

國立交通大學

土木工程學系

博士論文

擬似三維分層積分淺水波模式之發展



Development of a Semi-3D Layer-Integrated

Shallow Water Wave Model

研究生：洪夢祺

指導教授：楊錦釗 博士

中華民國九十六年六月

擬似三維分層積分淺水波模式之發展

Development of a Semi-3D Layer-Integrated
Shallow Water Wave Model

研究生：洪夢祺
指導教授：楊錦釗

Student : Meng-Chi Hung
Advisor : Jinn-Chuang Yang

國立交通大學
土木工程學系
博士論文



A Dissertation

Submitted to Department of Civil Engineering
College of Engineering
National Chiao Tung University
in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Doctor of Philosophy
in
Civil Engineering
June 2007
Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十六年六月

國立交通大學

論文口試委員會審定書

本校 土木工程 學系博士班 洪夢祺 君

所提論文：擬似三維分層積分淺水波模式之發展

合於博士資格水準、業經本委員會評審認可。

口試委員：_____

許銘配

李俊豪

賴泉堯

楊鼎訓

黃江雁

賴明珣

指導教授：楊鼎訓

系主任：

洪士林

教授

中華民國 九十六 年 六 月 廿五 日

擬似三維分層積分淺水波模式之發展

學生：洪夢祺

指導教授：楊錦釗

國立交通大學土木工程學系博士班

摘 要

本研究發展一交錯網格有限體積擬似三維分層積分淺水波模式，提出二次形狀函數近似層內速度分布以確保層介面之流速與剪力連續，毋需二維水深平均子模式決定水面高程，可有效降低模式計算量。模式之驗證首先透過封閉水池風吹之垂直環流假設案例與解析解比較，除觀察模式對層數之敏感度外，亦檢視模式對環流現象水深方向流速剖面發展過程並反映水面坡降變化之機制，及垂直水深方向黏滯性分布改變對流速剖面形狀之影響；此外，由於底床坡降與粗糙度密切影響明渠流況，經由明渠流假設案例之功能測試檢驗，本研究假設均勻流條件推導渦流滯性與水深、粗糙度、剪力速度之關係，模擬出水深方向均勻紊流強度之拋物線流速剖面，並應用實驗觀測水深方向紊流強度拋物線分布，模擬出對數型流速剖面。

關鍵字：三維模式、分層積分、淺水波模式、風剪環流

Development of a Semi-3D Layer-Integrated Model for Shallow Water Flow

Student: Meng-Chi Hung

Advisor: Jinn-Chuang Yang

Department of Civil Engineering
National Chiao Tung University

ABSTRACT

A novel semi-three-dimensional (semi-3D) layer-integrated approach was proposed in this study for the shallow water wave computation. A quadratic shape function proposed to approximate the velocity distribution in layer ensures the continuity of velocities and shear stresses at interfaces. To discretize the governing equations, the finite volume formulation with staggered grid is used. As the two-dimensional (2D) sub-model for locating the free surface is not needed in this approach, the computational time consumption has been dramatically reduced. The model was verified through the wind-induced circulation in a closed basin by comparing the velocity profiles to the analytical solution. The formation of the velocity profiles due to change of viscosity distribution and the evolution process of water surface slope were also investigated. Further, the eddy viscosity is estimated by a function related to discharge, water depth, and Manning's n under the assumption of parabolic distribution of longitudinal velocity along the vertical direction for open channel flows. Two designed hypothetically cases were conducted to examine the proposed eddy viscosity relation and to demonstrate the capabilities of the proposed model.

Keywords: three-dimensional model, layer-integrated, shallow water wave model, wind-induced circulation

誌 謝

承蒙恩師 楊教授錦釗的悉心指導與諄諄教誨，於治學與為人處世多所啟發，使本文得以順利完成，謹致由衷謝忱與敬意。感謝口試委員台大農工系許教授銘熙、台大土木系黃教授良雄、成大水利系蔡教授長泰、成大水利系賴教授泉基、交大應數系賴教授明治細心匡正、惠賜卓見，使本文更臻完善。

感謝大學長張教授哲豪與同窗羅正工程司克信不間斷地鼓勵，謝博士德勇與蔡博士東霖兩位學長於論文的研討與寶貴意見，以及研究室伙伴們與求學過程所有同學伴我一起學習、一起成長，並陪我度過低潮而能持續論文研究，各位的扶持與砥礪永銘我心。

爸媽的無怨無悔的照顧與關懷，哥哥、姊姊的啟發與鼓勵，是求學與研究過程中最大的動力與精神支柱，謹以本文與父母兄姊分享這份喜悅，並表無限感恩之心。



目 錄

摘要	i
Abstract	ii
誌謝	iii
目錄	iv
表目錄	vi
圖目錄	vii
符號表	ix
第一章 緒論.....	1
1.1 研究背景與動機.....	1
1.2 文獻回顧.....	3
1.3 研究方法.....	7
1.4 章節介紹.....	8
第二章 分層積分淺水波模式理論架構.....	10
2.1 雷諾平均控制方程式.....	10
2.2 分層積分控制方程式.....	12
2.3 邊界條件.....	17
2.4 明渠流之垂直紊流黏滯係數推估式.....	17
第三章 分層模式(一)—不考慮層介面連續.....	23
3.1 有限體積法與數值差分式.....	23
3.2 數值演算方法.....	26
3.3 模式檢討.....	27
第四章 分層模式(二)—考慮層介面連續.....	32
4.1 層介面剪力連續條件限制式.....	32
4.2 數值架構.....	38

4.2.1	有限體積法	38
4.2.2	數值差分式	40
4.2.3	水柱代數方程組	40
4.2.4	求解步驟	42
4.2.5	數值穩定限制條件	44
4.3	小結	44
第五章	風剪垂直環流場驗證	47
5.1	層數對流速剖面之影響	47
5.2	模式對流場物理現象之反應機制	49
5.3	黏滯係數分佈型態對流速剖面之影響	50
第六章	明渠流之計算與比較	61
6.1	紊流黏滯係數關係式之驗證	61
6.2	紊流黏滯係數分佈型態對流速剖面之影響	62
6.3	底床層厚度對流速剖面之影響	64
6.4	底床邊壁效應對流速剖面之影響	65
6.5	風剪對流速與水位剖面之影響	66
第七章	結論與建議	83
7.1	結論	83
7.2	建議	84
參考文獻	85
附錄	修正湯瑪斯法	89

表 目 錄

表 6.1 直線渠道具不同曼寧 n 值之正常水深與模擬水深之比較68



圖目錄

圖 2.1	分層模式層切割方式與變數配置示意圖	22
圖 3.1	交錯網格有限體積法變數之控制體積於 x-y 於平面之配置圖	30
圖 3.2	分層模式(一)求解步驟流程圖	31
圖 4.1	分層模式(二)求解步驟流程圖	46
圖 5.1	不同層數對風剪環流場流速剖面之影響	52
圖 5.2	不同層數對風剪環流場水面坡降之影響	53
圖 5.3	風剪環流場流速剖面之發展過程(縱向中間長度處)	54
圖 5.4	風剪環流場流速剖面之發展過程(靠近背風邊界處)	55
圖 5.5	風剪環流場流速剖面之發展過程(靠近迎風邊界處)	56
圖 5.6	風剪環流場水面坡降之發展過程	57
圖 5.7	風剪環流場不同水深處之流速發展過程	58
圖 5.8	不同型態之黏滯係數分佈對流速剖面之影響(均勻 vs 拋物線型)...	59
圖 5.9	不同型態之黏滯係數分佈對流速剖面之影響(均勻 vs 梯型).....	60
圖 6.1	不同曼寧 n 值對直線渠道之水位剖面之影響	69
圖 6.2	不同曼寧 n 值對直線渠道之流速剖面之影響(渠道中間長度處)	70
圖 6.3	三種不同黏滯係數分佈型態	71
圖 6.4	黏滯係數分佈型態對流速剖面之影響	72
圖 6.5	黏滯係數分佈型態對無因次流速剖面之影響	73
圖 6.6	使用層數對流速剖面之影響(黏滯係數均勻分佈)	74
圖 6.7	使用層數對流速剖面之影響(黏滯係數拋物線型分佈)	75
圖 6.8	使用層數對無因次流速剖面之影響(黏滯係數拋物線型分佈)	76
圖 6.9	底床邊界速度對流速剖面之影響	77
圖 6.10	底床邊界速度對無因次流速剖面之影響	78
圖 6.11	風剪對流速剖面之影響(黏滯係數均勻分佈)	79

圖 6.12 風剪對流速剖面之影響(黏滯係數拋物線型分佈)	80
圖 6.13 風剪對水位剖面之影響(黏滯係數均勻分佈)	81
圖 6.14 風剪對水位剖面之影響(黏滯係數拋物線型分佈)	82



符 號 表

一、變數

h = 層厚度

n = 曼寧粗糙度係數

p = 靜水壓力

u = x-方向流速

u_* = 剪力速度

v = y-方向流速

A = 水柱動量離散代數方程組係數矩陣

C = 任意常數

F = 層介面通量

H = 水深

K = 總層數

S = 坡降(底床或能量)

S^u, S^v = 動量方程式之源項

U = 水深平均流速

α = Elder 黏滯係數關係式之係數

γ = 水體單位體積重量

η_B = 底床高程

η_k = 層介面高程

η_s = 水面高程

μ = 動力黏滯係數

ν = 運動黏滯係數

ρ = 水體密度

τ = 剪應力



τ_s = 風剪應力

二、下標

e,s,w,n = 控制體積之各方向控制面

h = 水平方向

k = 位於第 k 層與第 (k-1) 層間之層介面

k+1/2 = 第 k 層之層平均物理量

m = 啞變數，以連續方程式計算垂向速度時使用

v = 垂直方向

E,S,W,N = 與該計算控制體相鄰之各控制體中心點

P = 該計算控制體中心點



第一章 緒 論

1.1 研究背景與目的

自然界流動之水體表面與大氣相通，液面壓力保持與大氣相等，液體內部壓力不平衡時可反映在液面之升降，為管流所沒有之自由度，故名為自由液面流，自然界中的水體流動，舉凡漫地流、河川、湖泊、水庫、河口、海岸、洋流等，多為自由液面流；相對於深海洋流，河川、湖泊與海岸水體之運動受限於底床邊界，其運動行為近乎水平方向，即所謂淺水波運動，淺水波運動為重力所帶動而加速，當重力與底床阻力達到平衡時，則流態不再改變而形成均勻流，然而天然河道、湖泊或水庫由於幾何邊界不規則之影響，水體因重力與邊界阻力不平衡、或匯入不同密度之水體而形成各種複雜流況，如河川彎道水面超高造成之二次流、水庫挾砂水流因密度不同而造成之異重流或密度層變流、河口因海水鹽度而形成之垂直環流等，均直接或間接影響我們日常生活。此外，在水利工程的領域裡還有許多淺水波運動之流場為工程師欲瞭解或解決之問題，例如潰壩波的傳遞、高程差所引起的水躍、流動水體遭遇水工結構物所激起的碎波、地震時因搖晃所引起之水體震動、海洋水工物結構因地形變化所產生之淺化碎波作用、明渠變量流之水面急劇變化、水流經過水工結構物如橋墩、潛堰、丁壩...等之流場。

為解決水利工程相關問題而尋求改善方案時，一般都先經由物理模型試驗或數值模擬來檢討改善方案的功效，物理模型一直是科學家研究流體相關問題常用之工具，根據原型之縮尺所建造的物理模型，其試驗結果的可信度

較易被認同，但因其需要較多的經費、較大的試驗場所、較長的試驗時間及龐大人力的配合，使其在試驗進行時缺乏變通的彈性，一般均僅能針對一、兩個既定的方案進行模擬試驗，因此，常用之物理模型試驗係以縮小尺度之模型，觀察並量測流體的物理性質及運動特性，然而受限於模型相似律問題，對於輸砂或水躍等複雜流況，量測結果往往易受尺度效應(scale effect)與邊界影響而產生誤差，且量測儀器亦不可避免地造成局部流場、溫度場或濃度場的改變，而影響觀測精度。

數值模擬乃利用數學模式預測物理現象，在有限差分法、有限元素法、有限體積法與有限解析法等數值方法提出後，使計算流體力學蓬勃發展，與物理模型試驗相較之下，數值模式計算具有經濟、效率、資料完整與功能強大等優點，近年來由於電子計算機的高速化與普遍化，電腦記憶體容量與計算量的限制已大幅降低，利用電腦演算的數值模式，將可克服物理模型試驗的限制，並可充份發揮數值模擬的預測功能，設計不同的可行方案進行模擬分析，以提供改善方案參考。



就淺水波運動現象，水體運動受底床邊界限制，其運動方向幾為水平，垂直方向之運動相對於水平甚小，垂直動量方程式通常簡化為靜水壓分佈，就所欲分析問題之需要，又進一步將三維之控制方程式依斷面或水深積分簡化為一維或二維模式。對於河川與海岸等大範圍之流場模擬，由於一維與二維模式相對於三維模式具有計算快速、模式容易收斂等優點，較適合作長時間之模擬，目前已廣泛使用於工程實務上；然而，一維模式僅能看出洪水波沿河道方向之運動現象，平面二維水深積分模式可提供流場與泥砂濃度之平面分布，但缺乏深度方向資訊，相對地，垂直二維雖可提供垂直面上之流場與濃度分布，但缺乏側向資訊。許多水利工程常見問題，其運動方向雖近似水平方向，但其流場及濃度等物理量之垂直分佈卻為影響傳輸行為之重要因

子，例如水庫泥沙運動、湖泊風剪環流場與河口垂直環流場及其鹽度分佈等，無論是一維或平面二維模式均無法描述其物理現象，擬似三維淺水波運動模式除能描述其自然界具自由液面之水體運動行為外，並能提供深度方向之分佈資訊，相對於全三維流體動力模式(fully three-dimensional hydrodynamic model)，具有計算經濟與收斂快速，適合作為水利工程相關問題之分析工具。

1.2 文獻回顧

二維水深平均淺水波數值模式因忽略水深流速、濃度等物理量在水深方向之相關資訊而計算快速，已經被廣泛應用在河川、水庫與海岸中之非定常自由液面流模擬，但是，當物理量之水深方向變化為欲探討問題或現象之關鍵資訊時，如河川彎道二次流、水庫泥砂異重流、與河口海水入侵等問題，水深平均模式並無提供相關資訊以瞭解其物理現象或提供決策之依據。例如河道中水深方向流速非均勻分佈以及側向二次流造成之延散剪應力影響則相對重要，考慮與否以及如何處理將影響模擬結果，Molls 與 Chaudhry [25] 結合層流、紊流與延散剪應力的等效應力觀念，忽略二次流垂直方向之速度。但彎道中水流實為三維流場，Flokstra [8] 指出延散剪應力對彎道水流之影響，Lien 等人[21] 進一步指出未處理延散剪應力，在模擬彎道水流時，流場呈現如勢流(potential flow)中之自由渦流(free vortex)，外岸流速小，內岸流速大。Lardner 與 Cekirge [17] 將水平與垂直流場分開求解，首先利用二維深度平均模式(depth-averaged model)計算水位分佈與深度平均速度分量，再透過求解二水平方向之動量方程式，以獲得水平速度分量在垂直方向之分佈，並用以計算深度平均模式中因垂直方向不均勻速度分佈所形成之延散項，重複上述之步驟直到滿足收斂條件為止；此一概念亦有許多學者應用於

擬似三維海岸水動力模式之發展，探討河口與海灣之環流場與鹽度分佈 (Wang [34];吳等人[36])。

隨著電腦計算能力快速發展，許多求解雷諾平均(Reynolds averaged) Navier- Stokes 方程式之三維流體動力模式開始應用到天然河川之模擬，對於河川或水庫之自由液面流動壓模式，大多對自由液面邊界條件進行簡化，以降低複雜度、提高穩定度。Demuren 與 Rodi(1983)使用鋼性蓋板(rigid-lid)概念，自由液面可視做對稱平面，液面高程變化變化可由對稱平面上的壓力呈現，並將此概念應用至蜿蜒河道污染質擴散之三維模擬。Miyata 等人 [24]在移動網格座標系統上採交錯式網格(staggered grid)分佈，以有限差分法模擬船舶前進時之周圍流場，並假設自由液面之黏滯性很小可忽略，將自由液面上之正向剪力邊界條件簡化為大氣壓力自由液面邊界條件，並刪除切線剪力邊界條件，求解層流狀態下之自由液面流模式，為解決自由液面在計算過程中產生不合物理現象之擾動，接引用自由液面平滑化技巧，使計算獲得收斂解。Neary [27]發展完全三維分流模式，假設水面變化不大採固定水面網格，考慮紊流流場特性，探討取水工流場分布特性。Gessler 等人[9]發展三維動床模式探討彎道流場特性與底床變動現象，考慮紊流效應與懸浮載分布，並探討底床變動與河床沖蝕、懸浮載沉降、河床載傳輸等機制。Wu 等人[35]以 FAST3D 為基礎，將有限體積法三維動壓模式應用至河道水流與河床沖淤模擬上。

Hervouet 與 Van Haren [13]提出移動邊界之三維 Navier- Stokes 模式，內建二維靜水壓假設之淺水波方程，其計算方式係先由二維淺水波方程求解水面高程，依據所得之水面高程利用移動邊界法建立三維網格來求解三維流場，並依據三維計算所得水面邊界之壓力分布，再次修正水面高程。Meselhe 與 Sotiropoulos [23]同樣以雷諾平均 Navier- Stokes 模式，應用同一概念但容

許自由液面層之網格變形，讓模擬結果網格變形調整下達到收斂解，因此毋需每一迭代均重建一次網格，較 Hervouet 與 Van Haren [13]有效降低計算量，但對於非定常流之模擬，對每一時間步驟 Δt ，其網格仍需針對水深變化而重建。Ahsan 與 Blumberg [1]發展三維水理模式探討湖泊內水質問題與溫度分布，假設水庫內靜水壓分布，由水平方向動量方程式求解水平方向流場，代入連續方程式得到垂直方向速度，並考慮紊流擴散之效應。此外，由於目前大部份靜壓三維模式對於渦流滯性係數常引用經驗剖面假設(Davis & Rodi [4]; Heap & Jone [12])，且因這些經驗剖面假設並不具有通用性，故選用不同的經驗剖面假設，將產生不同之計算結果。

Osher等人[29]提出的等位函數(Level set)法通過設置一個距離函數隱式跟蹤自由液面，並且將介面條件融入控制方程式，可在整個計算域內用統一的差分式來解，因此整個計算的過程變的簡單許多，而且變的具有較大的通用性；由於該方法不涉及座標轉換，可使用的差分形式較多，因此容易使用較高精度的差分式，已被成功地用於解決一些二相流的問題，其基本概念是，將兩種界質用統一的N-S方程求解，在介面兩側分別採用兩相流各自的密度、粘性，並在自由液面上給與一適當的函數，定義 ϕ 為空間中某點到分界面有方向的垂直距離，目前該方法已應用於鋒面運動(Osher與Sethian [29])、渦漩運動模擬(Harabetian et al. [10])以及不可壓縮二相流計算(Sussman et al. [32])等。Hirt及Nichols [14]提出流體體積法(Volume of Fluid, VOF)，將液體在一個網格中佔有之體積比率當作指標，以訂定流場中氣、液分離相之介面，計算體積比率之改變即可追蹤該分離界面之運動，即利用一fractional volume來標記某一計算網格為水($\phi=1$)或空氣($\phi=0$)或為自由液面($0<\phi<1$)，由網格內流體體積函數值，可決定網格內之液面斜率，進而可決定液面形狀，流體體積法可用於不同相位接觸界面流場，且對碎波亦具處理能力，因此廣泛應用在不同領等位函數法模擬三維自由液面流域。已廣泛應用於化工領域之CFX-4(AEA Technology [2])即為使用VOF的商用程式之一，由於其

模組化之概念並預留模組供使用者延伸定義對實務應用保有相當彈性，Faure等人[7]將入流、出流等邊界處理嵌入CFX-4用以模擬河川之自由液面流流場，提升全三維流體動力模式之實用性。

二維模式在計算時間上相對於三維模式節省許多，較適合作長時間之模擬，但由於二維模式須引入二次流速度分布，然引入之速度分部是否符合實際無狀況並無法得知，三維模式能計算河道任意點之流場，但其所花費之計算時間(CPU time)甚鉅，且固定網格無法反映水面之變化，分層(multi-level or multi-layer)模式則是對擬似三維模式分層積分推導而得，若層數夠多則可得與擬似三維模式相近之精度，且亦可減少層數適度降低擬似三維模式之計算量並避免尺度效應，正好可達成二維模式與三維模式無法完成之部分，而且，由於分層模式在水深方向使用層厚度(或水深分割)之概念取代三維網格，容許自由液面隨時間或迭代變動，因此沒有每次迭代均須重新產生網格的問題，有效降低模式計算量，已經成功應用在大範圍之海岸與河口問題。Choi [3]採消散 Galerkin 有限元素法發展分層積分泥石流模式，採用移動與固定格網並行方式探討泥石流進入水庫之前進速度與淤積現象；Li 與 Zhan [20]提出分層有限元素模式並用於東京灣灣流之模擬，Kim 與 Lee [16]則應用基於多層概念之有限差分模式 BACHOM-3 模擬韓國 Suyoung 灣，Li 與 Gu [19]使用分層積分之概念探討港灣內之潮汐沖刷與底床污染物交換之問題，Shankar 等人[31]使用相同概念發展河道之有限差分水理模式應用於河道突縮、突擴與水門下游之模擬。

分層模式在河口或海岸問題在河口或海岸問題之模擬已經相當成熟，但因河口或海岸問題中，水位變動固定於海平面附近，其變動範圍遠小於水深，並無流量—水位是否合理之困擾，若應用至應用至河川或水庫問題時，自由液面位置之決定仍未解決。Lin 與 Falconer [22]則將分層概念應用至英

格蘭東北海岸 Hummer 河口感潮帶中乾濕交替區域之模擬，但因模式缺少流量－水深平衡機制，仍需使用二維水深平均子模式來決定自由液面之位置。顏[38]發展一假設靜水壓分佈之擬似三維曲線座標分層紊流模式，能模擬湧浪、潰壩等自由液面流，並應用於丁壩周圍流場之模擬。

1.3 研究方法

應用分層概念求解三維模式係於水深方向使用層厚度(或水深分割)之概念取代三維網格，容許自由液面隨時間或迭代變動，因此沒有每次迭代均須重新產生網格的問題，有效降低模式計算量，此概念應用於河口或海岸等淺水波問題之模擬已經相當成熟，但在河川與水庫等問題存在水位－流量之關係，水深之決定仍須仰賴二維子模式等，本研究擬發展一擬似三維分層積分淺水波模式，毋須藉助於二維子模式決定水深，能應用於河川或水庫之模擬，降低完全三維模式對自由液面處理之困難及耗費大量計算時間，並改善深度平均二維模式無法得知深度方向之流場分布，期能對河川與水庫內流場作較精確之分析。

蔡[37]將分層積分概念應用於區域地下水與地層下陷模擬，並引入二次形狀函數確保層介面間之地下水水頭及層介面間地下水通量連續，本研究延伸此概念應用至自由液面流之計算，透過二次形狀函數與層介面速度、剪力連續之概念，發展經濟、效率之分層積分數值模式，模式中流體在水深方向將劃分為若干層，將每一層之控制方程式沿垂直方向積分，可得二維層厚度平均控制方程式；然後應用二次形狀函數於層內部之速度分佈，基於層介面速度連續之概念，可得到到形狀函數之係數，進而得到層上部與底部之剪應

力分布，進一步藉由層介面剪力連續之條件，推得層介面速度限制式，將各層積分控制方程式與各層介面速度限制式連結可得水柱方程組。模式建立在卡氏座標系統上之結構網格(structure grid)上，於交錯網格(staggered grid)上布置模式之變數，使用具守衡特性、已廣泛應用於計算流體力學之有限體積法(Finite Volume Method)離散控制方程式。首先在垂直方向利用隱式法求解各水柱方程組可得各水柱垂直方向之速度剖面，然後逐次求解各水柱方程組；接著，求解層連續方程式，透過層連續方程式可計算得各層界面間之通量及層界面上之垂直速度，由底層開始逐次求解至自由液面層，可得水位變動量；並透過迭代方式以求得每一時間步驟之收斂解。

本研究透過與 Heaps [12]針對定常層流底床不滑移狀況，推導出封閉邊界水體如湖泊或水庫表面受風吹引起之垂直環流場沿水深方之流速剖面解析之比較，並檢視流速剖面之發展過程是否能反映，水面受到風剪應力帶動，表面水體朝與風同方加速，進而帶動更內部之水體，並在表面水體會產生堆升，進而造成底部水平方向壓力不平衡而造成底部水體朝與風反向運動之物理現象，來驗證模式是否具模擬自由液面流場之機制；此外，進一步透過假設之直線渠道案例驗證文中推導之紊流黏滯係數估算式，並計算比較不同黏滯係數分佈型態、液面與底床邊界等條件等對流速剖面與水深之影響，展現模式模擬明渠流之能力。

1.4 章節介紹

前述以闡明本研究之背景與目的、文獻回顧、研究方法，茲扼要說明本文章節之內容。

- 第一章 **緒論**：闡述本研究之背景與目的，並回顧三維自由液面流之發展過程、計算方法與應用範圍，及其遭遇問題之相關文獻，提出本文之研究方法與解決方式。
- 第二章 **分層積分淺水波模式理論架構**：由三維 Navier-Sokes 方程式基於靜水壓假設，簡化為擬似三維模式，經分層積分得層積分控制方程式，並簡述邊界條件之處理與推導紊流黏滯係數關係式。
- 第三章 **分層模式(一)－不考慮層介面連續**：為本研究所嘗試但未成功之分層模式，簡述其數值架構與計算流程，並檢討該分層模式所遭遇之問題。
- 第四章 **分層模式(二)－考慮層介面連續**：經由分層模式(一)之經驗，改進分層模式數值架構，為本研究目前使用分層模式，簡述其數值架構、引進二次形狀函數以推導層介面剪力連續條件限制式與模式計算流程及收斂條件。
- 第五章 **風剪垂直環流場模式驗證**：透過風剪環流場之解析解比較，驗證模式之機制與精度，並透過不同紊流黏滯係數分佈測試模式對不同流速剖面之計算能力。
- 第六章 **明渠流之計算與比較**：透過假設渠道案例之計算與比較，驗證本研究提出之紊流黏滯係數推估式，並針對不同底床粗糙度、黏滯係數垂直分佈型態、底床滑移邊界及液面風剪作用等，測試模式之特性。
- 第七章 **結論與建議**：簡述本研究突破現有三維自由液面流發展所遭遇之難題，與後續研究所需改進之建議及研究方向。

第二章 分層積分淺水波模式理論架構

自由液面為水與空氣兩相之交界，自然界之水流如河川、水庫、海岸等均為自由液面流，與壓力流最大差異在於壓力可反應於水深，本章由三維 Navier- Stokes 方程式基於靜水壓假設，簡化為擬似三維淺水波模式，經分層積分得層積分控制方程式，並簡述邊界條件之處理與推導紊流黏滯係數推估式。

2.1 雷諾平均控制方程式



三維黏性流體之 Navier-Stokes 方程如后：

連續方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0 \quad (2.1)$$

動量方程

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j u_i) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \rho g_i \quad (2.2)$$

其中， u_i 為流體之速度， μ 為流體之動力黏滯係數， g 為重力加速度， p 為壓力。

自然界中之自由液面流，多為紊流，可由雷諾平均方程得到雷諾剪應

力，若“-”代表時間平均，則瞬時流速 u_i 為時間平均流速 \bar{u}_i 與擾動量 u_i' 之組合，可表示如下

$$u_i = \bar{u}_i + u_i' , \quad p = \bar{p} + p'$$

其中，時間平均之流速 \bar{u}_i 與壓力 \bar{p} 定義為

$$\bar{u}_i = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} u_i dt , \quad \bar{p} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} p dt$$

則物理量具有下列時間平均關係

$$\overline{u_i'} = 0 , \quad \overline{u_j' u_i'} = 0 , \quad \overline{\bar{u}_i} = \bar{u}_i$$

自然界流動之水體可視為不可壓縮流，因此不考慮密度之擾動量，基於不可壓縮流之假設，Navier-Stokes 方程經由雷諾時間平均，可得雷諾方程式如下



連續方程

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.3)$$

動量方程

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_j \bar{u}_i) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \overline{u_i' u_j'} \right) + g_i \quad (2.4)$$

其中， $\overline{u_i' u_j'}$ 為時間平均過程之流速擾動相關量，乘上密度則為擾動引起之動量傳輸，即為雷諾剪應力(Reynolds stresses)。

在許多自由液面與底床曲率不大之水平流場，將垂直軸 z 軸設定在重力之反向上，垂直方向之動量方程式可透過壓力在垂直方向上之分佈為靜水壓

分佈來簡化，而垂直方向之速度可透過連續方程式計算以減少三維模式之計算量，即擬似三維模式(semi- three dimensional model)，因此基於靜水壓假設之不可壓縮三維流體運動控制方程式可改寫如下：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} + \frac{\partial(wu)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} + \frac{\partial(wv)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \quad (2.7)$$

$$p = \rho g(H + \eta_B - z) \quad (2.8)$$

其中， t 為時間， x 、 y 、 z 為卡氏(Cartesian)座標， u 、 v 、 w 分別為 x 、 y 、 z 方向上之速度分量， p 為壓力， ρ 為水體密度， g 為重力加速度， σ_{xx} 、 σ_{yy} 、 τ_{yx} 、 τ_{xy} 、 τ_{zx} 、 τ_{zy} 、分別為應力張量於 x - y 、 y - z 、 z - x 平面上之 x 、 y 方向之分量， H 為水深， η_B 為底床高程。



2.2 分層積分控制方程式

分層積分模式之概念建立在擬似三維模式上，其網格建立方式在水平方向與水深平均二維模式相同將模擬範圍內之水體分為單一水柱，可用卡氏座標、正交曲線座標或非正交曲線座標，而單一水柱之水深方向上進一步簡化為數層，將每一層內之擬似三維模式控制式沿層厚度積分，得到數組二維層積分控制方程式，分層方式之概念與變數配置示如圖2.1，其中包含液面層(top layer)、內部層(internal layer)、底床層(bottom layer)，基於不可壓縮流與靜水壓之假設，將擬似三維流體運動控制方程式(2.5)~(2.7)對層厚度積分，可得分層積分控制方程式。

首先定義層平均物理量如下：

$$\phi_{k+1/2} = \frac{1}{h} \int_{\eta_k(x,y)}^{\eta_{k+1}(x,y)} \phi(x,y,z,t) dz \quad (2.9)$$

其中， ϕ 代表控制方程式之物理量如流速 u 、 v 與壓力 p ， $\phi_{k+1/2}$ 代表第 k 層之積分平均物理量， η_{k+1} 為介於第 $(k+1)$ 層與第 k 相鄰之層介面高程， η_k 為介於第 $(k-1)$ 層與第 k 相鄰之層介面高程， K 為總層數， h 為層厚度。

動量方程式之對流量為非線性，其積分關係如下：

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_{\eta_k(x,y)}^{\eta_{k+1}(x,y)} \phi_i \phi_j dz &= \frac{1}{h} \int_{\eta_k(x,y)}^{\eta_{k+1}(x,y)} \left(\phi_{i,k+\frac{1}{2}} + (\phi_i - \phi_{i,k+\frac{1}{2}}) \right) \left(\phi_{j,k+\frac{1}{2}} + (\phi_j - \phi_{j,k+\frac{1}{2}}) \right) dz \\ &= \frac{1}{h} \int_{\eta_k(x,y)}^{\eta_{k+1}(x,y)} \phi_{i,k+\frac{1}{2}} \phi_{j,k+\frac{1}{2}} dz + \frac{1}{h} \int_{\eta_k(x,y)}^{\eta_{k+1}(x,y)} \phi_{i,k+\frac{1}{2}} (\phi_j - \phi_{j,k+\frac{1}{2}}) dz \\ &\quad + \frac{1}{h} \int_{\eta_k(x,y)}^{\eta_{k+1}(x,y)} \phi_{j,k+\frac{1}{2}} (\phi_i - \phi_{i,k+\frac{1}{2}}) dz + \frac{1}{h} \int_{\eta_k(x,y)}^{\eta_{k+1}(x,y)} (\phi_i - \phi_{i,k+\frac{1}{2}}) (\phi_j - \phi_{j,k+\frac{1}{2}}) dz \\ &= \phi_{i,k+\frac{1}{2}} \phi_{j,k+\frac{1}{2}} + \frac{\phi_{i,k+\frac{1}{2}}}{h} \int_{\eta_k(x,y)}^{\eta_{k+1}(x,y)} (\phi_j - \phi_{j,k+\frac{1}{2}}) dz \\ &\quad + \frac{\phi_{j,k+\frac{1}{2}}}{h} \int_{\eta_k(x,y)}^{\eta_{k+1}(x,y)} (\phi_i - \phi_{i,k+\frac{1}{2}}) dz + \frac{1}{h} \int_{\eta_k(x,y)}^{\eta_{k+1}(x,y)} (\phi_i - \phi_{i,k+\frac{1}{2}}) (\phi_j - \phi_{j,k+\frac{1}{2}}) dz \end{aligned} \quad (2.10)$$

由於 $\int_{\eta_k(x,y)}^{\eta_{k+1}(x,y)} (\phi_i - \phi_{i,k+\frac{1}{2}}) dz = 0$ ，(2.10)式重新整理如後

$$\frac{1}{h} \int_{\eta_k(x,y)}^{\eta_{k+1}(x,y)} \phi_i \phi_j dz = \phi_{i,k+\frac{1}{2}} \phi_{j,k+\frac{1}{2}} + \frac{1}{h} \int_{\eta_k(x,y)}^{\eta_{k+1}(x,y)} (\phi_i - \phi_{i,k+\frac{1}{2}}) (\phi_j - \phi_{j,k+\frac{1}{2}}) dz \quad (2.11)$$

第 k 層動量方程式沿層厚度積分可得層積分動量方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{hu}_{k+1/2}) + \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{hu}_{k+1/2}\mathbf{u}_{k+1/2}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{hv}_{k+1/2}\mathbf{u}_{k+1/2}) + (\mathbf{Fu})_{k+1} - (\mathbf{Fu})_k \quad (2.12)$$

$$= -[\mathbf{gh} \frac{\partial(\mathbf{H} + \eta_B - z)}{\partial x}]_{k+1/2} + \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{h} \frac{\mathbf{T}_{xx}}{\rho}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{h} \frac{\mathbf{T}_{yx}}{\rho}) + (\frac{\tau_{zx}}{\rho})_{k+1} - (\frac{\tau_{zx}}{\rho})_k$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{hv}_{k+1/2}) + \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{hu}_{k+1/2}\mathbf{v}_{k+1/2}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{hv}_{k+1/2}\mathbf{v}_{k+1/2}) + (\mathbf{Fv})_{k+1} - (\mathbf{Fv})_k \quad (2.13)$$

$$= -[\mathbf{gh} \frac{\partial(\mathbf{H} + \eta_B - z)}{\partial y}]_{k+1/2} + \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{h} \frac{\mathbf{T}_{xy}}{\rho}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{h} \frac{\mathbf{T}_{yy}}{\rho}) + (\frac{\tau_{zy}}{\rho})_{k+1} - (\frac{\tau_{zy}}{\rho})_k$$

其中，下標(k+1/2)表示層平均物理量，下標(k+1)與 k 分別表示層之上、下層介面物理量，h 為層厚度，H 為水深， η_B 為底床高程，F 為通過層介面之通量，則第(k-1)層與第 k 層間之層介面之通量 F_k 可表示為

$$F_k = w_k - u_k \frac{\partial \eta_k}{\partial x} - v_k \frac{\partial \eta_k}{\partial y} \quad (2.14)$$

其中， w_k 為介於第(k-1)層與第 k 相鄰之層介面垂直速度。



同理，對第 k 層連續方程沿層厚度積分可得層積分連續方程式

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{hu}_{k+1/2}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{hv}_{k+1/2}) + F_{k+1} - F_k = 0 \quad (2.15)$$

(2.14)式滿足底床不透水邊界條件，可得底床速度

$$w_1 = u_1 \frac{\partial \eta_B}{\partial x} + v_1 \frac{\partial \eta_B}{\partial y} \quad (2.16)$$

其中， z_B 為底床高程。則第 k 層與第(k+1)層間之層介面垂直速度可由層積分連續方程式(2.15)由底床層逐次向上計算，表示如下：

$$w_{k+1} = u_{k+1} \frac{\partial \eta_{k+1}}{\partial x} + v_{k+1} \frac{\partial \eta_{k+1}}{\partial y} - \sum_{m=1}^k [\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{hu}_{m+1/2}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{hv}_{m+1/2})] \quad (2.17)$$

其中，m 為啞指標。而自由液面之水位變動量可由第 K 層（液面層）之頂部垂直速度對時間積分而得，即 $\Delta H = w_{K+1} \Delta t$ ，或表示如下

$$\frac{H^{t+\Delta t} - H^t}{\Delta t} + \sum_{m=1}^K \left[\frac{\partial}{\partial x} (hu_{m+1/2}) + \frac{\partial}{\partial y} (hv_{m+1/2}) \right] = 0 \quad (2.18)$$

其中， Δt 為時間間距， K 為總層數。

方程式(2.12)與(2.13)中， T_{xx} 、 T_{yx} 、 T_{xy} 、 T_{yy} 為層流剪應力、紊流剪應力與延散剪應力和張量之各分量，可表示如下：

$$T_{xx} = \frac{1}{h} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \left[\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \overline{\rho u'^2} - \rho(u - u_{k+1/2})^2 \right] dz \quad (2.19)$$

$$T_{yx} = \frac{1}{h} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \left[\mu \frac{\partial u}{\partial y} - \overline{\rho u'v'} - \rho(u - u_{k+1/2})(v - v_{k+1/2}) \right] dz \quad (2.20)$$

$$T_{xy} = \frac{1}{h} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \left[\mu \frac{\partial v}{\partial x} - \overline{\rho u'v'} - \rho(u - u_{k+1/2})(v - v_{k+1/2}) \right] dz \quad (2.21)$$

$$T_{yy} = \frac{1}{h} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \left[\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \overline{\rho v'^2} - \rho(v - v_{k+1/2})^2 \right] dz \quad (2.22)$$



根據Boussinesq紊流渦動黏性觀念

$$\tau = \tau^l + \tau^t$$

$$\tau^l = \mu^l \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}$$

$$\tau^t = -\overline{\rho u_i u_j} = \mu^t \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}$$

其中， τ 為總剪應力， τ^l 為層流剪應力， τ^t 為紊流剪應力； μ^l 為層流動力黏滯係數， μ^t 為紊流動力黏滯係數。若忽略延散剪應力，則應力張量各分量可簡化如下：

$$\frac{T_{xx}}{\rho} = \nu_h \frac{\partial u_{k+1/2}}{\partial x} \quad \frac{T_{yx}}{\rho} = \nu_h \frac{\partial u_{k+1/2}}{\partial y}$$

$$\frac{T_{xy}}{\rho} = \nu_h \frac{\partial v_{k+1/2}}{\partial x} \quad \frac{T_{yy}}{\rho} = \nu_h \frac{\partial v_{k+1/2}}{\partial y} \quad (2.23)$$

其中， $\nu_h = \nu^l + \nu_h^t$ 為水平層流與紊流運動黏滯係數之和。

將(2.23)式代入方程式(2.12)與(2.13)，則層積分動量方程式可簡化為

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{h}u_{k+1/2}) + \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{h}u_{k+1/2} \mathbf{u}_{k+1/2}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{h}v_{k+1/2} \mathbf{u}_{k+1/2}) + (\mathbf{F}u)_{k+1} - (\mathbf{F}u)_k \\ & = -[\mathbf{g}h \frac{\partial(H + \eta_B - z)}{\partial x}]_{k+1/2} + \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{h}v_h \frac{\partial \mathbf{u}_{k+1/2}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{h}v_h \frac{\partial \mathbf{u}_{k+1/2}}{\partial y}) + (\frac{\tau_{zx}}{\rho})_{k+1} - (\frac{\tau_{zx}}{\rho})_k \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{h}v_{k+1/2}) + \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{h}u_{k+1/2} \mathbf{v}_{k+1/2}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{h}v_{k+1/2} \mathbf{v}_{k+1/2}) + (\mathbf{F}v)_{k+1} - (\mathbf{F}v)_k \\ & = -[\mathbf{g}h \frac{\partial(H + \eta_B - z)}{\partial y}]_{k+1/2} + \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{h}v_h \frac{\partial \mathbf{v}_{k+1/2}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{h}v_h \frac{\partial \mathbf{v}_{k+1/2}}{\partial y}) + (\frac{\tau_{zy}}{\rho})_{k+1} - (\frac{\tau_{zy}}{\rho})_k \end{aligned} \quad (2.25)$$



茲將第 k 層之積分控制方程式重新整理如後

層積分動量方程式

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{h}u_{k+1/2}) + \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{h}u_{k+1/2} \mathbf{u}_{k+1/2}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{h}v_{k+1/2} \mathbf{u}_{k+1/2}) + (\mathbf{F}u)_{k+1} - (\mathbf{F}u)_k \\ & = -[\mathbf{g}h \frac{\partial(H + \eta_B - z)}{\partial x}]_{k+1/2} + \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{h}v_h \frac{\partial \mathbf{u}_{k+1/2}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{h}v_h \frac{\partial \mathbf{u}_{k+1/2}}{\partial y}) + (\frac{\tau_{zx}}{\rho})_{k+1} - (\frac{\tau_{zx}}{\rho})_k \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{h}v_{k+1/2}) + \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{h}u_{k+1/2} \mathbf{v}_{k+1/2}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{h}v_{k+1/2} \mathbf{v}_{k+1/2}) + (\mathbf{F}v)_{k+1} - (\mathbf{F}v)_k \\ & = -[\mathbf{g}h \frac{\partial(H + \eta_B - z)}{\partial y}]_{k+1/2} + \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{h}v_h \frac{\partial \mathbf{v}_{k+1/2}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{h}v_h \frac{\partial \mathbf{v}_{k+1/2}}{\partial y}) + (\frac{\tau_{zy}}{\rho})_{k+1} - (\frac{\tau_{zy}}{\rho})_k \end{aligned} \quad (2.25)$$

層積分連續方程式

$$\frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{h}u_{k+1/2}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{h}v_{k+1/2}) + F_{k+1} - F_k = 0 \quad (2.15)$$

水位變動方程式

$$\frac{H^{t+\Delta t} - H^t}{\Delta t} + \sum_{m=1}^K \left[\frac{\partial}{\partial x} (hu_{m+1/2}) + \frac{\partial}{\partial y} (hv_{m+1/2}) \right] = 0 \quad (2.18)$$

2.3 邊界條件

茲將模式所需之邊界條件及其處理方法敘述如後：

- 固體邊界條件：底床邊界條件採不滑移邊界條件，即 $u|_{z=\eta_B} = 0$ 、 $v|_{z=\eta_B} = 0$ ，與不透水邊界條件 $w|_{z=\eta_B} = 0$ ；側壁邊界條件採不透水邊界條件 $v|_{y=0} = 0$ 、 $v|_{y=B} = 0$ ，與滑移邊界條件 $\partial u / \partial y|_{y=0} = 0$ 、 $\partial u / \partial y|_{y=B} = 0$ ；其中， B 為渠道寬度。
- 自由液面邊界條件：自由液面運動邊界條件與風剪力邊界條件。
- 上游邊界條件：採單寬流量邊界條件，縱向流速於水深方向均勻分布，即 $u = q/H^t$ ， q 為單寬流量， H^t 為任一計算時刻任一迭代之即時水深，無側向與垂向流速，即 $u|_{x=0} = 0$ 、 $v|_{x=0} = 0$ 。
- 下游邊界條件：假設均勻流條件，即 $\partial u / \partial x = 0$ 、 $\partial v / \partial x = 0$ 。

2.4 明渠流之垂直紊流黏滯係數推估式

在河川一維或二維水理模式中，水深之決定可將水柱視為自由體(free body)，由推動水流的重力、水平方向壓力差及與水流反向的底床剪應力，

三者間相互作用平衡，透過計算底床剪應力之摩擦公式即可估計水深。但在三維流場模擬中，底床剪應力僅作用於緊鄰底床邊界之最底層，而水體內部層與層之間剪應力須由紊流黏滯係數與流速梯度決定，然紊流黏滯係數係流場之函數而非流體之性質，其分佈型態係由流場決定，因而流速剖面與黏滯係數分佈型態係交互作用影響；又，任意流量下基於連續方程式，流速剖面又與水深相互影響，由此可知水深則由流量、流速剖面與紊流黏滯係數分佈三者之間相互作用平衡決定，流量或物理邊界幾何改變都將影響紊流黏滯係數之分佈，因此，在實際模擬中紊流黏滯係數並由無法透過案例率定而得。

在紊流模式尚未建立前，必需建立紊流黏滯係數與流量、水深、底床粗糙度之關係，方可模擬明渠流之流場；Elder [6]透過實驗觀察提出之黏滯係數關係式 $\nu = \alpha H u_*$ ，在實務上已廣泛被使用在污染質模擬，透過Elder紊流黏滯係數關係式可建立紊流黏滯係數與水深、流量、底床粗糙度間相互影響之機制。



本文發展之模式尚未考慮紊流模式，因此如前所述需建立紊流黏滯係數關係式，於此處將推導過程敘述如後。首先，考慮三維流體運動之Navier-Stokes方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + g_x \quad (2.26)$$

假設靜水壓分佈，且水流為定常均勻流，即 $\partial/\partial t=0$ 、 $\partial/\partial x=0$ ，假設水流在側向上均勻分佈，即 $\partial/\partial y=0$ ，且底床坡度不大，方程式可簡化為

$$\nu_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -g S_0 \quad (2.27)$$

其中 S_0 為底床坡度。假設紊流運動黏滯係數沿水深方向均勻分佈，方程式(2.27)對水深積分可得

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{g S_0}{\nu_v} z + C_1 \quad (2.28)$$

方程式滿足底床剪應力邊界條件 $\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = \frac{\tau_o}{\rho\nu_v}$ ，可得係數 $C_1 = \tau_o/\rho$ ，則水平速度 u 於垂直方向之梯度可表示為

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{gS_o}{\nu_v}z + \frac{\tau_o}{\rho\nu_v} \quad (2.29)$$

若水面受風剪應力 τ_s 作用，則水面流速梯度為

$$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=H} = \frac{\tau_s}{\rho\nu_v}$$

將水面梯度代入方程式可得下列關係

$$\frac{\tau_s}{\rho\nu_v} = -\frac{gS_o}{\nu_v}H + \frac{\tau_o}{\rho\nu_v}$$

或表示成

$$-gS_oH + \frac{\tau_o}{\rho} = \frac{\tau_s}{\rho}$$

由於水流為均勻流況，因此底床剪應力可由水深、底床坡度、水面風剪應力三者決定

$$\tau_o = \tau_s + \gamma HS_o \quad (2.30)$$

再對方程式(2.29)沿水深方向積分，可得

$$u = -\frac{gS_o}{2\nu_v}z^2 + \frac{\tau_o}{\mu_v}z + C_2$$

滿足底床不滑移邊界條件，則 $C_2 = 0$ ，因此，上式簡化為

$$u = -\frac{gS_o}{2\nu_v}z^2 + \frac{\tau_o}{\mu_v}z \quad (2.31)$$

方程式(2.31)即為流速剖面分佈函數。

基於質量守衡，流速剖面方程式(2.31)沿水深方向積分即為單寬流量 q ，即

$$\int_0^H u dz = q \quad (2.32)$$

將方程式(2.31)代入方程式(2.32)，可得下列關係式

$$\frac{gS_o}{3\nu_v} H^3 + \frac{\tau_s}{2\mu_v} H^2 = q \quad (2.33)$$

由於水深H、紊流運動黏滯係數 ν_v 均為未知數，因此無法單由方程式(2.33)決定紊流運動黏滯係數 ν_v 之值。若忽略液面風剪應力之作用，則紊流運動黏滯係數 ν_v 可表示為

$$\nu_v = \frac{gS_o}{3q} H^3 \quad (2.34)$$

或Elder紊流黏滯係數關係式之形式 $\nu_v = \alpha H u_*$ ，則係數 α 為

$$\alpha = \frac{u_*}{3U}$$

假設渠道寬深比夠大，水力半徑可以水深取代，渠道水深平均流速可由曼寧公式計算如下



$$U = \frac{1}{n} H^{2/3} S_o^{1/2} = \frac{H^{1/6}}{n\sqrt{g}} u_* \quad (2.35)$$

則Elder紊流黏滯係數關係式之係數 α 可改寫為

$$\alpha = \frac{u_*}{3U} = \frac{n\sqrt{g}}{3H^{1/6}} \quad (2.36)$$

於是，Elder紊流黏滯係數關係式之係數 α 可由曼寧粗糙度係數 n 、水深 H 、底床剪力速度 u_* 決定。回到方程式(2.36)，若自由液面受到風剪應力作用於上，則底床剪應力會隨之增加。另，對於非均勻流況，方程式(2.35)中之底床坡降 S_o 可由摩擦坡降 S_f 取代。

因此，在紊流模式尚未建立前，紊流黏滯係數可藉由Elder關係式推得，其中係數 α 則可透過方程式(2.36)由水深、流量、曼寧粗糙係數 n 計算得到；現場常見之流況，如當曼寧 n 介於 $0.02 \sim 0.05$ ，水深介於 $0.5\text{m} \sim 10\text{m}$ ，

由方程式(2.36)計算之係數 α 約介於 0.014 ~ 0.058，該範圍略小於 Nezu與 Rodi [26] 實驗量測範圍(水深平均值約0.06左右)，研判應為假設紊流黏滯係數均勻分佈，致流速梯度於底床與水面附近過小而半水深處流速梯度過大之影響。



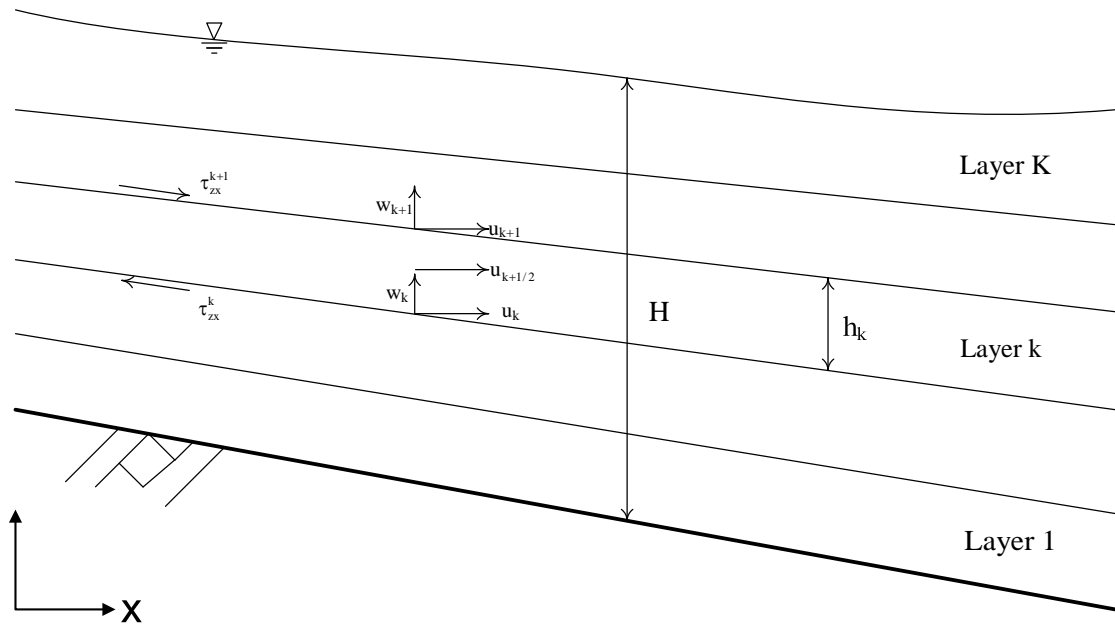


圖 2.1 分層模式層切割方式與變數配置示意圖



第三章 分層模式(一)－不考慮層介面連續

3.1 有限體積法與數值差分式

在不可壓縮流與靜水壓假設下，非定常流擬似三維分層積分淺水波模式之控制方程式已詳述於第二章，為方便閱讀，茲將本節相關之動量方程式、連續方程式、水位變動方程式重述如下：

層積分動量方程式

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (hu_{k+1/2}) + \frac{\partial}{\partial x} (hu_{k+1/2}u_{k+1/2}) + \frac{\partial}{\partial y} (hv_{k+1/2}u_{k+1/2}) + (Fu)_{k+1} - (Fu)_k \\ & = -[gh \frac{\partial(H + \eta_B - z)}{\partial x}]_{k+1/2} + \frac{\partial}{\partial x} (hv_h \frac{\partial u_{k+1/2}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (hv_h \frac{\partial u_{k+1/2}}{\partial y}) + (\frac{\tau_{zx}}{\rho})_{k+1} - (\frac{\tau_{zx}}{\rho})_k \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (hv_{k+1/2}) + \frac{\partial}{\partial x} (hu_{k+1/2}v_{k+1/2}) + \frac{\partial}{\partial y} (hv_{k+1/2}v_{k+1/2}) + (Fv)_{k+1} - (Fv)_k \\ & = -[gh \frac{\partial(H + \eta_B - z)}{\partial y}]_{k+1/2} + \frac{\partial}{\partial x} (hv_h \frac{\partial v_{k+1/2}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (hv_h \frac{\partial v_{k+1/2}}{\partial y}) + (\frac{\tau_{zy}}{\rho})_{k+1} - (\frac{\tau_{zy}}{\rho})_k \end{aligned} \quad (2.25)$$

層積分連續方程式

$$\frac{\partial}{\partial x} (hu_{k+1/2}) + \frac{\partial}{\partial y} (hv_{k+1/2}) + F_{k+1} - F_k = 0 \quad (2.15)$$

水位變動方程式

$$\frac{H^{t+\Delta t} - H^t}{\Delta t} + \sum_{m=1}^K [\frac{\partial}{\partial x} (hu_{m+1/2}) + \frac{\partial}{\partial y} (hv_{m+1/2})] = 0 \quad (2.18)$$

對於非定常流不壓縮紊流，分層模式之動量方程式，可以下列通式表示

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho h \phi_{k+1/2}) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho h u_{k+1/2} \phi_{k+1/2}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho h v_{k+1/2} \phi_{k+1/2}) + (\rho F \phi_{k+1/2})_{t-b} \\ & = \frac{\partial}{\partial x}(h v_h \frac{\partial \phi_{k+1/2}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(h v_h \frac{\partial \phi_{k+1/2}}{\partial y}) + (v_v \frac{\partial \phi}{\partial z})_{t-b} + S^\phi \end{aligned} \quad (3.1)$$

其中， ϕ 為 u 或 v ， S^ϕ 為水壓項。由分層動量方程通式對對控制體進行體積積分，可得分層模式有限體積方程式，即

$$\begin{aligned} & [(\rho h \phi_{k+1/2} \Delta x \Delta y)^{t+\Delta t} - (\rho h \phi_{k+1/2} \Delta x \Delta y)^t] / \Delta t + \\ & (\rho h F_x \phi_{k+1/2} \Delta y)_{e-w} + (\rho h F_y \phi_{k+1/2} \Delta x)_{n-s} + (\rho F \Delta x \Delta y)_{t-b} \\ & = (h v_h \frac{\partial \phi_{k+1/2}}{\partial x} \Delta y)_{e-w} + (h v_h \frac{\partial \phi_{k+1/2}}{\partial y} \Delta x)_{n-s} + \\ & (v_v \frac{\partial \phi}{\partial z} \Delta x \Delta y)_{t-b} + S^\phi \end{aligned} \quad (3.2)$$

其中， ϕ 為 u 或 v ， F_x 、 F_y 為控制面上的通量，下標 (e,w) 與 (n,s) 表示控制體積於 (東,西) 與 (南,北) 控制面上之動量通量，e、w、n、s 控制面位置如圖 3.1 所示。相對應於 u 、 v 之水壓項 S^ϕ 分別表示如下

$$S^u = -[gh\Delta y(H + \eta_B - z)]_{|_{k+1/2}}]_{e-w} \quad (3.3)$$

$$S^v = -[gh\Delta x(H + \eta_B - z)]_{|_{k+1/2}}]_{n-s} \quad (3.4)$$

同理，層積分連續方程式為

$$\begin{aligned} & \frac{(\rho h \Delta x \Delta y)^n - (\rho h \Delta x \Delta y)^0}{\Delta t} + (\rho h u_{k+1/2} \Delta y)_{e-w} + \\ & (\rho h v_{k+1/2} \Delta x)_{n-s} + (\rho F_R \Delta x \Delta y)_{t-b} = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

而水位方程式則可表為

$$\frac{(\rho H \Delta x \Delta y)^{t+\Delta t} - (\rho H \Delta x \Delta y)^t}{\Delta t} + \sum_{m=1}^K [(\rho h u_{k+1/2} \Delta y)_{e-w} + (\rho h v_{k+1/2} \Delta x)_{n-s}]_m = 0 \quad (3.6)$$

將(3.2)式內擴散項中位於控制面上之梯度值，利用中央差分法近似，以 e 控制面上為例：

$$(h v_h \frac{\partial \phi_{k+1/2}}{\partial x} \Delta y)_e \cong (h v_h \Delta y)_e \frac{1}{\Delta x} (\phi_{k+1/2, E} - \phi_{k+1/2, P}) \quad (3.7)$$

$$(h v_h \frac{\partial \phi_{k+1/2}}{\partial y} \Delta x)_e \cong (h v_h \Delta x)_e \frac{1}{4 \Delta y} (\phi_{k+1/2, NE} - \phi_{k+1/2, SE} + \phi_{k+1/2, N} - \phi_{k+1/2, S}) \quad (3.8)$$

並將對流項中位於控制面上之物理變數，以 QUICK(Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinetics, [18])法推求，QUICK 法可表示如下

當 $G_{x,e} > 0$

$$\phi_{k+1/2, e} = \phi_{k+1/2, P} + \frac{1}{8} [3\phi_{k+1/2, E} - 2\phi_{k+1/2, P} - \phi_{k+1/2, W}] \quad (3.9)$$

當 $G_{x,e} < 0$

$$\phi_{k+1/2, e} = \phi_{k+1/2, P} + \frac{1}{8} [3\phi_{k+1/2, P} - 2\phi_{k+1/2, E} - \phi_{k+1/2, EE}] \quad (3.10)$$

其中 G_x 為 x 方向上控制面上之通量，其他控制面與層界面可類比(3.7)式至(3.10)式，將之代入(3.2)式後，再減去 $\frac{3}{4} \phi_{k+1/2, P}^n$ 乘連續方程式，經整理即可化

為有限體積差分通式

$$\begin{aligned} A_P \phi_{k+1/2, P} &= A_E \phi_{k+1/2, E} + A_W \phi_{k+1/2, W} + A_N \phi_{k+1/2, N} + A_S \phi_{k+1/2, S} \\ &+ A_T \phi_{k+1/2, T} + A_B \phi_{k+1/2, B} + S^\phi \end{aligned} \quad (3.11)$$

3.2 數值演算方法

3.1 節將動量方程式轉為有限體積積分通式， ϕ 以 u 或 v 代入，即可得到 x 、 y 方向動量方程式。

$$A_P^u u_{k+\frac{1}{2},P} = \sum_{nb=E,W,N,S,T,B} A_{nb}^u u_{k+\frac{1}{2},nb} + S^u \quad (3.12)$$

$$A_P^v v_{k+\frac{1}{2},P} = \sum_{nb=E,W,N,S,T,B} A_{nb}^v v_{k+\frac{1}{2},nb} + S^v \quad (3.13)$$

由(3.5)、(3.6)、(3.12)與(3.13)式形成一代數方程組，用以求解流場。

本研究採 Patankar 與 Spalding [30]提出壓力連結擬似隱式法(Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations)求解，此法已被廣泛應用至各類不可壓縮流場與明渠流之計算，其包含一個預測步驟與一個校正步驟。因此對於正確流場 u 、 v 、 h 、 H 之分佈，SIMPLE 引入修正量(u' 、 v' 、 h' 、 H')，用以修正猜值(u^* 、 v^* 、 h^* 、 H^*)，

$$u = u^* + u' \quad (3.14)$$

$$v = v^* + v' \quad (3.15)$$

$$h = h^* + h' \quad (3.16)$$

$$H = H^* + H' \quad (3.17)$$

首先，將方程式(3.3)、(3.4)代入(3.12)、(3.13)，並以起始猜值(u^* 、 v^* 、 h^* 、 H^*)取代(u 、 v 、 h 、 H)，則可得到對應 H^* 之動量方程式

$$u^*_{k+\frac{1}{2},P} = \frac{1}{A_P^u} \left[\sum_{nb=E,W,N,S,T,B} A_{nb}^u u^*_{k+\frac{1}{2},nb} \right] - \frac{g\Delta y}{A_P^u} \left[h^* [(H^* + \eta_B - z)|_{k+1/2}]_{e-w} \right] \quad (3.18)$$

$$v^*_{k+\frac{1}{2},P} = \frac{1}{A_P^v} \left[\sum_{nb=E,W,N,S,T,B} A_{nb}^v v^*_{k+\frac{1}{2},nb} \right] - \frac{g\Delta x}{A_P^v} \left[h^* [(H^* + \eta_B - z)|_{k+1/2}]_{n-s} \right] \quad (3.19)$$

將(3.14)至(3.15)式代入(3.12)至(3.13)式並減掉(3.18)至(3.19)式忽略高次項可得速度修正量

$$u'_{k+\frac{1}{2},P} = \frac{1}{A_P^u} \left[\sum_{nb=E,W,N,S,T,B} A_{nb}^u u'_{k+\frac{1}{2},nb} \right] - \frac{g\Delta y}{A_P^u} \left[h^* [(H' + \eta_B - z)|_{k+1/2}]_{e-w} \right] \quad (3.20)$$

$$v'_{k+\frac{1}{2},P} = \frac{1}{A_P^v} \left[\sum_{nb=E,W,N,S,T,B} A_{nb}^v v'_{k+\frac{1}{2},nb} \right] - \frac{g\Delta x}{A_P^v} \left[h^* [(H' + \eta_B - z)|_{k+1/2}]_{n-s} \right] \quad (3.21)$$

將(3.20)至(3.21)式代入自由液面層連續方程式(3.6)，可得

$$A_P H'_P = A_E H'_E + A_W H'_W + A_N H'_N + A_S H'_S + M_P^{H'} \quad (3.22)$$

其中，質量殘餘量 $M_P^{H'}$ 表示如下

$$M_P^{H'} = \frac{(\rho H^* \Delta x \Delta y)^n - (\rho H \Delta x \Delta y)^0}{\Delta t} + \sum_{m=1}^K [(\rho h^* u^*_{k+1/2} \Delta y)_{e-w} + (\rho h^* v^*_{k+1/2} \Delta x)_{n-s}]_m \quad (3.23)$$

H' 可由(3.22)式求解，然後代入(3.20)與(3.21)計算 u' 與 v' ，並重複所有步驟迭代至質量殘餘量 $M_P^{H'}$ 消失，即流場收斂。其演算流程如圖 3.2 所示。

3.3 模式檢討

擬似三維為能合理決定自由液面位置，目前仍需仰賴水深積分二維淺水波子模式，一方面，就實際物理現象而言，流場、水位與水深方向流速剖面三者是相互影變化的，對於存在垂直環流之流場，或流場垂向分佈之不均勻性高，二維子模式計算所得之水深是否合理，對於水利工程領域所關心的問題，如模擬結果之水深與流速剖面是否合理，水位、流況是否反映底床粗糙度及流量變化等問題，鮮少被討論，另一方面，二維子模式亦增加模式計算量。

本研究試圖以擬似三維分層積分之方式，改善上述三維模式不易應用於水利工程領域之缺點，嘗試過程中許多關鍵問題無法解決，因而分層模式(一)之發展終未成功建立，茲將幾個關鍵原因整理如後，供後續相關研究參考。

1. 自由液面流流速垂向分佈(剖面)與流場內部之紊流強度相互影響，本研究分層模式(一)缺乏反應此現象之機制，且模式收斂受流場起始值設定之影響非常大。
2. 對於淺水波而言，由於水平格點與層厚度之尺度差異相當大，對於任意點之流速而言，層與層之間流速無論在物理上或數值上之關聯均比水平相鄰格點密切，分層模式(一)在層與層之間垂向上的連結係由層介面上之剪應力項 τ_t 、 τ_b ，該剪應力之離散化由上下兩層速度中央差分而得，模式並無法在垂向上反應實際物理現象。
3. 傳統擬似三維之模擬方法，水位已先由二維子模式決定，三維模式在計算邊界固定之情況下，僅計算流速之分佈，本研究摒棄二維子模式，使得每次迭代計算上所得之流場分佈均會反映在水深變化上，因此，數值計算並不穩定。
4. 三維模式邊界條件設定繁雜，現場觀測資料無法提供模式所需，邊界條件之設定是否合理將影響模擬結果之正確性，而起始值之設定亦密切影響數值解之收斂性，分層模式(一)之數值解收斂仍明顯受起始值與上下游邊界處理方式之影響。

經由而分層模式(一)之發展經驗，本研究提出分層模式(二)－考慮層介面連續，能有效解決解決分層模式(一)所遭遇之難題，其建立方式詳述於第四章。



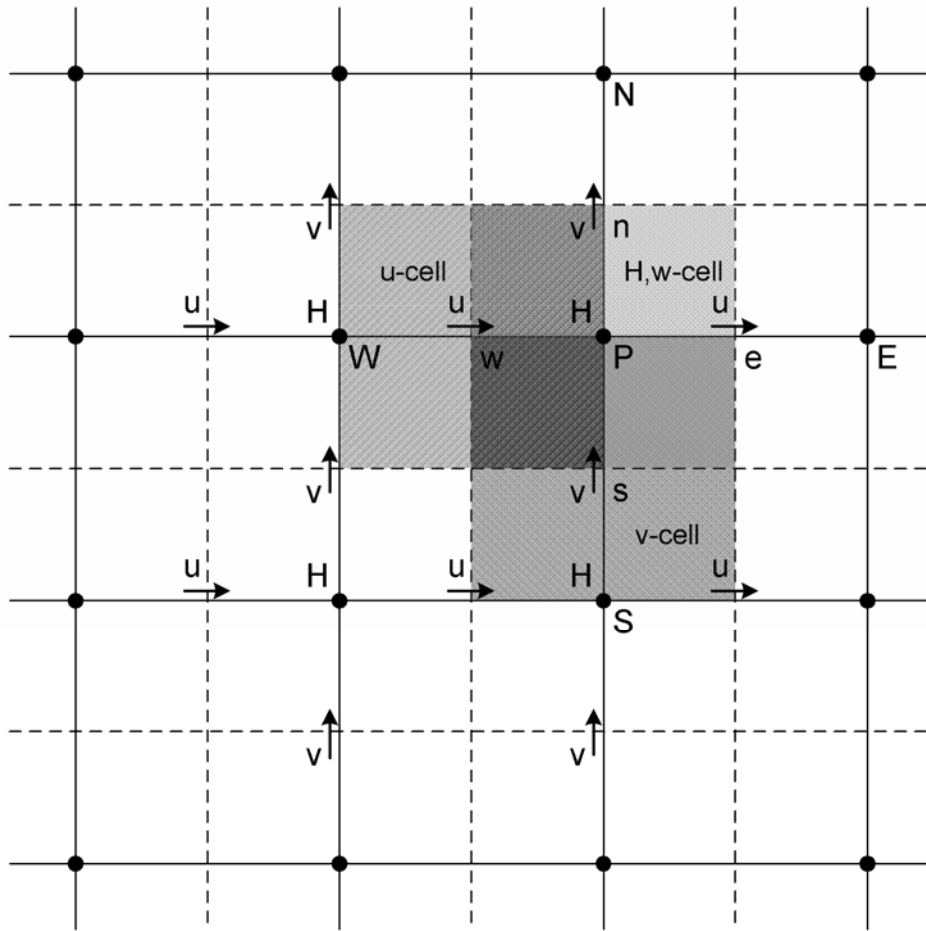


圖 3.1 交錯網格有限體積法各變數之控制體積於 x-y 於平面之配置圖

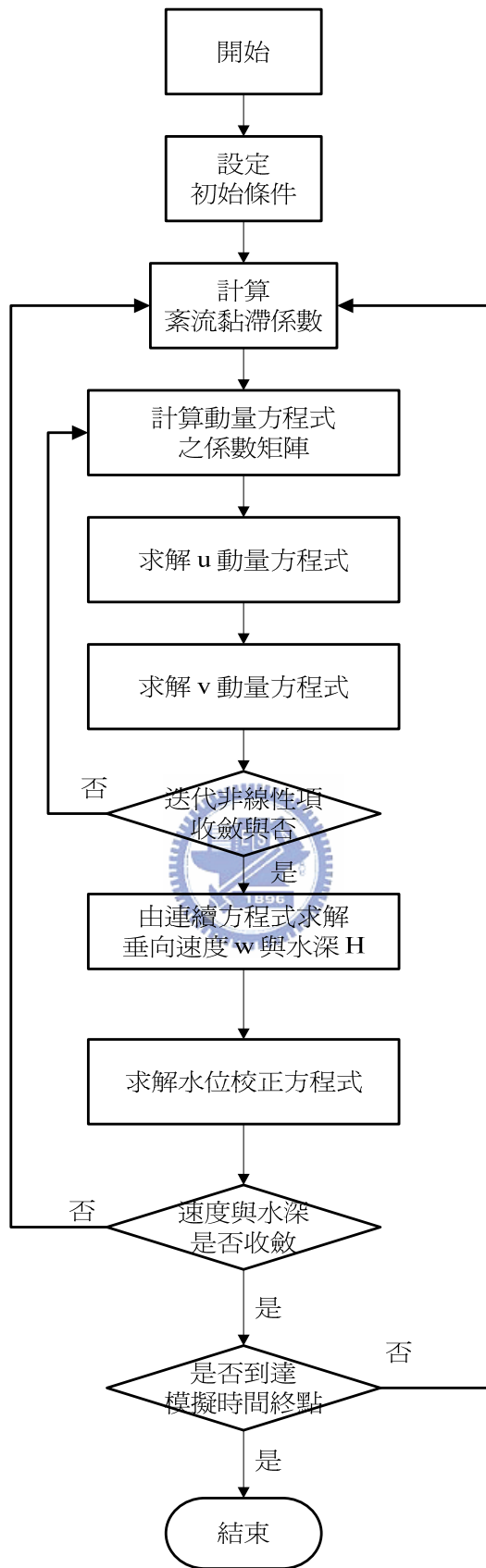


圖3.2 分層模式(一)求解步驟流程圖

第四章 分層模式(二)－考慮層介面連續

本研究最先嘗試分層模式(一)之建立，但於案例測試上收斂困難，究其原因，一是數學上，控制方程式缺乏對反應對水柱層與層之間的流場密切關聯之特性，一是數值上採取用於等向性流場使用計算流體力學SIMPLE求解方法，不容易反應淺水波流場非等向之特性，分層模式(二)係針對分層模式(一)之發展經驗，修正其物理上與數學上之不足，茲將分層模式(二)之建立方式詳述如後。



4.1 層介面剪力連續條件限制式

在不可壓縮流與靜水壓假設下，非定常流擬似三維分層積分淺水波模式之控制方程式已詳述於第二章，為方便閱讀，茲將本節相關之動量方程式、連續方程式、水位變動方程式重述如下：

層積分動量方程式

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (hu_{k+1/2}) + \frac{\partial}{\partial x} (hu_{k+1/2}u_{k+1/2}) + \frac{\partial}{\partial y} (hv_{k+1/2}u_{k+1/2}) + (Fu)_{k+1} - (Fu)_k \\ & = -[gh \frac{\partial(H + \eta_B - z)}{\partial x}]_{k+1/2} + \frac{\partial}{\partial x} (hv_h \frac{\partial u_{k+1/2}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (hv_h \frac{\partial u_{k+1/2}}{\partial y}) + (\frac{\tau_{zx}}{\rho})_{k+1} - (\frac{\tau_{zx}}{\rho})_k \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{h}\mathbf{v}_{k+1/2}) + \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{h}\mathbf{u}_{k+1/2}\mathbf{v}_{k+1/2}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{h}\mathbf{v}_{k+1/2}\mathbf{v}_{k+1/2}) + (\mathbf{F}\mathbf{v})_{k+1} - (\mathbf{F}\mathbf{v})_k \\ & = -\left[\mathbf{g}h\frac{\partial(\mathbf{H} + \eta_B - z)}{\partial y}\right]_{k+1/2} + \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{h}\mathbf{v}_h\frac{\partial\mathbf{v}_{k+1/2}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{h}\mathbf{v}_h\frac{\partial\mathbf{v}_{k+1/2}}{\partial y}) + \left(\frac{\tau_{zy}}{\rho}\right)_{k+1} - \left(\frac{\tau_{zy}}{\rho}\right)_k \end{aligned} \quad (2.25)$$

層積分連續方程式

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{h}\mathbf{u}_{k+1/2}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{h}\mathbf{v}_{k+1/2}) + \mathbf{F}_{k+1} - \mathbf{F}_k = 0 \quad (2.15)$$

水位變動方程式

$$\frac{\mathbf{H}^{t+\Delta t} - \mathbf{H}^t}{\Delta t} + \sum_{m=1}^K \left[\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{h}\mathbf{u}_{m+1/2}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{h}\mathbf{v}_{m+1/2}) \right] = 0 \quad (2.18)$$

然而，方程式(2.24)與方程式(2.25)除了求解變數 u 、 v 、 H 外，尚有未知數 $(\tau_{zx})_k$ 、 $(\tau_{zx})_{k+1}$ 、 $(\tau_{zy})_k$ 、 $(\tau_{zy})_{k+1}$ 等層上、下邊界之 x 、 y 方向剪應力存在，這些剪應力項自由液面流於水深與流速分佈剖面計算之關鍵項目，未適當處理將造成模式之收斂問題，經過分層模式(一)之發展經驗，本研究引入蔡(2001)成功應用於地下水流模擬之二次形狀函數與層介面水頭、水流通量連續之觀念，來評估層介面剪應力項，其處理方式詳述如後。

方程式(2.23)與(2.24)中之未知數 $(\tau_{zx})_k$ 、 $(\tau_{zx})_{k+1}$ 、 $(\tau_{zy})_k$ 、 $(\tau_{zy})_{k+1}$ 等層上、下邊界之 x 、 y 方向剪應力存在，這些透過層積分所得之剪應力項自由液面流於水深與流速分佈剖面計算之關鍵項目，本研究計算三維流場時，水深與流速剖面係由控制方程式計算收斂，未使用二維淺水波子模式先行決定自由液面位置，因此層介面剪應力若未合理估算，則將造成水位劇烈震盪。

蔡[37]發展地下水流模擬與地層下陷模式，提出二次形狀函數作為層內

部水頭之內插函數，並將模式應用於濁水溪沖積平原之地層下陷模擬；本研究引入該二次形狀函數，並將層介面水頭、水流通量連續之觀念，修改為自由液面流中層介面速度與剪力連續。本研究使用之方法為由層介面上配置控制方程式中物理量 u 與 v ，並以二次形狀函數描述物理量於 u 與 v 層內部之分布情形，滿足層介面之速度連續條件可求得層內部二次形狀函數之係數，因此，層上、下介面之流速垂向梯度便可由形狀函數求得，又同一層介面之剪力可分別由相鄰上、下兩層之流速垂向梯度與垂向紊流黏滯係數求得，滿足層介面上、下兩層不滑移可得到層介面剪力連續條件限制式；同理，將上述步驟應用至水柱各層，得到水柱方程組。詳細推導過程如下：

假設水柱各層內部物理量 ϕ 之分佈可用二次形狀函數描述， ϕ 為流速 u 或 v ，層上、下介面位置分別為 η_k 與 η_{k+1} ，因此，二次形狀函數可表示如下

$$\phi(z) = a + bz + cz^2 \quad (4.1)$$

二次形狀函數具有三個未知係數，除層積分物理量外，須於層上、下介面額外配置物理量，因此，形狀函數於上、下層介面須滿足實際物理量，即

$$\phi(z=0) = a = \phi_k \quad (4.2)$$

$$\phi(z = \Delta z) = a + b\Delta z + c\Delta z^2 = \phi_{k+1} \quad (4.3)$$

定義層平均物理量 $\phi_{k+1/2}$

$$\phi_{k+1/2} = \frac{1}{\Delta z} \int_0^{\Delta z} (a + bz + cz^2) dz \quad (4.4)$$

(4.1) 式之係數滿足(4.2)至(4.4)式之條件，可得如下

$$a = \phi_k \quad (4.5)$$

$$b = \frac{1}{\Delta z} (-2\phi_{k+1} - 4\phi_k + 6\phi_{k+1/2}) \quad (4.6)$$

$$c = \frac{1}{\Delta z^2} (3\phi_{k+1} + 3\phi_k - 6\phi_{k+1/2}) \quad (4.7)$$

其中，層下部界面位置 η_k 當做原點， $\Delta z = \eta_{k+1} - \eta_k$ ，將(4.5)至(4.7)式代入(4.1)並取一次導數，則第 k 層上、下層介面流速垂向梯度可表示如下

第 k 層內上介面流速垂向梯度

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{\eta_{k+1}^-} = \frac{1}{\Delta z} (4\phi_{k+1} + 2\phi_k - 6\phi_{k+1/2}) \quad (4.8)$$

第 k 層內下介面流速垂向梯度

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{\eta_k^+} = \frac{1}{\Delta z} (-2\phi_{k+1} - 4\phi_k + 6\phi_{k+1/2}) \quad (4.9)$$


將上下層介面流速垂向梯度(4.8)式與(4.9)式代入層積分動量方程式(2.23)式與(2.24)式，層積分動量方程式可改寫如下

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (hu_{k+1/2}) + \frac{\partial}{\partial x} (hu_{k+1/2}u_{k+1/2}) + \frac{\partial}{\partial y} (hv_{k+1/2}u_{k+1/2}) + (Fu)_{k+1} - (Fu)_k \\ & = -[gh \frac{\partial (H + \eta_B - z)}{\partial x}]_{k+1/2} + \frac{\partial}{\partial x} (hv_h \frac{\partial u_{k+1/2}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (hv_h \frac{\partial u_{k+1/2}}{\partial y}) \\ & + v_{v,k+\frac{1}{2}} (6u_{k+1} - 12u_{k+1/2} + 6u_k) \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{h}\mathbf{v}_{k+1/2}) + \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{h}\mathbf{u}_{k+1/2}\mathbf{v}_{k+1/2}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{h}\mathbf{v}_{k+1/2}\mathbf{v}_{k+1/2}) + (\mathbf{F}\mathbf{v})_{k+1} - (\mathbf{F}\mathbf{v})_k \\
& = -\left[\mathbf{g}h\frac{\partial(\mathbf{H} + \eta_B - z)}{\partial y}\right]_{k+1/2} + \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{h}\mathbf{v}_h\frac{\partial\mathbf{v}_{k+1/2}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{h}\mathbf{v}_h\frac{\partial\mathbf{v}_{k+1/2}}{\partial y}) \\
& + \mathbf{v}_{v,k+\frac{1}{2}}(6\mathbf{v}_{k+1} - 12\mathbf{v}_{k+1/2} + 6\mathbf{v}_k)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

對單一層而言，x 方向層積分動量方程式(4.10)除了層平均流速 $\mathbf{u}_{k+1/2}$ 未知外，尚有上、下層介面流速 \mathbf{u}_{k+1} 、 \mathbf{u}_k 未知，因此，需有額外之方程式方能求解流場。

考慮第 (k-1) 層與第 k 層間介面，由於緊鄰層介面兩層不滑移，則必須滿足速度連續條件

$$\mathbf{u}_{\eta_k^+} = \mathbf{u}_{\eta_k^-} = \mathbf{u}_k \tag{4.12}$$


與剪力連續條件

$$\left(\mathbf{v}_{v,k-\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\Big|_{\eta_k^-}\right) = \left(\mathbf{v}_{v,k+\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\Big|_{\eta_k^+}\right) \tag{4.13}$$

將第 (k-1) 層上介面與第 k 層下介面流速垂向梯度，參考(4.8)式與(4.9)式，代入剪力連續條件(4.13)式，可得 x 方向之剪力連續條件限制式

$$2\mathbf{u}_{k-1} - 6\mathbf{u}_{k-\frac{1}{2}} + 4(1+r_k)\mathbf{u}_k - 6r_k\mathbf{u}_{k+\frac{1}{2}} + 2r_k\mathbf{u}_{k+1} = 0 \tag{4.14}$$

其中， $r_k = \frac{\mathbf{v}_{v,k+\frac{1}{2}}}{\mathbf{v}_{v,k-\frac{1}{2}}}$ 為上、下相鄰兩層垂直紊流黏滯係數之比。同理，重複上述

步驟，y 方向之剪力連續條件限制式

$$2v_{k-1} - 6v_{k-\frac{1}{2}} + 4(1+r_k)v_k - 6r_k v_{k+\frac{1}{2}} + 2r_k v_{k+1} = 0 \quad (4.15)$$

另外，底床之不滑移邊界即為 $u_1=0$ 、 $v_1=0$ ，而底床之滑移邊界條件則可以 u 和 v 取代(4.9)式中之 ϕ 改寫為

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=\eta_B} = \frac{1}{\Delta z} (-2u_2 + 6u_{3/2} - 4u_1) = \frac{\tau_{B,x}}{\rho v_{v, \frac{3}{2}}} \quad (4.16)$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=\eta_B} = \frac{1}{\Delta z} (-2v_2 + 6v_{3/2} - 4v_1) = \frac{\tau_{B,y}}{\rho v_{v, \frac{3}{2}}} \quad (4.17)$$

同理，可將自由液面剪力條件 $\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=\eta_S} = \frac{\tau_{S,x}}{\rho v_{v, K+\frac{1}{2}}}$ 與 $\left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=\eta_S} = \frac{\tau_{S,y}}{\rho v_{v, K+\frac{1}{2}}}$ 亦可以 u

和 v 取代(4.8)式中之 ϕ 改寫為

$$\frac{1}{\Delta z} (4u_{K+1} - 6u_{K+1/2} + 2u_K) = \frac{\tau_{S,x}}{\rho v_{v, K+\frac{1}{2}}} \quad (4.18)$$

$$\frac{1}{\Delta z} (4v_{K+1} - 6v_{K+1/2} + 2v_K) = \frac{\tau_{S,y}}{\rho v_{v, K+\frac{1}{2}}} \quad (4.19)$$

將(4.10)式、(4.14)式應用至各層，配合底床滑移(4.16)式或不滑移邊界條件 $u_1=0$ 及自由液面剪力邊界條件(4.18)式，重新整理可得到 u 之水柱層積分控制方程組；同理，將(4.11)式、(4.15)式應用至各層，配合底床滑移(4.17)式或不滑移邊界條件 $v_1=0$ 及自由液面剪力邊界條件(4.19)式重新整理可分得到 v 之水柱層積分控制方程組。

4.2 數值架構

4.2.1 有限體積法

有限體積法(Finite Volume Method)在方程式數值離散時採用控制體積之觀念，可適用於各種形狀之邊界，且介面相鄰兩元素所採用之通量相等，守恆性良好，已廣泛應用於計算流體力學。本研究在垂直方向上採用分層積分之方式離散控制方程式，在水平方向則採用有限體積法離散控制方程式，以得控制方程式最佳之守恆性。在離散控制方程式時，因控制方程式具有三個變數 u 、 v 、 w (或 H)，這三個變數既是待求變數，亦用以推求元素邊界通量，一般常用之方法有交錯格點(staggered grid)與非交錯格點(non-staggered grid)，非交錯格點將所有待求變數均放置於相同點上，因此僅使用一套格點，在有限差分法中計算方便，但已有許多研究指出非交錯格點求解之流場容易出現數值震盪之現象(checker board)，使用交錯格點在有限體積法中方便計算元素邊界通量，亦可避免數值震盪現象，交錯格點物理配置方式及其相對之控制體積元素如圖3.1所示。

考慮已經由積分之層積分動量方程式(4.10)與(4.11)式，將變數分別配置於圖3.1不同之格點上，使用有限體積法將動量方程式離散化，可表示成以下之形式

$$\begin{aligned} & [(hu_{k+1/2}\Delta x\Delta y)^{t+\Delta t} - (hu_{k+1/2}\Delta x\Delta y)^t] / \Delta t + \\ & (hu_{k+1/2}u_{k+1/2}\Delta y)_{e-w} + (hv_{k+1/2}u_{k+1/2}\Delta x)_{n-s} + ((Fu)_{k+1} - (Fu)_k)\Delta x\Delta y \\ & = \left(hv_h \left(\frac{\partial u_{k+1/2}}{\partial x} \right) \Delta y \right)_{e-w} + \left(hv_h \left(\frac{\partial u_{k+1/2}}{\partial y} \right) \Delta x \right)_{n-s} + \\ & v_v (6u_{k+1} - 12u_{k+1/2} + 6u_k)\Delta x\Delta y - [gh(H + \eta_B - z)_{k+1/2}]_{e-w} \Delta y \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned}
& [(hv_{k+1/2}\Delta x\Delta y)^{t+\Delta t} - (hv_{k+1/2}\Delta x\Delta y)^t] / \Delta t + \\
& (hu_{k+1/2}v_{k+1/2}\Delta y)_{e-w} + (hv_{k+1/2}v_{k+1/2}\Delta x)_{n-s} + ((Fv)_{k+1} - (Fv)_k)\Delta x\Delta y \\
= & \left(hv_h \left(\frac{\partial v_{k+1/2}}{\partial x} \right) \Delta y \right)_{e-w} + \left(hv_h \left(\frac{\partial v_{k+1/2}}{\partial y} \right) \Delta x \right)_{n-s} + \\
& v_v (6v_{k+1} - 12v_{k+1/2} + 6v_k)\Delta x\Delta y - [gh(H + \eta_B - z)_{k+1/2}]_{n-s} \Delta x
\end{aligned} \tag{4.21}$$

其中，上標 t 與 $t+\Delta t$ 表示計算之時刻，下標 (e,w) 與 (n,s) 表示控制體積於(東,西)與(南,北)控制面上之動量通量， e 、 w 、 n 、 s 控制面位置如圖 3.1 所示。或可表示成下列之傳輸通式

$$\begin{aligned}
& [(\nabla\phi_{k+1/2})^{t+\Delta t} - (\nabla\phi_{k+1/2})^t] / \Delta t + \\
& (G_x\phi_{k+1/2})_{e-w} + (G_y\phi_{k+1/2})_{n-s} + ((G_z\phi)_{k+1} - (G_z\phi)_k) \\
= & \left(D_x \left(\frac{\partial\phi_{k+1/2}}{\partial x} \right) \right)_{e-w} + \left(D_x \left(\frac{\partial\phi_{k+1/2}}{\partial y} \right) \right)_{n-s} + \\
& v_v (6\phi_{k+1} - 12\phi_{k+1/2} + 6\phi_k)\Delta x\Delta y - [gh(H + \eta_B - z)_{k+1/2}]_{e-w} \Delta y
\end{aligned} \tag{4.22}$$

其中， ϕ 為物理量 u 或 v ， ∇ 為控制體積， G_x 、 G_y 、 G_z 分別為 x 、 y 、 z 方向上之對流通量，表示如下

$$\begin{aligned}
G_{x,e} &= h \left(\frac{u_{E,k+1/2} + u_{P,k+1/2}}{2} \right) \Delta y & G_{x,w} &= h \left(\frac{u_{W,k+1/2} + u_{P,k+1/2}}{2} \right) \Delta y \\
G_{y,n} &= h \left(\frac{v_{N,k+1/2} + v_{P,k+1/2}}{2} \right) \Delta x & G_{y,s} &= h \left(\frac{v_{S,k+1/2} + v_{P,k+1/2}}{2} \right) \Delta x \\
G_{z,k+1} &= F_{k+1} \Delta x \Delta y & G_{z,k} &= F_k \Delta x \Delta y
\end{aligned}$$

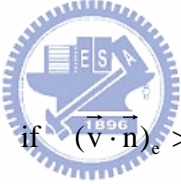
F_k 、 F_{k+1} 定義如(2.13)式，而擴散通量 D_x 、 D_y 則可表示為

$$D_{x,e} = v_h h \Delta y \quad D_{y,e} = v_h h \Delta x$$

4.2.2 數值差分式

對方程式(4.20)而言，可將對流項 $(G_x\phi)_{e,w}$ 、 $(G_y\phi)_{n,s}$ 與擴散項 $(D_x\partial\phi/\partial x)_{e,w}$ 、 $(D_y\phi)_{n,s}$ 均位於控制體邊界面上，而非控制體中心上，須由內插而得，茲將本研究採用之內插方式，敘述如後。

一階上風法(upwind scheme)雖然精度不高，但因其穩定性佳，常用在工程實務之模擬，由於三維模式數值處理複雜，因此對流通量 $(G_x\phi)_{e,w}$ 、 $(G_y\phi)_{n,s}$ 採用一階上風法



$$\phi_e = \begin{cases} \phi_P & \text{if } (\vec{v} \cdot \vec{n})_e > 0 \\ \phi_E & \text{if } (\vec{v} \cdot \vec{n})_e < 0 \end{cases} \quad (4.23)$$

擴散通量 $(D_x\partial\phi/\partial x)_{e,w}$ 、 $(D_y\partial\phi/\partial y)_{n,s}$ 採用中央差分法(central difference scheme)

$$(h\nu_h \frac{\partial\phi}{\partial x} \Delta y)_e \cong (h\nu_h \Delta y)_e \frac{1}{\Delta x} (\phi_E - \phi_P) \quad (4.24)$$

其中，物理量 ϕ 為 u 或 v ，上標 P 表示控制體積 CV 中心點 P ，上標 E 表示相鄰控制體積 CV 中心點 E ，其相關位置請參考圖 3.1。

4.2.3 水柱代數方程組

將(4.23)式與(4.24)式代入流速 u 、 v 之傳輸通量通式(4.22)式，可得到控制體之動量離散方程式

$$\begin{aligned} & A_t u_{i,j,k+1}^{t+\Delta t} + A_p u_{i,j,k+1/2}^{t+\Delta t} + A_b u_{i,j,k}^{t+\Delta t} \\ = & A_w u_{i-1,j,k+1/2}^t + A_e u_{i+1,k+1/2}^t + A_n u_{i,j+1,k+1/2}^t + A_s u_{i,j-1,k+1/2}^t + S^u \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} & A_t v_{i,j,k+1}^{t+\Delta t} + A_p v_{i,j,k+1/2}^{t+\Delta t} + A_b v_{i,j,k}^{t+\Delta t} \\ = & A_w v_{i-1,j,k+1/2}^t + A_e v_{i+1,k+1/2}^t + A_n v_{i,j+1,k+1/2}^t + A_s v_{i,j-1,k+1/2}^t + S^v \end{aligned} \quad (4.26)$$

其中，下標 i 、 j 與 k 代表變數沿 x 、 y 、與 z 方向之離散指標，上標 u 與 v 用以區分 u 與 v 離散動量方程式之通量係數，下標 P 代表該控制體中心點，下標 N 、 E 、 W 、 S 則代表相鄰控制體之中心點，參考圖 3.1， S 為其餘各項總和。通量係數 A_p 、 A_e 、 A_w 等，可由(4.23)式與(4.24)式代入(4.22)計算而得，並表示如後

$$A_e = \frac{D_{x,e}}{\Delta x} - (1 - \alpha_e) G_{x,e} \quad A_w = \frac{D_{x,w}}{\Delta x} + \alpha_w G_{x,w}$$

$$A_n = \frac{D_{y,n}}{\Delta y} - (1 - \alpha_n) G_{y,n} \quad A_s = \frac{D_{y,s}}{\Delta y} + \alpha_s G_{y,s}$$

$$A_t = G_{z,k+1} - 6v_v \Delta x \Delta y \quad A_b = G_{z,k} - 6v_v \Delta x \Delta y$$

$$\begin{aligned} A_p = & \frac{\nabla}{\Delta t} + 12v_v \Delta x \Delta y \\ & + \alpha_e G_{x,e} - (1 - \alpha_w) G_{x,w} + \frac{(D_{x,e} + D_{x,w})}{\Delta x} \\ & + \alpha_n G_{y,n} - (1 - \alpha_s) G_{y,s} + \frac{(D_{y,n} + D_{y,s})}{\Delta y} \end{aligned}$$

$$S^u = \frac{\nabla}{\Delta t} u_{k+1/2}^t - [gh(H + \eta_B - z)_{k+1/2}]_{e-w} \Delta y$$

$$S^v = \frac{\forall}{\Delta t} v_{k+1/2}^i - [gh(H + \eta_B - z)_{k+1/2}]_{n-s} \Delta x \quad (4.27)$$

其中，

$$\alpha_e = \begin{cases} 1 & \text{if } G_{x,e} > 0 \\ 0 & \text{if } G_{x,e} < 0 \end{cases} \quad \alpha_w = \begin{cases} 1 & \text{if } G_{x,w} > 0 \\ 0 & \text{if } G_{x,w} < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_n = \begin{cases} 1 & \text{if } G_{y,n} > 0 \\ 0 & \text{if } G_{y,n} < 0 \end{cases} \quad \alpha_s = \begin{cases} 1 & \text{if } G_{y,s} > 0 \\ 0 & \text{if } G_{y,s} < 0 \end{cases}$$

以方程式(4.25)取代方程式(4.10)，並應用至各分層，則(4.25)式、(4.14)式應用至各層，配合底床滑移(4.16)式或不滑移邊界條件 $u_1 = 0$ 及自由液面剪力邊界條件(4.18)式，可得到 u 之水柱層積分動量離散代數方程組。因此，對 K 層之水柱而言，共有 K 個層積分方程式、 $K-1$ 個剪力連續條件限制式、兩個邊界條件，與未知變數同樣共有 $(2K+1)$ 個，則形成單一水柱流速 u 之完整代數方程組。同理，以方程式(4.26)取代方程式(4.11)，並應用至各分層，(4.26)式、(4.15)式應用至各層，配合底床滑移(4.17)式或不滑移邊界條件 $v_1 = 0$ 及自由液面剪力邊界條件(4.19)式，可得到 $(2K+1)$ 個代數式形成之 v 之水柱層積分動量離散代數方程組。

4.2.4 求解步驟

對水柱之 u 或 v 動量離散代數方程組，水深方向採全隱式法(fully

implicit scheme)，水平方向採顯式法(explicit scheme)，因為剪力連續條件限制式(4.14)式與(4.15)式均具有五個未知變數，因而水柱層積分動量離散代數方程組係數矩陣形成具五條對角線之帶狀矩陣，可用附錄 A 之修正湯瑪斯法(modified Thomas algorithm)求解。由於流場中同一水柱之水深、流速剖面、紊流黏滯係數相互密切影響，因此求解程序上先由垂直方向將各個水柱離散方程組求解，然後代入連續方程式求解垂向速度與水深變化，不僅符合物理機制，數值上也相對簡單與穩定，求解步驟如圖 4.1 所示並說明如後：

- a. 設定起始流速與水深。
- b. 使用Elder紊流黏滯係數關係式計算紊流黏滯係數，其係數 α 以(2.35)式估算。
- c. 以方程式(4.25)、(4.14)式並應用至各層，配合底床滑移(4.16)式或不滑移邊界條件 $u_1=0$ 及自由液面剪力邊界條件(4.18)式重新整理可得到 $(2K+1)$ 個代數式形成之 u 之水柱層積分動量離散代數方程組求解 u 。
- d. 以方程式(4.26)、(4.15)式應用至各層，配合底床滑移(4.17)式或不滑移邊界條件 $v_1=0$ 及自由液面剪力邊界條件(4.19)式重新整理可得到 $(2K+1)$ 個代數式形成之 v 之水柱層積分動量離散代數方程組求解 v 。
- e. 將 (c)、(d) 求得之流速 u 、 v 代入連續方程式求解 垂向速度 w 與水深 H 。
- f. 重複步驟 (b)-(e) 迭代修正非線性對流項。
- g. 判對 (f) 步驟是否達到要求之收斂條件，若收斂則跳至下一時刻。

4.2.5 數值穩定限制條件

本研究之數值方法採採垂向隱式與水平顯式之半隱式法求解，對擬似三維之淺水波方程組必須滿足 CFL 收斂條件(Courant- Friedrichs-Levy condition)

$$CFL = 2\Delta t \sqrt{gH} \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}} \quad (4.28)$$

且透過連續方程式求解垂向速度亦採顯式法，故

$$\Delta t \leq \frac{\Delta z}{w} \quad (4.29)$$

4.3 小結



分層模式(二)之發展方式係針對分層模式(一)所遭遇之困難作改進，其改進方式包含數學上及數值上之改進，使得分層模式之數值解具有穩定、快速收斂之特性，茲將改進方式之依據與模式收斂特性之關係敘述如後：

- 考慮淺水波之物理非等向性流場之物理機制，淺水波流場因水平與垂直尺度之差異，流場垂向變化大，因此，引入層內部二次函數，利用剪力連續條件導出層介面剪力連續條件限制式，對一水柱建立水柱水柱方程式，改進其數學特性。
- 底床邊界條件使用不滑移邊界條件，即Dirichlet邊界條件，使解在數學上具唯一性，較底床、液面都使用Neumann邊界條件穩定。
- 數值差分使用垂向全隱式、水平顯式之半隱式法求解，確保垂向上之數值穩定，並簡化水平上之計算方式，使模式容易建立卻兼顧數值解

之收斂性。

- d. 求解步驟放棄水深二維平均模式常用之水平ADI數值方法，先逐一對單一水柱方程式求解，建立水柱上符合物理意義之暫態流速剖面，進而利用迭代方法讓數值解收斂。
- e. 使用有限體積法離散控制方程式，上游流速邊界設定為單寬流量均勻非配於任意時刻任意迭代之水深上，使上游流量邊界之處理正好符合有限體積法之守恆特性，巧妙避免流速邊界引起之數值震盪。



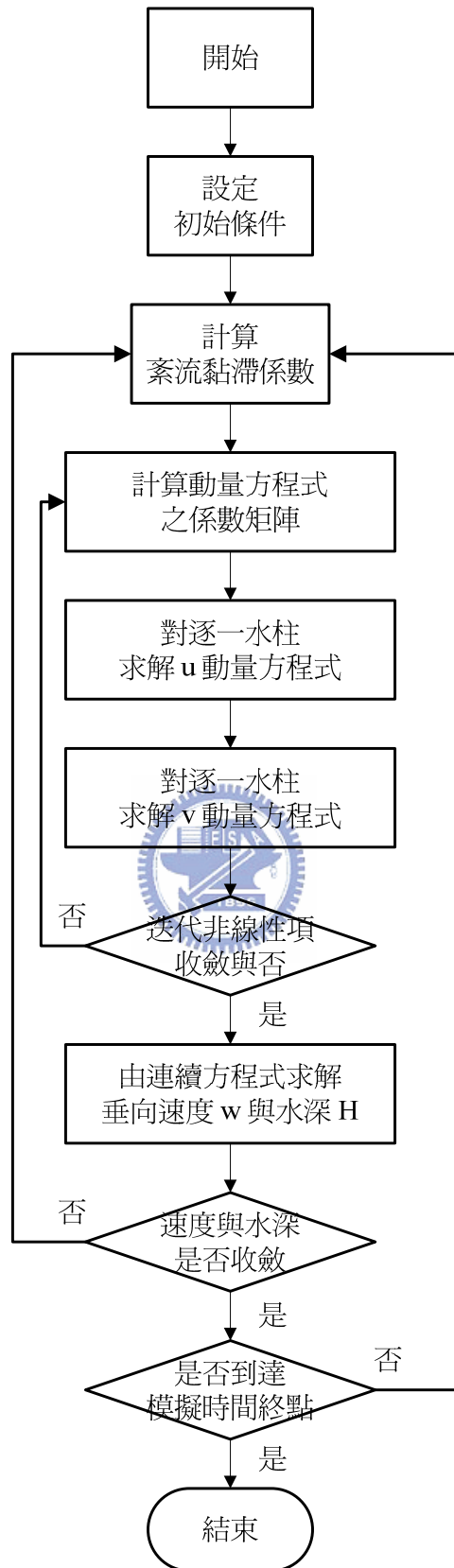


圖 4.1 分層模式(二)求解步驟流程圖

第五章 風剪垂直環流場驗證

封閉之水池受到風吹時，水面受到風剪應力帶動，表面水體朝與風同方加速，進而帶動更內部之水體，當水流向前運動遇到邊界受阻，表面水體會產生堆升，此種堆升現象亦會造成底部水平方向壓力不平衡而造成底部水體朝與風反向之運動，當水面堆升至一定程度後，水面坡降造成之壓力差若與風剪應力平衡，則水面坡降不再改變，而水體內部則形成一穩定之垂直環流場。此一水體由靜止開始運動後各種外力平衡而產生之內部流場，可用以檢視模式是否具物理機制適度反應其現象。

假設之封閉水槽定常流數值驗證案例設計如下：長度400 m、寬度160 m、水深2 m，水體之初始條件為靜止狀態，當 $t = 0$ 秒，整個水面開始受均勻之風吹作用，從 $t = 0$ 秒到 $t = 10$ 秒，風剪應力由 0 N/m^2 線性增加到 0.5 N/m^2 ，當 $t > 10$ s之後，風剪應力維持在 0.5 N/m^2 ，本案例採均勻網格 $\Delta x = 20\text{m}$ 、 $\Delta y = 8\text{m}$ ，水體密度 $\rho = 1000\text{kg/m}^3$ 、垂直運動黏滯係數 $\nu_v = 0.015\text{m}^2/\text{s}$ 。

5.1 層數對流速剖面之影響

對層流狀況之流場，垂直黏滯係數若沿水深方向均勻分布，則水平流速之水深方向剖面將呈拋物線之二次分布，Heaps [12]針對定常層流底床不滑移狀況，推導出湖泊環流之水深方流速剖面的解析解，表示如下

$$u(z) = \left(\frac{\tau_s}{4\rho\nu_v} \right) \frac{z(3z - 2H)}{H} \quad (5.1)$$

其中， $u(z)$ 表示於高程 z 之流速， H 為水深， ν_v 為垂直方向之紊流黏滯係數， τ_s 為作用於湖面之風剪應力， ρ 為水體密度。另外，基於靜水壓假設，水面坡降可經由水面堆升造成之壓力差與底床剪應力平衡解析而得，表示如後

$$S_s = \left(\frac{\tau_s}{\gamma H} \right) \quad (5.2)$$

其中， S_s 為水面坡降， γ 為單位體積之水重。

圖5.1為不同層數(5層、10層、15層、20層、25層及30層)對流速剖面之影響，並與(5.1)式解析解比較，從圖中可看出層數從5層增加至10層時，流速剖面變化最為明顯，而層數超過20層後，流速剖面之變化已不明顯，因此，往後之風剪環流場測試案例使用之層數均設定為20層；以20層之流速剖面模擬結果與解析解比較發現，流向改變點發生在1/3水深處，此一現象與解析解一致，但流速值則較解析解稍大。圖5.2則為使用不同層數對水面坡降之影響，從途中可看出，水面坡降隨層數變化之趨勢與流速剖面隨層數變化有相同之趨勢，即，5層與10層之變化最為明顯，層數超過20層後變化便不明顯，若以20層之水面坡降模擬結果與解析解比較，發現解析解之水面坡降僅20層模擬結果之2/3左右，由於解析解係假設湖面範圍甚大，水流不受邊界影響，因此，模擬結果之水面坡降較解析解大之原因應為水面受邊界影響而過度堆升。

持續增加自由液面之風剪應力大小，或是降低水體黏滯係數，可提高雷諾數，以採用之黏滯係數、水深與水面流速計算雷諾數，經測試結果雷諾數最高可達300左右，較一般封閉邊界之穴流(cavity flow)為低，究其原因應為自由液面非固定邊界，垂向動量方程簡化為靜水壓分佈，以及未考慮紊流

模式之影響。

5.2 模式對流場物理現象之反應機制

封閉之水池自由液面受風剪應力作用引起之垂直環流場，其發展過程可以區分為兩步驟：(a)水面受到風吹時，水面受到風剪應力帶動，表面水體朝與風同方加速，進而帶動更內部之水體，(b)當水流向前運動遇到邊界受阻，表面水體會產生堆升，此種堆升現象亦會造成底部水平方向壓力不平衡而造成底部水體朝與風反向之運動，當水面堆升至一定程度後，水面坡降造成之壓力差若與風剪應力平衡，則水面坡降不再改變；若模式建立正確，理應能反映此種物理現象，因此，就5.1節相同之案例，水深均勻切割為20層，觀察測試案例中環流場之發展過程，驗證模式之機制。



圖5.3至圖5.5分別為渠道中間長度處($x=200\text{m}$)、近背風邊界處($x=20\text{m}$)以及近迎風邊界處($x=380\text{m}$)之風剪環流場流速垂向剖面隨時間發展之過程，圖5.6則為風剪環流場水面坡降隨時間發展之過程。從圖5.3中可以看出 $t = 0 \text{ sec} \sim 2 \text{ sec}$ 間，整個水體為表面受風剪應力所帶動而作與風吹同向之運動，下方水體仍為靜止，此時即為水面受風吹開始堆升之階段；當 $t = 5\text{s}$ 時，下方水體開始作與風吹反向之運動，此即水面堆升造成壓力不平衡，而驅動下方水體運動之階段；當 $t > 20\text{s}$ 後，流速剖面已開始漸趨平衡，此即水面堆升造成壓力差，與底床剪應力達平衡之階段；從圖5.3可以看出模式模擬結果之流速剖面發展過程能充分反映風剪垂直環流場之物理機制。

圖5.4與圖5.5則為靠近背風邊界處與靠近迎風邊界處之流速剖面發展

過程，兩者之流速剖面發展過程與中間長度處比較，可明顯看出其發展過程受邊界之影響而運動幅度較小，此亦與實際物理現象相符，從圖5.6也可看出水面坡降發展過程，有相同之趨勢。圖5.7則為不同水深處之流速發展過程，由圖中可發現以下現象，從 $t = 0 \text{ sec}$ 到 $t = 10 \text{ sec}$ 期間，由於水面施加之風剪應力線性增加，水面流速由靜止持續增加，但水面也同時堆升，因此，1/3水深處($z=1.35\text{m}$)流速在 $t > 5 \text{ sec}$ 後即增加緩慢，而2/3水深處($z=0.65\text{m}$)之流速在約 $t = 3 \text{ sec}$ 時達到最大值後，因左右壓差作用而開始降低；當 $t > 10 \text{ sec}$ 後水面風剪應力不再增加，因此2/3水深處之流速受壓差持續作用而反向增加，水面與1/3水深處之流速開始被下方水體拉回而減小，當 $t > 20 \text{ sec}$ 後流速搭約呈平衡狀態。由此可以看出本研究發展之模式可模擬流場由靜止開始運動之發展過程，模式可充分反映自由液面流之實際物理現象。



5.3 黏滯係數分佈型態對流速剖面之影響

5.2小節之案例係假設黏滯係數沿水深方向均勻分布之層流狀況，然而，實際流場應為紊流狀況，其紊流黏滯係數之分佈型態應近似拋物線型 (Nezu & Nakagawa [28])。為驗證本研究發展之自由液面流模式能模擬不同型態之流場，本節沿用5.2節相同之案例設定，並採用三種不同之黏滯係數分佈型態，其水深平均值與均勻分佈型態同為 $0.015\text{m}^2/\text{s}$ ，第一種為現地流場常見之拋物線型分佈，另兩種則為假設之梯型分佈型態，茲表示如下

$$v_v = \begin{cases} 0.09\left(\frac{z}{H}\right)\left(1 - \frac{z}{H}\right) & \text{for parabolic} \\ 0.01\left(1 + \frac{z}{H}\right) & \text{for trapezoidal type I} \\ 0.01\left(2 - \frac{z}{H}\right) & \text{for trapezoidal type II} \end{cases} \quad (5.3)$$

其流速剖面模擬結果與黏滯係數均勻分布形態之模擬結果比較分別如圖5.8與圖5.9所示。

由於水面風剪應力透過水體向水深方向之傳遞為線性分佈，並不隨黏滯係數分佈型態之變化而改變，因此對任何水深處，黏滯係數與流速梯度之乘積不隨黏滯係數分佈型態改變，因此，黏滯係數較小則有較大之流速梯度；反之，黏滯係數較大則有較小之流速梯度。從圖5.8為拋物線型分佈型態之流速剖面模擬結果與黏滯係數均勻分布模擬結果之比較，可以發現其流速梯度沿水深方向變化與前述原理吻合，對拋物線型分佈型態而言，靠近底床與液面處有較均勻分佈型態小之黏滯係數，因此其流速梯度較黏滯係數均勻分佈者大。圖5.9則為兩黏滯係數梯形分佈型態與均勻分佈型態之比較，type I 之黏滯係數於底床最大並線性遞減至液面處，其流速剖面液反應出底床處有較小之流速梯度而慢慢遞增至液面處有最大之流速梯度，type II 則充分反映出與 type I 相反之型態。

從以上之比較觀察，可以看出本研究發展之模式透過剪力連續條件限制式，使流速剖面之形狀能充分反映出黏滯係數分佈型態造成之影響，亦即模式且具模擬任意型態之黏滯係數分佈相對應流速剖面之能力。

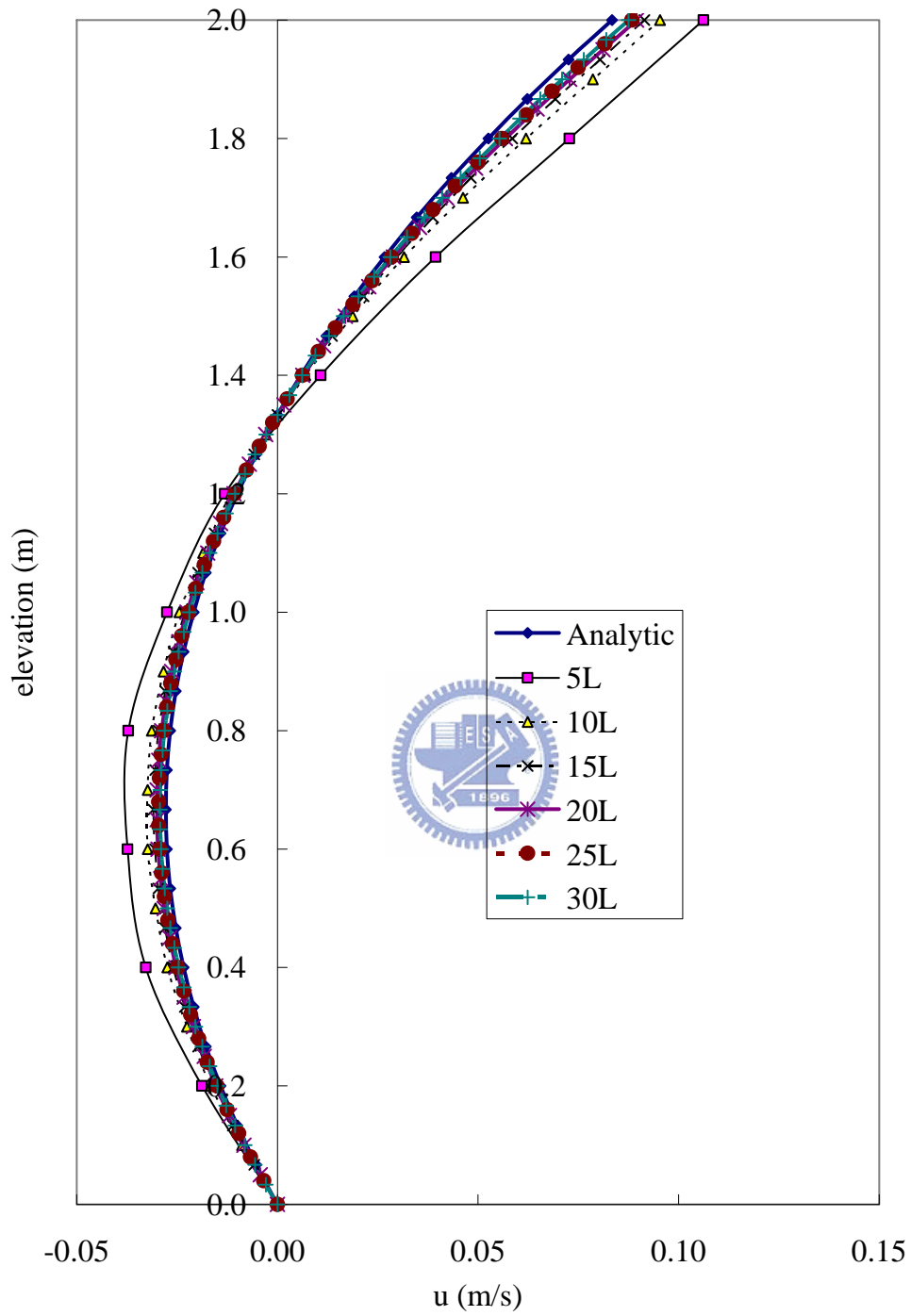


圖 5.1 不同層數對風剪環流場流速剖面之影響

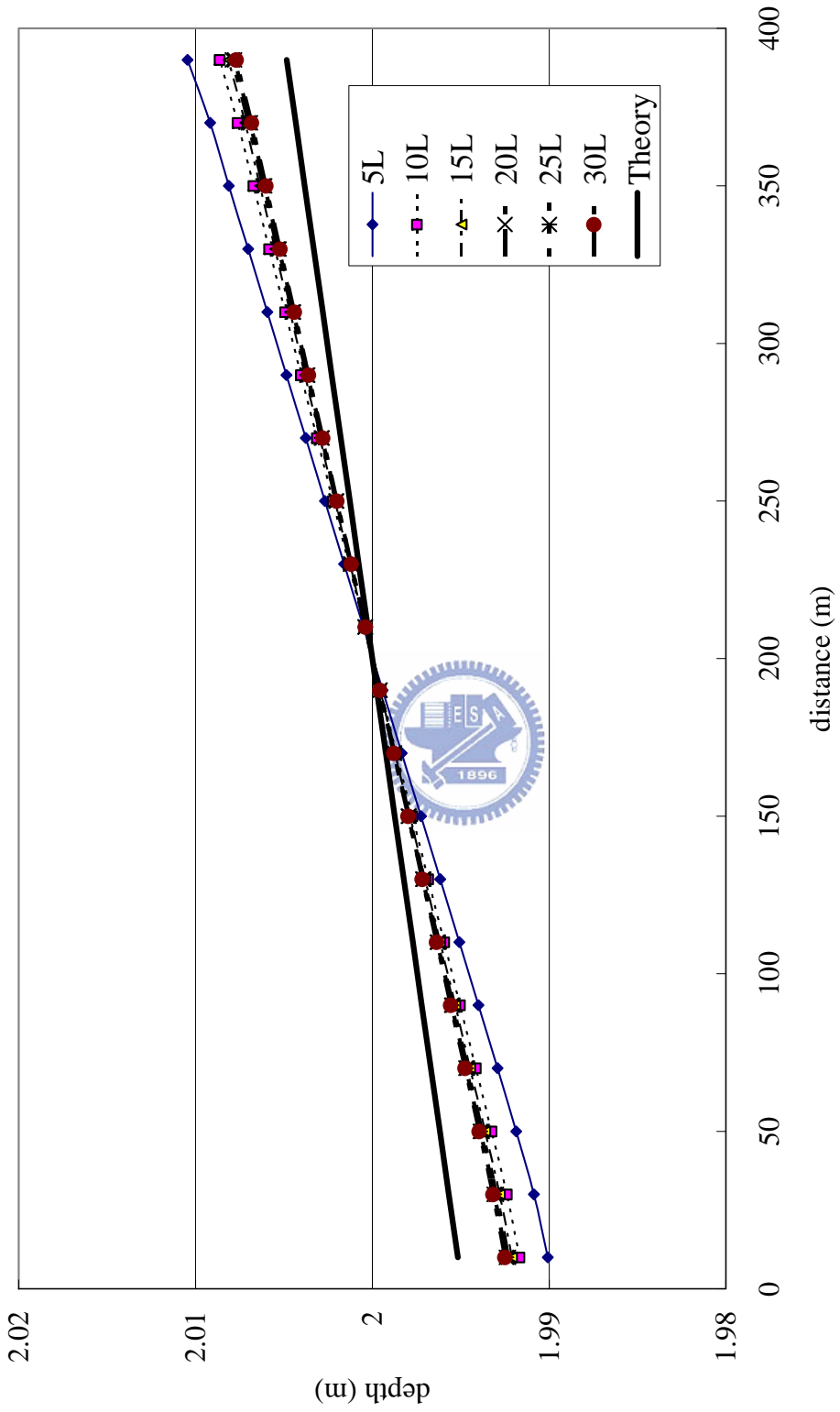


圖 5.2 不同層數對風剪環流場水面坡降之影響

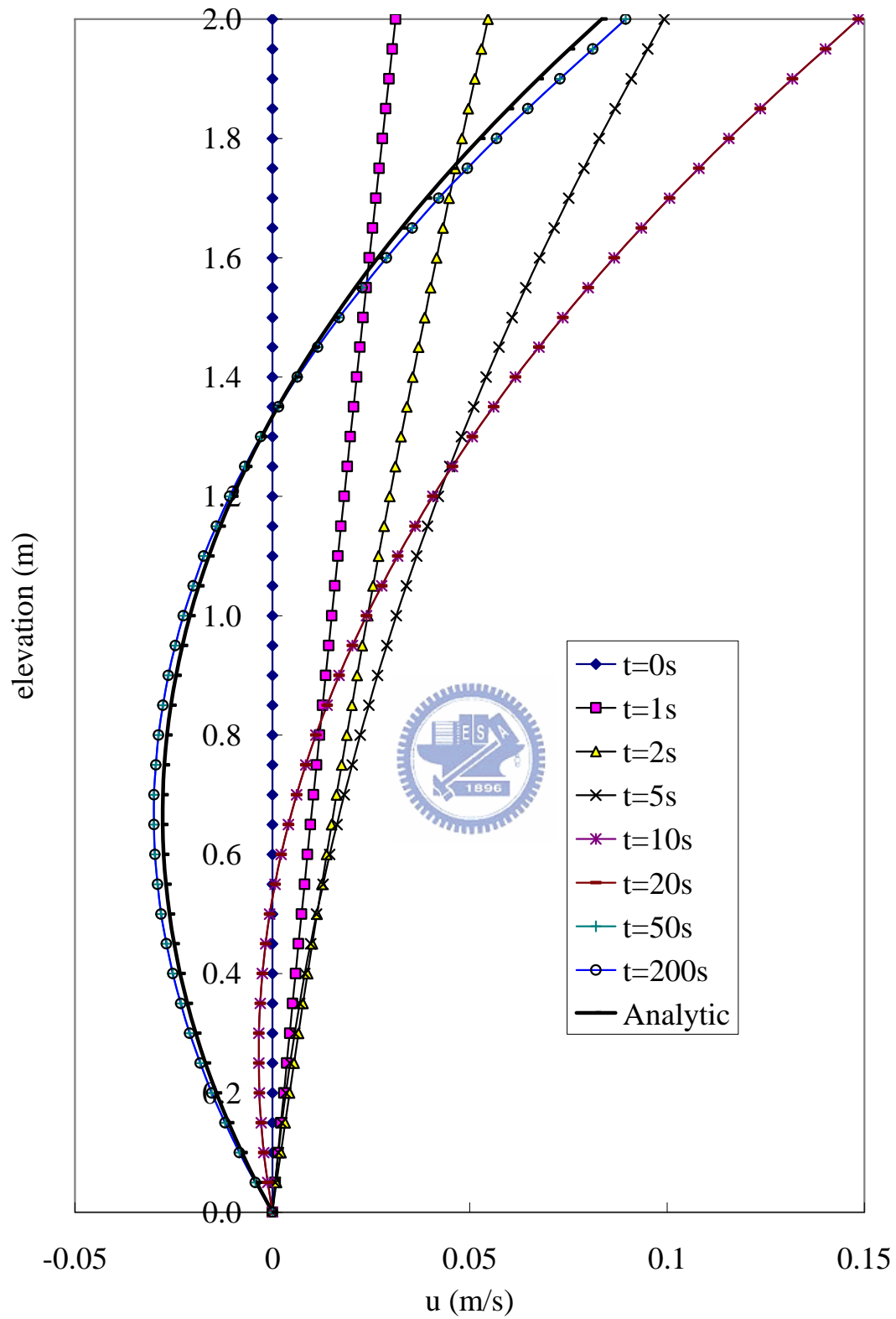


圖 5.3 風剪環流場流速剖面之發展過程(縱向中間長度處)

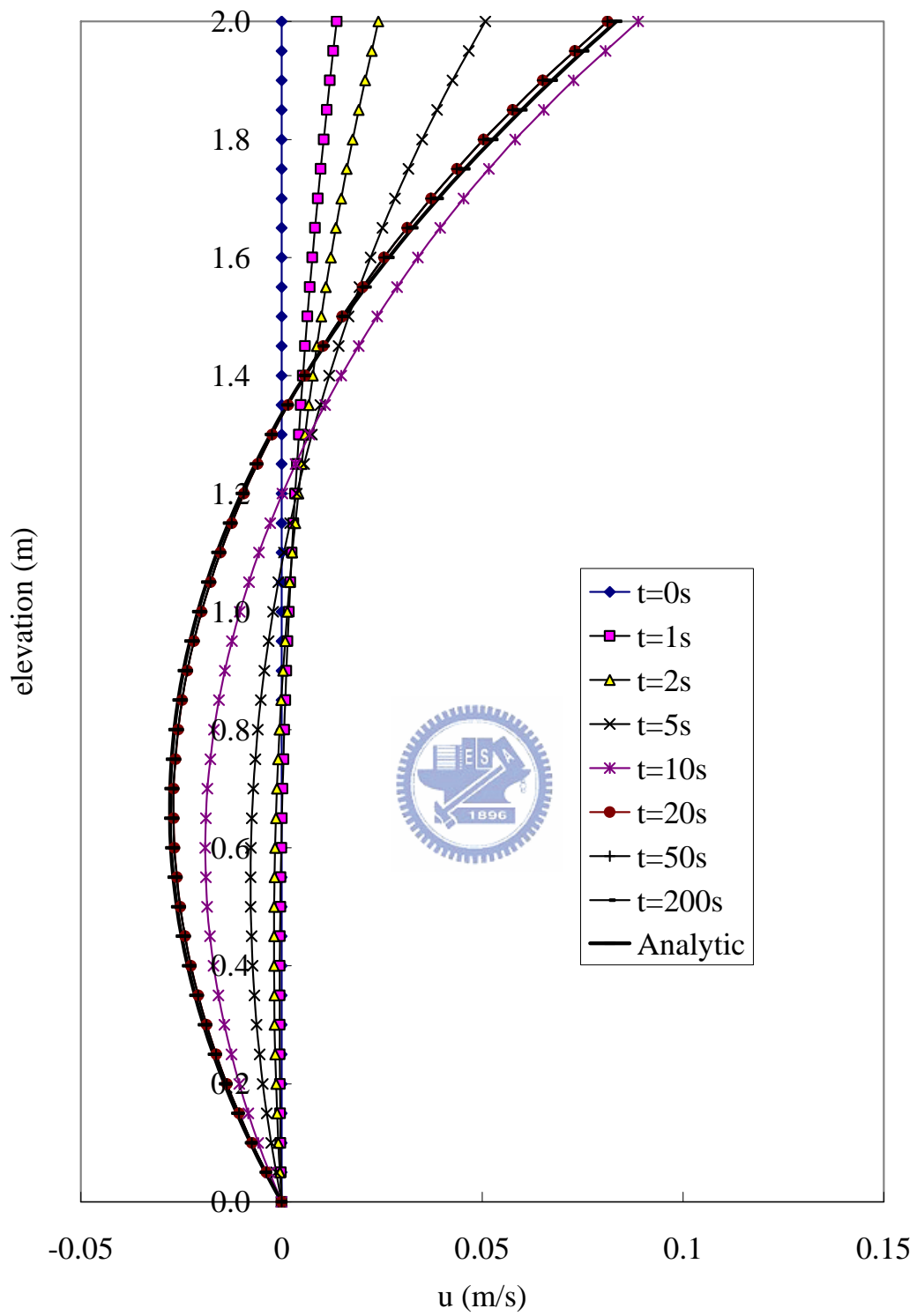


圖 5.4 風剪環流場流速剖面之發展過程(靠近背風邊界處)

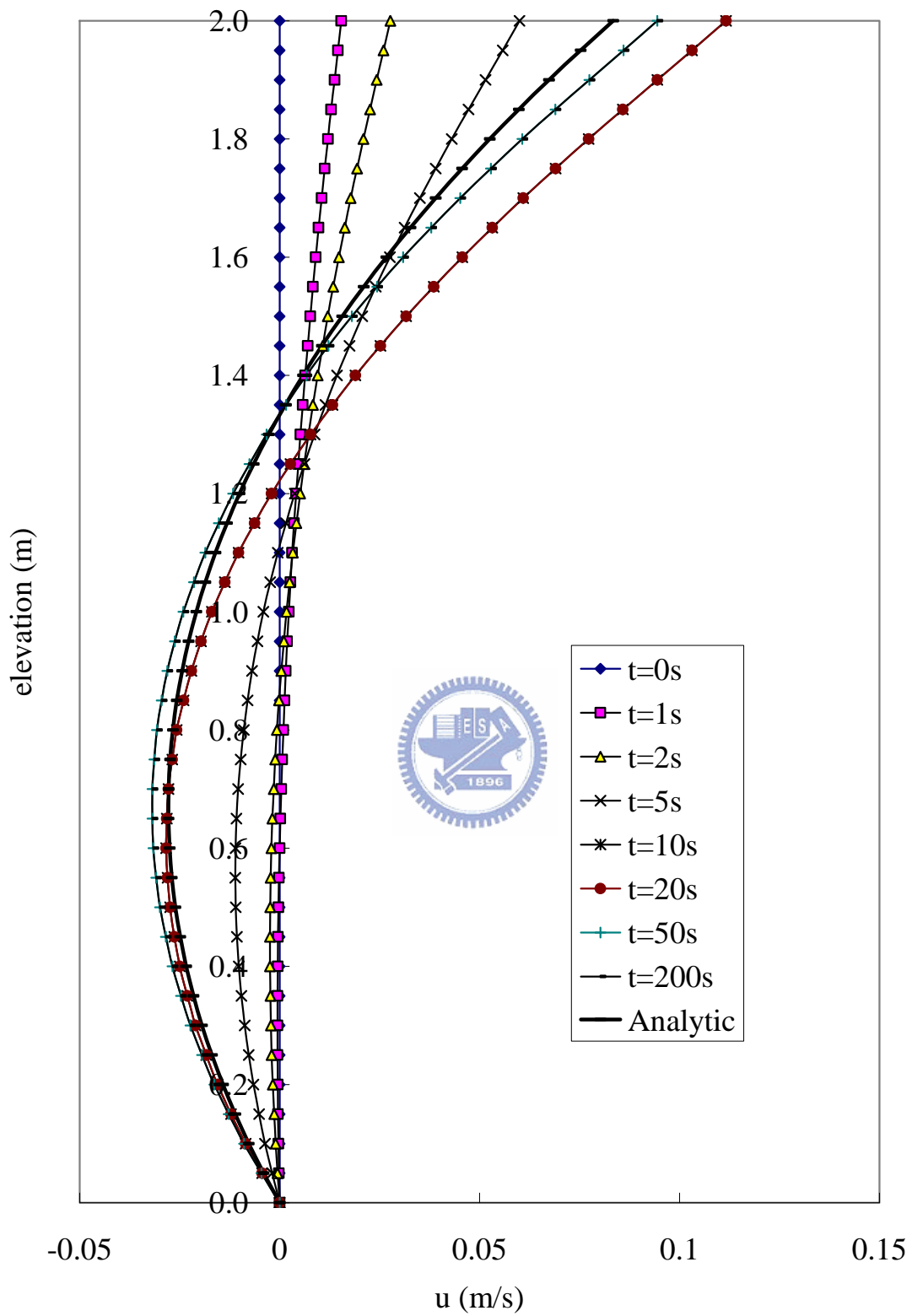


圖 5.5 風剪環流場流速剖面之發展過程(靠近迎風邊界處)

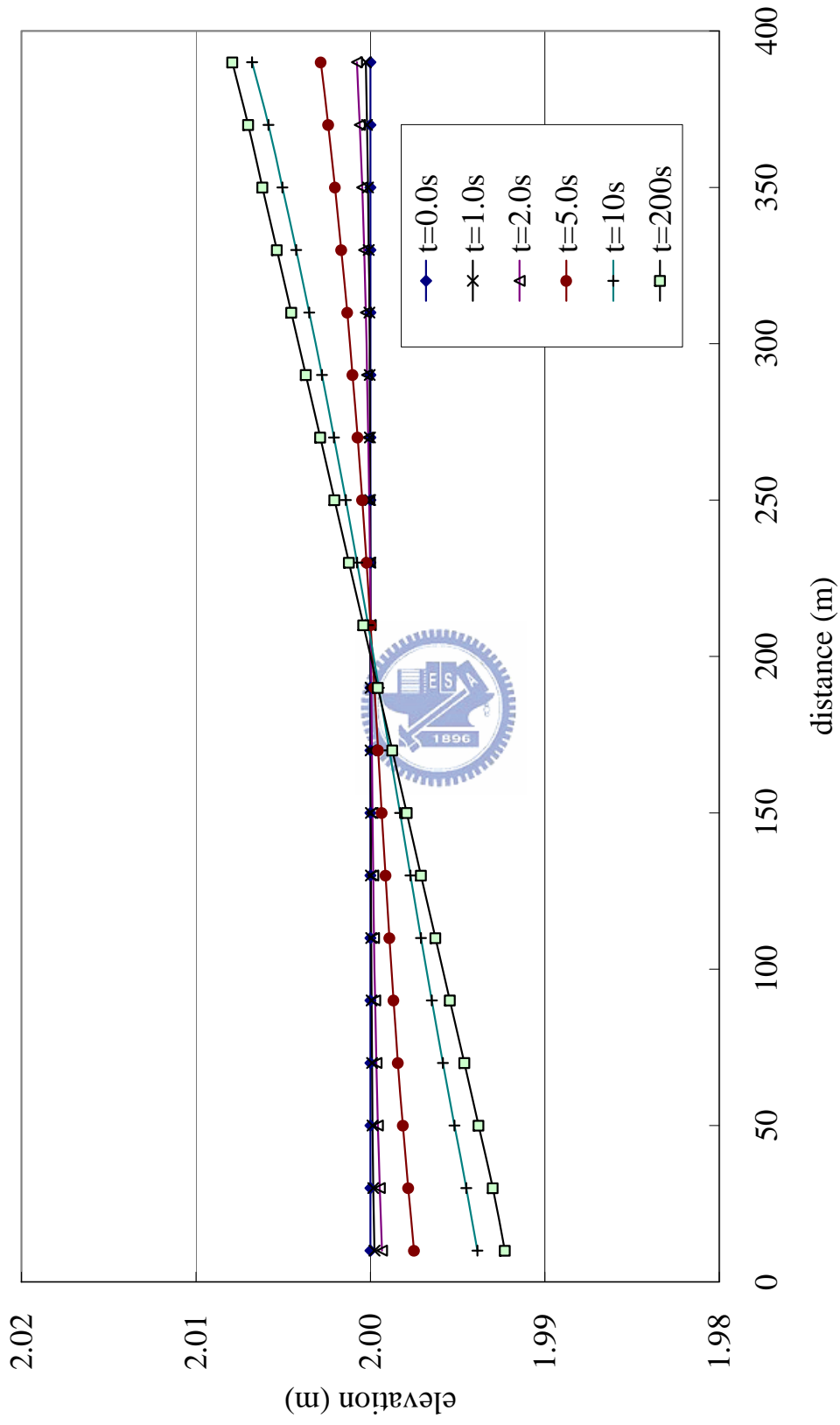


圖 5.6 風剪環流場水面坡降之發展過程

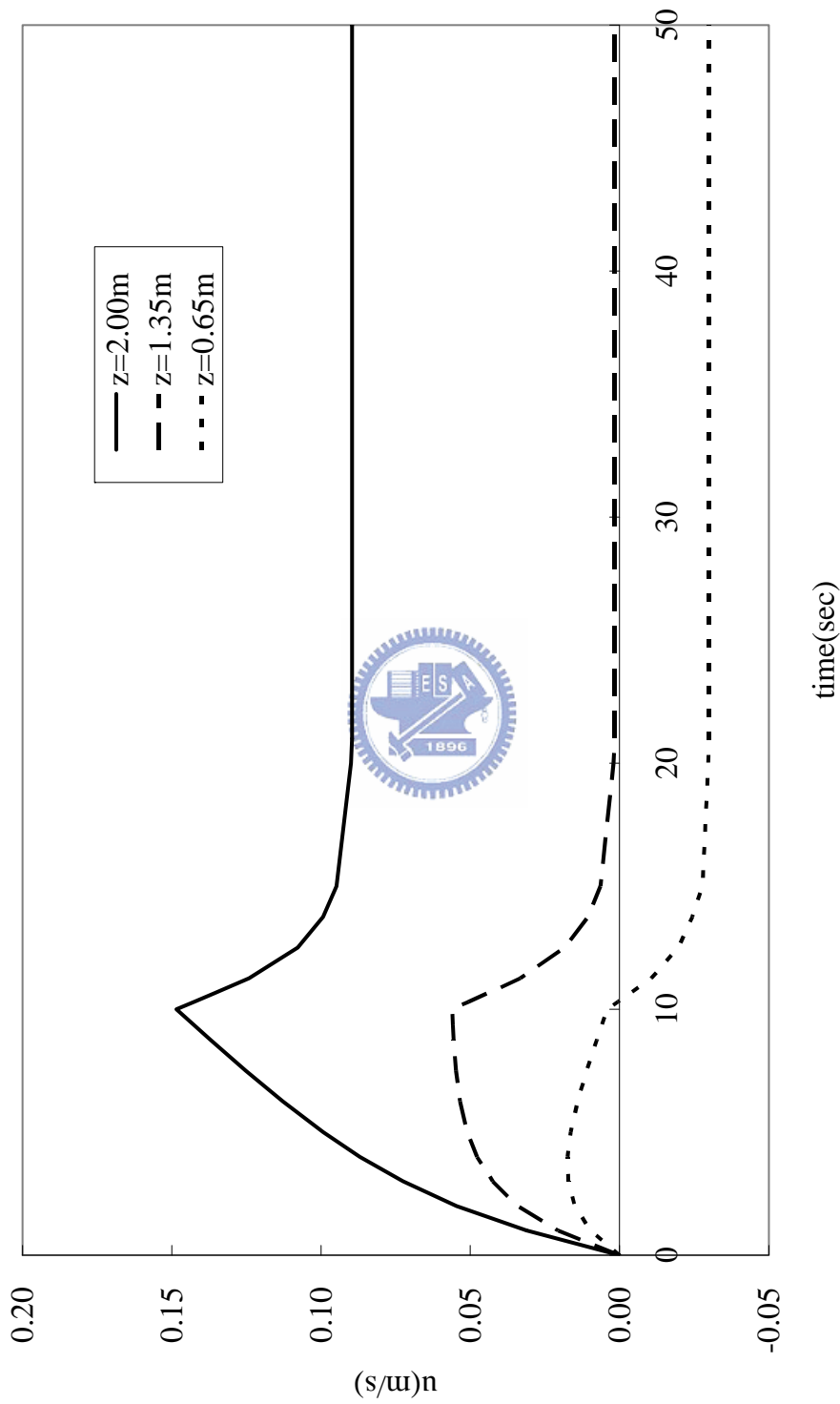


圖 5.7 風剪環流場不同水深處之流速發展過程

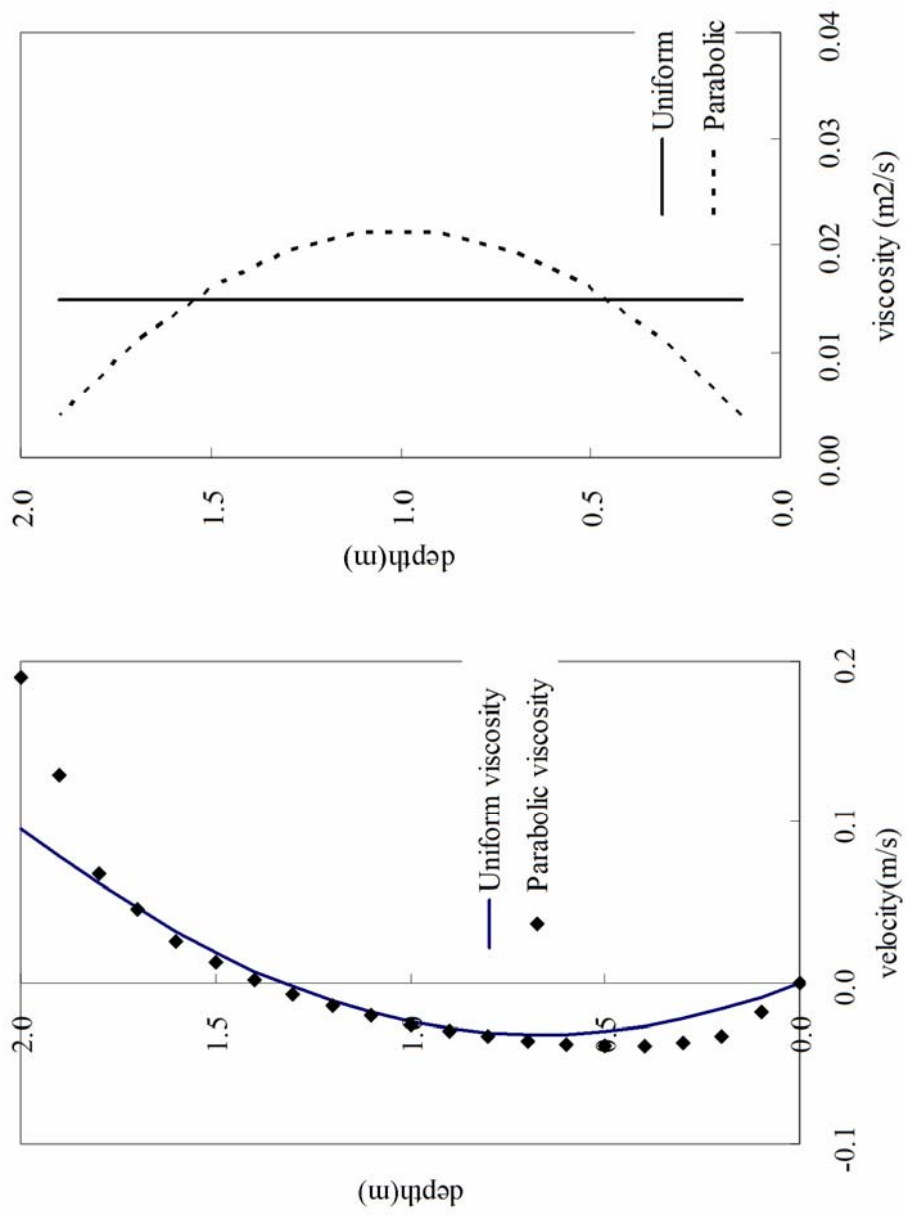


圖 5.8 不同型態之黏滯係數分佈對流速剖面之影響(均勻 vs 拋物線型)

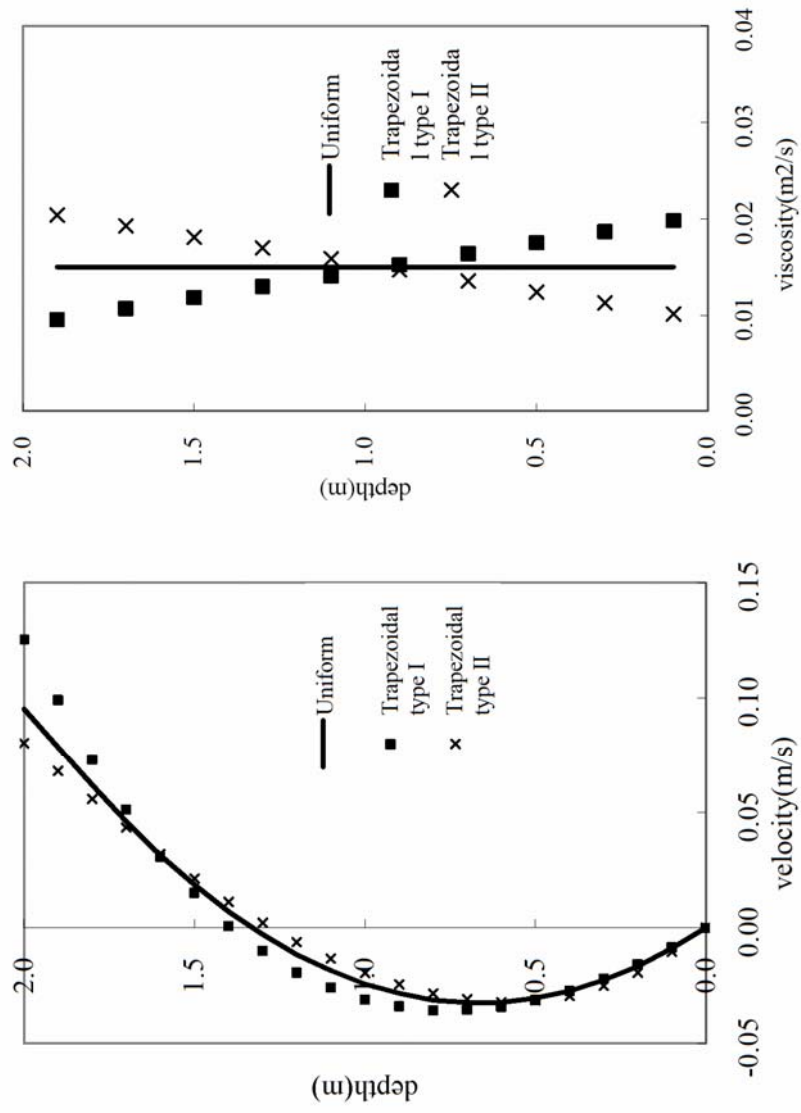


圖 5.9 不同型態之黏滯係數分佈對流速剖面之影響(均勻 vs 梯形)

第六章 明渠流之計算與比較

封閉水池內之風剪環流場並無淨流量(net flow rate)，因此沒有流量—水深關係是否合理之問題，風剪應力僅改變流速大小與水面坡降，不同黏滯係數分佈型態僅影響流速剖面之形狀與大小，平均水深仍與靜止狀態時相同。然而，對於河川或渠道內之水流，其流場不僅傳輸動量，同時也傳輸質量；水深、流速剖面、流量、垂直黏滯係數大小與分佈型態間之關係，為相互作用而非單向影響，對實際三維流場而言，紊流黏滯係數為流場之函數，而流場分佈型態則受紊流黏滯係數分佈型態影響，無法藉由人工估算或率定達成。本章將以層厚度、黏滯係數大小、分佈型態、底床與水面邊界條件等因子，測試模式之特性及其對明渠流模擬結果之影響。



假設一均勻寬度之矩形渠道，長5,000 m、寬100 m、底床坡度 0.0005、底床曼寧 n 值為0.035，渠道內有一單位寬度流量 3.987 cms/m 之定常流，其均勻流況相對應之福祿數為0.245。模式於側邊界採用滑移邊界條件，上游邊界條件縱向流速採單寬流量均勻分配於任一瞬時之邊界水深，橫向與垂直向流速為 0，下游邊界採流速之縱向梯度為 0，即 $\partial u/\partial x = 0$ 、 $\partial v/\partial x = 0$ ，模式計算之各參數設定如後： $\Delta x = 500\text{m}$ 、 $\Delta y = 10\text{m}$ 、 $\rho = 1,000\text{kg/m}^3$ ，Elder 紊流黏滯係數關係式之係數 α 經(2.36)式估算為 0.0304，亦即紊流運動黏滯係數為 $0.011\text{ m}^2/\text{s}$ 。

6.1 紊流黏滯係數關係式之驗證

2.4節中假設紊流黏滯係數沿水深方向均勻分佈，推導出一能反映流量、水深、底床粗糙度之紊流黏滯係數估算式(2.36)，在紊流子模式尚未加入前，模式可依此估算式即時推估水深，接下來將驗證該紊流黏滯係數估算式。對於渠道內之均勻流，改變底床粗糙度之曼寧 n 值將影響渠內之正常水深，即，紊流黏滯係數為底床坡降、流量、與底床粗糙度之函數，黏滯係數改變影響流速剖面形狀，進而改變水深大小。

今改變渠道之底床粗糙度，使用三種曼寧 n 值為 0.03、0.035 與 0.04 三種，表6.1為三種粗糙度下，曼寧公式計算所得正常水深與模擬水深之比較， $n = 0.03、0.035、0.04$ 之正常水深分別為 2.74m、3.0m、3.25m，(由於側壁採滑移邊界條件，因此計算正常水深時，潤週僅計入底床接觸長度，未計入兩側壁接觸長度)，模擬水深則分別為 2.79m、3.00m、3.28m，較曼寧公式計算之正常水深稍大，圖6.1則為三種曼寧 n 值模擬所得河道中心點水深剖面圖，比較中發現，模擬水深與曼寧公式正常水深雖有誤差，但仍可接受；圖6.2則為河道中間長度處中心點流速垂向剖面之比較，圖中可以看出較小之曼寧 n 值，水深較小且流速較大；較大之曼寧 n 值，則水深較大且流速較小。

6.2 紊流黏滯係數分佈型態對流速剖面之影響

6.1 節已驗證紊流黏滯係數估算式，與曼寧公式計算之正常水深差異不大，可計算得到合理之水深；但因該估算式係基於紊流黏滯係數沿水深方向均勻分布之假設，紊流強度之垂向分布與現場實際河川流速剖面並不一致，

該估算式雖能估算合理之水深，但流速剖面形狀則呈現拋物線型分佈，並非河川中常見之對數型分佈。

本節設定三種紊流係數分佈型態，一方面測試紊流係數非均勻分佈型態下模式之模擬能力，另一方面則觀察不同紊流係數非均勻分佈型態對水深與流速剖面形狀之影響；茲比較三種紊流係數分佈型態，以 Elder 紊流係數關係式之型式推估，係數 α 分佈型態比較如圖 6.3，並以數學式表示如下：

$$\text{Type I} \quad \alpha = \frac{v_v}{Hu_*} = 0.0304 \quad (6.1)$$

$$\text{Type II} \quad \alpha = 0.0304[0.5 + 4(\frac{z}{H})(1 - \frac{z}{H})] \quad (6.2)$$

$$\text{Type III} \quad \alpha = \kappa(\frac{z}{H})(1 - \frac{z}{H}), \quad \kappa=0.41 \quad (6.3)$$

其中 type I 為均勻分佈型態，係數 α 由(2.36)式估算，type III 為 Elder [6] 由解析方式提出並經 Jobson & Sayre [15] 實驗觀察分析之拋物線分布型態，type II 則為任意組合之分佈型態。

直線渠道中紊流係數非均勻分佈型態對水深與流速剖面形狀之影響，其中 type I 之紊流係數為均勻分佈型態，流速剖面形狀應近似拋物線；type III 之紊流係數分佈型態為拋物線型，依均勻流之數學特性，流速剖面形狀應近似對數分佈；type II 之紊流係數分佈型態為兩者線性組合，因此流速剖面形狀應介於兩者之間。由 5.3 節之觀察得知黏滯係數非均勻分佈相對應之流場於黏滯係數較小處有較大之流速梯度，因此將層數由 5 層增加至 10 層以提高流速剖面之解析度，圖 6.4 為三者流速剖面模擬結果比較圖，圖中可看出三者流速分佈形狀明顯受黏滯係數分佈型態影響，其中以 type III 最接近自然河川之流況，然而 type III 水深雖然接近正常水深，但仍高出 5% 左右。圖 6.5 係將三組流速剖面無因次化，並與 Naot & Rodi [26] 實驗觀測之流速剖面做比較，仔細觀察流速剖面，以 type III 之拋物線型紊流係數分佈

型態之無因次流速剖面較接近實驗觀測之流速剖面形狀，但在接近底床處流速梯度仍不陡峭，究其原因可能為近床區解析度不夠，致層平均位置所得知黏滯係數過大而使流速過度過小，因而近床區厚度可能為影響模擬結果之因素。

6.3 底床層厚度對流速剖面之影響

從 5.1 節中使用層數對風剪環流場流速剖面之影響分析中可看出，不同的層數會影響流速剖面模擬結果，6.2 節的觀察發現對直線渠道明渠流而言，除了紊流係數分佈型態之外，近床區層厚度亦會影響水流流速剖面及水深模擬結果，因此，本節將測試不同層厚度對模擬結果之影響。



紊流黏滯係數分佈型態採 6.2 節中之 type I 與 type III，即黏滯係數均勻分佈與拋物線型分佈兩種型態，層數分別使用 5 層、10 層、15 層、20 層四種，測試使用層數對流速剖面模擬結果之影響，圖 6.6 與圖 6.7 分別為黏滯係數均勻分佈與拋物線型分佈之流速剖面模擬結果。圖 6.7 中可看出黏滯係數拋物線型分佈中不同使用層數明顯影響流速剖面之模擬結果，當層數由 5 層增加為 10 層時，流速剖面之改變最為明顯，回顧剪力連續條件(4.14)式，對底床層採用之黏滯係數由(6.3)式決定，因此層厚度愈小，得到之黏滯係數愈小，則底床層之流速梯度愈大，由此可知底床層厚度愈小，愈能得到合理之結果，而黏滯係數。而黏滯係數均勻分佈型態則因底床層厚度大小不改變黏滯細述之選取，由圖 6.6 中可看出黏滯係數均勻分佈中各種層數之模擬結果幾乎一致。

圖 6.8 為黏滯係數拋物線分佈型態之無因次化流速剖面與 Naot & Rodi

[26]實驗觀測之流速剖面之比較，比較中亦可發現從 5 層增加到 10 層之改變最為明顯，15 層與 20 層模擬結果之差異已不明顯，而且差異主要存在於近床區之流速梯度之改變，遠離近床區則 10 層、15 層、20 層三組間之差異亦小。由以上之比較可以發現，本研究提出之分層積分計算方式在各種流速剖面之計算能力上保有相當的彈性，然而，在近床區流速剖面受底床邊壁效應 (wall effect) 影響範圍內，或是說邊界層流範圍，其流速梯度仍較實測值小。

6.4 底床邊壁效應對流速剖面之影響

由於現場或實驗室之流場中，底床邊界層流範圍內之流速急劇改變，從前節之觀察可發現，模式並未考慮邊壁效應 (wall effect)，底床層的流速梯度是影響流速剖面與實測值間誤差之來源，本節以簡單之概念，改變底床不滑移邊界條件，將底床流速設定為深度平均流速之一定百分比，即

$$r_u = \frac{u_1}{U} \quad (6.4)$$

其中， u_1 為底床流速， U 為水深平均流速， r_u 為流速比。其目的在觀察若模式將來考慮邊壁效應後，模擬結果是否能與現場或實驗觀測之流速剖面吻合。

採用流速比 r_u 分別為 0、0.1、0.2、0.3、0.4、0.5，不同流速比模擬所得之流速剖面與無因次流速剖面分別如圖 6.9 與圖 6.10 所示。從圖 6.10 無因次流速剖面可以看出，流速比 r_u 愈大則流速剖面愈接近 Naot & Rodi [26] 實驗值，當 $r_u=0.5$ 時，無因次流速剖面幾乎與實驗觀測剖面吻合，此亦說明本研究提出之方法，對於流速剖面之計算具有相當之彈性；然而，近床區流

速梯度增大勢必造成水位下降，從圖 6.9 亦可看出此現象，對於 $r_u=0.5$ 之剖面雖貼近實驗觀測值，但其水深卻低於曼寧公式計算所得之正常水深，至於，流速比 r_u 該使用多少較為合理，此牽涉渠道之流況與粗糙度等因素複雜，在此不深入探討。

6.5 風剪對流速與水位剖面之影響

前面已測試過黏滯係數分佈型態、底床層厚度、底床速度等因子對流速剖面模擬結果之影響，本節於液面施加風剪應力分別為 0.0、2.0 與 5.0 Pa ($=N/m^2$)，方向與流向相反，測試水面施加風剪之影響。由於水流液面受到額外之風剪應力，水流趨動力不夠，因此渠道需壅升水位以驅動水流，考慮風剪應力下之均勻流水深則較未考慮風剪應力作用之正常水深為大，往上游逐漸向均勻流水深趨近，水位剖面類似緩坡狀況下之 M_2 曲線。

圖 6.11 與圖 6.12 分別為風剪對黏滯係數均勻分佈與拋物線型分佈之流速剖面之影響，最大流速發生位置視風剪應力大小而定，並不一定發生在液面處，黏滯係數均勻分佈案例由圖 6.11 之可以看出風剪應力 2.0 Pa 之最大流速發生在約 0.1 水深處，風剪應力 5.0 Pa 之最大流速發生在約 0.25 水深處，黏滯係數拋物線型分佈案例由圖 6.12 可以看出風剪應力 2.0 Pa 時，水面至 0.1 水深處之流速稍微拉回，當風剪應力增至 5.0 Pa 時，其拉回幅度僅些微增加。

比較圖 6.11 與圖 6.12 比較，可看出不同紊流黏滯係數分佈型態，其流速剖面受影響範圍及最大水深發生處亦不同，黏滯係數拋物線分佈型態之流速

剖面受影響範圍較均勻分佈來得小，主要原因為水面處黏滯係數小之緣故；另外，圖6.13與圖6.14分別為風剪對黏滯係數均勻分佈與拋物線型分佈之流速剖面之影響，液面施加風剪應力愈大，則上游水位壅升愈高，但圖6.13黏滯係數均勻分佈案例之水位堆昇幅度明顯大過圖6.14之拋物線型分佈，其原因應為流速剖面受風剪拉回幅度不同所致。



表 6.1 直線渠道具不同曼寧 n 值之正常水深與模擬水深之比較

	n=0.03	n=0.035	n=0.04
Manning's Equation	2.74	3.00	3.25
Simulated	2.79	3.00	3.28



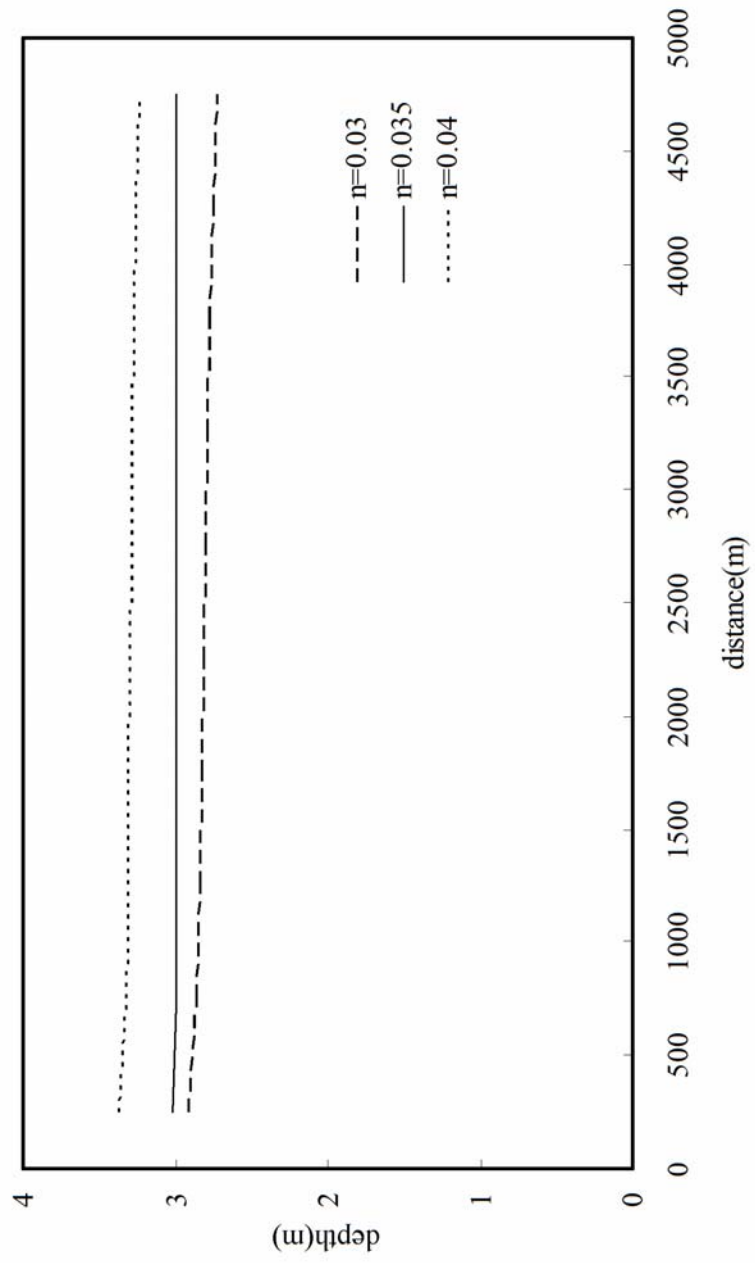


圖 6.1 不同曼寧 n 對直線渠道之水位剖面之影響

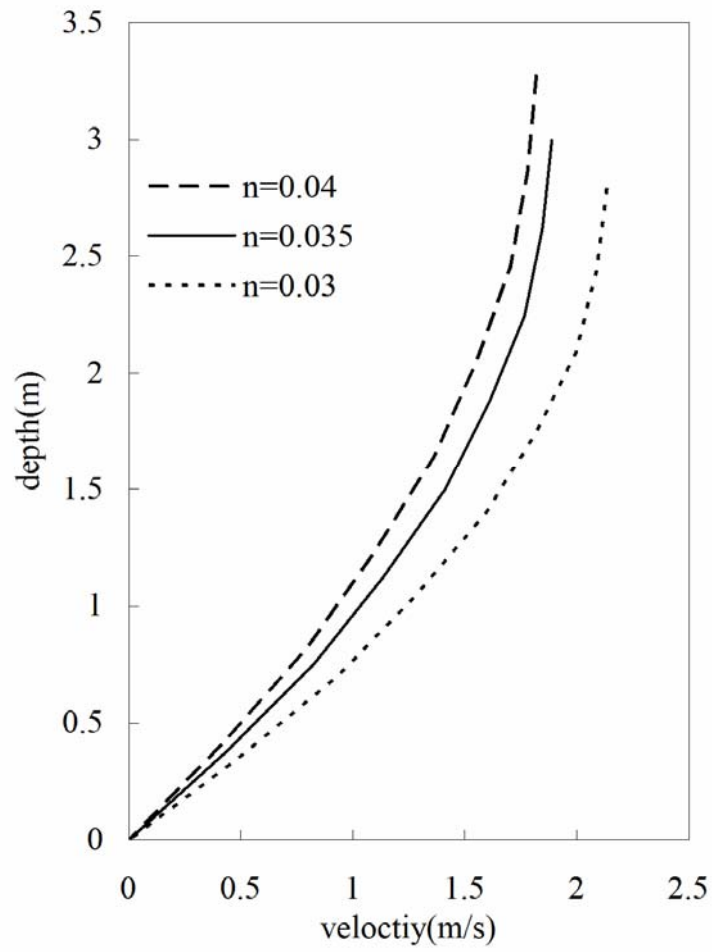


圖 6.2 不同曼寧 n 對直線渠道之流速剖面之影響(渠道中間長度處)

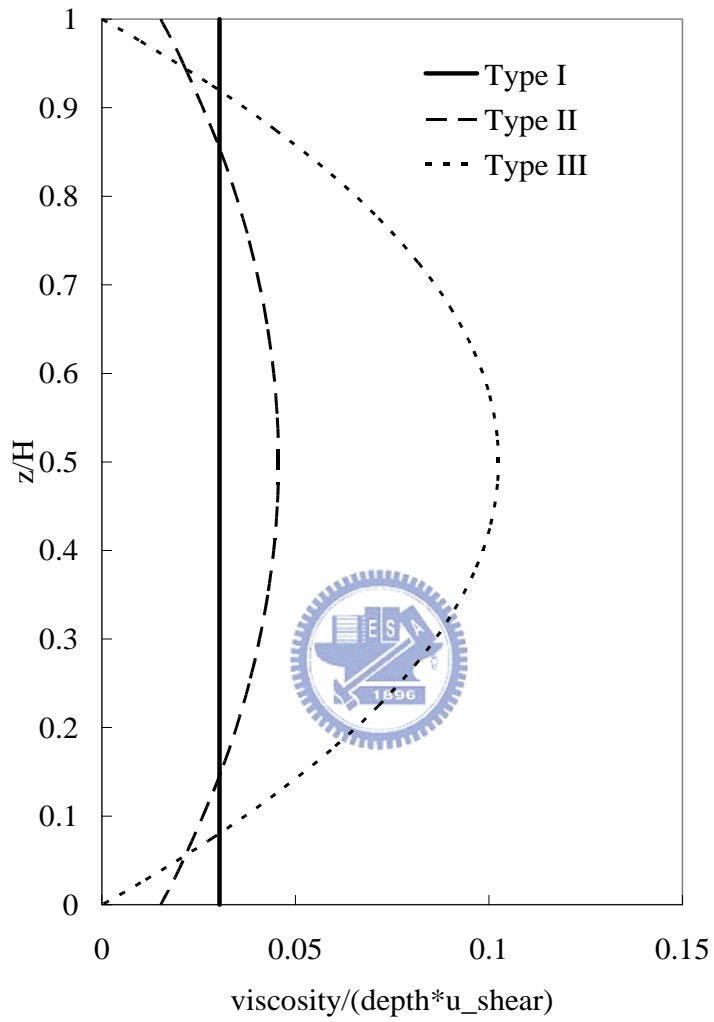


圖 6.3 三種不同黏滯係數分佈型態

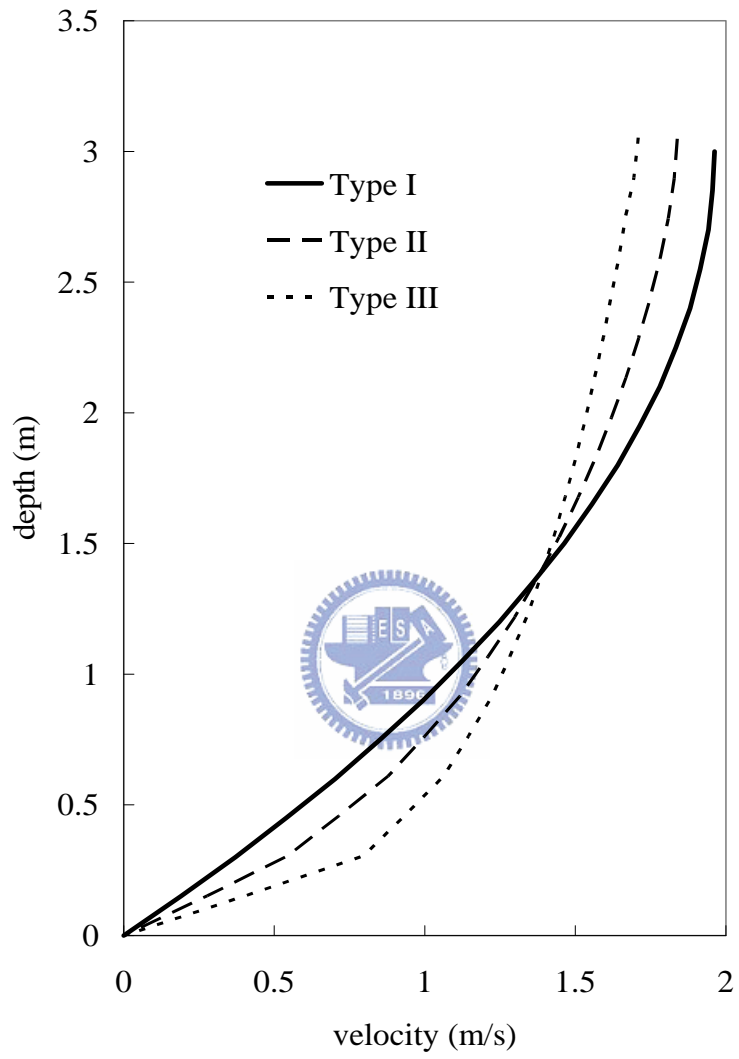


圖 6.4 黏滯係數分佈型態對流速剖面之影響

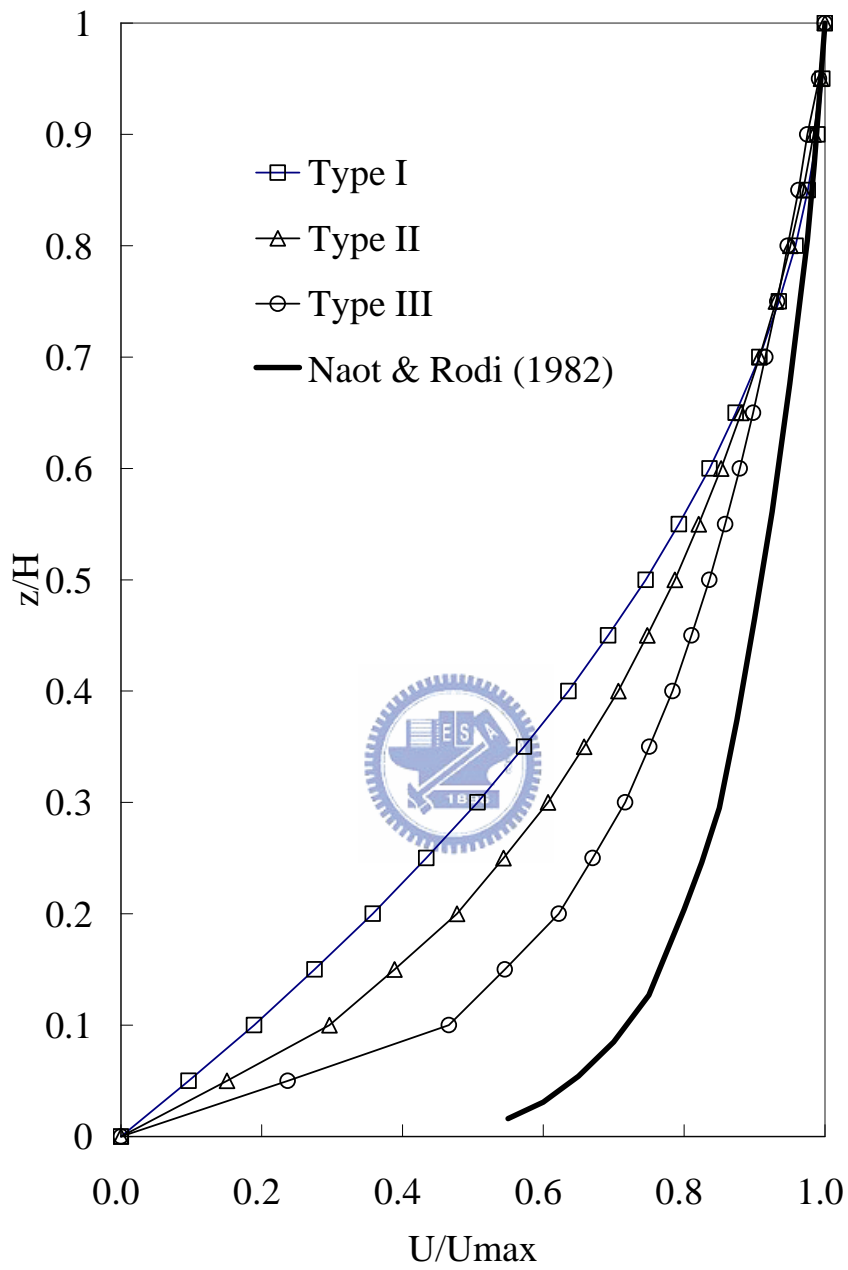


圖 6.5 黏滯係數分佈型態對無因次流速剖面之影響

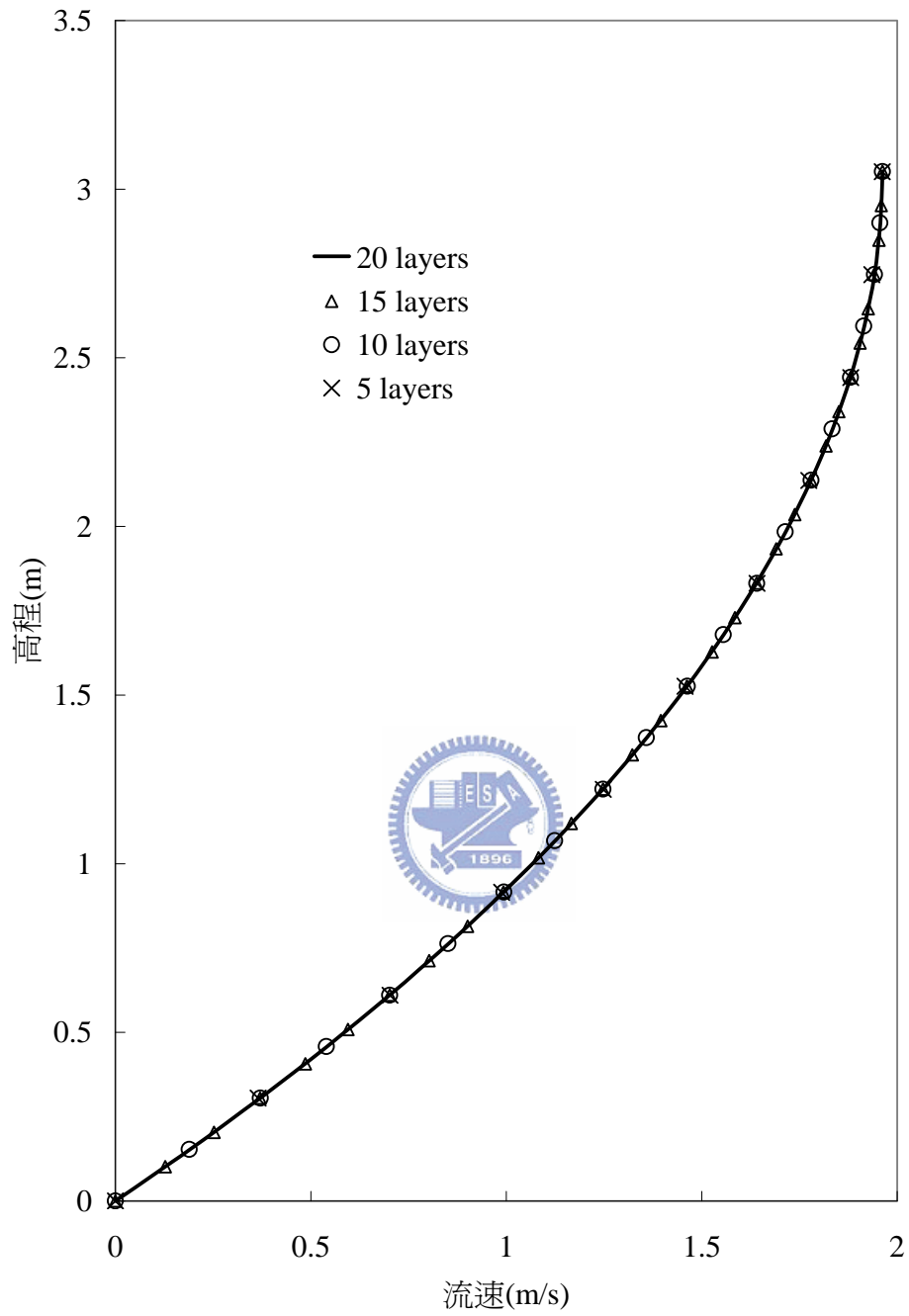


圖 6.6 使用層數對流速剖面之影響(黏滯係數均勻分佈)

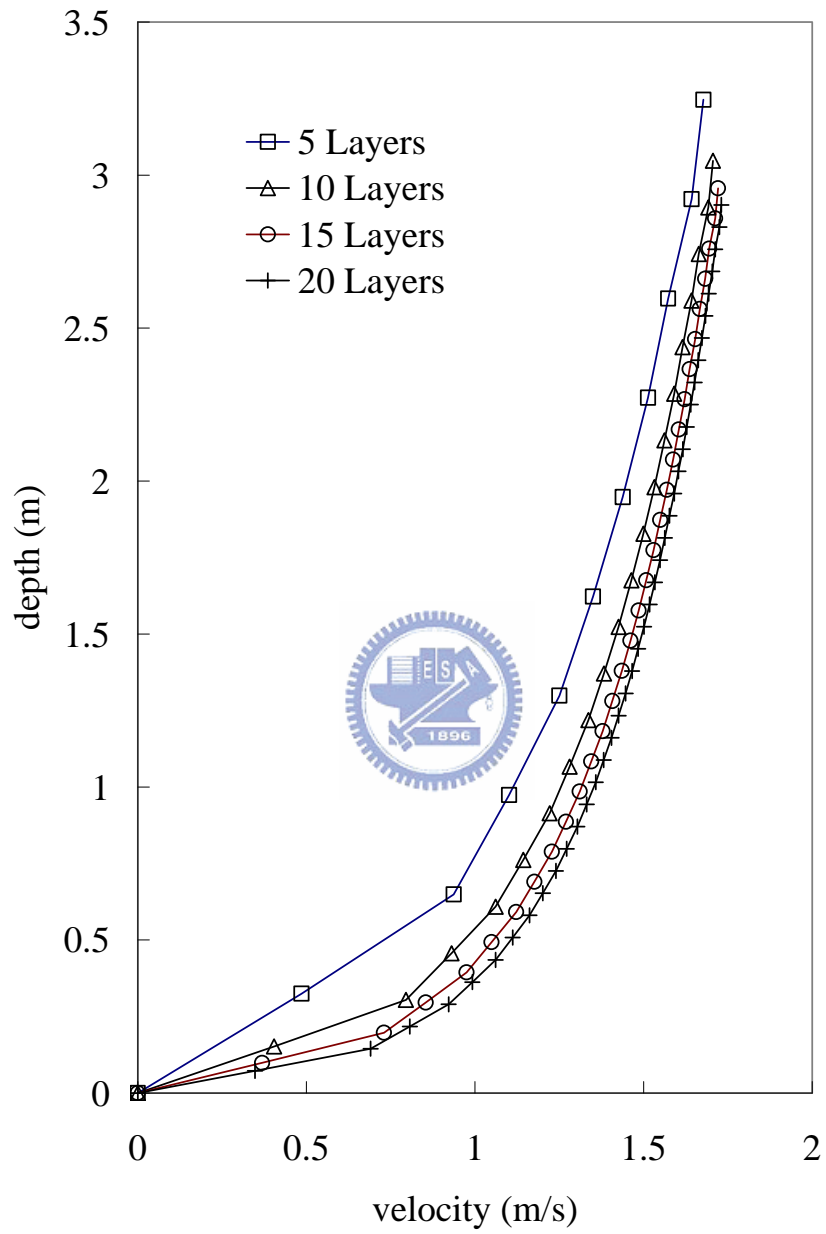


圖 6.7 使用層數對流速剖面之影響(黏滯係數拋物線型分佈)

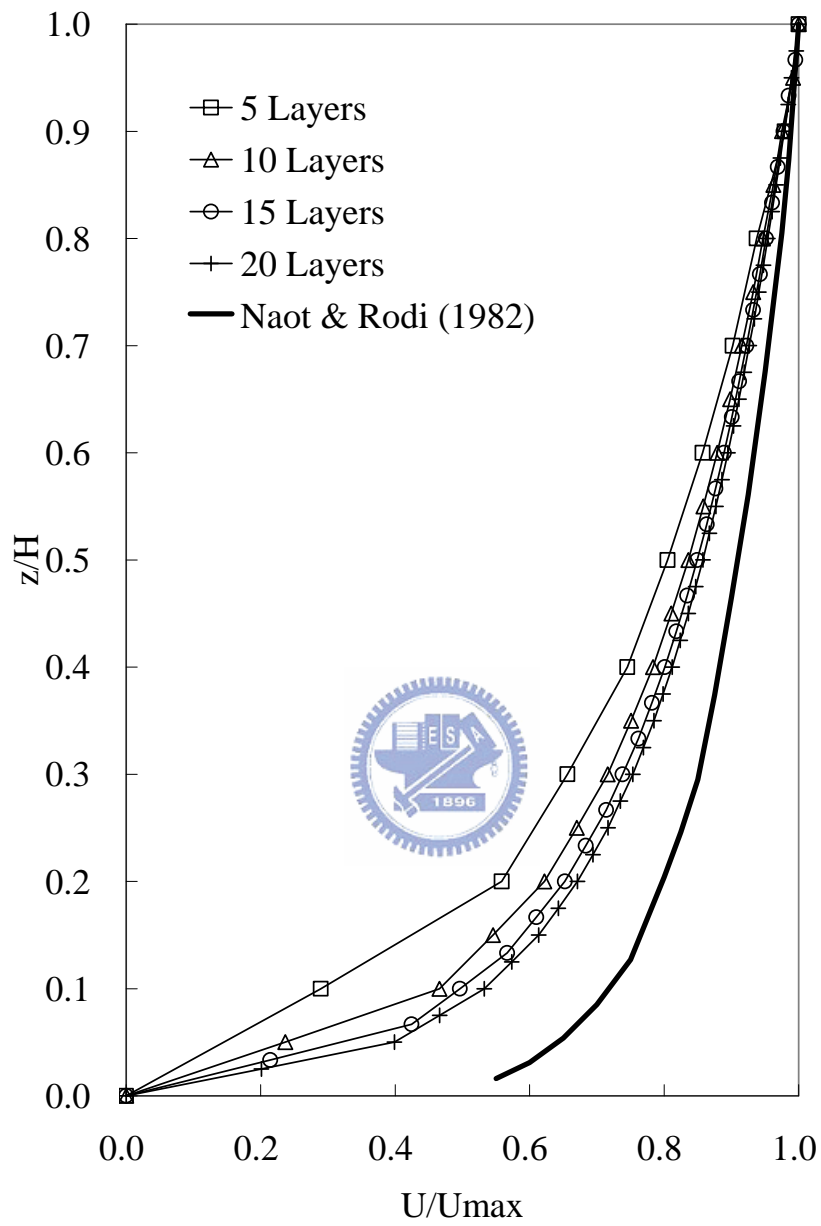


圖 6.8 使用層數對無因次流速剖面之影響(黏滯係數拋物線型分佈)

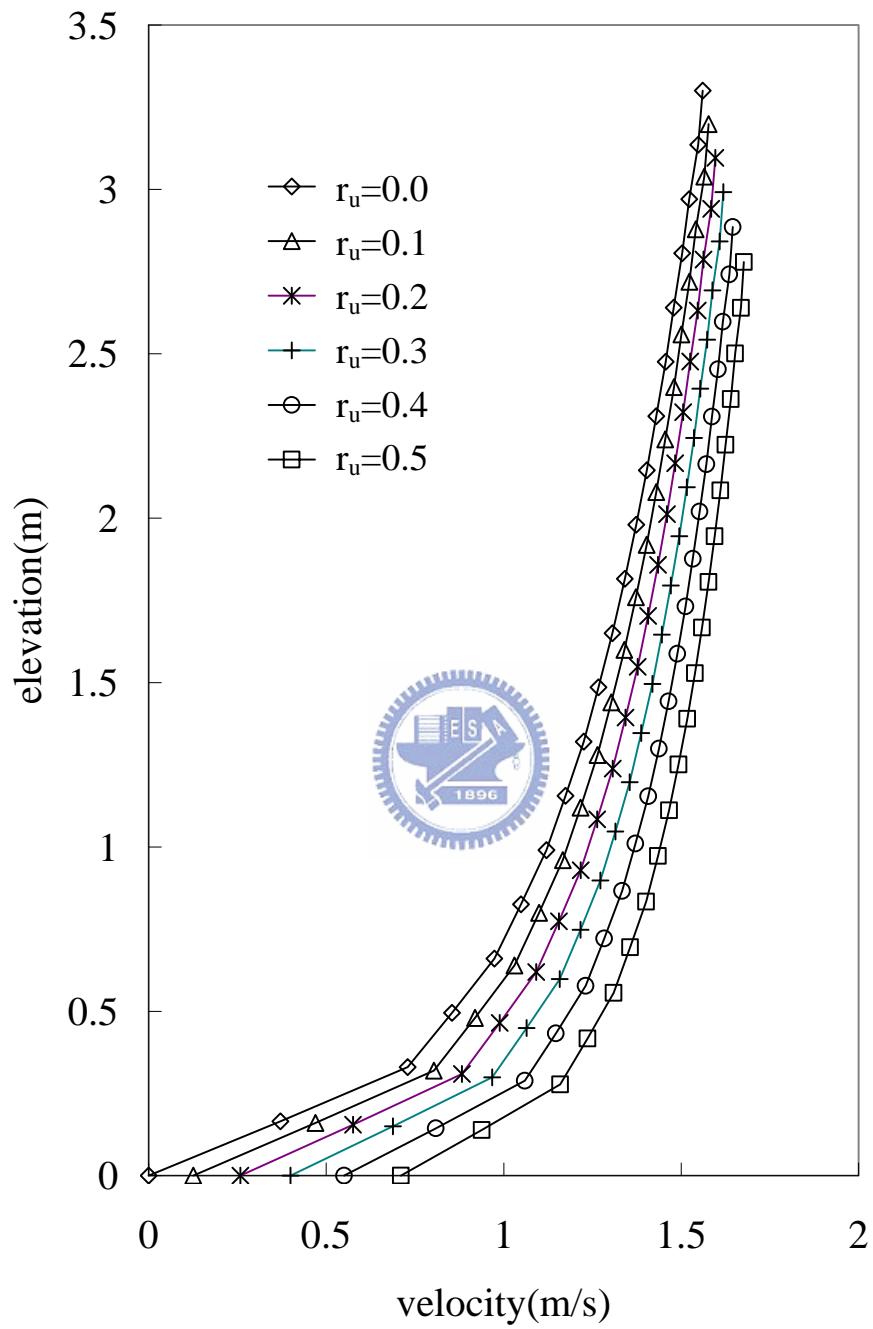


圖 6.9 底床邊界速度對流速剖面之影響

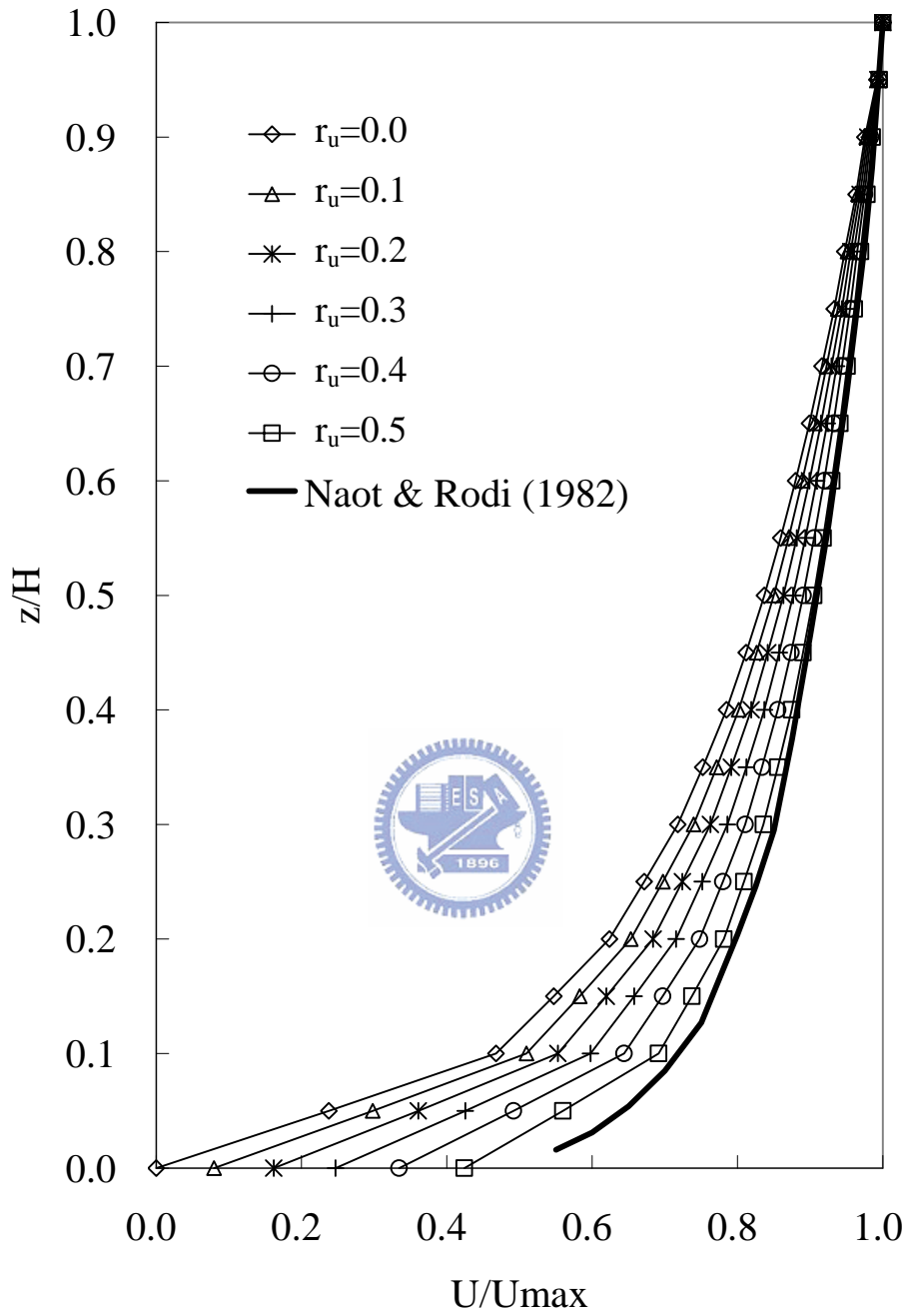


圖 6.10 底床邊界速度對無因次流速剖面之影響

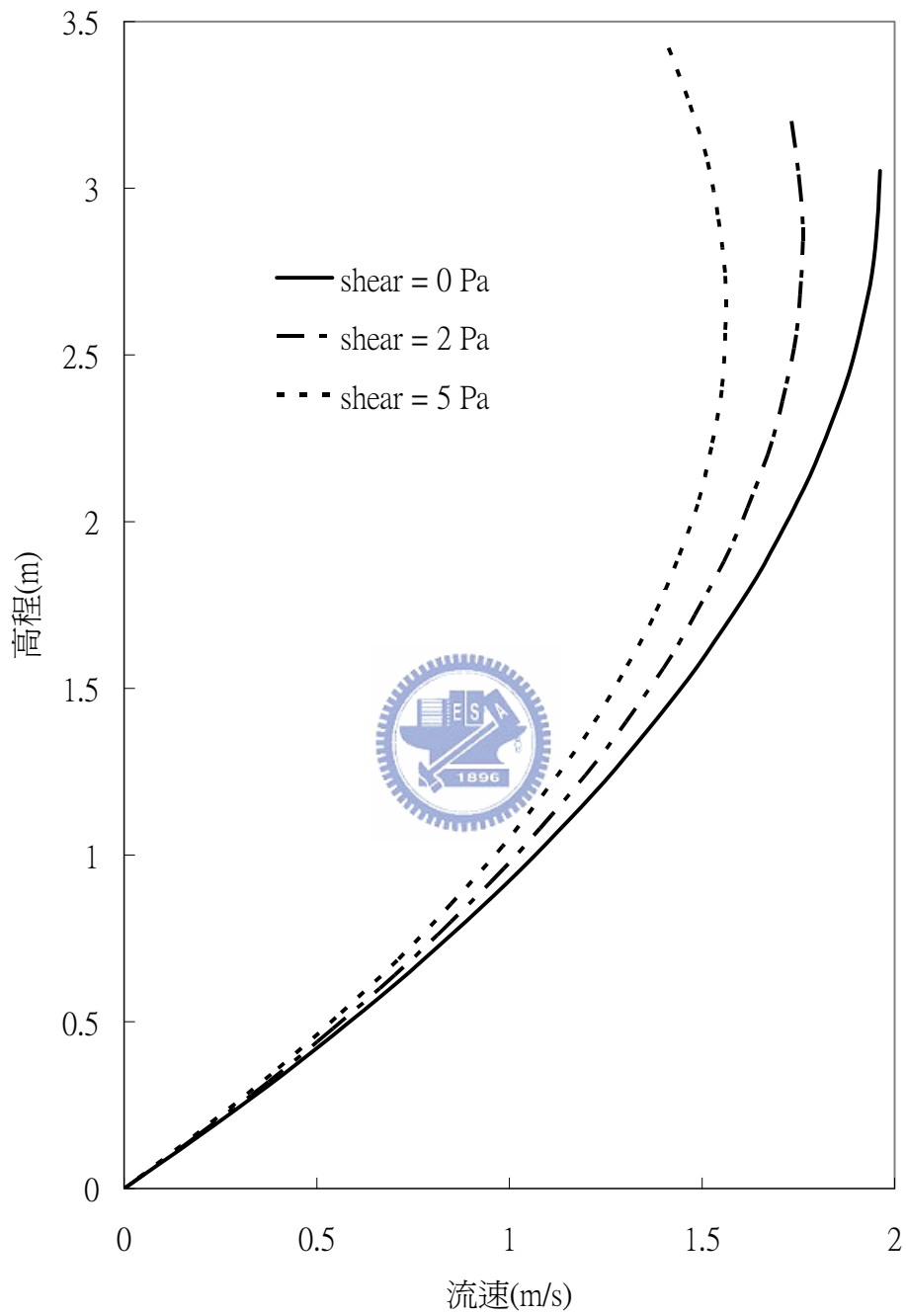


圖 6.11 風剪對流速剖面之影響(黏滯係數均勻分佈)

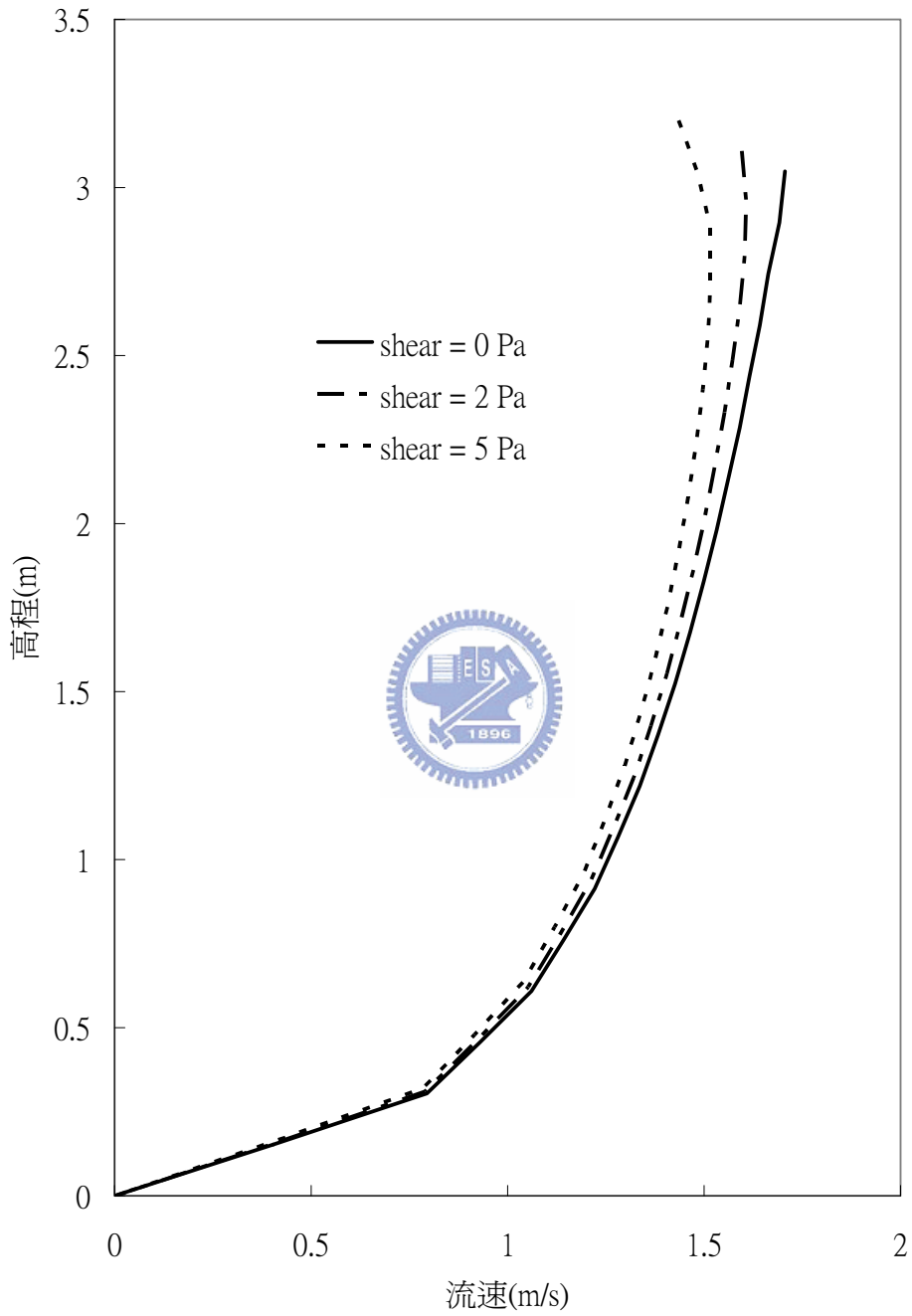


圖 6.12 風剪對流速剖面之影響(黏滯係數拋物線分佈)

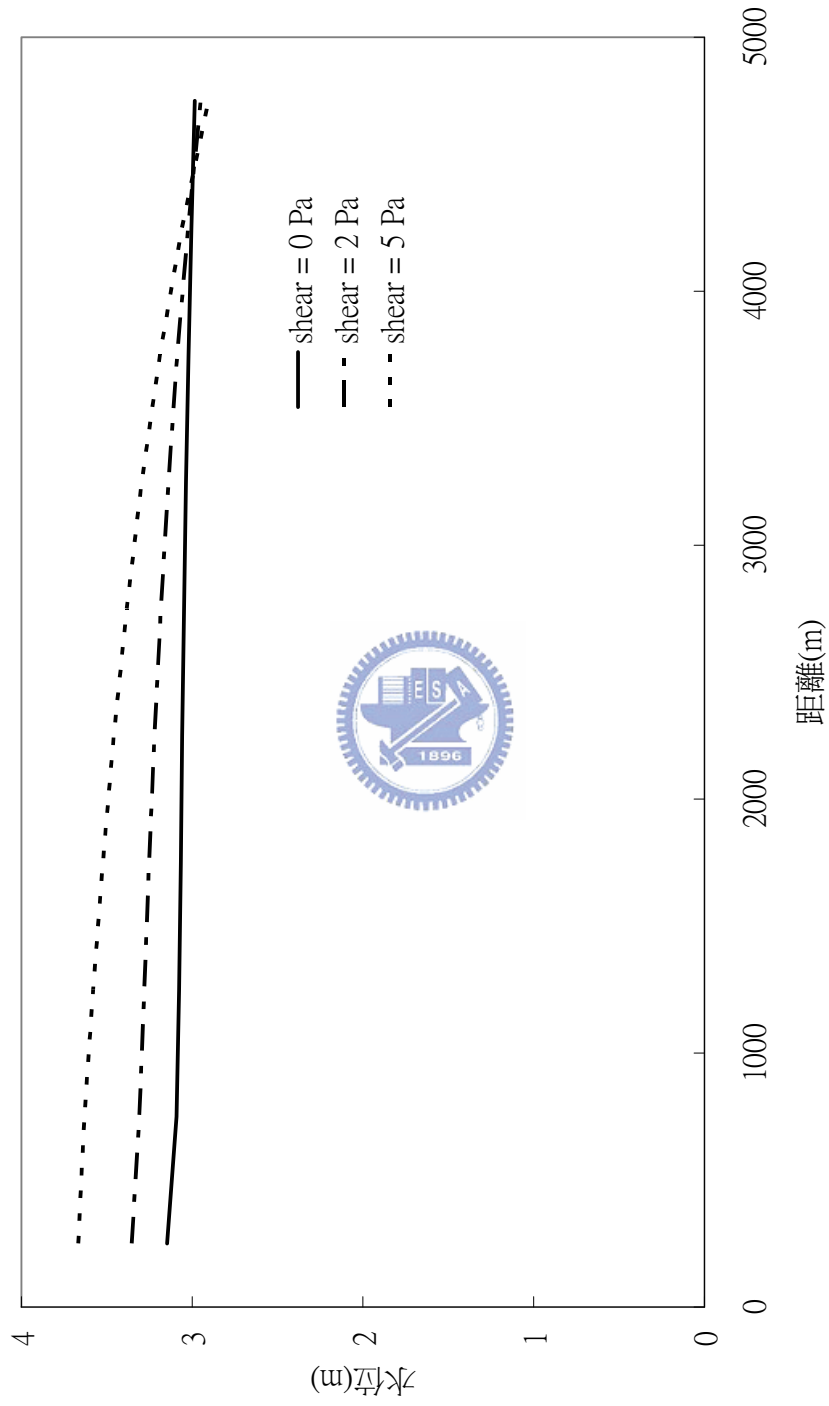


圖 6.13 風剪對水位剖面之影響(黏滯係數均勻分佈)

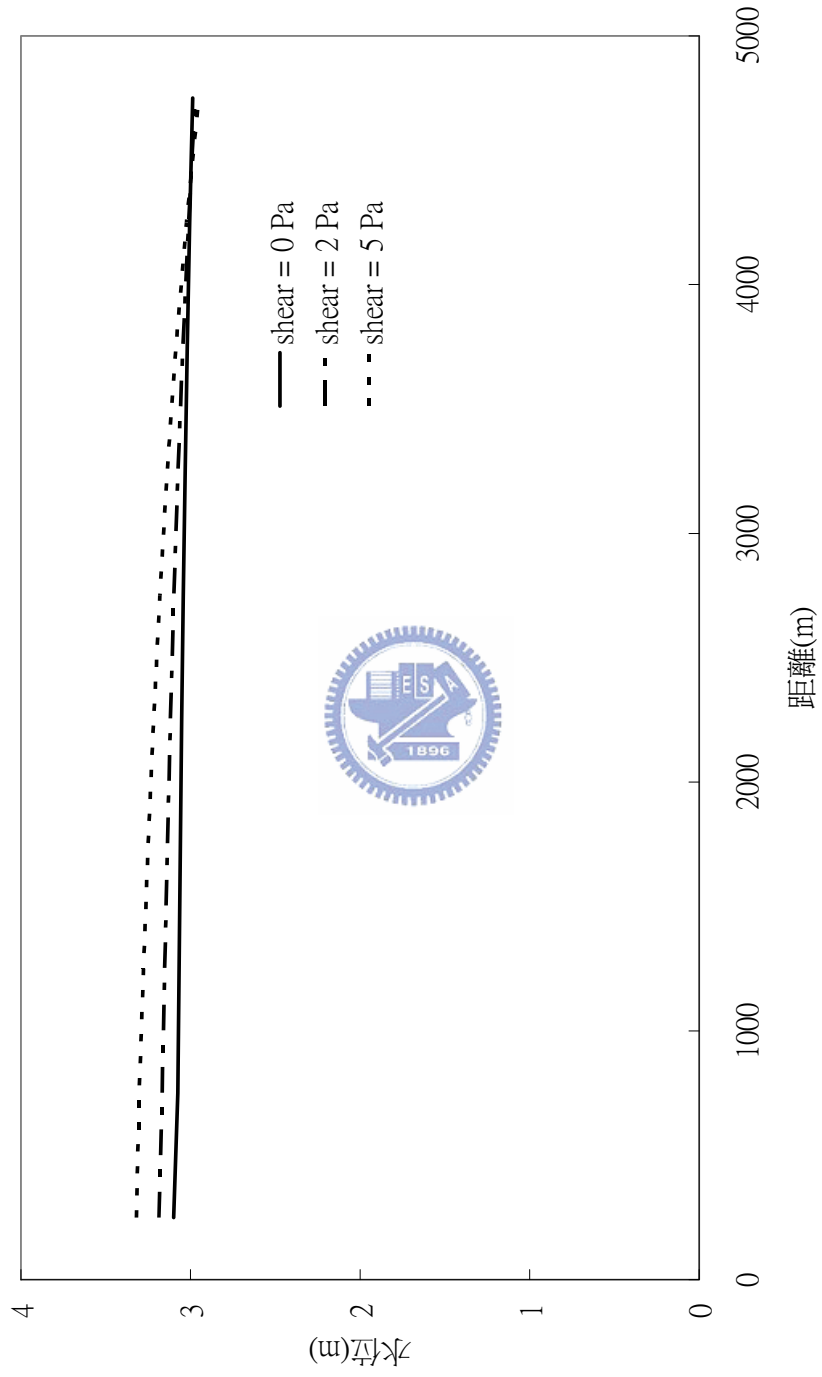


圖 6.14 風剪對水位剖面之影響(黏滯係數拋物線型分佈)

第七章 結論與建議

7.1 結論

在資源有限、永續發展之前提，許多水利設施之維護與更新，對現場流場、泥沙運動、污染擴散等資訊需有更精確之掌握，三維數值模式之必要性更顯迫切，過去廿卅年電腦計算能力快速發展，三維自由液面流模式已逐漸被應用在河口、灣流與海岸流場與鹽度之模擬，然而在河川或水庫之應用仍不普遍。本研究提出經由文獻回顧之探討與分層模式（一）錯誤嘗試之經驗檢討，提出擬似三維分層積分水理模式，導入二次形狀函數確保層介面速度與剪力連續條件，簡化三維計算方式，增加模式穩定性並提高收斂速度，經由風剪垂直環流場之驗證與直線渠道之測試，模式對於三維流場具有合理之反應機制與模擬結果，茲將幾點結論敘述如後：

1. 經由靜水壓假設與分層積分之方式，垂直分層與水平網格獨立，可避免三維模式於每一迭代過程中，整個計算域均需重新產生網格。
2. 藉由層介面配置計算點配合二次形狀函數，可決定層內部任意位置之流速，基於層介面剪力連續條件推導層介面剪力連續關係式，模式可由各層之二次形狀函數建立分段連續之流速剖面，計算出水深方向任意形狀之剖面。
3. 經由風剪環流場之驗證，模式具備反應物理現象發展過程之機制，超過20層後層數對流速剖面影響不大；且藉由二次形狀函數與層介面速度、剪力連續條件，對於水深方向任意之黏滯係數分佈型態，模式均可充分反映在流速剖面之變化上，對流速剖面計算之彈性。
4. 在紊流模式尚未建立前，本研究提出之紊流黏滯係數推估式，經直線渠

道之測試案例，其估算值尚稱合理。

5. 在直線渠道測試案例之計算與比較發現，不同之黏滯係數分佈型態不僅影響流速剖面形狀，亦影響模擬水深；而底床層厚度愈小，進床區流速梯度愈大，流速剖面愈接近實驗量測值；液面施加風剪應力，模式亦能反映水位堆升之現象。

7.2 建議

本研究摒棄二維子模式決定自由液面位置之方法，希望自由液面之位置藉由三維流場內部動量與質量平衡自動決定，在直線渠道之測試案例之觀察發現，整理幾點建議供後續研究參考：

1. 對於自由液面流，流場內部垂向流速剖面形狀之垂向黏滯係數之分佈乃相互影響，對非定常流況具時變性，流量、底床狀況等均為其影響因子，無法由人工率定為之，因此藉由紊流模式之建立有其必要，對垂向流速分佈尤為重要。
2. 對於小水深、流況劇烈之自由液面流，底床邊壁效應對流速剖面形狀之影響甚鉅，藉由牆函數(wall function)合理估算近床邊界層流範圍流之流速分佈改善流速剖面有其必要。
3. 本研究以卡氏座標建立模式，目前僅能測試簡單幾何之案例，若欲應用於現場案例，則可考慮曲線座標；另外，對河川或水庫之模擬，由於底床之不規則變化，考慮 σ 座標可將不規則之地形轉化為規則之計算網格，以增加模式應用之彈性。

參考文獻

1. Ashan A.K.M.Q. and Blumberg A.F. (1999), "Three-Dimensional Hydrothermal Model of Onondaga Lake, New York", *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 125, 912-923.
2. CFX (1997), *CFX-4.2: Solver*, AEA Technology, UK.
3. Choi, S.U. (1998), "Layer-averaged modeling of two-dimensional turbidity currents with a dissipative-Galerkin finite element method, Part I: Formulation and application example", *Journal of Hydraulic Research*, 36(3), 339-362.
4. Demuren, A.O. and Rodi, W (1983), "Side Discharges into Open Channels: Mathematical Model", *Journal of Hydraulic Engineering*, 109(12), 1707-1722.
5. Elder, J.W. (1959), "The dispersion of marked fluid in turbulent shear flow", *Journal of Fluid Mechanics*, 5, 544-560.
6. Faure, J.B., Buil, N. and Gay, B. (2004), "3-D modeling for unsteady free-surface flow in open channel", *Journal of Hydraulic Research*, 42(3), 263-272.
7. Flokstra, C. (1977), "The closure problem for depth-averaged two-dimensional flows", *Proceedings 18th Congress of the International Association for Hydraulic Research*, 247-256.
8. Gessler, D. Hall, B., Spasojevic, M., Holly, F., Pourtaheri, H. and Raphael, N. (1999), "Application of 3D mobile bed, Hydrodynamic model", *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 125(7), 737-749.
9. Harabetian, E., Osher, S., Wang, C. S., (1995), "An Eulerian Approach for Vortex Motion Using a Level Set Regularization Procedure." *Journal of Computational Physics*, 127, 45-26.
10. Heaps, N.S. (1984), "Vertical structure of current in homogeneous stratified waters", *Hydrodynamics of lakes*, K. Hutter ed., 154-202.

11. Heaps, N.S., and Jones, J. (1981), “Three dimensional model for tides and surges with vertical eddy viscosity prescribed in two layers”, *Geophysics*, Vol.24, 303-320.
12. Hervouet J.M., and Van Haren, L. (1996), “Recent Advances in Numerical Methods for Fluid Flows”, *Floodplain Processes*, Anderson, Walling and Bates Ed., Chapter 6, John Wiley & Sons.
13. Hirt, C.W. and Nicholls, B.D. (1981), “Volume of fluid (VOF) method for dynamics of free boundaries”, *Journal of Computational Physics*, 39, 201-221.
14. Jobson, H.E. and Sayre, W.E. (1970), “Vertical transfer in open channel flow”, *Journal of Hydraulic Division*, ASCE, 96, 703–724.
15. Kim, C.K. and Lee, J.S. (1994), “A three-dimensional PC-based hydrodynamic model using an ADI scheme”, *Coastal Engineering*, 23, 271-287.
16. Lardner, R.W. and Cekirge, H.M. (1988), “A new algorithm for three-dimensional tidal and storm surge computations”, *Applied Mathematical Modelling*, 12, 471-481.
17. Leonard, B.P. (1979), “A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upwind interpolation”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 19, 59-98.
18. Li, C.W. and Gu, J. (2001). “3D Layered-Integrated Modeling of Mass Exchange in Semi-Enclosed Water Bodies.” *Journal of Hydraulic Research* 39(4), 403–412.
19. Li, Y.S. and Zhan, J.M. (1993), “An efficient three-dimensional semi-implicit finite element scheme for simulation of free surface flows”, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 16, 187-198.
20. Lien, H.C., Hsieh, T.Y., Yang, J.C., and Yeh, K.C.(1999), “Bend-flow simulation using 2D depth-averaged model”, *Journal of Hydraulic Engineering*, 125(10), 1097–1108.
21. Lin, B. and Falconer R.A. (1997), “Three-dimensional layer-integrated modeling of estuarine flows with flooding and drying”, *Estuarine, Coastal and Shelf Science*, 44, 737-751.

22. Meselhe, E.A. and Sotiropoulos, F. (2000), "Three-dimensional numerical model for open- channel with free surface variations", *Journal of Hydraulic Research*, 38(2), 115-121.
23. Miyata, H., Sato, T., and Baba, N. (1987), "Difference solution of a viscous flow with free surface wave about advancing ship", *Journal of Computational Physics*, 72, 393-421.
24. Molls, T. and Chaudhry, H. (1995), "Depth-averaged open-channel flow model", *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 121(6), 453-465.
25. Naot, D. and Rodi, W (1982), "Calculation of secondary currents in channel flow", *Journal of Hydraulic Division*, ASCE, 108, 948–968.
26. Neary, V.S.(1995), *Numerical modeling of diversion flows*, Ph.D. Thesis, Univ. of Iowa,.
27. Nezu, I. and Nakagawa, H. (1993), *Turbulence in Open-Channel Flows*, A.A. Balkema Publishers, Rotterdam, Netherlands.
28. Osher, S. and Sethian, J. A., (1988), "Fronts Propagating with Curvature Dependent Speed: Algorithms Based on Hamilton-Jacobi Formulations", *Journal of Computational Physics*, 79, 12-49.
29. Partankar, S.V., Spaulding, D.B.(1972), "A calculation procedure for heat mass and momentum transfer in three dimensional parabolic flow", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 15, 1787-1906.
30. Shankar, N.J., Chan, E.S. and Zhang, Q.Y. (2001), "Three- dimensional numerical simulation for an open channel flow with a constriction", *Journal of Hydraulic Research*, 39(2), 187-201.
31. Sussman, M., Smereka, P., Osher, S. (1994), 'A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow', *Journal of Computational Physics*, 114(1), 146-159.
32. Tannehill, J.C., Anderson, D.A., and Pletcher, R.H. (1997), *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, 2nd ed., Taylor and Francis Publisher, 114-115.
33. Wang, K.H. (1994). "Characterization of Circulation and Salinity Change in Galveston Bay", *J. of Engineering Mechanics*, ASCE, 120(3), 557-579.

34. Wu, W., Rodi, W. and Wenka, T. (2000), "3D Numerical Modeling of Flow and Sediment Transport in Open Channels", *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 128(1), 4-15.
35. 吳仁友、黃良雄、宋杰祥(1999)，"擬似三維海岸水動力模式"，*港灣技術*，Vol. 14, 17-46。
36. 蔡東霖，*區域性地下水超抽導致地層下陷模式之發展與應用*，國立交通大學土木工程學系博士論文，90年7月。
37. 顏志偉，*複雜自由液面紊流之模擬與分析*，國立成功大學水利及海洋工程研究所博士論文，84年1月。



$$A_{3,3} \quad f_3 w_1 + s_3 v_2 + u_3 = b_3 \quad \Rightarrow u_3 = b_3 - s_3 v_2 - f_3 w_1$$

$$A_{3,4} \quad s_3 w_2 + u_3 v_3 = c_3 \quad \Rightarrow v_3 = \frac{c_3 - s_3 w_2}{u_3}$$

$$A_{3,5} \quad u_3 w_3 = h_3 \quad \Rightarrow w_3 = \frac{h_3}{u_3}$$

同理，可得上下三角遞迴關係式

$$u_1 = b_1, \quad v_1 = \frac{c_1}{u_1}, \quad w_1 = \frac{h_1}{u_1},$$

$$s_2 = a_2, \quad u_2 = b_2 - s_2 v_1, \quad v_2 = \frac{c_2 - s_2 w_1}{u_2}, \quad w_2 = \frac{h_2}{u_2},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_i = f_i \\ s_i = a_i - f_i v_{i-2} \\ u_i = b_i - s_i v_{i-1} - f_i w_{i-2}, \quad i=3 \sim n-2, \\ v_i = (c_i - s_i w_{i-1}) / u_i \\ w_i = h_i / u_i \end{array} \right.$$

$$f_{n-1} = f_{n-1}, \quad s_{n-1} = a_{n-1} - f_{n-1} v_{n-3}, \quad u_{n-1} = b_{n-1} - s_{n-1} v_{n-2} - f_{n-1} w_{n-3},$$

$$v_{n-1} = (c_{n-1} - s_{n-1} w_{n-2}) / u_{n-1},$$

$$f_n = f_n, \quad s_n = a_n - f_n v_{n-2}, \quad u_n = b_n - s_n v_{n-1} - f_n w_{n-2} \quad (A.6)$$

前向消去步驟

$$u_1 z_1 = d_1 \quad \Rightarrow z_1 = \frac{d_1}{u_1}$$

$$s_2 z_1 + u_2 z_2 = d_2 \quad \Rightarrow z_2 = \frac{d_2 - s_2 z_1}{u_2}$$

$$f_3 z_1 + s_3 z_2 + u_3 z_3 = d_3 \quad \Rightarrow z_3 = \frac{d_3 - s_3 z_2 - f_3 z_1}{u_3}$$

得前向消去遞迴關係式

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = d_1 / u_1 \\ z_2 = (d_2 - s_2 z_1) / u_2 \\ z_i = (d_i - s_i z_{i-1} - f_i z_{i-2}) / u_i, \quad i = 3 \sim n \end{array} \right. \quad (A.7)$$

後向取代步驟

$$x_n = z_n$$

$$x_{n-1} + v_{n-1}x_n = z_{n-1} \quad \Rightarrow \quad x_{n-1} = z_{n-1} - v_{n-1}x_n$$

$$x_{n-2} + v_{n-2}x_{n-1} + w_{n-2}x_n = z_{n-2} \quad \Rightarrow \quad x_{n-2} = z_{n-2} - v_{n-2}x_{n-1} - w_{n-2}x_n$$

得後向取代遞迴關係式

$$\begin{cases} x_n = z_n \\ x_{n-1} = z_{n-1} - v_{n-1}x_n \\ x_i = z_i - v_i x_{i+1} - w_i x_{i+2}, \quad i = n-2 \sim 1 \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

求解步驟整理如下：

1. 將係數矩陣 A 以係數遞迴關係式(A.6)分解為上下矩陣 LU ，
2. 以前向消去遞迴關係式(A.7)得(A.4)右式向量 $\{z\}$ ，
3. 以後向取代遞迴關係式(A.8)得方程組解 $\{x\}$ 。

