

國立交通大學

電控工程研究所

碩士論文

攔截飛彈的姿態控制

Attitude Control of Missile Interceptor



研究生：邱泰偉

指導教授：林清安 教授

中華民國九十九年七月

攔截飛彈的姿態控制

Attitude Control System of Missile Interceptor

研究生：邱泰偉

Student: Tai-Wei Chiu

指導教授：林清安 教授

Advisor: Prof. Ching-An Lin

國立交通大學

電控工程研究所



Submitted to Institute of Electrical and Control Engineering

College of Electrical and Computer Engineering

National Chiao-Tung University

In Partial Fulfillment of the Requirements

For the Degree of Master

In

Electrical and Control Engineering

July 2010

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十九年七月

攔截飛彈的姿態控制

學生：邱泰偉

指導教授：林清安 教授

國立交通大學 電控工程研究所

中文摘要

本論文探討攔截飛彈姿態控制系統的設計與分析，數值模擬參考標準飛彈三型為藍本。姿態控制的目的是要使攔截飛彈的尋標器在終端導引階段一直追蹤目標。姿態控制的制動器是常值開關式的推力器。我們探討兩種控制方法：線性控制系統配合脈衝寬度調變(pulse width modulation, PWM)的合成以及最短時間最佳控制系統(minimum-time optimal control)，線性控制器部分主要討論脈衝寬度調變的頻率設定，最短時間最佳控制則透過修改切換曲線及控制律來降低至動器的切換頻率。控制系統的性能必須透過完整的六自由度模擬來驗證，模擬結果顯示如果適當的選擇設計參數，線性控制系統配合脈衝寬度調變以及最短時間最佳控制系統均可有效地達到控制目標。最後我們加入質心偏移的影響來分析兩種控制系統的性能表現。

Attitude Control System of Missile Interceptor

Student: Tai-Wei Chiu

Advisor: Prof. Ching-An Lin

Institute of Electrical and Control Engineering
National Chiao Tung University

Abstract

This paper studies the design and analysis of attitude control system for a missile interceptor. Simulations use Standard Missile III as a prototype. The goal of attitude control is to ensure that the infrared seeker of the interceptor tracks the target in the terminal guidance phase. The control system employs constant value ON-OFF thruster as actuators. We investigate two design methods: linear control system with pulse-width modulation (PWM) implementation and minimum-time optimal control system. For the linear control system, we focus on how to choose a proper PWM frequency. In order to reduce the switching frequency of the minimum-time optimal control system, we modify the switching curve and the control law. Simulation result indicate that with proper choices of design parameters, linear control system with PWM and minimum-time optimal control system both can achieve design goal. Finally, we analyze the performance of two type control system by considering the effect of the g.c. offset.

誌 謝

這篇論文夠順利的完成，首先要感謝我的指導教授林清安老師兩年來的耐心教導，讓我學習到做研究應該具備的態度及遇到問題時，如何分析問題進一步的找出解決的方法，讓我在專業領域中有更深的體會。

其次要感謝實驗室的學長吳建賢、何威德對我的勉勵與指導，在我學習的過程中提高寶貴的經驗，讓我的論文能夠順利的進行，另外也感謝 606 實驗室的所有成員在日常生活及研究上的互相協助。

最後要感謝我的家人的給我的支持與鼓勵，感謝我的父母一路以來的包容與付出，有他們的陪伴，讓我在求學路上能夠無後顧之憂的繼續走下去。

目錄

第一章 緒論.....	1
第二章 運動方程式.....	3
2.1 座標系統.....	3
2.1.1 地面座標 S_N (North-East-Down coordinate).....	3
2.1.2 體座標 S_B (Body coordinate).....	3
2.1.3 視線座標.....	4
2.1.4 球座標.....	4
2.2 座標轉換.....	5
2.3 飛彈六自由度運動方程式.....	6
2.3.1 尤拉方程式(Euler equation).....	6
2.3.2 力矩方程式.....	6
2.3.3 平移方程式.....	7
2.4 目標運動方程式.....	7
第三章 攔截器推力器配置及數學模式.....	8
3.1 標準三型飛彈動能攔截器之物性.....	8
3.2 模擬採用的攔截器物性及推力器配置.....	9
3.3 推力器的數學模式.....	11
3.3.1 轉向推力器產生的力矩.....	11
3.3.2 姿態推力器產生的力矩.....	12
3.3.3 轉向及姿態推力器產生的加速度.....	15
3.3.4 推力器動態.....	16
第四章 線性姿態控制系統設計.....	17
4.1 線性控制系統.....	17
4.2 脈衝寬度調變(PWM)的設計.....	19
第五章 最短時間最佳控制系統.....	27
5.1 理想時間最佳控制設計.....	27
5.2 切換曲線的調整.....	29
5.3 輸出切換控制律的調整.....	31
5.4 設計方法及模擬結果.....	34
第六章 轉向導引控制.....	38
6.1 真比例導引律.....	38
6.2 脈衝寬度調變(PWM)的合成.....	41
6.3 實際攔截情況.....	41
第七章 質心偏移.....	45

7.1 質心偏移量的探討.....	45
7.2 實際攔截的情況.....	52
第八章 結論.....	56
參考資料.....	58



圖目錄

圖 2.1 地面座標與體座標示意圖.....	3
圖 2.2 慣性座標與視線座標及體座標之間的關係.....	4
圖 2.3 地面座標與飛彈體座標轉換.....	5
圖 3.1 標準三型飛彈 (SM3 Block IA) 的動能攔截器(MK142).....	8
圖 3.3 轉向推力器示意圖.....	11
圖 3.4 攔截飛彈的質心偏移示意圖.....	12
圖 3.5 六個姿態推力器示意圖.....	13
圖 3.6 六個姿態推力器的質心偏移示意圖.....	13
圖 4.1 滾轉軸控制系統.....	18
圖 4.3 脈衝寬度調變(PWM)訊號示意圖.....	20
圖 4.4 線性姿態控制器的頻率響應.....	21
圖 4.5 三組不同的姿態角命令.....	22
圖 4.6 PWM 頻率為 15(Hz)的模擬結果.....	24
圖 4.7 PWM 頻率為 17(Hz)的模擬結果.....	25
圖 4.8 PWM 頻率為 20(Hz)的模擬結果.....	26
圖 5.1 滾轉軸時間最佳控制器方塊圖.....	28
圖 5.2 三個姿態角命令.....	30
圖 5.3 死區控制律示意圖.....	32
圖 5.4 延遲切換控制律.....	33
圖 5.5 姿態角命令為斜坡時的模擬結果.....	35
圖 5.6 姿態角命令為弦波時的模擬結果.....	36
圖 5.7 姿態角命令為三角波時的模擬結果.....	37
圖 6.1 相對位置與球座標之間的關係.....	38
圖 6.2 實際攔截軌跡.....	42
圖 6.3 姿態控制為線性控制器的模擬結果.....	43
圖 6.4 姿態控制為最短時間最佳控制器的模擬結果.....	44
圖 7.1 假設轉向推力器開啟的情形.....	47
圖 7.2 姿態角命令為斜坡, (dx,dy,dz)=(6.6,0,0)mm 的角度誤差及噴嘴開啟情況.....	48
圖 7.3 姿態角命令為斜坡, (dx,dy,dz)=(0,1.2,0)mm 的角度誤差及噴嘴開啟情況.....	49
圖 7.4 姿態角命令為斜坡, (dx,dy,dz)=(0,0,1.6)mm 的角度誤差及噴嘴開啟情況.....	49
圖 7.5 姿態角命令為斜坡, (dx,dy,dz)=(6.2,0,0)mm 的角度誤差及噴嘴開啟情況.....	51
圖 7.6 姿態角命令為斜坡, (dx,dy,dz)=(0,3.9,0)mm 的角度誤差及噴嘴開啟情況.....	51
圖 7.7 姿態角命令為斜坡, (dx,dy,dz)=(0,0,3.1)mm 的角度誤差及噴嘴開啟情況.....	52
圖 7.8 最短時間最佳控制, (dx,dy,dz)=(4.8,0,0)mm 的角度誤差.....	53
圖 7.9 修正後的最短時間最佳控制, 姿態角誤差及噴嘴開啟情況.....	55

表目錄

表 3.1 標準三型飛彈動能攔截器(MK142)的物性參數	9
表 3.2 模擬時採用的攔截器物性.....	10
表 3.3 六個姿態推力器各別造成的力矩.....	14
表 4.1 姿態角命令為斜坡函數的模擬結果.....	22
表 4.2 姿態角命令為弦波函數的模擬結果.....	22
表 4.3 姿態角命令為三角波函數的模擬結果.....	23
表 5.1 不同 k 值的模擬結果.....	31
表 5.2 不同死區寬度的模擬結果.....	32
表 5.3 不同延遲切換寬度的模擬結果.....	33
表 6.1 實際攔截情況的模擬結果.....	42
表 7.1 姿態控制為線性控制時質心偏移的模擬結果.....	47
表 7.2 姿態控制器為最短時間最佳控制時質心偏移的模擬結果.....	50
表 7.3 實際攔截情況下，質心偏移的模擬結果.....	53
表 7.4 修正後的最短時間最佳控制，質心偏移的模擬結果.....	54



第一章 緒論

本論文主要探討攔截飛彈在終端航程的姿態控制系統設計與分析。終端航程的攔截器參考標準三型飛彈(SM-3 Block IA)的動能攔截器(MK142)為藍本，攔截器上配置一個紅外線尋標器(infrared seeker)及轉向姿態控制系統(Divert and Attitude Control System, DACS)，包含四個側向的開關式(ON-OFF type)的轉向推力器(divert thruster)和六個開關式的姿態推力器(attitude thruster)。

攔截器在攔截目標時必須靠紅外線尋標器追蹤目標，因此利用姿態推力器控制攔截器保持目標一直持續在鎖定的狀態。側向的轉向推力器提供加速度的需求以達成直接碰撞攔截，所以導引律方面我們採用真比例導引律(true proportional navigation law)[1]，其加速度方向是和視線垂直，所以我們也必須控制攔截器體座標的 X 軸和視線重合。因此基於以上兩點，我們可以知道姿態控制系統在終端攔截時的重要性。

本論文探討兩種姿態控制系統，第一種為採用線性常增益姿態角及角速度的回授控制，並配合脈衝寬度調變(pulse width modulation, PWM)[2]的方式合成實現開關式的輸出。其中 PWM 的調變頻率為一個需要選定的參數，不能夠超過硬體的限制，也必須控制誤差在可以接受的範圍內。第二種為最短時間最佳控制系統(minimum-time optimal control)[3]、[4]，此控制系統具有一個通過原點的切換曲線，將系統狀態從一個初始值在最短時間控制到切換曲線上後再推到原點，輸出的命令直接就是開關式的訊號。然而這種控制方法必須要有很大的控制力將系統狀態控制到切換曲線上，進入切換曲線後透過非常高頻的切換到達原點，在實際使用上必須經過一些調整，降低切換頻率在可實現的範圍且和誤差之間做一個取捨。最後我們除了採用典型理想攔截的模擬情況外還加入質心偏移模擬產生姿態干擾的情形，分別比較兩種姿態控制系統的差異性。

本論文第二章介紹攔截器及目標的運動方程式，第三章介紹攔截器的推力器配置及數學模式，第四章介紹線性控制系統及PWM的合成，第五章介紹最短時間最佳控制系統，第六章為轉向導引控制及實際攔截情況，第七章探討加入質心偏移後的影響，第八章為結論。



第二章 運動方程式

飛彈在空間中的運動可分為平移部份與轉動部份，各為三個自由度的運動，因此整個三維空間中飛彈為六個自由度的運動。此外要在三度空間中描述飛彈動態就必須要定義所需的座標系統，以下我們介紹所需的所有座標系統及慣性座標和體座標之間的相互關係，接著分別介紹飛彈六自由度的運動方程式及目標的運動方程式。

2.1 座標系統

2.1.1 地面座標 S_N (North-East-Down coordinate)

地面座標 S_N (NED 座標系) 的原點為地表的雷達站，為固定不動的座標， X_N 軸指向地表平面的北方， Y_N 軸指向地表平面的東方， Z_N 軸滿足右手定則。如圖 2.1，假設飛彈在 S_N 座標的位置為 $\vec{r}_m = [x_N \ y_N \ z_N]^T$ ，則 x_N 表示飛彈在雷達站北方的距離， y_N 表示飛彈在雷達站東方的距離， $-z_N$ 表示飛彈的高度。

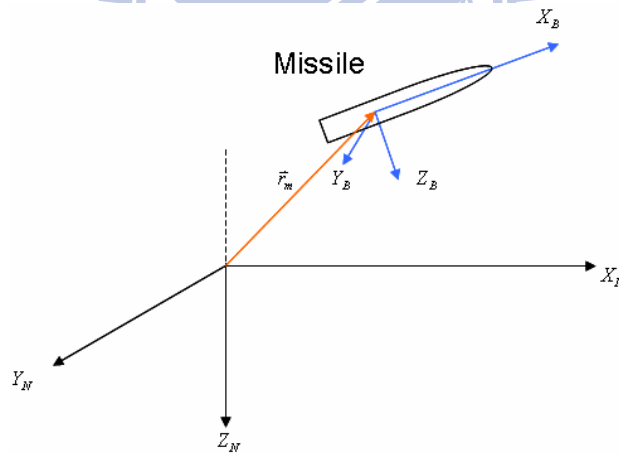


圖 2.1 地面座標與體座標示意圖

2.1.2 體座標 S_B (Body coordinate)

體座標用來表示飛彈本身的姿態變化，為一個動座標系，其原點為飛彈的質心位置， X_B 為飛彈的長軸方向，指向前方， Y_B 垂直 X_B 指向飛彈右邊， Z_B 則垂直於 X_B — Y_B 平面，指向飛彈下方，三軸互相垂直且滿足右手定則，如圖 2.1 所示。

2.1.3 視線座標

我們使用視線座標是為了方便描述攔截飛彈與目標之間的瞄準線，也就是攔截飛彈與目標在 S_N 座標的相對位置，是為了與體座標作區別，如圖 2.2 所示。由於真比例導引律的導引加速度與視線垂直，若攔截飛彈的姿態一直對準目標，就能藉由彈體側向推力器來達成導引加速度。所以視線座標方向是理想攔截飛彈的姿態方向，而體座標則是實際上攔截飛彈的姿態方向。如果攔截飛彈的姿態已受控制為一直對準目標，表示體座標的 X_B 與視線座標的 X_L 重合，則 $Y_B = Y_L$ 、 $Z_B = Z_L$ 。

2.1.4 球座標

我們使用球座標是為了方便推導三維真比例導引律以及描述攔截飛彈的理想姿態，如圖 2.2 所示。假設目標在 S_N 座標為 \mathbf{r}_t ，則

$$\mathbf{r}_t = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = |\mathbf{r}_t| \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \mu \\ \cos \alpha \sin \mu \\ \sin \alpha \end{bmatrix}$$

其中 $\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$ ， $\mu = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$ ， $|\mathbf{r}_t| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 。

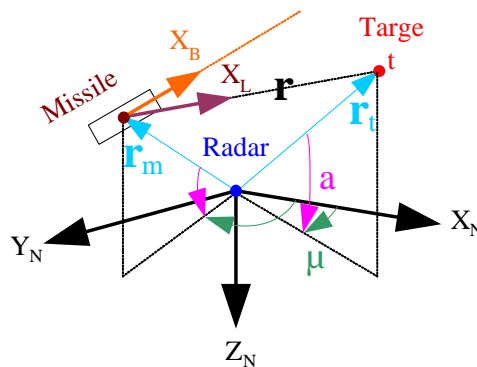


圖 2.2 慣性座標與視線座標及體座標之間的關係

2.2 座標轉換

為了描述飛彈的動態，我們推導地面座標與體座標之間的轉換，由地面座標經過三個角度的旋轉得到飛彈的體座標，這種有次序的角度旋轉稱為尤拉角 (Euler Angle)，通常用來描述一剛體的方位。首先將體座標和地面座標的原點重合起來，再經過以下有順序的三個旋轉，我們就可以將地面座標旋轉到體座標，如圖 2.3 所示：

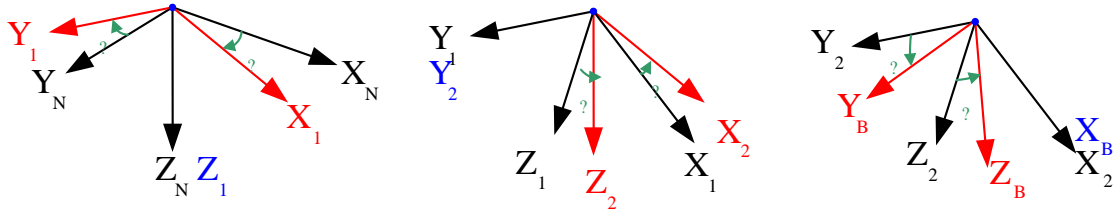


圖 2.3 地面座標與飛彈體座標轉換

1. 固定地面座標的 Z_N 軸旋轉 ψ 角，直到 X_N 與 X_1 重合，得到新的三軸為 (X_1, Y_1, Z_1) ，其中 $Z_1 = Z_N$ 。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_N \\ y_N \\ z_N \end{bmatrix} = T_1 \cdot \begin{bmatrix} x_N \\ y_N \\ z_N \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

2. 在固定 Y_1 旋轉 θ 角，直到 X_1 與 X_B 重合 (X_B 也就是 X_2)，得到新的三軸為 (X_2, Y_2, Z_2) ，其中 $Y_2 = Y_1$ 。

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = T_2 \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

3. 最後固定 X_2 旋轉 ϕ 角，直到 Y_2 與 Y_B 重合、 Z_2 與 Z_B 重合，得到體座標為 (X_B, Y_B, Z_B) ，其中 $X_B = X_2$ 。

$$\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = T_3 \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

結合以上(2.1)~(2.3)式，我們可以得到 S_N 座標與 S_B 座標的轉換為

$$\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} = T_3 T_2 T_1 \cdot \begin{bmatrix} x_N \\ y_N \\ z_N \end{bmatrix} = T_{BN} \cdot \begin{bmatrix} x_N \\ y_N \\ z_N \end{bmatrix}$$

$$T_{BN} = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \cos \psi \sin \phi \sin \theta - \cos \phi \sin \psi & \sin \psi \sin \phi \sin \theta + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \cos \psi \cos \phi \sin \theta + \sin \phi \sin \psi & \sin \psi \cos \phi \sin \theta - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

若是要計算從體座標轉換到地面座標的轉換矩陣則為

$$T_{NB} = (T_{BN})^T \quad (2.5)$$

其中 $(T_{BN})^T$ 為 T_{BN} 的轉置矩陣。

2.3 飛彈六自由度運動方程式

2.3.1 尤拉方程式(Euler equation)

我們假設 (p, q, r) 分別為飛彈在滾轉、俯仰及偏航方向的角速度，配合前一節定義的尤拉角 (ϕ, θ, ψ) ，透過簡單的推導可以得到尤拉角和角速度之間的一階微分方程式，稱為尤拉方程式[11]：

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= p - \tan \theta (q \sin \phi + r \cos \phi) \\ \dot{\theta} &= q \cos \phi - r \sin \phi \\ \dot{\psi} &= \sec \theta (q \sin \phi + r \cos \phi) \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.3.2 力矩方程式

力矩方程式描述飛彈的角速度與所受力矩的關係在彈體對稱的假設下，方程式可表示為

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{M_x}{I_{xx}} - \frac{qr}{I_{xx}} (I_{zz} - I_{yy}) = \frac{M_x}{I_{xx}} \\ \dot{q} &= \frac{M_y}{I_{yy}} - \frac{rp}{I_{yy}} (I_{xx} - I_{zz}) \\ \dot{r} &= \frac{M_z}{I_{zz}} - \frac{pq}{I_{zz}} (I_{yy} - I_{xx}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

若圓柱體的半徑為 r ，長度為 L ，質量為 m 且均勻分布，則 $I_{xx} = \frac{mr^2}{2}$ 、
 $I_{yy} = I_{zz} = \frac{mr^2}{4} + \frac{mL^2}{12}$ ，其中 I_{xx} ， I_{yy} ， I_{zz} 分別為飛彈三軸的轉動慣量， M_x ， M_y ，
 M_z 分別為飛彈三軸所受的力矩。

2.3.3 平移方程式

飛彈的平移運動方程式在(慣性)地面座標下是單純的積分關係，即加速度的
 兩次積分為位置，因此飛彈的平移方運動程式可表示為

$$\begin{aligned}\dot{v}_{mx} &= a_{mx} \\ \dot{v}_{my} &= a_{my} \\ \dot{v}_{mz} &= a_{mz}\end{aligned}\quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_m &= v_{mx} \\ \dot{y}_m &= v_{my}\end{aligned}\quad (2.9)$$

其中飛彈在地面座標的加速度分量 (a_{mx}, a_{my}, a_{mz}) ， (v_{mx}, v_{my}, v_{mz}) 為飛彈在地面座
 標的速度分量， (x_m, y_m, z_m) 為飛彈在地面座標的位置分量。

2.4 目標運動方程式

我們假設目標為點質量，不考慮姿態，只考慮目標在三度空間的平移運動，
 由於終端攔截的高度很高，忽略空氣阻力，僅考慮受到重力的影響，其運動方程
 式以慣性座標的分量表示為

$$\begin{aligned}\dot{v}_{tx} &= a_{tx} \\ \dot{v}_{ty} &= a_{ty} \\ \dot{v}_{tz} &= a_{tz}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_t &= v_{tx} \\ \dot{y}_t &= v_{ty} \\ \dot{z}_t &= v_{tz}\end{aligned}$$

其中 (a_{tx}, a_{ty}, a_{tz}) 為目標在慣性座標的加速度分量， (v_{tx}, v_{ty}, v_{tz}) 為目標在慣性座標
 的速度分量， (x_t, y_t, z_t) 為目標在慣性座標的位置分量。

第三章 攔截器推力器配置及數學模式

攔截器配備兩種推力器：轉向推力器及姿態推力器。轉向推力器的推力通常作用在攔截器的質量中心，提供攔截器 Y_B 及 Z_B 方向上的加速度。姿態推力器通常配置在攔截器的尾端，提供三軸的力矩。然而在攔截過程中由於燃料消耗造成質量及質量分布的改變，因此質心的位置也隨著變化。消除轉向推力器因此造成的干擾力矩(disturbance torque)的影響是姿態控制系統的功能之一。在現存的攔截系統，如標準三型飛彈的動能攔截器 MK142，轉向及姿態的控制是由一個整合的軌控與姿控系統(divert and attitude control system, DACS)來完成。

3.1 標準三型飛彈動能攔截器之物性

攔截器的物性資料在分析、設計及模擬時是必需的參數，如重量、尺寸、外型、推力器配置等，所有資料均參考標準三型飛彈(SM-3 Block IA)的動能攔截器(MK142)，如圖 3.1 所示。根據所得之資料[6]，MK142 的物性參數如表 3.1 所示。MK142 配有四個轉向推力器，激發時可單軸提供 1.5-1.8g 的加速度。俯仰軸的姿態由兩個推力器控制，偏航及滾轉軸的姿態由四個推力器共同控制。燃料的質量約占總質量的 20%。

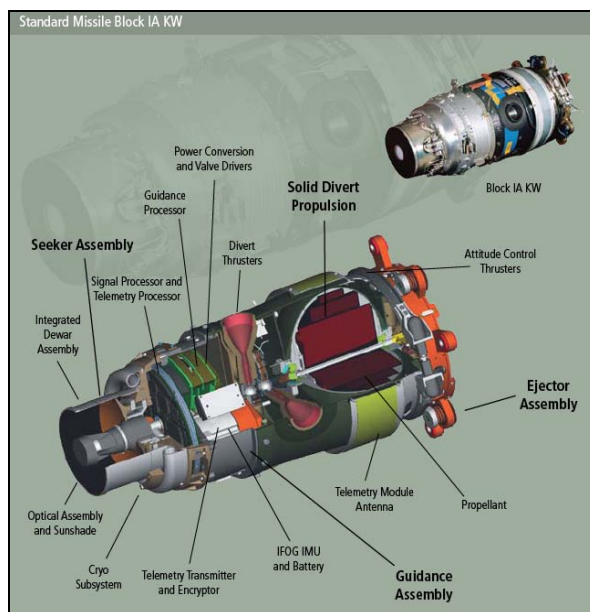


圖 3.1 標準三型飛彈 (SM3 Block IA) 的動能攔截器(MK142)

表 3.1 標準三型飛彈動能攔截器(MK142)的物性參數

質量(kg)	16.798(除燃料外)
	4.54(燃料)
	21.338(總量)
長度(m)	0.5588
直徑(m)	0.254
轉向推力器推力(N)	314.9184(×4)
姿態推力器推力(N)	15.568(×4)
滾轉(roll) 偏航(yaw)	
俯仰(pitch)	

3.2 模擬採用的攔截器物性及推力器配置

模擬採用的攔截器的物性大致與標準三型 MK142 攔截器一樣。為了方便轉動慣量的計算，假設攔截器為圓柱體，長 55.88 公分，半徑 12.7 公分，不含燃料的質量為 16.34 公斤，燃料質量為 4.99 公斤。體座標的中心訂於質量中心， X_B 軸的方向定為長軸方向。有四個轉向推力器安置於圓柱體的幾何中心(理想的狀況下，幾何中心與質量中心一致)，其推力在 $\pm Y_B$ 及 $\pm Z_B$ 的方向。姿態推力器配置於離圓柱體尾端 5 公分的平面上，模擬時採用六個姿態推力器的配置。圖 3.2 是攔截器推力器的配置圖，其中顯示轉向推力器在 $\pm Y_B$ 及 $\pm Z_B$ 的方向，g.c. 為幾何中心，c.m. 為質量中心。

其中四個轉向推力器能產生最大的的推力為 315 牛頓。六個姿態推力器配置中，兩個俯仰推力器皆可以產生最大的推力為 31.6 牛頓，四個偏航—滾轉推力器皆可產生最大推力為 15.8 牛頓。攔截器的物性如表 3.2 所示。

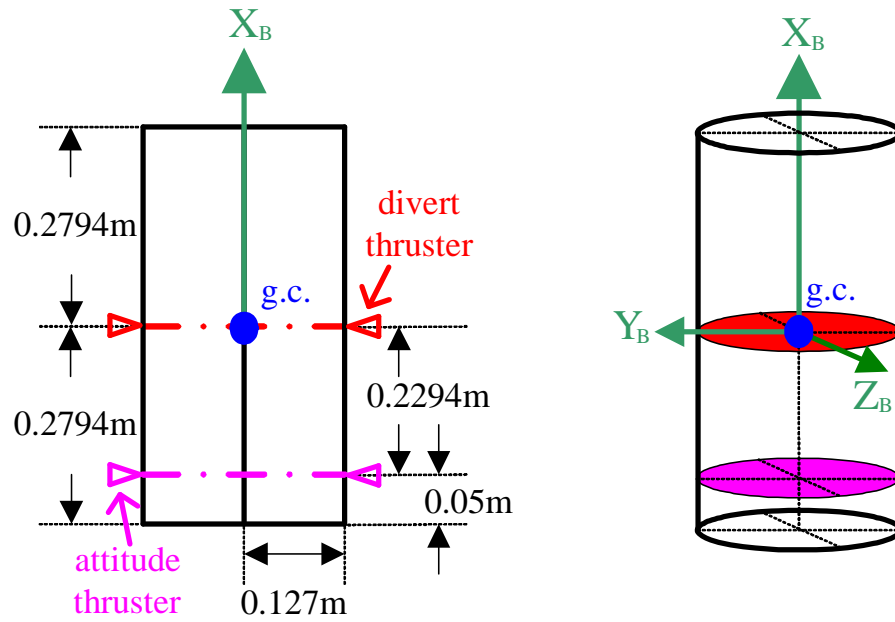


圖 3.2 攔截器圓柱體與推力器配置示意圖

表 3.2 模擬時採用的攔截器物性

六個姿態推力器	
質量(kg)	淨重 16.34
	燃料 4.99
	總重 21.33
長度(m)	0.5588
半徑(m)	0.127
轉向推力器最大推力(N)	315
姿態推力器最大推力(N)	
滾轉軸	15.8
俯仰軸	31.6
偏航軸	15.8

攔截器的轉動慣量採用簡單的圓柱體公式計算；圓柱體長度為 L ，半徑為 r ，質量為 m ，則 X_B ， Y_B ， Z_B 三軸的轉動慣量是分別為

$$I_{xx} = \frac{mr^2}{2}, \quad I_{yy} = I_{zz} = \frac{mr^2}{4} + \frac{mL^2}{12} \quad (3.1)$$

由於這個計算要準確必須要質量分布均勻，在實際的攔截器上這種情況可能不成立，因此誤差存在可能不小。不過從模擬的觀點，定性的性質如慣量隨燃料消耗漸漸減，比定量的準確度重要。用上面的公式計算，在燃料未消耗的狀況下，

$$I_{xx} = 0.1720 \text{ kg}\cdot\text{m}^2, \quad I_{yy} = I_{zz} = 0.6413 \text{ kg}\cdot\text{m}^2。$$

3.3 推力器的數學模式

從 3.2 節我們可以得到攔截器的轉向與姿態推力器的配置設計。推力器的推力使得攔截器產生加速度與力矩，發生平移與旋轉的現象。在這一節我們將分別討論攔截器的力矩與加速度。

3.3.1 轉向推力器產生的力矩

四個轉向推力器的配置如圖 3.3 所示，其推力作用於攔截器的幾何中心，分別在 $\pm Y_B$ 及 $\pm Z_B$ 的方向上產生推力。 $f_{DA1}, f_{DA2}, f_{DB1}, f_{DB2} \geq 0$ 為轉向推力器 DA1、DA2、DB1 及 DB2 所產生的推力大小。

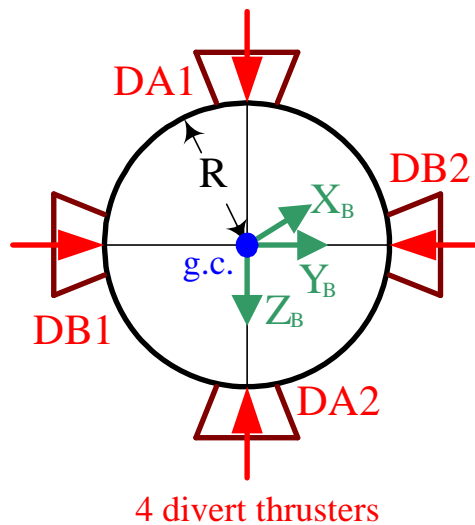


圖 3.3 轉向推力器示意圖

我們假設理想狀況下攔截器的質心是在攔截器圓柱體的幾何中心，也就是轉向推力器所固定的位置，但實際上攔截器在製造的過程中可能產生偏移或是燃料消耗後質量分部改變的因素，攔截器的質心不一定會在幾何中心的現象，我們稱為攔截器的質心偏移。

由於攔截器體座標的原點是定義在質心上，質心偏移會造成幾何中心的位置在體座標下改變為(dx,dy,dz)，當有質心偏移的現象發生時，轉向推力器的推力將不是作用在質心上，如圖 3.4 所示，使得轉向推力器對攔截器產生了額外的力矩分別為

$$\begin{aligned} M_{xd} &= dy \times (f_{DA1} - f_{DA2}) + dz \times (f_{DB2} - f_{DB1}) \\ M_{yd} &= dx \times (f_{DA2} - f_{DA1}) \\ M_{zd} &= dx \times (f_{DB1} - f_{DB2}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

其中 M_{xd} 、 M_{yd} 、 M_{zd} 分別為 X_B 、 Y_B 及 Z_B 方向的力矩。

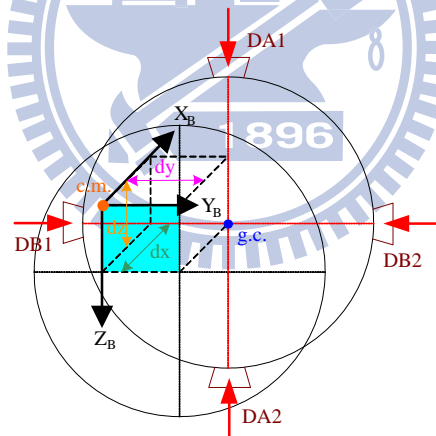


圖 3.4 攔截器的質心偏移示意圖

3.3.2 姿態推力器產生的力矩

六個姿態推力器的配置如圖 3.5 所示，其中推力器 AA1，AA2 提供俯仰的力矩，而推力器 AB1—AB4 共同提供偏航及滾轉的力矩。由於質心偏移使得幾何中心的座標改變為(dx,dy,dz)，因此改變了姿態推力器的力臂，如圖 3.6 所示，造成姿態推力器產生的力矩也跟著改變。

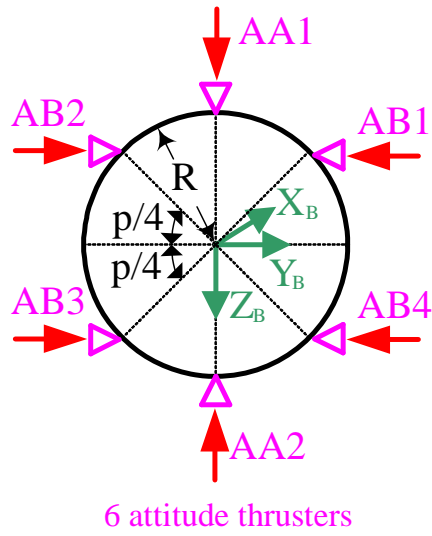


圖 3.5 六個姿態推力器示意圖

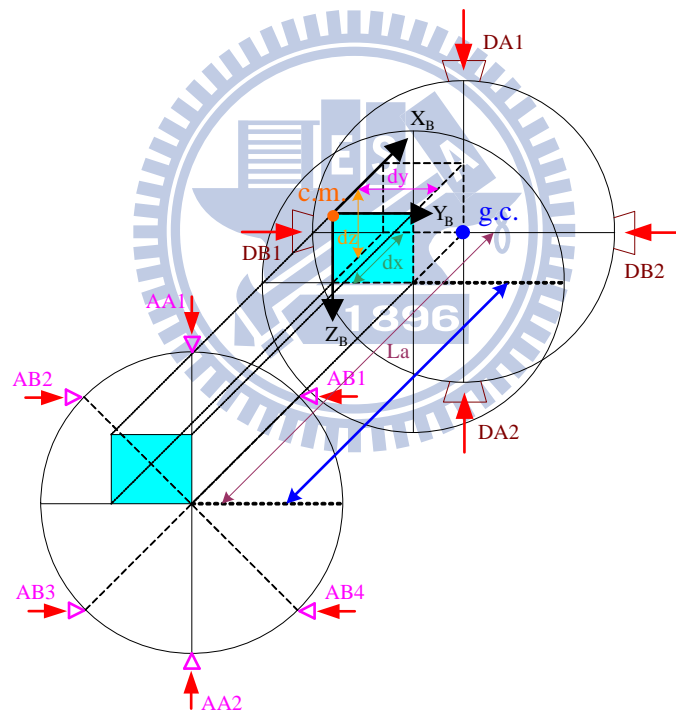


圖 3.6 六個姿態推力器的質心偏移示意圖

我們各別討論六個推力器所造成的力矩，如表 3.3 所示，其中 R 為攔截器的半徑， La 為攔截器圓柱體幾何中心到姿態推力器作用平面的距離，以及 $f_{AA1}, f_{AA2}, f_{AB1}, f_{AB2}, f_{AC1}, f_{AC2}, f_{AC3}, f_{AC4} \geq 0$ 為姿態推力器所產生的推力。

表 3.3 六個姿態推力器各別造成的力矩

AA1 :	AA2 :
$M_{x,AA1} = dy \times f_{AA1}$ $M_{y,AA1} = (La - dx) \times f_{AA1}$ $M_{z,AA1} = 0$	$M_{x,AA2} = -dy \times f_{AA2}$ $M_{y,AA2} = -(La - dx) \times f_{AA2}$ $M_{z,AA2} = 0$
AB1 :	AB3 :
$M_{x,AB1} = -\left(\frac{R}{\sqrt{2}} - dz\right) \times f_{AB1}$ $M_{y,AB1} = 0$ $M_{z,AB1} = (La - dx) \times f_{AB1}$	$M_{x,AB3} = -\left(\frac{R}{\sqrt{2}} + dz\right) \times f_{AB3}$ $M_{y,AB3} = 0$ $M_{z,AB3} = -(La - dx) \times f_{AB3}$
AB2 :	AB4 :
$M_{x,AB2} = \left(\frac{R}{\sqrt{2}} - dz\right) \times f_{AB2}$ $M_{y,AB2} = 0$ $M_{z,AB2} = -(La - dx) \times f_{AB2}$	$M_{x,AB4} = \left(\frac{R}{\sqrt{2}} + dz\right) \times f_{AB4}$ $M_{y,AB4} = 0$ $M_{z,AB4} = (La - dx) \times f_{AB4}$

姿態推力器所造成的總力矩為

$$\begin{aligned}
 M_{xa} &= M_{x,AA1} + M_{x,AA2} + M_{x,AB1} + M_{x,AB2} + M_{x,AB3} + M_{x,AB4} \\
 M_{ya} &= M_{y,AA1} + M_{y,AA2} + M_{y,AB1} + M_{y,AB2} + M_{y,AB3} + M_{y,AB4} \\
 M_{za} &= M_{z,AA1} + M_{z,AA2} + M_{z,AB1} + M_{z,AB2} + M_{z,AB3} + M_{z,AB4}
 \end{aligned}$$

根據表 3.3 計算可得

$$M_{xa} = \frac{R}{\sqrt{2}} \times (-f_{AB1} + f_{AB2} - f_{AB3} + f_{AB4}) + dy \times (f_{AA1} - f_{AA2}) + dz \times (f_{AB1} - f_{AB2} - f_{AB3} + f_{AB4})$$

$$M_{ya} = (La - dx) \times (f_{AA1} - f_{AA2})$$

$$M_{za} = (La - dx) \times (f_{AB1} - f_{AB2} - f_{AB3} + f_{AB4})$$

由圖 3.5 六個姿態推力器的配置中，AA1 與 AA2 控制俯仰，AB1、AB2、AB3 與 AB4 則是控制偏航與滾轉。當六個姿態推力器同時作偏航與翻滾時，會有四種可能的情況，即 AB1、AB2、AB3、AB4 其中三個會同時打開，一個會關閉。因為六個姿態推力器的設計關係，同時打開時，會造成力量互相抵消，形成浪費燃料。所以對這四個情況去作調整：

1. 若 AB1、AB3 與 AB4 均為開啟狀態，則 AB1 為開啟狀態，AB3 與 AB4 為關閉狀態。
2. 若 AB2、AB3 與 AB4 均為開啟狀態，則 AB2 為開啟狀態，AB3 與 AB4 為關閉狀態。
3. 若 AB1、AB2 與 AB3 均為開啟狀態，則 AB3 為開啟狀態，AB1 與 AB2 為關閉狀態。
4. 若 AB1、AB2 與 AB4 均為開啟狀態，則 AB4 為開啟狀態，AB1 與 AB2 為關閉狀態。

3.3.3 轉向及姿態推力器產生的加速度

攔截器上的推力總和為

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{divert} + \mathbf{F}_{attitude} \quad (3.3)$$

轉向及姿態推力器所造成的推力分別為

$$\mathbf{F}_{divert} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_{DB1} - f_{DB2} \\ f_{DA1} - f_{DA2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{attitude} = \begin{bmatrix} 0 \\ -f_{AB1} + f_{AB2} + f_{AB3} - f_{AB4} \\ f_{AA1} - f_{AA2} \end{bmatrix}$$

若 m 為攔截器的質量，由推力器所產生的攔截器加速度為

$$a_f = \frac{F_T}{m}$$

3.3.4 推力器動態

雖然推力器為開關式，理論上只有開或關兩個狀態，但是實際上從開到關或從關到開均無法瞬間達成。我們用一個簡單的一階轉移函數 $G(s) = \frac{A}{s+A}$ 來表示開關命令與實際起程度的關係，其中 $1/A$ 為時間常數，在模擬中設定 $A=500$ ，也就是時間常數為 $2(\text{ms})$ 。



第四章 線性姿態控制系統設計

攔截目標的過程中，我們希望尋標器能一直對準目標，因此必須靠控制姿態推力器的開關產生推力，使得攔截器的體座標與視線座標重合。又攔截器姿態是屬於六自由度時變且非線性的方程組，直接作為設計用的數學模式相當不方便。為了方便控制器的設計，必須對姿態方程式做適當的線性化。

由於姿態控制的目標是要使的三軸穩定，其中滾轉角 ϕ 維持於零，俯仰角 θ 及偏航角 ψ 則是分別追蹤一個小角度變化的角度命令，所以我們可以合理的假設攔截器的滾轉角 $\phi \approx 0$ 、滾轉角的速度 $p \approx 0$ 及俯仰角 $\theta \approx 0$ ，簡化後姿態的動態方程式會形成三組雙積分的方程式為

$$\dot{\phi} = p, \quad \dot{p} = \frac{M_x}{I_{xx}} \quad (4.1)$$

$$\dot{\theta} = q, \quad \dot{q} = \frac{M_y}{I_{yy}} \quad (4.2)$$

$$\dot{\psi} = r, \quad \dot{r} = \frac{M_z}{I_{zz}} \quad (4.3)$$

其中 I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} 分別為三軸轉動慣量， M_x, M_y, M_z 分別為三軸的力矩輸出。

4.1 線性控制系統

由於(4.1)~(4.3)三組雙積分方程式分別獨立，我們可以用相同的控制方法，控制系統使用內外迴路常數增益回授形成的二階理想轉移函數，理想二階系統的轉移函數可由阻尼比 ξ 及自然頻率 ω_n 二個參數來訂定，其通式為

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (4.4)$$

以滾轉軸為例，控制系統的方塊圖如圖 4.1 所示，其中 $G_\phi = \frac{1}{I_{xx}}$ ， $u_\phi = M_x$ ， k_p 為角速度回授增益， k_ϕ 為角度回授增益， ϕ_c 為控制系統的輸入命令，俯仰軸及偏航軸的方塊圖與圖 4.1 有一樣的結構，除了其中的變數及回授增益不同。

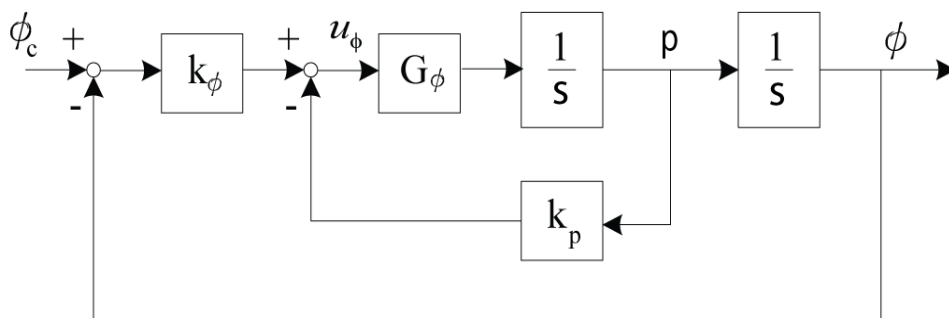


圖 4.1 滾轉軸控制系統

利用圖 4.1 的方塊圖可計算從指令 ϕ_c 至角度 ϕ 的轉移函數為

$$H_\phi(s) = \frac{k_\phi G_\phi}{s^2 + k_p G_\phi s + k_\phi G_\phi} \quad (4.5)$$

同樣的計算可得其他兩軸的轉移函數為

$$H_\theta(s) = \frac{k_\theta G_\theta}{s^2 + k_q G_\theta s + k_\theta G_\theta} \quad (4.6)$$

$$H_\psi(s) = \frac{k_\psi G_\psi}{s^2 + k_r G_\psi s + k_\psi G_\psi} \quad (4.7)$$

其中 $G_\theta = \frac{1}{I_{yy}}$ 、 $G_\psi = \frac{1}{I_{zz}}$ ， k_θ 、 k_q 為俯仰軸的回授增益， k_ψ 、 k_r 為偏航軸的回授

增益。因為追蹤是小角度的命令，所以系統頻寬只要能有效地滿足命令追蹤的需

求即可。選擇阻尼比 $\zeta = 1/\sqrt{2}$ ，系統頻寬 $f = \frac{\omega_n}{2\pi} = 5$ (Hz)，可得轉移函數為

$$H_\phi = \frac{(2\pi \cdot 5)^2}{s^2 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(2\pi \cdot 5)s + (2\pi \cdot 5)^2} \approx \frac{987}{s^2 + 44s + 987} \quad (4.8)$$

比較(4.8)式和(4.5)式的係數之後，我們可以得到滾轉軸的回授增益參數為

$$k_\phi = \frac{987}{G_\phi(0)} = \frac{987}{5.8173} \approx 169.84$$

$$k_p = \frac{44}{G_\phi(0)} = \frac{44}{5.8173} \approx 7.65$$

同理可以設計俯仰軸和偏航軸的回授增益為

$$k_\psi = k_\theta = \frac{987}{G_\theta(0)} = \frac{987}{1.5605} = 632.92$$

$$k_r = k_q = \frac{44}{G_\theta(0)} = \frac{44}{1.5605} = 28.49$$

由於在攔截過程中燃料不斷的消耗， I_{xx} 、 I_{yy} 及 I_{zz} 均會隨時間減小，相對的 G_ϕ 、 G_θ 及 G_ψ 會隨時間增加，會使得系統頻寬隨時間略為增加。經由上述的設計方法，我們可以得到線性姿態控制的輸入訊號如下

$$\begin{aligned} u_\phi &= k_\phi(\phi_c - \phi) - k_p p \\ u_\theta &= k_\theta(\theta_c - \theta) - k_q q \\ u_\psi &= k_\psi(\psi_c - \psi) - k_r r \end{aligned}$$

4.2 脈衝寬度調變(PWM)的設計

為了配合開關式推力器的使用，必須將連續的控制訊號轉換成對等的開關訊號，即 0 或 1 的訊號。脈衝寬度調變(pulse width modulation, PWM)是達到這個目的的方法之一。透過脈衝寬度調變可將輸入連續訊號的大小依比例轉換成脈衝訊號的寬度，這種方式廣泛的應用於馬達驅動的伺服控制系統。

假設當輸入的連續訊號是一個低頻的弦波，而參考訊號為固定頻率及振幅大小的鋸齒波，將參考訊號與輸入訊號做比較，就可以得到輸出的脈衝訊號，如圖 4.2 所示。如果輸入訊號較大則輸出為 1，否則為 0。如果鋸齒波的週期為 T 則輸出為 1 的時間 T_{ON} 滿足 $0 \leq T_{ON} \leq T$ 。定義導通週期(duty cycle, dc)為 $\frac{T_{ON}}{T}$ ，所以導通週期的範圍為 0% 至 100%。

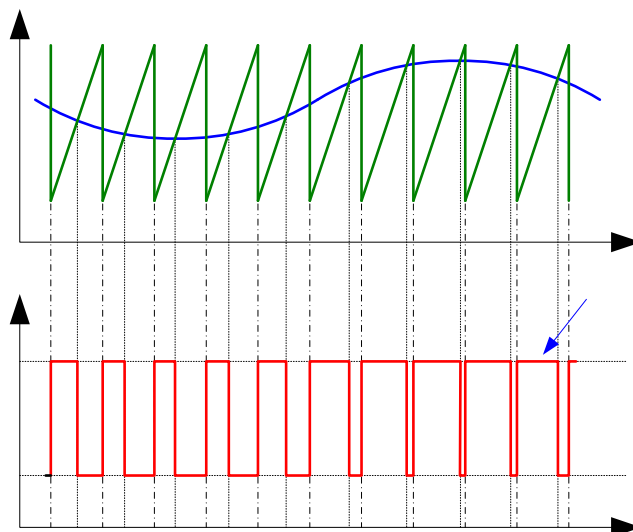


圖 4.2 脈衝寬度調變訊號示意圖

我們修改 PWM 參考訊號在 duty cycle 內的方式。假設脈衝寬度調變的參考訊號週期為 T ，利用週期一開始的輸入連續訊號 (u_n) 和參考訊號 ($u_{\max,n}$) 的比值，作為 duty cycle 在該週期內的比例，來決定輸出脈衝訊號為 1 的時間，也就是開關式推力器打開的時間長短。在這邊 u_n 就是線性控制器的輸出訊號，而 $u_{\max,n}$ 就是三軸所能產生的最大力矩，即 $M_{x\max}$ ， $M_{y\max}$ 及 $M_{z\max}$ 。以滾轉軸為例，假設時間 t 屬於參考訊號的第 n 個週期，也就是 $(n-1)T \leq t < nT$ ，則在這個週期的導通週期為

$$dc = \min\left(\frac{u_{\phi n}}{M_{x\max}}, 1\right)$$

大致上推力器開的時間和輸入 $u_{\phi n}$ 成比例關係，若 $u_{\phi n} > M_{x\max}$ ，則推力器開的時間為 T ，即 $dc=100\%$ ，如圖 4.3 所示。

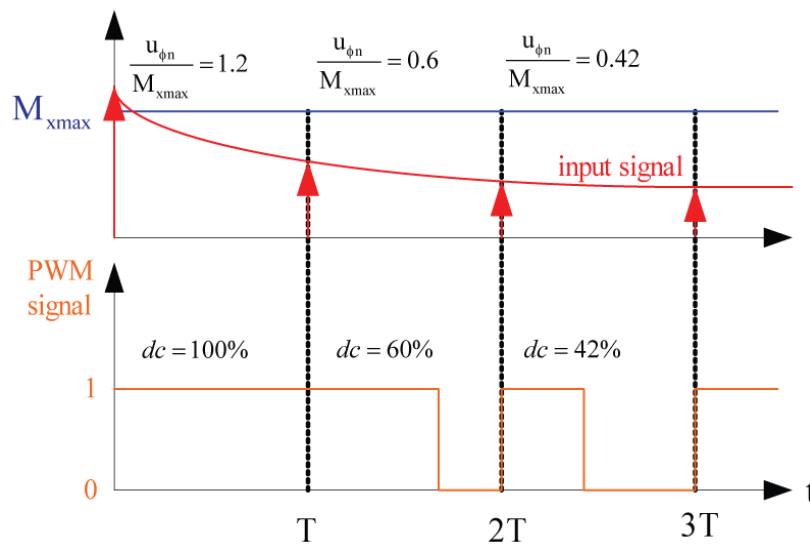


圖 4.3 脈衝寬度調變(PWM)訊號示意圖

在使用 PWM 將輸入的連續訊號轉換成脈衝訊號輸出時，參考訊號的週期 T 或是說頻率是一個可以調整的參數，當選擇的頻率過低，姿態推力器開啟或關閉的時間過多，會造成角度誤差較大，燃料消耗也會較多；相反的當選擇的頻率過高，噴嘴還未完全打開產生足夠的推力時，卻有可能收到必須關閉的命令。因此

如何選擇適當的 PWM 頻率使的姿態角的誤差在可接受的範圍內，並且由於受到硬體的限制，選擇的頻率也不可以讓噴嘴的開關頻率太高。

因為 PWM 是將線性控制器的輸出訊號轉換成脈衝訊號，而脈衝訊號透過傅麗葉級數分析後可知和線性控制器的訊號有關[8]，因此我們先觀察線性控制器的頻率響應，畫出(4.8)式的波德圖如圖 4.4 所示，在波德圖中，頻率響應的大小為-3(dB)時的頻率 $\omega \approx 31.4(\text{rad})$ 或 $f \approx 5(\text{Hz})$ ，由於線性控制器在這頻率還存在有不小的控制力，因此我們可以選擇更高頻的 PWM 頻率，保留線性控制器在這頻率附近控制力提供的貢獻；而在波德圖中，大小約為-20(dB)時的頻率 $\omega \approx 102(\text{rad})$ 或 $f \approx 16(\text{Hz})$ ，控制力在此頻率後所能提供的貢獻已經很小，如果再選擇更高頻的 PWM 頻率所能消除的誤差量已經不明顯，反而有可能讓噴嘴出現不能完全開啟的情況，估計 PWM 的頻率選擇在 16(Hz)附近，也就是線性控制系統頻寬的 3~4 倍將會比較適當。

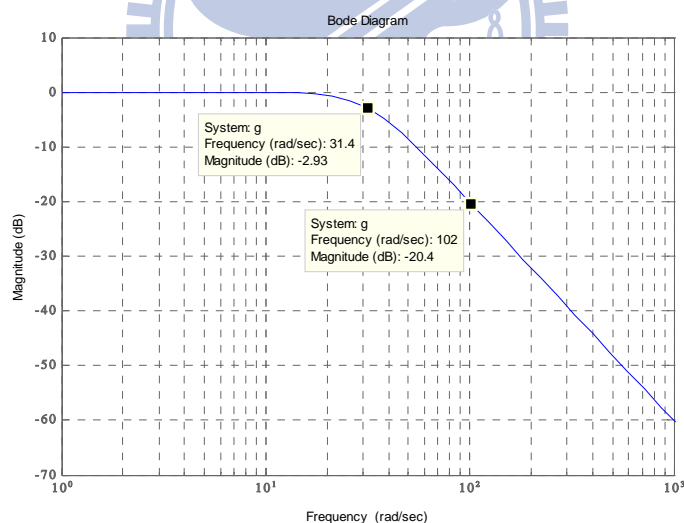


圖 4.4 線性姿態控制器的頻率響應

這邊用一個簡單的數值模擬來進一步幫助 PWM 頻率的選擇，當假設三組不同的姿態角命令分別為斜坡、弦波和三角波函數，如圖 4.5 所示。並且選擇不同的 PWM 頻率為 10、12、15、17、20(Hz)，觀察在不同頻率下的角度誤差(取方均根值)、燃料消耗及噴嘴開啟的情況。模擬結果如表 4.1~表 4.3 所示。

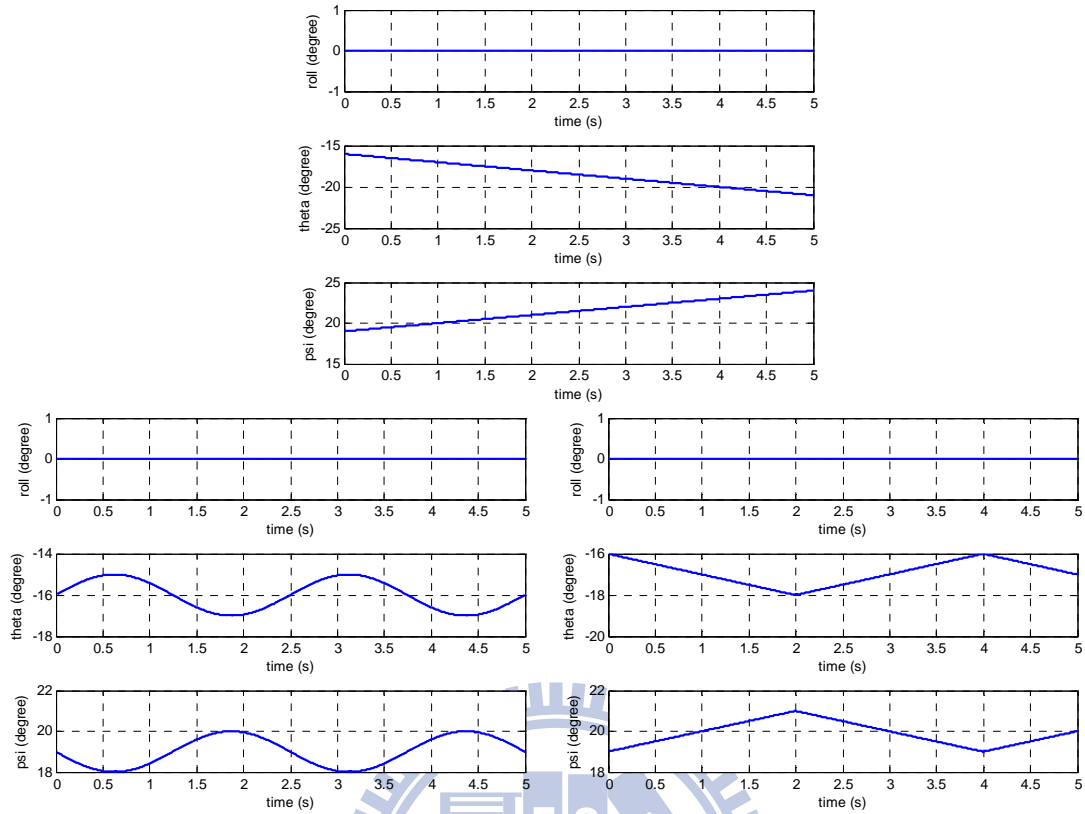


圖 4.5 三組不同的姿態角命令

表 4.1 姿態角命令為斜坡函數的模擬結果

誤差 頻率	ϕ_e (degree)	θ_e (degree)	ψ_e (degree)	燃料消耗 (kg)
8 (Hz)	0.4032	0.2584	0.1452	0.0178
10 (Hz)	0.1774	0.1418	0.0670	0.0123
12 (Hz)	0.0886	0.0816	0.0491	0.0089
15 (Hz)	0.0418	0.0561	0.0441	0.0066
17 (Hz)	0.0311	0.0501	0.0433	0.0059
20 (Hz)	0.0181	0.0471	0.0428	0.0044

表 4.2 姿態角命令為弦波函數的模擬結果

誤差 頻率	ϕ_e (degree)	θ_e (degree)	ψ_e (degree)	燃料消耗 (kg)
8 (Hz)	0.4010	0.2687	0.1586	0.0181
10 (Hz)	0.1752	0.1581	0.0940	0.0124
12 (Hz)	0.0881	0.1058	0.0819	0.0089
15 (Hz)	0.0473	0.0872	0.0772	0.0069
17 (Hz)	0.0353	0.0833	0.0766	0.0059
20 (Hz)	0.0262	0.0812	0.0765	0.0047

表 4.3 姿態角命令為三角波函數的模擬結果

頻率 \ 誤差	ϕ_e (degree)	θ_e (degree)	ψ_e (degree)	燃料消耗 (kg)
8 (Hz)	0.3989	0.2580	0.1451	0.0178
10 (Hz)	0.1397	0.1437	0.0756	0.0113
12 (Hz)	0.0660	0.0834	0.0530	0.0081
15 (Hz)	0.0370	0.0566	0.0459	0.0062
17 (Hz)	0.0286	0.0491	0.0437	0.0055
20 (Hz)	0.0160	0.0467	0.0433	0.0042

到目前為止，從表 4.1~表 4.3 的模擬結果可以發現，當 PWM 頻率在低頻(8Hz)時，角度誤差很大，需要比較大的控制力來消除誤差，因此噴嘴開啟的時間就會比較長，燃料也消耗的多。當頻率從 10(Hz)一直增加到 15(Hz)，角度誤差部份有明顯的改善，可是改善的量也隨的頻率的增加持續的遞減，當頻率從 15(Hz)增加到 20(Hz)時，角度誤差改善的量已經非常的少，可以證明在線性控制器頻率響應大小在-20(dB)後所提供的控制力已經下降的非常多了。

除了角度誤差這個指標外，另一個幫助我們選擇 PWM 頻率的就是噴嘴開啟的情況，四個滾轉—偏航軸噴嘴(AB1~AB4)能產生的最大推力為 15.8 牛頓，兩個俯仰軸噴嘴(AA1、AA2)所能產生的最大推力為 31.6 牛頓，所以透過觀察每個噴嘴產生推力的情況來判斷噴嘴是否有正常開啟。當 PWM 頻率為 15(Hz)時的噴嘴大部分的情況下都能正常的開啟產生推力，只有在姿態角命令為三角波這種變化比較劇烈的狀況下，噴嘴 AB1 和 AB2 才會有部份無法完全開啟的情形，如圖 4.6 中的(b)所示。當頻率為 17(Hz)時，除了在姿態命令為三角波這個角度變化較大的情況下比較嚴重外，噴嘴開啟情形大致和頻率為 15(Hz)雷同，如圖 4.7 中(b)所示。當頻率為 20(Hz)時 AB1 和 AB2 兩個噴嘴普遍都只能開一半就必須要關閉，如圖 4.8 中(b)所示。雖然在一般情況姿態角是追蹤一個小角度變化的命令，但是考慮當有雜訊或其他較大的干擾造成姿態角度較劇烈變化的情形，所以我們可以選擇 15(Hz)為適當的 PWM 頻率，也就是線性控制器頻寬的 3 倍。

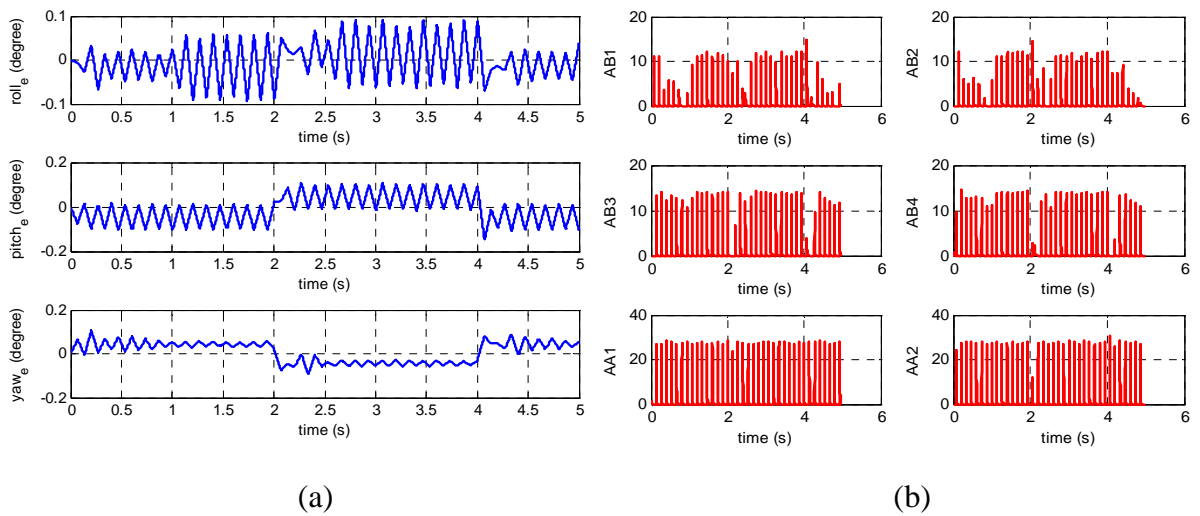
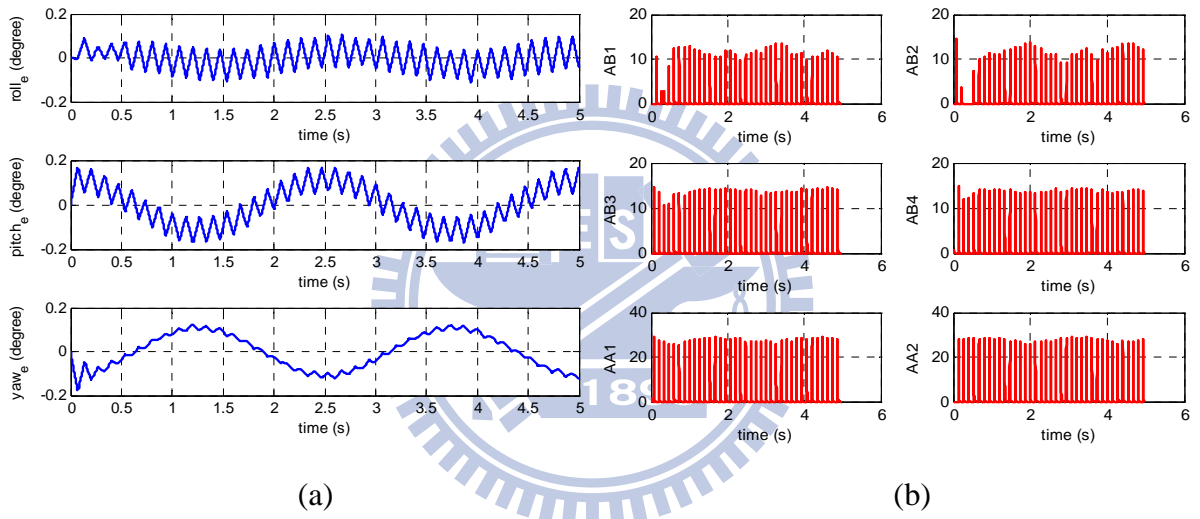
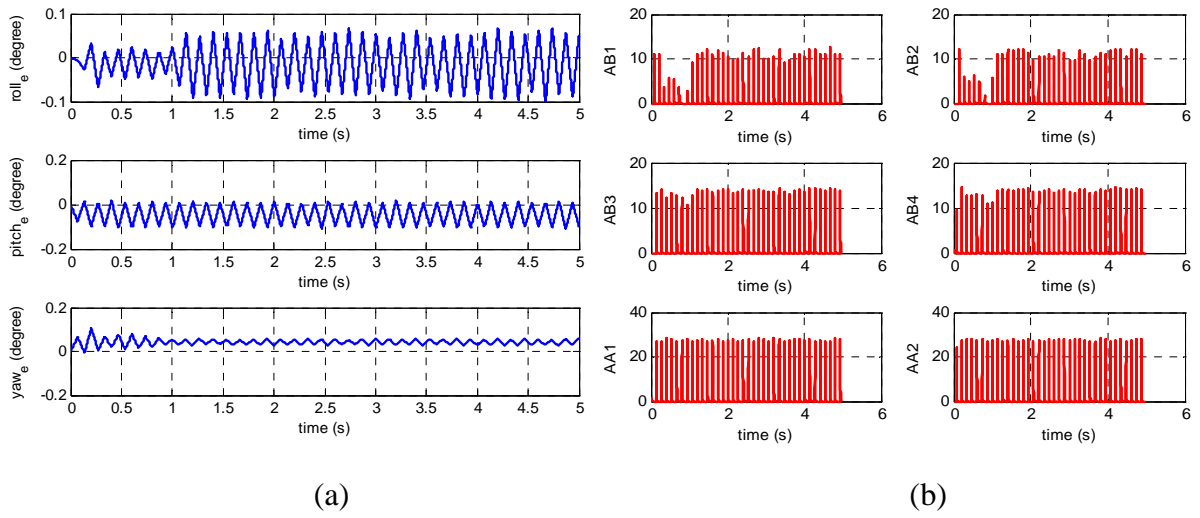


圖 4.6 由上到下的姿態角命令分別為斜坡、弦波和三角波函數，PWM 頻率為 15(Hz)

(a) 角度誤差，(b)噴嘴開啟情況

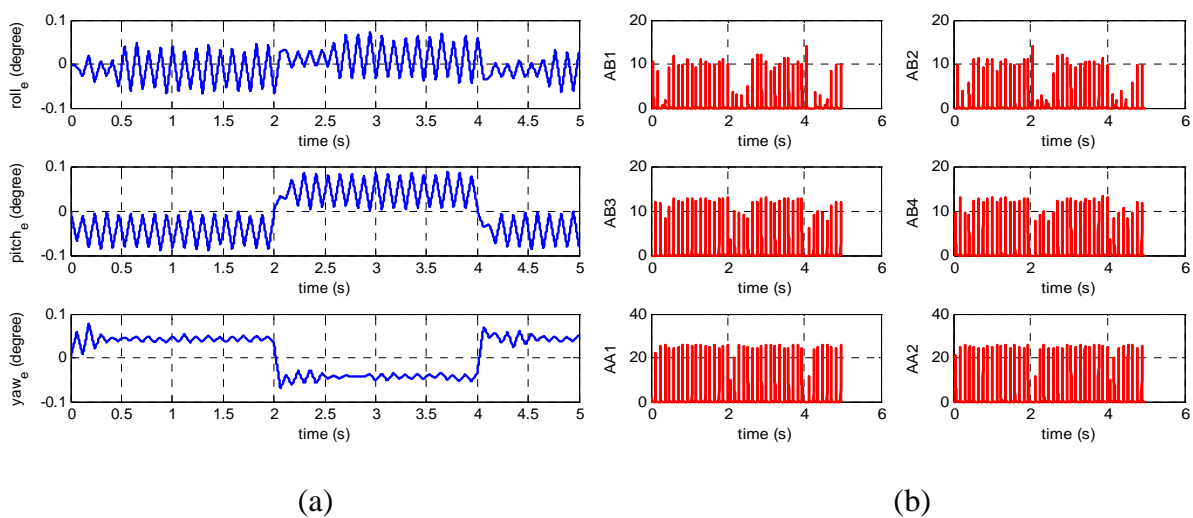
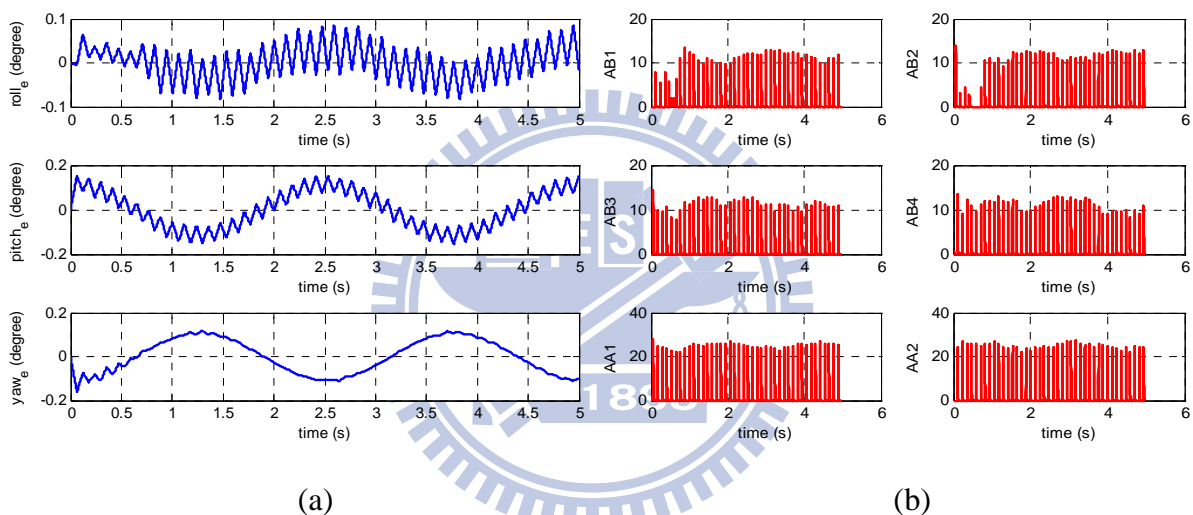
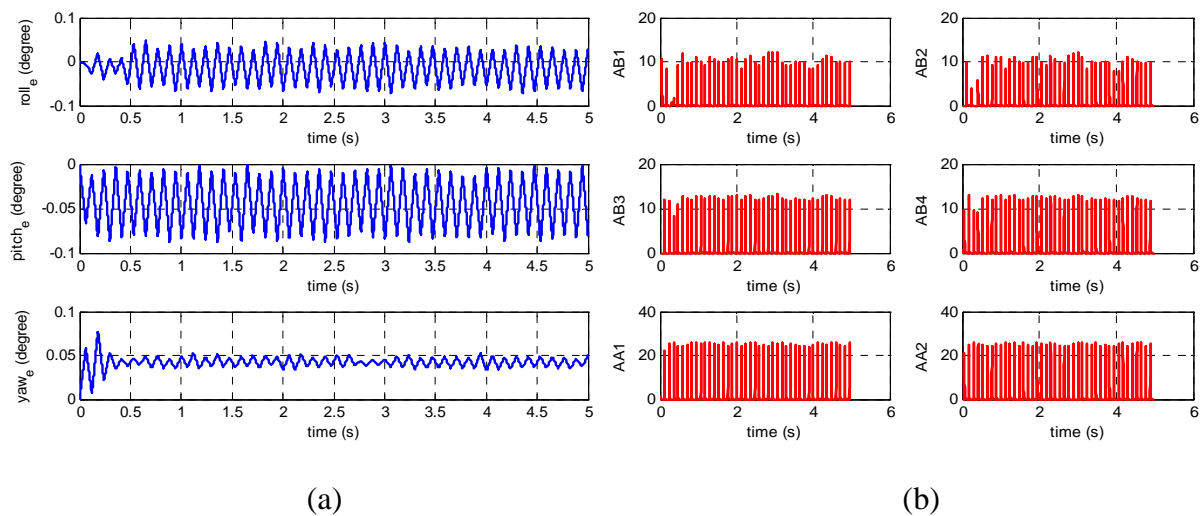


圖 4.7 由上到下的姿態角命令分別為斜坡、弦波和三角波函數，PWM 頻率為 17(Hz)

(a) 角度誤差，(b) 噴嘴開啟情況

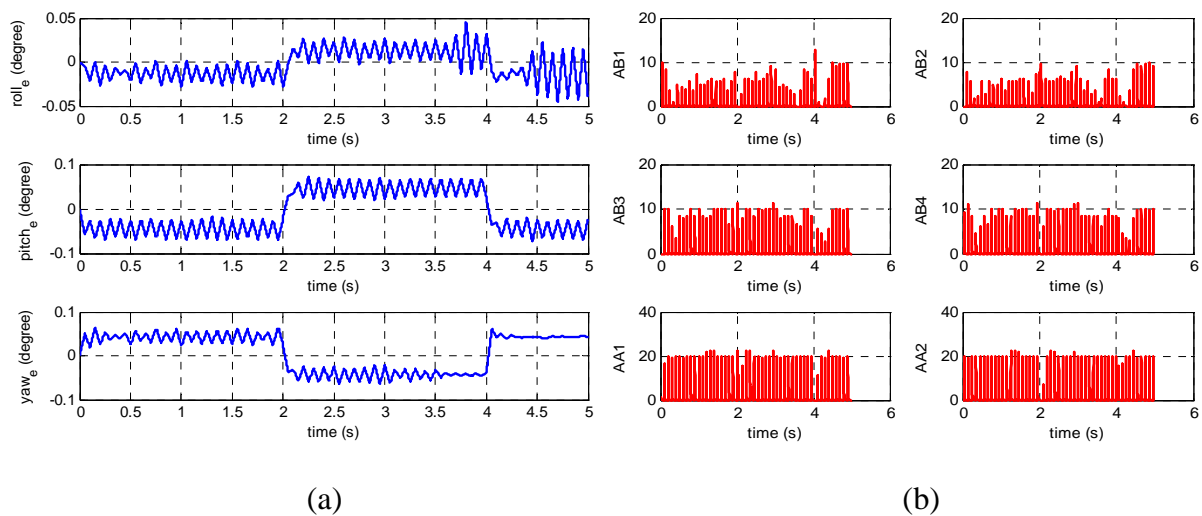
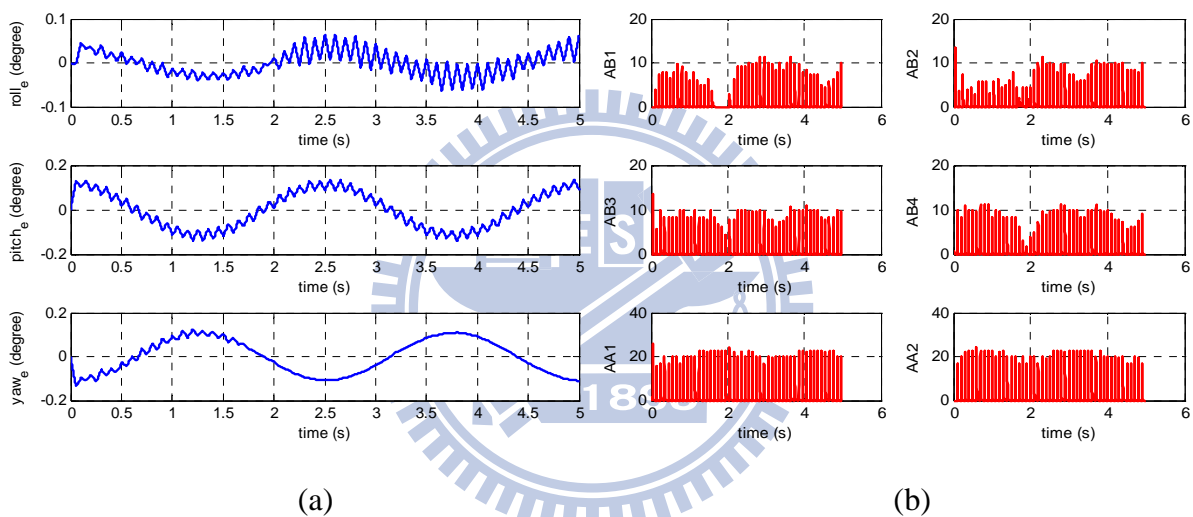
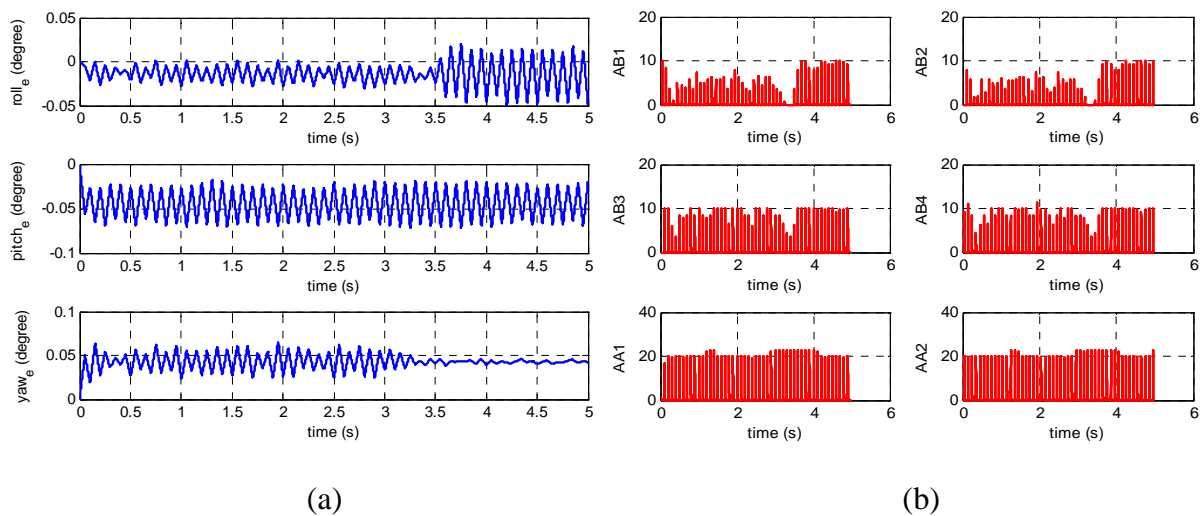


圖 4.8 由上到下的姿態角命令分別為斜坡、弦波和三角波函數，PWM 頻率為 20(Hz)

(a)角度誤差，(b)噴嘴開啟情況

第五章 最短時間最佳控制系統

前一章討論線性姿態控制系統為簡單的常值增益角度及角速度回授的設計，以及其利用 PWM 的方法達成開關式常值推力器的合成。本章所要討論的是時間最佳(time-optimal)控制控制系統的設計，直接考慮制動器開關輸出的特性，使控制系統直接輸出開關式的訊號。這種控制方式是要將系統從一個初始狀態在最短的時間控制到原點。不過將這種方法應用到姿態跟蹤控制有幾個理論上的假設和實際合成上的問題需要討論。

和線性控制器一樣我們考慮線性化的攔截器姿態方程式，即(4.1)-(4.3)三個獨立的雙積分方程式。接著會討論雙積分系統的時間最佳的控制法應用到追蹤控制的一些問題和必要的假設，並且對於這些問題找尋一些可行的解決方法。

5.1 理想時間最佳控制設計

由於線性化的姿態動態方程式由(4.1)-(4.3)三個獨立的雙積分系統所組成，我們考慮一個單輸入雙積分系統之時間最佳控制，系統的狀態方程式寫成

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (5.1)$$

$$\dot{x}_2 = ku(t) \quad (5.2)$$

其中 k 為大於 0 的常數， (x_1, x_2) 為狀態變數， u 為控制輸入。假設在所有時間 t 控制輸入 $u(t)$ 滿足

$$|u(t)| \leq 1 \quad (5.3)$$

又系統(5.1)、(5.2)是可控的(controllable)，因此根據時間最佳控制的理論[8]，時間最佳控制存在且唯一，而且給定任何一個初始狀態 $(x_1(0), x_2(0))$ ，時間最佳控制系統能在最短的時間內將系統的狀態最終能驅動至原點，即最終的狀態為 $(x_1(t_f), x_2(t_f))=(0,0)$ 。

根據[3]在(5.3)的限制下，設計出系統(5.1)，(5.2)的切換曲線和最佳控制器為

$$s = x_1 + \frac{1}{2}x_2|x_2| \quad (5.4)$$

$$u(t) = -\text{sgn}(x_1 + \frac{1}{2}x_2|x_2|) \quad (5.5)$$

其中

$$\text{sgn}(y) = \begin{cases} +1 & , y \geq 0 \\ -1 & , y < 0 \end{cases}$$

以滾轉軸為例，假設角度命令為 ϕ_c ，我們定義追蹤誤差的差為 $e_1 = \phi - \phi_c$ ，根據(4.1)

式可得 $\dot{e}_1 = \dot{\phi} - \dot{\phi}_c = p - \dot{\phi}_c$ ，令 $x_1 = e_1$ 和 $x_2 = \dot{e}_1$ ，且假設 ϕ_c 變化足夠緩慢，使得

$\ddot{\phi}_c = 0$ ，則滾轉軸的動態方程式可表示成

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (5.6)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{M_x}{I_{xx}} u \quad (5.7)$$

令 $k = \frac{M_{x\max}}{I_{xx}}$ ， $u = \frac{M_x}{M_{x\max}}$ 則姿態動態可表示成(5.1)、(5.2)的形式，且控制滿足(5.3)

式。因此根據(5.5)，滾轉軸的時間最佳控制 $u_\phi(t)$ 可表示成

$$u_\phi(t) = -\text{sgn}(x_1 + \frac{1}{2}x_2|x_2|) \quad (5.8)$$

$$u(t) = \begin{cases} 1 & , s < 0 \\ -1 & , s \geq 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

其方塊圖如圖 5.1 所示

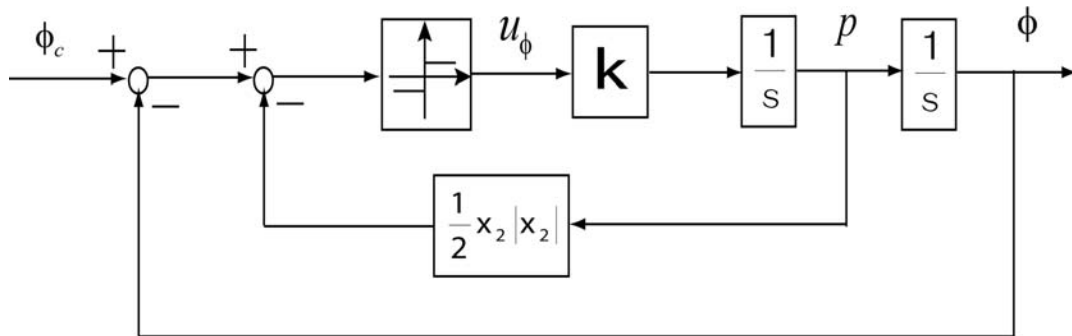


圖 5.1 滾轉軸時間最佳控制器方塊圖，其中 $k = M_{x\max} / I_{xx} > 0$

使用相同的方法可以設計俯仰和偏航的控制器

$$u_{\theta} = -\text{sgn}\left(x_3 + \frac{1}{2}x_4|x_4|\right) \quad (5.10)$$

$$u_{\psi} = -\text{sgn}\left(x_5 + \frac{1}{2}x_6|x_6|\right) \quad (5.11)$$

其中 $x_3 = \theta - \theta_c$, $x_4 = \dot{\theta} - \dot{\theta}_c$, $x_5 = \psi - \psi_c$, $x_6 = \dot{\psi} - \dot{\psi}_c$

理論上這個控制方法可以將系統狀態在最短時間內驅動至原點，而且切換的次數為系統維度減一，以二階系統為例，最多只需切換一次。但是實際系統都受雜訊影響且狀態量測亦都有誤差，這些都會造成系統狀態的擾動。在我們考慮的姿態控制系統，還有兩個重要的原因造成控制的連續切換。第一個原因是追蹤的命令隨時間改變，使得系統狀態不可能一直停留在原點；第二個原因是三軸之間的耦合會造成的各軸之間互相干擾。

5.2 切換曲線的調整

然而在追蹤控制，控制訊號的連續切換是必要的。考慮到如果切換的頻率太高，或是說切換的時間太短，以推力器硬體合成控制上有實際的困難。當推力器為一階動態的時間延遲時，太頻繁的開關命令會造成推力器未全開即進行關閉，關閉未完成又進行開啟的狀況。因此從實際合成的觀點，有需要對理想的最佳控制做調整使得切換頻率在一個要求的範圍之內。相對的切換頻率的降低意味著有應切換而未切換的狀況發生，因此伴隨著追蹤誤差的增大。所以切換條件的調整是要在切換頻率及追蹤誤差之間做定量的取捨。這種定量的取捨通常需要透過實際模擬才有辦法明確的驗證。

首先我們調整理想時間最佳控制的切換曲線及控制輸入，調整方式如下

$$s = x_1 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_2 |x_2| \quad (5.12)$$

$$u_{\phi} = -\text{sgn}\left(x_1 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_2 |x_2|\right) \quad (5.13)$$

在切換曲線中的第二項加入變數 k ，因為 x_2 和角速度有關，而角速度的變化比角度變化來的劇烈且頻繁，因此藉由設定 $0 < k < 1$ 的方式來降低角速度對切換曲線或控制輸入的影響，進而降低噴嘴的開關頻率。又 x_2 是由力矩積分而來的，當產生的力矩太大時，對於小角度變化的情況必須要用更高頻的開關來控制，因此在產生力矩較大的方向上可以設定較小的 k 值來降低其開關頻率。

這邊用一個模擬來觀察改變 $k=0.5、0.1、0.075、0.05、0.025、0.01$ 後對噴嘴開關頻率、角度誤差及燃料消耗的影響。假設姿態角的初始條件為 $\phi_0 = 0$ ， $\theta_0 = -16^\circ$ ， $\psi_0 = 19^\circ$ ，角速度初始值皆為零，姿態角命令如圖 5.2 所示，模擬結果如表 5.1 所示。其中 f_{AB} 為滾轉—偏航軸的噴嘴開關頻率， f_{AA} 為俯仰軸的噴嘴開關頻率。

由表 5.1 中的模擬結果可知，俯仰軸能產生的力矩相較另外兩個方向來的大，所以可藉由設定較小的 k 值來達成降低開關頻率。然而藉由改變 k 值的方式雖降低了開關頻率，可是角度誤差也會跟著增加，所以須在角度誤差和開關頻率間作取捨。也可設定三個方向有不同的 k 值，例如分別改變三個方向的 $k_\phi=0.05$ 、 $k_\theta=0.025$ 、 $k_\psi=0.035$ ，得到誤差大小分別為 0.0193° 、 0.0489° 、 0.0458° 及噴嘴的開關頻率 $f_{AB} \approx f_{AA} \approx 20(\text{Hz})$ 。

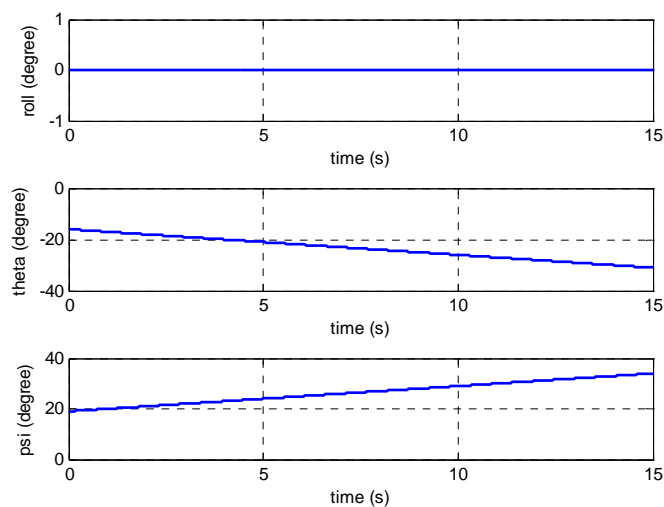


圖 5.2 三個姿態角命令

表 5.1 不同 k 值的模擬結果

k 值	角度誤差(degree)	開關頻率(Hz)	燃料消耗(kg)
k=0.5	0.0009	$f_{AB} \approx \text{大}$ $f_{AA} \approx \text{大}$	0.0895
	0.0042		
	0.0043		
k=0.1	0.007	$f_{AB} \approx 40$ $f_{AA} \approx 50$	0.0895
	0.0046		
	0.0059		
k=0.075	0.0098	$f_{AB} \approx 36$ $f_{AA} \approx 48$	0.0895
	0.0078		
	0.0113		
k=0.05	0.0193	$f_{AB} \approx 24$ $f_{AA} \approx 35$	0.0895
	0.0152		
	0.0232		
k=0.025	0.0613	$f_{AB} \approx 12$ $f_{AA} \approx 19$	0.0895
	0.0489		
	0.0847		
k=0.01	0.2927	$f_{AB} \approx 4$ $f_{AA} \approx 8$	0.0895
	0.2478		
	0.3795		

5.3 輸出切換控制律的調整

由於控制輸入是一個 sign 的控制律，如(5.9)所示，會造成正反兩個方向的噴嘴一直呈現互相開關的現象，所以燃料消耗會比較多，因此考慮一個死區控制律，將切換條件修改為(5.14)，其切換函數的方塊圖如圖 5.3 所示。由於死區控制律的控制訊號輸出有可能為零，讓正反方向的噴嘴有完全關閉的情況以節省燃料。另外對於產生力矩較大的俯仰軸方向因為噴嘴關閉，力矩作用的時間減少，所以開關頻率可以降低。

$$u(t) = \begin{cases} -1, & s > \delta \\ 0, & |s| < \delta \\ +1, & s < -\delta \end{cases} \quad (5.14)$$

其中 $\delta > 0$ 為一可選擇的參數。

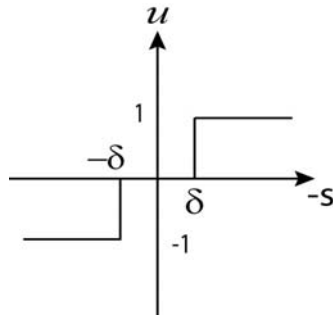


圖 5.3 死區控制律示意圖

沿用 5.2 節最後設定三軸的 k 值， $k_\phi=0.05$ 、 $k_\theta=0.025$ 、 $k_\psi=0.035$ ，選擇不同死區的寬度，觀察噴嘴開關頻率、角度誤差及燃料消耗，模擬結果如表 5.2 所示。

表 5.2 不同死區寬度的模擬結果

死區寬度	角度誤差(degree)	開關頻率(Hz)	燃料消耗(kg)
0.005	0.2872	$f_{AB} \approx 20$ $f_{AA} \approx 6$	0.0443
	0.2134		
	0.2962		
0.002	0.1167	$f_{AB} \approx 20$ $f_{AA} \approx 10$	0.0582
	0.1139		
	0.1280		
0.001	0.0603	$f_{AB} \approx 20$ $f_{AA} \approx 14$	0.0690
	0.0788		
	0.0765		
0.0005	0.0348	$f_{AB} \approx 20$ $f_{AA} \approx 17$	0.0776
	0.0606		
	0.0551		
0.0002	0.0229	$f_{AB} \approx 20$ $f_{AA} \approx 19$	0.0846
	0.0517		
	0.0484		
0.0001	0.0196	$f_{AB} \approx 20$ $f_{AA} \approx 19$	0.0871
	0.0491		
	0.0463		

由表 5.2 中的模擬結果可知，死區的寬度越大可以節省越多燃料，對於力矩較大的俯仰軸方向也可以降低噴嘴的開關頻率，另外 AB1~AB4 四個噴嘴因為受到滾轉軸和偏航軸互相影響的關係，所以開關頻率並沒有降低的情形。

考慮另一種有延遲切換的繼電器控制律，將切換條件修改為(5.15)，其切換函數的方塊圖如圖 5.4 所示。利用改變延遲切換的寬度大小來改變噴嘴的開啟時間，因此可以強制改變開關頻率。沿用 $k_\phi=0.05$ 、 $k_\theta=0.025$ 、 $k_\psi=0.035$ ，選擇不同延遲切換寬度，模擬結果如表 5.3 所示。

$$u(t) = \begin{cases} -1, & s > \varepsilon \\ +1, & s < -\varepsilon \\ \text{不變}, & |s| < \varepsilon \end{cases} \quad (5.15)$$

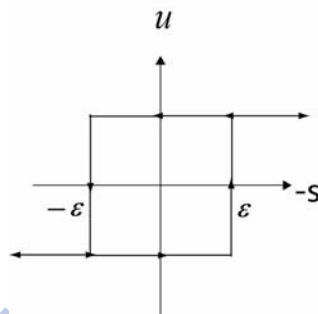


圖 5.4 延遲切換控制律

表 5.3 不同延遲切換寬度的模擬結果

延遲寬度	角度誤差(degree)	開關頻率(Hz)	燃料消耗(kg)
0.001	0.1492	$f_{AB} \approx 8$ $f_{AA} \approx 9$	0.0895
	0.2500		
	0.3045		
0.0005	0.0907	$f_{AB} \approx 9$ $f_{AA} \approx 10$	0.0895
	0.1665		
	0.1924		
0.00025	0.0621	$f_{AB} \approx 11$ $f_{AA} \approx 12$	0.0895
	0.1196		
	0.1328		
0.0001	0.0418	$f_{AB} \approx 13$ $f_{AA} \approx 15$	0.0895
	0.0896		
	0.0911		
0.00005	0.0359	$f_{AB} \approx 15$ $f_{AA} \approx 16$	0.0895
	0.0770		
	0.0752		
0.000025	0.0304	$f_{AB} \approx 15$ $f_{AA} \approx 16$	0.0895
	0.0712		
	0.0677		

由表 5.3 中的模擬結果可知，延遲切換控制律可以強制改變所有噴嘴的開關頻率。可是和 sign 控制律相同，會造成正反方向的噴嘴一直互相開關，所以燃料消耗會比較多。對於力矩較大的俯仰軸方向因為受到噴嘴延遲關閉的影響，力矩作用的時間比較長，因此相對於死區控制律而言，產生了比較大的角度誤差。

5.4 設計方法及模擬結果

對於以上調整切換曲線及兩種改變控制律的方式，經過模擬結果的驗證後，可以歸納出一個大略的設計方向如下：

1. 設計最短時間最佳控制法，得到切換函數及控制輸入
2. 為了降低高頻開關在切換函數中加入一變數 $k(0 < k < 1)$
3. 使用死區控制律來降低燃料消耗及力矩較大方向的開關頻率(選擇死區寬度)
4. 對於無法降低開關頻率的方向使用延遲切換繼電器的控制律(選擇延遲寬度)
5. 為了對付不同情況，可以結合上述 3 和 4 的方法在不同方向做控制

配合以上的所有數值模擬結果及歸納出的設計的方式，重新設計一個最佳化的姿態控制法，首先選擇 $k_\phi=0.05$ 、 $k_\theta=0.025$ 、 $k_\psi=0.035$ ，得到誤差為 0.0193° 、 0.0489° 、 0.0458° 、燃料消耗 0.0895(kg)及開關頻率 $f_{AB} \approx f_{AA} \approx 20(\text{Hz})$ 。為了降低燃料消耗及開關頻率，採用死區控制律，選擇死區寬度為 0.001，得到誤差大小為 0.0603° 、 0.0788° 、 0.0765° 、燃料消耗 0.0690(kg)及開關頻率 $f_{AB} \approx 20(\text{Hz})$ 、 $f_{AA} \approx 14(\text{Hz})$ 。由於控制滾轉—偏航軸的噴嘴開關頻率還是太高，所以俯仰軸維持死區控制律，在滾轉和偏航方向改由延遲切換控制律來降低其開關頻率，選擇延遲切換寬度為 0.00005，得到誤差大小為 0.0359° 、 0.0788° 、 0.0750° 、燃料消耗 0.0690(kg)及開關頻率 $f_{AB} \approx 15(\text{Hz})$ 、 $f_{AA} \approx 15(\text{Hz})$ 。模擬結果如圖 5.5 所示。當採用不同的姿態角命令時的模擬結果如圖 5.6 和圖 5.7 所示。

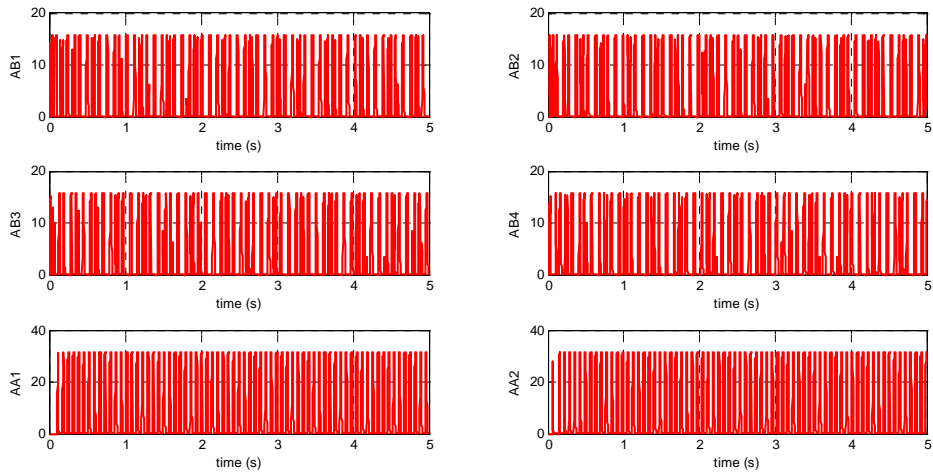
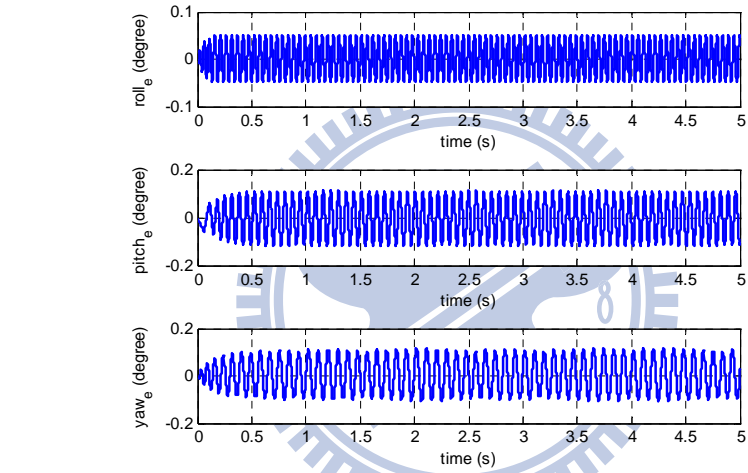
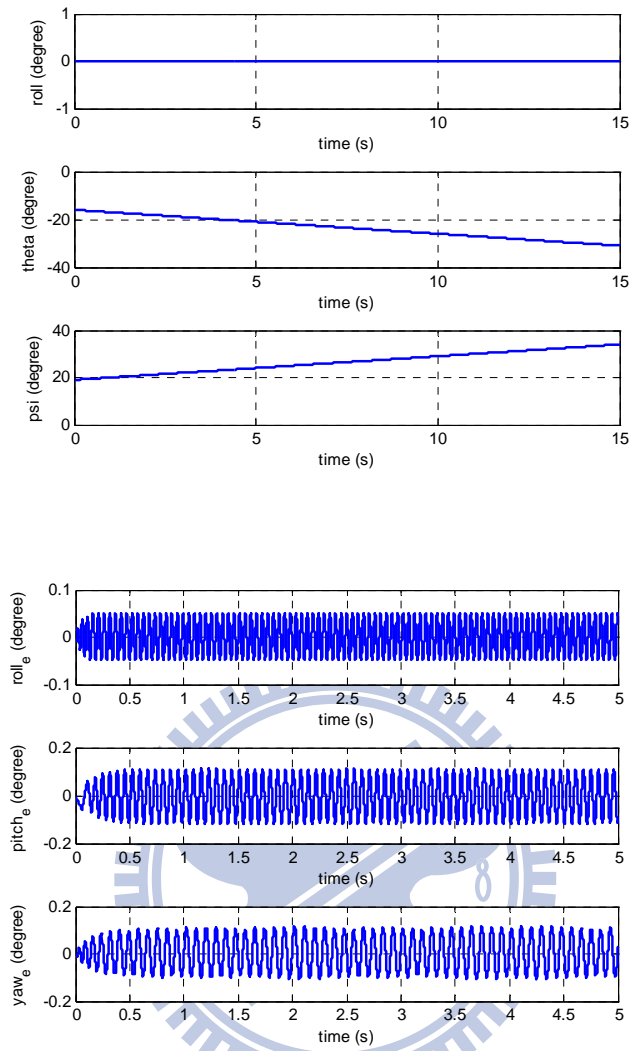


圖 5.5 姿態角命令為斜坡時，得到誤差大小為 0.0359° 、 0.0788° 、 0.0750° ，燃料消耗 $0.0690(\text{kg})$ 及開關頻率 $f_{AB} \approx 15(\text{Hz})$ 、 $f_{AA} \approx 15(\text{Hz})$ 。

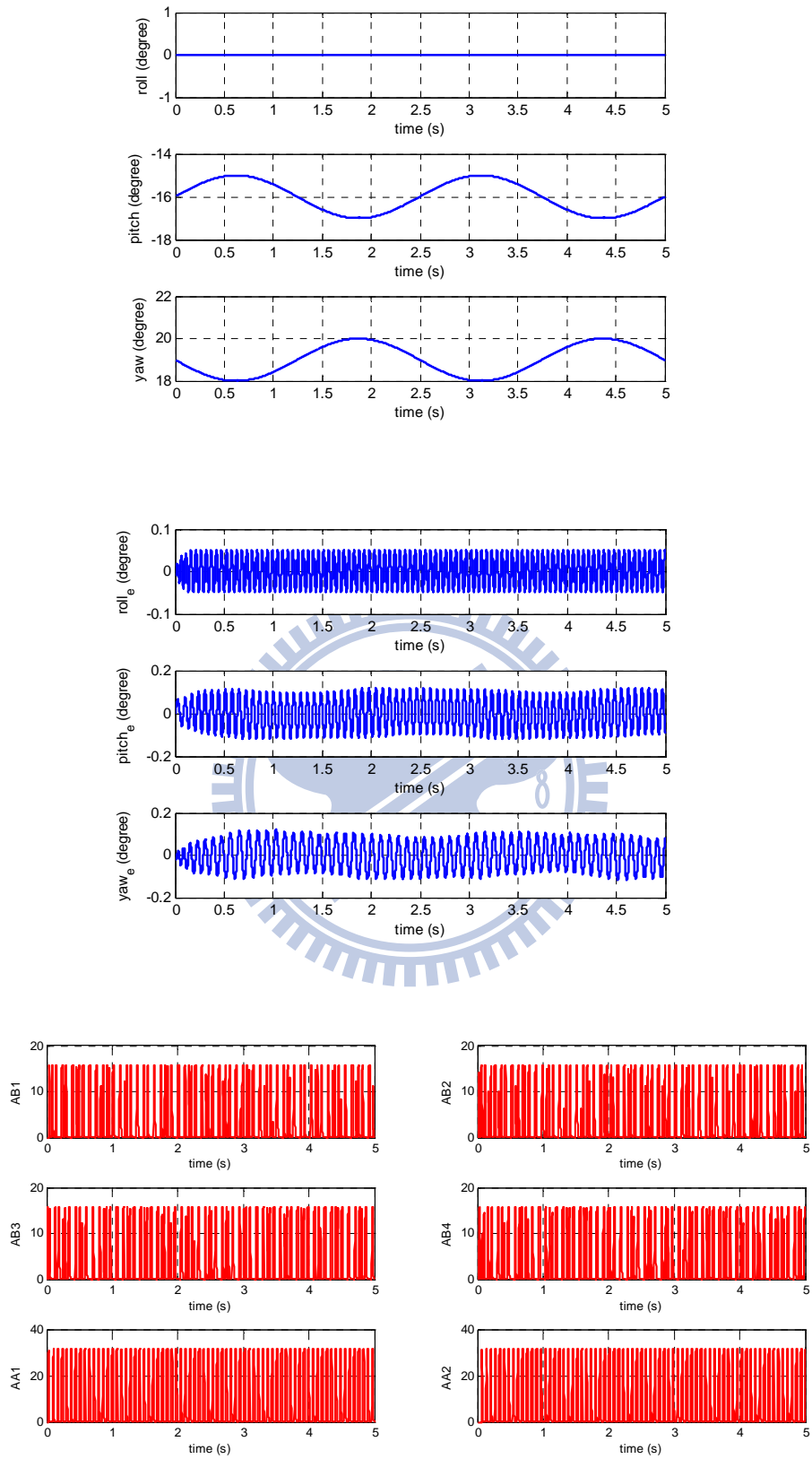


圖 5.6 姿態角命令為弦波時，得到誤差大小為 0.0359° 、 0.0765° 、 0.0726° ，燃料消耗 $0.0685(\text{kg})$ 及開關頻率 $f_{AB} \approx 15(\text{Hz})$ 、 $f_{AA} \approx 15(\text{Hz})$ 。

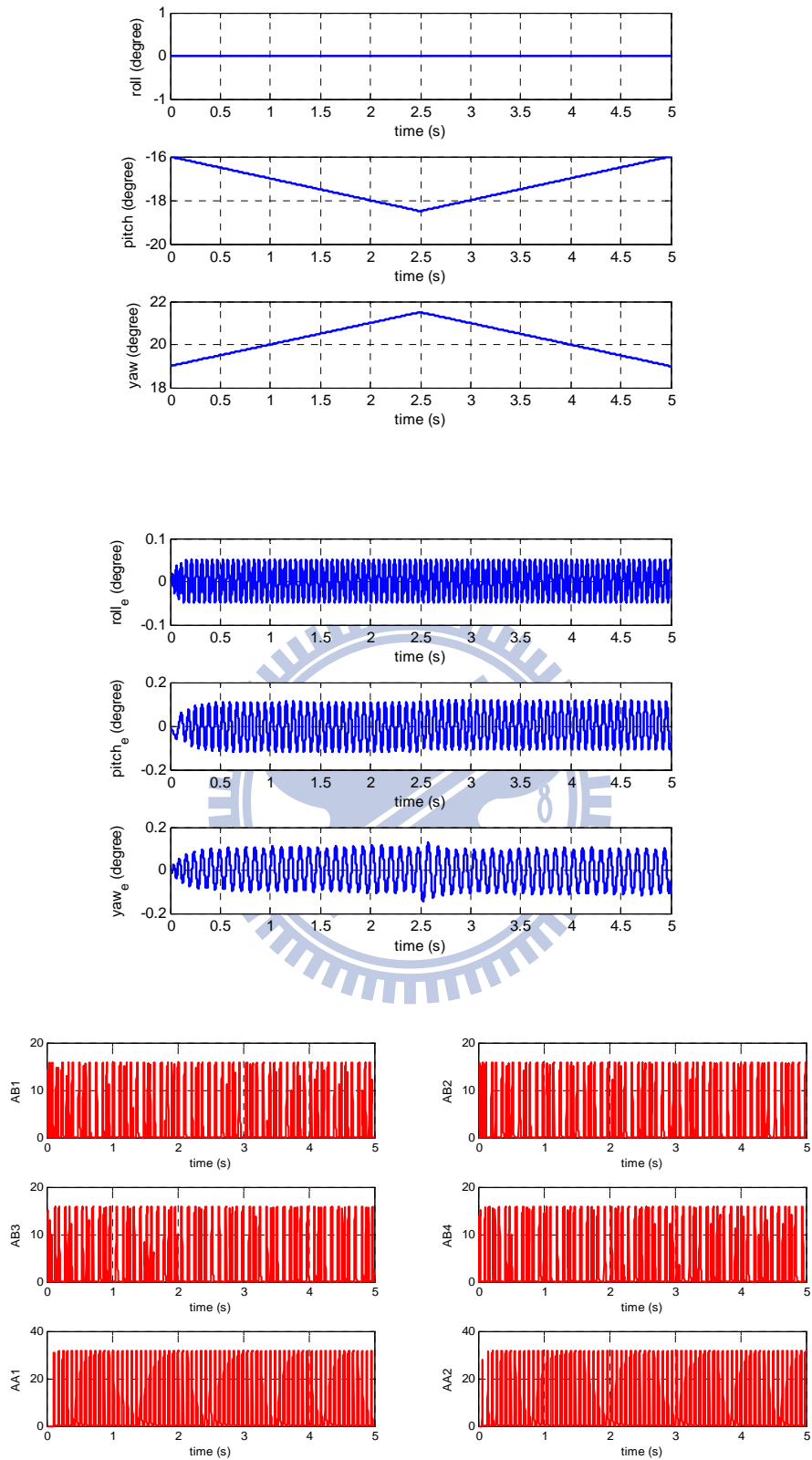


圖 5.7 姿態角命令為三角波時，得到誤差大小為 0.0359° 、 0.0785° 、 0.0755° ，燃料消耗 $0.0690(\text{kg})$ 及開關頻率 $f_{AB} \approx 15(\text{Hz})$ 、 $f_{AA} \approx 15(\text{Hz})$ 。

第六章 轉向導引控制

攔截器除了使用姿態控制器及姿態推力器來調整其姿態，使的紅外線尋標器能持續的對準目標外，還必須使用器側邊的轉向推力器讓本身轉向，因此需要方法能提供側向導引加速度命令，所以真比例導引率是一個合適的選擇，因為其所產生的導引加速度垂直於相對位置方向，也就是視線方向。此外轉向推力器和姿態推力器一樣都是開關式的，也是透過脈衝寬度調變(PWM)的合成來實現。

6.1 真比例導引律

假設攔截飛彈在 S_N 座標的位置為 \mathbf{r}_m ，速度為 \mathbf{v}_m ，目標在 S_N 座標的位置為 \mathbf{r}_t ，速度為 \mathbf{v}_t ，則相對位置 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_t - \mathbf{r}_m = [x \ y \ z]^T$ ，相對速度 $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_t - \mathbf{v}_m$ ，再將 \mathbf{r} 和 \mathbf{v} 轉換成球座標，如圖 6.1 所示，

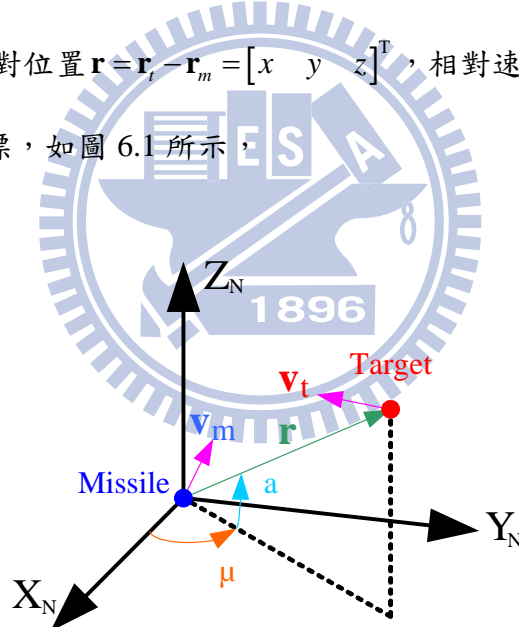


圖 6.1 相對位置與球座標之間的關係

則相對位置可表示為

$$\mathbf{r} = |\mathbf{r}| \mathbf{e}_r \quad (6.1)$$

其中

$$e_r = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \mu \\ \cos \alpha \sin \mu \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

$$\mu = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \quad (6.3)$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \quad (6.4)$$

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (6.5)$$

而相對速度

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} |\mathbf{r}| e_r + |\mathbf{r}| \dot{e}_r = \frac{d}{dt} |\mathbf{r}| e_r + |\mathbf{r}| (\dot{\mu} \cos \alpha e_\mu + \dot{\alpha} e_\alpha) \quad (6.6)$$

其中

$$e_\mu = \begin{bmatrix} -\sin \mu \\ \cos \mu \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

$$e_\alpha = \begin{bmatrix} -\sin \alpha \cos \mu \\ -\sin \alpha \sin \mu \\ \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

且

$$e_r \times e_\mu = e_\alpha \quad (6.9)$$

而從(6.5)式、(6.3)式及(6.4)式分別可以得到下列微分的表示式：

$$\frac{d}{dt} |\mathbf{r}| = \frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (6.10)$$

$$\dot{\mu} = \frac{d}{dt} \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{y\dot{x} - x\dot{y}}{x^2 + y^2} \quad (6.11)$$

$$\dot{\alpha} = \frac{d}{dt} \tan^{-1} \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{\dot{z}(x^2 + y^2) - z(x\dot{x} + y\dot{y})}{\sqrt{x^2 + y^2}(x^2 + y^2 + z^2)} \quad (6.12)$$

三維 TPN 導引律的導引加速度方程式為

$$a_{ipn} = N(\mathbf{V}_c \times \Omega) \quad (6.13)$$

其中 a_{ipn} 為三維 TPN 導引加速度， Ω 為角速度， N 為導引常數，通常為 3~5， \mathbf{V}_c 為攔截飛彈接近目標的速度也就是相對速度在視線上面的投影，即

$$\mathbf{V}_c = (\mathbf{v}^T \mathbf{e}_r) \mathbf{e}_r \quad (6.14)$$

而角速度則定義為

$$\Omega = \frac{\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}|^2}$$

由(6.1)式及(6.6)式，可以得到

$$\Omega = \frac{\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}|^2} = \mathbf{e}_r \times \dot{\mathbf{e}}_r \quad (6.15)$$

從(6.2)式可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_r &= \dot{\mu} \begin{bmatrix} \cos \alpha (-\sin \mu) \\ \cos \alpha \cos \mu \\ 0 \end{bmatrix} + \dot{\alpha} \begin{bmatrix} -\sin \alpha \cos \mu \\ -\sin \alpha \sin \mu \\ \cos \alpha \end{bmatrix} \\ &= \dot{\mu} \cos \alpha \begin{bmatrix} -\sin \mu \\ \cos \mu \\ 0 \end{bmatrix} + \dot{\alpha} \begin{bmatrix} -\sin \alpha \cos \mu \\ -\sin \alpha \sin \mu \\ \cos \alpha \end{bmatrix} \\ &= \dot{\mu} \cos \alpha \mathbf{e}_\mu + \dot{\alpha} \mathbf{e}_\alpha \end{aligned} \quad (6.16)$$

將(6.16)式代入(6.15)式並利用 $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\mu = \mathbf{e}_\alpha$ 及 $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\alpha = -\mathbf{e}_\mu$ ，可得

$$\Omega = \dot{\mu} \cos \alpha \mathbf{e}_\alpha - \dot{\alpha} \mathbf{e}_\mu \quad (6.17)$$

所以從(6.13)式、(6.14)式及(6.17)式可得導引加速度為

$$a_{ipn} = -N(\mathbf{v}^T \mathbf{e}_r)(\dot{\mu} \cos \alpha \mathbf{e}_\mu + \dot{\alpha} \mathbf{e}_\alpha) \quad (6.18)$$

我們將(6.13)式分解成相對位置與相對速度可以表示的形式，如(6.18)式，透

過(6.1)-(6.12)式計算出各分量，再代入(6.18)式，就可以得到真比例導引的導引加速度。

6.2 脈衝寬度調變(PWM)的合成

由(6.18)式得到的真比例導引加速度是在慣性座標下，所以我們必須要把它轉換到體座標下才能使用，並且作為 PWM 的輸入訊號。

$$a_{pm,B} = T_{BN} \cdot a_{pm} \quad (6.19)$$

其中 T_{BN} 為慣性座標與體座標的轉換矩陣， a_{pm} 為三維真比例導引律的導引加速度。則我們得到轉向推力器 PWM 的輸入訊號為 $a_{pm,B}$ 在 Y_B 和 Z_B 的分量。

在表 3.2 中，我們模擬時假設轉向推力器的推力最大值為 315 牛頓，以攔截器的初始的總質量為 21.33 公斤來計算，則每個轉向推力器所能產生的最大加速度值大約為 14.7679 m/s^2 ，又攔截器在飛行的過程中，質量會因推力器燃燒的關係不斷的減少，所以我們設計轉向推力器 PWM 的參考訊號為 15 m/s^2 ，及選擇 PWM 的頻率為 3(Hz)。

6.3 實際攔截情況

在這一節我們將結合攔截器的姿態控制器及轉向導引控制，觀察攔截器在實際執行攔截情況時兩者的運作狀況、角度誤差及燃料的消耗。姿態控制方面是用線性控制器配合 PWM 合成及最短時間最佳控制器兩種方式。攔截器與目標的初始設定如下：

- (i) 目標初始位置在 S_N 座標為(198.888, -10.189, -122.605) km。
- (ii) 攔截飛彈初始位置在 S_N 座標為(159.257, 6.297, -120.184) km。
- (iii) 目標初始速度在 S_N 座標為(-1520, 1115, -123) m/s。
- (iv) 攔截飛彈初始速度在 S_N 座標為(1690, -136, -402) m/s。

(v) 攔截飛彈初始姿態尤拉角為 $(\phi_0, \theta_0, \psi_0) = (0, -0.0563, -0.3942)$ rad，同初始視線方向，也就是一開始攔截飛彈是對準目標的。

(vi) 初始角速度 $(p_0, q_0, r_0) = (0, 0, 0)$ rad/s。

兩種姿態控制器的模擬結果最小誤失皆距離小於 0.5 公尺，也就是有攔截到目標。角度誤差和燃料消耗情況如表 6.1 所示，其中角度誤差部分是取其方均根值。

圖 6.2 為實際攔截的軌跡圖，圖 6.3 是姿態控制為線性控制器的模擬圖，圖 6.4 是姿態控制為最短時間最佳控制器的模擬圖。

表 6.1 實際攔截情況的模擬結果

	角度誤差 (degree)	燃料消耗 (kg)
線性控制器	0.0076	1.8808
	0.0239	
	0.0177	
最短時間最佳 控制器	0.0388	2.0367
	0.0858	
	0.0900	

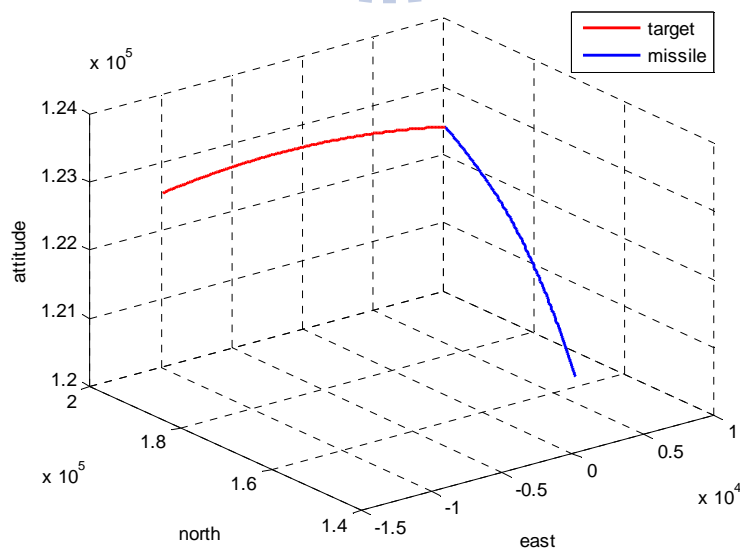
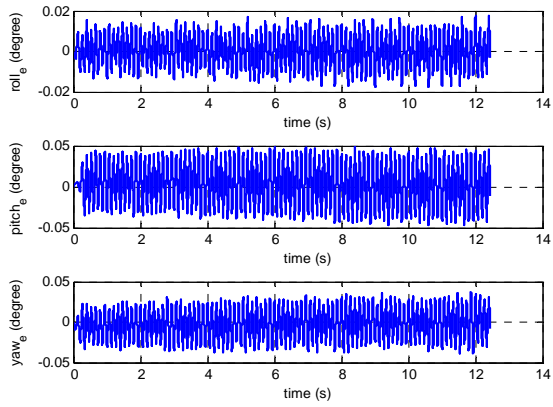
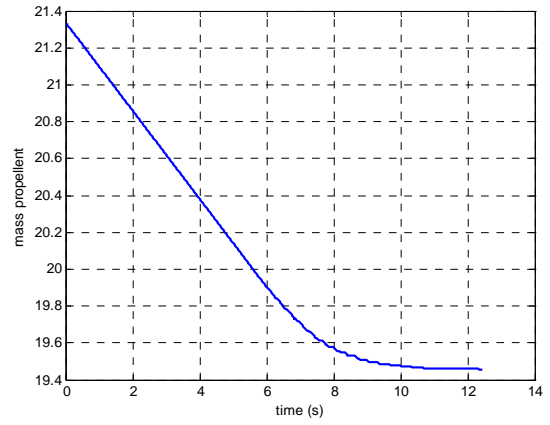


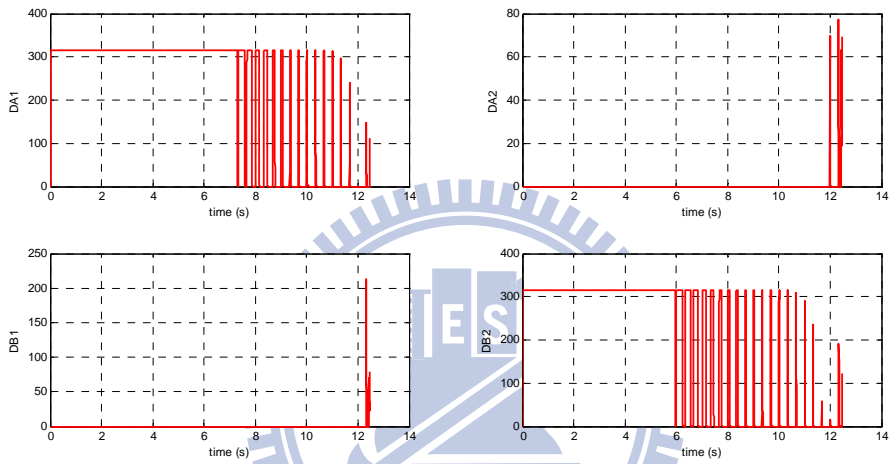
圖 6.2 實際攔截軌跡



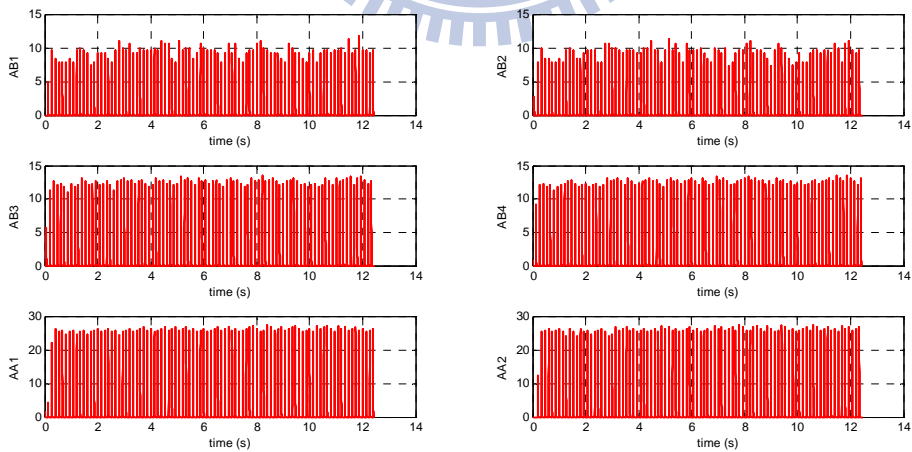
(a)



(b)

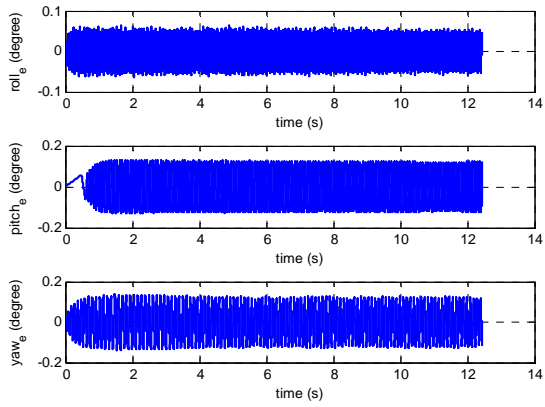


(c)

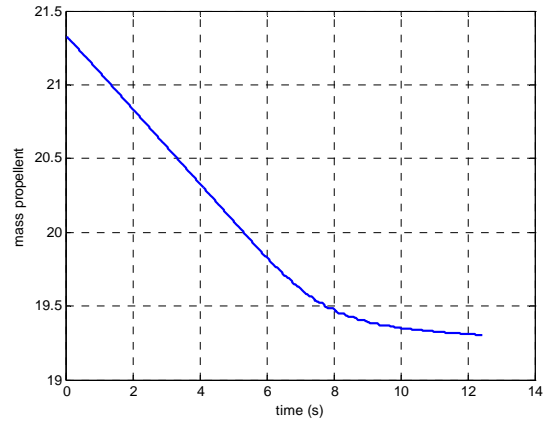


(d)

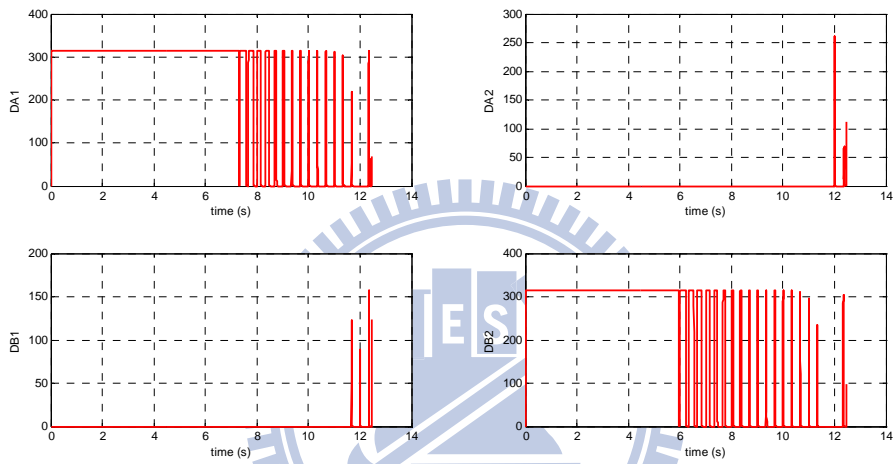
圖 6.3 姿態控制為線性控制器的模擬結果，(a)為角度誤差，(b)為燃料消耗狀況，
(c)為轉向推力器的開關情況，(d)為姿態推力器的開關情況



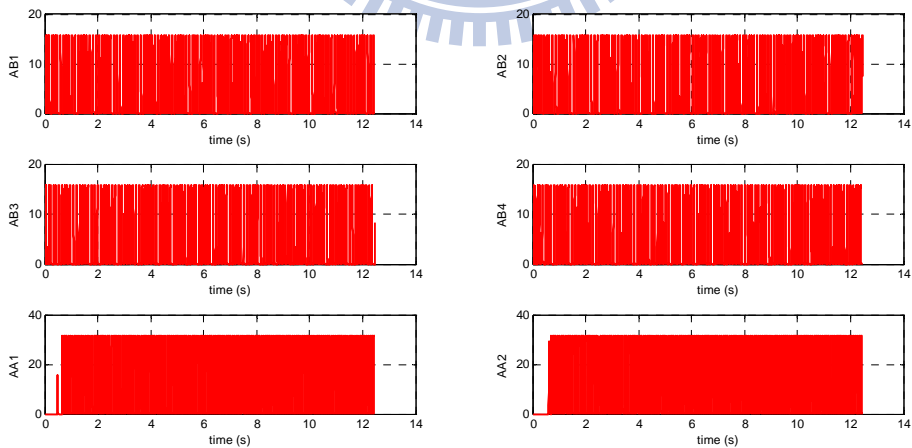
(a)



(b)



(c)



(d)

圖 6.4 姿態控制為最短時間最佳控制器的模擬結果，(a)為角度誤差，(b)為燃料消耗狀況，(c)為轉向推力器的開關情況，(d)為姿態推力器的開關情況

第七章 質心偏移

在理想的狀況下，攔截器的質心位置會和幾何中心重合，然而實際上受到燃料消耗或其他因素的影響，質心位置並不會在攔截器的幾何中心，因此產生質心偏移的現象。由於攔截器體座標的原點定義在質心位置上，當發生質心偏移時，會改變轉向推力器和姿態推力器的力臂，會有干擾的力矩產生，對攔截器姿態的控制有所影響。

7.1 質心偏移量的探討

我們假設在三個方向上的質心偏移量為(dx,dy,dz)，根據圖 3.6 所示，可以得到轉向推力器產生的干擾力矩如(7.1)式，由於姿態推力器的推力相對於轉向推力器來的小很多，所以姿態推力器產生的干擾力矩在這邊忽略。

$$\begin{aligned}M_{xd} &= dy \times (f_{DA1} - f_{DA2}) + dz \times (f_{DB2} - f_{DB1}) \\M_{yd} &= dx \times (f_{DA2} - f_{DA1}) \\M_{zd} &= dx \times (f_{DB1} - f_{DB2})\end{aligned}\tag{7.1}$$

直觀的來說，受到質心偏移產生的干擾力矩必須小於攔截器在姿態的控制上能產生的最大力矩，即 $|M_{xd}| < M_{x,max}$ 、 $|M_{yd}| < M_{y,max}$ 、 $|M_{zd}| < M_{z,max}$ ，如此姿態才能受到良好的控制，保持攔截器能一直對準目標。又因為 $M_{y,max} = M_{z,max} > M_{x,max}$ ，且根據(7.1)式所述，所以我們可以粗略的估計質心偏移三個分量個關係為 dx 的範圍會大於 dy 和 dz 的範圍。

攔截器所能產生的最大力矩在滾轉軸為 $M_{x,max} = 2.84$ (Nm)，俯仰軸為 $M_{y,max} = 7.25$ (Nm)及偏航軸 $M_{z,max} = 7.25$ (Nm)，然而在 3.3.2 節中提到噴嘴 AB1~AB4 同時要控制滾轉和偏航，所以需要設定一個噴嘴開關的邏輯，透過這個開關的邏輯，噴嘴 AB1~AB4 在同一時間下幾乎只有其中一個噴嘴是開啟的，也就是說在滾轉及偏航軸姿態推力器所能產生的力矩幾乎只有原來的一半，如此一來

抵抗干擾力矩的能力會變得比較弱，而俯仰軸的噴嘴 AA1、AA2 是獨立運作，所以能產生的最大力矩不變。從(7.1)式來看，質心偏移量中的 dx 分量在俯仰軸及偏航軸都會產生干擾力矩，由於攔截器在偏航軸的抗干擾能力比俯仰軸還弱，所以 dx 對偏航軸的影響較大。

接著我們透過模擬的方式來探討質心偏移三個分量(dx,dy,dz)的最大範圍，例如探討 dx 的最大範圍時，令 dy=dz=0。採用試誤法，並且以滾轉軸、俯仰軸及偏航軸的角度誤差不超過 0.5° 為原則來決定質心偏移三個分量的範圍。假設姿態角命令如圖 4.5 所示，及轉向推力器開啟的情形如圖 7.1 所示，其中四個轉向推力器的最大推力為 315 牛頓。姿態控制器方面分別使用第四章提到的線性控制配合 PWM 的合成及第五章提到的時間最佳化兩種方式。

表 7.1 是姿態控制為線性控制的模擬結果，圖 7.2~圖 7.4 是姿態命令為斜坡函數，質心偏移在(dx,dy,dz)三個不同分量上的模擬結果。從表 7.1 及(7.1)式可知，dx 在俯仰及偏航軸上會產生干擾力矩，dy 和 dz 則是在滾轉軸上產生干擾力矩，又因為俯仰和偏航軸所能提供控制姿態的力矩較滾轉軸大，所以能容許的質心偏移量 dx 會比 dy 和 dz 大。

比較圖 7.2~圖 7.4 和圖 4.6 的角度誤差部份，當存在質心偏移(dx,dy,dz)時，轉向推力器開啟的情形會對攔截器的姿態有很大的影響如同(7.1)式所述，明顯的反映在角度誤差上。由圖 7.2 中發現 dx 對俯仰和滾轉軸的姿態都有很大的影響，原因是在設計線性控制器時假設俯仰角 $\theta \approx 0$ ，所以當 θ 受到干擾變大時，控制器對俯仰角的控制會比較差。此外受到干擾產生劇烈的角度變化時，姿態推力器會企圖提高其 PWM 的 duty cycle 時間和完全開啟噴嘴來抑制干擾的影響，避免角度誤差變大。

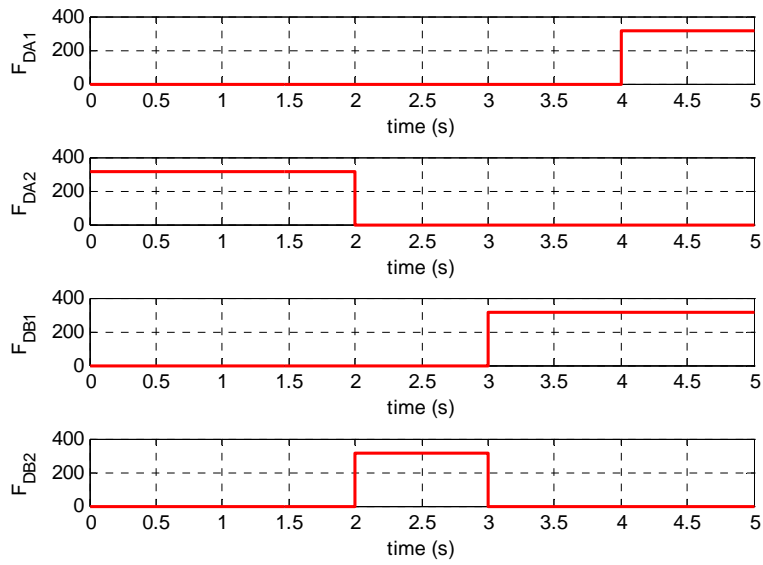


圖 7.1 假設轉向推力器開啟的情形

表 7.1 姿態控制為線性控制時質心偏移的模擬結果

質心偏移 姿態命令	dx 最大範圍	dy 最大範圍	dz 最大範圍
	(mm)	(mm)	(mm)
斜坡函數	-6.5~+6.6	0	0
	0	-1.2~+1.3	0
	0	0	-1.6~+1.6
弦波函數	-6.1~+6.1	0	0
	0	-1.2~+1.1	0
	0	0	-1.5~+1.2
三角波函數	-6.3~+6.8	0	0
	0	-1.2~+1.3	0
	0	0	-1.6~+1.6

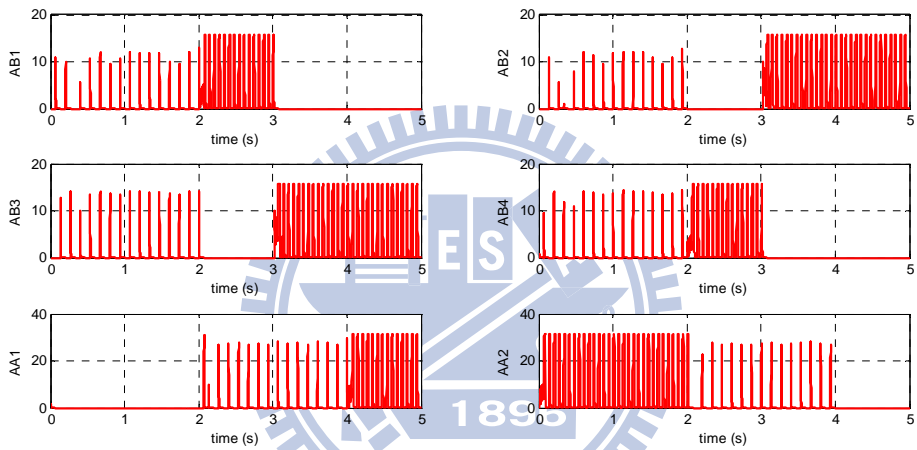
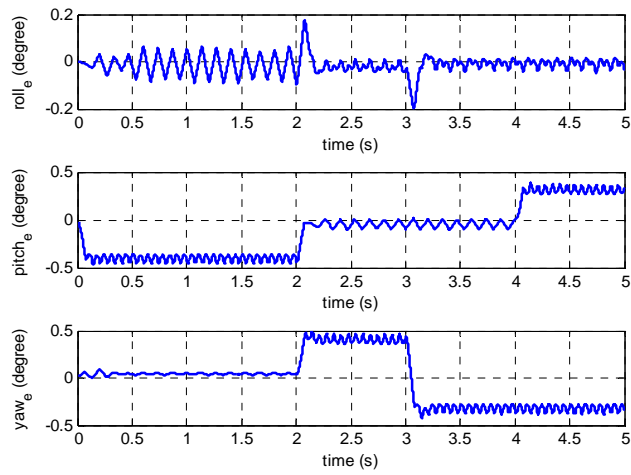
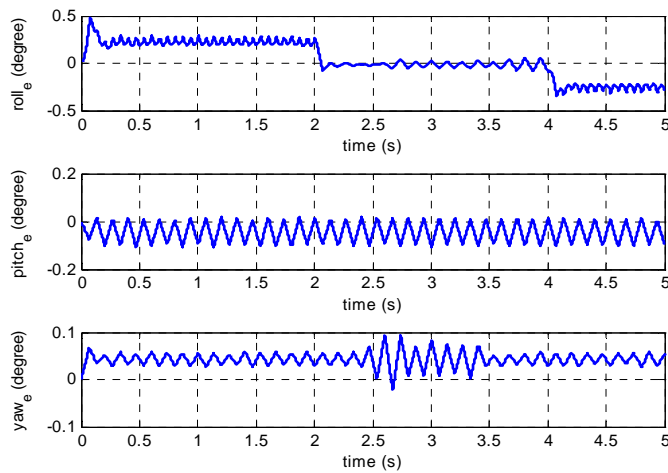


圖 7.2 姿態角命令為斜坡， $(dx,dy,dz)=(6.6,0,0)$ mm 的角度誤差及噴嘴開啟情況



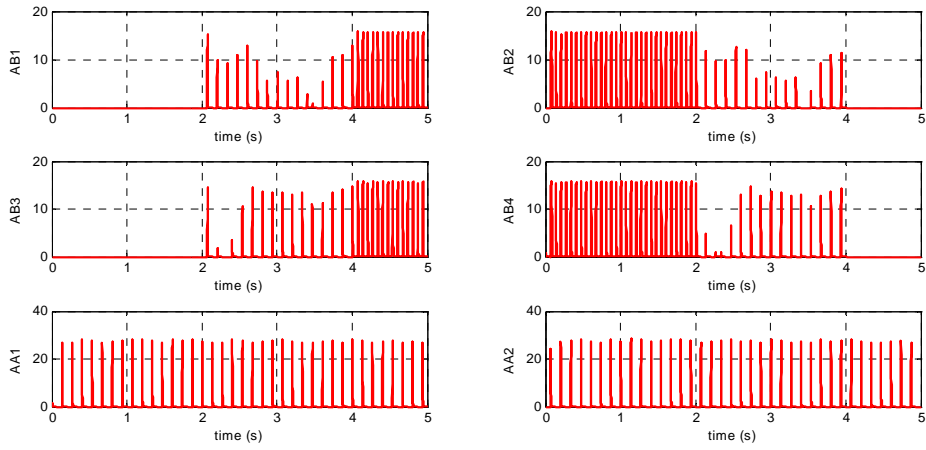


圖 7.3 姿態角命令為斜坡， $(dx,dy,dz)=(0,1.2,0)$ mm 的角度誤差及噴嘴開啟情況

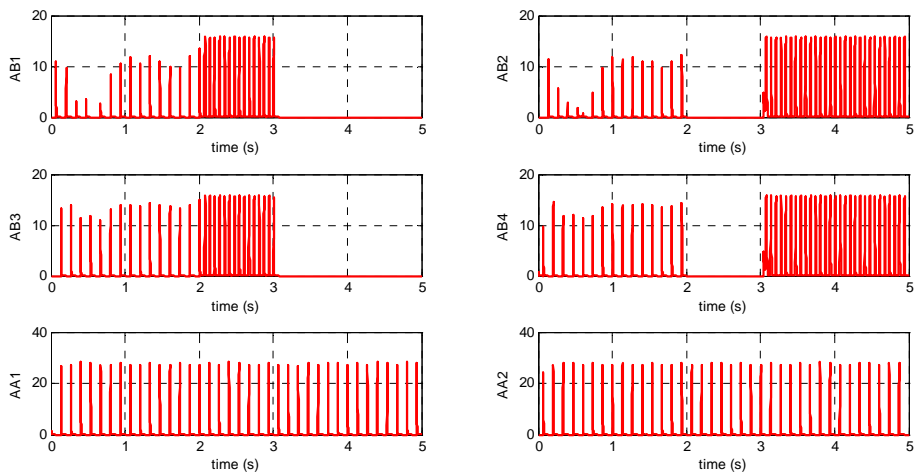
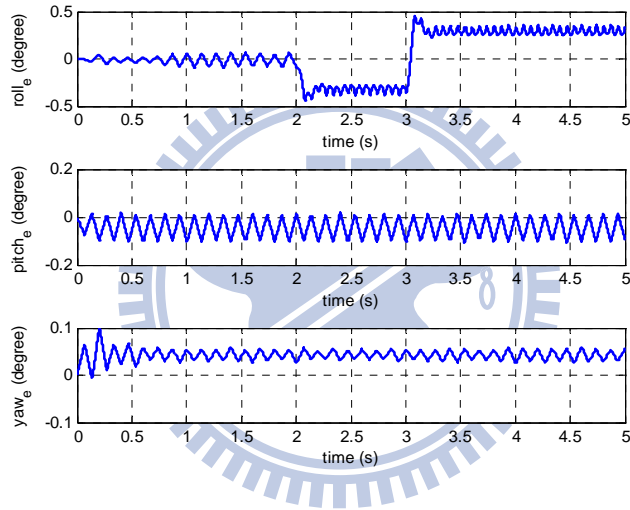
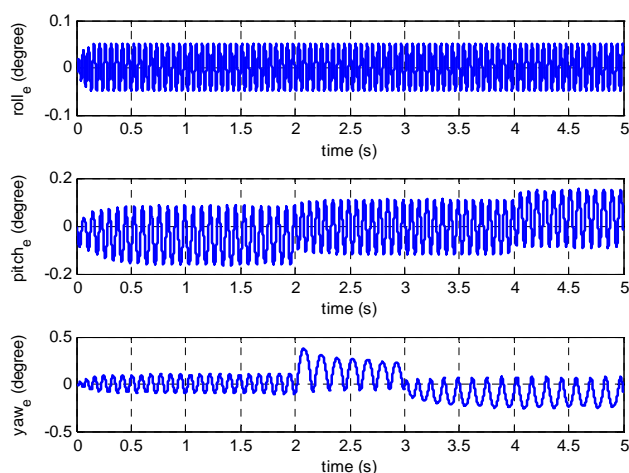


圖 7.4 姿態角命令為斜坡， $(dx,dy,dz)=(0,0,1.6)$ mm 的角度誤差及噴嘴開啟情況

表 7.2 是姿態控制為最短時間最佳控制的模擬結果，圖 7.5~圖 7.7 是姿態命令為斜坡函數，質心偏移在(dx,dy,dz)三個不同分量上的模擬結果。也因為俯仰和偏航軸所能提供控制姿態的力矩較滾轉軸大，所以能容忍的質心偏移量 dx 會比 dy 和 dz 大。由於攔截器在偏航軸的抗干擾能力比俯仰軸還弱，從圖 7.5 中可以發現質心偏移量中的 dx 對偏航軸的影響較大。而推力器開關頻率部分也因為角度劇烈變化，最高有 16(Hz)。

表 7.2 姿態控制器為最短時間最佳控制時質心偏移的模擬結果

質心偏移 姿態命令	dx 最大範圍 (mm)	dy 最大範圍 (mm)	dz 最大範圍 (mm)
斜坡函數	-6.1~+6.2	0	0
	0	-3.8~+3.8	0
	0	0	-3.1~+3.1
弦波函數	-6.1~+5.8	0	0
	0	-3.9~+3.9	0
	0	0	-3.2~+3.2
三角波函數	-6.2~+5.6	0	0
	0	-3.8~+3.7	0
	0	0	-3.1~+3.2



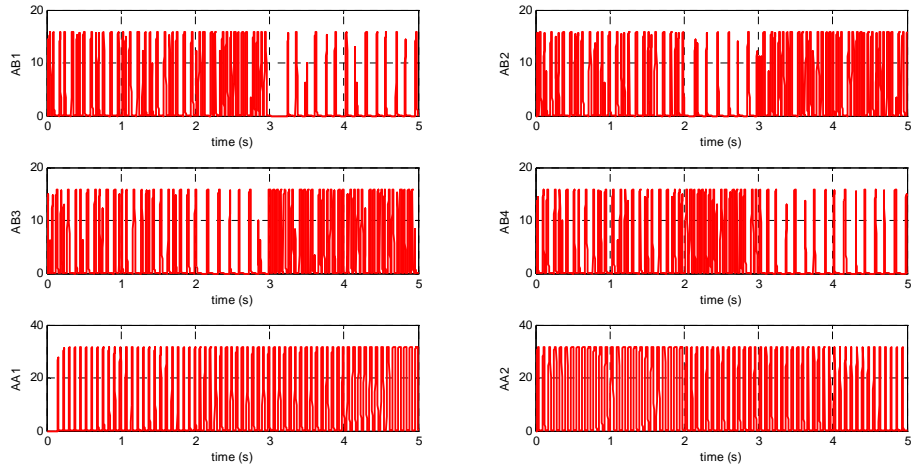


圖 7.5 姿態角命令為斜坡， $(dx,dy,dz)=(6.2,0,0)$ mm 的角度誤差及噴嘴開啟情況

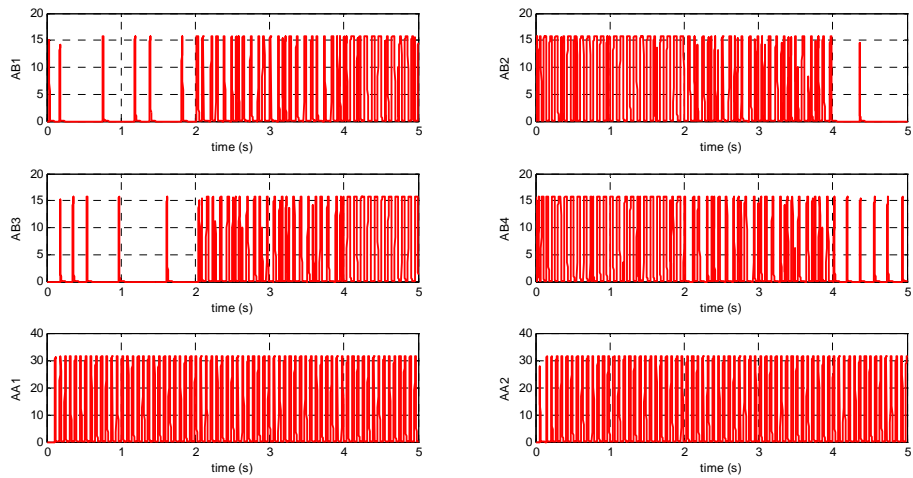
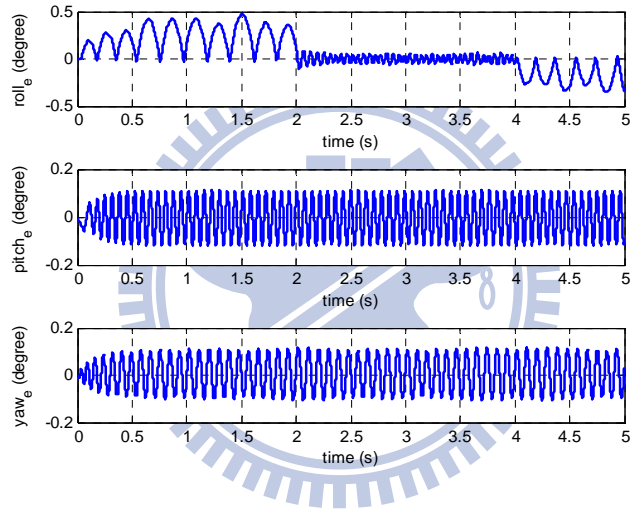


圖 7.6 姿態角命令為斜坡， $(dx,dy,dz)=(0,3.9,0)$ mm 的角度誤差及噴嘴開啟情況

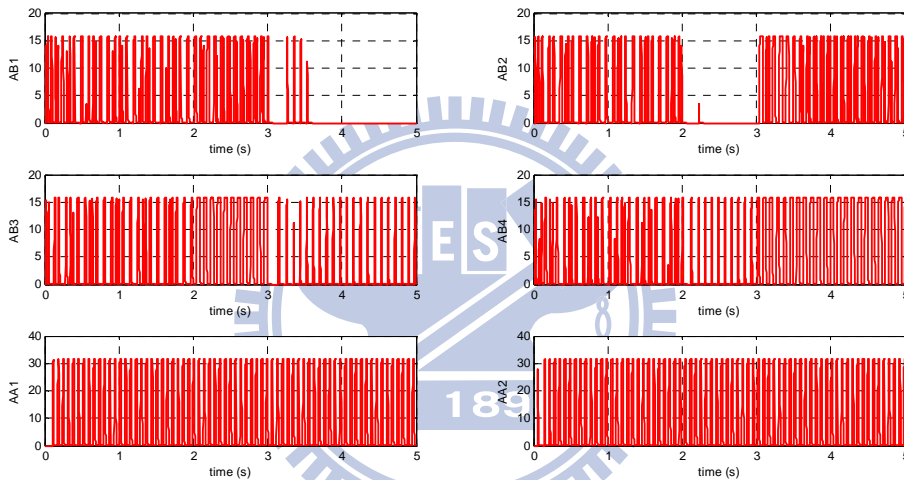
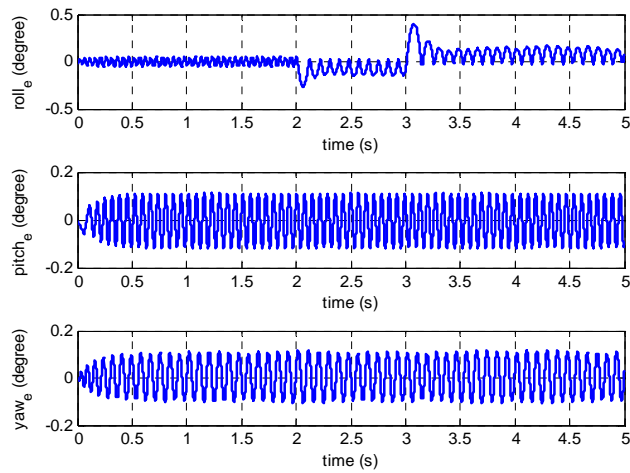


圖 7.7 姿態角命令為斜坡， $(dx,dy,dz)=(0,0,3.1)$ mm 的角度誤差及噴嘴開啟情況

7.2 實際攔截的情況

前一節我們使用假設的姿態命令及轉向推力器開啟方式來模擬兩種姿態控制器對干擾力矩的容忍度，決定質心偏移量 (dx,dy,dz) 的最大範圍。然而攔截飛彈實際在攔截目標時，真比例導引加速度透過 PWM 合成後，在轉向推力器上會是一直呈現開關切換的方式。因此在這一節以實際攔截的情況為例，觀察質心偏移 (dx,dy,dz) 相對於前一節會有什不同。姿態控制方面一樣使用線性控制配合 PWM 的合成及時間最佳化兩種方式。攔截飛彈與目標的初始設定同 6.3 節，模擬結果如表 7.3 所示。

表 7.3 實際攔截情況下，質心偏移的模擬結果

	dx 最大範圍 (mm)	dy 最大範圍 (mm)	dz 最大範圍 (mm)
線性姿態控制器	-6.3~+6.3	0	0
	0	-1.4~+1.4	0
	0	0	-1.5~+1.4
最短時間最佳控制器	-4.8~+4.8	0	0
	0	-3.2~+3.2	0
	0	0	-3.2~+3.2

比較表 7.3 和前一節的模擬結果，在姿態控制為線性控制器方面，其質心偏移容許的範圍大致上沒有什麼變化。而在最短時間最佳控制方面，質心偏移中的 dx 範圍有縮小的情況，由圖 7.8 偏航角的誤差配合圖 6.3 轉向推力器開啟情況部份，我們可以發現誤差最大發生在轉向推力器呈現開關狀態的時候，由於偏航角姿態控制律是採用延遲關閉的方式，當在偏航軸的正方向有干擾力矩產生，姿態推力器勢必會在負的方向產生控制力矩，當轉向推力器切換，換成負方向有干擾力矩時，這時候姿態推力器受到延遲關閉的影響，在負的方向還存在有控制力矩，反而會造成干擾的增加，姿態角的誤差也跟著變大，所以 dx 的範圍才會縮小。

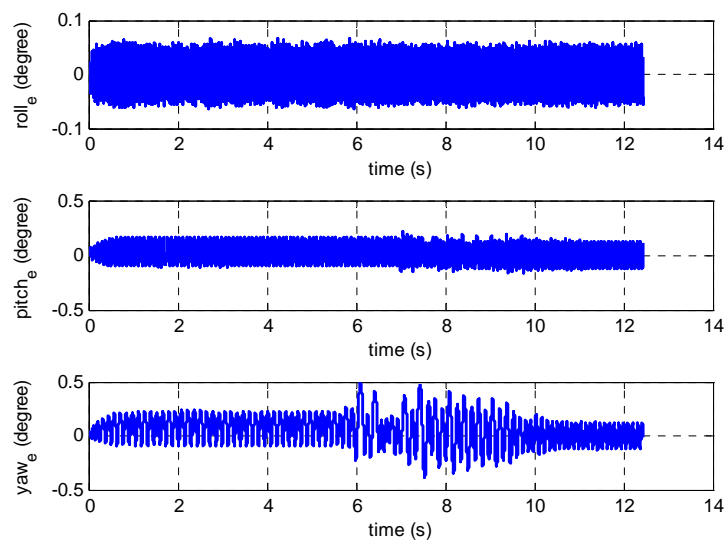


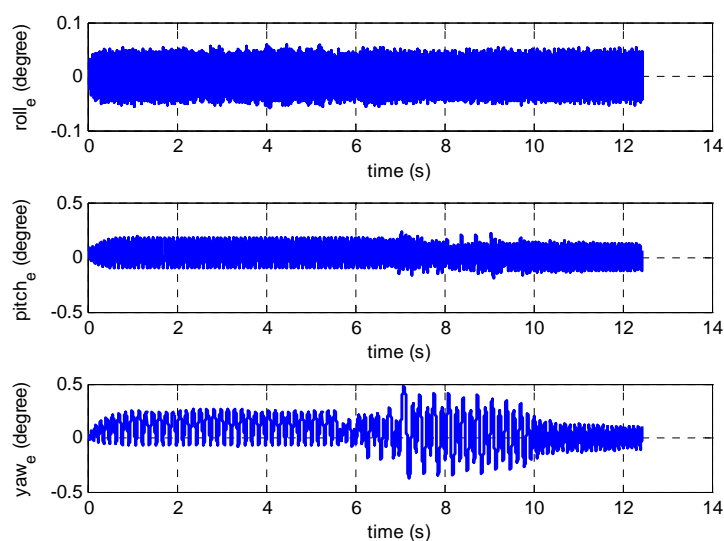
圖 7.8 最短時間最佳控制，(dx,dy,dz)=(4.8,0,0)mm 的角度誤差

因此我們可以透過縮小延遲切換寬度的方式降低干擾，增加質心偏移的容許範圍。由表 5.3，當延遲的寬度小於 0.00005 候，滾轉—偏航噴嘴的開關頻率維持在 $f_{AB} \approx 15$ 不變，我們修改滾轉方向延遲切換寬度為 0.000025、偏航方向的延遲切換寬度為 0.000015，觀察修正後的最短時間最佳控制對質心偏移的容許量的影響，模擬結果如表 7.4 所示，圖 7.9 是在 dx 方向有質心偏移時的姿態角誤差及嘴開啟情況。

我們可以發現修正延遲切換寬度後，姿態推力器所產生的干擾力矩減少了，因此質心偏移中的 dx 範圍有大幅的增加。由於滾轉軸也是使用延遲切換的控制率，所以 dy 和 dz 的範圍也有些微的增加，不過原來滾轉軸所提供的控制力矩並不大，產生的干擾也就不大，所以 dy 和 dz 的範圍增加的並不多。推力器開關頻率最高維持在 16(Hz)。

表 7.4 修正後的最短時間最佳控制，質心偏移的模擬結果

	dx 最大範圍 (mm)	dy 最大範圍 (mm)	dz 最大範圍 (mm)
最短時間最佳控制 器	-6.3~+6.3	0	0
	0	-3.4~+3.4	0
	0	0	-3.4~+3.4



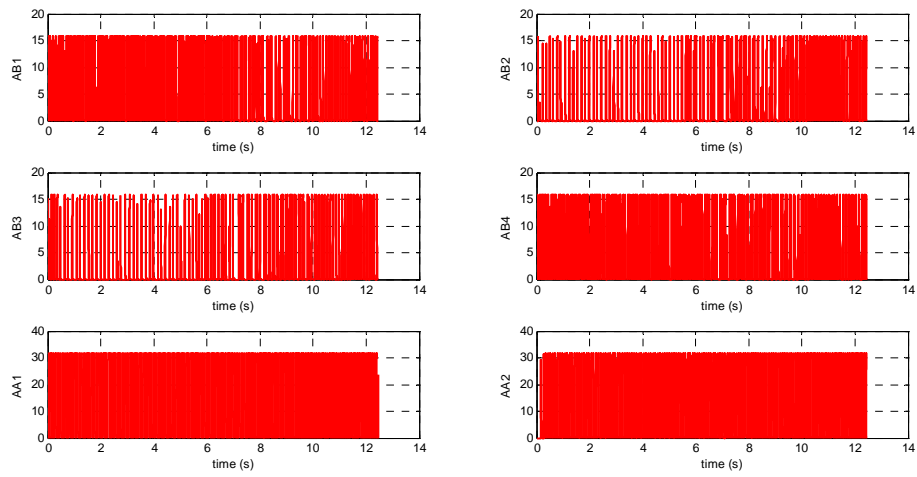
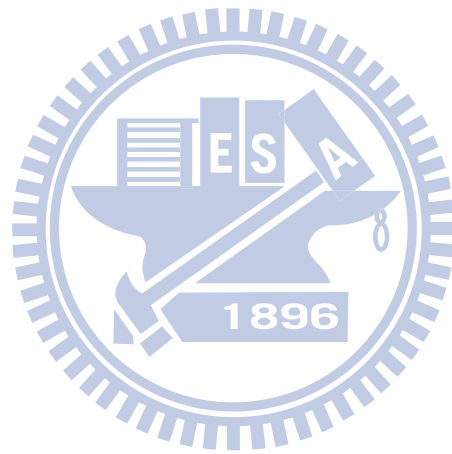


圖 7.9 修正後的最短時間最佳控制，姿態角誤差及噴嘴開啟情況



第八章 結論

飛彈攔截控制系統是一個相當具有挑戰性的問題，攔截器在姿態控制部份配置六個開關式制動器使的尋標器能持續的追蹤目標，並且控制體作標的 X 軸能和視線座標的 X 軸重合，讓真比例導引律的導引加速度能更準確。本文分別探討線性控制器配合脈衝寬度調變的方式及最短時間最佳控制的方式，兩種控制器都能夠輸出開關式命令，我們透過完整的模擬來對兩種控制器作調整並且分析兩種控制器的性能表現。

在線性控制器的部分採用角度和角速度的比例回授雙迴路簡單的架構，這邊主要討論 PWM 頻率的選擇，我們透過分析線性控制器的頻率響應，並且配合數值模擬的方式來決定 PWM 的頻率，其頻率大約為線性控制器頻寬的三倍時是一個適當的選擇，對於一個非線性的六自由度系統能夠把誤差抑制在合理的範圍內。攔截器在理想的攔截狀況下，不需要很大的控制力和很長的控制時間，姿態噴嘴大約開啟 70% 左右，對於 PWM 而言不需要每個週期都需要輸出開啟命令，即 duty cycle 比較低，所以追蹤姿態角命令時輸出的控制命令不是一直持續的開關，會有噴嘴完全關閉的時候，因此有助於燃料的節省，能夠飛行較長的時間。當有質心偏移產生姿態干擾時，需要較多的控制力，PWM 每個週期都會輸出開啟的命令，並且噴嘴會完全打開來穩定攔截器的姿態。

最短時間最佳控制系統實際使用方面我們遇到切換頻率過高的問題，為了改善這個問題，因此在切換曲線上加入一個參數 k 來降低切換頻率，此參數的選擇可以讓噴嘴的切換頻率接近硬體限制的最大值。接著我們為了能夠節省燃料調整俯仰軸的控制律為死區控制律，死區的寬度是一個需要選擇的參數，因為在死區部分控制命令輸出為零，噴嘴可以有完全關閉的時候，此控制率也可以再降低切換頻率。對於滾轉—偏航部分使用延遲切換控制律強制降低其噴嘴的切換頻率，需要選擇切換的寬度。以上三個參數的選擇皆是利用數值模擬的方式來完成，在切換頻率和角度誤差之間做一個取捨，對於此三個參數，目前為止還沒有一個更

明確的方式來決定，或許未來可以透過更多不同的模擬歸納出一個經驗法則來決定。控制器經過調整後噴嘴可以完全的開啟，且大幅的降低切換頻率在 15~16 (Hz)。而姿態角誤差相對於線性控制系統的模擬結果來說有比較大，可是也在合理的範圍內。對於燃料消耗部份，除了俯仰軸的噴嘴有完全關閉的時間外，其他噴嘴皆為持續開關的狀態，所以燃料消耗較線性控制系統多。

質心偏移的加入在轉向噴嘴開啟時會讓三軸產生干擾的力矩，我們使用模擬的方式來分析兩種控制器對於質心偏移的容忍度。由於線性控制系在設計之初是使用線性化的方程式，對於姿態角有一些假設，當干擾造成實際姿態角的變化違背這些假設時，控制的結果會大受影響，我們可以從模擬結果得知，線性控制系統雖然會增加推力和 duty cycle 的時間來抑制干擾，可是對於 dy , dz 這兩個質心偏移的範圍和最短時間最佳控制系統的相比來的小了很多，而在 dx 的範圍上兩種控制器則有相同的容忍度。

從質心偏移的模擬結果中，我們觀察到三軸產生的力矩大小對於抑制干擾有很大的影響。AB1~AB4 四個噴嘴同時要控制滾轉和偏航角，受到噴嘴開啟邏輯的影響，同時間四個噴嘴幾乎只有一個開啟，所以輸出的控制力矩會變小，因此俯仰軸的控制力矩會大於偏航軸的控制力矩，當在 dx 方向上有質心偏移產生，俯仰軸會受到比較大的影響。所以建議可以採用八個姿態推力器配置的方式讓三軸獨立控制，會有較足夠的力矩抑制干擾影響。

對於攔截飛彈的導引及控制還有許多部分需要進一步的探討，本論文希望能在飛彈的姿態控制系統及分析方面上有些許的貢獻，也希望能作為之後研究飛彈控制的一些參考。

參考資料

- [1] M. Guelman, "The closed-form solution of true proportional navigation," IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems, Vol.12, No.4, pp.472-482, July. 1976.
- [2] "Pulse-width modulation,"
http://en.wikipedia.org/wiki/Pulse-width_modulation.
- [3] M. Athans and P. L. Falb, *Optimal Control*, McGraw-Hill, 1966.
- [4] A. E. Bryson and Y. C. Ho, *Applied Optimal Control*.
- [5] 楊憲東,「自動飛行控制：原理與實務」,全華科技圖書,台北,2002.
- [6] 美國雷神公司,資料由陳科祥博士提供,2006年7月.
- [7] 何威德,“攔截飛彈的導引與姿態控制”,交通大學電控研究所碩士論文,2008年7月.
- [8] Phanphaisarn W.; Saechia, S.; Koseeyaporn, J.; Wardkein, P.; "A Simple Synthesis Technique of PWM Signal," IEEE CONF., pp.1647 – 1650, 2006.
- [9] Kalaykov, I.; Iliev, B.; "Time-Optimal Sliding Mode Control of Robot Manipulator," IEEE CONF., Vol. 1, pp. 265 - 270, 2000.
- [10] 林清安, "轉向與姿態導控系統設計", 國防科技學術合作研究計畫成果報告, 計畫編號 NSC-96-2623-7-009-011-D, 2007年3月.
- [11] B. Etkin, *Dynamics of Atmospheric Flight*, Wiley, 1972.
- [12] Cragon, S.D.; "Time-Optimal Control Application for an Exoatmospheric Interceptor," IEEE Cong., vol. 1, pp. 31 – 36, 1991