

國立交通大學

電機與控制工程研究所

碩士論文

車輛輪胎與路面摩擦力之即時估測



Real-Time Estimation of Tire-Road Friction Forces

研究生：劉念冀

指導教授：蕭得聖 博士

中華民國九十九年九月

車輛輪胎與路面摩擦力之即時估測

Real-Time Estimation of Tire-Road Friction Forces

研究生：劉念冀

指導教授：蕭得聖 博士

Student : Nien-Chi Liu

Advisor : Dr. Te-Sheng Hsiao

國立交通大學

電機與控制工程研究所

碩士論文

A Thesis

Submitted to Department of Electrical and Control Engineering

College of Electrical Engineering

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

In

Electrical and Control Engineering

July 2010

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十九年九月

車輛輪胎與路面摩擦力之即時估測

研究生：劉念冀

指導教授：蕭得聖 博士

國立交通大學電機與控制工程學系碩士班

摘要

隨著車用電子的技術蓬勃發展，人們對車輛的要求也日益增高，不論是在駕駛的舒適性上，或是在目前所關注的環保節能上，這些條件已經成為一般民眾購車的先決條件。在車輛行駛中往往會遇到各種不同的路面狀況，而路面狀況會直接影響車輛輪胎與地面間的受力，所以可以藉由輪胎與地面間受力情況的不同，判斷目前車輛行駛路面的狀況，也就是說欲得知路面狀況的不同，可以藉由估測車輛輪胎與地面間的摩擦力不同來做判斷，所以本研究發展了一套只需使用容易測量到的車輛動態再搭配車輛的動態模型來估測摩擦力的演算法，實驗中也建構了一模擬車輛輪胎與路面間的實驗平台來驗證摩擦力估測的正確性。

本論文建立了一套摩擦力估測演算法，是利用輪胎的力矩平衡來求得縱向的摩擦力，而側向的摩擦力是使用簡化車輛模型與腳踏車模型互相切換，並引入摩擦力圓的概念來做估測，另外也是用了期望值最大化演算法來估測車輛的不確定參數，然後模擬各種駕駛狀況與路面下摩擦力估測與不確定參數估測的結果；本實驗中也架設了實驗平台，在利用此實驗平台進行的縱向力估測與結果分析。

Real-Time Estimation of Tire-Road Friction Forces

Student : Nien-Chi Liu

Advisor : Dr.Te-Sheng Hsiao

Institute of Electrical and Control Engineering

Nation Chiao-Tung University

Abstract

Due to the advances in modern automotive technologies, requirements for driving comfort and being friendly to the environment are ever demanding. Vehicles run on roads with different surface conditions which make tire-road forces, and in turn the vehicle dynamics vary significantly. This study develops an algorithm that uses measurable signals and simple vehicle dynamic models to estimate tire-road friction forces. Then an experimental platform is established to simulate a tire rolling on a road surface such that the validity of the proposed algorithm can be verified experimentally.

This thesis establishes a friction force estimation algorithm which uses torque balance equations to obtain longitude friction forces. Lateral friction forces are estimated by introducing the concept of friction circles and switching between a simplified four-wheel model and the bicycle model. The uncertain parameters of the vehicle are also estimated on-line by applying the expectation-maximization algorithm. Finally, simulations are conducted under various driving and road conditions to evaluate the performance of parameter and tire-road force estimation. This study also sets up a quarter-car experimental platform to estimate longitudinal forces. Experimental results exhibit a linear relation between the longitudinal tire force and the slip ratio whenever the latter is low.

致謝

首先誠摯的感謝指導教授蕭得聖博士，老師悉心的教導以及對我研究能力的信任，讓我能夠順利的在實驗平台上實現摩擦力估測演算法，不僅在理論上有更清楚的認識，在實作方面的經驗也獲益匪淺，可謂獲益良多。

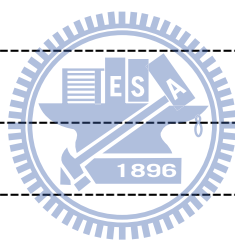
本論文的完成另外亦得感謝我的口試委員陳宗麟教授、徐保羅教授與李綱教授。因為有各位老師在口試中給的建議及方向，使得本論文能夠更完整而嚴謹。

兩年裡的日子，感謝茂樵、東新學長不厭其煩的指出我研究中的缺失，且總能在我迷惘時為我解惑，也感謝志誠同學與翊勳同學的共同砥礪。宜熹、偉仁、勝元、偉杰學弟的加油與鼓勵，也讓我備感溫馨。也感謝其他實驗室的哲男、凱銜、子恩、勳哥同學能在我研究陷入瓶頸時成為我的傾吐對像。也感謝在新竹的國高中，大學同學，能在我研究無聊時提供我娛樂。

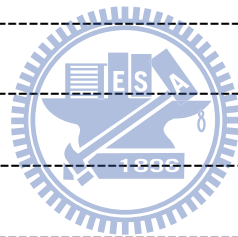
最後，要將此論文獻給獨自扶養我長大的母親，沒有她的鼓勵與教誨，絕對沒有今天的我。

目錄

中文摘要	I
英文摘要	II
目錄	IV
圖目錄	VI
表目錄	X
符號表	XI
第一章 緒論	1
1.1 研究背景	2
1.2 研究目的	2
1.3 研究貢獻	2
1.4 論文架構	3
第二章 相關研究	4
2.1 摩擦力估測相關研究	4
2.2 基於滑動(Slip based)估測方式相關研究	6
第三章 完整車輛模型	14
3.1 車輛運動座標系統	14
3.2 集中質量系統	15
3.2.1 車輛旋轉運動	16
3.2.2 車輛直線運動	19
3.3 非集中質量系統	20
3.3.1 轉向系統	20
3.3.2 車胎系統	21
3.3.3 懸吊系統	25
第四章 摩擦力估測演算法	29



4.1 摩擦力估測-----	30
4.1.1 縱向力估測-----	30
4.1.2 側向力估測-----	31
4.1.3 摩擦力圓-----	37
4.2 參數估測-----	43
4.2.1 E-step-----	45
4.2.2 M-step-----	48
第五章 模擬分析與探討-----	59
5.1 濾波器設計-----	60
5.2 直線前進-----	62
5.3 J-Turn-----	66
5.4 Single Lane Change-----	73
5.5 數據分析與探討-----	78
第六章 硬體架設與實驗-----	84
6.1 硬體架設與實驗-----	84
6.1.1 輪內馬達-----	84
6.1.2 模擬地面之橡膠輪胎-----	85
6.1.3 感測器-----	85
6.1.4 DSP 與外部電路-----	86
6.1.5 完整實驗平台-----	88
6.2 實驗分析與探討-----	90
6.2.1 濾波器設計-----	90
6.2.2 轉動慣量估測-----	91
6.2.3 縱向力估測與分析-----	93
第七章 結論與未來工作-----	101
附錄一-----	103



附錄二-----	105
附錄三-----	106
參考文獻-----	108

圖目錄

圖 2.1: 摩擦力估測研究的分類圖-----	5
圖 2.2: 側滑角示意圖-----	6
圖 2.3: (2.2)式滑動比(側滑角)對摩擦力做圖, $C_1=2480$ 、 $C_2=2.2$ 、 $C_3=24.8$ 、 $C_4=-1.6$ ---	7
圖 2.4: (2.3)式滑動比(側滑角)滑動對摩擦力做圖, $C_1=2500$ 、 $C_2=4$ 、 $C_3=2$ 、 $C_4=0.6$ 、 $v=15\text{m/s}$ ---	7
圖 2.5: (2.4)式滑動比(側滑角)滑動對摩擦力做圖, $K_s=15000$ 、 $C_1=5$ 、 $C_2=0.2$ ----	8
圖 2.6: (2.5)式滑動比(側滑角)滑動對摩擦力做圖, $C_1=2800$ 、 $C_2=40$ 、 $C_3=500$ ----	9
圖 2.7: (2.6)式滑動比(側滑角)滑動對摩擦力做圖, $C_1=7000$ 、 $C_2=2500$ -----	9
圖 2.8: 摩擦力與車輛負載(F_z)關係圖-----	10
圖 2.9: 摩擦力與路面摩擦係數(μ)關係圖-----	10
圖 2.10: 摩擦力估測流程圖-----	11
圖 3.1: 路面座標系轉換成非集中質心座標系示意圖-----	15
圖 3.2: 非集中質心座標系轉換成質心座標系示意圖-----	15
圖 3.3: 車體自由體圖-----	16
圖 3.4: Ackermann 轉向原理示意圖-----	21
圖 3.5: 輪胎自由體圖-----	22
圖 3.6: 輪胎側滑角示意圖(左)、轉向側傾示意圖(右)-----	23
圖 3.7: 輪胎縱向自由體圖-----	25

圖 3.8:懸吊系統自由體圖	26
圖 4.1:摩擦力估測流程圖	29
圖 4.2:簡化車輛自由體圖	31
圖 4.3:腳踏車模型自由體圖	35
圖 4.4:A 矩陣條件值示意圖	36
圖 4.5:摩擦力圓示意圖	38
圖 4.6:(左)側滑角與最大側向力與正向力之關係圖、(右)滑動比與最大縱向力與 正向力之關係圖	39
圖 4.7:期望值最大化演算法示意圖	44
圖 4.8:卡爾曼濾波器示意圖	45
圖 4.9:狀態空間模型示意圖	49
圖 4.10:轉動慣量示意圖	54
圖 5.1:車輛駕駛狀況示意圖	59
圖 5.2:模擬中使用的濾波器示意圖	61
圖 5.3:模擬一之縱向力估測結果	62
圖 5.4:模擬一之車速變化圖	62
圖 5.5:模擬二之縱向力估測結果	63
圖 5.6:模擬二之車速變化圖	63
圖 5.7:模擬三之縱向力估測結果	64
圖 5.8:模擬三之車速變化圖	64
圖 5.9:模擬四之縱向力估測結果	65
圖 5.10:(左)模擬四之車速變化圖(右)煞車力矩	65
圖 5.11:(左)模擬五之外側輪轉角(右)模擬五之路面摩擦係數	67
圖 5.12:模擬五之縱向力估測結果	67
圖 5.13:模擬五之側向力估測結果	68
圖 5.14:模擬五之參數估測結果	68

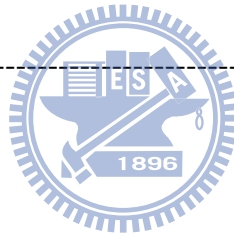
圖 5.15:圖 5.15:(左) 模擬六之外側輪轉角(右)模擬六之路面摩擦係數-----	69
圖 5.16: 模擬六之縱向力估測結果-----	69
圖 5.17: 模擬六之側向力估測結果-----	70
圖 5.18:圖 5.18:模擬六之參數估測結果-----	70
圖 5.19:(左)模擬七之外側輪轉角(右)模擬七之路面摩擦係數-----	71
圖 5.20: 模擬七之縱向力估測結果-----	71
圖 5.21: 模擬七之側向力估測結果-----	72
圖 5.22: 模擬七參數估測結果-----	72
圖 5.23:(左)模擬八之外側輪轉角(右)模擬八之路面摩擦係數-----	74
圖 5.24: 模擬八之縱向力估測結果-----	74
圖 5.25: 模擬八之側向力估測結果-----	75
圖 5.26: 模擬八之參數估測結果-----	75
圖 5.27:(左)模擬九之外側輪轉角(右)模擬九之路面摩擦係數-----	76
圖 5.28: 模擬九之縱向力估測結果-----	76
圖 5.29: 模擬九之側向力估測結果-----	77
圖 5.30: 模擬九之參數估測結果-----	77
圖 6.1: 模擬車輛之輪胎-----	85
圖 6.2: 模擬路面之輪胎-----	85
圖 6.3: TRD305 力矩與轉速感測器-----	86
圖 6.4: CP-3HK-100 電位計-----	86
圖 6.5: ds1104 控制介面-----	87
圖 6.6: 二階低通巴特沃茲濾波器-----	87
圖 6.7: 馬達驅動電路-----	88
圖 6.8: 完整實驗平台-----	89
圖 6.9: 輪胎剛度示意圖-----	90
圖 6.10: 轉動慣量估測一感測器訊號(左)轉速(中)轉矩(右)轉動慣量-----	91

圖 6.11: 轉動慣量估測二感測器訊號(左)轉速(中)轉矩(右)轉動慣量-----	92
圖 6.12: 轉動慣量估測三感測器訊號(左)轉速(中)轉矩(右)轉動慣量-----	92
圖 6.13: 實驗一轉速命令-----	94
圖 6.14: 實驗一量測數據(左上)轉動力矩(右上)輪胎轉速(左下)滑動比(右下)縱向 力-----	94
圖 6.15: 實驗一之輪胎剛度-----	94
圖 6.16 實驗二轉速命令-----	95
圖 6.17: 實驗二量測數據(左上)轉動力矩(右上)輪胎轉速(左下)滑動比(右下)縱向 力-----	95
圖 6.18: 實驗二之輪胎剛度-----	95
圖 6.19: 實驗三轉速命令-----	96
圖 6.20: 實驗三量測數據(左上)轉動力矩(右上)輪胎轉速(左下)滑動比(右下)縱向 力-----	96
圖 6.21: 實驗三之輪胎剛度-----	96
圖 6.22: 實驗四轉速命令-----	97
圖 6.23: 實驗四量測數據(左上)轉動力矩(右上)輪胎轉速(左下)滑動比(右下)縱向 力-----	97
圖 6.24: 實驗四之輪胎剛度-----	97
圖 6.25: 實驗五轉速命令-----	98
圖 6.26: 實驗四量測數據(左上)轉動力矩(右上)輪胎轉速(左下)滑動比(右下)縱向 力-----	98
圖 6.27: 實驗五之輪胎剛度-----	98



表目錄

表 5.1:直線前進之縱向力誤差-----	78
表 5.2:模擬五之側向力誤差-----	78
表 5.3:模擬六之側向力誤差-----	79
表 5.4:模擬七之側向力誤差-----	79
表 5.5:模擬八之側向力誤差-----	79
表 5.6:模擬九之側向力誤差-----	80



符號表

ψ	: 橫擺角
θ	: 俯仰角
φ	: 側傾角
$w_{x,y,z}$: 車體座標上之三軸角速度
$M_{x,y,z}$: 作用再車體座標上三軸的轉動力矩
Z	: 非集中座標上車體質心的初始位置
x,y,z	: 質心三軸上的位移
F_x	: 平行車身的力
F_y	: 垂直車身的力
F_z	: 正向力
F_a	: 平行輪胎的力
F_b	: 垂直輪胎的力
δ_{inner}	: 內側輪轉向角
δ_{outer}	: 外側輪轉向角
s_r	: 滑動比
α	: 側滑角
T_m	: 加速力矩



T_b	: 煞車力矩
$I_{x,y,z}$: 車體座標上三軸的轉動慣量
m_v	: 車體質量
l_1	: 質心到前輪輪軸長度
l_2	: 質心到後輪輪軸長度
sb_1	: 車輛前輪距離
sb_2	: 車輛後輪距離
h	: 車輛高度
$B_{x,y}, C_{x,y}, D_{x,y}, E_{x,y}$: 輪胎參數
r_e	: 輪胎真實半徑
r	: 輪胎等效半徑
K_{wheel}	: 輪胎彈力係數
k_i	: 車輛側傾係數
I_w	: 輪胎轉動慣量
$\dot{\omega}$: 輪胎的轉動加速度
C_1, C_2, C_3	: 懸吊系統非線性彈簧係數
D	: 懸吊系統阻尼係數
H	: 懸吊伸長量
\dot{H}	: 懸吊伸長速度
m_w	: 輪胎質量
$F_{b,org}$: 簡化車輛模型解出的側向力



$\mathbf{F}_{b,bicy}$: 腳踏車模型解出的側向力
$\bar{\mathbf{F}}_a$: 最大縱向力
$\bar{\mathbf{F}}_b$: 最大側向力
\mathbf{w}	: 過程雜訊(process noise)
\mathbf{v}	: 量測雜訊(measurement noise)
\mathbf{F}_k^f	: 動態方程式的狀態
\mathbf{F}_k^e	: 動態方程式的輸出
s	: 質心偏移
d_r	: 質心到車尾長度
d_f	: 質心到車頭長度
d_v	: 車輛總長



第一章緒論

1.1 研究背景

隨著車用電子的技術蓬勃發展，人們對車輛的要求也日益增高，不論是在駕駛的舒適性上，或是在目前所關注的環保節能上，這些條件已經成為一般民眾購車的先決條件。另外近年來在台灣，每家每戶都有一至兩輛車，但是台灣人口密度極高，道路狹窄，交通事故頻傳，所以安全駕駛系統在台灣的發展也是一個非常重要的課題之一。

在車輛行駛中往往會遇到各種不同的路面狀況，而路面狀況會直接影響車輛輪胎與地面間的受力，所以可以藉由輪胎與地面間受力情況的不同，判斷目前車輛行駛路面的狀況，也就是說欲得知路面狀況的不同，可以藉由估測車輛輪胎與地面間的摩擦力不同來做判斷。目前被廣泛利用的煞車防鎖死系統(ABS)在道路駕駛的安全性上就有莫大的貢獻，但是現今 ABS 對路況的適應能力並未達到最佳狀態，如果 ABS 系統能夠有車輛輪胎與地面間的摩擦力資訊，就能讓 ABS 系統依照當下路面的狀況決定煞車力道的大小，使車輛能在最短的時間內達到駕駛者希望的煞車行為，在 Yi et al[1]的論文中將摩擦力估測使用在緊急煞車系統上，判斷當時輪胎與地面間的摩擦力，來決定煞車力道的大小。在車輛控制方面也會利用及時路況判斷來做控制，通常車輛控制都會著重在駕駛者的舒適性與車輛行駛的安全性，例如在車輛行經水坑時，控制器保持車輛受力平衡不打滑，或是在車輛作轉向時，讓地面提供輪胎較大的摩擦力讓轉彎半徑縮小達到最有效率的轉向，這些行駛的狀況都會跟路面的狀況有相當大的關係，因此摩擦力的估測能讓控制器決策車輛動態時更為精確快速，在 Yi et al[2]的論文中就利用摩擦力估測作為控制器決策車輛動態時的依據。

另外一方面，隨著世界各國環保意識的抬頭，各國都在發展低污染、低耗能的電動車，但是目前市面上電動車的最大的缺點幾乎都是在電能與動能之間的轉換

效率不夠高，轉換成的動能會消耗在沒有必要的地方，像是在一般道路狀況時，車輛無法判斷路面狀況，能量通常都會消耗在摩擦力上，若電動車具有摩擦力估測的系統，判斷路面與輪胎的摩擦力，就可以更有效的決定車輛的行駛動態，讓電動車達到低耗能的效果。

以上的敘述可以得知摩擦力的估測會對車輛控制的研究有很多正面的影響，所以本研究最主要是發展摩擦力估測的演算法與建立一個能夠模擬車輛輪胎與路面的研究平台，當摩擦力估測準確後就可以提供控制器研究的研究者正確的摩擦力資訊，讓控制器的設計更為穩健快速。

1.2 研究目的

本研究的目的是在於發展摩擦力估測演算法與建立一個能夠模擬車輛輪胎與路面間的實驗平台，此摩擦力估測演算法的發展，能讓之後做車輛控制研究的研究者得到更正確的摩擦力資訊。

在此研究中會分成兩個部分，一開始會建立一個完整的車輛模型來模擬真實車輛的動態，然後利用真實車輛模型能提供的車輛動態資訊來發展摩擦力估測演算法，後面的部分主要是建立一實驗平台，此實驗平台能與模擬結合，成為一個硬體迴路(Hardware-in-the loop)的結構，以此來驗證演算法的正確性。

1.3 研究貢獻

本研究將發展一套可以利用容易得到的車輛資訊來完成估測摩擦力的演算法，一般得知摩擦力的方法為對車輛輪胎進行各種化學與物理的分析，爾後建立輪胎的模型，但是要對每輛車輛的每個輪胎作此分析不但費時，輪胎的模型也會隨著使用時間的長短而發生改變，而在本研究中將提出只需利用現在市面上廣泛

使用的車用感測器與車輛的動力學特性就可以求得欲得知的摩擦力，然後對車輛容易改變的參數進行估測來確保任意狀況下演算法的穩健性。

在來就是建立可以模擬車輛輪胎與路面情況的硬體，來驗證摩擦力演算法的正確性，之後更能利用此平台來實現車輛控制的實驗。

1.4 論文架構

論文各章節的編排如下

第一章 緒論：描述研究背景、動機與目的

第二章 相關研究：此章節會介紹各種不同的摩擦力研究方法，並針對其中一種估測方法深入討論，然後簡介本研究欲使用之估測方法。

第三章 完整車輛模型：在此章節會建立一個高階的車輛動態模型，目的是為了在模擬中有一個更貼近真實車輛的參考模型來確定本研究演算法的正確性。

第四章 摩擦力估測：發展摩擦力估測的演算法與參數估測的演算法。

第五章 模擬與結果討論：模擬各種駕駛狀況下演算法的估測情況，並且討論估測結果。

第六章 實驗與結果討論：將演算法套入硬體實驗，並分析數據來驗證模擬的結果。

第七章 結論與未來展望：總結本研究並提出未來能更深入發展的方向。



第二章 相關研究

摩擦力是一種接觸力，兩物體的表面互相接觸後，若物體間有相對運動就會有摩擦力的產生，這類的固體表面間接觸的摩擦力就行為上來看，分成了滑動摩擦、滾動摩擦、滾壓摩擦、以及轉動摩擦，分別是描述各種物體間相對運動方式不同所產生的摩擦現象，滑動摩擦很單純的就是兩個不平滑物體表面相對運動所產生的摩擦；滾動摩擦就是一個物體在不平滑物體的表面上滾動的摩擦現象；而當相對運動有滑動與滾動同時存在就稱為滾壓摩擦；當物體單純繞著固定軸旋轉就是轉動摩擦。而車輛輪胎同時存在三種摩擦現象，輪胎鎖死時完全打滑的狀態為滑動摩擦；車胎卡在水坑中轉動卻沒有前進時的轉動摩擦；與一般車輛行駛狀態下的滾壓摩擦。

而車胎的摩擦力會隨著許多條件變化而有所不同，例如車胎所承受的車輛負載、車胎的轉動速度、輪胎的材質、胎壓的大小、輪胎溝槽的深淺，以上這些物理或是化學的條件都會直接的影響車胎與地面間摩擦力的變化，反之，車胎摩擦力的變化也會影響車輛行駛的動態，例如車速，轉動速度，側向加速度這些物理量。

然而了解摩擦力的種類，與摩擦力的影響後，接下來會對現有的摩擦力估測演算法加以探討分析，以了解目前摩擦力演算法的種類與利弊。

2.1 摩擦力估測相關研究

依照Muller et al[3]的研究中，大致上把摩擦力的估測分成兩大部分，如圖2.1，第一大部分就是研究造成摩擦力改變的因素，進而推得摩擦力，這種估測方式稱為基於原因(Cause Based)的估測，Bachmann[4]的研究中就使用了胎壓感測器加上分析輪胎的材質與溝痕形狀後來進行估測，而Eichhorn and Roth[5]使用了特別的光學與薄膜感測器來觀察輪胎與路面接觸時的胎面耗損變化，再利用系

統鑑別的技术來建立車胎的摩擦力模型，而在Breuer et al[6]的研究中，在車胎附近裝上一光學感測器，此光學感測器是用來分析車輛行經路面的路面狀況，再利用路面狀況與輪胎的特性來做摩擦力的估測，這些研究中都有一個共通點，就是研究者會利用各種不同的感測器來測量一些較難得到的輪胎特性，這些感測器取得不易，一些化學上的分析也不利於即時的摩擦力估測。

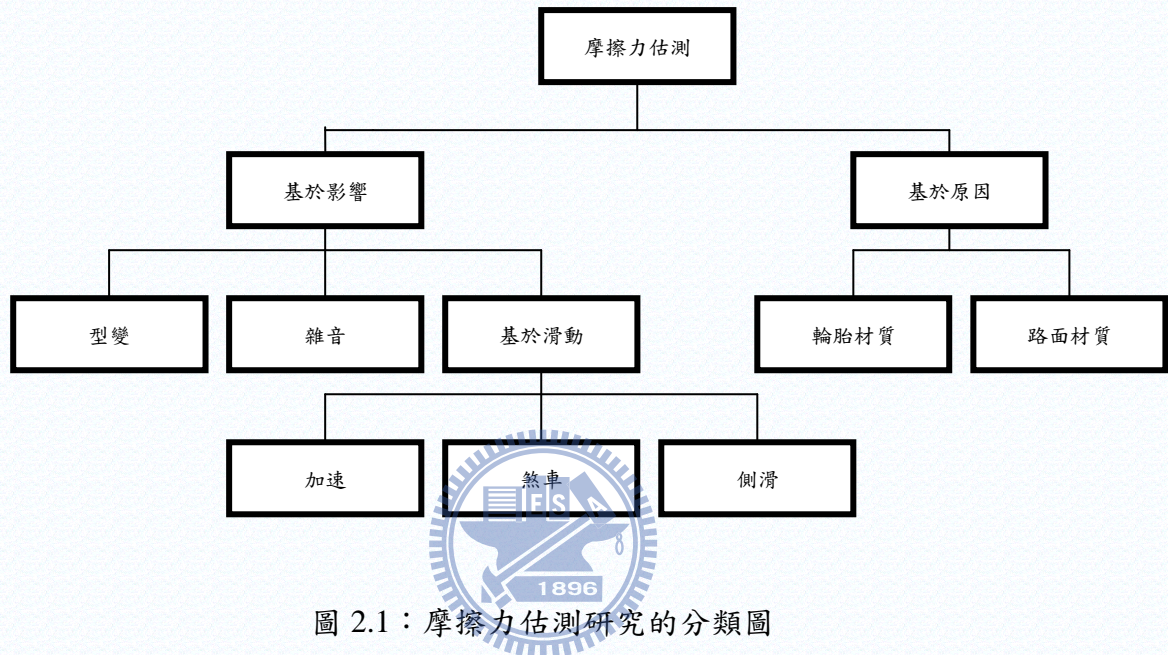


圖 2.1：摩擦力估測研究的分類圖

另外一種估測方式就是研究摩擦力造成的影響，此類方式稱為基於影響 (Effect based) 的估測，此方法中又可以細分成三大子類，前面兩大子類為分析摩擦力造成的輪胎形變和分析車胎與路面間摩擦力造成的雜音，Hollingum[7]的研究中就使用音訊的感測器來分析車輛行駛時車胎的雜音，Bekker et al[8]也研發出了可以放置於輪胎內，測量輪胎形變量的感測器，利用此感測器所提供的形變資訊，就可以求得欲得知的摩擦力。而另外一類就是摩擦力造成的車輛運動變化，此類別為目前估測摩擦力主要方式，所以在下一小節詳細介紹。

2.2 基於滑動(Slip based)估測方式相關研究

基於滑動的摩擦力估測方式為基於影響的估測方式中的一個子類別，主要是在分析滑動與摩擦力之間的關係。所謂的滑動可以分成縱向的滑動與側向的滑動，在縱向的滑動上為輪胎前進速度與車輛質心前進速的差值作正規化(normalize)，此物理量稱為滑動比(Slip ratio)，如(2.1)式；另外一種側向上的滑動為車輛轉向時，車胎胎面朝向與速度朝向間的角度差，稱為側滑角(Slip angle)，如圖 2.2。

$$s_r = \frac{V - r\omega}{\max(V, r\omega)} \quad (2.1)$$

其中 V 為車速， r 為輪胎半徑， ω 為輪胎轉速。

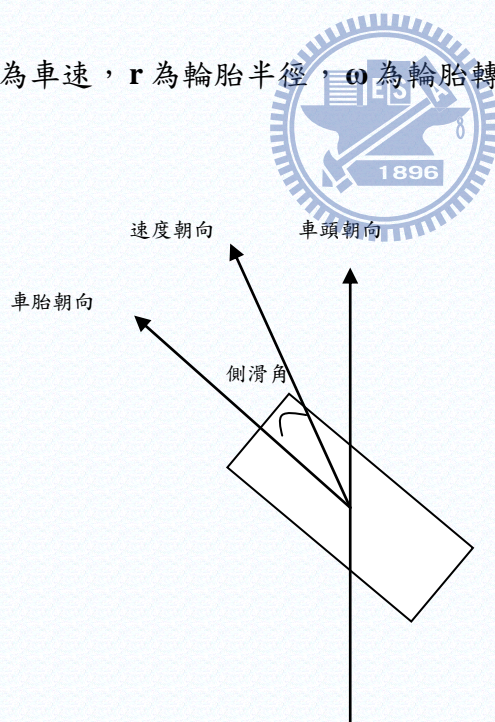


圖 2.2：側滑角示意圖

之所以利用分析側滑角與滑動比，原因是因為在諸多實驗研究所示，測滑角的大小會影響側向力，滑動比的大小則會影響縱向力，在 Pacejka[9]中就有提出

側滑角與側向力和滑動比與縱向力之間的數學關係，此關係稱為“Magic Formula”，此公式為透過材料力學分析、化學分析、實驗測試所得到的結果，其中 C_1 [9] 為車胎的特性參數， s 代表側滑角或滑動比，如式(2.2)，如圖 2.3：

$$F(s) = C_1 \sin(C_2 \tan^{-1}(C_3 s - C_4(C_3 s - \tan^{-1}(C_3 s)))) \quad (2.2)$$

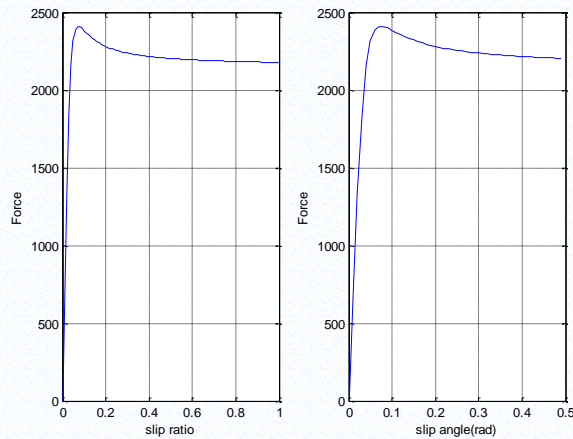


圖 2.3：(2.2)式滑動比(側滑角)對摩擦力做圖， $C_1=2480$ 、 $C_2=2.2$ 、 $C_3=24.8$ 、 $C_4=-1.6$

Burckhardt[10]也提出了類似的關係式，關係式中多了速度(v)此項參數，可以描述在不同速度下的摩擦力曲線，其中 C_1 [10] 為車胎的特性參數， s 代表側滑角或滑動比，如式(2.3)，如圖 2.4：

$$F(s, v) = (C_1(1 - e^{-C_2 s}) - C_3 s) e^{-C_4 v} \quad (2.3)$$

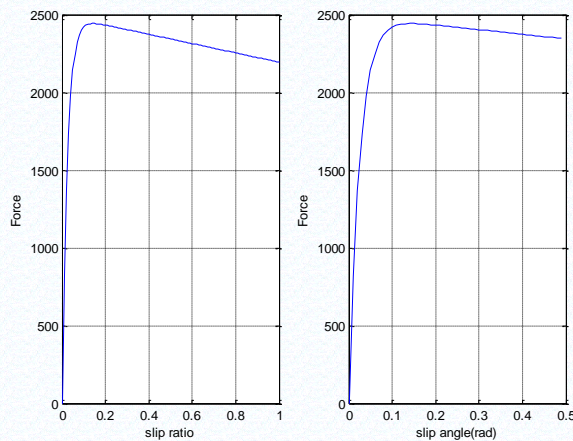


圖 2.4：(2.3)式滑動比(側滑角)滑動對摩擦力做圖， $C_1=2500$ 、 $C_2=4$ 、 $C_3=2$ 、 $C_4=0.6$ 、 $v=15\text{m/s}$

而後 Kiencke and Daiss[11]忽略了摩擦力曲線與其速度之間的關係，並且加入了輪胎剛度(Stiffness)此項變因來描述摩擦力曲線，其中 K_s 為輪胎剛度， C_1 [11] 為車胎的特性參數， s 代表側滑角或滑動比，如式(2.4)，如圖 2.5：

$$F(s)=K_s \frac{s}{C_1 s^2 + C_2 s + 1} \quad (2.4)$$

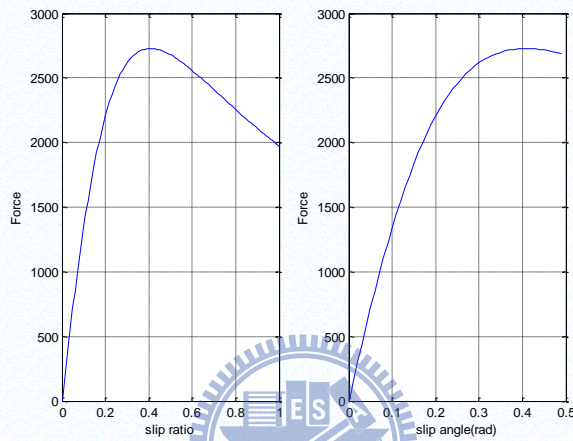


圖 2.5：(2.4)式滑動比(側滑角)滑動對摩擦力做圖， $K_s=15000$ 、 $C_1=5$ 、 $C_2=0.2$

另一篇 Burckhardt[12]的文獻中也將原本加以考慮的速度加以忽略，把先前提出過的(2.3)式加以簡化，使之成為三個參數的摩擦力曲線，如(2.5)式，爾後 Burckhardt[12]為了在使即時估測時的運算更加簡化，就提出了如同(2.6)式更加簡化的摩擦力曲線，其中 C_1 [12]為車胎的特性參數， s 代表側滑角或滑動比，如圖 2.6，圖 2.7。

$$F(s)=C_1(1-e^{-C_2 s})-C_3 s \quad (2.5)$$

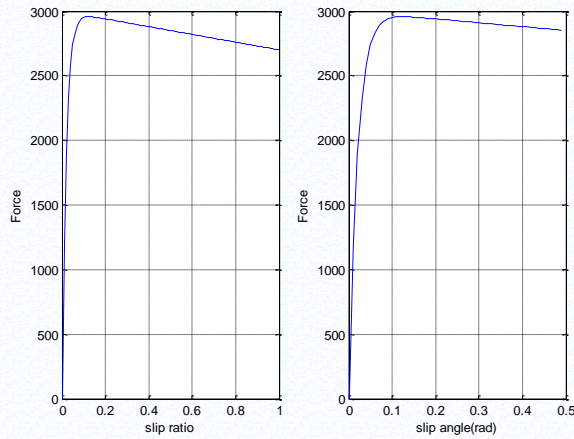


圖 2.6：(2.5)式滑動比(側滑角)滑動對摩擦力做圖， $C_1=2800$ 、 $C_2=40$ 、 $C_3=500$

$$F(s)=C_1\sqrt{s}-C_2s \quad (2.6)$$

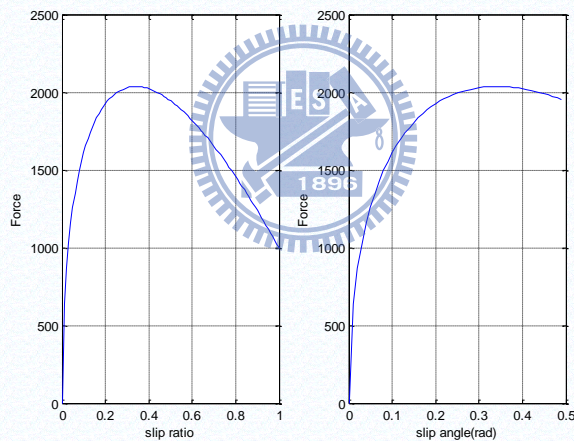


圖 2.7：(2.6)式滑動比(側滑角)滑動對摩擦力做圖， $C_1=7000$ 、 $C_2=2500$

以上所描述的這些方程式，其中的參數都會與車胎的胎壓，車輛負載，以及表面材質有很大的關係，通常在車胎出廠時會對車胎做測試，求得這些摩擦力曲線的特性參數。

觀察圖 2.3 到圖 2.7，可以很容易的發現這是一個非線性的結果，在一開始的線性區時，當滑動越來越大，摩擦力也就越來越大，但是滑動比到一個極值時，摩擦力也會跟著達到最大上限，而後隨著滑動的增加，摩擦力會慢慢遞減，而通常摩擦力極值會隨著車輛負載與行經路面的摩擦係數(μ)的不同而有所改變，摩

擦係數是表示路面材質不同的參數，通常越粗糙或越乾燥的表面摩擦係數越大，越光滑或越濕潤的表面摩擦係數越小，一般柏油路面的摩擦係數大概為 0.85，而下雨天時的柏油路面大概為 0.65，當車輛負載與路面摩擦係數越大時極值越大，反之則越小，如圖 2.8、圖 2.9：

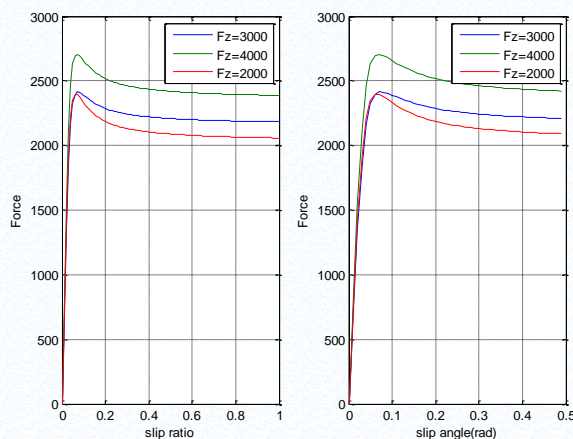


圖 2.8：摩擦力與車輛負載(F_z)關係圖

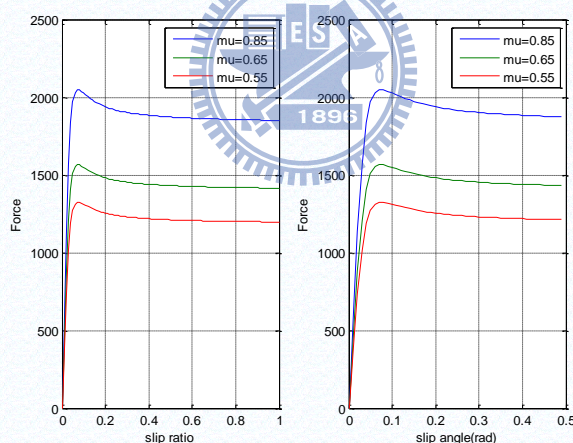


圖 2.9：摩擦力與路面摩擦係數(μ)關係圖

滑動比與側滑角被視為車體的動態，是因為摩擦力造成車輛行駛狀況改變時，滑動比與側滑角也會跟著改變，所以如果可以求得滑動比或是側滑角，則可以利用滑動比和側滑角與摩擦力曲線來獲得摩擦力資訊，在 Dieckmann[13]的研究中，就是利用已知的摩擦力曲線參數搭配滑動比或側滑角的估測來求得摩擦力，Gustafsson[14]與 Hwang and Song[15]分別是研究車輛加速與緊急煞車時的摩

擦力估測，Hwang and Song [15]也進一步利用了摩擦力曲線中摩擦極值的估測來確保煞車系統能提供的最大煞車力道。另外在 Hanh[16]的研究中，為了求得準確的滑動比與側滑角，更是使用了全球定位系統(GPS)與差分式全球定位系統(DGPS)來取得車輛位置與速度的精確資訊，在利用研究中所推導的高階摩擦力曲線來求得摩擦力。

另外一種滑動比與側滑角估測的方式就是為利用摩擦力造成滑動比與側滑角後，間接影響車輛行駛的狀態，此類研究會利用不同的狀態估測方法來求得車輛動態方程式(Dynamic equation)中的動態，再利用這些資訊來求解摩擦力，如圖 2.10：

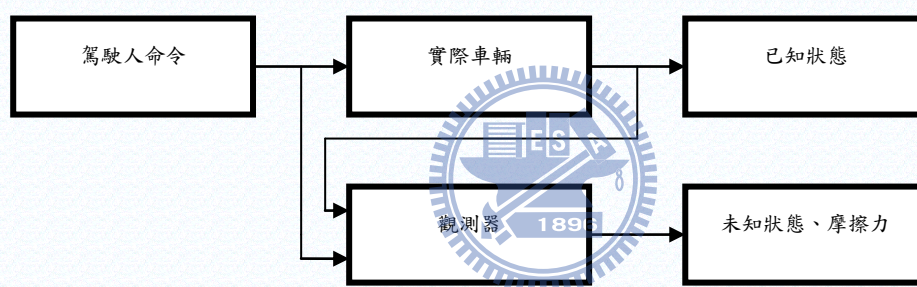


圖 2.10：摩擦力估測流程圖

Ray[17]建立了一個各種摩擦係數的路面下，車輛行駛狀況的資料庫，之後再進行即時估測時比對行駛狀態與資料庫的內容相符程度來決定目前車輛所行駛的路面摩擦係數。Tsunashima et al[18]與 Ray[17]方法類似，也是將資料庫與行駛狀況利用多模型逼近(Multi-Model Approach)的方式來比對屬於哪一個路面摩擦係數情況的機率較大。

Ray et al[19]在另一篇文章中也提出了使用車輛動態方程式作估測依據，Ray et al[19]認為摩擦力是一動態方程式中的狀態，並且假設摩擦力的二次微分為高斯雜訊，如(2.7)式，再利用觀察器(Observer)來做估測。

$$\begin{bmatrix} \dot{F} \\ \ddot{F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ \dot{F} \end{bmatrix} + n(t) \quad (2.7)$$

而 Baffet[20]是將摩擦力視為輪胎剛度與滑動比的乘積，如(2.8)式，當摩擦力曲線在線性區時，輪胎剛度不變，而曲線離開線性區後就視為輪胎剛度的改變，Baffet[20]也是將輪胎剛度視為車輛動態方程式裡的狀態，且一次微分為高斯雜訊，再利用順滑模式觀測器(Sliding Model Observer)來做估測。

$$\begin{aligned} F &= K_s s \\ \dot{K}_s &= n(t) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Canudus et al[21]的論文中，直接建立了輪胎的動態方程式，此動態方程式稱為 LuGre Model，其動態方程式為形變量的一次微分與形變量、車速、滑動比、側滑角、輪胎剛度間的微分方程式，再利用型變量與車輛負載來求出摩擦力如(2.9)式，其中 z 為形變量， C_i 為輪胎參數， v_r 為車速， $g(v_r)$ 為與摩擦細數有關之函式：

$$\begin{aligned} \dot{z} &= v_r - \frac{C_1 |v_r|}{g(v_r)} z \\ F &= (C_1 z + C_2 \dot{z} + C_3 v_r) F_z \end{aligned} \quad (2.9)$$

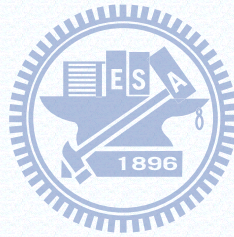
Yi.K and Jeong[22]就是利用實驗的方式求得(2.8)中相關的參數，即時估測時再利用觀測器求得(2.9)式中所需要的狀態，解得一微分方程式後求得摩擦力。S.H. Park[23]的研究中也是使用 Canudus et al[21]的動態模型，並也建立了一實驗平台來加以佐證演算法的正確性。

上述的研究中，基於原因的摩擦力估測方式大多會使用很多化學分析來分析輪胎的特性，但是化學分析只是分析特定的輪胎，當車輛換上其他輪胎便不再適用，所以利用化學分析的摩擦力估測方式並不強健，也不利於即時的分析。而在基於影響的方法利用特殊的感測來測量器輪胎的形變或是胎壓的變化，但是這些感測器的價位很高，一般也不容易取得，所以不利於廣泛運用。另外在基於滑動的摩擦力估測中大多會建立摩擦力對滑動比或側滑角的模型，再來估測滑動比與側滑角來推算摩擦力，但是想要得知此模型大多還是靠著物理或是化學的分析得知模型的參數，或是利用系統鑑別的方式建立此模型，上述這些輪胎模型建立的摩擦力分析方式，也只試用在已分析過的輪胎上，因此當行駛中輪胎特性發生了改變，建立出來的輪胎模型也失去了正確性。本研究將提出一個可以即時估測摩擦力的方法，此方法不需要得知輪胎的模型，只需利用感測器所提供的資訊搭配上車體的動力學方程式來就可求得摩擦力，使用的感測器也是一般市面上容易取得的感測器。在[19][20]的研究中雖然也是不利用輪胎模型來求得摩擦力，但是使用的車輛模型是簡化過的腳踏車模型(Bicycle model)，此模型只考慮左右輪的合力，所以在這些方法中無法求得車輛每顆輪胎個別的摩擦力，若可以得知各輪胎所受之摩擦力，就可以針對個別輪胎當下的路面狀況做不同的控制，所以在本研究中利用了車輛輪胎本身的摩擦力圓的特性，就可以得知每顆輪胎所受的摩擦力大小。另外車輛本身的參數也會有不確定的情況，像是車輛在行使時會有乘載數的問題，乘載數的不同，全車的重量也會改變，進而影響到摩擦力的估測，或是車輛本身的轉動慣量、車長與車寬也會隨著每輛車的不同而有所改變，所以本研究也會針對車輛的參數做估測來確保摩擦力估測的穩健性

第三章 完整車輛模型

本章節中將介紹研究中所使用的車輛模型，此車輛模型是參考 Hingwe[22] 的論文中所提出的車輛動態模型，此模型為一個二十階的完整車輛模型。在此將車輛模型分成了兩個部分，分別是集中質量系統(Sprung-mass System)與非集中質量系統(Unsprung-mass System)。集中質量系統就是指車體，在此將車體視為一剛體，此剛體會具有旋轉運動與直線運動；非集中質量系統又分為懸吊系統與車輛輪胎，車輛輪胎與地面接觸時會產生摩擦力，此摩擦力會改變集中質量系統的運動方式，懸吊系統是連接輪胎與車體的系統，主要目的是保持車身的平衡，讓車輛在行駛時不至於翻覆。接下來就在 3.1 節介紹車輛的座標系統，3.2 節介紹集中質量系統，3.3 節介紹非集中質量系統。

3.1 車輛運動座標系統



本研究中為了描述車體在空間的運動，所以訂定出了三種不同的座標系統，分別是固定於地表上的地表座標、固定在非集中質心上的非集中質心座標、然後是位於車體質心上的車體座標，三個座標間是利用尤拉角(Euler angle)來做轉換。

首先定義地表座標係 E^G ，地表座標的原點可以放置在任何地方，將地表座標對 z 軸逆時針旋轉，對準非集中質心座標系 E^u ，非集中質心座標的原點在車輛集中質心對地面的投影點， x 軸為車頭方向， z 軸為垂直地面的方向，朝上為正向， y 軸為垂直車身的方向，使得 x 、 y 與 z 軸滿足右手法則，此時旋轉的角度稱為橫擺角(Yaw angle, ψ)，如圖 3.1。接下來將非集中質心坐標對者 y 軸逆時針方向旋轉，此時旋轉的角度稱為俯仰角(Pitch angle, θ)，然後對 x 軸方向逆時針旋轉，此時旋轉的角度稱為側傾角(Roll angle, ϕ)，最後對準的座標就回車體座標 E^B ，車體座標的原點在車體集中質心上， x 軸與 y 軸的方向與非集中質

心座標相同，但是 z 軸為垂直車體的方向，如圖 3.2。而座標間的轉換式如 3.1 式所示：

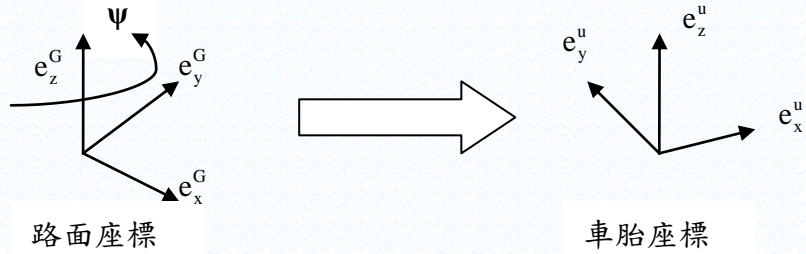


圖 3.1：路面座標系轉換成非集中質心座標系示意圖

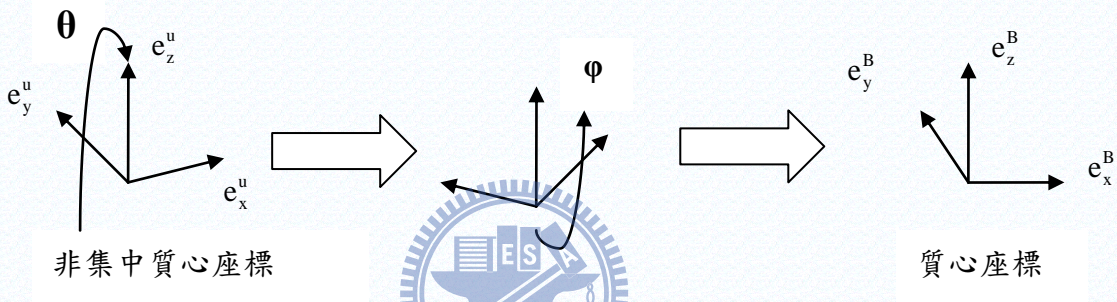


圖 3.2：非集中質心座標系轉換成質心座標系示意圖

$$\mathbf{E}^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{E}^G \quad (3.1)$$

3.2 集中質量系統

透過在 3.1 節所建立的座標系統就可以描述空間中六個自由度的運動，分別是對著三個軸的旋轉運動與對三個軸的直線運動，根據三個軸的旋轉運動可以利用尤拉運動方程式來分析車體運動的角度，而牛頓第二運動定律可以用來分析車體的位置。車輛運動自由體圖如圖 3.3：

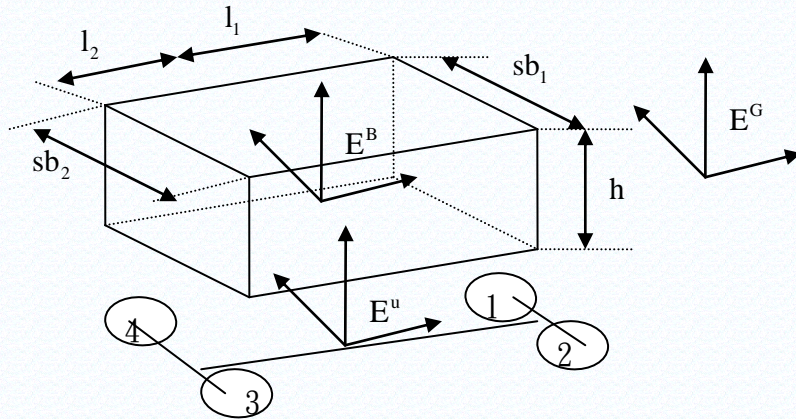


圖 3.3：車體自由體圖

3.2.1 車輛旋轉運動

在車輛旋轉運動的部分，利用尤拉角的關係，可以將車體的旋轉運動用車體座標來表示如式(3.2)：



$$\begin{aligned}
 w_x &= \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin\theta \\
 w_y &= \dot{\theta} \cos\phi + \dot{\psi} \cos\theta \sin\phi \\
 w_z &= -\dot{\theta} \sin\phi + \dot{\psi} \cos\theta \cos\phi
 \end{aligned} \tag{3.2}$$


其中 w_x 為車體座標上的側傾角速度； w_y 為車體座標上的俯仰角速度； w_z 為車體座標上的橫擺角速度。將(3.2)式微分後得到三個車體座標上的轉動角加速度，如(3.3)式：

$$\begin{aligned}
\dot{w}_x &= \ddot{\phi} - \ddot{\psi}\sin\theta - \dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta \\
\dot{w}_y &= \ddot{\theta}\cos\varphi + \ddot{\psi}\cos\theta\sin\varphi - \dot{\theta}\dot{\phi}\sin\varphi - \dot{\psi}\dot{\phi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\psi}\dot{\phi}\cos\theta\cos\varphi \\
\dot{w}_z &= -\dot{\theta}\sin\varphi + \dot{\psi}\cos\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\dot{\phi}\cos\varphi - \dot{\psi}\dot{\phi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\psi}\dot{\phi}\cos\theta\sin\varphi
\end{aligned} \tag{3.3}$$

車體的旋轉運動可以藉由尤拉運動方程式獲得，如(3.4)式，其中 $M_{x,y,z}$ 為作用在車體質心上的轉動力矩； $I_{x,y,z}$ 為車體座標系各軸上的轉動慣量。

$$\begin{aligned}
M_x &= I_x \dot{w}_x - (I_y - I_z) w_y w_z \\
M_y &= I_y \dot{w}_y - (I_z - I_x) w_z w_x \\
M_z &= I_z \dot{w}_z - (I_x - I_y) w_x w_y
\end{aligned} \tag{3.4}$$

將(3.2)(3.3)式帶入(3.4)式做整理後得(3.5)式：



$$\begin{aligned}
\ddot{\phi} - \ddot{\psi}\sin\theta &= \\
\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{M_x}{I_x} - \frac{I_z - I_y}{I_x} (\dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\phi}\cos\theta\sin\varphi)(-\dot{\theta}\sin\varphi + \dot{\psi}\cos\theta\cos\varphi) \\
\ddot{\theta}\cos\varphi + \ddot{\psi}\cos\theta\sin\varphi &= \\
\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\varphi + \dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta\sin\varphi - \dot{\psi}\dot{\phi}\cos\theta\cos\varphi + \frac{M_y}{I_y} - \frac{I_x - I_z}{I_y} (\dot{\phi} - \dot{\psi}\sin\theta)(-\dot{\theta}\sin\varphi + \dot{\psi}\cos\theta\cos\varphi) \\
-\dot{\theta}\sin\varphi + \dot{\psi}\cos\theta\cos\varphi &= \\
\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\varphi + \dot{\psi}\dot{\phi}\sin\theta\cos\varphi + \dot{\psi}\dot{\phi}\cos\theta\sin\varphi + \frac{M_z}{I_z} - \frac{I_y - I_x}{I_z} (\dot{\phi} - \dot{\psi}\sin\theta)(\dot{\theta}\cos\varphi + \dot{\psi}\cos\theta\sin\varphi)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

而其中 $M_{x,y,z}$ 可以藉由分析作用在車體上有效的力與車輛參數便可獲得，如(3.6)(3.7)(3.8)式：

$$\begin{aligned}
M_x = & \frac{sb_1}{2} (F_{x1}\sin\theta\cos\varphi - F_{y1}\sin\varphi + F_{z1}\cos\theta\cos\varphi) \\
& - \frac{sb_1}{2} (F_{x2}\sin\theta\cos\varphi - F_{y2}\sin\varphi + F_{z2}\cos\theta\cos\varphi) \\
& - \frac{sb_2}{2} (F_{x3}\sin\theta\cos\varphi - F_{y3}\sin\varphi + F_{z3}\cos\theta\cos\varphi) \\
& + \frac{sb_1}{2} (F_{x4}\sin\theta\cos\varphi - F_{y4}\sin\varphi + F_{z4}\cos\theta\cos\varphi) \\
& + \frac{h}{2} (F_{x1}\sin\theta\sin\varphi + F_{y1}\cos\varphi + F_{z1}\cos\theta\sin\varphi) \\
& + \frac{h}{2} (F_{x2}\sin\theta\sin\varphi + F_{y2}\cos\varphi + F_{z2}\cos\theta\sin\varphi) \\
& + \frac{h}{2} (F_{x3}\sin\theta\sin\varphi + F_{y3}\cos\varphi + F_{z3}\cos\theta\sin\varphi) \\
& + \frac{h}{2} (F_{x4}\sin\theta\sin\varphi + F_{y4}\cos\varphi + F_{z4}\cos\theta\sin\varphi) \\
& + (-l_1\sin\theta + \frac{sb_1}{2}\cos\theta\sin\varphi - \frac{h}{2}\cos\theta\cos\varphi - (Z-z))F_{y1}\cos\theta \\
& + (-l_1\sin\theta - \frac{sb_1}{2}\cos\theta\sin\varphi - \frac{h}{2}\cos\theta\cos\varphi - (Z-z))F_{y2}\cos\theta \\
& + (l_2\sin\theta - \frac{sb_2}{2}\cos\theta\sin\varphi - \frac{h}{2}\cos\theta\cos\varphi - (Z-z))F_{y3}\cos\theta \\
& + (l_2\sin\theta + \frac{sb_2}{2}\cos\theta\sin\varphi - \frac{h}{2}\cos\theta\cos\varphi - (Z-z))F_{y4}\cos\theta
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
M_y = & -l_1 (F_{x1}\sin\theta\cos\varphi - F_{y1}\sin\varphi + F_{z1}\cos\theta\cos\varphi) \\
& - l_1 (F_{x2}\sin\theta\cos\varphi - F_{y2}\sin\varphi + F_{z2}\cos\theta\cos\varphi) \\
& + l_2 (F_{x3}\sin\theta\cos\varphi - F_{y3}\sin\varphi + F_{z3}\cos\theta\cos\varphi) \\
& + l_2 (F_{x4}\sin\theta\cos\varphi - F_{y4}\sin\varphi + F_{z4}\cos\theta\cos\varphi) \\
& - \frac{h}{2} (F_{x1}\cos\theta - F_{z1}\sin\theta) - \frac{h}{2} (F_{x2}\cos\theta - F_{z2}\sin\theta) \\
& - \frac{h}{2} (F_{x3}\cos\theta - F_{z3}\sin\theta) - \frac{h}{2} (F_{x4}\cos\theta - F_{z4}\sin\theta) \\
& - (-l_1\sin\theta + \frac{sb_1}{2}\cos\theta\sin\varphi - \frac{h}{2}\cos\theta\cos\varphi - (Z-z))(F_{x1}\cos\varphi - F_{y1}\sin\theta\sin\varphi) \\
& - (-l_1\sin\theta - \frac{sb_1}{2}\cos\theta\sin\varphi - \frac{h}{2}\cos\theta\cos\varphi - (Z-z))(F_{x2}\cos\varphi - F_{y2}\sin\theta\sin\varphi) \\
& - (-l_2\sin\theta - \frac{sb_2}{2}\cos\theta\sin\varphi - \frac{h}{2}\cos\theta\cos\varphi - (Z-z))(F_{x3}\cos\varphi - F_{y3}\sin\theta\sin\varphi) \\
& - (-l_2\sin\theta + \frac{sb_2}{2}\cos\theta\sin\varphi - \frac{h}{2}\cos\theta\cos\varphi - (Z-z))(F_{x4}\cos\varphi - F_{y4}\sin\theta\sin\varphi)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
M_z = & l_1(F_{x1}\sin\theta\sin\varphi + F_{y1}\cos\varphi + F_{z1}\cos\theta\sin\varphi) \\
& + l_1(F_{x2}\sin\theta\sin\varphi + F_{y2}\cos\varphi + F_{z2}\cos\theta\sin\varphi) \\
& - l_2(F_{x3}\sin\theta\sin\varphi + F_{y3}\cos\varphi + F_{z3}\cos\theta\sin\varphi) \\
& - l_2(F_{x4}\sin\theta\sin\varphi + F_{y4}\cos\varphi + F_{z4}\cos\theta\sin\varphi) \\
& - \frac{sb_1}{2}(F_{x1}\cos\theta + F_{z1}\sin\theta) + \frac{sb_1}{2}(F_{x2}\cos\theta + F_{z2}\sin\theta) \\
& + \frac{sb_2}{2}(F_{x3}\cos\theta + F_{z3}\sin\theta) - \frac{sb_2}{2}(F_{x4}\cos\theta + F_{z4}\sin\theta) \\
& + (-l_1\sin\theta + \frac{sb_1}{2}\cos\theta\sin\varphi - \frac{h}{2}\cos\theta\cos\varphi - (Z-z))(F_{x1}\sin\varphi + F_{y1}\sin\theta\cos\varphi) \\
& + (-l_1\sin\theta - \frac{sb_1}{2}\cos\theta\sin\varphi - \frac{h}{2}\cos\theta\cos\varphi - (Z-z))(F_{x2}\sin\varphi + F_{y2}\sin\theta\cos\varphi) \\
& + (l_2\sin\theta - \frac{sb_2}{2}\cos\theta\sin\varphi - \frac{h}{2}\cos\theta\cos\varphi - (Z-z))(F_{x3}\sin\varphi + F_{y3}\sin\theta\cos\varphi) \\
& + (l_2\sin\theta + \frac{sb_2}{2}\cos\theta\sin\varphi - \frac{h}{2}\cos\theta\cos\varphi - (Z-z))(F_{x4}\sin\varphi + F_{y4}\sin\theta\cos\varphi) \quad (3.8)
\end{aligned}$$

其中 l_1 為車體質心到前輪之長度， l_2 為車體質心到後輪之長度； sb_1 為車輛前輪輪距， sb_2 為車輛後輪輪距。 h 車輛高度， Z 為非集中質心座標上車體質心初始位置， z 為非集中質心座標上車體質心位置變化量。 F_{xi} 為集中質心座標上的平行車身縱向力， F_{yi} 為集中質心座標上的垂直車身側向力， F_{zi} 為集中質心座標上的正向力， $i=1$ 時為左側前輪， $i=2$ 時為右側前輪， $i=3$ 為右側後輪， $i=4$ 為左側後輪。在將對三個軸的旋轉角度與角速度當成車輛動態方程式的動態，如(3.9)式：

$$\bar{X}_1 = [\varphi \ \psi \ \theta \ \dot{\varphi} \ \dot{\psi} \ \dot{\theta}] \quad (3.9)$$

3.2.1 車輛直線運動

車輛直線運動的部分，在此是利用牛頓第二運動定律推導得知，如(3.10)式：

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}_v \mathbf{a}_x &= \mathbf{m}_v (\ddot{\mathbf{x}}^w - \dot{\mathbf{y}}^w \psi) = \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{xi} \\
\mathbf{m}_v \mathbf{a}_y &= \mathbf{m}_v (\ddot{\mathbf{y}}^w + \dot{\mathbf{x}}^w \psi) = \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{yi} \\
\mathbf{m}_v \mathbf{a}_z &= \mathbf{m}_v (\ddot{\mathbf{z}}) = \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{zi} - \mathbf{m}_v \mathbf{g}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

其中 \mathbf{m}_v 為車體質量， $\mathbf{a}_{x,y,z}$ 是在非集中質心座標上的三個方向上的加速度， g 為重力加速度。在此將非集中質心座標上的三方向位移， x^w, y^w, z^w 與速度當成車體動態方程式的狀態，如(3.11)式：

$$\bar{\mathbf{X}}_2 = [x^w \ y^w \ z^w \ \dot{x}^w \ \dot{y}^w \ \dot{z}^w] \tag{3.11}$$

3.3 非集中質量系統



車輛的非集中質量系統主要分為轉向系統、車胎系統、懸吊系統，在此小節將每個部份分開討論。

3.3.1 轉向系統

根據 Ackermann 轉向原理，車輛在轉向時為了保證車輛是繞著同一個圓心作旋轉，所以車輪轉動的角度內外側並不相同，所以 Ackermann 提出了內外輪轉角的不同，可以保證車輛在旋轉時為繞著同一圓心旋轉，如圖 3.4：

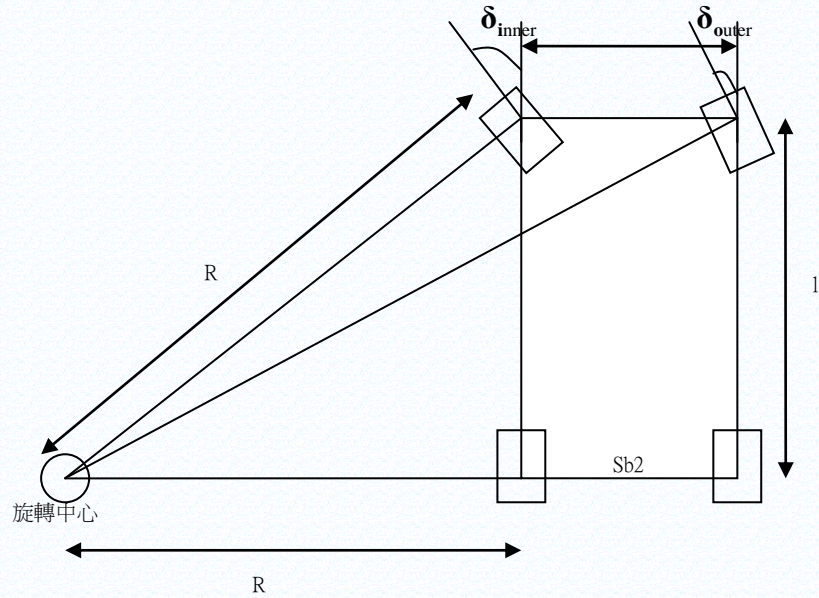


圖 3.4：Ackermann 轉向原理示意圖

觀察後發現，若要轉彎半徑相同，內側轉向角 δ_i 與外側轉向角 δ_o 必需滿足 (3.12) 式的條件，才會讓車輛在轉彎時保持相同的半徑。

$$\cot(\delta_{inner}) - \cot(\delta_{outer}) = \frac{sb_2}{l} \quad (3.12)$$

3.3.2 車胎系統

車胎為車輛與地面接觸時產生摩擦力的系統，此時產生的摩擦力會影響集中質心系統的運動，輪胎的自由體圖如圖 3.5：

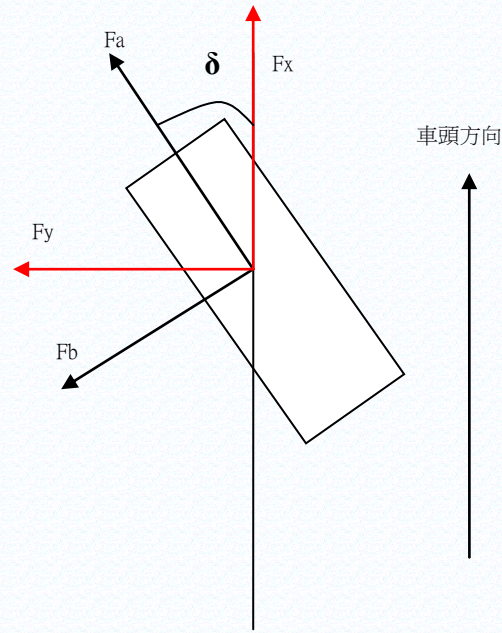


圖 3.5：輪胎自由體圖

依照向量的概念，將平行輪胎的力 F_a 與垂直輪胎的力 F_b 分解成平行車身的力 F_x 與垂直車身的力 F_y ，如(3.13)式：

$$\begin{aligned} F_{xi} &= F_{ai} \cos(\delta_i) - F_{bi} \sin(\delta_i) \\ F_{yi} &= F_{ai} \sin(\delta_i) + F_{bi} \cos(\delta_i) \end{aligned} \quad (3.13)$$

(3.13)式中平行輪胎的力 F_a 與垂直輪胎的力 F_b 是利用一組非線性的模型來描述，此模型是 Pacejka[9]所提出的“Magic formula”，在此非線性的輪胎模型平行輪胎的力 F_a 會與滑動比(Slip ratio)有一非線性的關係，在垂直輪胎的力 F_b 與側滑角(Slip angle)間也會有一非線性的關係存在，而輪胎所受之正向力 F_z 也會影響輪胎受力的大小。此模型如(3.14)式：

$$\begin{aligned} F_a &= D_x \sin\{C_x \tan^{-1}[B_x s_r - E_x (B_x s_r - \tan^{-1}(B_x s_r))]\} \\ F_b &= D_y \sin\{C_y \tan^{-1}[B_y \alpha - E_x (B_y \alpha - \tan^{-1}(B_y \alpha))]\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

其中 s_r 為滑動比， α 為側滑角， $B_{x,y}$ 、 $C_{x,y}$ 、 $D_{x,y}$ 、 $E_{x,y}$ 為輪胎參數。

在車輛行駛中，輪胎會承受負載使輪胎變形，此時輪胎的半徑就不會保持原來的半徑。形變量除了會與輪胎所受之正向力有關，也會跟輪胎胎壓，表面材質有關，在此就簡單假設輪胎有一彈力常數，當正向力越大，輪胎形變越大，如(3.15)式：

$$r_{ei} = r_i - \frac{F_{zi}}{K_{wheel}} \quad (3.15)$$

r_{ei} 為車輛輪胎的等效半徑； r_i 為車輛輪胎真實半徑； K_{wheel} 為輪胎彈力常數； F_{zi} 為輪胎所受之正向力。

側滑角 α 為輪胎轉動方向與速度方向之間的夾角，如(3.16)式，圖 3.6，此物理量會影響作用在輪胎上的側向力。

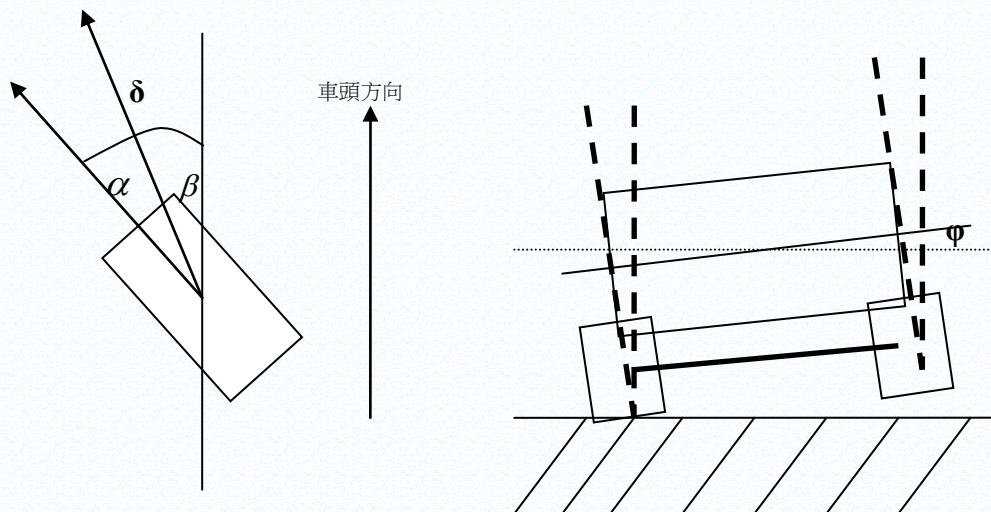


圖 3.6：輪胎側滑角示意圖(左)、轉向側傾示意圖(右)

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= \delta_i - \beta_i - k_i \phi \\
\beta_1 &= \tan^{-1}((\dot{y} + l_1 \dot{\psi})(\dot{x} - \frac{sb_1}{2} \dot{\psi})^{-1}) \\
\beta_2 &= \tan^{-1}((\dot{y} + l_1 \dot{\psi})(\dot{x} + \frac{sb_1}{2} \dot{\psi})^{-1}) \\
\beta_3 &= \tan^{-1}((\dot{y} - l_2 \dot{\psi})(\dot{x} + \frac{sb_2}{2} \dot{\psi})^{-1}) \\
\beta_4 &= \tan^{-1}((\dot{y} - l_2 \dot{\psi})(\dot{x} - \frac{sb_2}{2} \dot{\psi})^{-1})
\end{aligned} \tag{3.16}$$

其中 α_i 是第 i 個輪胎的側滑角， β_i 為速度方向與車身的夾角。另外側傾角的大小會壓迫輪胎或將輪胎抬起，進而影響側滑角，所以 k_i 是用來描述再車輛有側傾時，內外側輪胎測滑角與側傾角間的關係，如圖 3.6 的描述可以發現，車輛轉彎時會有一側傾角 ϕ 出現，此側傾角會影響輪胎的側滑角，此時右側輪的側滑角會因為 ϕ 為正值而變大，左側會因為 ϕ 為負值而減小。

滑動比 s_r 是用來描述輪胎前進速度與車輛前進速度的差值比，如(3.17)式：

$$\begin{aligned}
s_{ri} &= \frac{\mathbf{r}_{ei} \omega_i - V_i \cos \alpha_i}{\max\{\mathbf{r}_{ei} \omega_i, V_i \cos \alpha_i\}} \\
V_1 &= \sqrt{(\dot{x} - \frac{sb_1}{2} \dot{\psi})^2 + (\dot{y} + l_1 \dot{\psi})^2} \\
V_2 &= \sqrt{(\dot{x} + \frac{sb_1}{2} \dot{\psi})^2 + (\dot{y} + l_1 \dot{\psi})^2} \\
V_3 &= \sqrt{(\dot{x} + \frac{sb_2}{2} \dot{\psi})^2 + (\dot{y} - l_2 \dot{\psi})^2} \\
V_4 &= \sqrt{(\dot{x} - \frac{sb_2}{2} \dot{\psi})^2 + (\dot{y} - l_2 \dot{\psi})^2}
\end{aligned} \tag{3.17}$$

其中 V_i 為第 i 個輪胎的前進速度。

接著來看輪胎在縱向的受力情形。輪胎會受到引擎帶動而有一個加速的力矩，另一方面如果駕駛者踩煞車就會產生減速力矩，分析圖 3.7 的輪胎縱向自由體圖可以藉由力矩平衡推導出(3.18)式。

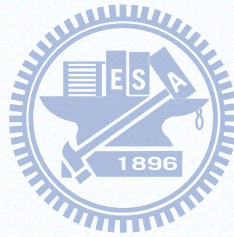
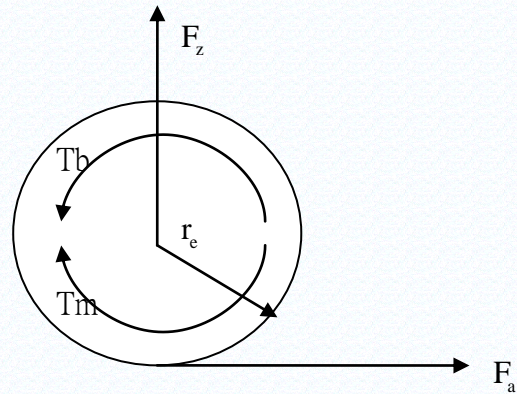


圖 3.7：輪胎縱向自由體圖

$$\mathbf{I}_w \dot{\omega}_i = (\mathbf{T}_m - \mathbf{T}_b) - \mathbf{r}_{ei} \mathbf{F}_{ai} \quad (3.18)$$

\mathbf{T}_m 為加速力矩， \mathbf{T}_b 為煞車力矩， \mathbf{I}_w 為輪胎轉動慣量， $\dot{\omega}_i$ 為第 i 個輪胎的轉動加速度。在此將四個輪胎的轉動速度當成車輛動態方程式的狀態之一，如式 (3.19)：

$$\bar{\mathbf{X}}_3 = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3 \ \omega_4] \quad (3.19)$$

3.3.3 懸吊系統

懸吊系統為連結車輛輪胎與車體集中質心的裝置，在此假設懸吊在車體集中質心與輪胎間是一個彈簧與阻尼的系統，如圖 3.8，其中彈簧被設計成一非線性彈簧，主要的目的是在於使用線性彈簧的話，有時候會因為轉向側傾角過大，而使懸吊的彈簧有太大的伸長量，一般正常的車輛是不會有彈簧無限延伸的情況出現，若使用此非線性彈簧，就能夠保證車輛在有翻覆現象時，被抬起方面的輪胎會在彈簧伸長到一定的長度後，因為彈力係數減小而不再伸長；反之另一側被壓縮的輪胎會因為彈簧被壓縮到極限而不會再減短，此非線性彈簧的設計就是直接限制了懸吊的伸長量，此限制就可以讓車輛在行駛中不會有使用線性彈簧時過大的翻覆現象，利用此非線性彈簧能使車輛模型更貼近真實的車輛。

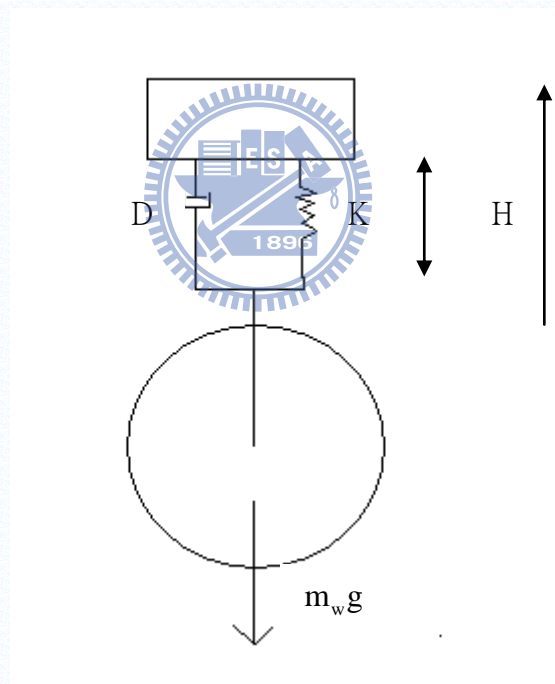


圖 3.8；懸吊系統自由體圖

在分析懸吊系統的力平衡方程式，可以堆導出(3.20)式：

$$\begin{aligned}
F_{zi} &= K_i H_i + D_i \dot{H}_i + m_w g \\
z &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 H_i \\
K_i &= C_1 e^{c_2(H_i - c_3)} \\
H_i &= \begin{cases} H_i, & \text{for } H_i \geq -m_w g / K_i \\ -m_w g / K_i, & \text{for } H_i \leq -m_w g / K_i \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

其中 C_1 、 C_2 、 C_3 為非線性彈簧係數， D 為阻泥係數， H 為彈簧伸長量， \dot{H} 為彈簧伸長速度， m_w 為車輛輪胎質量， F_{zi} 為正向力。彈簧的伸長量與伸長速度可以利用車體運動的狀態來求得，如(3.21)(3.22)式：

$$\begin{aligned}
H_1 &= -z + l_1 \sin\theta - \frac{sb_1}{2} \cos\theta \sin\varphi \\
H_2 &= -z + l_1 \sin\theta + \frac{sb_1}{2} \cos\theta \sin\varphi \\
H_3 &= -z - l_2 \sin\theta + \frac{sb_2}{2} \cos\theta \sin\varphi \\
H_4 &= -z - l_2 \sin\theta - \frac{sb_2}{2} \cos\theta \sin\varphi
\end{aligned} \tag{3.21}$$

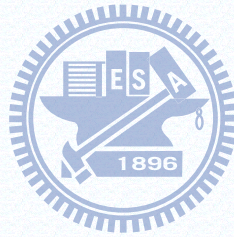
$$\begin{aligned}
\dot{H}_1 &= -\dot{z} + l_1 \dot{\theta} \cos\theta + \frac{sb_1}{2} (\dot{\theta} \sin\theta \sin\varphi - \dot{\varphi} \cos\theta \cos\varphi) \\
\dot{H}_2 &= -\dot{z} + l_1 \dot{\theta} \cos\theta - \frac{sb_1}{2} (\dot{\theta} \sin\theta \sin\varphi - \dot{\varphi} \cos\theta \cos\varphi) \\
\dot{H}_3 &= -\dot{z} - l_2 \dot{\theta} \cos\theta - \frac{sb_2}{2} (\dot{\theta} \sin\theta \sin\varphi - \dot{\varphi} \cos\theta \cos\varphi) \\
\dot{H}_4 &= -\dot{z} - l_2 \dot{\theta} \cos\theta + \frac{sb_2}{2} (\dot{\theta} \sin\theta \sin\varphi - \dot{\varphi} \cos\theta \cos\varphi)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

最後將彈簧的伸長量視為車輛動態方程式的狀態之一，如(3.23)式：

$$\bar{X}_4 = [H_1 \ H_2 \ H_3 \ H_4] \tag{3.23}$$

綜合以上的分系與推導，再把所有的狀態結合寫成一非線性動態方程式，如(3.24)式，其中輸入為 δ_{inner} ， \mathbf{T}_m ， \mathbf{T}_b 。

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{X}} &= [\bar{X}_1 \ \bar{X}_2 \ \bar{X}_3 \ \bar{X}_4]^T \\ \dot{\bar{\mathbf{X}}} &= \mathbf{f}(\bar{\mathbf{X}}, \delta_{\text{inner}}, \mathbf{T}_m, \mathbf{T}_b)\end{aligned}\tag{3.24}$$



第四章 摩擦力估測演算法

本章為此研究中的主要部份，分為輪胎受力的估測與車輛參數的估測。前半部會介紹摩擦力估測的演算法，在縱向力的部份是利用輪胎力矩平衡的公式來直接推得縱向力；側向力的部份會使用簡化的車輛動態模型或腳踏車模型來求解，求解模型的切換會依據轉向角的大小當成切換的依據；利用模型求解沒有辦法將所有輪胎個別的摩擦力解出，所以最後再使用輪胎摩擦力圓的特性來解得各個輪胎所受的側向力。在此摩擦力估測的演算法中，車輛模型的參數會對估測結果的有很大影響，所以在後半部的章節中會利用期望值最大化演算法(EM algorithm)來做參數估測。而最後會有各種不同的駕駛狀況下的摩擦力估測與不確定參數估測的模擬結果。完整流程圖如圖 4.1：

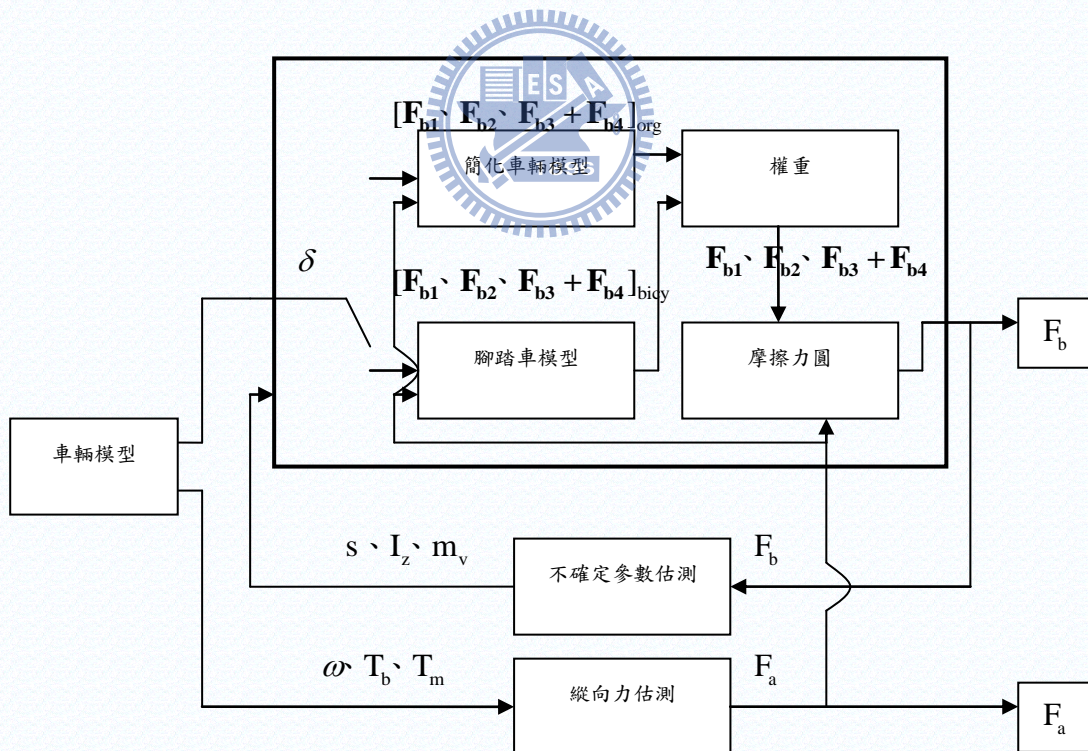


圖 4.1：摩擦力估測流程圖

4.1 摩擦力估測

4.1.1 縱向力估測

回顧(3.18)式，假設式中的煞車力矩、加速力矩、輪胎轉動速度都可以得知，將(3.18)式移項整理後，並將等效輪胎半徑用未形變前的輪胎半徑代入，可得(4.1)式：

$$\mathbf{F}_{ai} = \frac{(\mathbf{T}_m - \mathbf{T}_b) - \mathbf{I}_w \dot{\omega}_i}{r_i} \quad (4.1)$$

其中的轉動加速度項，可以透過速度項差分得知。 ω_i^+ 為此刻時間點的輪胎轉動速度， ω_i^- 為上一刻時間點的輪胎轉動速度， Δt 為取樣時間，則輪胎之轉動加速度可以用(4.2)式近似之：

$$\dot{\omega}_i = \frac{\omega_i^+ - \omega_i^-}{\Delta t} \quad (4.2)$$

將(4.2)式代入(4.1)式就可以得到(4.3)式的縱向力估測方程式：

$$\hat{\mathbf{F}}_{ai} = \frac{(\mathbf{T}_m - \mathbf{T}_b) - \mathbf{I}_{wi} \left(\frac{\omega_i^+ - \omega_i^-}{\Delta t} \right)}{r_i} \quad (4.3)$$

4.1.2 側向力估測

側向力的估測會與車輛集中質量的動態有關，首先建立描述車輛運動的簡化車體模型，此簡化模型忽略了車輛的俯仰跟側傾，只考慮車輛 X-Y 平面的運動，簡化車輛自由體圖如圖 4.2：

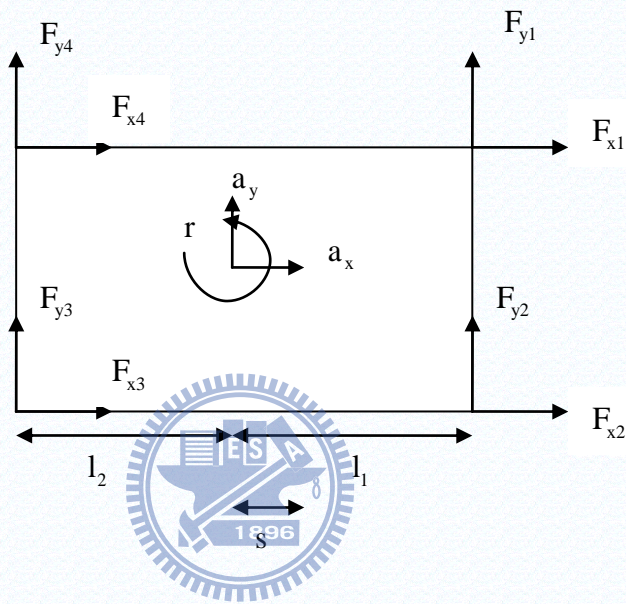


圖 4.2：簡化車輛自由體圖

依據市面上廣泛使用的三軸加速規，可以很容易的得知三個方向的加速度，而陀螺儀可以量測橫擺角速度，也可以使用全球定位系統(GPS)來判斷質心的位置與移動速度，以下將這些感測器可提供的資訊當成已知。

根據牛頓第二運動定律可以推得 X 方向與 Y 方向的直線運動方程式，如(4.4)式：

$$\begin{aligned} m\mathbf{a}_x &= \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{xi} \\ m\mathbf{a}_y &= \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{yi} \end{aligned} \tag{4.4}$$

再將(3.13)式中對輪胎的作用力代入(4.4)，並且假設後輪轉向角為零度，就可得(4.5)式：

$$\begin{aligned} m\mathbf{a}_x &= F_{a1}\cos(\theta_1) - F_{b1}\sin(\theta_1) + F_{a2}\cos(\theta_2) - F_{b2}\sin(\theta_2) + F_{a3} + F_{a4} \\ m\mathbf{a}_y &= F_{a1}\sin(\theta_1) + F_{b1}\cos(\theta_1) + F_{a2}\sin(\theta_2) + F_{b2}\cos(\theta_2) + F_{b3} + F_{b4} \end{aligned} \quad (4.5)$$

力矩平衡的部份只考慮橫擺的部份，可以根據圖(4.2)的有效作用力列出力矩平衡方程式，如(4.6)式：

$$\mathbf{I}_z \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{M}_z \quad (4.6)$$

其中 \mathbf{I}_z 為轉動慣量， s 為質心偏移，在此假設質心只有 x 方向的偏移，偏向車頭為正，偏向車尾為負， $\dot{\mathbf{r}}$ 為橫擺角加速度， \mathbf{M}_z 如下：

$$\mathbf{M}_z = (F_{y1} + F_{y2})(l_1 - s) - (F_{y3} + F_{y4})(l_2 + s) + (F_{x2} - F_{x1})\frac{sb_1}{2} + (F_{x3} - F_{x4})\frac{sb_2}{2} \quad (4.7)$$

將(3.13)(4.7)式代入(4.6)式整理得(4.8)式：

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_z \dot{\mathbf{r}} &= (F_{a1}\sin(\theta_1) + F_{b1}\cos(\theta_1) + F_{a2}\sin(\theta_2) + F_{b2}\cos(\theta_2))(l_1 - s) - (F_{b4} + F_{b3})(l_2 + s) \\ &+ (F_{a2}\cos(\theta_2) - F_{b2}\sin(\theta_2) - F_{a1}\cos(\theta_1) + F_{b1}\sin(\theta_1))\frac{sb_1}{2} + (F_{a3} - F_{a4})\frac{sb_2}{2} \end{aligned} \quad (4.8)$$

(4.5)(4.8)式中的縱向力 F_{ai} 已經由輪胎的力矩平衡求得，可代入(4.3)的結果，另外縱向加速度 \mathbf{a}_x 與側向加速度 \mathbf{a}_y 為已知，橫擺角加速度 $\dot{\mathbf{r}}$ 可以利用橫擺角速度差分求得，移項整理成一矩陣形式，如(4.9)：

$$\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{F}}_b = \mathbf{b} \quad (4.9)$$

其中 $\bar{\mathbf{A}}$, $\bar{\mathbf{F}}_b$, \mathbf{b} 如下:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta_1) & -\sin(\theta_2) & 0 & 0 \\ \cos(\theta_1) & \cos(\theta_2) & 1 & 1 \\ \cos(\theta_1)(l_1 - s) + \sin(\theta_1)\frac{sb_1}{2} & \cos(\theta_2)(l_1 - s) - \sin(\theta_2)\frac{sb_2}{2} & -(l_2 + s) & -(l_2 + s) \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{F}}_b = [\hat{\mathbf{F}}_{b1} \hat{\mathbf{F}}_{b2} \hat{\mathbf{F}}_{b3} \hat{\mathbf{F}}_{b4}]^T$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} m\mathbf{a}_x - \hat{\mathbf{F}}_{a1}\cos(\theta_1) - \hat{\mathbf{F}}_{a2}\cos(\theta_2) - \hat{\mathbf{F}}_{a3} - \hat{\mathbf{F}}_{a4} \\ m\mathbf{a}_y - \hat{\mathbf{F}}_{a1}\sin(\theta_1) - \hat{\mathbf{F}}_{a2}\sin(\theta_2) \\ \mathbf{I}_z\dot{r} - (\hat{\mathbf{F}}_{a1}\sin(\theta_1) + \hat{\mathbf{F}}_{a2}\sin(\theta_2))(-l_1 + s) - \frac{sb_1}{2}(\hat{\mathbf{F}}_{a2}\cos(\theta_2) - \hat{\mathbf{F}}_{a1}\cos(\theta_1)) - \frac{sb_2}{2}(\hat{\mathbf{F}}_{a3} - \hat{\mathbf{F}}_{a4}) \end{bmatrix}$$

(4.9)的線性方程式中未知數比有效的方程式來的多,但是觀察可以發現 $\bar{\mathbf{A}}$ 矩陣最後兩行相同,所以可以將(4.9)式改寫成(4.10)式的形式:

$$\mathbf{A}\mathbf{F}_b = \mathbf{b} \quad (4.10)$$

其中 \mathbf{A} 、 \mathbf{F}_b 如下:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\sin(\theta_1) & -\sin(\theta_2) & 0 \\ \cos(\theta_1) & \cos(\theta_2) & 1 \\ \cos(\theta_1)(l_1 - s) + \sin(\theta_1)\frac{sb_1}{2} & \cos(\theta_2)(l_1 - s) - \sin(\theta_2)\frac{sb_2}{2} & -(l_2 + s) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_b = [\hat{\mathbf{F}}_{b1} \hat{\mathbf{F}}_{b2} \hat{\mathbf{F}}_{b3} + \hat{\mathbf{F}}_{b4}]^T = [\hat{\mathbf{F}}_{b1} \hat{\mathbf{F}}_{b2} \hat{\mathbf{F}}_{\text{rear}}]^T$$

(4.10)中 A 矩陣裡的元素跟車輛的轉向角有關，當轉向角很小或轉向角很小時，A 矩陣中的第一行與第二行會變的非常相近或相等，此時 A 矩陣成為一奇異矩陣，造成(4.10)所解出的側向力不正確，所以在小角度時要分開討論。當轉向角較大時，(4.10)為滿秩的線性聯例方程式，左右兩邊同時乘上 A^{-1} 就可以求得 F_b 之值。

當轉向角很小時，假設 $\sin(\theta) \approx \theta \approx 0$ ， $\cos(\theta) \approx 1$ ，內外輪轉角相等的情況下來簡化(4.10)式，如(4.11)式。

$$\tilde{A}\tilde{F}_b = \tilde{b} \quad (4.11)$$

其中 \tilde{A} ， \tilde{F}_b ， \tilde{b} 如下：



$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ (l_1 - s) & -(l_2 + s) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{b} = \begin{bmatrix} ma_y \\ I_z \dot{r} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{F}_b = [F_{b1} + F_{b2} \quad F_{b3} + F_{b4}]^T = [F_{\text{front}} \quad F_{\text{rear}}]^T$$

(4.11)式中已經假設車輛的車寬為零，左右輪的力都作用在同一個點上，若將此模型的自由體圖畫出來，就可以發現這是一般常用的腳踏車模型，在腳踏車模型中前後輪的受力會假設成車輛前後側的左右輪受力的總和，所以在(4.11)式中的 \tilde{F}_b 項也反映了此假設，如圖 4.3。

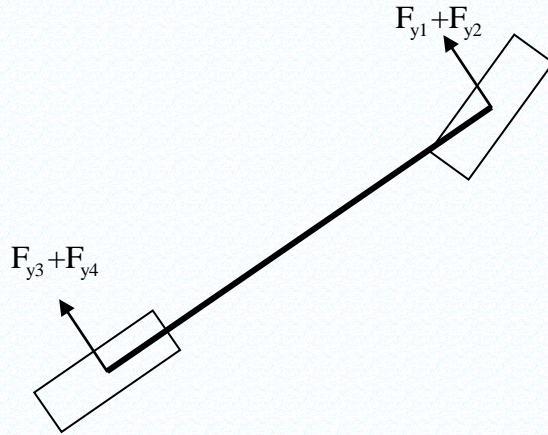


圖 4.3：腳踏車模型自由體圖

通常左右輪的側向力會不同主要是側滑角與承受負載的不同所造成的影響，但是車輛在小角度轉向時，車輛側傾與俯仰運動並不明顯，所以左右輪所承受的負載與側滑角相近，所以在此假設小角度時左右輪所受側向力相同，就可將(4.11)式中解出的側向力總和平均在左右輪上，如(4.12)式：

$$\begin{aligned} F_{b1} = F_{b2} &= \frac{F_{\text{front}}}{2} \\ F_{b3} = F_{b4} &= \frac{F_{\text{rear}}}{2} \end{aligned} \quad (4.12)$$

模型切換的條件可以利用 A 矩陣的條件數(Condition number)作為切換依據，條件數的定義為一矩陣中的最大奇異值與最小奇異值的比值，如(4.13)式，此值越大代表此方程式越不容易求解，反之則是容易得到解答。

$$\kappa(\mathbf{A}) = \frac{\sigma_{\max}(\mathbf{A})}{\sigma_{\min}(\mathbf{A})} \quad (4.13)$$

將輪胎內側轉角對 A 矩陣的條件數作圖，可以得到圖 4.4 的結果，當車輛轉

向角很小時，A 矩陣的條件數很大，隨著角度的增大 A 矩陣的條件數會慢慢減小，為了避免模型切換時估測出的摩擦力有不連續的現象，所以利用條件數當成權重來平滑估測的結果。

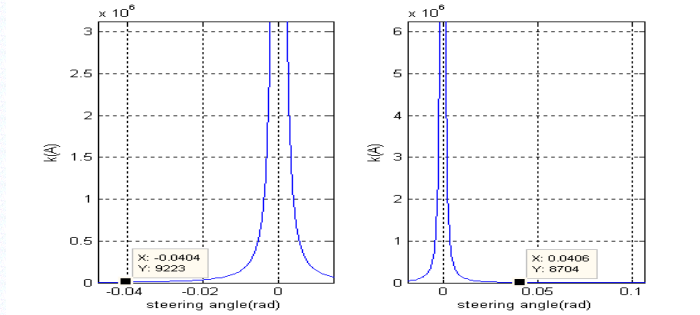


圖 4.4：A 矩陣條件值示意圖

在此假設兩個權重，一個是隨著轉向角改變的 A 矩陣條件數，另外一個是固定角度下的 A 矩陣條件數，此權重的選擇會決定比較相信簡化車輛模型的解，或是相信腳踏車模型的解。



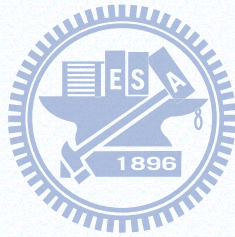
$$\begin{aligned}
 \mathbf{g}_1 &= \frac{1}{\kappa(\mathbf{A})} \\
 \mathbf{g}_2 &= \frac{1}{\kappa(\mathbf{A}_{\delta=\text{constant}})} \\
 \mathbf{g}'_1 &= \frac{\mathbf{g}_1}{\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2} \\
 \mathbf{g}'_2 &= \frac{\mathbf{g}_2}{\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2} \\
 \hat{\mathbf{F}}_b &= \mathbf{g}'_1 \mathbf{F}_{b,\text{org}} + \mathbf{g}'_2 \mathbf{F}_{b,\text{bicy}} \\
 \mathbf{F}_{b,\text{org}} &= \left[\hat{\mathbf{F}}_{b1} \ \hat{\mathbf{F}}_{b2} \ \hat{\mathbf{F}}_{b3} + \hat{\mathbf{F}}_{b4} \right]_{\text{org}}^T \\
 \mathbf{F}_{b,\text{org}} &= \left[\hat{\mathbf{F}}_{b1} \ \hat{\mathbf{F}}_{b2} \ \hat{\mathbf{F}}_{b3} + \hat{\mathbf{F}}_{b4} \right]_{\text{bicy}}^T
 \end{aligned}$$

(4.14)

(4.14)中的 \mathbf{g}'_1 與 \mathbf{g}'_2 是正規化(normalize)後的權重， $\mathbf{F}_{b,\text{org}}$ 為簡化車輛模型解出

的側向力，也就是(4.10)解出的側向力， $F_{b,bicy}$ 為腳踏車模型解出的側向力，為(4.11)(4.12)解出的側向力。

權重 g_1 的值會隨著轉向角的不同而有所改變，當轉向角越小時，A 矩陣的條件數越大，而權重 g_1 就越小，反之轉向角越大時，A 矩陣的條件數越小，權重 g_1 就越大。而相互比較的權重 g_2 選在條件值較大的地方，原因是因為在轉向角大時，簡化車輛模型解出來的摩擦力遠比腳踏車模型解出來的準確，此假設會讓 g_1 接近於一， g_2 接近於零，也就是說車輛轉向角大時會相信簡化車輛模型解出的側向力；反之小角度時 g_1 、 g_2 與角度大時的結果剛好相反，也就是說轉向角小時比較相信腳踏車模型的解。



4.1.3 摩擦力圓

4.1.2 節中利用兩種車輛模型皆無法解出後輪輪胎的個別的側向力，所以在此引入輪胎本身具有的特性之一，也就是摩擦力圓的概念，此摩擦力圓就是在描述輪胎在轉向時，縱向力與側向力間的關係，此特性可以用來求解輪胎個別的摩擦力。

依照摩擦力的定理，任何作用在輪胎上的側向力與縱向力都必定滿足摩擦力圓的限制，如(4.15)式，亦即輪胎的側向力與縱向力是互相牽制的，換句話說就是輪胎與地面間接觸的水平方向合力，都只會落在摩擦力圓內，如圖 4.4：

$$\left(\frac{F_x}{F_x}\right)^2 + \left(\frac{F_y}{F_y}\right)^2 = 1 \quad (4.15)$$

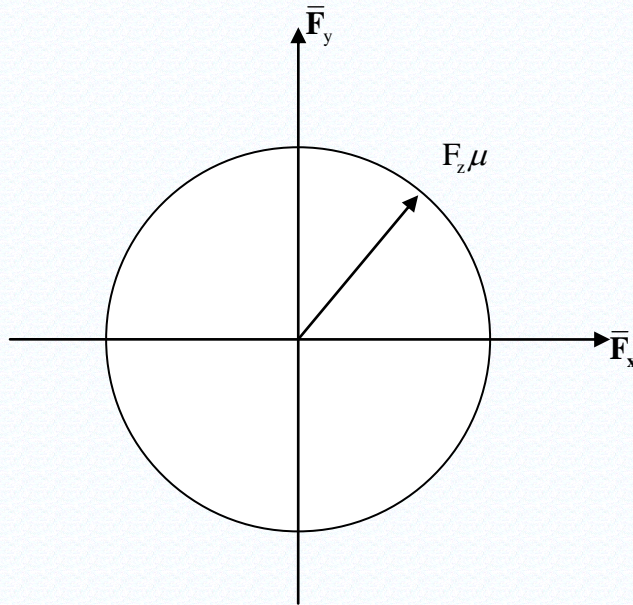


圖 4.5：摩擦力圓示意圖

其中 \bar{F}_x 、 \bar{F}_y 為輪胎能提供的最大最縱向與側向摩擦力，就是指輪胎只進行完全直線的移動或是完全側向的移動時，地面能提供給輪胎最大的摩擦力。最大縱向力會與負載、滑動比、地面摩擦係數有關，而最大側向力會與負載、側滑角、地面摩擦係有關，如(4.16)式：

$$\begin{aligned} \bar{F}_x &= f_1(s_r, F_z, \mu) \\ \bar{F}_y &= f_2(\alpha, F_z, \mu) \end{aligned} \tag{4.16}$$

首先假設車輛的四個輪胎都是同時進入相同的路面，所以接觸到的地面摩擦係數 μ 皆相同，也就是說最大縱向力與最大側向力可以忽略 μ 的影響。根據正向力與側滑角，與正向力與滑動比的關係圖，見圖 2.8，可以發現在線性區時，正向力的影響並不大，所以正向力的比值可以利用相似三角形的概念，利用側滑角與滑動率的比值來近似，如圖 4.5。

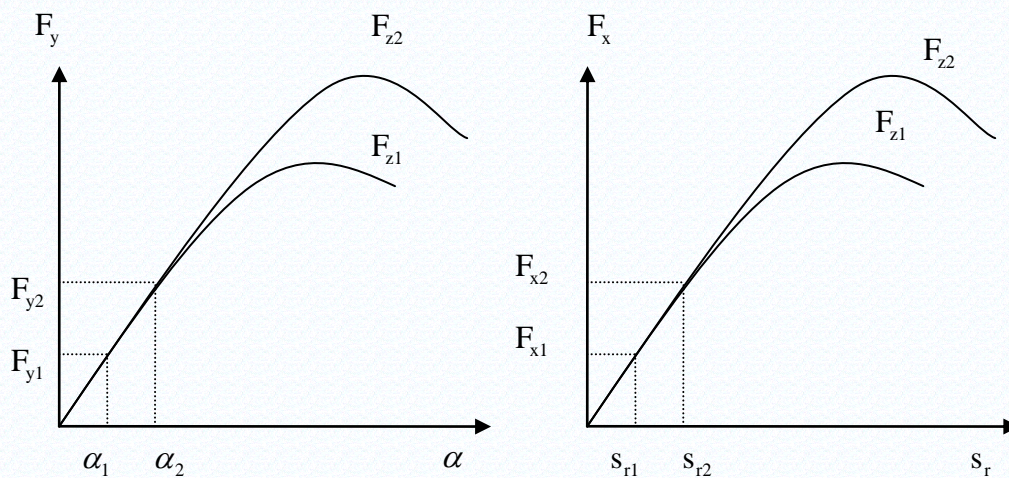


圖 4.6：(左)側滑角與最大側向力與正向力之關係圖、(右)滑動比與最大縱向力與正向力之關係圖

一般轎車重心較低，故行駛時，側傾效應會比俯仰效應來的明顯，所以在此假設前後輪的最大縱向力相同，又根據圖 4.5 中線性區中的比例關係，將四個輪胎的最大縱向力與最大側向力做(4.17)式的假設，目的是為了減少變數的數目，目前加上摩擦力圓的最大縱向力與最大側向力後，再加上未知的輪胎側向力，總共有 12 個變數，但是只有 7 條有效方程式，(4.17)的假設可以將有效方程式增加到 13 條，加上利用橢圓聯立方程式的解題技巧，就可以將所有的未知變數解出。

$$\begin{aligned}
\bar{F}_{a2} &= p_1 \bar{F}_{a1} \\
\bar{F}_{a3} &= p_2 \bar{F}_{a4} \\
\bar{F}_{b2} &= p_3 \bar{F}_{b1} \\
\bar{F}_{b3} &= p_4 \bar{F}_{b4} \\
\bar{F}_{a2} &= \bar{F}_{a3} \\
\bar{F}_{a1} &= \bar{F}_{a4}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

其中 p_1 為前輪左右輪的滑動比的比值， p_2 為後輪左右輪的滑動比的比值， p_3 為前側左右輪的側滑角比值， p_4 為後側左右輪的側滑角比值，如(4.48)式：

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{\frac{r_2 \omega_2 - V_2 \cos \alpha_2}{\max\{r_2 \omega_2, V_2 \cos \alpha_2\}}}{\frac{r_1 \omega_1 - V_1 \cos \alpha_1}{\max\{r_1 \omega_1, V_1 \cos \alpha_1\}}} \\
p_2 &= \frac{\frac{r_3 \omega_3 - V_3 \cos \alpha_3}{\max\{r_3 \omega_3, V_3 \cos \alpha_3\}}}{\frac{r_1 \omega_1 - V_1 \cos \alpha_1}{\max\{r_1 \omega_1, V_1 \cos \alpha_1\}}} \\
V_2 &= \sqrt{\left(\dot{x} + \frac{sb_1}{2} \dot{\psi}\right)^2 + \left(\dot{y} + (l_1 - s) \dot{\psi}\right)^2} \\
V_1 &= \sqrt{\left(\dot{x} - \frac{sb_1}{2} \dot{\psi}\right)^2 + \left(\dot{y} + (l_1 - s) \dot{\psi}\right)^2} \\
V_3 &= \sqrt{\left(\dot{x} + \frac{sb_2}{2} \dot{\psi}\right)^2 + \left(\dot{y} - (l_2 + s) \dot{\psi}\right)^2} \\
V_4 &= \sqrt{\left(\dot{x} - \frac{sb_2}{2} \dot{\psi}\right)^2 + \left(\dot{y} - (l_2 + s) \dot{\psi}\right)^2} \\
p_3 &= \frac{\delta_2 - \tan^{-1}\left(\frac{(\dot{y} + (l_1 - s) \dot{\psi})(\dot{x} - \frac{sb_1}{2} \dot{\psi})^{-1}}{1}\right)}{\delta_1 - \tan^{-1}\left(\frac{(\dot{y} + (l_1 - s) \dot{\psi})(\dot{x} + \frac{sb_1}{2} \dot{\psi})^{-1}}{1}\right)} \\
p_4 &= \frac{-\tan^{-1}\left(\frac{(\dot{y} - (l_2 + s) \dot{\psi})(\dot{x} + \frac{sb_2}{2} \dot{\psi})^{-1}}{1}\right)}{-\tan^{-1}\left(\frac{(\dot{y} - (l_2 + s) \dot{\psi})(\dot{x} - \frac{sb_2}{2} \dot{\psi})^{-1}}{1}\right)}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

(4.18)式的側滑角忽略了(3.16)式的側傾對側滑角影響，主要是因為在側傾角不大時，此項的影響很小，所以在此不列入考慮。

有了以上這些關係後，就可以分析四個輪胎的摩擦力圓特性，先將四個輪胎的摩擦力圓列出，如(4.19)式：

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{F_{a1}}{F_{a1}}\right)^2 + \left(\frac{F_{b1}}{F_{b1}}\right)^2 &= 1 \\
 \left(\frac{F_{a2}}{F_{a2}}\right)^2 + \left(\frac{F_{b2}}{F_{b2}}\right)^2 &= 1 \\
 \left(\frac{F_{a3}}{F_{a3}}\right)^2 + \left(\frac{F_{b3}}{F_{b3}}\right)^2 &= 1 \\
 \left(\frac{F_{a4}}{F_{a4}}\right)^2 + \left(\frac{F_{b4}}{F_{b4}}\right)^2 &= 1
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

藉由先前已解得的左右輪側向力與縱向力可以利用橢圓聯立方程式求解。假設左前輪的最大摩擦力如(4.20)式，並且代入右前輪的摩擦力圓關係式，可以整理成(4.21)式：

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{F_{a1}} &= \frac{1}{F_{a1}} \sin(\xi) \\
 \frac{1}{F_{b1}} &= \frac{1}{F_{b1}} \cos(\xi)
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}
 \sin^2(\xi) + \cos^2(\xi) &= 1 \\
 \frac{1}{p_1^2} \left(\frac{F_{a2}}{F_{a1}}\right)^2 \sin^2(\xi) + \frac{1}{p_3^2} \left(\frac{F_{b2}}{F_{b1}}\right)^2 \cos^2(\xi) &= 1
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

(4.21)式中左前輪摩擦力圓成為三角恆等式，右前輪的部份可以加以整理得到(4.22)式的結果，代入(4.20)式後就可解得左前輪的最大側向力與最大縱向力。

$$\xi = \cos^{-1} \left(\pm \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{p_1^2} \left(\frac{F_{a2}}{F_{a1}} \right)^2}{\left(\frac{1}{p_3^2} \left(\frac{F_{b2}}{F_{b1}} \right)^2 - \frac{1}{p_1^2} \left(\frac{F_{a2}}{F_{a1}} \right)^2 \right)}} \right) \quad (4.22)$$

$$\bar{F}_{a1} = \frac{F_{a1}}{\sin \left(\cos^{-1} \left(\pm \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{p_1^2} \left(\frac{F_{a2}}{F_{a1}} \right)^2}{\left(\frac{1}{p_3^2} \left(\frac{F_{b2}}{F_{b1}} \right)^2 - \frac{1}{p_1^2} \left(\frac{F_{a2}}{F_{a1}} \right)^2 \right)}} \right) \right)} \quad (4.23)$$

$$\bar{F}_{b1} = \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{p_1^2} \left(\frac{F_{a2}}{F_{a1}} \right)^2}{\left(\frac{1}{p_3^2} \left(\frac{F_{b2}}{F_{b1}} \right)^2 - \frac{1}{p_1^2} \left(\frac{F_{a2}}{F_{a1}} \right)^2 \right)}}$$

根據(4.17)式的假設，可以依照左右輪最大摩擦力的比值關係將後輪的摩擦力圓整理成(4.23)式的形式：

$$\left(\frac{F_{b3}}{p_3 \bar{F}_{b4}} \right) = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{F_{a3}}{p_1 \bar{F}_{a1}} \right)^2} \quad (4.23)$$

$$\left(\frac{F_{b4}}{\bar{F}_{b4}} \right) = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{F_{a4}}{\bar{F}_{a1}} \right)^2}$$

將(4.23)式中兩是相除可得(4.24)式：

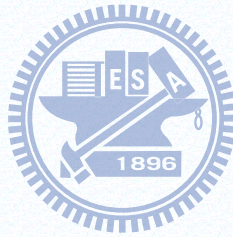
$$F_{b3} = F_{b4} p_3 \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{F_{a3}}{p_1 \bar{F}_{a1}} \right)^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{F_{a4}}{\bar{F}_{a1}} \right)^2}} \quad (4.24)$$

(4.24)式表示了後輪左右輪的比值，再與之前利用車輛動態方程式解出的後輪側向力合力，可以整理出(4.25)式，此式就為後輪個別的側向力，

$$F_{b4} = \frac{F_{\text{rear}}}{\left(1 + p_3 \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{F_{a3}}{p_1 \bar{F}_{a1}} \right)^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{F_{a4}}{\bar{F}_{a1}} \right)^2}} \right)} \quad (4.25)$$

$$F_{b3} = F_{\text{rear}} - F_{b4}$$

以上就是每個輪胎個別所受的側向力與縱向力。



4.2 參數估測

在 4.1 的摩擦力估測演算法中，利用了車輛模型來做摩擦力的估測，方程式中有許多是車輛本身的參數，當車體的參數準確時，摩擦力的估測就會很準確，但是當參數不準時就會對估測的準確性有影響，所以在此會對車輛的參數做參數估測，以確保摩擦力估測演算法的強健性。

在此定義不確定的參數為車體質量 m_v ，一般車輛行駛時，會有乘載數的不同，這時車輛除了本身的質量外，還會再增加乘載的質量，再來就是車體的轉動慣量 I_z 與質心偏移量 s ，這兩者會互相牽連，是因為在推算轉動慣量時，會定義質心的位置，再利用(4.26)式計算轉動慣量，(4.26)為一般 n 值點系統的轉動慣量計算方式，其中的 r 為質點到質心的位置，因此質心位置的改變，會造成 r 的改變，轉動慣量也會跟著改變。

車體質量，轉動慣量，質心位置，這三個參數是在一般車輛行駛狀態中較容易被改變的參數，所以在此對這三個參數做估測。

$$\mathbf{I} = \sum_{i=1}^n \mathbf{m}_i \mathbf{r}_i^2 \quad (4.26)$$

本研究會利用期望值最大化演算法[23](Expectation-Maximization algorithm)來做未知參數的估測，此演算法是透過機率模型來尋找最大相似值的演算法，此演算法有兩個步驟，分別是期望值計算(E-step)與最大化(M-step)，在 E-step 中會利用 M-step 求得的參數來估測狀態，而在 M-step 中會利用 E-step 所求得的狀態來估測未知的參數，以此兩個步驟互相疊代，如圖 4.6，最後狀態與參數都會收斂到一定的值。

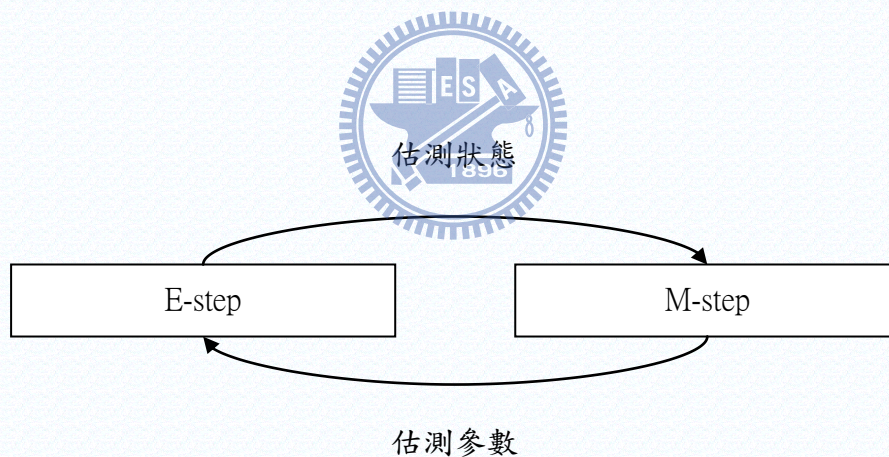


圖 4.7：期望值最大化演算法示意圖

4.2.1 E-step

在 E-step 中將使用 Kalman[24]所提出的卡爾曼濾波器(Kalman Filter)來進行未知狀態的估測，卡爾曼濾波器是基於時域的觀察器(Observer)，架構圖如圖 4.7，卡爾曼濾波器可以濾除系統過程中的高斯雜訊(Gaussian noise)與量測狀態的高斯雜訊，並且得知未知的狀態。

在此利用卡爾曼濾波器進行 E-Step 的步驟為一近似的結果，因為 E-Step 需要使用所有的資料來做狀態估測，亦即如果觀察到輸出 $y(k), y(k-1), \dots, y(k-N)$ ，則狀態估測狀態 $x(t)$ 在 $k-N \leq t < k$ 時，需計算條件期望值 $E[x(t) | y(k-N), \dots, y(k)]$ 。但是卡爾曼濾波器是計算條件期望值 $E[x(t) | y(1), \dots, y(t)]$ ，所以在此使用卡爾曼濾波器只是近似的結果。

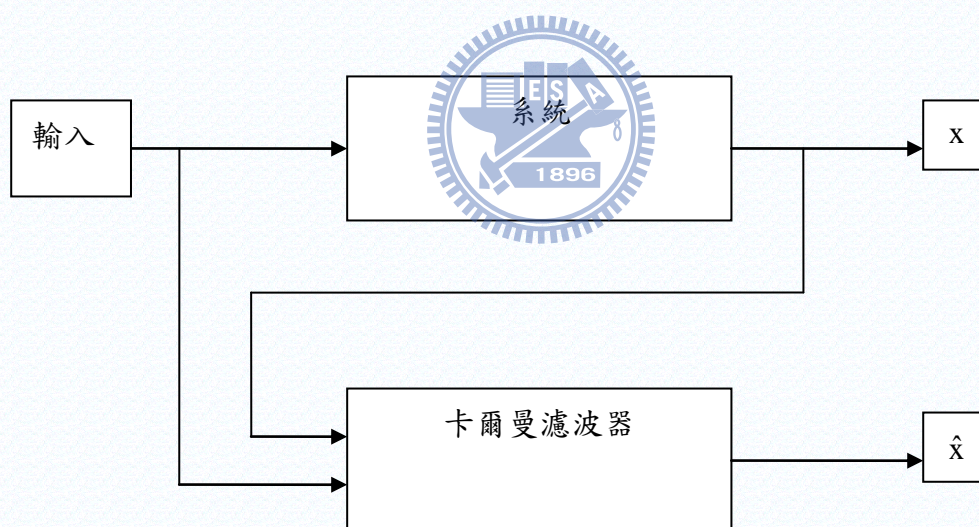


圖 4.8：卡爾曼濾波器示意圖

先將(4.10)式寫成參數未知的線性方程式，以便參數估測，如(4.27)式， λ 為未知的參數， F^s 為 4.1 節中解出來的摩擦力，移項後可得(4.27)式：

$$C\lambda = F^s \quad (4.27)$$

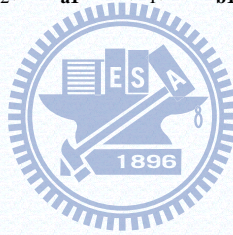
其中 \mathbf{C} 、 λ 、 \mathbf{F}^s 如下：

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_x & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{a}_y & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dot{r} & \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{yi} \end{bmatrix}$$

$$\lambda = [\mathbf{m}_v \quad \mathbf{I}_z \quad s]^T$$

$$\mathbf{F}^s = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{a1} \cos(\theta_1) - \mathbf{F}_{b1} \sin(\theta_1) + \mathbf{F}_{a2} \cos(\theta_2) - \mathbf{F}_{b2} \sin(\theta_2) + \mathbf{F}_{a3} + \mathbf{F}_{a4} \\ \mathbf{F}_{a1} \sin(\theta_1) + \mathbf{F}_{b1} \cos(\theta_1) + \mathbf{F}_{a2} \sin(\theta_2) + \mathbf{F}_{b1} \cos(\theta_2) + \mathbf{F}_{b3} + \mathbf{F}_{b4} \\ (\mathbf{F}_{a1} \sin(\theta_1) + \mathbf{F}_{b1} \cos(\theta_1) + \mathbf{F}_{a2} \sin(\theta_2) + \mathbf{F}_{b1} \cos(\theta_2))(\mathbf{l}_1) - (\mathbf{F}_{b4} + \mathbf{F}_{b3})(\mathbf{l}_2) \dots \\ + (\mathbf{F}_{a2} \cos(\theta_2) - \mathbf{F}_{b2} \sin(\theta_2) - \mathbf{F}_{a1} \cos(\theta_1) + \mathbf{F}_{b1} \sin(\theta_1)) \frac{\mathbf{sb}_1}{2} + (\mathbf{F}_{a3} - \mathbf{F}_{a4}) \frac{\mathbf{sb}_2}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{xi} \\ \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{yi} \\ \mathbf{M}_z |_{s=0} \end{bmatrix}$$



將欲估測的狀態 \mathbf{F}^s 寫成狀態空間的形式，如(4.28)式：

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_k^f &= \mathbf{M}\mathbf{F}_{k-1}^f + \mathbf{N}\mathbf{F}^s + \mathbf{w} \\ \mathbf{F}_k^e &= \mathbf{H}\mathbf{F}_k^f + \mathbf{v} \end{aligned} \tag{4.28}$$

\mathbf{w} : 過程雜訊(process noise)

\mathbf{v} : 量測雜訊(measurement noise)

\mathbf{F}_k^f : 動態方程式的狀態

\mathbf{F}_k^e : 動態方程式的輸出

$\mathbf{M} : \text{diag}([\sigma \ \sigma \ \sigma])$

$\mathbf{N} : \text{diag}([1-\sigma \ 1-\sigma \ 1-\sigma])$

$\mathbf{H} : \mathbf{I}_{3 \times 3}$

其中 σ 為一權重，此權重是決定估測結果是比較相信前一時刻的估測結果或是相信估測演算法估測出來的結果，增加此權重可以使此動態方程式有低通濾波器的效果，主要是可以避免卡爾曼濾波器的估測有過大的跳動，使估測有較為平滑的結果。

接下來就是利用卡爾曼濾波器的遞迴方式求解此線性系統在高斯雜訊下的最小平均平方誤差(minimum mean square error)解，首先是狀態的預測，如(4.29)式：



$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{k|k-1}^f &= \mathbf{M}\mathbf{F}_{k-1|k-1}^f + \mathbf{N}\mathbf{F}_{k-1|k-1}^s \\ \mathbf{P}_{k|k-1} &= \mathbf{M}_k\mathbf{P}_{k-1|k-1}\mathbf{M}_k^T + \mathbf{Q}_k\end{aligned}\quad (4.29)$$

其中 \mathbf{P}_k 為第 k 點的協方差矩陣(covariance matrix)， \mathbf{Q}_k 為過程雜訊的協方差矩陣， $\mathbf{Q}_k = E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T]$ ，此步驟為預測，也就是利用 $\mathbf{F}_{k-1|k-1}^f$ 預測 $\mathbf{F}_{k|k-1}^f$ 之值，與利用 $\mathbf{P}_{k-1|k-1}$ 預測 $\mathbf{P}_{k|k-1}$ 的協方差矩陣。接下來就是狀態的更新，如(4.30)式。

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{y}}_k &= \mathbf{z}_k - \mathbf{F}_k^e \\
\mathbf{s}_k &= \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \\
\mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \mathbf{s}_k^{-1} \\
\mathbf{F}_{k|k}^f &= \mathbf{F}_{k|k-1}^f + \mathbf{K}_k \tilde{\mathbf{y}}_k \\
\mathbf{P}_{k|k} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

其中 \mathbf{z}_k 為第 k 點量測的狀態， \mathbf{R}_k 為第 k 點量測雜訊的協方差矩陣，

$\mathbf{R}_k = E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T]$ ， \mathbf{K}_k 為第 k 點的卡爾曼增益。

此步驟是利用系統的輸出來修正預測的狀態，也就是將 $\mathbf{F}_{k|k-1}^f$ 修正為 $\mathbf{F}_{k|k}^f$ ， $\mathbf{P}_{k|k-1}$ 修正為 $\mathbf{P}_{k|k}$ 。以此預測與更新的相互疊代，就可使卡爾曼濾波器達到狀態估測的效果。



4.2.2 M-step

在 M-step 中，主要是對目標 $\log p(\mathbf{x}, \mathbf{z} | \lambda)$ 做最大化， \mathbf{z} 為量測資訊， \mathbf{x} 為非量測資訊， λ 為待定參數。此研究中 \mathbf{z} 為 \mathbf{F}^e ， \mathbf{x} 為 \mathbf{F}^f ， $p(\mathbf{x}, \mathbf{z} | \lambda)$ 為知道代定參數下，量測資訊與非量測資訊的機率分佈。

首先將相似值拆開，如(4.31)式：

$$\begin{aligned}
& p(\mathbf{F}_{1:k}^e, \mathbf{F}_{1:k}^f | \lambda) \\
&= p(\mathbf{F}_k^e | \mathbf{F}_{1:k}^f, \mathbf{F}_{1:k-1}^e, \lambda) p(\mathbf{F}_{1:k}^f, \mathbf{F}_{1:k-1}^e | \lambda) \\
&= p(\mathbf{F}_k^e | \mathbf{F}_{1:k}^f, \mathbf{F}_{1:k-1}^e, \lambda) p(\mathbf{F}_k^f | \mathbf{F}_{1:k-1}^f, \mathbf{F}_{1:k-1}^e, \lambda) p(\mathbf{F}_{1:k-1}^e, \mathbf{F}_{1:k-1}^f | \lambda)
\end{aligned} \tag{4.31}$$

觀察(4.31)式可以發現此式具有遞迴的特性，在此可以引入空間狀態模型 (state space model) 來描述此特性，如圖 4.8：

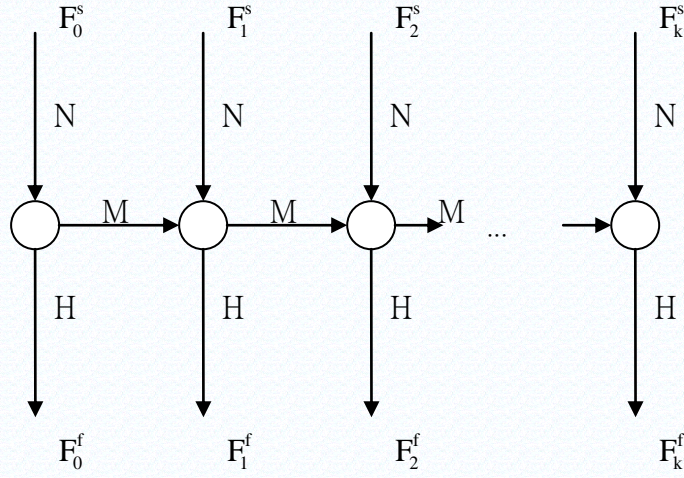


圖 4.9：狀態空間模型示意圖

根據狀態空間模型所示，每個時間點的狀態或是輸出，都可以利用前一個時間或此刻時間的狀態求得，所以利用此狀態空間的模型的特性，可以推得(4.32)式：

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{p}(\mathbf{F}_{1:k}^e, \mathbf{F}_{1:k}^f | \lambda) \\
 &= \mathbf{p}(\mathbf{F}_k^e | \mathbf{F}_{1:k}^f, \mathbf{F}_{1:k-1}^e, \lambda) \mathbf{p}(\mathbf{F}_k^f | \mathbf{F}_{1:k-1}^f, \mathbf{F}_{1:k-1}^e, \lambda) \mathbf{p}(\mathbf{F}_{1:k-1}^e, \mathbf{F}_{1:k-1}^f | \lambda) \\
 &= \mathbf{p}(\mathbf{F}_k^e | \mathbf{F}_{k-1}^f, \lambda) \mathbf{p}(\mathbf{F}_k^f | \mathbf{F}_{k-1}^f, \lambda) \mathbf{p}(\mathbf{F}_{1:k-1}^e, \mathbf{F}_{1:k-1}^f | \lambda)
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

在將 E-step 中的狀態估測代入(4.32)式，就可得(4.33)式：

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{p}(\mathbf{F}_{1:k}^f, \mathbf{F}_{1:k}^e | \lambda) \\
 &= \mathbf{p}(\mathbf{F}_k^e | \mathbf{F}_1^f, \lambda) \mathbf{p}(\mathbf{F}_k^f | \mathbf{F}_{k-1}^f, \lambda) \mathbf{p}(\mathbf{F}_{1:k-1}^e, \mathbf{F}_{1:k-1}^f | \lambda) \\
 &= \mathbf{p}(\mathbf{F}_k^e | \mathbf{F}_k^f, \lambda) \mathbf{p}(\mathbf{F}_k^f | \mathbf{F}_{k-1}^f, \lambda) \cdots \mathbf{p}(\mathbf{F}_0^e | \mathbf{F}_0^f, \lambda) \mathbf{p}(\mathbf{F}_0^f | \mathbf{F}_{-1}^f, \lambda)
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

在(4.33)式中的機率分布會近似為一高斯分佈，原因是因為在狀態估測中使用卡爾曼濾波器的過程雜訊與量測雜訊為高斯分佈，所以將(4.33)式表示為(4.34)式的形式：

$$\begin{aligned} p(\mathbf{F}_k^e | \mathbf{F}_k^f, \lambda) &\approx \mathbf{N}(\mathbf{H}\mathbf{F}_k^f, \mathbf{R}) \\ p(\mathbf{F}_k^f | \mathbf{F}_{k-1}^f, \lambda) &\approx \mathbf{N}(\mathbf{M}\mathbf{F}_{k-1}^f + \mathbf{N}\mathbf{F}_{k-1}^s, \mathbf{Q}) \end{aligned} \quad (4.34)$$

在期望值最大化演算法中，會將已經過的所有時間點的資訊彙整起來作當前時間點的估測依據，但是實際上做即時運算時，為考慮運算量的大小，所以通常會指利用 k 個點的資訊來做估測，所以接下來要從單點的 EM 推廣到多點的 EM。



首先取(4.33)式的自然對數，如(4.34)式：

$$\begin{aligned} \log p(\mathbf{F}_k^e, \mathbf{F}_k^f | \lambda) &= \log[\mathbf{N}(\mathbf{H}\mathbf{F}_k^f, \mathbf{R})\mathbf{N}(\mathbf{F}_{k-1}^f + \mathbf{N}\mathbf{F}_{k-1}^s, \mathbf{Q})] \\ &= \log\mathbf{N}(\mathbf{H}\mathbf{F}_k^f, \mathbf{R}) + \log\mathbf{N}(\mathbf{M}\mathbf{F}_{k-1}^f + \mathbf{N}\mathbf{F}_{k-1}^s, \mathbf{Q}) \end{aligned} \quad (4.34)$$

接下來以(4.34)式對未知參數 λ 做偏微分，而當偏微分後等於零時所解出來的未知參數 λ 有最大值，如(4.35)式：

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \log p(\mathbf{F}_k^e, \mathbf{F}_k^f | \lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \log\mathbf{N}(\mathbf{H}\mathbf{F}_k^f, \mathbf{R}) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \log\mathbf{N}(\mathbf{M}\mathbf{F}_{k-1}^f + \mathbf{N}\mathbf{F}_{k-1}^s, \mathbf{Q}) = \mathbf{0} \quad (4.35)$$

觀察(4.35)式可發現， $\log\mathbf{N}(\mathbf{H}\mathbf{F}_k^f, \mathbf{R})$ 此項跟未知參數 λ 沒有關係，所以偏微分結果會等於零，所以(4.35)中只處理 $\frac{\partial}{\partial \lambda} \log\mathbf{N}(\mathbf{M}\mathbf{F}_{k-1}^f + \mathbf{N}\mathbf{F}_{k-1}^s, \mathbf{Q})$ 這項，如(4.36)式：

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \lambda} \log N(\mathbf{MF}_{k-1}^f + \mathbf{NF}_{k-1}^s, \mathbf{Q}) \\
&= \frac{\partial}{\partial \lambda} \log \frac{1}{(2\pi)^2 \sqrt{|\mathbf{Q}|}} \exp\{[\mathbf{F}_k^f - (\mathbf{MF}_{k-1}^f + \mathbf{NF}_{k-1}^s)]^T \mathbf{Q}^{-1} [\mathbf{F}_k^f - (\mathbf{MF}_{k-1}^f + \mathbf{NF}_{k-1}^s)]\} \\
&= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ -\frac{3}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \log |\mathbf{Q}| - [\mathbf{F}_k^f - (\mathbf{MF}_{k-1}^f + \mathbf{NF}_{k-1}^s)]^T \mathbf{Q}^{-1} [\mathbf{F}_k^f - (\mathbf{MF}_{k-1}^f + \mathbf{NF}_{k-1}^s)] \right\} \\
&= \frac{\partial}{\partial \lambda} - [\mathbf{F}_k^f - (\mathbf{MF}_{k-1}^f + \mathbf{NF}_{k-1}^s)]^T \mathbf{Q}^{-1} [\mathbf{F}_k^f - (\mathbf{MF}_{k-1}^f + \mathbf{NF}_{k-1}^s)] = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{4.36}$$

將(4.36)整理得到(4.37)式：

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \lambda} [\mathbf{F}_k^f - (\mathbf{MF}_{k-1}^f + \mathbf{NF}_{k-1}^s)]^T \mathbf{Q}^{-1} [\mathbf{F}_k^f - (\mathbf{MF}_{k-1}^f + \mathbf{NF}_{k-1}^s)] \\
&= \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} [\mathbf{F}_k^f - (\mathbf{MF}_{k-1}^f + \mathbf{NF}_{k-1}^s)]^T \right\} \mathbf{Q}^{-1} [\mathbf{F}_k^f - (\mathbf{MF}_{k-1}^f + \mathbf{NF}_{k-1}^s)] + \\
&= [\mathbf{F}_k^f - (\mathbf{MF}_{k-1}^f + \mathbf{NF}_{k-1}^s)]^T \mathbf{Q}^{-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} [\mathbf{F}_k^f - (\mathbf{MF}_{k-1}^f + \mathbf{NF}_{k-1}^s)] \right\} = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{4.37}$$

將(4.43)式代入(4.37)式整理後得(4.38)(4.39)式：

$$\begin{aligned}
& 2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{x_{ik}} - \sigma \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{x_{i,k-1}} - (1-\sigma) \mathbf{a}_{x_{k-1}} \mathbf{m}_v \\ \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{y_{ik}} - \sigma \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{y_{i,k-1}} - (1-\sigma) \mathbf{a}_{y_{k-1}} \mathbf{m}_v \\ \mathbf{M}_z |_{s=0_k} - \sigma \mathbf{M}_z |_{s=0_{k-1}} - (1-\sigma) (\dot{\mathbf{r}}_{k-1} \mathbf{I}_z + s \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{y_{i,k-1}}) \end{bmatrix} \right\} \mathbf{Q}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{x_{ik}} - \sigma \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{x_{i,k-1}} - (1-\sigma) \mathbf{a}_{x_{k-1}} \mathbf{m}_v \\ \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{y_{ik}} - \sigma \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{y_{i,k-1}} - (1-\sigma) \mathbf{a}_{y_{k-1}} \mathbf{m}_v \\ \mathbf{M}_z |_{s=0_k} - \sigma \mathbf{M}_z |_{s=0_{k-1}} - (1-\sigma) (\dot{\mathbf{r}}_{k-1} \mathbf{I}_z + s \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{y_{i,k-1}}) \end{bmatrix} \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{4.38}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{ccc}
-(1-\sigma)\mathbf{a}_{x_{k-1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
-(1-\sigma)\mathbf{a}_{y_{k-1}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & -(1-\sigma)\dot{\mathbf{r}}_{k-1} & -(1-\sigma)\sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{y_{i_{k-1}}}
\end{array} \right]^T \mathbf{Q}^{-1} \\
& \left[\begin{array}{c}
\sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{x_{i_k}} - \sigma \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{x_{i_{k-1}}} - (1-\sigma)\mathbf{a}_{x_{k-1}} \mathbf{m}_v \\
\sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{y_{i_k}} - \sigma \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{y_{i_{k-1}}} - (1-\sigma)\mathbf{a}_{y_{k-1}} \mathbf{m}_v \\
\mathbf{M}_z|_{s=0_k} - \sigma \mathbf{M}_z|_{s=0_{k-1}} - (1-\sigma)(\dot{\mathbf{r}}_{k-1} \mathbf{I}_z + s \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{y_{i_{k-1}}})
\end{array} \right] \\
& = \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{4.39}$$

令 \mathbf{Q}^{-1} 為下列矩陣後代入(4.39)式，可得到(4.40)式：

$$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{11}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{q}_{22}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{q}_{33}^{-1} \end{bmatrix}$$

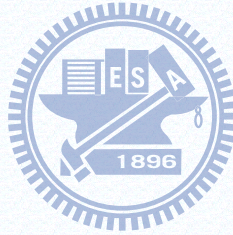


$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{c}
-(1-\sigma)\mathbf{a}_{x_{k-1}} \mathbf{q}_{11}^{-1} \left[\sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{x_{i_k}} - \sigma \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{x_{i_{k-1}}} - (1-\sigma)\mathbf{a}_{x_{k-1}} \mathbf{m}_v \right] - (1-\sigma)\mathbf{a}_{y_{k-1}} \mathbf{q}_{22}^{-1} \left[\sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{y_{i_k}} - \sigma \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{y_{i_{k-1}}} - (1-\sigma)\mathbf{a}_{y_{k-1}} \mathbf{m}_v \right] \\
-(1-\sigma)\dot{\mathbf{r}}_{k-1} \left[\mathbf{M}_z|_{s=0_k} - \sigma \mathbf{M}_z|_{s=0_{k-1}} - (1-\sigma)(\dot{\mathbf{r}}_{k-1} \mathbf{I}_z + s \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{y_{i_{k-1}}}) \right] \\
-(1-\sigma) \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{y_{i_{k-1}}} \left[\mathbf{M}_z|_{s=0_k} - \sigma \mathbf{M}_z|_{s=0_{k-1}} - (1-\sigma)(\dot{\mathbf{r}}_{k-1} \mathbf{I}_z + s \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{y_{i_{k-1}}}) \right]
\end{array} \right] + \\
& \left[\begin{array}{c}
-(1-\sigma)\mathbf{a}_{x_{k-1}} \mathbf{q}_{11}^{-1} \left[\sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{x_{i_k}} - \sigma \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{x_{i_{k-1}}} - (1-\sigma)\mathbf{a}_{x_{k-1}} \mathbf{m}_v \right] - (1-\sigma)\mathbf{a}_{y_{k-1}} \mathbf{q}_{22}^{-1} \left[\sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{y_{i_k}} - \sigma \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{y_{i_{k-1}}} - (1-\sigma)\mathbf{a}_{y_{k-1}} \mathbf{m}_v \right] \\
-(1-\sigma)\dot{\mathbf{r}}_{k-1} \left[\mathbf{M}_z|_{s=0_k} - \sigma \mathbf{M}_z|_{s=0_{k-1}} - (1-\sigma)(\dot{\mathbf{r}}_{k-1} \mathbf{I}_z + s \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{y_{i_{k-1}}}) \right] \\
-(1-\sigma) \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{y_{i_{k-1}}} \left[\mathbf{M}_z|_{s=0_k} - \sigma \mathbf{M}_z|_{s=0_{k-1}} - (1-\sigma)(\dot{\mathbf{r}}_{k-1} \mathbf{I}_z + s \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{y_{i_{k-1}}}) \right]
\end{array} \right] = \\
& \left[\begin{array}{c}
-2(1-\sigma)\mathbf{a}_{x_{k-1}} \mathbf{q}_{11}^{-1} \left[\sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{x_{i_k}} - \sigma \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{x_{i_{k-1}}} - (1-\sigma)\mathbf{a}_{x_{k-1}} \mathbf{m}_v \right] - 2(1-\sigma)\mathbf{a}_{y_{k-1}} \mathbf{q}_{22}^{-1} \left[\sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{y_{i_k}} - \sigma \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{y_{i_{k-1}}} - (1-\sigma)\mathbf{a}_{y_{k-1}} \mathbf{m}_v \right] \\
-2(1-\sigma)\dot{\mathbf{r}}_{k-1} \left[\mathbf{M}_z|_{s=0_k} - \sigma \mathbf{M}_z|_{s=0_{k-1}} - (1-\sigma)(\dot{\mathbf{r}}_{k-1} \mathbf{I}_z + s \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{y_{i_{k-1}}}) \right] \\
-2(1-\sigma) \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{y_{i_{k-1}}} \left[\mathbf{M}_z|_{s=0_k} - \sigma \mathbf{M}_z|_{s=0_{k-1}} - (1-\sigma)(\dot{\mathbf{r}}_{k-1} \mathbf{I}_z + s \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{y_{i_{k-1}}}) \right]
\end{array} \right] \tag{4.40} \\
& = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

在摩擦力估測中只有側向力的部份與車輛動態有關，也就是說，在有車輛有轉向行為時，才需要參數估測，在縱向力的部份只跟車輛輪胎的速度有關，不需要參數估測，所以(4.40)式可以利用以下的假設做簡化。

假設 $\dot{\mathbf{r}}_{k-1}$ 與 $\sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{y_{i,k-1}}$ 不為零， σ 不為一，(4.40)式可以整理成(4.41)式：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_{x_{k-1}} \mathbf{q}_{11}^{-1} \left[\sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{x_{i,k}} - \sigma \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{x_{i,k-1}} - (1-\sigma) \mathbf{a}_{x_{k-1}} \mathbf{m}_v \right] + \mathbf{a}_{y_{k-1}} \mathbf{q}_{22}^{-1} \left[\sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{y_{i,k}} - \sigma \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{y_{i,k-1}} - (1-\sigma) \mathbf{a}_{y_{k-1}} \mathbf{m}_v \right] \\ \mathbf{M}_z |_{s=0_k} - \sigma \mathbf{M}_z |_{s=0_{k-1}} - (1-\sigma) \left(\dot{\mathbf{r}}_{k-1} \mathbf{I}_z + s \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{y_{i,k-1}} \right) \\ \mathbf{M}_z |_{s=0_k} - \sigma \mathbf{M}_z |_{s=0_{k-1}} - (1-\sigma) \left(\dot{\mathbf{r}}_{k-1} \mathbf{I}_z + s \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{y_{i,k-1}} \right) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.41)$$



(4.41)式中可以列出兩條有效的方程式，如(4.42)(4.43)式：

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{x_{k-1}} \mathbf{q}_{11}^{-1} \left[\sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{x_{i,k}} - \sigma \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{x_{i,k-1}} - (1-\sigma) \mathbf{a}_{x_{k-1}} \mathbf{m}_v \right] \\ + \mathbf{a}_{y_{k-1}} \mathbf{q}_{22}^{-1} \left[\sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{y_{i,k}} - \sigma \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{y_{i,k-1}} - (1-\sigma) \mathbf{a}_{y_{k-1}} \mathbf{m}_v \right] = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\mathbf{M}_z |_{s=0_k} - \sigma \mathbf{M}_z |_{s=0_{k-1}} - (1-\sigma) \left(\dot{\mathbf{r}}_{k-1} \mathbf{I}_z + s \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{y_{i,k-1}} \right) = \mathbf{0} \quad (4.43)$$

不確定參數有三個，但是有效的估測方程式只有兩條，所以在此要引入表示車輛特性的轉動慣量方程式。在轉動慣量方程式中列出了質心位置與轉動慣量之間的關係，假設車體的質量無限接近車頭與車尾，如圖 4.9：

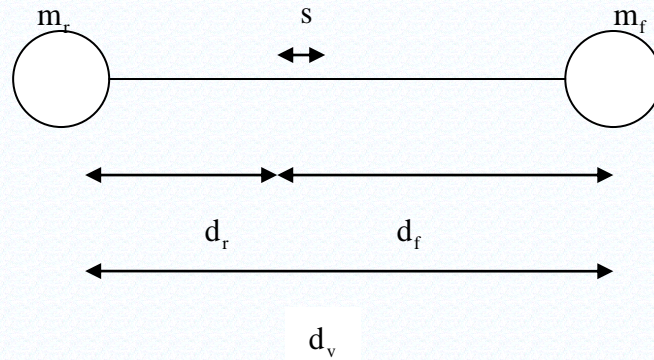
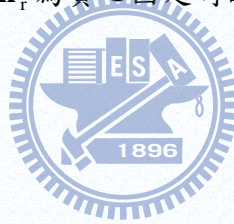


圖 4.10：轉動慣量示意圖

車輛的總質量不變，總車長也不變，當質心位置固定，且車輛俯仰角不大時，必滿足下列四式，其中 d_f 為質心到車頭長度， d_r 為質心到車尾長度， \tilde{m}_f 為質心固定時的集中於車尾的質量， \tilde{m}_r 為質心固定時的集中於車頭的質量， \tilde{I}_z 為質心固定時的轉動慣量。



$$\begin{cases} d_f + d_r = d_v \\ \tilde{m}_f + \tilde{m}_r = m_v \\ \tilde{m}_r d_r = \tilde{m}_f d_f \\ \tilde{m}_r d_r^2 + \tilde{m}_f d_f^2 = \tilde{I}_z \end{cases}$$

當質心偏移 s 後，上列四式還是成立，如(4.44)式：

$$\begin{cases} d_f + d_r = d_v \\ m_f + m_r = m_v \\ m_r (d_r + s) = m_f (d_f - s) \\ m_r (d_r + s)^2 + m_f (d_f - s)^2 = I_z \end{cases} \quad (4.44)$$

將(4.44)式代入(4.43)式可以整理出 s 的二次方程式，如(4.45)式：

$$\begin{aligned}
& (1-\sigma)\dot{r}_{k-1}m_v s^2 + [-(1-\sigma)\sum_{i=1}^4 F_{y_{i_{k-1}}} - (1-\sigma)\dot{r}_{k-1} \frac{1}{d_v}(d_f^2 - d_r^2)m_v]s \\
& + M_z|_{s=0_k} - \sigma M_z|_{s=0_{k-1}} - (1-\sigma)\frac{d_r}{d_v}(d_f^2 - d_r^2)m_v - (1-\sigma)\dot{r}_{k-1}m_v d_r^2 = 0
\end{aligned} \tag{4.45}$$

(4.45)式為質心偏移量 s 的二次式，所以會解出兩個不同的 s ，在此解出的 s 會將之代入(4.44)式解出 m_f 與 m_r ，質量必定恆為正值，在此解出來的兩個解會有一解使 m_f 與 m_r 不符合質量為正的定律，所以在此驗證此條件就可以保證解出的 s 為正確的值。

$$s = \frac{[-(1-\sigma)\sum_{i=1}^4 F_{y_{i_{k-1}}} - (1-\sigma)\dot{r}_{k-1} \frac{1}{d_v}(d_f^2 - d_r^2)m_v] \pm \sqrt{[(1-\sigma)\sum_{i=1}^4 F_{y_{i_{k-1}}} - (1-\sigma)\dot{r}_{k-1} \frac{1}{d_v}(d_f^2 - d_r^2)m_v]^2 - 4(1-\sigma)\dot{r}_{k-1}m_v [M_z|_{s=0_k} - \sigma M_z|_{s=0_{k-1}} - (1-\sigma)\frac{d_r}{d_v}(d_f^2 - d_r^2)m_v - (1-\sigma)\dot{r}_{k-1}m_v d_r^2]}}{2(1-\sigma)\dot{r}_{k-1}m_v} \tag{4.46}$$

將已知的偏移量 s 代入(4.44)式做整理，可得轉動慣量 I_z 的估測，如(4.47)式：

$$I_z = m_v [d_r^2 - s^2 + \frac{(d_r + s)}{d_r}(d_f^2 - d_r^2)] \tag{4.47}$$

在整理(4.42)式，(4.48)式為車體質量 m_v 的參數估測。

$$m_v = \frac{\mathbf{a}_{x_{k-1}} \mathbf{q}_{11}^{-1} (\sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{x_{i_k}} - \sigma \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{x_{i_{k-1}}}) + \mathbf{a}_{y_{k-1}} \mathbf{q}_{22}^{-1} (\sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{y_{i_k}} + \sigma \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{y_{i_{k-1}}})}{(1-\sigma)\mathbf{q}_{11}^{-1} \mathbf{a}_{x_{k-1}}^2 + (1-\sigma)\mathbf{q}_{22}^{-1} \mathbf{a}_{y_{k-1}}^2} \tag{4.48}$$

(4.46)(4.47)(4.48)為單點的參數估測，接下來要推廣到兩點的參數估測。此時的機率分布為兩個時間點的機率分布相乘，取自然對數後會變成各時間點的對數相似值相加，如(4.49)式：

$$\begin{aligned} \log p(\mathbf{F}_k^c, \mathbf{F}_k^f | \lambda) = & \log N(\mathbf{H}\mathbf{F}_k^f, \mathbf{R}) + \log N(\mathbf{M}\mathbf{F}_{k-1}^f + \mathbf{N}\mathbf{F}_{k-1}^s, \mathbf{Q}) \\ & + \log N(\mathbf{H}\mathbf{F}_{k-1}^f, \mathbf{R}) + \log N(\mathbf{M}\mathbf{F}_{k-2}^f + \mathbf{N}\mathbf{F}_{k-2}^s, \mathbf{Q}) \end{aligned} \quad (4.49)$$

將(4.49)式對未知參數 λ 偏微分後可得(4.50)(4.51)式：

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{x_{k-1}} \mathbf{q}_{11}^{-1} \left[\sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{xi_k} - \sigma \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{xi_{k-1}} - (1-\sigma) \mathbf{a}_{x_{k-1}} \mathbf{m}_v \right] + \mathbf{a}_{x_{k-2}} \mathbf{q}_{11}^{-1} \left[\sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{xi_{k-1}} - \sigma \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{xi_{k-2}} - (1-\sigma) \mathbf{a}_{x_{k-2}} \mathbf{m}_v \right] + \\ \mathbf{a}_{y_{k-1}} \mathbf{q}_{22}^{-1} \left[\sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{yi_k} - \sigma \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{yi_{k-1}} - (1-\sigma) \mathbf{a}_{y_{k-1}} \mathbf{m}_v \right] + \mathbf{a}_{y_{k-2}} \mathbf{q}_{22}^{-1} \left[\sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{yi_{k-1}} - \sigma \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{yi_{k-2}} - (1-\sigma) \mathbf{a}_{y_{k-2}} \mathbf{m}_v \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\mathbf{M}_z |_{s=0_k} - \sigma \mathbf{M}_z |_{s=0_{k-1}} + \mathbf{M}_z |_{s=0_{k-1}} - \sigma \mathbf{M}_z |_{s=0_{k-2}} - (1-\sigma) \left[(\dot{\mathbf{r}}_{k-1} \mathbf{I}_z + s \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{yi_{k-1}}) + (\dot{\mathbf{r}}_{k-2} \mathbf{I}_z + s \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{yi_{k-2}}) \right] = 0 \quad (4.51)$$

整理(4.50)式，並將(4.44)式代入(4.51)整理後，可得(4.52)式中兩點的參數估測方程式。

$$\mathbf{m}\mathbf{v} = \frac{\mathbf{q}_{11}^{-1} \left[\mathbf{a}_{x_{k-1}} \left(\sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{xi_k} - \sigma \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{xi_{k-1}} \right) + \mathbf{a}_{x_{k-2}} \left(\sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{xi_{k-1}} - \sigma \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{xi_{k-2}} \right) \right] + \mathbf{q}_{22}^{-1} \left[\mathbf{a}_{y_{k-1}} \left(\sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{yi_k} - \sigma \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{yi_{k-1}} \right) + \mathbf{a}_{y_{k-2}} \left(\sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{yi_{k-1}} - \sigma \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{yi_{k-2}} \right) \right]}{(1-\sigma) \mathbf{q}_{11}^{-1} (\mathbf{a}_{x_{k-1}}^2 + \mathbf{a}_{x_{k-2}}^2) + (1-\sigma) \mathbf{q}_{22}^{-1} (\mathbf{a}_{y_{k-1}}^2 + \mathbf{a}_{y_{k-2}}^2)}$$

$$\mathbf{s} = \frac{- \left[(1-\sigma) \left(\sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{yi_{k-1}} + \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{yi_{k-2}} \right) + \frac{1}{\mathbf{d}_v} (\mathbf{d}_f^2 - \mathbf{d}_r^2) \right] \pm \sqrt{ \left[(1-\sigma) \left(\sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{yi_{k-1}} + \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{yi_{k-2}} \right) + \frac{1}{\mathbf{d}_v} (\mathbf{d}_f^2 - \mathbf{d}_r^2) \right]^2 - 4(1-\sigma) (\dot{\mathbf{r}}_{k-1} + \dot{\mathbf{r}}_{k-2}) \mathbf{m}_v \left[(\mathbf{M}_z |_{s=0_k} - \sigma \mathbf{M}_z |_{s=0_{k-1}} + \mathbf{M}_z |_{s=0_{k-1}} - \sigma \mathbf{M}_z |_{s=0_{k-2}}) - (1-\sigma) (\dot{\mathbf{r}}_{k-1} + \dot{\mathbf{r}}_{k-2}) (\mathbf{m}_v \mathbf{d}_r^2 + \frac{\mathbf{d}_r}{\mathbf{d}_v} \mathbf{m}_v (\mathbf{d}_f^2 - \mathbf{d}_r^2)) \right] }}{2(1-\sigma) (\dot{\mathbf{r}}_{k-1} + \dot{\mathbf{r}}_{k-2}) \mathbf{m}_v}$$

$$\mathbf{I}_z = \mathbf{m}_v [\mathbf{d}_r^2 - \mathbf{s}^s + \frac{(\mathbf{d}_r + \mathbf{s})}{\mathbf{d}_r} (\mathbf{d}_f^2 - \mathbf{d}_r^2)] \quad (4.52)$$

以此類推，可以利用相同的概念推導出 k 個點的參數估測，如(4.53)式：

$$\mathbf{m}_v = \frac{\bar{\mathbf{B}}_{k,k-1}}{\bar{\mathbf{A}}_{k-1}}$$

$$\mathbf{s} = \frac{-[(1-\sigma)\bar{\mathbf{E}}_{k-1} + \frac{1}{\mathbf{d}_v} (\mathbf{d}_f^2 - \mathbf{d}_r^2)] \pm \sqrt{(-1-\sigma)\bar{\mathbf{E}}_{k-1} + \frac{1}{\mathbf{d}_v} (\mathbf{d}_f^2 - \mathbf{d}_r^2)^2 - 4(1-\sigma)\bar{\mathbf{D}}_{k-1}\mathbf{m}_v[\bar{\mathbf{C}}_{k,k-1} - (1-\sigma)\bar{\mathbf{D}}_{k-1}(\mathbf{m}_v\mathbf{d}_r^2 + \frac{\mathbf{d}_r}{\mathbf{d}_v}\mathbf{m}_v(\mathbf{d}_f^2 - \mathbf{d}_r^2))]}{2(1-\sigma)\bar{\mathbf{D}}_{k-1}\mathbf{m}_v}$$

$$\mathbf{I}_z = \mathbf{m}_v (\mathbf{d}_r^2 - \mathbf{s}^s + \frac{(\mathbf{d}_r + \mathbf{s})}{\mathbf{d}_r} (\mathbf{d}_f^2 - \mathbf{d}_r^2)) \quad (4.53)$$

其中 $\bar{\mathbf{A}}_{k-1}$, $\bar{\mathbf{B}}_{k,k-1}$, $\bar{\mathbf{C}}_{k,k-1}$, $\bar{\mathbf{D}}_{k-1}$, $\bar{\mathbf{E}}_{k-1}$ 如下：

$$\bar{\mathbf{A}}_{k-1} = (1-\sigma)(\mathbf{a}_{x_{k-1}}^2 + \mathbf{a}_{x_{k-2}}^2 + \cdots + \mathbf{a}_{x_0}^2) + (1-\sigma)(\mathbf{a}_{y_{k-1}}^2 + \mathbf{a}_{y_{k-2}}^2 + \cdots + \mathbf{a}_{y_0}^2)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{B}}_{k,k-1} = & \mathbf{q}_{11}^{-1} [\mathbf{a}_{x_k} (\sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{xi_k} - \sigma \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{xi_{k-1}}) + \cdots + \mathbf{a}_{x_0} (\sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{xi_0} - \sigma \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{xi_{-1}})] \\ & + \mathbf{q}_{22}^{-1} [\mathbf{a}_{y_k} (\sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{yi_k} - \sigma \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{yi_{k-1}}) + \cdots + \mathbf{a}_{y_0} (\sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{yi_0} - \sigma \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{yi_{-1}})] \end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{k,k-1} = \mathbf{M}_z |_{s=0_k} - \sigma \mathbf{M}_z |_{s=0_{k-1}} + \cdots + \mathbf{M}_z |_{s=0_0} - \sigma \mathbf{M}_z |_{s=0_{-1}}$$

$$\bar{\mathbf{D}}_{k-1} = \dot{\mathbf{r}}_{k-1} + \cdots + \dot{\mathbf{r}}_1$$

$$\bar{\mathbf{E}}_{k-1} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{y^{i_{k-1}}} + \mathbf{L} \sum_{i=1}^4 \mathbf{F}_{y^{i_1}}$$



第五章 模擬分析與探討

為了驗證摩擦力估測演算法的正確性，在此會利用第三章的完整車輛模型模擬真實的車輛，此真實車輛的模型可以很正確的得知車輛輪胎所受的摩擦力，再與摩擦力估測演算法所估測出來的摩擦力比較，驗證摩擦力估測演算法的正確性。

在模擬時會讓車輛操作於幾種常見的駕駛狀態下，包括直線減速、轉向與車道變換。直線前進就是指車輛沒有轉向行為，讓車輛質心保持在同一條直線上前進，然後利用油門或是煞車進行減速與加速的行為；轉向(J-turn)就是車輛直線前進後，在一段時間內將方向盤轉到固定的角度，讓車輛繞著同一個圓心轉圈；單車道變換(single-lane change)為車輛在道路駕駛狀態時，將車輛從原本的车道切換到隔壁的車道，以上幾種車輛行駛狀態的示意圖如下：

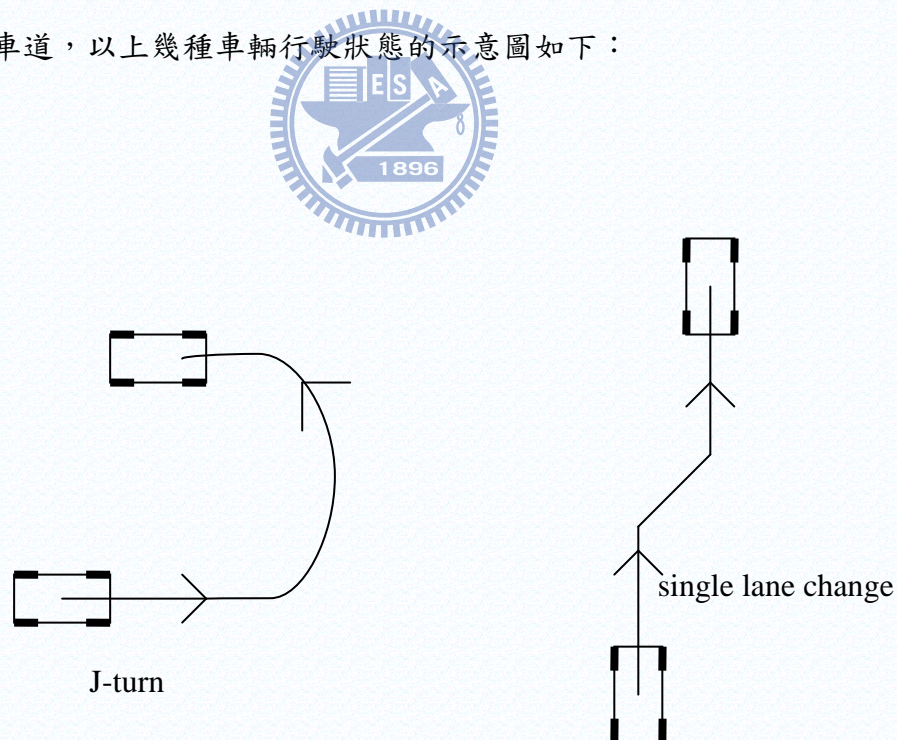


圖 5.1：車輛駕駛狀況示意圖

在前半部會模擬車輛直線加減速時的縱向力估測，縱向力的估測與車輛不確定參數無關，所以不會進行參數估測，在此會在各種煞車與加速的行為與幾種不同的摩擦係數的路面下進行縱力的估測。

後半部模擬車輛在不同摩擦力的路面下，進行 J-turn 與 single lane change 的駕駛行為時的摩擦力估測，當車輛有轉向時除了縱向力的部份，還會出現側向力，此時就會用上簡化車輛模型求解，因此會有不確定參數的問題，此時就要對不確定參數做估測。本部份的模擬會在各種駕駛狀態下，改變簡化車體模型的不確定參數後，比較有做參數估測的摩擦力估測結果與沒有使用參數估測的摩擦力估測結果。

模擬時使用的車輛參數與卡爾曼率波器之參數見附錄一。

5.1 濾波器設計



一般來說，感測器的訊號都會有雜訊存在，當雜訊太大時，就會影響到估測結果的好壞，所以再此設計一些濾波器來過濾這些雜訊。

大部分的量測雜訊為白色噪訊(white noise)的頻率都很高，在上一章節中縱向力估測使用了輪胎轉動角加速度與橫擺角加速度，但實際上是使用輪胎的轉動角速度與橫擺角速度差分而成，但是差分器會將高頻的雜訊放大，造成估測不準確，所以在此設計一低通率濾波器，將輪胎轉動角速度與橫擺角速度的雜訊濾除後，再進行差分。

另外是利用加速規測量縱向加速度與側向加速度時的雜訊，在此也是利用一個低通濾波器將量測雜訊濾除。

最後在做完側向力的估測後，會讓結果再經過低通濾波器，以確保估測結果的平滑

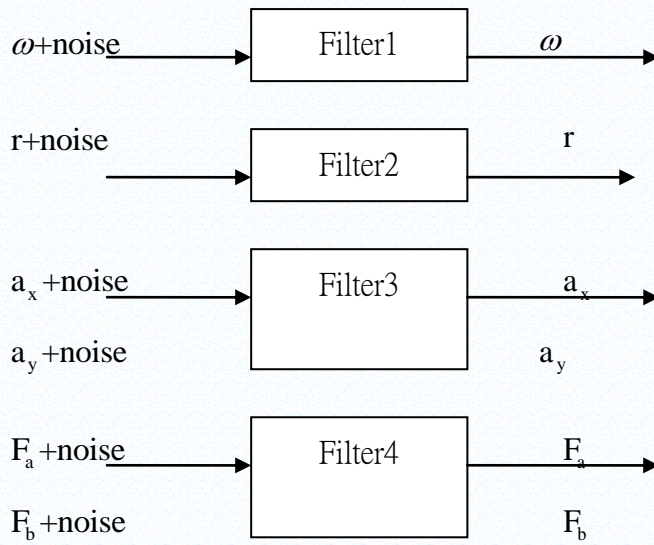


圖 5.2：模擬中使用的濾波器示意圖

圖 5.2 就為模擬中加上的濾波器，根據一般車輛的動態，濾波器的截止頻率大多會在 5Hz 到 10Hz 間，其中 Filter1~Filter4 的係數與波德圖如附錄二。



5.2 直線前進

在直線模擬中，會在不同的路面狀況下模擬固定煞車力矩與切換煞車力矩的駕駛狀況，再觀察縱向力估測結果。

模擬一：

車輛直線前進，初始速度 $v_m=20\text{m/s}$ ，保持每個輪胎 100N 的煞車力矩，路面狀況在 $1\sim 10$ 秒時為乾燥的柏油路面 ($\mu=0.85$)， $10\sim 15$ 秒為溼滑的柏油路面 ($\mu=0.65$)。下圖為四個輪胎的縱向力估測結果與縱向速度變化。四個輪胎的轉動速度皆有加上 $\text{mean}=0$ ， $\text{variance}=1$ 的高斯雜訊。

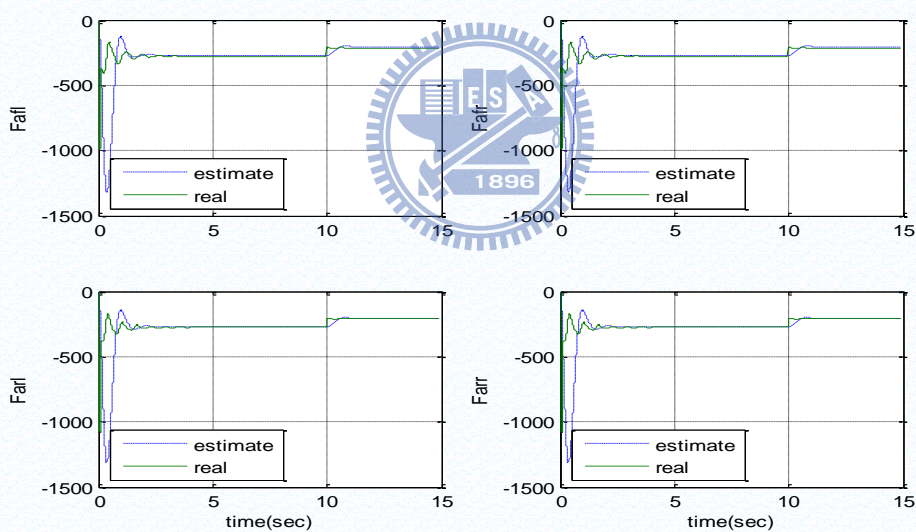


圖 5.3：模擬一之縱向力估測結果

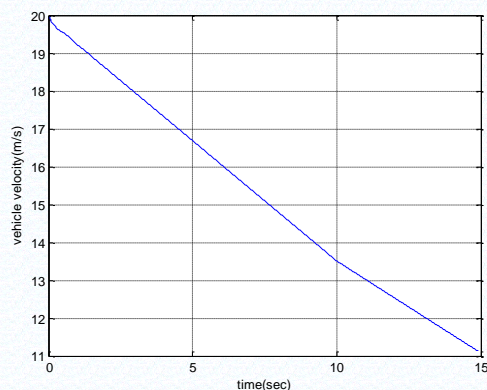


圖 5.4：模擬一之車速變化圖

模擬二：

車輛直線前進，初始速度 $v_m=20\text{m/s}$ ，保持每個輪胎 200N 的煞車力矩，路面狀況再 1~8 秒時為乾燥的柏油路面 ($\mu=0.85$)，8~12 秒為溼滑的柏油路面 ($\mu=0.65$)，12~15 秒為積水的柏油路面 ($\mu=0.45$)。下圖為四個輪胎的縱向力估測結果與縱向速度變化。四個輪胎的轉動速度皆有加上 mean=0，variance=1 的高斯雜訊。

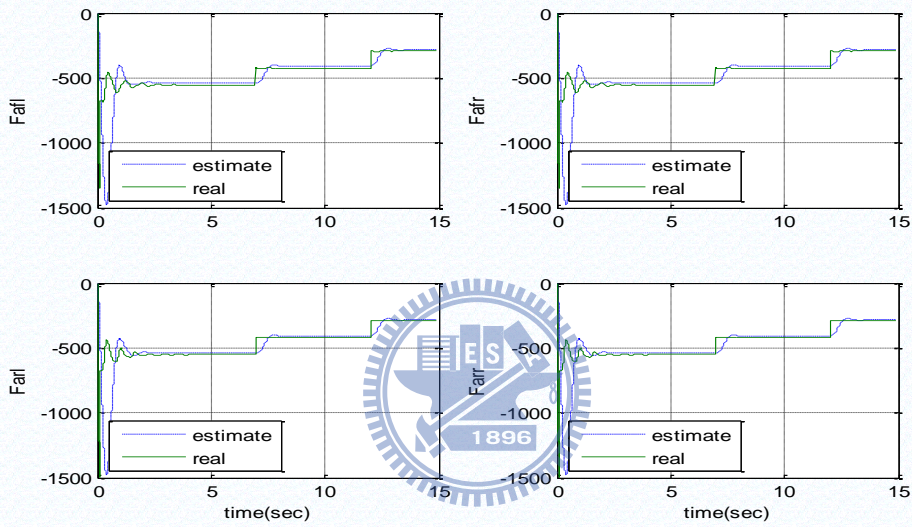


圖 5.5：模擬二之縱向力估測結果

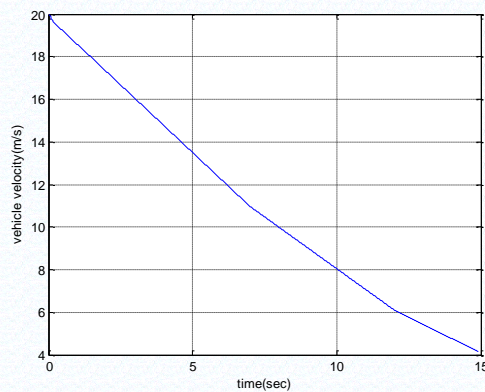


圖 5.6：模擬二之車速變化圖

模擬三：

車輛直線前進，初始速度 $v_m=20\text{m/s}$ ，煞車在 0~5 秒間保持每個輪胎 25N 的煞車力矩，5~7 秒內將每個輪胎的煞車力矩由 25N 線性加到 200N，7~11 煞車力矩維持 200N，11~13 秒間將煞車還原成每個輪胎 25N 的煞車力矩，13~15 維持煞車不動作。路面狀況再 1~8 秒時為乾燥的柏油路面 ($\mu=0.85$)，8~12 秒為溼滑的柏油路面 ($\mu=0.65$)，12~15 秒為積水的柏油路面 ($\mu=0.45$)。下圖為四個輪胎的縱向力估測結果與縱向速度變化。四個輪胎的轉動速度皆有加上 $\text{mean}=0$ ， $\text{variance}=1$ 的高斯雜訊。

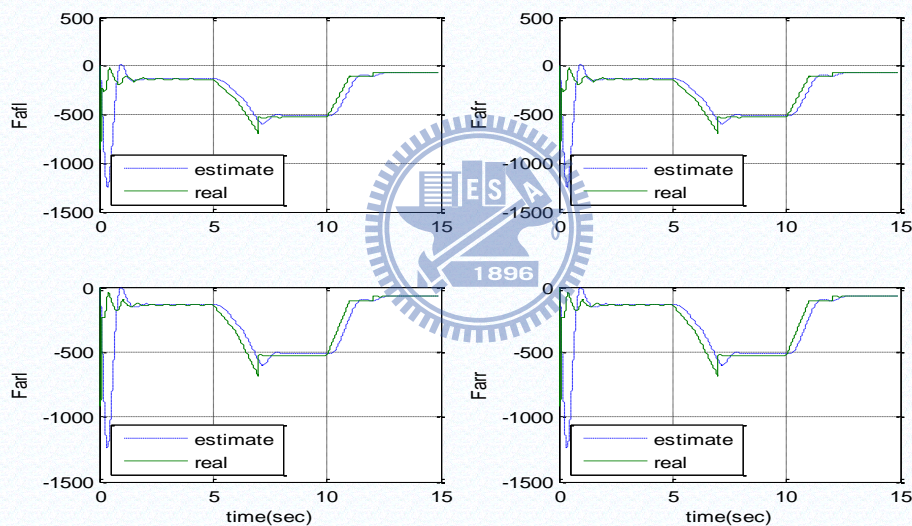


圖 5.7：模擬三之縱向力估測結果

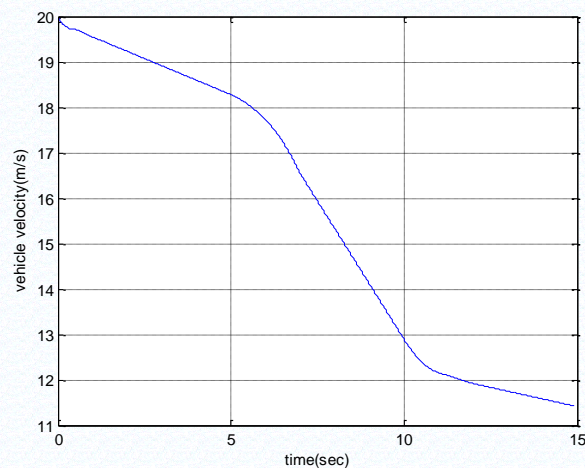


圖 5.8：模擬三之車速變化圖

模擬四：

車輛直線前進，初始速度 $v_m=30\text{m/s}$ ，在 15 秒內快速踩放煞車。路面狀況再 1~8 秒時為乾燥的柏油路面 ($\mu=0.85$)，8~12 秒為溼滑的柏油路面 ($\mu=0.65$)，12~15 秒為積水的柏油路面 ($\mu=0.45$)。下圖為四個輪胎的縱向力估測結果與縱向速度變化。四個輪胎的轉動速度皆有加上 $\text{mean}=0$ ， $\text{variance}=0.1$ 的高斯雜訊。

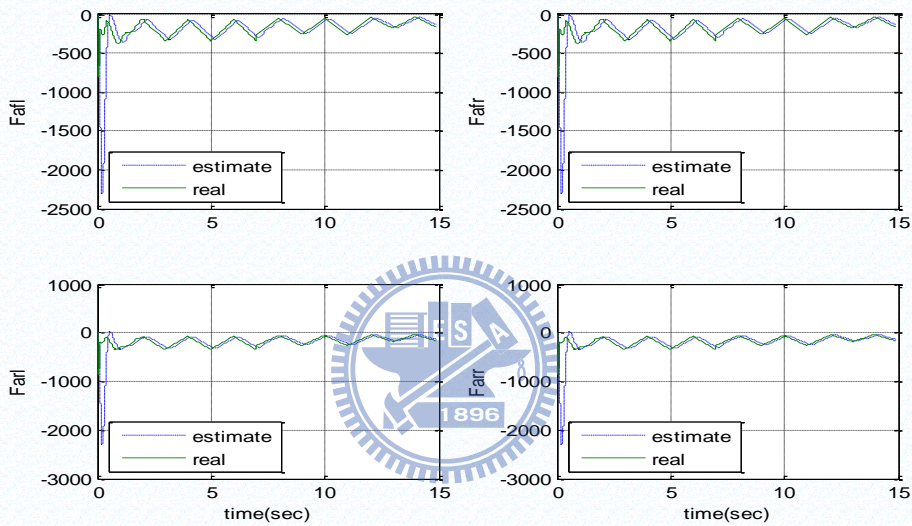


圖 5.9：模擬四之縱向力估測結果

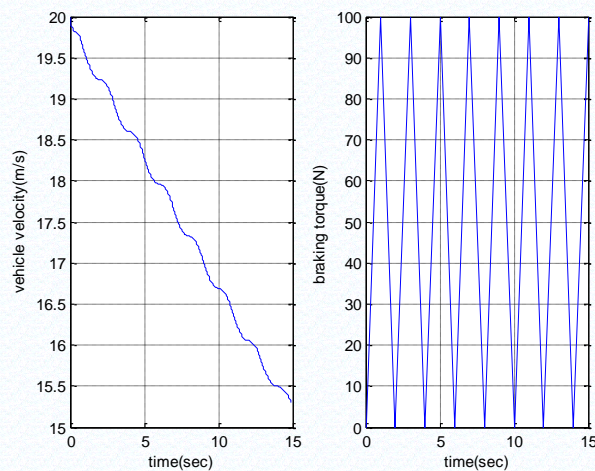


圖 5.10：(左)模擬四之車速變化圖(右)煞車力矩

5.3 J-Turn

在 J-Turn 的模擬中，會牽扯到車輛的轉向行為，所以會有側向力的估測與車輛參數的估測。

在 J-Turn 模擬的部份主要以轉向角的不同狀況，這些駕駛狀況都是在同樣的路面條件與煞車力矩下進行，而不同的是輪胎的轉向角，不同的輪胎轉向角決定了車輛轉彎半徑的大小，像是車輛需要緊急避障時，轉彎半徑較小，所以在此模擬各種不同轉向角狀況下測向力的估測情況。

另外就是參數估測的部份，模擬中會比較參數正確、參數不正確使用參數估測、參數不準確不使用參數估測的側向力估測結果，在質量的變化上是以車輛乘載數為 3 人，體重總共 200kg 為基準來做改變，而轉動慣量與質心變化的部分，是將轉動慣量變化 15%，質心位置變化 15%。

在此設定正確的車輛參數為車體質量 m_v 為 1740 Kg，車體轉動慣量為 2961 $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ ，質心的偏移量為 0，也就是說質心到前輪的距離為 1.05 m。接下來的模擬會在兩種不同的路面狀況下，進行兩種不同大小的轉向角時的摩擦力估測，進行摩擦力估測時，會改變簡化車輛模型的车體參數，驗證參數估測的正確性。

因為完整車輛模型在剛啟動時會有幾秒的暫態，為了避免此暫態對估測的影響，所以在此將所有的估測設定在 5 秒的時候開始。

在此模擬中， a_x 、 a_y 、 r 、 ω 皆加上 $\text{mean}=0$ ， $\text{variance}=1$ 的高斯雜訊。

模擬五：在地面 0~8 秒時為普通柏油路($\mu=0.85$)，8~14 秒時為溼潤的柏油路面($\mu=0.65$)，14~20 秒時會積水的柏油路面($\mu=0.45$)，給予每個輪胎 100N 的煞車力矩，進行右側輪轉向角為 0.1 rad 的 J-turn。

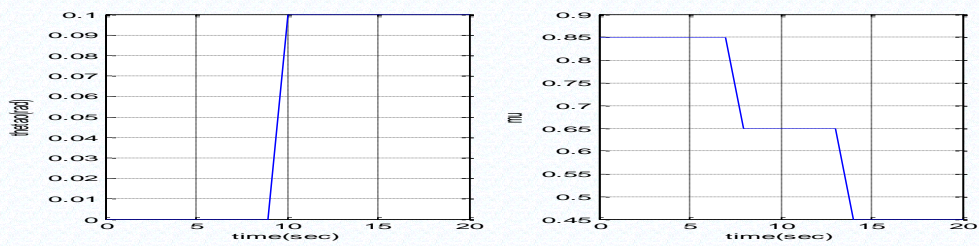


圖 5.11：(左)模擬五之外側輪轉角(右)模擬五之路面摩擦係數

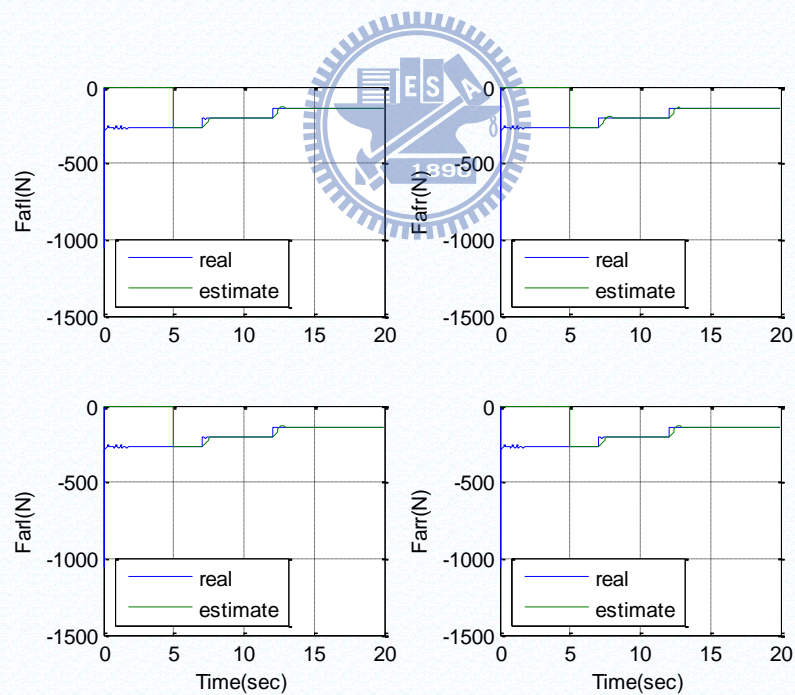


圖 5.12：模擬五之縱向力估測結果

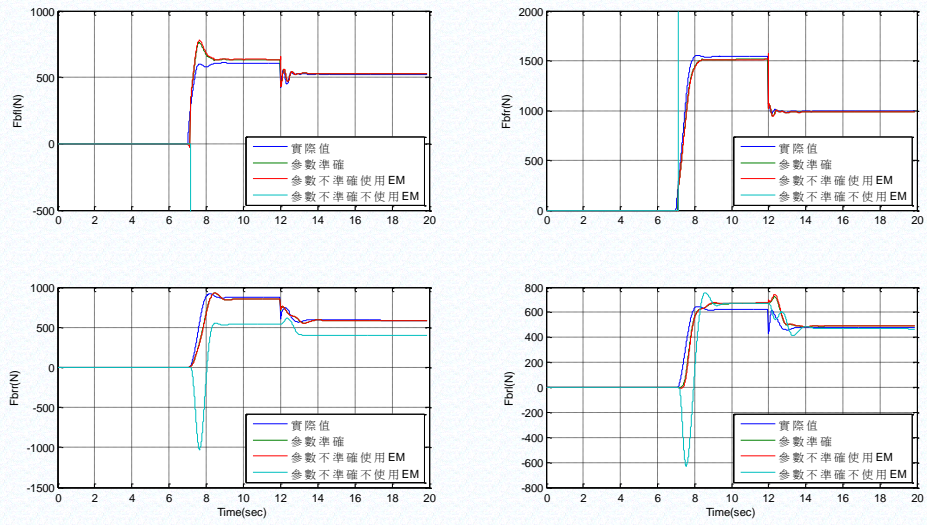


圖 5.13：模擬五之側向力估測結果

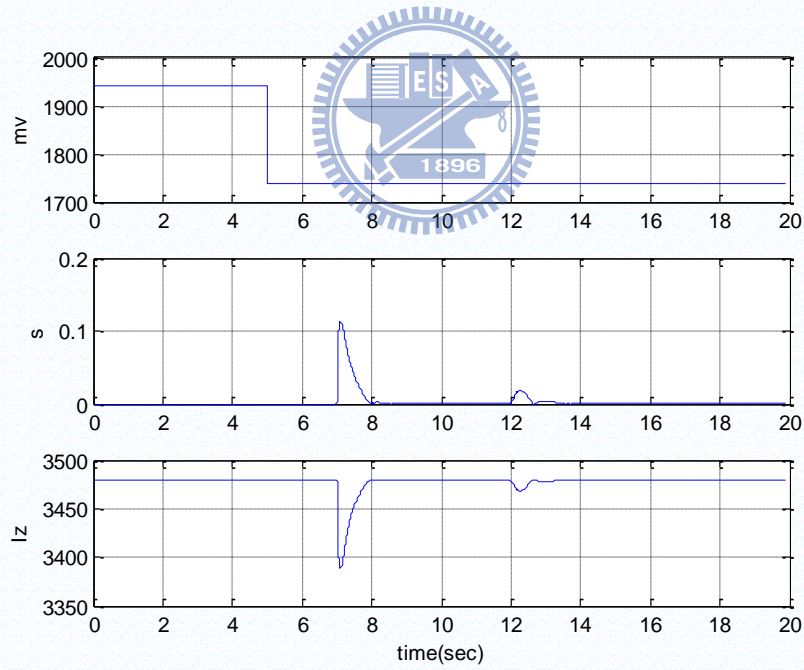


圖 5.14：模擬五之參數估測結果

模擬六：在地面 0~8 秒時為普通柏油路($\mu=0.85$)，8~14 秒時為溼潤的柏油路面($\mu=0.65$)，14~20 秒時會積水的柏油路面($\mu=0.45$)，給予每個輪胎 100N 的煞車力矩，進行右側輪轉向角為 0.25 rad 的 J-turn。

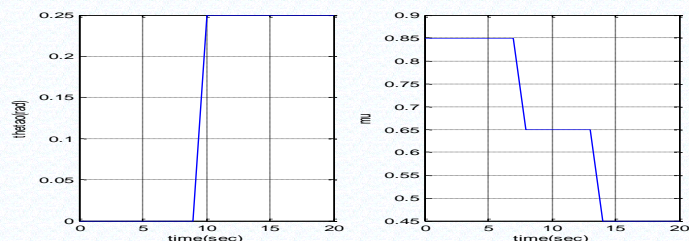


圖 5.15：(左) 模擬六之外側輪轉向角(右)模擬六之路面摩擦係數

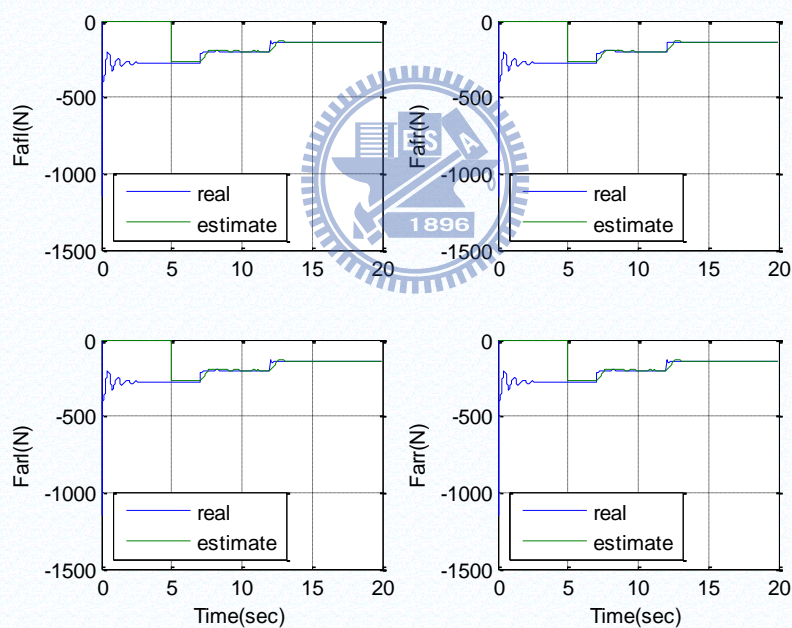


圖 5.16：模擬六之縱向力估測結果

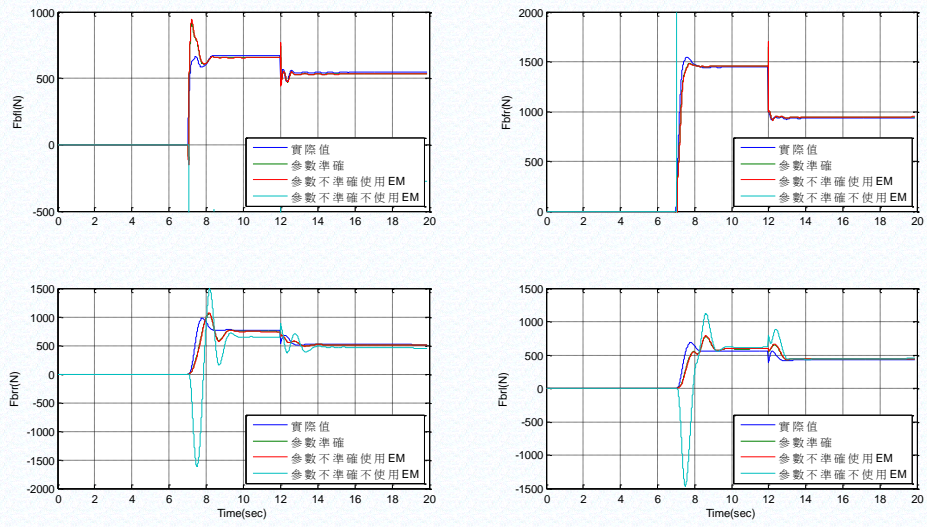


圖 5.17：模擬六之側向力估測結果

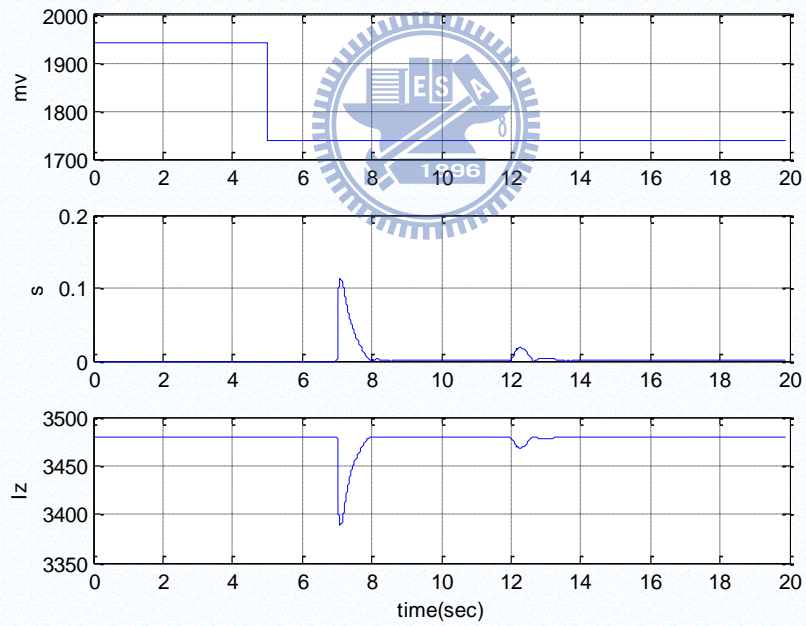


圖 5.18：模擬六之參數估測結果

模擬七：在地面 0~8 秒時為普通柏油路($\mu=0.85$)，8~14 秒時為溼潤的柏油路面($\mu=0.65$)，14~20 秒時會積水的柏油路面($\mu=0.45$)，給予每個輪胎 100N 的煞車力矩，進行右側輪轉向角為 0.4 rad 的 J-turn。

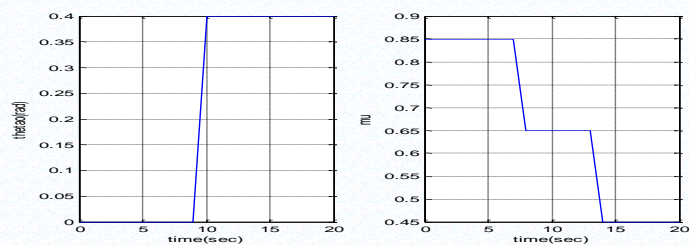


圖 5.19：(左)模擬七之外側輪轉向角(右)模擬七之路面摩擦係數

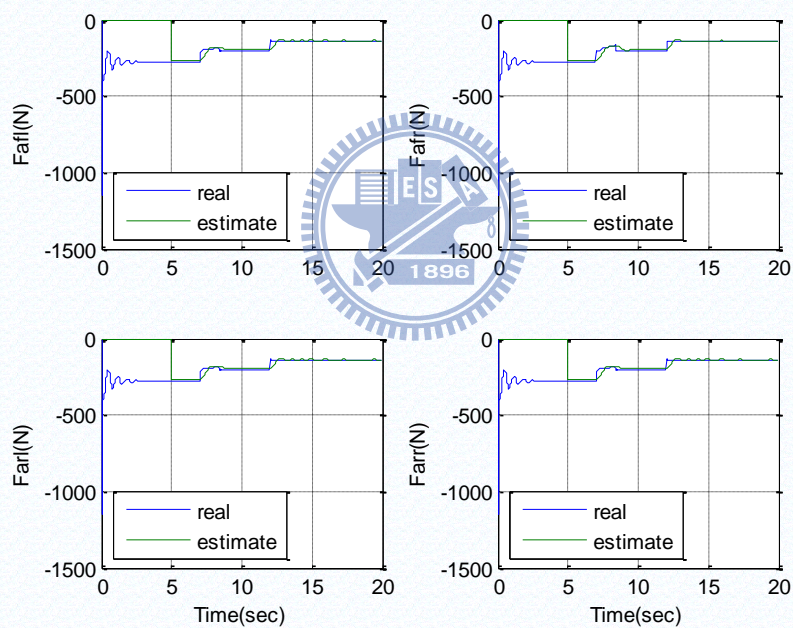


圖 5.20：模擬七之縱向力估測結果

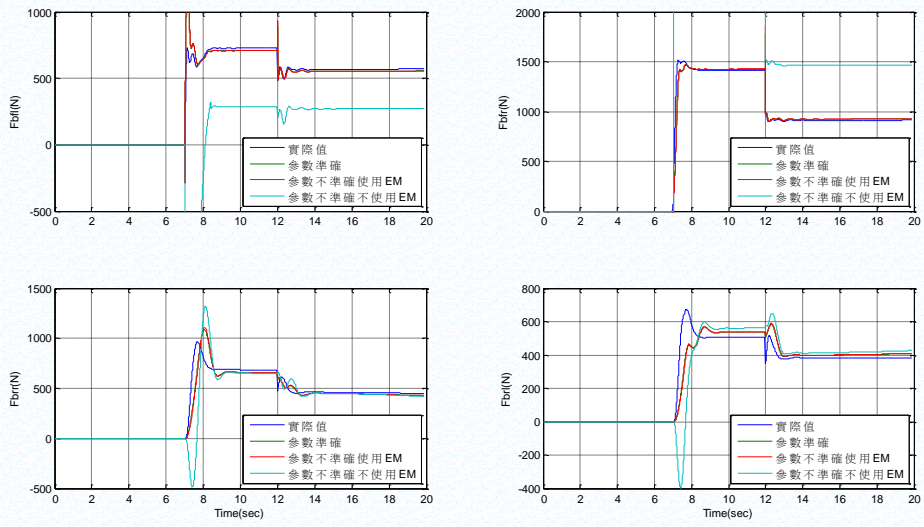


圖 5.21：模擬八之側向力估測結果

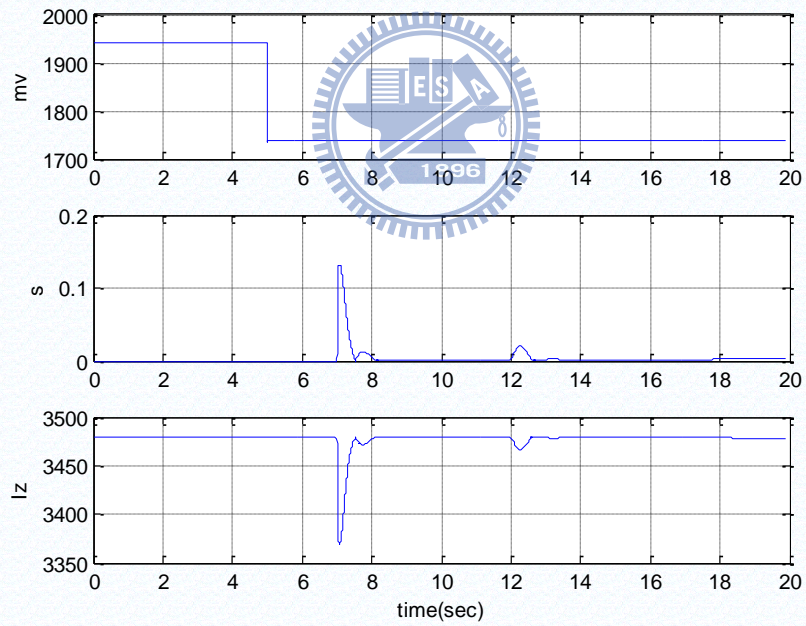


圖 5.22：模擬八之參數估測結果

5.4 Single Lane Change

在 Single Lane Change 的駕駛行為中也會牽扯到車輛的側向運動，所以會有側向力的估測與車輛參數的估測，此模擬讓車輛在兩種不同的路面狀況下作車道的切換。

在 single lane change 的狀況中，也是依照轉向角大小不同但煞車力矩相同的情況下作模擬，在一般道路駕駛中，切換車道是常出現的駕駛行為，輪胎轉向角小時切換到較近的車道，輪胎轉向角較大時切換到較遠的車道，在此設定切換前的車道與切換後的車道摩擦係數不同，最後會比較側向力估測的結果。

參數估測的部分與 J-turn 相同，最後會比較側向力估測的結果。

在此設定正確的車輛參數為車體質量 m_v 為 1740 Kg，車體轉動慣量為 2961 $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ ，質心的偏移量為 0，也就是說質心到前輪的距離為 1.05 m。接下來的模擬會在兩種不同的路面狀況下，進行兩種不同大小的轉向角時的摩擦力估測，進行摩擦力估測時，會改變簡化車輛模型的車體參數，驗證參數估測的正確性。

因為完整車輛模型在剛啟動時會有幾秒的暫態，為了避免此暫態對估測的影響，所以在此將所有的估測設定在 5 秒的時候開始。

在此模擬中， a_x 、 a_y 、 r 、 ω 皆加上 $\text{mean}=0$ ， $\text{variance}=1$ 的高斯雜訊。

模擬八：在地面 0~8 秒時為普通柏油路($\mu=0.85$)，8~15 秒時為溼潤的柏油路面($\mu=0.65$)，給予每個輪胎 100N 的煞車力矩，進行右側輪轉向角為 0.1 rad 的 Single Lane Change。

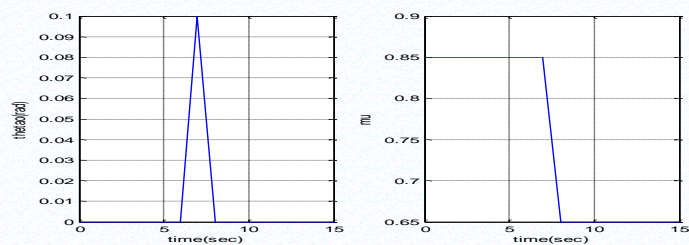


圖 5.23：(左)模擬八之外側輪轉向角(右)模擬八之路面摩擦係數

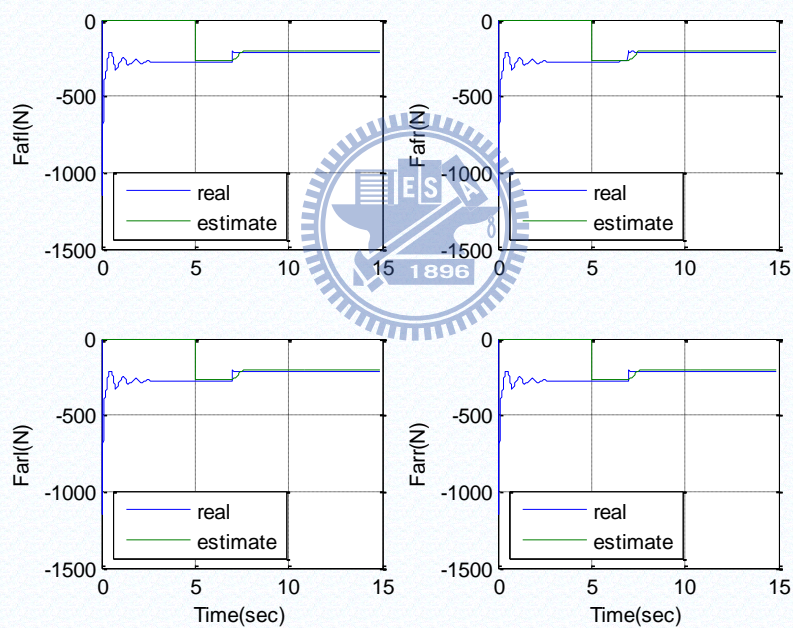


圖 5.24：模擬八之縱向力估測結果

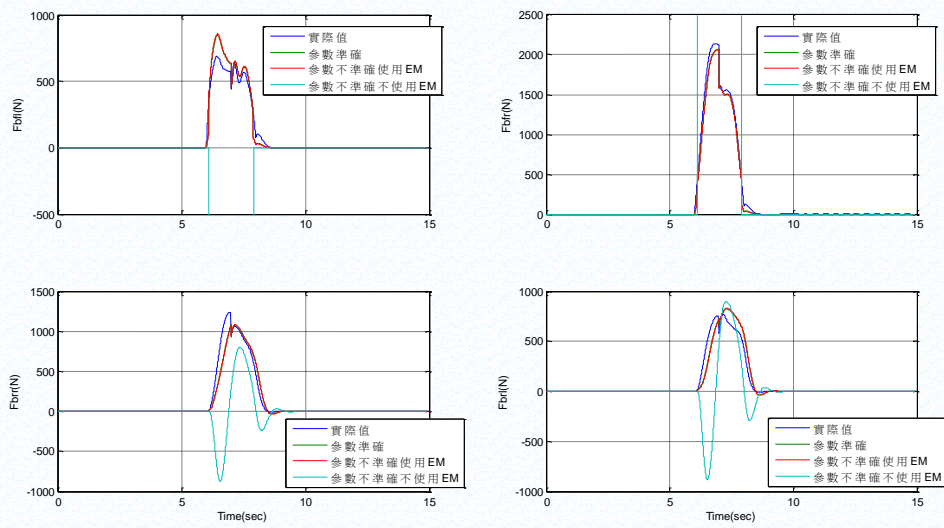


圖 5.25：模擬八之側向力估測結果

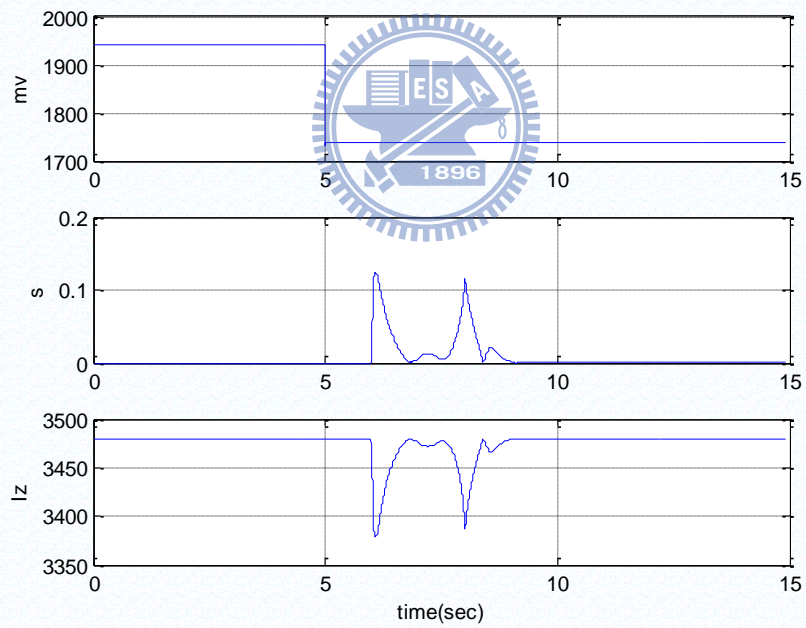


圖 5.26：模擬八之參數估測結果

模擬九：在地面 0~8 秒時為普通柏油路($\mu=0.85$)，8~15 秒時為溼潤的柏油路面($\mu=0.65$)，給予每個輪胎 100N 的煞車力矩，進行右側輪轉向角為 0.4 rad 的 Single Lane Change。

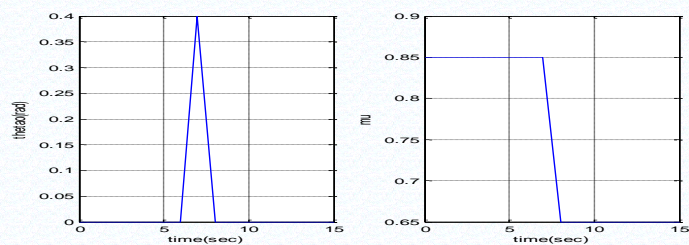


圖 5.27：(左)模擬九之外側輪轉向角(右)模擬九之路面摩擦係數

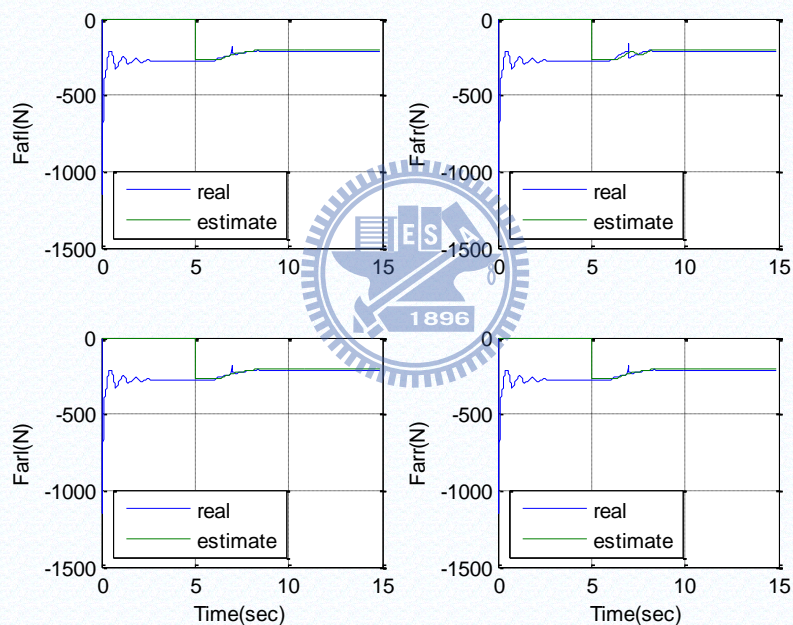


圖 5.28：模擬九之縱向力估測結果

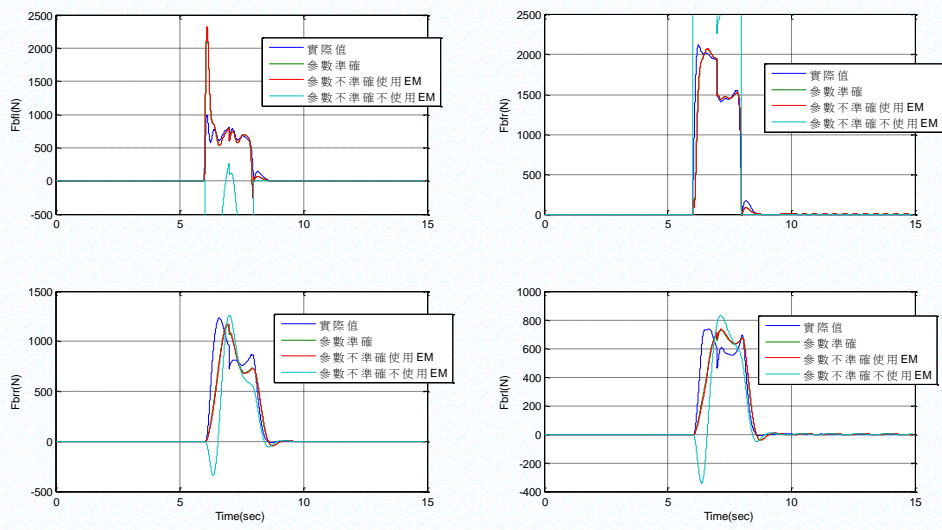


圖 5.29：模擬九之側向力估測結果

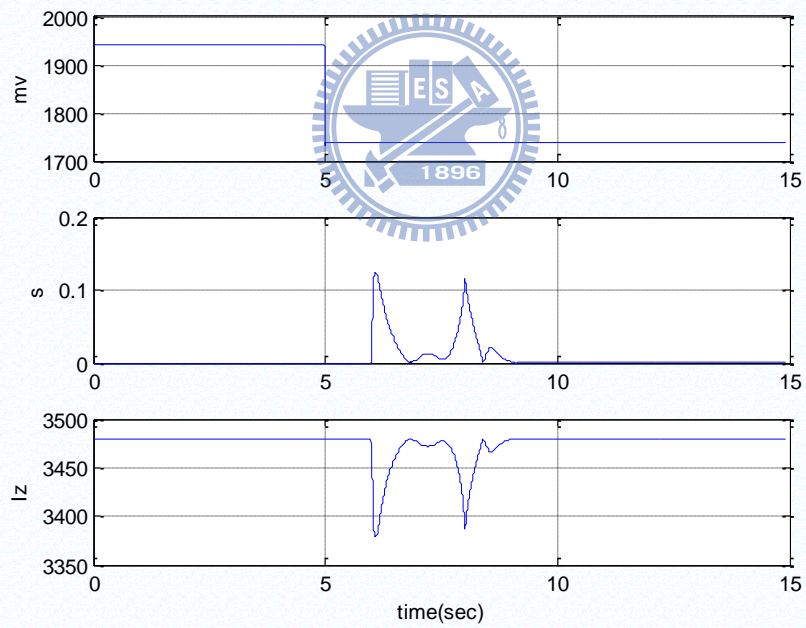


圖 5.30：模擬九之參數估測結果

5.5 數據分析與探討

在此使用估測與實際值的均方根誤差(RMSE)來做估測優劣的判斷，各模擬誤差值為下列表格，單位皆為牛頓(N)。

直線前進						
	左前輪縱向力	右前輪縱向力	右後輪縱向力	左後輪縱向力	總和	百分比誤差
模擬一	9.56	9.56	8.56	8.56	36.24	3.98%
模擬二	15.72	15.72	12.43	12.43	56.30	4.58%
模擬三	20.78	20.78	18.57	18.57	78.70	8.11%
模擬四	30.60	30.60	25.65	20.65	112.5	11.91%
模擬五	12.81	13.01	12.93	12.69	51.46	3.97%
模擬六	12.78	13.03	12.53	12.18	50.53	3.88%
模擬七	13.54	14.08	12.45	12.11	52.19	4.01%
模擬八	11.14	11.49	12.04	11.44	46.12	3.55%
模擬九	6.60	9.56	12.13	12.06	40.37	3.10%

表 5.1：直線前進之縱向力誤差

J-trun						
模擬五(轉向角為 0.1rad)						
	左前輪縱向力	右前輪縱向力	右後輪縱向力	左後輪縱向力	總和	百分比誤差
參數準確	40.12	42.40	57.65	58.76	198.95	6.54%
參數不準確 使用參數估測	8676	9394	391	201	18661	613%
參數不準確 不使用參數估測	44.58	47.12	60.68	65.29	217.68	7.16%

表 5.2：模擬五之側向力誤差

J-trun						
模擬六(轉向角為 0.25rad)						
	左前輪縱向力	右前輪縱向力	右後輪縱向力	左後輪縱向力	總和	百分比誤差
參數準確	45.48	46.91	85.19	70.48	248.09	8.15%
參數不準確 使用參數估測	4640	5036	444	377	10497	345%
參數不準確 不使用參數估測	48.98	50.52	90.87	75.90	266.30	8.75%

表 5.3：模擬六之側向力誤差

J-trun						
模擬七(轉向角為 0.4rad)						
	左前輪縱向力	右前輪縱向力	右後輪縱向力	左後輪縱向力	總和	百分比誤差
參數準確	59.04	60.91	89.52	75.21	284.70	9.36%
參數不準確 使用參數估測	3590	3891	229	174	7885	259%
參數不準確 不使用參數估測	64.95	67.01	95.92	78.22	306.10	10.01%

表 5.4：模擬七之側向力誤差

Single lane change						
模擬八(轉向角為 0.1rad)						
	左前輪縱向力	右前輪縱向力	右後輪縱向力	左後輪縱向力	總和	百分比誤差
參數準確	46.15	49.88	90.49	67.37	253.90	9.56%
參數不準確 使用參數估測	11970	12799	428	321	25518	963%
參數不準確 不使用參數估測	49.44	53.45	95.25	72.19	270.34	10.24%

表 5.5：模擬八之側向力誤差

Single lane change						
模擬九(轉向角為 0.4rad)						
	左前輪縱向力	右前輪縱向力	右後輪縱向力	左後輪縱向力	總和	百分比誤差
參數準確	65.05	58.31	128.50	89.57	341.45	12.88%
參數不準確 使用參數估測	6060	6506	284	205	13056	493%
參數不準確 不使用參數估測	69.28	62.37	137.68	95.97	365.32	13.79%

表 5.6：模擬九之側向力誤差

討論一：

在縱向力估測的部份，首先看到模擬一與模擬二都是在固定煞車力矩的情況下碰到路面狀況的改變，可以很明顯的看出在路況改變時估測的結果也有很準確的跟上實際的值，但是實際上還是有穩態誤差存在，此穩態誤差的原因是輪胎承受正向力後而形變，此形變會造成輪胎等效半徑的改變，因為不容易得知輪胎的形變量，所以在此是代入未形變前的輪胎半徑，此時就會產生估測誤差。在模擬三與模擬四中，主要是煞車狀態的切換，圖中可以發現估測結果與實際的結果有些延遲，主要是因為利用濾波器在濾除感測器雜訊時所造成的相位延遲，此相位的延遲會造成估測的誤差。

討論二：

觀察模擬五到模擬九之縱向力估測的部份，首先看模擬五、模擬六與模擬七，這三個模擬是在車身參數沒有不確定的情況下做三種不同轉向角的 J-turn，由圖可以看出在路面狀況突然改變時，估測的結果都有跟上實際的變化，但是在有轉彎的情況下，左右輪的估測結果會不一樣，原因就是車輛做轉向時，內側輪會被抬起，外側輪會被下壓，此結果會造成輪胎的形變，造成輪胎半徑的改變，造成估測的誤差。在模擬八與模擬九是在兩種不同的轉向角下做 single lane change，與 J-turn 的結果大致相同，同樣是在輪胎的形變下，造成縱向力估測的誤差。

接著討論狀況一到狀況五中，加入參數變化時，縱向力估測的結果，在車體質量有變化時，加入參數估測，數據中可以發現未定的參數並未收斂到正確的數值，但是縱向力估測的部分與車體的不確定參數無關，所以參數估測的結果並不會影響到縱向力的估測。

討論三：

在側向力估測的部份，先看在車輛參數沒有不確定的情況進行三種不同轉向角的 J-turn，也就是模擬五、模擬六與模擬七，在路面狀況改變時，可以從圖看出估測的側向力確實有跟上實際的側向力，在前輪側向力的部份可以看出估測的結果有些暫態的現象，原因為腳踏車模型與簡化車輛模型切換時造成的現象，而在摩擦力圓解後輪個別摩擦力時會與前輪個別估測的摩擦力有關，所以當前輪摩擦力估測不準確時，也會影響到後輪的估測。另外來看轉向角對估測的影響，在車輛轉向角大時，車輛的側傾運動較明顯，因此使用忽略側傾運動的腳踏車模型與簡化車輛模型會失去一些精準度，因此在利用模型解前輪個別側向力與後輪側向力合力時就會發生誤差，而使用摩擦力圓求解後輪個別摩擦力時使用的最大縱向力之比例關係，也會因為轉向角大時側滑角也會跟著增加，而使側向力進入了非線性區，進入非線性區後比例關係的假設也會有誤差存在，此時就會影響到後輪估測的精準度，但是比較誤差結果來看，上述兩點造成估測誤差的原因的影響都不會非常的劇烈，也就證明了此估測方法在轉向角不同的影響不大。

再比較模擬八與模擬九在參數準確時，轉向角不同的 single lane change 的側向力估測結果，在路面狀況突然改變時，可以看出側向力的估測都有跟上實際的數值，與 J-turn 的原因一樣，在轉較大時會有較大的誤差，但在 single lane change 的模擬中，利用摩擦力圓做後輪個別的摩擦力估測時就有較大的誤差，原因是在做 single lane change 時側滑角的變化較為劇烈，側滑角的比例關係會在轉向角還未轉向到固定時出現誤差，在 single lane change 的駕駛狀況中，轉向角的變化較為快速，所以影響到後輪個別側向力的估測的結果，因此後輪的側向力估測在此有較大的誤差。

側向力估測與車輛參數有關，因此在參數不確定的情況下加入參數估測後，比較側向力的估測結果。模擬五到模擬九中的模擬中可以顯示參數的估測對側向力估測的影響，在改變車體質量時，此參數收斂的數度很快，但是最後收斂到的結果還是會有 1~2kg 的誤差，不過此誤差對側向力估測的影響並不大，因此幾乎可以忽略此參數估測的誤差，而在改變轉動慣量與質心位置的情況下，可以發現參數的估測最後並沒有收斂到正確的數值，原因是側向力的估測對此兩數值並不敏感，但是從圖觀察可以發現在車輛開始轉向時，參數有往正確的值收斂的趨勢，是因為在轉向剛起步時參數的影響較為明顯，但是在轉向趨於穩定時，參數的影響不明顯，所以又收斂到不正確的數值，但是就估測結果來看，在這兩個參數估測沒有準確的情況下，估測的結果是會產生比參數正確時來的大的誤差，不過誤差的量並不大，所以在轉動慣量與質心位置不準的情況下，側向力方面也有不錯的估測結果。

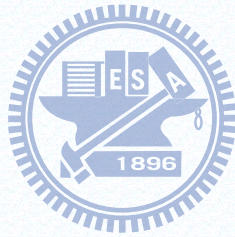
但是從模擬五到模擬九在參數不準確的情況下不使用參數估測的側向力估測結果，從圖或是數據來看，在此情況下的側向力估測非常不準確，這也就表示不確定參數對此演算發的影響非常大，尤其是車體質量的不準確會造成估測完全失準。

結論：

分析了以上數據後可以發現縱向力估測部分不受路面狀況突然改變的影響，在路變狀況有所改變時，還是可以準確的估得摩擦力，但是縱向力的估測會受到輪胎半徑改變而影響估測結果，當輪胎承受的正向力越大，輪胎的形變就會越大，而估測的誤差就會越大。側向力估測的結果在路面狀況有突然變化時，也是有很好的估測能力，就表示估測方法不會受路面狀況影響。側向力在上述模擬情況下，都有不錯的估測能力，但是還是有估測誤差的情況，而造成側向力估測不準確的原因是車輛轉向角較大較大時側傾效應較明顯，但是求解側向力所使用的車輛模型均不考慮側傾與俯仰效應，所以在此會造成估測誤差，另外就是摩擦力圓求解時，最大側向力的假設會跟輪胎側滑角有關，當轉向角較大時會有比較

大的側滑角，當側滑角增加時摩擦力曲線會脫離線性區的範圍，造成最大側向力的比值不準確，上述兩點都是造成側向力估測誤差的原因。

在車輛參數有不準確的情況下，不會影響縱向力的估測，而側向力估測的結果與車輛參數準確時的結果差異不大，但是還是會有誤差存在，車體質量不準確的情況下，因為估測出來的車體質量會有少許的誤差，而造成側向力估測的不準確；車體轉動慣量與質心位置不準確的情況下，側向力的估測就會有較大的誤差存在，原因是因為轉動慣量與質心位置的估測並未收斂至正確的數值，而造成側向力估測的誤差。



第六章 硬體架設與實驗

本研究中為了模擬真實車輛在路面駕駛的情況，架設了一實驗平台，此實驗平台可以用來驗證縱向力估測演算法的正確性，本實驗平台是利用一個輪內馬達模擬一真實車輛輪胎，此輪內馬達是透過 DSP 板控制，而為了模擬真實路面的情況，路面是使用一般市面上販售的輪胎。另外平台上也裝有電子式煞車與模擬輪胎轉向的轉向機構，以便機台在未來可以做更多實驗的驗證。

而在感測器部份加裝了力矩感測器與轉速感測器，分別是量測模擬真實車輛輪胎的輪內馬達轉速與轉動力矩，與模擬路面輪胎的轉速。利用感測器提供的輪內馬達的轉速與轉矩，可以利用第四章的摩擦力估測演算法來估測縱向力，而輪內馬達的轉速與路面的轉速可以計算滑動比，在利用滑動比與縱向力的關係來驗證縱向力估測的正確性。



6.1 硬體架構

6.1.1 輪內馬達

本研究中所使用的輪內馬達是 ELIBIKE 所研發輪內馬達，如圖 6.1，此輪內馬達是適用在電動車或是電單車上，此輪內馬達為一直流有刷馬達，最快轉速可以達到每分鐘 280 轉，而最大轉矩可以到 60 牛頓-米。此輪圈馬達用來模擬真實車輛的輪胎。



圖 6.1：模擬車輛之輪胎

6.1.2 模擬地面之橡膠輪胎

本研究為了模擬真實路面輪胎間接觸時形變的狀況，選用了一般車輛所使用的橡膠輪胎，如圖 6.2，此輪胎在重壓時會有凹陷，可以模擬真實車輛在地面上輪胎形變的結果。



圖 6.2：模擬路面之輪胎

6.1.3 感測器

感測器的部份是使用 FUTEK 所出品的 TRD305 力矩與轉速感測器，如圖 6.3，力矩感測器可以測量 $\pm 63(\text{Nm})$ 的轉動力矩，而測量出來會是一個 $\pm 5(\text{V})$ 間的電壓訊號，而此電壓訊號與量測力矩為一線性關係，利用感測器的電壓訊號，可以得知目前的轉動力矩。

而在轉速部分是一編碼器，最高可以量測到每分鐘 3000 轉的轉速，而此編碼器為一轉 360 個脈衝。



圖 6.3：TRD305 力矩與轉速感測器

另外在模擬地面的輪胎上也裝上一顆電位計，使用此電位計量出的角度訊號後差分後或的轉速，此電位計為 AIRTECH 公司所出品型號為 CP-3HK-100 的電位計，如圖 6.4。



圖 6.4：CP-3HK-100 電位計

6.1.4 DSP 與外部電路

在控制的方面是使用德國 dSPACE 公司所出品的 ds1104 作為控制介面，如圖 5.5，運算速度為 250MHz，此塊 DSP 版有 12 組 PWM，5 組類比數位轉換器 (ADC)，8 組數位類比轉換器 (DAC)，2 組 QEP，1 組 RS232，1 組 RS422，1 組 RS485，還有 20 個的自定義 I/O，主要工作電壓為 10(V)，次要工作電壓為 5(V)。

此 DSP 板會利用 ADC 讀取力矩感測器與電位計的訊號，還有利用自定義的 I/O 接收轉速計的觸發脈衝，在透過 dSPACE 的 GUI 介面 Control desk 來做感測器訊號的處理與摩擦力估測演算法的計算。



圖 6.5：ds1104 控制介面

任何類比的訊號經過 ADC 時，可能都會因為感測器的高頻雜訊的關係，而造成轉換出來的數位訊號有交疊現象而失真，所以在類比訊號前會加上抗交疊濾波器來避免這個情況發生。本研究中將使用二階低通巴特沃茲濾波器 (Butterworth filter) 來實驗抗交疊濾波器，如圖 6.6，截止頻率如(5.1)式。

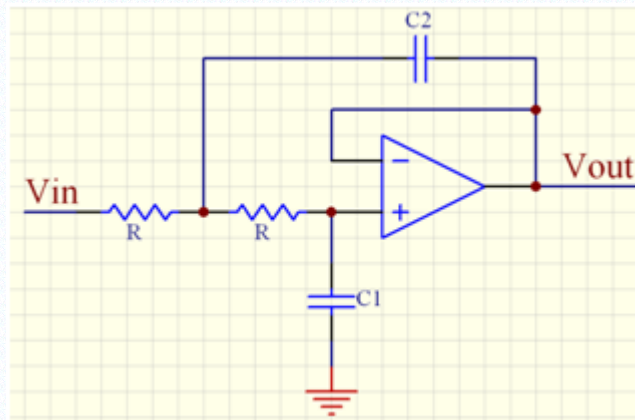


圖 6.6：二階低通巴特沃茲濾波器

$$\begin{aligned}
 C1 &= 0.47 \mu\text{F} \\
 C2 &= 1 \mu\text{F} \\
 R &= 0.04 \text{M}\Omega
 \end{aligned}
 \tag{6.1}$$

$$\omega_s = \frac{1}{R\sqrt{C1C2}} = 36.46 \text{rad} = 5.8 \text{Hz}$$

其中 ω_s 為此低通濾波器的截止頻率。

馬達驅動的部份是使用利基科技的馬達控制模組來做控制，如圖 5.7，此馬達控制模組可以利用外部輸入的 PWM 訊號來控制馬達的轉速與正反轉，在此外部的訊號是利用 DSP 版所發出的 PWM 訊號做控制。

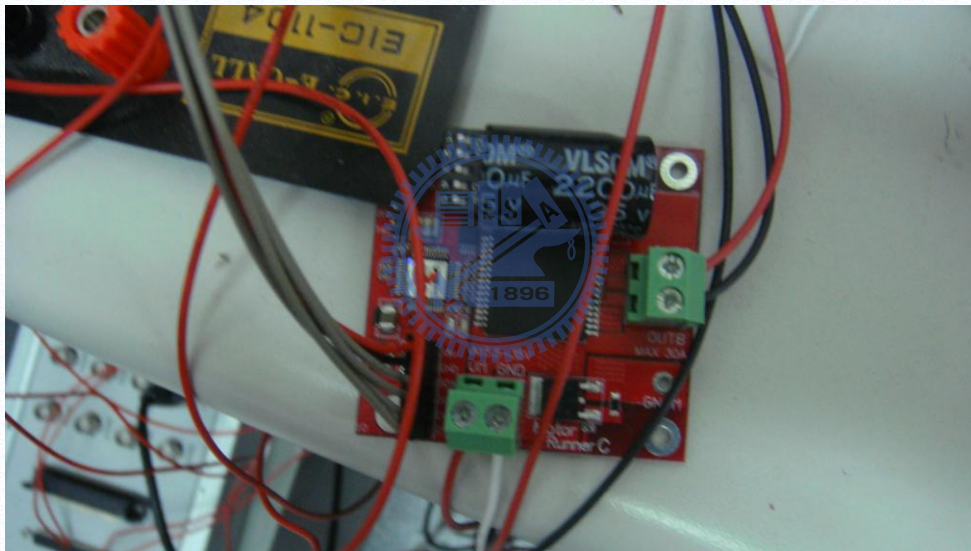


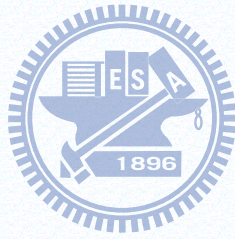
圖 6.7：馬達驅動電路

6.1.5 完整實驗平台

圖 6.8 為完整的實驗平台，包含了上述的感測器，與模擬真實車輛輪胎的馬達，與模擬地面的橡膠輪胎。



圖 6.8：完整實驗平台



6.2 實驗分析與探討

本小節主要是在利用上述的實驗平台來做縱向力的估測，回顧 4.3 式的縱向力估測方程式，其中的轉動力矩與輪胎轉速都可以利用感測器得知，代入方程式之中即可估得欲得知的縱向力。驗證的部份是利用縱向力與滑動比的關係來證明縱向力估測的正確性，由於量測縱向力的感測器價錢非常的昂貴，在此利用摩擦力的特性來評估縱向力估測的正確性，圖 6.9 中就顯示出了滑動比對縱向力之曲線關係，在一開始線性區時的斜率就是代表的輪胎的剛度，因此在後面數據分析的部份會分析滑動比與估測的縱向力間之斜率關係。

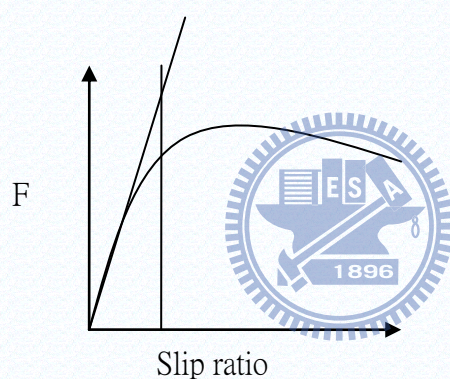


圖 6.9：輪胎剛度示意圖

6.2.1 濾波器設計

在此設計濾波器將感測器的雜訊濾除，主要是濾除輪內馬的轉速、模擬路面輪胎的轉角與輪內馬達的轉動力矩，濾除雜訊的輪內馬達轉速再經由差分成轉動加速度，而模擬路面輪胎的轉角再經由差分得到轉速，濾波器的轉移函數與波德圖如附錄三。

6.2.2 轉動慣量估測

回顧 4.3 式，4.3 式中的輪胎轉動慣量 I_w 為未知參數，在此就將輪內馬達空轉，也就是不與模擬地面的馬達接觸，此時就沒有縱向力的部份，4.3 式就變成 6.2 式，此式就為轉動慣量的估測關係式。

$$\hat{I}_w = \frac{(T_m - T_b)}{\frac{\omega_i^+ - \omega_i^-}{\Delta t}} \quad (6.2)$$

在此利用幾種頻率下，不同大小的加減速訊號來做轉動慣量的估測，在不同實驗時所估測出來的轉動慣量最後再加以平均獲得估測的轉動慣量。以下為 15 筆實驗中的三筆結果，其餘結果見附錄三。



轉動慣量估測一：

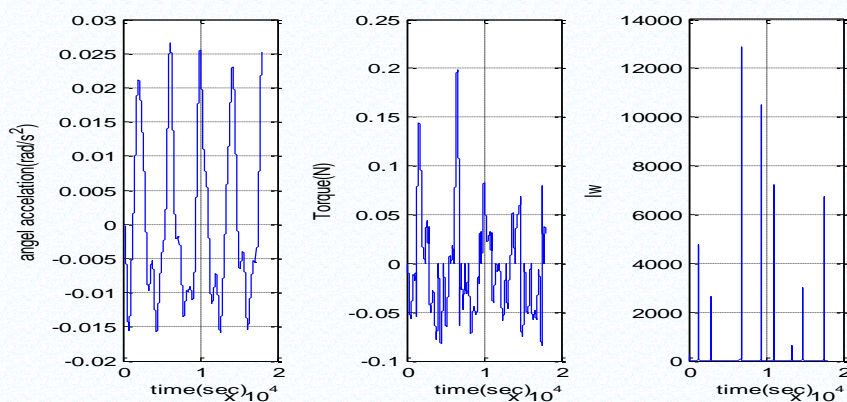


圖 6.10：轉動慣量估測一之感測器訊號(左)轉速(中)轉矩(右)轉動慣量

此組實驗的平均為 8.74 Nm^2 ，標準差為 1.13。

轉動慣量估測二：

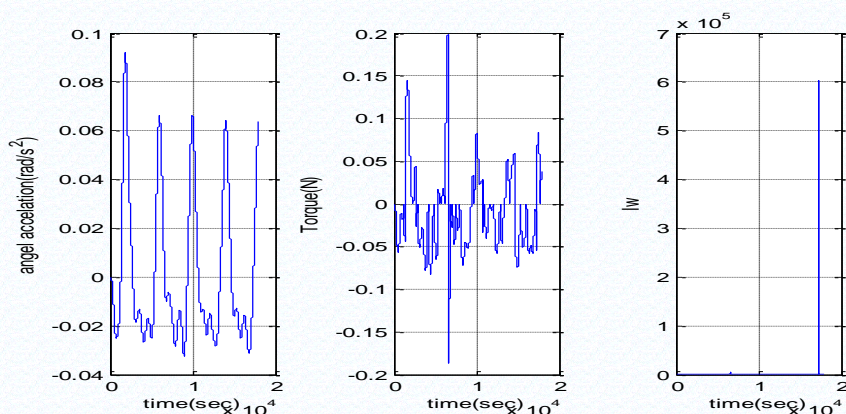


圖 6.11：轉動慣量估測二感測器訊號(左)轉速(中)轉矩(右)轉動慣量

此組實驗的平均為 8.60 Nm^2 ，標準差為 1.04。

轉動慣量估測三：

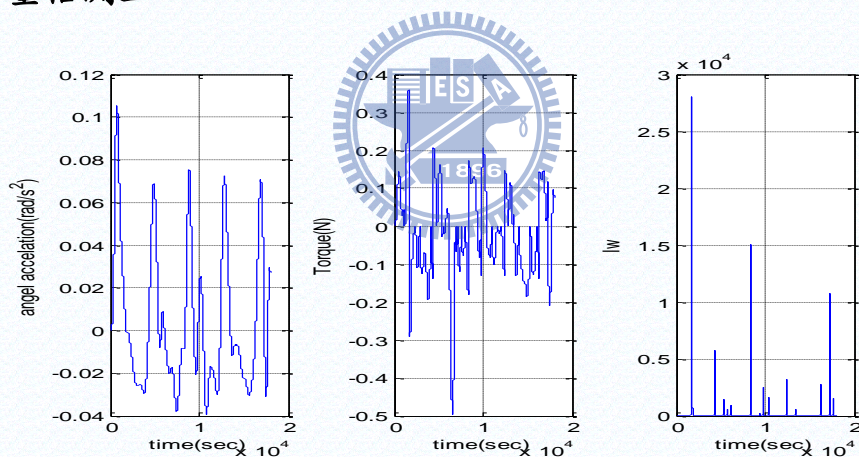


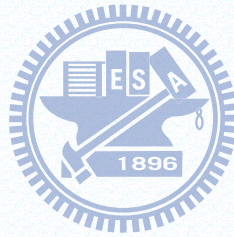
圖 6.12：轉動慣量估測三感測器訊號(左)轉速(中)轉矩(右)轉動慣量

此組實驗的平均為 8.01 Nm^2 ，標準差為 1.21。

取平均後輪胎的轉動慣量約為 8.68 Nm^2 。

6.2.3 縱向力估測與分析

在此給輪內馬達不同的轉速訊號，再比較不同的情況下縱向力估測的情況。首先是驗證的部份，在此給予不同頻率的加減速訊號，再將估測出來的縱向力對滑動比做圖，最後再求出每筆數據下的輪胎剛度。



實驗一：轉速命令為 $6 + \sin(0.5 \times 2 \pi t)$ (rad/sec)

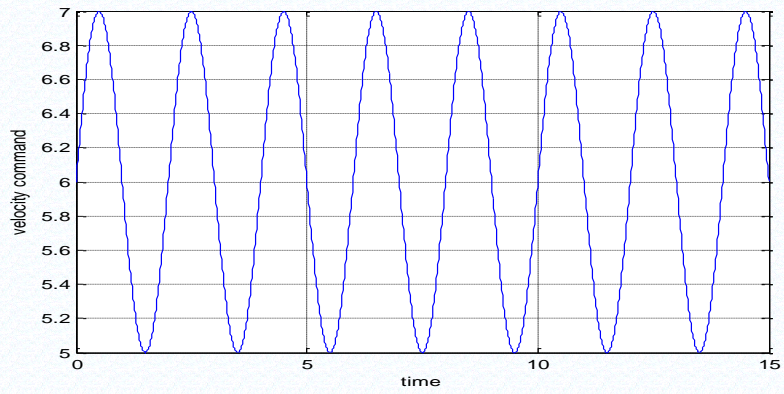


圖 6.13：實驗一轉速命令

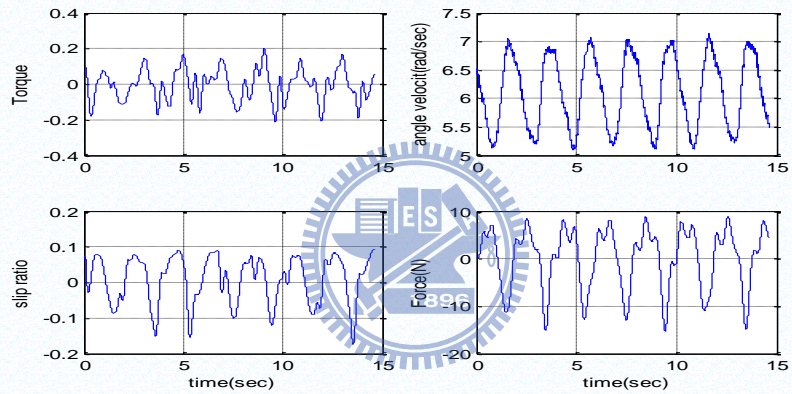


圖 6.14：實驗一量測數據(左上)轉動力矩(右上)輪胎轉速(左下)滑動比(右下)縱向力

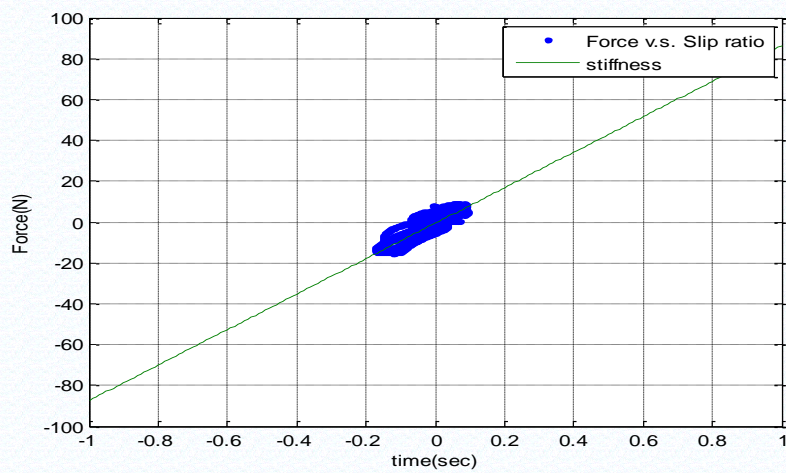


圖 6.15：實驗一之輪胎剛度

實驗二：轉速命令為 $7+2\sin(0.5 \times 2 \pi t)$ (rad/sec)

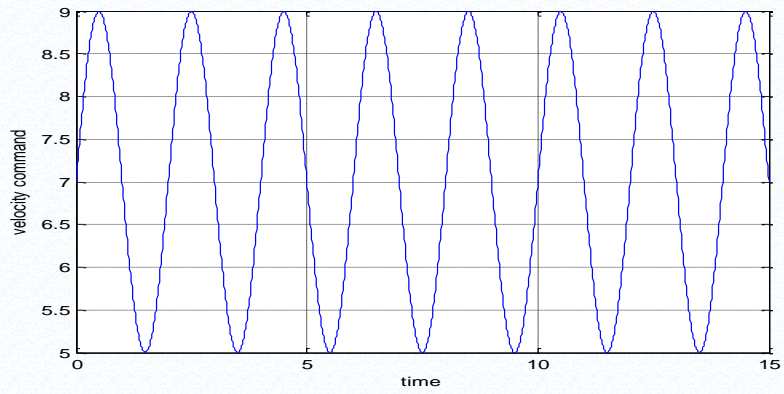


圖 6.16 實驗二轉速命令

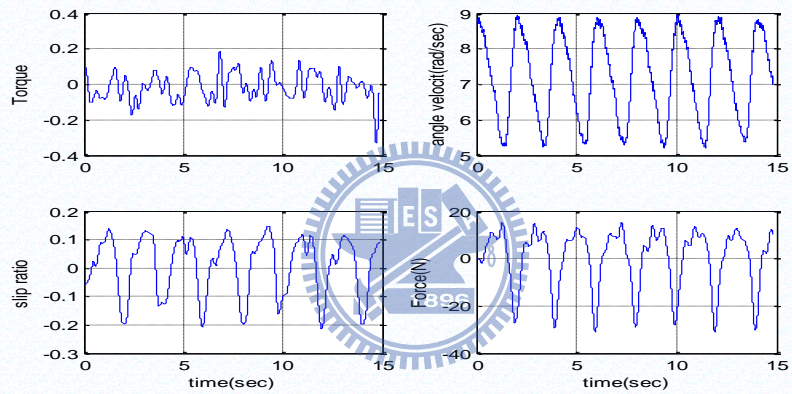


圖 6.17：實驗二量測數據(左上)轉動力矩(右上)輪胎轉速(左下)滑動比(右下)縱向力

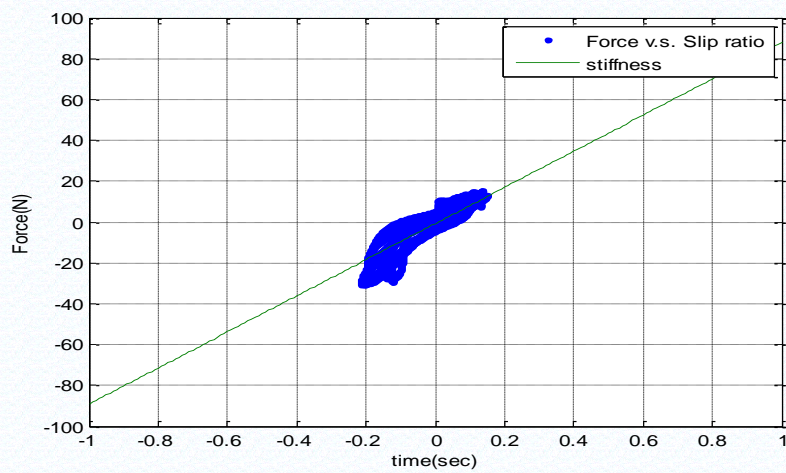


圖 6.18：實驗二之輪胎剛度

實驗三：轉速命令為 $6.5 + \sin(2\pi t)$ (rad/sec)

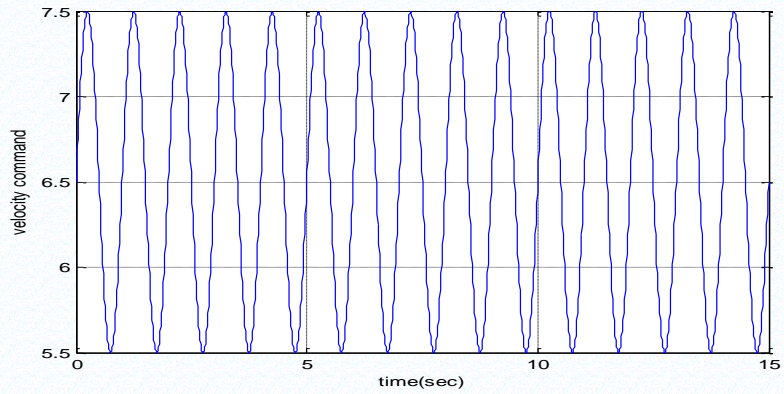


圖 6.19：實驗三轉速命令

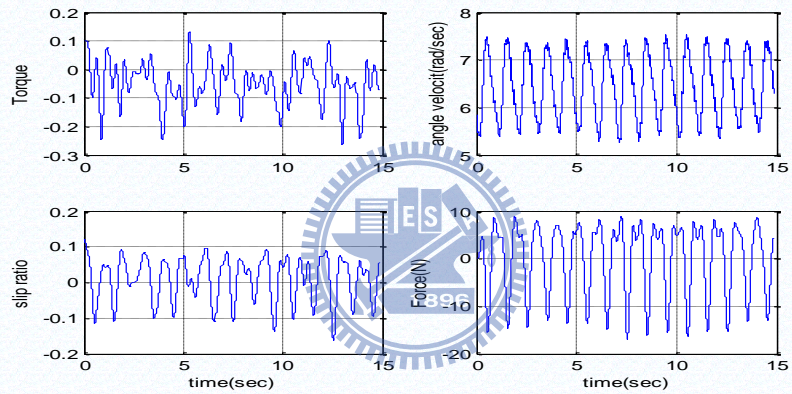


圖 6.20：實驗三量測數據(左上)轉動力矩(右上)輪胎轉速(左下)滑動比(右下)縱向力

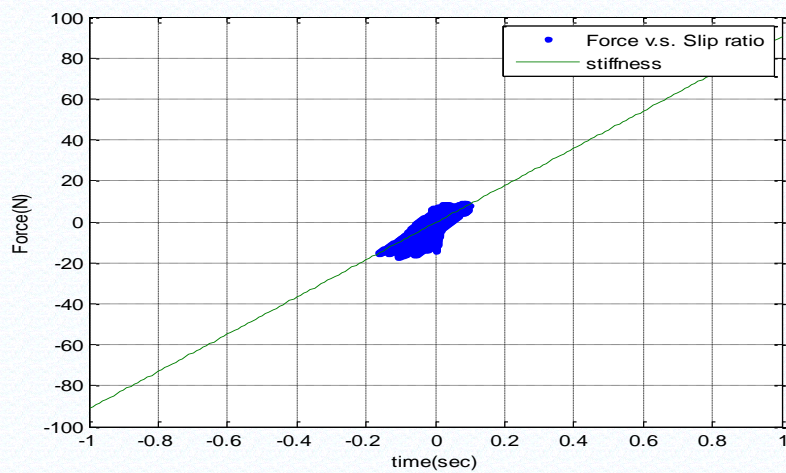


圖 6.21：實驗三之輪胎剛度

實驗四：轉速命令為 $6+1.5\sin(1 \times 2 \pi t)$ (rad/sec)

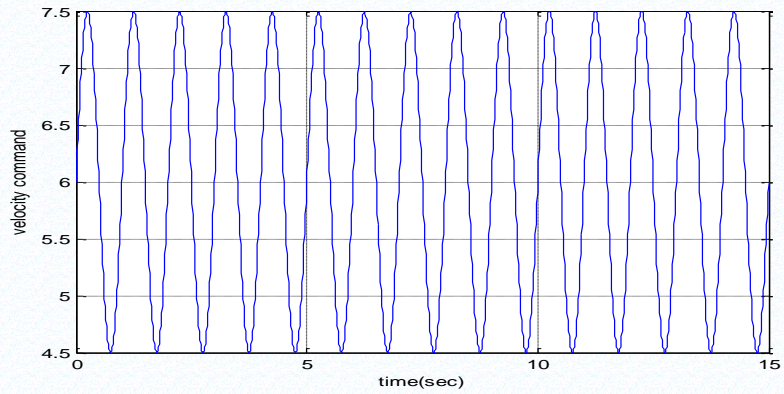


圖 6.22：實驗四轉速命令

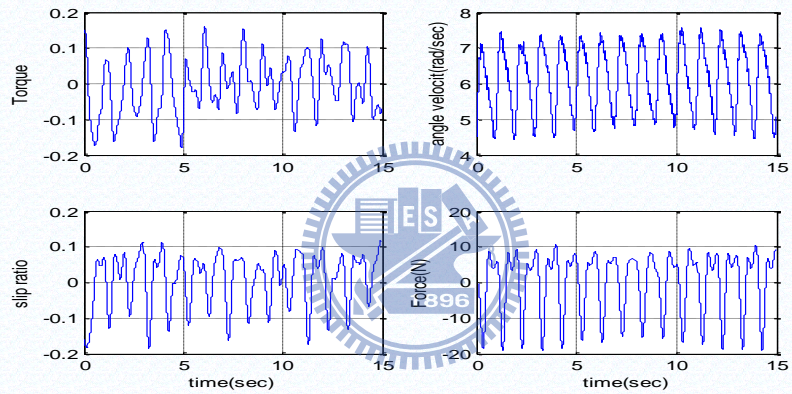


圖 6.23：實驗四量測數據(左上)轉動力矩(右上)輪胎轉速(左下)滑動比(右下)縱向力

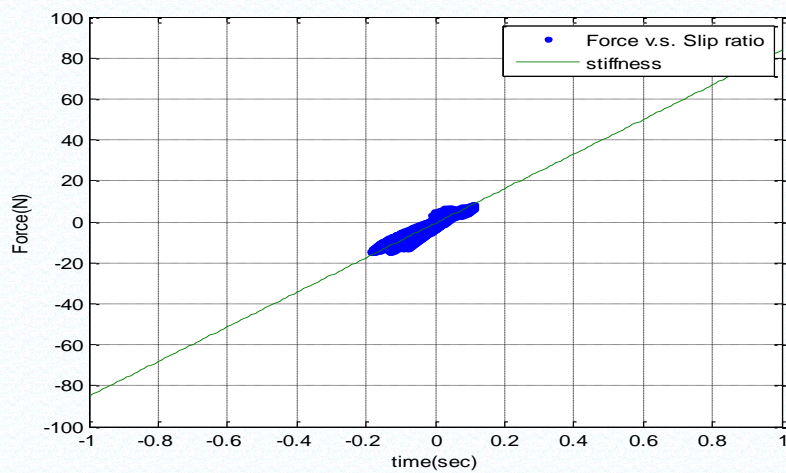


圖 6.24：實驗四之輪胎剛度

實驗五：轉速命令為 $8 + \sin(1.5 \times 2 \pi t)$ (rad/sec)

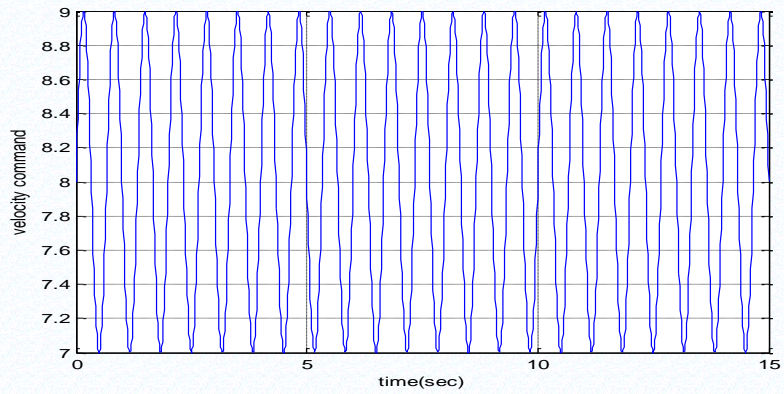


圖 6.25：實驗五轉速命令

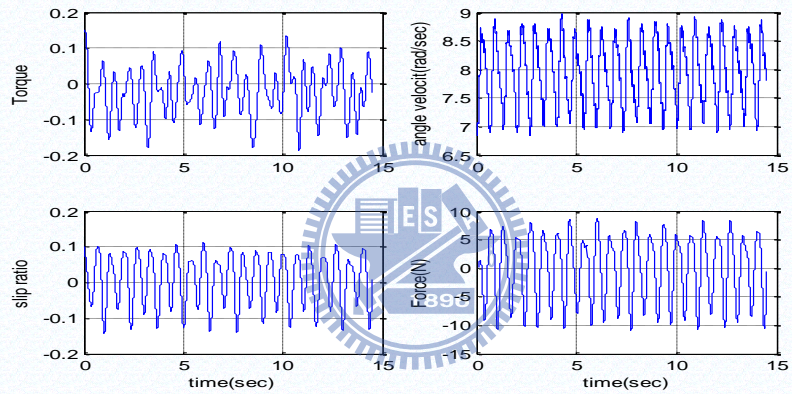


圖 6.26：實驗四量測數據(左上)轉動力矩(右上)輪胎轉速(左下)滑動比(右下)縱向

力

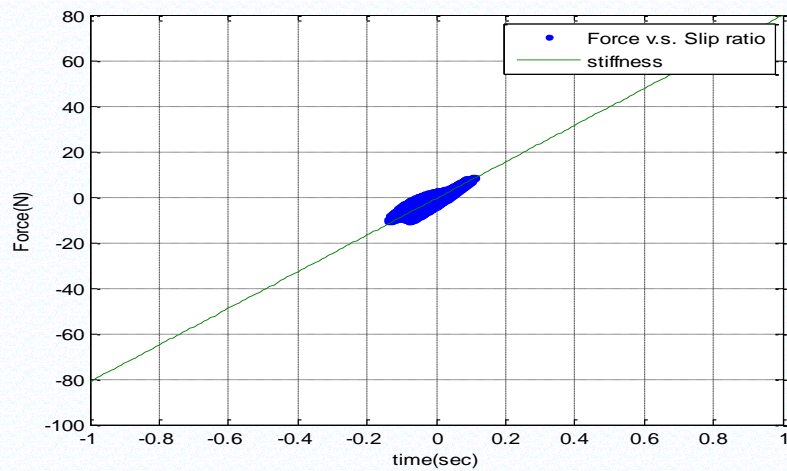


圖 6.27：實驗五之輪胎剛度

實驗結果討論：

以上五組實驗為二十組實驗中較為有代表性的數據，另外十五組數據見附錄三。

在此是使用 MATLAB 中的曲線擬合工具來做縱向力對滑動比之線性區關係式，因為縱向力在線性區時的關係為(6.3)式所示， C_L 為輪胎的剛度，此剛度與滑動比成正比且為一常數，一般來說實際上的摩擦力曲線不會通過原點，所以在分析時會出現截距 bias。

$$\hat{F}_a = C_L s + \text{bias} \quad (6.3)$$

另外為描述縱向力與滑動比間的線性關係，在此利用相關係數(correlation coefficient)來表示，如(6.4)式，此係數越接近一，表示兩者關係越接近直線，反之接近零的話就是表示兩者沒有明顯的關係。

$$\text{correlation coefficient} = \frac{\text{cov}(\hat{F}_a, s)}{\sqrt{\text{var}(\hat{F}_a)\text{var}(s)}} \quad (6.4)$$

在此將實驗一到實驗五的分析表列至表 6.1，其中 s 是滑動比。就如同上述之關係，分別將五個實驗都做分析，首先注意到滑動比對縱向力之關係式，可以發現五組實驗分析出來的直線斜率，在多次的實驗結果中，可以發現此輪胎的輪胎剛度大約都會在 75~90 的範圍內，且直線並未通過原點，這也如同上述所提的實際摩擦力曲線之敘述相符。這幾筆實驗相關係數接近一，這也就表示了滑動比與縱向力之間的關係趨向直線，此關係更能確定實驗的出來的結果都落在線性區

內，所以利用線性方程式來求得輪胎剛度並不會有太大的誤差。

	縱向力對滑動比之線性區關係式	相關係數
實驗一	$86.83s-0.54$	0.89
實驗二	$88.46s-0.71$	0.93
實驗三	$92.79s-0.42$	0.89
實驗四	$84.36s-0.68$	0.84
實驗五	$80.46s-6.63$	0.95

表 6.1：實驗一到實驗五輪胎剛度分析與相關係數



第七章 結論與未來工作

在本研究中發展了一套只需利用車輛動態來估測輪胎與地面間摩擦力之估測方式，且在演算法中分別估測出四個輪胎的縱向力，也使用了摩擦力圓的特性來求得四個輪胎的側向力，並且也對車輛的不確定參數做估測。在模擬的部分使用了高階的完整車輛模型模擬真實車輛的駕駛狀況，另外在硬體實驗的部分設計了可以模擬真實車輛輪胎與地面接觸情形實驗平台，在利用此實驗平台進行縱向力的估測實驗。

在第四章的部份模擬了不同路面情況下 J-turn 與 single lane change 的駕駛狀況，數據中可以看出此演算確實可以估測出四個輪胎個別的縱向力與側向力，且不同大小的轉向角下都可以有不錯的估測效果，而且模擬中都有模擬路面狀況突然改變的情況，數據中也可以明顯的看出估測效果效過並未受到影響，依然可以估測出摩擦力的變化。為了應對車輛參數不準確的情況，在本研究中也使用了期望值最大化演算法來進行不確定參數之估測，雖然就模擬結果來看，有部份的不確定參數並未收斂到正確的數值，但是就摩擦力的估測結果來看，不確定參數估測的結果並沒有嚴重的影響到摩擦力的估測。在實驗中雖然缺乏了真正可以量測縱向力的感測器，但是在此利用了輪胎與地面間的滑動比與側向力之關係式來證明縱向力估測的正確性，分析實驗數據後，也可以發現實驗的結果的確有符合理論的預測關係，所以也證明了實驗中估測出的縱向力之正確性。

未來工作的部分分成以下兩點陳述：

一、在此做摩擦力的估測時，都假設了車輛四個輪胎同時煞車、同時加速，也同時進入摩擦係數相同的路面，但是車輛的駕駛有時會出現左右輪進入了不同摩擦係數的路面下，或是車輛使用了差動式剎車系統，以上兩種狀況都會讓演算法失效，所以這是要克服的一點。

二、在硬體實驗的方面因為缺乏了實際可以量測摩擦力的感測器，所以沒辦法很直觀的討論估測的正確性，也造成了硬體設施無法與車輛模型互相整合成為一個 Hardware-in-the-loop 的實驗平台，因為在側向力的估測實驗需要車輛本身的動態，而本研究架設的平台無法模擬真實車輛的轉向，所以只能靠軟體補助實驗，但是在缺感測器的情況下無法達成此實驗，所以在未來工作會考慮購入感測器來完成側向力估測的實驗驗證。



附錄一

模擬中所使用的車輛參數：

參數	符號	數值
車體質量	m_v	1740kg
質心到前輪輪軸長度	l_1	1.05m
質心到後輪輪軸長度	l_2	1.4m
車輛前輪距離	sb_1	1.65m
車輛後輪距離	sb_2	1.45m
車輛高度	h	0.6m
側傾轉動慣量	I_x	420 kg·m ²
俯仰轉動慣量	I_y	2594 kg·m ²
橫擺轉動慣量	I_z	3480 kg·m ²

模擬中所使用的懸吊系統參數：

參數	符號	數值
彈簧係數	C_1	34000N/m
彈簧係數	C_2	300N/m
彈簧係數	C_3	0.21N/m
阻泥係數	D	N·s/m

模擬中所使用的輪胎參數：

參數	符號	數值
輪胎等效半徑	r	0.3m
輪胎轉動慣量	I_w	2.03 kg·m ²
輪胎彈力係數	K_{wheel}	150000N/m
前輪車輛側傾係數	$k_{1,2}$	0.01
後輪車輛側傾係數	$k_{3,4}$	0.03

非線性輪胎參數：

參數	符號	數值(加速, 定速)	數值(煞車)
縱向輪胎係數	B_x	$22 + \frac{F_z - 1940}{645}$	$22 + \frac{F_z - 1940}{430}$
縱向輪胎係數	C_x	$1.35 - \frac{F_z - 1940}{16125}$	$1.35 - \frac{F_z - 1940}{16125}$
縱向輪胎係數	D_x	$2000 + \frac{F_z - 1940}{0.956}$	$1750 - \frac{F_z - 1940}{16125}$
縱向輪胎係數	E_x	-3.6	0.1
側向輪胎係數	B_y	$2.2 + \frac{5200 - F_z}{4000}$	$2.2 + \frac{5200 - F_z}{4000}$
側縱向輪胎係數	C_y	$1.26 + \frac{5200 - F_z}{32750}$	$1.26 + \frac{5200 - F_z}{32750}$
側縱向輪胎係數	D_y	$2000 + \frac{F_z - 1940}{0.956}$	$2000 + \frac{F_z - 1940}{0.956}$
側向輪胎係數	E_y	-1.6	-1.6

附錄二

濾波器轉移函數與波德圖：

Filter1~Filter3 與第六章所使用的濾波器：

$$H_1(s) = \frac{0.000024908586894 + 0.000049817173789z^{-1} + 0.000024908586894z^{-2}}{1 - 1.985834014316132z^{-1} + 0.985933648663709z^{-2}}$$

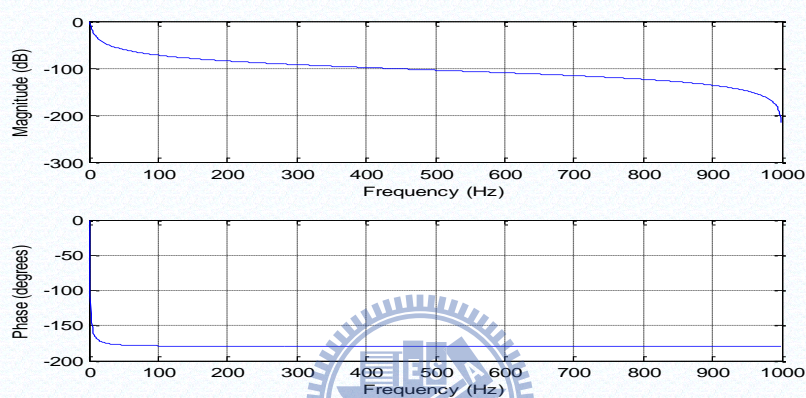


圖 A.1： $H_1(s)$ 之波德圖

Filter4：

$$H_2(s) = \frac{0.000168424141813 + 0.000414042267472z^{-1}}{1 - 0.999171915465057z^{-1}}$$

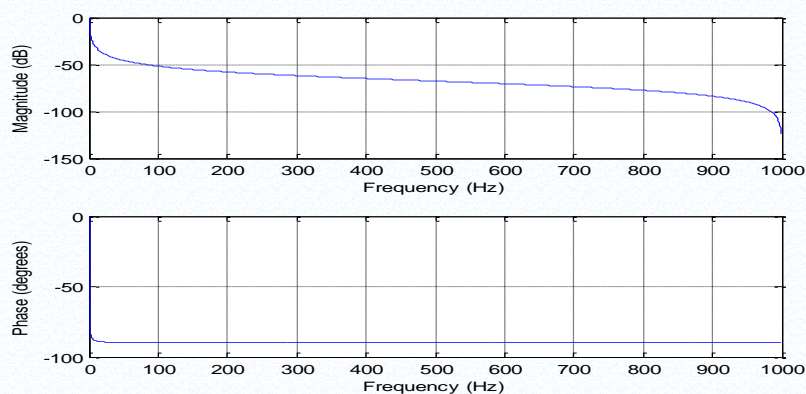


圖 A.2： $H_2(s)$ 之波德圖

附錄三

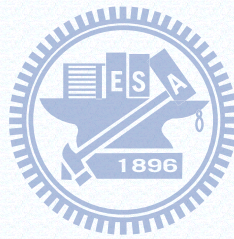
轉動慣量 10 次的實驗結果：

	平均($N \cdot m^2$)	變異數
實驗一	7.95	1.58
實驗二	8.97	0.95
實驗三	9.23	0.36
實驗四	8.52	0.57
實驗五	8.45	0.43
實驗六	8.63	1.01
實驗七	7.45	2.57
實驗八	7.98	1.22
實驗九	9.63	0.66
實驗十	8.42	1.78

縱向力估測的 15 實驗結果：

轉速訊號	輪胎剛度方程式	相關係數	(最大縱向力(N), s)
$3u(t-4)$	$77.62s-0.654$	0.45	(8.54, 0.096)
$6u(t-4)$	$82.11s-0.998$	0.62	(8.73, 0.101)
$9u(t-4)$	$84.32s-0.112$	0.73	(8.62, 0.101)
$4+\sin(0.5 \times 2 \pi t)$	$91.77s-0.852$	0.66	(9.54, 0.123)
$4+\sin(2 \pi t)$	$86.44s-1.001$	0.82	(8.84, 0.081)
$4+\sin(1.5 \times 2 \pi t)$	$77.54s-0.098$	0.89	(8.55, 0.098)
$6+2 \cdot \sin(0.5 \times 2 \pi t)$	$81.91s-0.543$	0.91	(10.12, 0.124)

$6+2*\sin(0.5x2 \pi t)$	$96.82s-0.487$	0.91	(8.25, 0.084)
$6+2*\sin(1.5x2 \pi t)$	$89.08s-0.245$	0.84	(8.67, 0.091)
$7+3*\sin(0.5x2 \pi t)$	$79.79s-0.705$	0.49	(8.45, 0.178)
$7+3*\sin(2 \pi t)$	$75.00s-0.520$	0.58	(9.64, 0.112)
$7+3*\sin(1.5x2 \pi t)$	$78.58s-0.707$	0.63	(8.72, 0.145)
$6+\sin(0.5x2 \pi t)$	$85.42s-0.545$	0.92	(8.86, 0.081)
$7+\sin(0.5x2 \pi t)$	$86.68s-0.429$	0.87	(9.62, 0.102)
$9+ \sin(0.5x2 \pi t)$	$85.55s-0.728$	0.95	(9.33, 0.118)



參考文獻

- [1] J. G. Yi, L. Alvarez, and R. Horowitz, "Adaptive emergency braking control with underestimation of friction coefficient," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 10, no. 3, pp. 381-392, May, 2002.
- [2] J. G. Yi, L. Alvarez, C. Claeys *et al.*, "Emergency braking control with an observer-based dynamic tire/road friction model and wheel angular velocity measurement," *Vehicle System Dynamics*, vol. 39, no. 2, pp. 81-97, Feb, 2003.
- [3] S. Muller, M. Uchanski, and K. Hedrick, "Estimation of the maximum tire-road friction coefficient," *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control-Transactions of the ASME*, vol. 125, no. 4, pp. 607-617, Dec, 2003.
- [4] Bachmann, Th., "The Importance of the Integration of Road, Tyre, and Vehicle Technologies," *FISITA XXth World Congress, Montreal, Canada*, September, 1995
- [5] Eichhorn, U., and Roth, J., "Prediction and Monitoring of Tyre/Road Friction," *XXIV FISITA Congress, London, GB*, 2:67-74, June 7-11. "Safety, the Vehicle, and the Road." , 1992
- [6] Breuer, B., Bartz, M., Karlheinz, B., Gruber, S., Semsch, M., Strothjohann, Th., and Xie, C., "The Mechatronic Vehicle Corner of Darmstadt University of Technology-Interaction and Cooperation of a Sensor Tire, New Low-Energy Disc Brake and Smart Wheel Suspension," *Proceedings of FISITA 2000, Seoul, Korea*, June 12-15 , 2000
- [7] Hollingum, J., "Autonomous Radio Sensor Points to New Applications," *Sensor Review*, 21~2!, 104-106 , 2001
- [8] Breuer, B., Bartz, M., Karlheinz, B., Gruber, S., Semsch, M., Strothjohann, Th., and Xie, C., "The Mechatronic Vehicle Corner of Darmstadt University of Technology-Interaction and Cooperation of a Sensor Tire, New Low-Energy Disc Brake and Smart Wheel Suspension," *Proceedings of FISITA 2000, Seoul, Korea*, June 12-15 , 2000
- [9] Bakker, E., Pacejka, H. B., and Lidner, L., "A New Tire Model With an Application in Vehicle Dynamics Studies," *SAE Transactions, Journal of Passenger Cars*, 98~SAE 890087!, 101-113 , 1989
- [10] Burckhardt, M.: *Fahrwerktechnik: Radschlupfregelsysteme*, Vogel-Verlag, Germany, 1993.
- [11] Kiencke, U. and Daiss, A.: *Estimation of Tyre Friction for Enhanced*

- ABS-Systems. In: Proceedings of the AVEG'94, 1994.
- [12] Burckhardt, M.: ABS und ASR, Sicherheitsrelevantes, Radschlupf-Regel System. Lecture Scriptum. University of Braunschweig, Germany, 1987
- [13] Dieckmann, Th, "Assessment of Road Grip byWay of Measured Wheel Variables," *Proceedings of FISITA '92 Congress, London, GB*, 2:75–81, June 7–11. "Safety the Vehicle and the Road." ., 1992
- [14] F. Gustafsson, "Slip-based tire road friction estimation," *Automatica*, vol. 33, no. 6, pp. 1087-1099, Jun, 1997
- [15] Hwang, W., and Song, B., 2000, "Road Condition Monitoring System Using Tire-Road Friction Estimation," *Proceedings of AVEC 2000, Ann Arbor, Michigan*, pp. 437–442, August 22–24.
- [16] J. O. Hahn, R. Rajamani, and L. Alexander, "GPS-based real-time identification of tire-road friction coefficient," *Ieee Transactions on Control Systems Technology*, vol. 10, no. 3, pp. 331-343, May, 2002.
- [17] . L. R. Ray, "Nonlinear tire force estimation and road friction identification: Simulation and experiments," *Automatica*, vol. 33, no. 10, pp. 1819-1833, Oct, 1997.
- [18] H. Tsunashima, M. Murakami, and J. Miyata, "Vehicle and road state estimation using interacting multiple model approach." pp. 750-758.
- [19] L. R. Ray, A. Ramasubramanian, and J. Townsend, "Adaptive friction compensation using extended Kalman-Bucy filter friction estimation," *Control Engineering Practice*, vol. 9, no. 2, pp. 169-179, Feb, 2001
- [20] G. Baffet, A. Charara, D. Lechner, "Experiment evaluation of sliding mode observer for tire-road forces and an Extended Kalman filter for vehicle sideslip angle," *46th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, LA, USA, Dec. 12-14, 2007.
- [21] C. Canudas-De-Wit, P. Tsiotras, E. Velenis *et al.*, "Dynamic friction models for road/tire longitudinal interaction," *Vehicle System Dynamics*, vol. 39, no. 3, pp. 189-226, Mar, 2003.
- [22] J. T. Yi K, "Observer based estimation of tire-road friction for collision warning algorithm adaptation," 1998.
- [23] S. H. Park, J. Kim, J. J. Choi, *et al.*, "Modeling and control of adhesion force in railway rolling stocks," *Control Syatems Magazine, IEEE*, vol. 28, no. 5, pp. 44-58, Oct, 2008.
- [24] T. K. Moon, "The Expectation-maximization algorithm," *Signal Processing Magazine, IEEE*, vol. 13, no. 6, pp. 47-60, Nov, 1996.
- [25] R. E. Kalman, "A new approach to linear filtering and prediction problems," *Trasactions of the ASME*, vol. 82, pp. 35~45, 1960.