ch6 - 5ch8)$$

$$E_{555} = \frac{5B^5 k^4 \rho g}{32768(2 + 3ch2)(1 + 4ch2)chsh^7} (7664 + 6890ch2 + 4496ch4 - 3119ch6 + 272ch8 - 3ch10)$$

$$F_{511} = -\frac{B^5 k^4 \rho g}{32768(2 + 3ch2)(1 + 4ch2)sh^8} (81148 + 152995ch2 + 122458ch4 + 82561ch6 + 42764ch8 + 1589ch10 + 4294ch12 + 145ch14 - 56ch16)$$

$$F_{513} = -\frac{B^5 k^4 \rho g}{2048sh^6} (197 + 117ch2 + 260ch4 + 22ch6 - 2ch8)$$

$$F_{515} = \frac{3B^5 k^4 \rho g}{2048sh^6} (57 - 43ch2 + 4ch4)$$

$$F_{531} = \frac{B^5 k^4 \rho g}{4096 sh^6} (770 + 1253ch2 + 1318ch4 + 211ch6 + 12ch8)$$

$$F_{533} = \frac{B^5 k^4 \rho g}{16384(2 + 3ch2)sh^8} (3816 + 9491ch2 + 3005ch4 + 3385ch6 - 196ch8 - 60ch10 - ch12)$$

$$F_{535} = \frac{B^5 k^4 \rho g}{4096(2 + 3ch2)sh^6} (797 + 1280ch2 - 479ch4 + 22ch6)$$

$$F_{551} = \frac{B^5 k^4 \rho g}{4096 sh^6} (246 - 595ch2 - 170ch4 - 21ch6)$$

$$F_{553} = \frac{B^5 k^4 \rho g}{8192(2 + 3ch2)sh^6} (-2509 - 3714ch2 + 740ch4 + 82ch6 + ch8)$$

$$F_{555} = -\frac{B^5 k^4 \rho g}{32768(2 + 3ch2)(1 + 4ch2)sh^8} (7664 + 6890ch2 + 4496ch4 - 3119ch6 + 272ch8 - 3ch10)$$

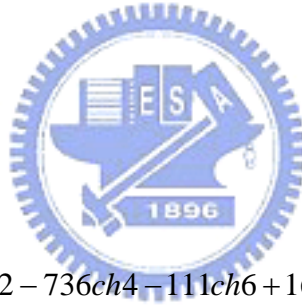
$$G_{20} = \frac{B^2 k^2}{16 sh^2} (8 + ch4)$$

$$G_{22} = -\frac{1}{2} B^2 k^2$$

$$G_{40} = \frac{B^4 k^4}{4096 sh^6} (-168 - 622ch2 - 736ch4 - 111ch6 + 16ch8 + ch10)$$

$$G_{42} = \frac{B^4 k^4}{128 sh^4} (24 + 7ch2 + 20ch4 + 3ch6)$$

$$G_{44} = -\frac{4B^4 k^4}{128 sh^4} (8ch2 + ch4)$$



附錄 D Lagrangian 流速勢的係數

今為能簡潔表示解析結果，於是設定 $sh^m = \sinh^m mkh$ 和 $ch^m = \cosh^m mkh$ ，其中 n 表示雙曲函數的次方，而 m 表示雙曲函數內幅數的倍角，故係數如下

$$D_{111} = kB$$

$$D_{202} = -\frac{1}{2}B^2k^2$$

$$D_{222} = \frac{3B^2k^2}{8sh^2}$$

$$D_{200} = -\frac{1}{4}B^2k^2$$

$$D_{311} = -\frac{B^3k^3}{64sh^4}(29 - 15ch2 + 12ch4 + ch6)$$

$$D_{313} = \frac{B^3k^3}{16sh^2}(-11 + 2ch2)$$

$$D_{331} = \frac{3B^3k^3}{16sh^2}$$

$$D_{333} = -\frac{B^3k^3}{64sh^4}(-11 + 2ch2)$$

$$D_{402} = \frac{B^4k^4}{384sh^4}(-53ch2 + 62ch4 + 9(16 + ch6))$$

$$D_{404} = -\frac{B^4k^4}{192sh^4}(63 - 38ch2 + 2ch4)$$

$$D_{422} = \frac{B^4k^4}{1536sh^6}(-601 + 309ch2 - 348ch4 - 11ch6 + 3ch8)$$

$$D_{424} = -\frac{B^4k^4}{192sh^4}(90 - 37ch2 + ch4)$$

$$D_{442} = -\frac{B^4k^4}{192sh^4}(-36 + 7ch2 + 2ch4)$$

$$D_{444} = \frac{B^4k^4}{3072(2 + 3ch2)sh^6}(382 + 597ch2 - 174ch4 + 5ch6)$$



$$D_{400} = \frac{B^4 k^4}{128sh^4} (5 - 7ch2 + 10ch4 + ch6)$$

$$D_{511} = \frac{B^5 k^5}{49152(2 + 3ch2)(1 + 4ch2)sh^8} (137033 + 224500ch2 + 200620ch4 + 108652ch6 + 63342ch8 + 14338ch10 + 4740ch12 + 186ch14 - 111ch16)$$

$$D_{513} = -\frac{B^5 k^5}{2048sh^6} (-1773 + 886ch2 - 902ch4 - 9ch6 + 16ch8)$$

$$D_{515} = \frac{B^5 k^5}{6144sh^6} (-3737 + 3342ch2 - 426ch4 + 11ch6)$$

$$D_{531} = \frac{B^5 k^5}{12288sh^6} (-2026 + 171ch2 - 1542ch4 - 179ch6 + 12ch8)$$

$$D_{533} = \frac{B^5 k^5}{16384(2 + 3ch2)sh^8} (-3798 - 12339ch2 + 1215ch4 - 4978ch6 + 366ch8 + 93ch10 + ch12)$$

$$D_{535} = \frac{B^5 k^5}{12288(2 + 3ch2)sh^6} (-4238 - 7194ch2 + 3609ch4 - 280ch6 + 3ch8)$$

$$D_{551} = \frac{B^5 k^5}{4096sh^6} (227ch2 + 34ch4 - 3(50 + ch6))$$

$$D_{553} = -\frac{B^5 k^5}{8192(2 + 3ch2)sh^6} (-1703 - 2526ch2 + 876ch4 + 110ch6 + 3ch8)$$

$$D_{555} = \frac{B^5 k^5}{32768(2 + 3ch2)(1 + 4ch2)sh^8} (7664 + 6890ch2 + 4496ch4 - 3119ch6 + 272ch8 - 3ch10)$$