

國立交通大學

機械工程學系

碩士論文

利用 CUDA 平行計算平台探討可壓縮流在

三維煙囪管道的熱傳分析

Analysis of Heat Transfer in a Three Dimensional

Chimney with Consideration of the Flow

Compressibility by Paralleling the Program

in CUDA Platform

研究生：黃耘

指導教授：傅武雄 博士

中華民國九十九年七月

利用 CUDA 平行計算平台探討可壓縮流

在三維煙囪管道的熱傳分析

研究生：黃耘

指導教授：傅武雄

國立交通大學機械工程學系

摘要

本研究利用數值方法分析可壓縮流在三維煙囪漸縮管道中的流動及熱傳機制。流場利用有限差分法進行計算，計算方法可分為兩部分：第一部份為非黏滯性項的尤拉方程式採用 Roe 方法計算通量，並且加入 Preconditioning 矩陣，讓程式在計算低速可壓縮流可獲得良好之收斂結果；第二部份為黏滯性項的計算，採用二階中央插分法。在時間項方面則採用 LUSGS 隱式法。出口設非反射性邊界條件避免可壓縮流中壓力波的干擾。

由數值計算結果得知，流體速度隨三維漸縮管道的主流方向截面積縮小而加快，使壁面中央區域熱傳效果大幅增加。但壁面與壁面間的夾角隨之減小，導致流經夾角附近(壁面兩側)的流體，因壁面摩擦阻抗增加流速降低，反而使熱傳效果急遽劣化。此外雷諾數越大，熱傳效果越好，壁面兩側三維效應現象依舊存在。而利用 CUDA 平台作平行化運算可使計算速度較一般四核中央處理器加快約 4.72 倍，可見其顯著的效率提升。

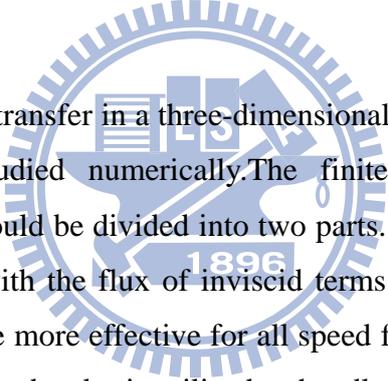
Analysis of heat transfer in three dimensional chimney with consideration of the flow compressibility by paralleling the program in CUDA platform

Student: Yun Huang

Advisor: Wu-Shung Fu

Department of Mechanical Engineering
National Chao Tung University

Abstract

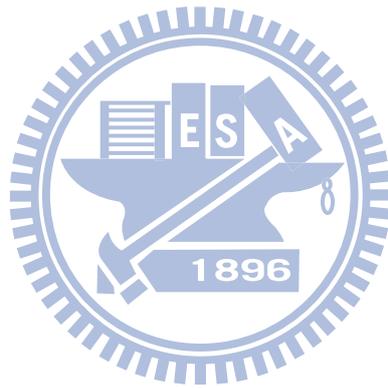


An investigation of heat transfer in a three-dimensional chimney with consideration of the flow compressibility is studied numerically. The finite difference is adopted and the computational approaches could be divided into two parts. One is the inviscid terms. The Roe scheme is utilized to deal with the flux of inviscid terms and the preconditioning matrix is added to let the scheme to be more effective for all speed field. The other is viscous term and the central difference of second order is utilized to handle it. The temporal term is solved by LUSGS. Non-reflection conditions at the outlet is derived in order to resolve reflections induced by acoustic waves.

The result shows that the convergent chimney construction can accelerate flow velocities by changing the area of cross section, and the superior enhancement of heat transfer rates of the center of the heat wall are achieved. With the decreasing of the angle between the walls, velocities of the fluids sides by wall decrease due to the friction and the heat transfer efficiency decrease. Moreover, the heat transfer efficiency increase with increasing Reynolds number. In order to improve the efficiency of CFD program, CUDA platform is employed for paralleled program in graphic hardware and shows significantly advantage over the CPU implementation.

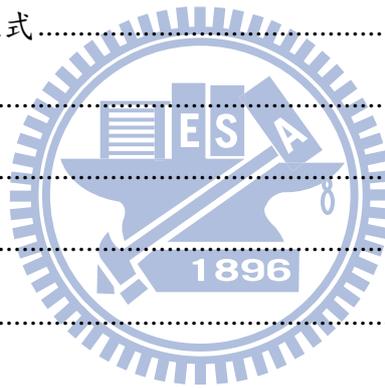
致謝

兩年來承蒙指導老師 傅武雄教授的悉心指導與諄諄教誨，使本文方能順利完成，謹由衷致上最誠摯的敬意及感謝。此外特別感謝博士班學長李崇綱、連信宏、黃玠超、王威翔在研究上耐心的教導，同窗元盈、為陽、泳良的相互扶持與努力，還有冠藍、佑聰、上豪、仕坤在實驗室帶給我的歡笑及陪伴。最後要感謝父母及家人精神上的支持與照顧，讓我在研究上能心無旁騖。最後僅將此喜悅與求學過程中所有關心與幫助過的親友分享。



目錄

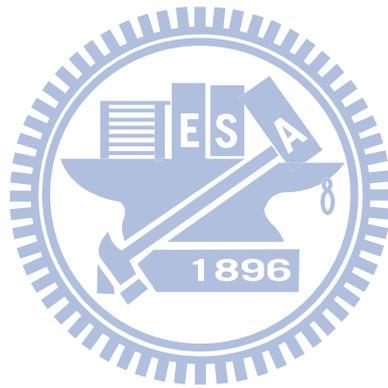
中文摘要	i
英文摘要	ii
致謝	iii
目錄	iv
表目錄	v
圖目錄	vi
符號表	viii
一、緒論	1
二、物理模式	9
2-1 物理尺寸與分析模式	9
2-2 分析假設及統御方程式	10
2-3 邊界條件	11
三、數值計算模式	14
3-1 統御方程式	15
3-2 Roe scheme	16
3-3 MUSCL 法	23
3-4 Preconditioning	25
3-5 LUSGS 法	31
3-6 非反射性邊界	33
3-7 座標轉換	35
3-8 CUDA 平行化方法	42
四、結果與討論	46
五、結論	96
參考文獻	97



表目錄

表 3-1 精度係數值..... 24

表 4-1 平行化方法計算效率比較表..... 58



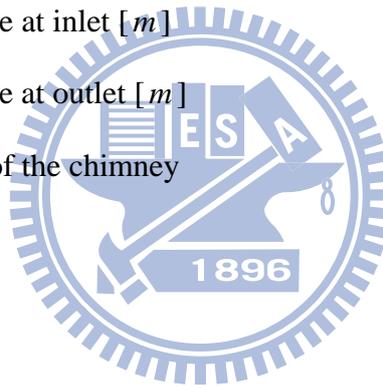
圖目錄

圖 1-1 GPU 及 CPU 浮點運算速度比較圖	7
圖 1-2 顯示卡 NVIDIA Tesla C1060 安裝於本研究室之電腦示意圖	8
圖 2-1 煙囪管道之物理模式圖	12
圖 2-2(a~c) XY 及 YZ 平面物理模式圖	13
圖 3-1 黎曼問題特徵值結構圖	22
圖 3-2 差分示意圖	30
圖 3-3 座標轉換示意圖	39
圖 3-4(a~c) 漸縮管道示意圖	40
圖 3-5 CUDA 平台架構圖	45
圖 4-1 網格測試圖	54
圖 4-2 完全發展流出口解析解對照圖	55
圖 4-3(a~b) 完全發展流與非反射性邊界出口速度確認圖	56
圖 4-4 使用 CUDA 平行化與未使用平行化紐塞數比較圖	57
圖 4-5(a~b) 中央 XY 截面流線圖及等溫線圖(Re=200, $\phi = 0$)	59
圖 4-6(a~d) YZ 截面速度場圖(Re=200, $\phi = 0$)	60
圖 4-7(a~b) 局部紐塞數比較圖(Re=200, $\phi = 0$)	62
圖 4-8(a~b) 中央 XY 截面流線圖及等溫線圖(Re=200, $\phi = \frac{\pi}{6}$)	63
圖 4-9(a~d) YZ 截面速度場圖(Re=200, $\phi = \frac{\pi}{6}$)	64
圖 4-10(a~b) 局部紐塞數比較圖(Re=200, $\phi = \frac{\pi}{6}$)	66
圖 4-11(a~b) 中央 XY 截面流線圖及等溫線圖(Re=200, $\phi = \frac{\pi}{3}$)	67
圖 4-12(a~d) YZ 截面速度場圖(Re=200, $\phi = \frac{\pi}{3}$)	68
圖 4-13(a~b) 局部紐塞數比較圖(Re=200, $\phi = \frac{\pi}{3}$)	70

圖 4-14(a~b) 中央 XY 截面流線圖及等溫線圖($Re=200$, $\phi = \frac{\pi}{2}$).....	71
圖 4-15(a~c) YZ 截面速度場圖($Re=200$, $\phi = \frac{\pi}{2}$).....	72
圖 4-16(a~b) 局部紐塞數比較圖($Re=200$, $\phi = \frac{\pi}{2}$).....	74
圖 4-17(a~b) 中央 XY 截面流線圖及等溫線圖($Re=400$, $\phi = 0$).....	75
圖 4-18(a~d) YZ 截面速度場圖($Re=400$, $\phi = 0$).....	76
圖 4-19(a~b) 局部紐塞數比較圖($Re=400$, $\phi = 0$).....	78
圖 4-20(a~b) 中央 XY 截面流線圖及等溫線圖($Re=400$, $\phi = \frac{\pi}{6}$).....	79
圖 4-21(a~d) YZ 截面速度場圖($Re=400$, $\phi = \frac{\pi}{6}$).....	80
圖 4-22(a~b) 局部紐塞數比較圖($Re=400$, $\phi = \frac{\pi}{6}$).....	82
圖 4-23(a~b) 中央 XY 截面流線圖及等溫線圖($Re=400$, $\phi = \frac{\pi}{3}$).....	83
圖 4-24(a~d) YZ 截面速度場圖($Re=400$, $\phi = \frac{\pi}{3}$).....	84
圖 4-25(a~b) 局部紐塞數比較圖($Re=400$, $\phi = \frac{\pi}{3}$).....	86
圖 4-26(a~b) 中央 XY 截面流線圖及等溫線圖($Re=400$, $\phi = \frac{\pi}{2}$).....	87
圖 4-27(a~c) YZ 截面速度場圖($Re=400$, $\phi = \frac{\pi}{2}$).....	88
圖 4-28(a~b) 局部紐塞數比較圖($Re=400$, $\phi = \frac{\pi}{2}$).....	90
圖 4-29(a~b) 各雷諾數平均紐塞數比較圖($Re=200, 400$).....	91
圖 4-30(a~d) 各角度平均紐塞數比較圖($Re=200$).....	92
圖 4-31(a~d) 各角度平均紐塞數比較圖($Re=400$).....	94

Nomenclature

x	Cartesian coordinate system x direction
y	Cartesian coordinate system y direction
z	Cartesian coordinate system z direction
ξ	Curvilinear coordinate system ξ direction
η	Curvilinear coordinate system η direction
ς	Curvilinear coordinate system ς direction
l_1	length of the front segment of the chimney [m]
l_2	length of the convergent segment of the chimney [m]
l_3	length of the back segment of the chimney [m]
d_1	length of the square at inlet [m]
d_2	length of the square at outlet [m]
ϕ	convergent angle of the chimney
ρ	density [$kg \cdot m^{-3}$]
P	pressure [$N \cdot m^{-2}$]
τ_{mj}	stress [$N \cdot m^{-2}$]
C_p	constant-pressure specific heat [$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$]
C_v	constant-volume specific heat [$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$]
J	transform matrix Jacobian
e	internal energy [$J \cdot kg^{-1}$]
T	Kelvin temperature [K]
k	thermal diffusivity [$W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$]
u	velocity component in x -direction [$m \cdot s^{-1}$]
v	velocity component in y -direction [$m \cdot s^{-1}$]
w	velocity component in z -direction [$m \cdot s^{-1}$]



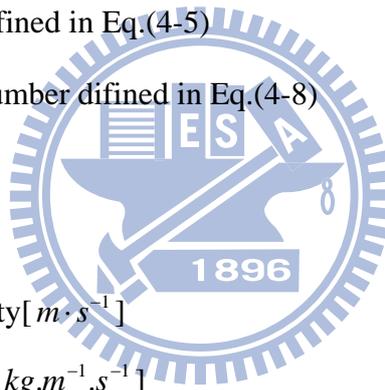
β	pressure gradient[$N \cdot m^{-3}$]
A	area[m^2]
Δt	time difference[s]
a	sound speed[$m \cdot s^{-1}$]
R	R
H	enthalpy[$J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$]
τ_w	friction force acting per unit area on the surface
u_τ	friction velocity
Re	Reynolds number defined in Eq.(4-3)
Nu_x	Nusselt number defined in Eq.(4-4)
Nu_y	Nusselt number defined in Eq.(4-5)
\overline{Nu}	average Nusselt number defined in Eq.(4-8)

Greek symbols

ν	kinematics viscosity[$m \cdot s^{-1}$]
μ	absolute viscosity[$kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$]

subscripts

i	$i = x, x$ -direction; $i = y, y$ -direction; $i = z, z$ -direction
j	$j = x, x$ -direction; $j = y, y$ -direction; $j = z, z$ -direction



第一章 緒論

煙囪設計在國內外建築中十分常見，是房屋建築的一部分，作為用來排除由火引起的氣體或煙塵，能把煙氣排入高空的高聳結構，藉此減少聚積在下方鍋爐部分之煙氣，使一旁乾淨空氣得以進入，因而能改善燃燒條件，減輕煙氣對環境的污染，煙囪的設計原理主要是依靠自然對流，意即藉由溫度差異而造成空氣的對流而無須額外動力即能有效排氣，因而在生活中運用廣泛。近幾年來，隨著生活結構與建築型態的改變，住家的煙囪數量增加雖趨漸緩，但此種便利且少耗能的對流設計方式依然保留下來，並搭配太陽能板等綠色能源大量應用於大樓內的通風設計，或於建築物頂端開口通風排煙，可藉「煙囪效應」直接將熱氣、煙霧及火流向上排解出去，有助於侷限火勢用以於意外火災時濃煙能夠加速排出；除此之外，石化工業目前仍是台灣經濟命脈中最重要的一環，其相關產業涵蓋了化學肥料、農藥、清潔劑、成衣服飾、塑膠、橡膠、油漆等，產品種類繁多，尤其近幾年來石化相關產品更被延伸使用於電子材料與航太材料等高科技產品上，對於推動我國工業的轉型與升級，產生莫大的助益和貢獻，然而在其相關工廠如中油、台塑之煉油廠、煉鋼廠、各類化工廠，甚至於火力發電廠和垃圾焚化爐卻時常需在大量燃燒後排放高溫氣體以及汙染懸浮物，高聳的煙囪已然成為城市生活中最不可或缺的建築物之一。

煙囪管道整體包含入口較大管徑、漸縮部分、以及出口小管徑之管道，其中能夠使煙囪發揮其排煙功效的重要設計，一為底部鍋爐的燃燒加熱，此時靠近最下方之壁面隨之升溫，空氣在此處密度降低，高熱氣體自然向上流動；另一則是漸縮管道藉由截面積的快速減小，可以加速流體的向上流動，並且在此增強壁面對空氣的熱傳，使自然對流能夠充分發揮效果，此一以漸縮或反向之漸擴管道設計增強熱傳效應或自然對流之設計應用廣泛，包含常見的熱交換器、火箭或飛機噴射引擎推進室、太陽能集熱器、特朗博牆(Thrombe walls)[1]、電子元件與薄膜散熱表面等；過去也有許多文獻提供像這樣與煙囪相似的漸縮或漸擴結構的管道模擬或實驗，可用以參考並進一步了解其流場及熱傳狀況

討論純自然對流部分，Sparrow 等[2]是第一份完整的探討傾斜漸縮平板中的自然對流與熱傳現象之實驗與數值模擬之研究，等溫絕熱之對稱壁面邊界條件下以水為流體，漸縮角度為 0 度、5 度、10 度和 15 度，得傾斜角度有助於熱傳效應率的增加，其實驗與模擬的數值亦可見類似趨勢。此研究被 Sparrow 等[3]延伸探討得更為完整，他們以最大間距估計(Maximum interwall spacing)計算垂直平行壁面之管道的紐塞數，並找出紐塞數與 Rayleigh number、截長比(Aspect ratio)之相關性方程式，且可以轉換運用於漸縮及漸擴管道。Su 和 Lin[4][5]使用 SIMPLEC 之數值方法來計算兩面平面、兩面斜板之流場，在長方形截面之水平漸縮管道中，對稱壁面以等溫絕熱條件，改變漸縮角度為 0 度、5 度和 10 度，以不同方向之進出口設定，形成漸縮及漸擴管道來觀察紐塞數及壓力變化，得漸縮管道在此範圍內當角度增加可增加熱傳並使壓降增高，但漸擴管則壓降漸低。此研究 Su 和 Lin[6]加以實驗測量方式探討長方型截面漸縮或漸擴管道的熱傳和壓降情況，截長比固定為 0.1，當漸縮角度固定時，熱傳效果隨雷諾數增加會使熱傳效果增加而壓降減少，漸擴管中亦有類似效果；而角度的增加結果則與模擬類似。Kihm 等[7]在等溫絕熱壁面的漸縮管道中探討空氣的自然對流現象，實驗方式是使用雷射散斑圖(Laser Specklegram technique)觀察壁面溫度分佈，實驗以改變漸縮角度 0 度、15 度、30 度、45 度、60 度和八個不同縱橫比(Aspect ratio)來計算其對熱傳效果的影響，其實驗結果與理論分析趨勢接近。Mutama 和 Iacovides[8]以實驗探討較長的微漸縮(約 0.53 度)管道，觀察此二維結構的流線加速度及其速度和溫度邊界層狀態。Said [9]以數值計算模擬壁面等溫絕熱的條件下空氣為工作流體之二維漸縮管道的自然對流現象，漸縮角度為 0 度、2 度、5 度和 10 度，並計算紐塞數在低 Rayleigh number(小於 10^2)時和變化參數之最佳相關性。此研究 Shalash[10]以與其相似之物理模式同時以數值和實驗延伸探討，實驗部分以 Mach-Zehnder 干涉儀搭配數位影像系統(Digital Image System)執行，數值部分則延伸計算管道的上游和下游的流動狀況，得在低 Rayleigh number 下若增加漸縮角度可使紐塞數增高，特別在管道出口處此一現象十分明顯；而在高 Rayleigh number 時，增加漸縮角度反而使紐塞數降低，此一現象則在入口處特別突出。Bianco 和 Nardini[11]以 Fluent 模擬二維結構下兩對稱漸縮平板中，當壁面有固定厚度及熱傳導係數並以固定

熱通量加熱，出入口皆以延伸計算範圍之較大邊界設定來探討空氣的自然對流現象，此研究得由於在出口平板間隔很小時易出現阻流(choked flow)現象，導致在低 Rayleigh number 時，漸縮角度對溫度分佈變化劇烈，然在較大時則反之。此研究在 Bainco 等[12] 延伸探討不同的結構設計和熱傳參數，並製成詳細之比較圖，可應用於漸縮角度 0 到 10 度，出入口寬度比小於 1，Rayleigh number 小於 1.2×10^7 之範圍內。Bainc 等[13]延續此研究，使用固定厚度之鋼板製成兩傾斜板及煙霧加以雷射光頁(Laser sheet)的流場可視化技術，亦計算紐塞數與 Rayleigh number 及漸縮角度之相關性，可應用在角度 10 度，Rayleigh number 在 1.22×10^5 內。Kaiser 等[14]以 Fluent 和 Phoenics 作二維漸縮管道之模擬，在對稱壁面等溫之邊界條件探討自然對流及其熱傳效率，並比對前人文獻之實驗數據，計算紐塞數及 Rayleigh number、漸縮角、出口比例等參數之相關性，可應用於範圍低 Rayleigh number 時(小於 10^6)，傾斜角度 0 度到 30 度，漸縮角 0 度到 60 度之間。

Tao 等[15]以週期性三維流場模擬計算探討類似繡管式熱交換器的波浪型板熱傳情況，以強制對流入口，雷諾數為 500~5000，在不降低效率的前提下為改善網格的精度而使用適體坐標系(Body-Fitted Coordinates, BFC)，其熱傳效率隨雷諾數與波數的增加而上升，而散熱片間距可找出一個最佳化參數而使熱傳效果最好。Castelloes 等[16]則探討層流中流體流經二維波浪型或平滑壁面之熱傳效率，其管道壁面用以不連續的邊界條件，並考慮入口及出口絕熱區域間界面，以廣義積分轉換(Generalized Integral Transform Technique, GITT)解此部分波浪變形的物理模式及暫態方程式，結果顯示熱傳效率隨貝克勒數(Peclet number)降低及波紋狀壁面而增加。Wang 和 Chen[17]模擬牛頓流體在二維波浪形渠道的強制對流熱傳分析，經由代數轉換、座標拉伸推導出流線函數與渦旋度的橢圓形方程式後，配合交換方向的三次樣線定置法(Cubic Spline Collocation Method)，分析其流場與熱傳效應，結果顯示在高雷諾數下，具大波長比及波紋狀壁面的管道為良好的熱傳裝置。Wang 和 Chen[18]延續此研究，使用座標轉換和交替方向隱式法(Alternating-direction implicit method)解在等溫絕熱壁面之波浪板中的二維流場，並以此探討類似漸縮加漸擴管道中對加強熱傳效應之混合對流影響，得當波長比和雷諾數的增

加皆能有效的增強熱傳效果。

於混合對流方面，亦有 Haung 等[19]研究垂直二維漸縮管道的混合對流實驗，其對稱壁面的一邊以固定熱通量加熱，另一則為絕熱條件，漸縮角度固定為 3 度，以流場可視化之技術顯現流場結構，並探討紐塞數變化及其與其他參數之相關性。Gau 等[20]以類似物理模式而使用樹脂玻璃管道作底部加熱改為水平的平行和對稱漸縮平行管道，流體為空氣並以添加煙霧作流場可視化，用以探討此混合對流的二次流結構及其熱傳的增高情況，在可視化流場中可以清楚的看到渦流因側向延伸而由較圓的渦旋轉變形成縱向對流捲狀，並且其捲狀物數量較水為流體時少。Liu 和 Gau[21]延伸本篇研究，在管道內的流體結構藉由注入煙霧可見在壁面底部流動，觀察漸縮、漸擴、平行板此三種流道之二次流的結構，此渦流肇始於由底部的加熱層造成橫向的不穩定波動，實驗結果可清晰觀察到不同於平行板，在漸擴道中由於減速的擾動影響使二次流渦旋較早出現，並明顯增強熱傳效果，漸縮管道則反之。

此外，亦有討論紊流入口之流場，Yang 等[22]以單邊傾斜成漸縮管道之平板實驗，以高紊流強度之入口條件模擬薄膜冷卻的效果，比較於不同紊流強度、漸縮角度 0 度到 20 度之壁面的溫度分佈及其熱傳效率，研究得此小角度傾斜下冷卻效率隨角度增加，但角度太大則否，且紊流強度增加有助於熱傳效果。Zamora 等[23]延續 Kaiser 等[14]之研究，入口加以不同紊流強度，使用低雷諾數下的 $k-\varepsilon$ 紊流模式，探討過渡層到紊流層的範圍內之流場的質量流率及變動參數之相關性，可應用於高 Rayleigh number，約在 $10^{-2} \sim 10^{12}$ ，傾斜角 0 度到 30 度，漸縮角 0 度到 60 度之間。

綜觀以上的文獻，為了簡化管道流的研究，除了文獻[4][15]外，都以二維模式為研究對象。為了配合 Bossinesq assumption 的使用，流體均視為不可壓縮流，因此加熱物與流體間的溫度差必須限於 30°C 以內[24]。然而真實煙囪的形狀為一三維漸縮管道，雖然內部流體之流速未達壓縮流流場之 0.3 馬赫(Mach number)的流速，但加熱壁爐與流體間的溫差遠高於 30°C ，因此內部流場居於低速可壓縮流狀態，Bossinesq assumption 無法成立。流體必須視為可壓縮性流體，方可符合真實物理現象。

基於以上原因，本文利用數值方法探討可壓縮流在三維漸縮煙囪管道內流動與熱傳機構。在計算具進出口條件之管道內低速可壓縮流場時，最棘手的問題是流體的流動速度和壓力波的速度相差過大，導致在出口反射回彈的壓力波會干擾流體流動，因此必須在出口處設置非反射性(non-reflecting)邊界條件[25]，避免干擾發生。其次採用慣用的中央插分法處理黏性項部分；而非黏性項則必須採用 Roe 法[26]，以解決偏微分方程式的不連續問題；為了處理在低速可壓縮流時不易收斂的困擾，Preconditioning 法[27]的加入，可有效提高收斂效率，使其在高速與低速可壓縮流場均可適用；再利用 MUSCL(Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws)法[28]計算網格與網格間的物理量；最後使用 LUSGS(implicit lower-upper symmetric Gauss-Seidel algorithm)法[29]做迭代運算。通常計算不規則形狀熱流場時，採用下列三種方法。一為非結構性網格法(Unstructured Grid)，網格排列依不規則形狀而編排，不易有秩序排列，較不利於使用後述本研究所開發的平行運算法；二為偏微分方程式格點產生法(partial differential equation grid generation)[15]，程式撰寫上較複雜且生成速度較慢；三為代數格點產生法(algebraic grid generation)[16][17]，程式撰寫較簡單，生成速度較快，並且容易控制格點疏密排列，較為適合後述本研究所開發的平行運算法。因此本研究採用代數格點產生法[30]將三維漸縮煙囪管道轉換成方形管道，加速計算效率。眾所周知在三維流場的計算極為複雜耗時，電腦必須有龐大的儲存容量與有效的計算方法方以應付。平行運算為一種有效的方法，目前最常見可分為兩大類，一為 OpenMP(Open Multi-Processing)，一台電腦擁有多核心(multicores)的中央處理器(Central Processing Unit, CPU)，目前最多為十二核心的中央處理器，方便節省空間與金錢，但共同執行的處理器核心有限。另一為 MPI(The Message Passing Interface,)利用網路連結各電腦，平行運算界網路連結之電腦群同時執行，可連結極多數，但效率會逐漸降低，且價格昂貴須有廣大空間供電腦置放。為解決上述缺失，本研究自力開發現現有電腦與英偉達(NVIDIA)公司的硬體顯示卡(價格約四萬台幣)之間的連結與程式編輯，將平行運算於 CUDA((Compute Unified Device Architecture)計算平台上執行。亦即將顯示卡內原為繪圖功能而具有利於浮點運算、數量極多執行緒(multithread)與高記憶體頻寬(memory bandwidth)的特性，轉換成所需的計

算功能。過去以顯示卡(NVIDIA 8800GTX)作為平行運算工具，在 CUDA 平台上作數值模擬的有 Brandvik 和 Pullan[31]，以有限體積法離散三維尤拉方程式，解渦輪葉片上的非黏性可壓縮流，得其計算效能約為中央處理器(Intel Core 2 Duo 2.33 GHz)的 16 倍，測試網格較少時 CPU 計算速度則會相較有些微增加；Corrigan 等[32]用非結構性網格，以 NACA0012 機翼及一飛彈為例，解此超音速可壓縮流流場，比較中央處理器(Intel Core 2 Q9450)及顯示卡(NVIDIA Tesla)在不同案例下單精準及雙精準的計算效能，結果在單精準浮點數下使用顯示卡計算速度約為四核心中央處理器的 9.4~9.9 倍，而雙精準則為 1.56~2.5 倍。

圖(1-1)為英特爾(Intel)公司的中央處理器與英偉達(NVIDIA)公司的硬體顯示卡單浮點運算速度的比較圖[33]，可得知兩者的差距。圖(1-2)則是英偉達公司的硬體顯示卡安裝於本研究室之電腦示意圖，利用 CUDA 計算平台於平行運算，不但可大幅縮短計算時間，且可降低電腦成本與使用空間。利用上述計算方法與工具執行數值計算，結果得知，三維漸縮管道隨主流方向截面積逐漸縮小，流速加快，導致壁面中央區域熱傳效果大幅增加。但壁面與壁面間的夾角隨之減小，導致流經夾角附近(壁面兩側)的流體，因壁面摩擦阻抗增加流速降低，而使熱傳效果急遽劣化，三維效應的此現象過去從未發現。此外探討雷諾數的影響，雷諾數越大，熱傳效果越好，壁面兩側三維效應現象依舊存在，而利用 CUDA 平台作平行化運算可使計算速度較一般四核心中央處理器加快四倍以上，可見其顯著的效率提升。

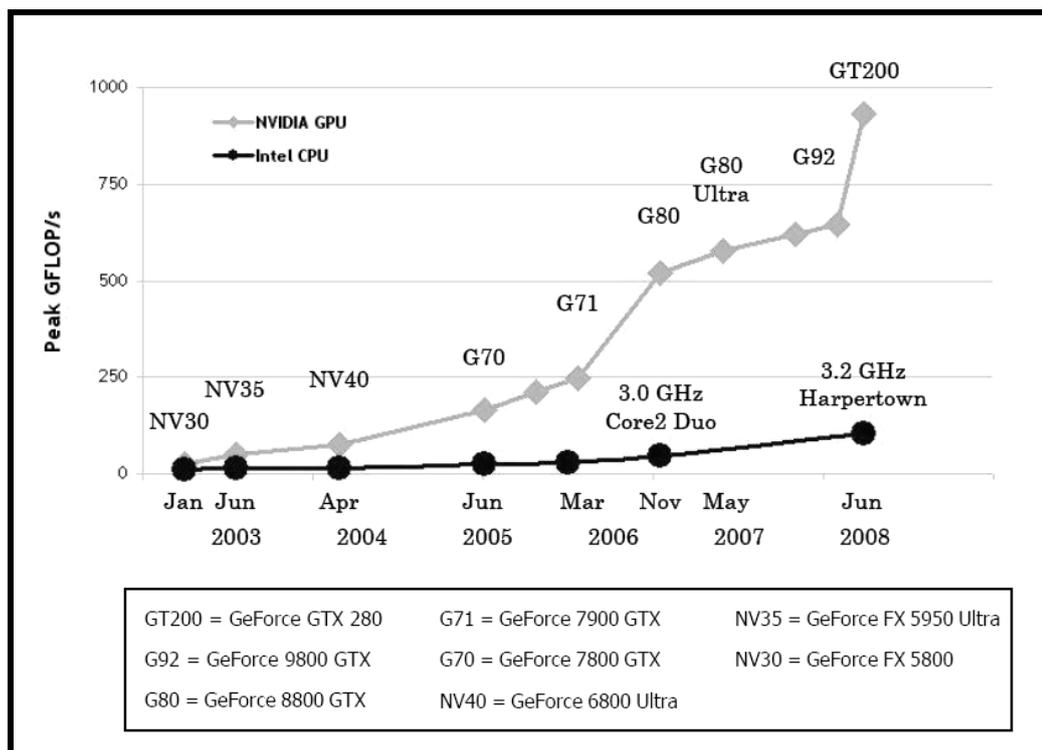


圖 1-1 GPU 及 CPU 浮點運算速度比較圖

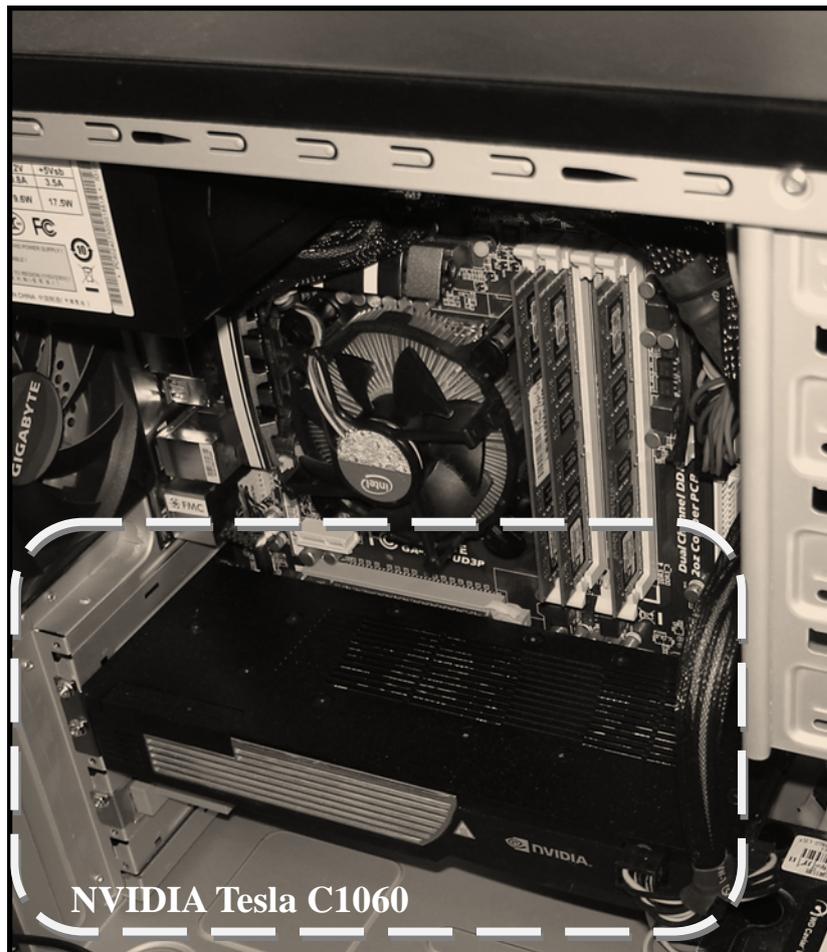


圖 1-2 顯示卡 NVIDIA Tesla C1060 安裝於本研究室之電腦示意圖

第二章 物理模式

2-1、物理尺寸與分析模式：

圖(2-1)為一正方形截面之煙囪管道圖，其詳細長度及溫度邊界條件如圖(2-2)所示，前段管道長度為 l_1 ，漸縮管道長度為 l_2 ，後段管道長度為 l_3 ；漸縮角度為 ϕ ，其中入口大正方形截面之邊長為 d_1 ，出口小正方形截面之邊長為 d_2 。前段管道與漸縮管道為高溫壁面，其他部分則為絕熱壁面。初始溫度 T_0 的冷卻空氣以均勻流等速度 u_0 由管道入口噴入，高溫壁面溫度為 T_h 。其中 x 方向為streamwise方向， y 為垂直壁面方向，最後 z 為spanwise方向。 u 、 v 、 w 分別為其所對應的速度。為簡化管道流研究，以往大多將出口設為速度完全發展流條件及壓力為大氣壓力邊界，但此方式在可壓縮流中壓力波在出口處易會反射回計算區域而影響收斂性，較不適用於此低速可壓縮流流場；且以往為使熱管道內的熱流場更容易成為完全發展流，在管道的長度以及寬度上需要一定的比例，但此一方式會使網格需求增加，計算時間較長，因此本研究在出口條件部分設為非反射性(non-reflecting)邊界[25]條件，此時可視其出口為遠處的邊界條件，選定後段管道長度約為最小寬度的兩倍長，大幅減少網格數量。以往研究中煙囪出口大小因受漸縮角度影響，出口太小時流體速度較快，此時出口處阻力較大，可能因此使煙囪管道中的煙灰無法順利排出；若出口太大，則流體速度降低，然因此可能造成管道壁面之散熱面積加大，而造成流體降溫，排煙效果不良，此外因流體煙氣在尾端停留過久亦較有機會對管道造成腐蝕，故而實用上漸縮角度多在45度以內。本文擴大研究範圍，漸縮的角度則選定為0度、30度、60度及90度。

2-2、分析假設及統御方程式：

本研究選擇層流流場作為模擬流場，設定如下：

1. 可壓縮流，空氣密度會隨溫度與壓力而改變。
2. 工作流體為空氣，假設為理想氣體。流體性質為牛頓流體(Newtonian fluid)，黏滯係數為等方向性。
3. 忽略重力效應影響。
4. 所有壁面均為不可滑移(No slip condition)

統御方程式分別為連續方程式(Continuity equation)、動量方程式(Momentum equations)、能量方程式(Energy equations)，與理想氣體狀態(Equation of State of Ideal Gas)方程式。

連續方程式：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) = 0 \quad (2-1)$$

動量方程式：

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j u_i) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} \quad \text{其中 } \sigma_{ij} = \mu_{e,ij} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right] \quad (2-2)$$

能量方程式：

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j E + p u_j) = -\frac{\partial}{\partial x_j} q_j + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i \sigma_{ij}) \quad (2-3)$$

理想氣體狀態方程式：

$$p = \rho RT \quad (2-4)$$



2-3、邊界條件：

本研究所採用的統御方程式為可壓縮 Navier-stokes 方程式，因此需要給定的邊界條件有：初始狀態(Initial condition)、入口條件(Inlet condition)、出口條件(Outlet condition)、壁面邊界(Boundary condition)。

2-3.1 初始狀態：初始速度、初始壓力、初始密度

初始速度 u ： $0m/s$

初始速度 v ： $0m/s$

初始速度 w ： $0m/s$

初始壓力 p ： 一大氣壓力($101300Pa$)

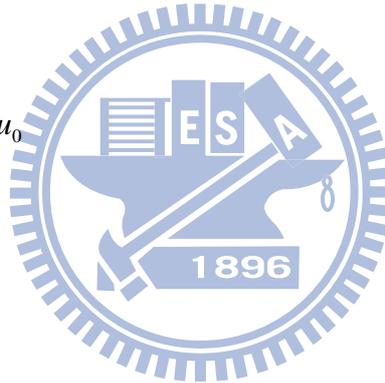
初始密度 ρ ： 空氣密度($1.28kg/m^3$)

2-3.2 入口條件：

入口速度 u ： 均勻流 u_0

入口速度 v ： $0m/s$

入口速度 w ： $0m/s$



2-3.3 出口條件：

出口速度 u ： 非反射性邊界條件

出口溫度 T ： 非反射性邊界條件

出口壓力 p ： 非反射性邊界條件

2-3.4 壁面邊界：

邊界速度： 不可滑移條件， $u = v = w = 0m/s$

邊界溫度： 高溫壁面溫度 T_h

邊界密度： 在垂直壁面方向，梯度為零， $\frac{\partial \rho}{\partial n} = 0$

邊界壓力： 壓力設為 $\frac{\partial P}{\partial n} = 0$

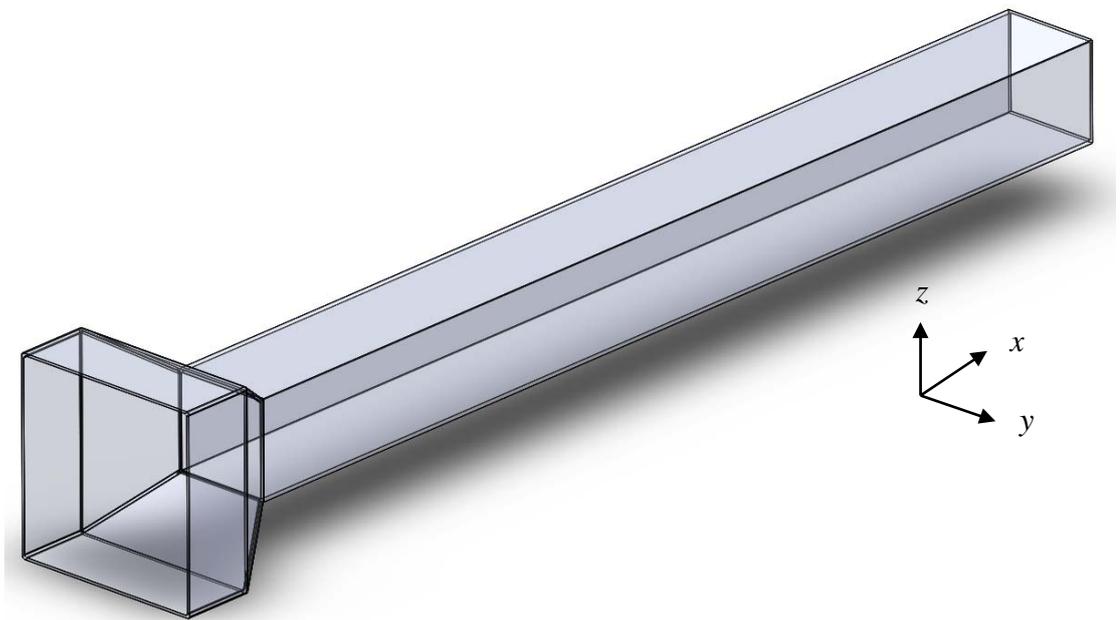


圖 2-1 煙囪管道之物理模式圖

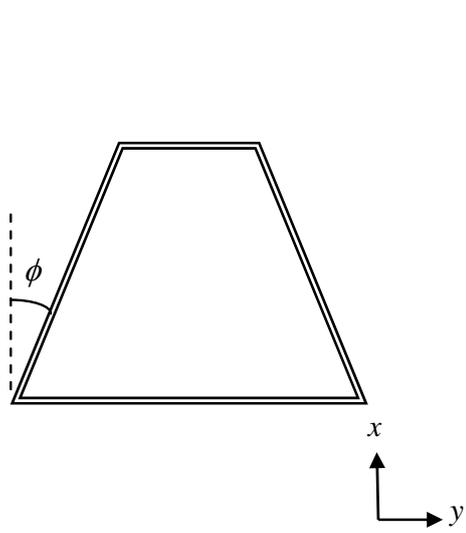


圖 2-2(a) XY 平面漸縮部分截面圖

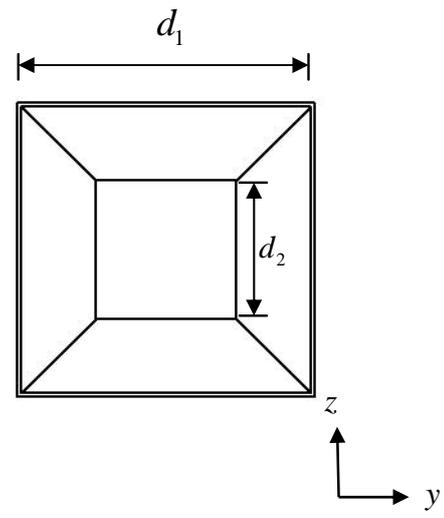


圖 2-2(b) YZ 平面物理模式圖

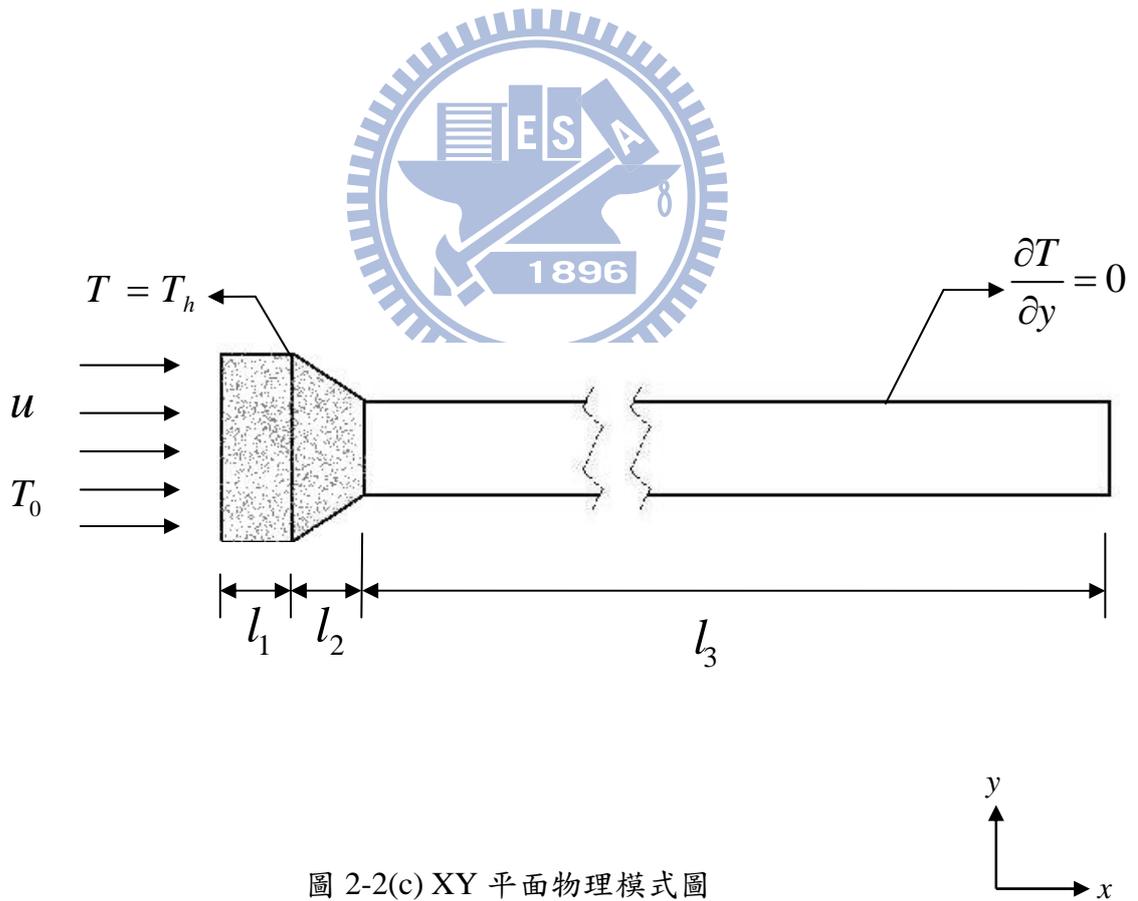


圖 2-2(c) XY 平面物理模式圖

第三章 數值計算模式

本章主旨在說明本論文的數值計算所使用的所有模式。第一節首先要知道所求解的方程式為 Navier-Stokes 方程式。參考 Fu 和 Li 等人[34]之數值方法，本研究將方程式拆解為非黏滯項與黏滯項。其中在計算黏滯性項則採用二階精度的中央差分法。第二節介紹的為黎曼解中的 ROE 法(Roe scheme)[26]，利用 ROE 法來求出非黏滯項的通量。接著第三節介紹 MUSCL 法(Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws)[28]，此法是為了要解出 ROE 法中使用的網格之間的物理量，然後為了防止在高階插分時產生震盪現象，在 MUSCL 法插分的結果方程式中加入 Minmod limiter 以確保程式不會發散。第四節為介紹 Preconditioning 法，因為當計算低速可壓縮流時，因速度和音速的數量及上差距過大，在數值分析時不好計算，所以為彌補此一缺點須使用 Preconditioning 法。而第五節為 LUSGS 法(implicit lower-upper symmetric Gauss-Seidel algorithm)[29]，程式因為在使用 Preconditioning 法，故而在統御方程式中修改了計算時階，故需要加入 LUSGS 法，待時階項收斂時才能達到真實穩態。第六節則詳細介紹本文在出口條件部分採用的非反射性邊界條件，用以避免低速可壓縮流中，出口處壓力波易反彈而造成的干擾；第七節為座標的轉換，為了要觀察三維漸縮煙囪管道的流場及熱場的變化及不規則邊界的影響，因此對於此三維模擬建構系統之邊界採用代數格點產生法將座標轉換的方法，使物理平面之漸縮處拉伸展開成一規則的計算平面，因此當程式作計算時使用曲線座標系做計算，當差分時於直角座標系做差分的動作，使格點排列方便後述的平行計算方法，對於方程式座標的轉換在此做說明。第八節為本研究所使用的硬體顯示卡平行化方法，在 CUDA 平台上做平行化運算可大幅提升運算效率，在此一小節詳細的說明。

綜合上述，本文的計算過程為利用 MUSCL 法算出 ROE 法所需的網格間物理量，求出非黏滯的通量，並在計算通量時加入 Preconditioning 法，以拉近與音速的 Order。接下來使用 2 階中央插分法對黏滯項做差分進而求出黏滯項；然後再與 ROE 法求出的通量結合得到真正的物理通量。最後使用 LUSGS 法疊代以求出正確時階的物理量。

3-1、統御方程式：

本研究在計算流場的方面其統御方程式分為兩大部分，第一部份為非黏滯性項的尤拉方程式，第二部份為黏滯性項。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 0 \quad (3-1)$$

其中，

$$U = (\rho, \rho u_1, \rho u_2, \rho u_3, \rho e)^T。$$

$$F_m = \begin{pmatrix} \rho u_m \\ \rho u_m u_1 + P \delta_{m1} - \tau_{m1} \\ \rho u_m u_2 + P \delta_{m2} - \tau_{m2} \\ \rho u_m u_3 + P \delta_{m3} - \tau_{m3} \\ (\rho e + P)u_m - \lambda \frac{\partial T}{\partial x_m} - \tau_{mj} u_j \end{pmatrix}。 \quad (3-2)$$

ρ 為密度， P 為壓力。 u_1 、 u_2 、 u_3 分別為 x 、 y 、 z 方向的速度。 $\lambda = \rho C_p k$ ， k 為 thermal diffusivity。 $e = C_v T + \frac{1}{2}(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)$ ， C_v 為等容比熱。 τ_{ij} 為 stress tensor。

上式可拆解為黏滯性項與非黏滯性項：

$$F_m = F_{inviscid} + F_{viscid} = \begin{pmatrix} \rho u_m \\ \rho u_m u_1 + P \delta_{m1} \\ \rho u_m u_2 + P \delta_{m2} \\ \rho u_m u_3 + P \delta_{m3} \\ (\rho e + P)u_m - \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{m1} \\ \tau_{m2} \\ \tau_{m3} \\ \tau_{mj} u_j \end{pmatrix} \quad \forall m = 1, 2, 3。 \quad (3-3)$$

左式由非黏滯項 $F_{inviscid}$ 組成的方程式即稱為尤拉方程式。

3-2、Roe scheme：

在雙曲線的守恆形式方程式中，若其初始條件包含有不連續的片段連續(piecewise)常數，此類型的問題通稱為黎曼(Riemann)問題。因為其包含有不連續解，因此在流體計算上有著相當廣泛的應用。一維線性黎曼方程式如下：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad , \quad \text{其中 } A \text{ 為一常數 Jacobian 矩陣。} \quad (3-4)$$

初始條件為 $U^{(0)} = (u_1^{(0)}, \dots, u_m^{(0)})^T$ 。左上方括號代表時間 t 為 0。

求出 A 之特徵值矩陣以及特徵向量。

$$A = K \Lambda K^{-1} \quad , \quad \text{其中 } \Lambda \text{ 為特徵值矩陣：} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_m \end{pmatrix} \text{。}$$

$K = [K^{(1)}, \dots, K^{(m)}]^T$ 為特徵向量，故 $AK^{(i)} = \lambda_i K^{(i)}$ 。

接著定義特徵變數 W (characteristic variables)，其定義如下：

$$W = W(t, x) \quad , \quad W = K^{-1}U \quad \text{或} \quad U = KW \quad \text{。因此} \quad \frac{\partial U}{\partial t} = K \frac{\partial W}{\partial t} \quad \text{且} \quad \frac{\partial U}{\partial x} = K \frac{\partial W}{\partial x} \quad \text{，將此結果代入}$$

(3-4)式中可得：

$$KW_t + AKW_x = 0 \quad , \quad \text{可再繼續簡化成：}$$

$$W_t + \Lambda W_x = 0 \quad (3-5)$$

方程式(3-5)稱為 canonical form 或 characteristic form。

將以上的結果簡單整理如下：

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial W_i}{\partial x} = 0 \quad , \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_3 \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_3 \end{bmatrix}_x = 0 \quad (3-6)$$

(3-6)可由特徵曲線法求得其解為：

$$\begin{cases} w_i(x,t) = w_i^{(0)}(x - \lambda_i t) = \alpha_i & x - \lambda_i t < 0 \\ w_i(x,t) = w_i^{(0)}(x - \lambda_i t) = \beta_i & x - \lambda_i t > 0 \end{cases} \quad (3-7)$$

其中， α_i 與 β_i 為初始值的特徵變數。由於 $U = KW$ ，可以得到 $U(x,t) = \sum_i^m w_i^{(0)}(x - \lambda_i t) K^{(i)}$

參照圖(3-1)，可以進一步推導出

$$U(x,t) = \sum_{i=1}^p \alpha_i K^{(i)} + \sum_{i=p+1}^m \beta_i K^{(i)} \quad (3-8)$$

除此之外，還可決定出 $U(x,t)$ 中的 jump ΔU ：

$$\Delta U = U_R - U_L = \sum_{i=1}^m \tilde{\alpha}_i K^{(i)} \quad (3-9)$$

其中 $\tilde{\alpha}_i = \beta_i - \alpha_i$ 。

在一維線性黎曼問題中，雖然有 exact solution，但在非線性問題裡需利用疊代等方法，這些動作將耗費大量的時間，因此在實際應用上並不廣泛。為了解決此問題，一般皆求解近似黎曼問題〈approximation Riemann problem〉解而不直接求其 exact solution。在求解近似黎曼問題中最被廣泛應用的方法為 Roe 所提出，亦即為 Roe scheme，其內容如下：

假設一維尤拉方程式：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (3-10)$$

根據 chain rule，可將方程式(3-10)改寫如下：

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad \text{再令 } A(U) = \frac{\partial F}{\partial U}, \text{ 於是方程式(3-10)可以表示成：} \\ \frac{\partial U}{\partial t} + A(U) \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (3-11)$$

其中， $A(U)$ 就稱為 Jacobian 矩陣。

而 Roe scheme 將原本的 Jacobian 矩陣 $A(U)$ 用一常數 Jacobian 矩陣〈constant Jacobian matrix〉 $\tilde{A}(U_L, U_R)$ 代替，因此本來的黎曼問題可以改寫成近似黎曼問題：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \tilde{A}(U) \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

$$U(x,0) = U_L \quad x < 0 \quad (3-12)$$

$$U(x,0) = U_R \quad x > 0$$

於是前述方法可以得到(3-10)的近似解。由以上的原理可得知，在近似黎曼問題上，Roe 利用常數 Jacobian 矩陣取代原本的 Jacobian 矩陣使方程式由非線性轉變成線性，但是初始條件並沒有改變，因此可以得到方程式(3-10)的近似解。為了要求得合理的常數 Jacobian 矩陣，須合乎 Roe 所提出的四項條件：

1. U 與 F 之間，存在著線性轉換的關係。
2. 當 $U_R - U_L \rightarrow U$ ，則 $\tilde{A}(U_L, U_R) \rightarrow A(U)$ ，此處 $A = \frac{\partial F}{\partial U}$ 。
3. $\tilde{A}(U_L - U_R) = F_L - F_R$ 。
4. 矩陣 \tilde{A} 的特徵向量必須線性獨立。

這四項條件都是雙曲線方程式所需具備的，這同時也說明了 Roe 所提出的常數 Jacobian 矩陣必須有實數特徵值，其所對應的特徵向量必須線性獨立。除此之外，條件 3. 則是為了符合守恆定律（conservation law）與 Rankine-Hugoniot 條件。

線性黎曼問題的解析解，可以直接從(3-7)與(3-8)式得到， $U_{i+\frac{1}{2}}(x/t)$ 的解可以利用下

面的方程式計算：

$$U_{i+\frac{1}{2}}(x/t) = U_L + \sum_{\lambda_i < 0} \tilde{\alpha}_i K^{(i)} \quad (3-13)$$

$$\text{或 } U_{i+\frac{1}{2}}(x/t) = U_R - \sum_{\lambda_i > 0} \tilde{\alpha}_i K^{(i)} \quad (3-14)$$

其中 $i + \frac{1}{2}$ 表示網格與網格之間的交界面(face)。

而黎曼問題的近似解，則須從解近似黎曼問題著手：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{F}(U)}{\partial x} = 0, \text{ 根據(3-12)式可得知 } \tilde{F} = \tilde{A}U$$

為了符合守恆的條件，因此下式必須成立：

$$\tilde{F}(U_R) - \tilde{F}(U_L) = F(U_R) - F(U_L) \quad (3-15)$$

接著在固定體積的條件下，積分近似解 $U_{i+\frac{1}{2}}(0)$ ，可得到通量(flux)的數值公式：

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \tilde{F}(U_{i+\frac{1}{2}}(0)) - F(U_R) - \tilde{F}(U_R) \quad (3-16)$$

再從 $\tilde{F} = \tilde{A}U$ 的關係中可進一步求得：

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \tilde{A}U_{i+\frac{1}{2}}(0) - F(U_R) - \tilde{A}U_R \quad (3-17)$$

$$\text{再根據(3-13)式與(3-14)式可以推導出： } F_{i+\frac{1}{2}} = F(U_R) - \tilde{A} \sum_{\lambda_i > 0} \tilde{\alpha}_i K^{(i)} = F(U_R) - \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i^+ \tilde{\alpha}_i \tilde{K}^{(i)}$$

(3-18)

$$\text{或 } F_{i+\frac{1}{2}} = F(U_R) + \tilde{A} \sum_{\lambda_i > 0} \tilde{\alpha}_i K^{(i)} = F(U_L) + \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i^- \tilde{\alpha}_i \tilde{K}^{(i)} \quad (3-19)$$

(3-18)與(3-19)所指的 $\tilde{\lambda}_i^-$ 與 $\tilde{\lambda}_i^+$ 分別是代表負的特徵值與正的特徵值，接著再利用平均的方法將 $F_{i+\frac{1}{2}}$ 更進一步表示成：

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[F(U_R) + F(U_L) - \sum_{i=1}^m |\tilde{\lambda}_i| \tilde{\alpha}_i K^{(i)} \right] \quad (3-20)$$

再由(3-8)式可再次改變 $F_{i+\frac{1}{2}}$ 的形式如下：

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[F(U_R) + F(U_L) - |\tilde{A}| \Delta U \right] \quad (3-21)$$

$$\text{其中 } \Delta U = U_R - U_L, \quad |\tilde{A}| = \tilde{A}^+ - \tilde{A}^- = \tilde{K} |\tilde{\Lambda}| \tilde{K}^{-1}, \quad \tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} |\lambda_1| & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & |\lambda_m| \end{pmatrix}.$$

接下來需找出 $|\tilde{A}|$ 中所需的物理量，必須利用下列方法：

現考慮一維等溫尤拉方程式：

$$U_t + F(U)_x = 0 \quad (3-22)$$

$$\text{其中 } U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + a^2 p \end{bmatrix}, \quad a \text{ 為聲速}$$

方程式(3-22)的 Jacobian 矩陣與其對應的特徵值與特徵向量如下所示：

$$A(U) = \frac{\partial F}{\partial U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a^2 - u^2 & 2u \end{bmatrix} \quad (3-23)$$

特徵值： $\lambda_1 = u - a$ ， $\lambda_2 = u + a$

$$\text{特徵向量：} K^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u - a \end{bmatrix}, K^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ u + a \end{bmatrix}$$

接著選定 parameter vector Q

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \frac{U}{\sqrt{\rho}} \begin{bmatrix} \sqrt{\rho} \\ \sqrt{\rho}u \end{bmatrix} \quad (3-24)$$

再將 F 與 U 利用 Q 表示：

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = q_1 Q = \begin{bmatrix} q_1^2 \\ q_1 q_2 \end{bmatrix} \quad (3-25)$$

$$F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 q_2 \\ q_2^2 + a^2 q_1^2 \end{bmatrix} \quad (3-26)$$



為了表示出 ΔU 與 ΔF 需在定義 averaged vector \tilde{Q} ：

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(Q_L + Q_R) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R} \\ \sqrt{\rho_L}u_L + \sqrt{\rho_R}u_R \end{bmatrix} \quad (3-27)$$

再找出 $\tilde{B} = \tilde{B}(\tilde{Q})$ 與 $\tilde{C} = \tilde{C}(\tilde{Q})$ 使得

$$\Delta U = \tilde{B}\Delta Q ; \Delta F = \tilde{C}\Delta Q \quad (3-28)$$

將(3-28)結合可得

$$\Delta F = (\tilde{C}\tilde{B}^{-1})\Delta U \quad (3-29)$$

再根據上述條件 3 求出近似 Jacobian 矩陣

$$\tilde{A} = \tilde{C}\tilde{B}^{-1} \quad (3-30)$$

為了滿足(3-28)，可以求得

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 2\tilde{q}_1 & 0 \\ \tilde{q}_2 & \tilde{q}_1 \end{bmatrix}; \tilde{C} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_2 & \tilde{q}_1 \\ 2a^2\tilde{q}_1 & \tilde{q}_2^2 \end{bmatrix} \quad (3-31)$$

再帶入(3-30)可得

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a^2 - \tilde{u}^2 & 2\tilde{u} \end{bmatrix} \quad (3-32)$$

\tilde{u} 為 Roe averaged velocity

$$\tilde{u} = \frac{\sqrt{\rho_L}u_L + \sqrt{\rho_R}u_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (3-33)$$

因此可以用同樣方法得到以下物理量：

$$\tilde{v} = \frac{\sqrt{\rho_L}v_L + \sqrt{\rho_R}v_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (3-34)$$

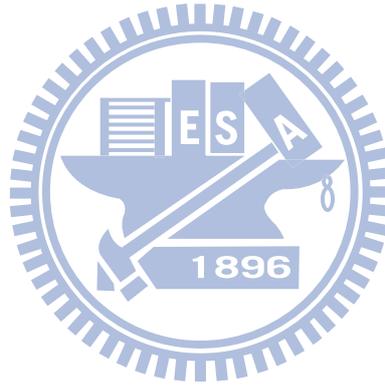
$$\tilde{w} = \frac{\sqrt{\rho_L}w_L + \sqrt{\rho_R}w_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (3-35)$$

$$\tilde{H} = \frac{\sqrt{\rho_L}H_L + \sqrt{\rho_R}H_R}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R}} \quad (3-36)$$

$$\tilde{a} = [(\gamma - 1)(\tilde{H} - 1/2\tilde{V})]^{1/2} \quad (3-37)$$

其中 \tilde{u} 、 \tilde{v} 、 \tilde{w} 分別代表 x 方向、 y 方向、 z 方向的速度。 \tilde{H} 、 \tilde{a} 則分別為焓和音速。

(3-33)~(3-36)式中的 U_L 以及 U_R 則是利用 MUSCL 法求出。



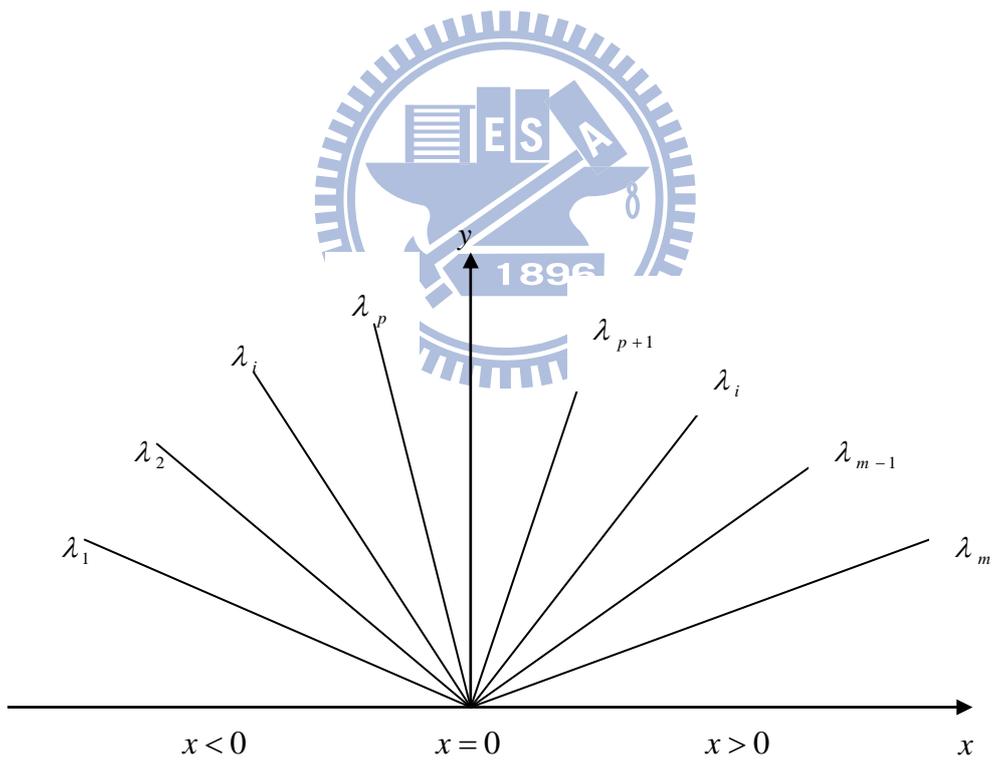


圖 3-1 黎曼問題特徵值結構圖

3-3、Monotonic Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws(MUSCL)：

本論文使用的是採用Abalakin等[28]中所使用的插分法。其方程式如下：

$$u_{i+1/2}^L = u_i + 1/2 \Delta u_{i+1/2}^L \quad (3-38)$$

$$u_{i+1/2}^R = u_i - 1/2 \Delta u_{i+1/2}^R \quad (3-39)$$

$$\begin{aligned} \Delta u_{i+1/2}^L &= (1-\beta)(u_{i+1} - u_i) + \beta(u_i - u_{i-1}) + \theta^c(-u_{i-1} + 3u_i - 3u_{i+1} + u_{i+2}) \\ &+ \theta^d(-u_{i-2} + 3u_{i-1} - 3u_i + u_{i+1}) \end{aligned} \quad (3-40)$$

$$\begin{aligned} \Delta u_{i+1/2}^R &= (1-\beta)(u_{i+1} - u_i) + \beta(u_{i+2} - u_{i+1}) + \theta^c(-u_{i-1} + 3u_i - 3u_{i+1} + u_{i+2}) \\ &+ \theta^d(-u_i + 3u_{i+1} - 3u_{i+2} + u_{i+3}) \end{aligned} \quad (3-41)$$

其中(3-40)、(3-41)式中的 β 、 θ^c 、 θ^d 值可由表(3-1)中查得。代入不同的值可以得到不同的精度。本論文則是使用三階精度，以減少數值計算的消散性。

在程式中，高次項的插分法在不連續的情況下，容易使震盪變大，為了降低震盪，本研究在 MUSCL 法插分出來的方程式中加入 minmod limiter，用來確保程式不會發散。

因此(3-38)與(3-39)式需改寫如下：

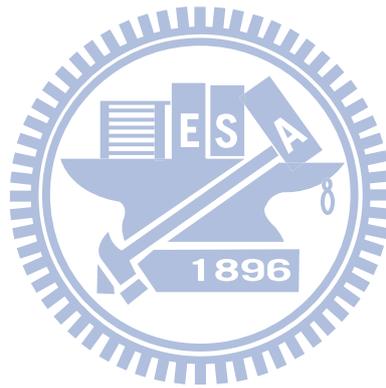
$$u_{i+1/2}^L = u_i + 1/2 \min \text{mod}(\Delta u_{i+1/2}^L) \quad (3-42)$$

$$u_{i+1/2}^R = u_i - 1/2 \min \text{mod}(\Delta u_{i+1/2}^R) \quad (3-43)$$

$$\min \text{mod}(x, y) = \text{Sgn}(x) \text{Max}\{0, \text{Min}[|x|], y \text{Sgn}(x)\}$$

表 3-1 精度係數值

β	θ^c	θ^d	Order
1/3	0	0	3
1/3	-1/6	0	4
1/3	0	-1/6	4
1/3	-1/10	-1/15	5



3-4、Preconditioning 法：

為了提高程式的應用範圍，在 Navier-Stokes 方程式中加入 preconditioning 法，讓程式不論在高速或低速流內計算可壓縮流，皆可獲得精確的結果。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad (3-44)$$

(3-44)為原始方程式，接著將保守形式 (conserved variables) 轉變成主要變數形式 (primitive variables)，其形式如下：

$$M \frac{\partial U_p}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad (3-45)$$

其中 $U_p = [p \quad u \quad v \quad w \quad T]^T$ ， M 為轉換矩陣：

$$M = \frac{\partial U}{\partial U_p} = \begin{bmatrix} \rho_p & 0 & 0 & 0 & \rho_T \\ \rho_p u & \rho & 0 & 0 & \rho_T u \\ \rho_p v & 0 & \rho & 0 & \rho_T v \\ \rho_p w & 0 & 0 & \rho & \rho_T w \\ \rho_p H - 1 & \rho u & \rho v & \rho w & \rho_T H + \rho C_p \end{bmatrix} \quad (3-46)$$

其中 $\rho_p = \frac{\partial \rho}{\partial p}$ ； $\rho_T = \frac{\partial \rho}{\partial T}$

接著將(3-45)式的方程式乘上矩陣 K

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -u & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -w & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -(H - |V|^2) & -u & -v & -w & 1 \end{bmatrix} \quad (3-47)$$

再將 K 與 M 相乘

$$KM = \begin{bmatrix} \rho_p & 0 & 0 & 0 & \rho_T \\ 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \rho C_p \end{bmatrix} \quad (3-48)$$

將(3-48)式帶入(3-45)式，連續方程式：

$$\rho_p \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad (3-49)$$

在理想氣體中可將(3-49)再表示成

$$\frac{\gamma}{C^2} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right) + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad (3-50)$$

其中 C 為聲速

由(3-50)式可以看出，在等密度條件下，由於 ρ_p 為零，(3-49)式將變成

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad (3-51)$$

上式即為不可壓流的連續方程式。

綜上所述，可以得知只要改變(3-48)式中的 ρ_p 項，利用當地流場速度 (local velocity) 的倒數取代，即可轉換系統中的特徵值，藉此改變低速情況下流場的聲速，使聲速與流場速度冪次級數(order)相同，系統不再受到 CFL(Courant-Friedrichs-Lewy Condition)條件的限制，提高程式的計算效率。

利用 θ 取代 ρ_p 項：

$$\theta = \left(\frac{1}{U_r^2} - \frac{1}{TC_p} \right) \quad (3-52)$$

$$U_r = \begin{cases} \varepsilon \times U_{\max} & \text{if } |u| < \varepsilon \times C \\ |u| & \text{if } \varepsilon \times C < |u| < C \\ C & \text{if } |u| > C \end{cases} \quad (3-53)$$

其中 ε 為一極小的值，約等於 10^{-5} ，其主要是用來防止停滯點 (stagnation point) 在計算時所造成的奇異點 (singular point) 現象。對於黏制性流體而言， U_r 必須大於流體的當地擴散速度 (local diffusion velocity)，因此 U_r 還需加入下列限制：

$$U_r = \max\left(U_r, \frac{\nu}{\Delta x}\right)$$

將 θ 帶入(3-48)式後，可得到一新矩陣 Γ_{nc}

$$\Gamma_{nc} = \begin{bmatrix} \theta & 0 & 0 & 0 & \rho_T \\ 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \rho C_p \end{bmatrix} \quad (3-54)$$

經過上述推導之後，方程式從(3-44)式轉變如下：

$$\Gamma_{nc} \frac{\partial U_p}{\partial t} + K \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) = 0 \quad (3-55)$$

為了讓(3-55)式中的通量項再度轉換成保守形式，在乘上 K^{-1}

$$(K^{-1}\Gamma_{nc}) \frac{\partial U_p}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad (3-56)$$

根據(3-56)式，定義

$$\Gamma = K^{-1}\Gamma_{nc} = \begin{bmatrix} \theta & 0 & 0 & 0 & \frac{-\rho}{T} \\ \theta u & \rho & 0 & 0 & \frac{-\rho u}{T} \\ \theta v & 0 & \rho & 0 & \frac{-\rho v}{T} \\ \theta w & 0 & 0 & \rho & \frac{-\rho w}{T} \\ \theta H - 1 & \rho u & \rho v & \rho w & \frac{-\rho}{T} H + \rho C_p \end{bmatrix}$$

最後方程式簡化成如下形式：

$$\Gamma \frac{\partial U_p}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad (3-57)$$

其中 Γ 為 preconditioning 矩陣， U_p 為 primitive form $[P, u, v, w, T]^T / J$

由於方程式在時間項經過改變，因此必須重新推導 Roe 所提出的近似黎曼解。在(3-21)

式中，可以觀察到 $F_{i+\frac{1}{2}}$ 項，是由 $\frac{1}{2}(F(U_R) + F(U_L))$ 的中央差分法加上為了解決不連續面

問題的 artificial viscosity term $\frac{1}{2}|\tilde{A}|\Delta U$ 所組成。加入 preconditioning 的方程式只需在

artificial viscosity term 做改變即可，其推導如下：

$$\begin{aligned}
\Gamma \frac{\partial U_p}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} &= 0 \\
\frac{\partial U_p}{\partial t} + \Gamma^{-1} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) &= 0 \\
\frac{\partial U_p}{\partial t} + \Gamma^{-1} \left(A \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial y} + C \frac{\partial U}{\partial z} \right) &= 0 \\
\frac{\partial U_p}{\partial t} + \Gamma^{-1} \left(AM \frac{\partial U_p}{\partial x} + BM \frac{\partial U_p}{\partial y} + CM \frac{\partial U_p}{\partial z} \right) &= 0
\end{aligned} \tag{3-58}$$

其中 $M = \frac{\partial U}{\partial U_p}$

所以 artificial viscosity terms 改寫如下：

$$F_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(F_R + F_L) - \frac{1}{2} |\Gamma^{-1} AM| \Delta U_p \tag{3-59}$$

其中 $|\Gamma^{-1} AM| = KA \times |DA| \times KA^{-1}$

黏滯性項；在黏滯性項方面，採用二階中央差分法。由於在尤拉方程式中計算的範圍皆為網格與網格之間的通量項，因此在黏滯性項方面，所需要得到的速度梯度項也必須是網格之間的通量項。下列以三維的 X 方向為例，圖 3-2 為其示意圖。

圖 3-2 中各編號所代表的位置分別為：

- $1 \rightarrow (i, j+1, k)$; $2 \rightarrow (i + \frac{1}{2}, j, k)$; $3 \rightarrow (i+1, j+1, k)$;
 $4 \rightarrow (i, j, k-1)$; $5 \rightarrow (i + \frac{1}{2}, j, k-1)$; $6 \rightarrow (i+1, j, k-1)$;
 $7 \rightarrow (i, j, k)$; $8 \rightarrow (i + \frac{1}{2}, j, k)$; $9 \rightarrow (i+1, j, k)$;
 $10 \rightarrow (i, j, k+1)$; $11 \rightarrow (i + \frac{1}{2}, j, k+1)$; $12 \rightarrow (i+1, j, k+1)$;
 $13 \rightarrow (i, j-1, k)$; $14 \rightarrow (i + \frac{1}{2}, j-1, k)$; $15 \rightarrow (i+1, j-1, k)$;

其各速度梯度差分分別如下表示：

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\Delta U}{\Delta X} = \frac{U(9) - U(7)}{\Delta X} \tag{3-60}$$

$$\frac{\partial V}{\partial X} = \frac{\Delta V}{\Delta X} = \frac{V(9) - V(7)}{\Delta X} \tag{3-61}$$

$$\frac{\partial W}{\partial X} = \frac{\Delta W}{\Delta X} = \frac{W(9) - W(7)}{\Delta X} \quad (3-62)$$

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\Delta U}{2\Delta Y} = \frac{U(2) - U(14)}{2\Delta Y} \quad (3-63)$$

$$\text{其中 } U(2) = \frac{U(3) + U(1)}{2} ; U(14) = \frac{U(13) + U(15)}{2}$$

所以

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\left(\frac{U(3) + U(1)}{2}\right)}{2\Delta Y} - \frac{\left(\frac{U(13) + U(15)}{2}\right)}{2\Delta Y} = \frac{U(3) + U(1) - U(13) + U(15)}{4\Delta Y} \quad (3-64)$$

同理

$$\frac{\partial V}{\partial Y} = \frac{\left(\frac{V(3) + V(1)}{2}\right)}{2\Delta Y} - \frac{\left(\frac{V(13) + V(15)}{2}\right)}{2\Delta Y} = \frac{V(3) + V(1) - V(13) + V(15)}{4\Delta Y} \quad (3-65)$$

$$\frac{\partial W}{\partial Y} = \frac{\left(\frac{W(3) + W(1)}{2}\right)}{2\Delta Y} - \frac{\left(\frac{W(13) + W(15)}{2}\right)}{2\Delta Y} = \frac{W(3) + W(1) - W(13) + W(15)}{4\Delta Y} \quad (3-66)$$

$$\frac{\partial U}{\partial Z} = \frac{\Delta U}{2\Delta Z} = \frac{U(11) - U(5)}{2\Delta Z} \quad (3-67)$$

$$\text{其中 } U(11) = \frac{U(10) + U(12)}{2} ; U(5) = \frac{U(4) + U(6)}{2}$$

所以

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\left(\frac{U(10) + U(12)}{2}\right)}{2\Delta Z} - \frac{\left(\frac{U(4) + U(6)}{2}\right)}{2\Delta Z} = \frac{U(10) + U(12) - U(4) + U(6)}{4\Delta Z} \quad (3-68)$$

同理

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\left(\frac{V(10) + V(12)}{2}\right)}{2\Delta Z} - \frac{\left(\frac{V(4) + V(6)}{2}\right)}{2\Delta Z} = \frac{V(10) + V(12) - V(4) + V(6)}{4\Delta Z} \quad (3-69)$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\left(\frac{W(10) + W(12)}{2}\right)}{2\Delta Z} - \frac{\left(\frac{W(4) + W(6)}{2}\right)}{2\Delta Z} = \frac{W(10) + W(12) - W(4) + W(6)}{4\Delta Z} \quad (3-70)$$

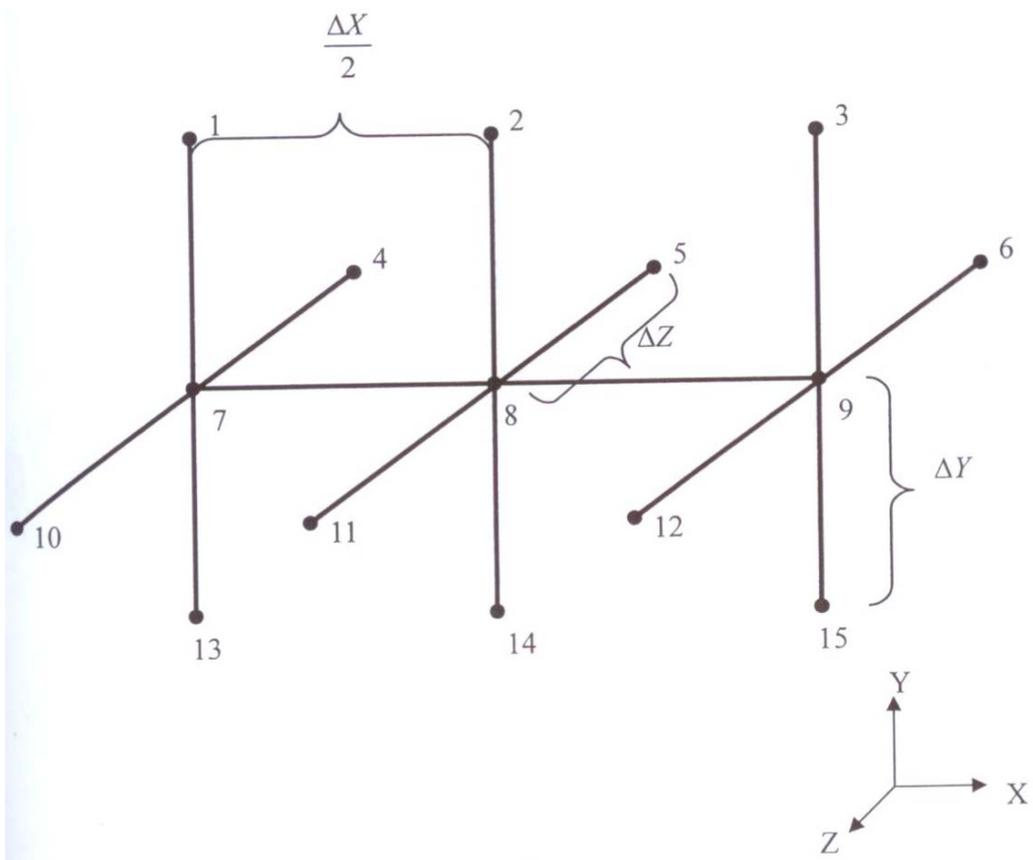


圖 3-2 差分示意圖

3-5、LUSGS 法:

方程式中(3-58)中的 Navier-Stokes 方程式在時間項方面遭到修改，本文選用收斂速度較快的 LUSGS 法來計算修改後的方程式。

原方程式:

$$\Gamma \frac{\partial U_p}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad (3-71)$$

首先，對時間項採二階的後項差分離散，可得

$$\Gamma \frac{3U^{k+1} - 4U^k + U^{k-1}}{2\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} (F_{i+\frac{1}{2},j,k}^{k+1} - F_{i-\frac{1}{2},j,k}^{k+1}) + \frac{1}{\Delta y} (G_{i,j+\frac{1}{2},k}^{k+1} - G_{i,j-\frac{1}{2},k}^{k+1}) + \frac{1}{\Delta z} (H_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{k+1} - H_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{k+1}) = 0 \quad (3-72)$$

接著整理(3-60)式，先將其線性化

$$\Gamma \frac{3(U^k + M\Delta U_p) - 4U^k + U^{k-1}}{2\Delta t} + \delta_x (F^k + A_p^k \Delta U_p) + \delta_y (G^k + B_p^k \Delta U_p) + \delta_z (H^k + C_p^k \Delta U_p) = 0 \quad (3-73)$$

其中 $\Delta U_p = U_p^{k+1} - U_p^k$ ， $\delta_x F^k = \frac{1}{\Delta x} (F_{i+\frac{1}{2},j,k}^k - F_{i-\frac{1}{2},j,k}^k)$ ， $A_p = AM$

$$\delta_x A_p^k = \frac{1}{\Delta x} \left[(A_p^k)_{i+\frac{1}{2},j,k} - (A_p^k)_{i-\frac{1}{2},j,k} \right]$$

再將 ΔU_p 項放置在等號左邊，其餘則在右邊:

$$M \frac{3}{2\Delta t} + \Gamma^{-1} (\delta_x A_p^k + \delta_y B_p^k + \delta_z C_p^k) \Delta U_p = R^k \quad (3-74)$$

此處 $R^k = -(\frac{3U^k - 4U^k + U^{k-1}}{2\Delta t}) - (\delta_x F^k + \delta_y G^k + \delta_z H^k) = 0$ 。

現在令 $\tilde{A}_p = \Gamma^{-1} A_p$ 、 $\tilde{B}_p = \Gamma^{-1} B_p$ 、 $\tilde{C}_p = \Gamma^{-1} C_p$

並將其分為兩部分:

$$\tilde{A}_p = \tilde{A}_p^+ + \tilde{A}_p^-、\tilde{B}_p = \tilde{B}_p^+ + \tilde{B}_p^-、\tilde{C}_p = \tilde{C}_p^+ + \tilde{C}_p^-$$

其中 $\tilde{A}_p^\pm = \frac{1}{2} (\tilde{A}_p^\pm \pm |\lambda_{\tilde{A}}| I)$ 、 $\tilde{B}_p^\pm = \frac{1}{2} (\tilde{B}_p^\pm \pm |\lambda_{\tilde{B}}| I)$ 、 $\tilde{C}_p^\pm = \frac{1}{2} (\tilde{C}_p^\pm \pm |\lambda_{\tilde{C}}| I)$

$\lambda_{\tilde{A}}$ 、 $\lambda_{\tilde{B}}$ 、 $\lambda_{\tilde{C}}$ 分別為 \tilde{A}_p 、 \tilde{B}_p 、 \tilde{C}_p 中最大的特徵值。

將上述帶入(3-56)得

$$[\Gamma^{-1}M \frac{3}{2\Delta t} + \frac{A_{p,i}^{\sim+} - A_{p,i-1}^{\sim+}}{\Delta x} + \frac{A_{p,i+1}^{\sim-} - A_{p,i-1}^{\sim+}}{\Delta x} + \frac{B_{p,i}^{\sim+} - B_{p,i-1}^{\sim+}}{\Delta y} + \frac{B_{p,i+1}^{\sim-} - B_{p,i-1}^{\sim+}}{\Delta y} + \frac{A_{p,i}^{\sim+} - A_{p,i-1}^{\sim+}}{\Delta z} + \frac{C_{p,i+1}^{\sim-} - C_{p,i-1}^{\sim+}}{\Delta z}] \Delta U_p = \Gamma^{-1}R^k \quad (3-75)$$

$$\text{其中 } \delta_x(A_p^{\sim+} + A_p^{\sim-}) = \delta_x^- A_p^{\sim+} + \delta_x^+ A_p^{\sim-} = \frac{A_{p,i}^{\sim+} - A_{p,i-1}^{\sim+}}{\Delta x} + \frac{A_{p,i+1}^{\sim-} - A_{p,i-1}^{\sim+}}{\Delta x}$$

可將(3-75)式整理成

$$(L+D+U)\Delta U_p = \Gamma^{-1}R^k$$

其中

$$L = -\left[\frac{1}{\Delta x} (\tilde{A}_p^+)_{i-1,j,k} + \frac{1}{\Delta y} (\tilde{B}_p^+)_{i,j-1,k} + \frac{1}{\Delta z} (\tilde{C}_p^+)_{i,j,k-1} \right]$$

$$D = \frac{I}{\Delta \tau} + \Gamma^{-1}M \frac{3}{2\Delta t} + \left\{ \frac{1}{\Delta x} [(\tilde{A}_p^+)_{i,j,k} - (\tilde{A}_p^-)_{i,j,k}] + \frac{1}{\Delta y} [(\tilde{B}_p^+)_{i,j,k} - (\tilde{B}_p^-)_{i,j,k}] + \frac{1}{\Delta z} [(\tilde{C}_p^+)_{i,j,k} - (\tilde{C}_p^-)_{i,j,k}] \right\}$$

$$U = \left[\frac{1}{\Delta x} (\tilde{A}_p^-)_{i+1,j,k} + \frac{1}{\Delta y} (\tilde{B}_p^-)_{i,j+1,k} + \frac{1}{\Delta z} (\tilde{C}_p^-)_{i,j,k+1} \right]$$

$$\text{最後整理為 } (L+D)D^{-1}(D+U)\Delta U_p^k = \Gamma^{-1}R^k$$

上式可以用以下的步驟解出：

$$1. (L+D)\Delta U_p^* = \Gamma^{-1}R^k$$

$$\text{其中 } \Delta U_p^* = D^{-1}(D+U)\Delta U_p^k$$

$$2. (D+U)\Delta U_p^k = D\Delta U_p^*$$

$$\Delta U_p^k = \Delta U_p^* - D^{-1}U\Delta U_p^k$$

$$3. U_p^{k+1} = U_p^k + \Delta U_p$$

$$4. \text{重複步驟一至三，直到 } \Gamma \frac{U_p^{k+1} - U_p^k}{\Delta t} = 0 \text{ 則下一個物理時間項可求得。}$$

3-6、非反射性邊界(Non-reflecting Boundary)：

本研究主要探討可壓縮流在三維漸縮管道內流動與熱傳機構，過去在模擬低速可壓縮流流場時，出口條件多利用速度完全發展流條件及大氣壓力邊界，然而此上述的出口條件設定方式，由於壓力波易會在出口處反射回計算區域而影響收斂，因此不適用於低速可壓縮流；且完全發展流出口在物理模式的設定上需有一定長寬比例，將使網格需求量增加。故本文在出口條件部分採用 Fu 和 Li 等人[24]改善 Poinsot 和 Lele[25]的非反射性邊界條件(non-reflecting boundary)，可適用於極低速可壓縮流，且大幅減少網格總數及計算時間。

如上述在 3-4 節中，經過 Preconditioning 法修正的 Navier-Stokes 方程式如下：

$$\Gamma \frac{\partial U_p}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad (3-57)$$

其中 Γ 為 preconditioning 矩陣， U_p 為 $[P, u, v, w, T]^T / J$

根據 Poinsot 等人[25]所提出的 LODI(The local one-dimensional inviscid relations)將(3-57)簡化成在出口邊界的一維 Navier-Stokes 方程式：

$$\Gamma \frac{\partial U_p}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (3-76)$$

為了將 $\frac{\partial F}{\partial x}$ 轉換成主要變數形式(primitive form)，將(3-76)的左邊乘上 Γ^{-1}

$$\frac{\partial U_p}{\partial t} + \Gamma^{-1} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (3-77)$$

其中

$$\Gamma^{-1} \frac{\partial F}{\partial x} = \Gamma^{-1} \frac{\partial F}{\partial U_p} \frac{\partial U_p}{\partial x} = \Gamma^{-1} A_p \frac{\partial U_p}{\partial x} \quad (3-78)$$

將(3-78)代入方程式(3-76)以主要變數形式為變數(primitive variables)的方程式如下所示：

$$\frac{\partial U_p}{\partial t} + \Gamma^{-1} A_p \frac{\partial U_p}{\partial x} = 0 \quad (3-79)$$

再將 $\Gamma^{-1} A_p$ 做相似轉換以得到進出口的特徵速度：

$$\Gamma^{-1}A_p = K\lambda K^{-1} \quad (3-80)$$

此處 K 為特徵向量 (Eigen vector)， λ 為 $\Gamma^{-1}A_p$ 的特徵值 (Eigen values)，即為出口處的特徵速度。根據 Dennis 等人[35]轉換低速情況下原流體速度 u 及原音速 c ，將其調整使修正過後的流場速度 u' 與聲速 c' 幕次級數 (order) 接近。

特徵值矩陣為

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u \\ u \\ u' + c' \\ u' - c' \end{pmatrix} \quad (3-81)$$

$$\text{其中 } u' = \frac{(\beta+1)u}{2} \text{ 與 } c' = \frac{\sqrt{u^2(\beta-1)^2 + 4\beta c^2}}{2}$$

再令

$$L = \lambda K^{-1} \frac{\partial U_p}{\partial x} \quad (3-82)$$

展開 L 可得

$$L = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{\rho \kappa} \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \kappa \frac{\partial P}{\partial x} \right) \\ u \frac{\partial w}{\partial x} \\ u \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ (u' + c') \left[\frac{\partial P}{\partial x} - \rho(u' - c' - u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \\ (u' - c') \left[\frac{\partial P}{\partial x} - \rho(u' + c' - u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \end{pmatrix} \quad (3-83)$$

L 即為出口處，波強度隨時間變化量。

為了得到 L 與 $\frac{\partial U_p}{\partial t}$ 的關係，將(3-82)代回(3-79)並整理可得

$$\frac{\partial U_p}{\partial t} + KL = 0 \quad (3-84)$$

展開(3-84)可得壓力與垂直進出口的速度方程式

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2c'}[L_4(u' + c' - u) - L_5(u' - c' - u)] = 0 \quad (3-85)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2\rho c'}(L_4 - L_5) = 0 \quad (3-86)$$

在出口條件部份，從出口部份往計算範圍傳遞的波強度隨時間變化量為 L_4 ，為了讓

計算範圍不被出口部份回傳的變化量所影響，因此設定 $L_5 = 0$ 。(3-85)與(3-86)則如下式：

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2c'}[L_4(u' + c' - u)] = 0 \quad (3-87)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2\rho c'}L_4 = 0 \quad (3-88)$$

由(3-88)可得

$$L_4 = -2\rho c' \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3-89)$$

將(3-89)帶回(3-87)可得

$$\frac{\partial P}{\partial t} - \rho(u' + c' - u) \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (3-90)$$

方程式(3-90)表示出口部份壓力與速度對時間的變化量，因此可離散(3-90)當作出口部份的壓力邊界條件。

$$P^{k+1} = P^k - \rho(u' + c' - u)(u^{k+1} - u^k) \quad (3-91)$$



3-7、座標轉換：

本研究為了觀察此三維漸縮煙囪管道的流場及溫度場的變化及不規則邊界的影響，採用代數格點的網格建置方法(algebraic grid generation)，以座標轉換的方式，將物理平面之漸縮處拉伸展開成一規則的計算平面，如圖 3-3 所示，對於方程式座標的轉換在此節做說明。首先，原座標系統，也就是卡式座標系統，稱作 Physical domain (x, y, z) ，轉換過後的曲線座標系統則稱為 Computational domain (ξ, η, ζ) 。其關係式如下：

$$\begin{aligned} \tau &= t \\ \xi &= \xi(t, x, y, z) \\ \eta &= \eta(t, x, y, z) \\ \zeta &= \zeta(t, x, y, z) \end{aligned} \quad (3-92)$$

經由 Chain rule 對偏微分作計算，可得兩座標間的偏微分轉換公式如下：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \tau} + \xi_t \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_t \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_t \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_x \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_y \frac{\partial}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \xi_z \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta_z \frac{\partial}{\partial \eta} + \zeta_z \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (3-93)$$



由上式可得在 physical domain 和 computational domain 之間存在一個轉換矩陣，稱為 Jacobian 轉換矩陣，三維的轉換矩陣如下：

$$J = \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial(x, y, z)} = \frac{1}{x_\xi(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta) - x_\eta(y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi) + x_\zeta(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)} \quad (3-94)$$

本研究主要在漸縮管道處做網格座標轉換的動作，首先為一個正 Y 方向及正 Z 方向的四分之一漸縮管道，如圖 3-4(a)所示，轉換方程式如下：

$$\begin{cases} x = \xi \\ y = \left(\frac{d_1}{2} + \frac{\frac{d_2 - d_1}{2}}{l_2} \xi \right) \eta \\ z = \left(\frac{d_1}{2} + \frac{\frac{d_2 - d_1}{2}}{l_2} \xi \right) \zeta \end{cases} \quad (3-95)$$

其中

$$l_1 \leq x \leq l_1 + l_2$$

$$0 \leq y \leq \frac{d_2}{2}$$

$$0 \leq z \leq \frac{d_2}{2}$$

接著利用上述方程式(3-95)投影在負 Y 方向，如圖 3-4(b)所示，轉換方程式如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \xi \\ y = -\left(\frac{d_1}{2} + \frac{\frac{d_2}{2} - d_1}{l_2} \xi\right) \eta \\ z = \left(\frac{d_1}{2} + \frac{\frac{d_2}{2} - d_1}{l_2} \xi\right) \zeta \end{array} \right. \quad (3-96)$$

其中

$$l_1 \leq x \leq l_1 + l_2$$

$$-\frac{d_2}{2} \leq y \leq 0$$

$$0 \leq z \leq \frac{d_2}{2}$$



最後以上述方程式(3-96)再將其投影在負 Z 方向，以得到一完整個座標轉換圖形，如圖

3-4(c)，轉換方程式如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \xi \\ y = \pm\left(\frac{d_1}{2} + \frac{\frac{d_2}{2} - d_1}{l_2} \xi\right) \eta \\ z = -\left(\frac{d_1}{2} + \frac{\frac{d_2}{2} - d_1}{l_2} \xi\right) \zeta \end{array} \right. \quad (3-97)$$

其中

$$l_1 \leq x \leq l_1 + l_2$$

$$-\frac{d_2}{2} \leq y \leq \frac{d_2}{2}$$

$$-\frac{d_2}{2} \leq z \leq 0$$

接著考慮統御方程式：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad (3-98)$$

本研究將黏滯項與非黏滯項拆開，方程式(3-98)轉變為：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\partial F_v}{\partial x} + \frac{\partial G_v}{\partial y} + \frac{\partial H_v}{\partial z} \quad (3-99)$$

依方程式(3-93)對上式作偏微分計算，並且兩邊同除以轉換矩陣 J，將上述統御方程式

(3-99)轉換如下：

方程式(3-99)左式=

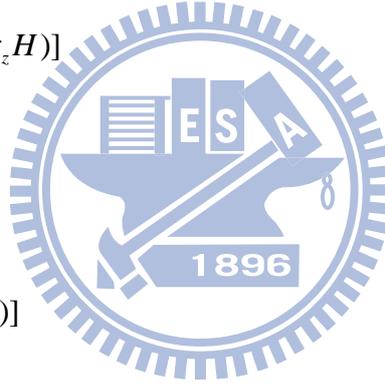
$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{U}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{J} (\xi_t U + \xi_x F + \xi_y G + \xi_z H) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1}{J} (\eta_t U + \eta_x F + \eta_y G + \eta_z H) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{1}{J} (\zeta_t U + \zeta_x F + \zeta_y G + \zeta_z H) \right] \end{aligned} \quad (3-100)$$

方程式(3-99)右式=

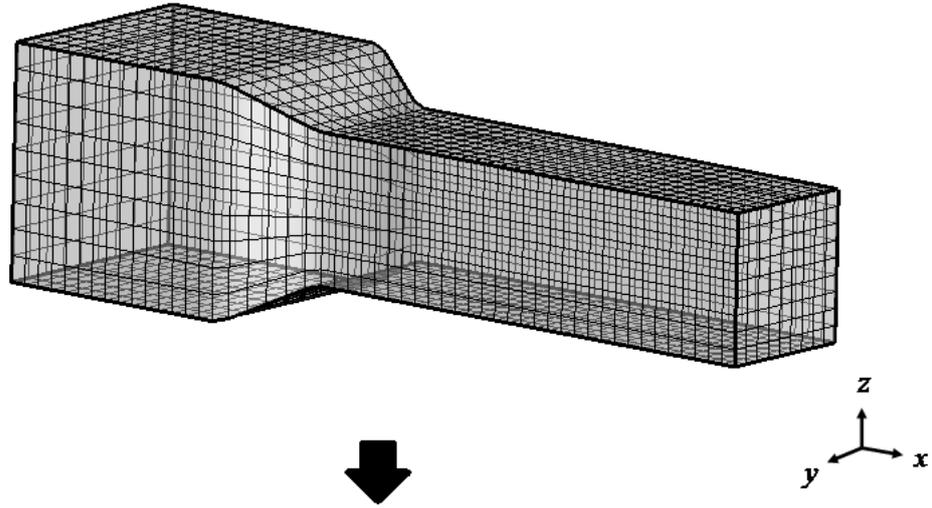
$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{1}{J} (\xi_x F_v + \xi_y G_v + \xi_z H_v) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1}{J} (\eta_x F_v + \eta_y G_v + \eta_z H_v) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{1}{J} (\zeta_x F_v + \zeta_y G_v + \zeta_z H_v) \right] \end{aligned} \quad (3-101)$$

以上即為本研究計算時之統御方程式，在計算時以 Roe scheme 來解非黏滯性項的答案，

並且加入 Preconditioning 法修正方程式增加方程式之收斂性。



Physical domain



Computational domain

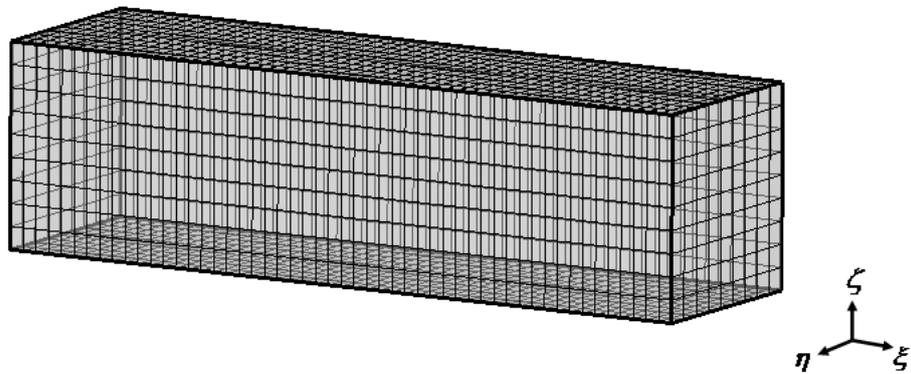


圖 3-3 座標轉換示意圖

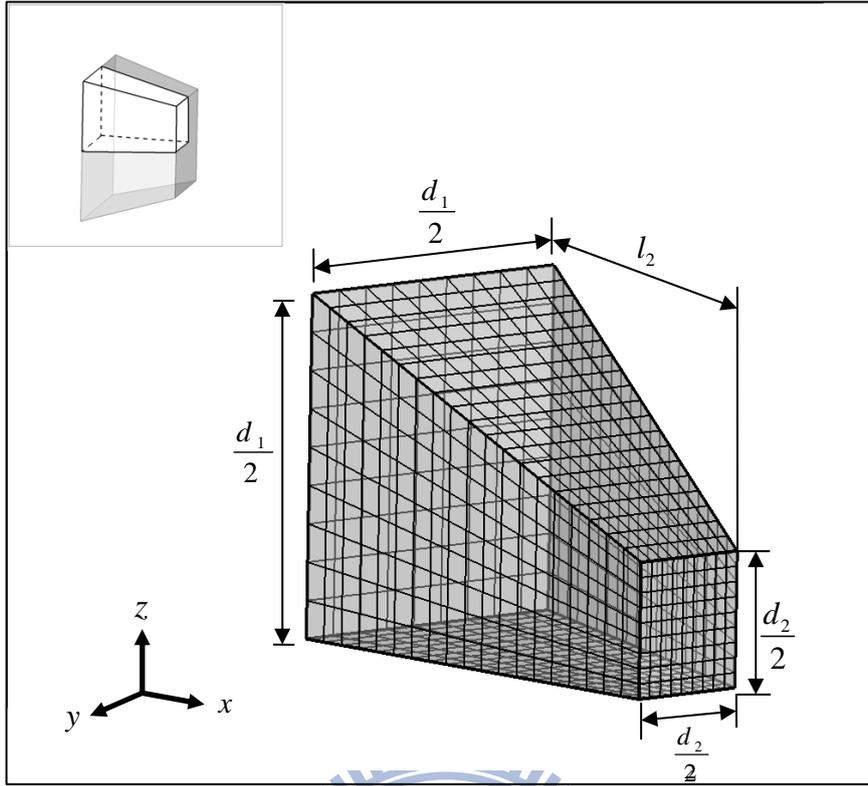


圖 3-4(a)四分之一漸縮管道示意圖

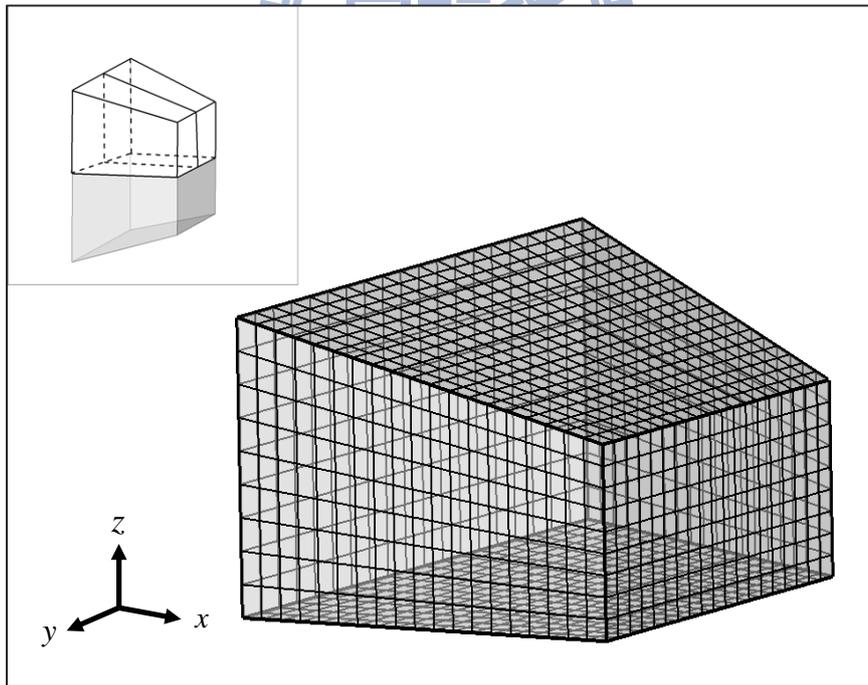


圖 3-4(b)二分之一漸縮管道示意圖

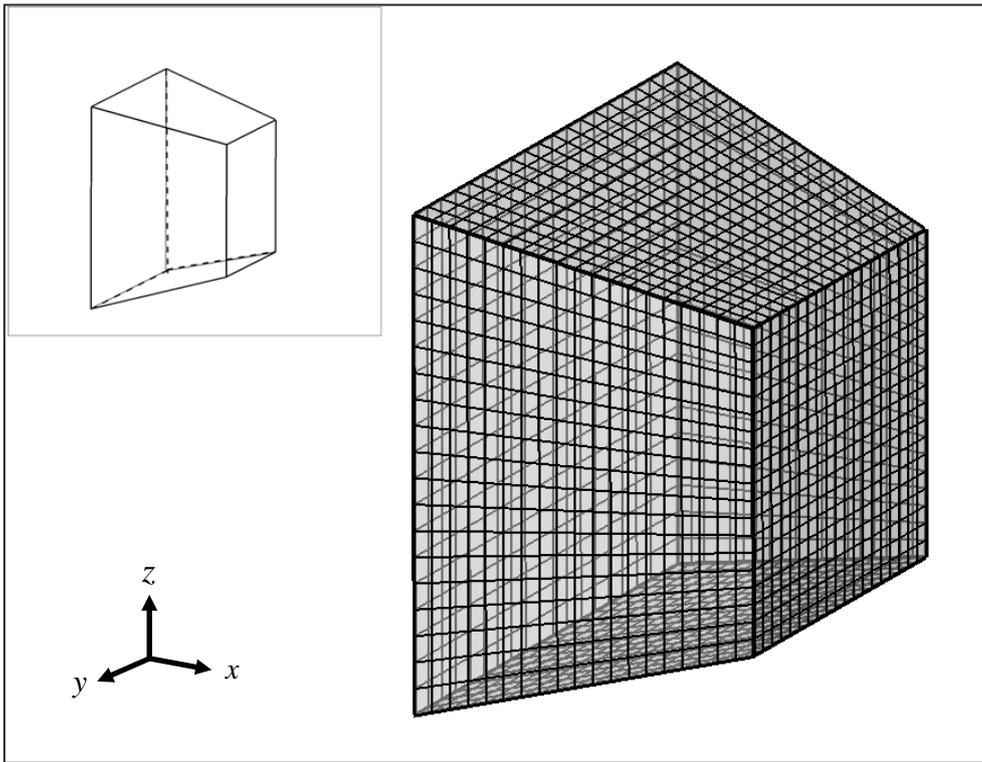


圖 3-4(c)完整的漸縮管道示意圖

3-8、CUDA 平行化方法：

本研究包含複雜的三維物理模型以及龐大的計算量，因而在模擬過程相當耗時，以往多使用平行化方法做為提高計算效能的方式，最常見的兩種平行化方法為MPI (Message Passing Interface)及OpenMP (Open Multi-Processing)，前者將程式平行化於並聯的多台電腦上運行，但效率隨電腦數增加而下降，且價格與佔用空間亦十分龐大。後者則是使用具有多核中央處理器的超級電腦，佔用空間較小，但受限於目前的製程及散熱問題，計算核心數有限，設備成本仍然高昂。

近年來，由於動畫(Animation)功能在研究與娛樂的殷切需求下，顯示卡(Video Card)內圖形處理器(Graphics processing unit, GPU)的速度越來越快，控制程式的使用方式亦越趨容易，加之顯示卡之價格相對於購買高階多核中央處理器(Central Process Unit, CPU)較為低廉，因而將其運用在三維圖形顯示方面以外的應用日益增加。CUDA平台 (Compute Unified Device Architecture) 是由英偉達(Nvidia)公司所推出的整合技術，此技術是一種將GPU作為數據平行化運算設備的統一處理架構。利用顯示卡內GPU具有數量眾多的流處理器(Stream Processor, SP)，更適合用於平行化程式的計算特性，以達到提升數值計算速度的目的。本研究自行開發於個人電腦上，CUDA計算平台應用於數值計算的連結編輯程式，將CUDA平台成功運用於平行化運算，以下將就CUDA平台的架構及執行模式做詳細的說明。

CUDA 平台的主要架構如圖(3-5)，右方可見主機(Host)端，內含中央處理器(CPU)和主機記憶體。而設備(Device)端，即主機板插槽上的顯示卡。平行計算過程中，依程式語言撰寫順序執行，部分在 CPU 上運算的為串行處理程式(serial code)，部分藉自行開發在 CUDA 平台上的連結編輯程式，在 GPU 上執行的為核心函數(kernel)。每個 kernel 的執行單位為網格(Grid)，網格中包含數個區塊(Block)，區塊又由數個執行緒(Thread)所組成，當 kernel 開始執行時，這些執行緒將分別由顯示卡內的流處理器(Stream Processor, SP)來作平行化運算。待此 kernel 結束，則接續下一個串行函數(serial code)進行在 CPU 運算，依此順序執行至整個程式完成運算工作。

在 CUDA 平台上作平行化運算，為得到最佳化的計算效能，在記憶體的配置方式

上極為重要。由於在 GPU 的計算單元中，包含數個多流處理器(Stream Multiprocessor，SM)，而每個 SM 中又包含 8 個單(或雙)精確浮點數的流處理器(Stream Processor，SP)，在同 SM 中的 8 個 SP 共用同一共享記憶體(shared memory)。如前述在 CUDA 平台中的 kernel 實質上是以區塊為單位執行的，在同一區塊的所有執行緒需共享數據，因此會在同一個 SM 中執行，但同一 SM 中可以存在多個區塊，如此可在某一區塊執行同步或存取記憶體時，讓另一個區塊占用執行資源，用以隱藏延遲，更好的利用執行單元的資源。然而在實際運行時，區塊內的執行緒將以執行緒束(warp)為單位執行，其大小由顯示卡版本決定，如本研究所使用的 Tesla C1060，一個 warp 由 32 個連續執行緒所組成，且一個 SM 可以保存 32 個 warp(共 1024 個執行緒)。由於各個 warp 在 CUDA 中的執行順序並無規律，因此需使用同步的方式，確保同一區塊中的執行進度相同，一個 SM 可以完成 512 個執行緒同步的動作，且 warp 中的執行緒只與執行緒 ID 有關，排列如 ID 0~31 為一束，32~63 為第二束，以此類推，因而在下述設定的區塊中執行緒數則可是 1~512 的任意值，並以 32 的倍數為最佳，以避免多餘的執行緒仍占掉一個 warp。依此原則對區塊及執行緒數作配置，以期達到平行化運算的最高性能。

在撰寫 CUDA 程式時，主要可分為下列三個步驟；第一步驟為配置顯示卡內 GPU 的記憶體位址及設定區塊(Block)和執行緒(Thread)的大小，接著將本來利用中央處理器 CPU 計算的資料由主機記憶體搬移至顯示卡上的記憶體。一般使用有限差分法於三維的情形中，多使用三維陣列(i,j,k)將格點編號，然而若使用三維陣列時，要將主機的資料搬移至顯示卡上的記憶體時，將非常複雜。因此需將三維陣列轉換成一維陣列以利於資料搬移。其轉換公式如下所示：

$$\text{Device (assign numbers)} = \text{Host (} i \times ny \times nz + j \times nz + k \text{)} \quad (3-102)$$

其中 nx 、 ny 與 nz 分別為 x 、 y 與 z 方向的計算網格數目。

第二步驟為將程式平行運算。在步驟一將三維陣列轉換成一維陣列，且把主機端的資料搬移至顯示卡的記憶體後，接著將一維陣列的迴圈平行化，利用流處理器做計算並儲存於顯示卡上的記憶體。

第三步驟為將 GPU 計算結果從顯示卡的記憶體搬移至主機端的記憶體，接著將前

述的一維陣列轉回原來的三維陣列，並輸出結果。

為了使程式能編譯一次後即能在擁有不同流處理器(Stream Processor, SP)數的顯示卡上執行，CUDA 平台使用了單指令多執行緒(Single Instruction, Multiple Thread, SMIT)的執行模型，將計算任務轉成可以大量平行執行的執行緒。實際運行時，kernel 是以區塊為單位執行的，而網格則是用以表示一系列可以被平行執行的區塊的集合。一個 kernel 會在一個網格中運行，但由於同一區塊中的所有執行緒在同一時刻執行的指令並不一定相同，故在 CUDA 平台中，同一區塊中的所有執行緒皆能存取共享記憶體(shared memory)，因此可以互通交換數據並能快速進行同步的動作，不同區塊中的執行緒則否，在此模式的設定下雖然能同時執行同一指令的執行緒數量有限，但通過共享記憶體和執行緒柵欄同步(Barrier)的方式，確保同一區塊內的執行緒不僅能獨立平行運算，在需要資料同步時，亦能待全部執行緒皆執行到相同指令時，程式才繼續往下運行，而不致計算錯誤。



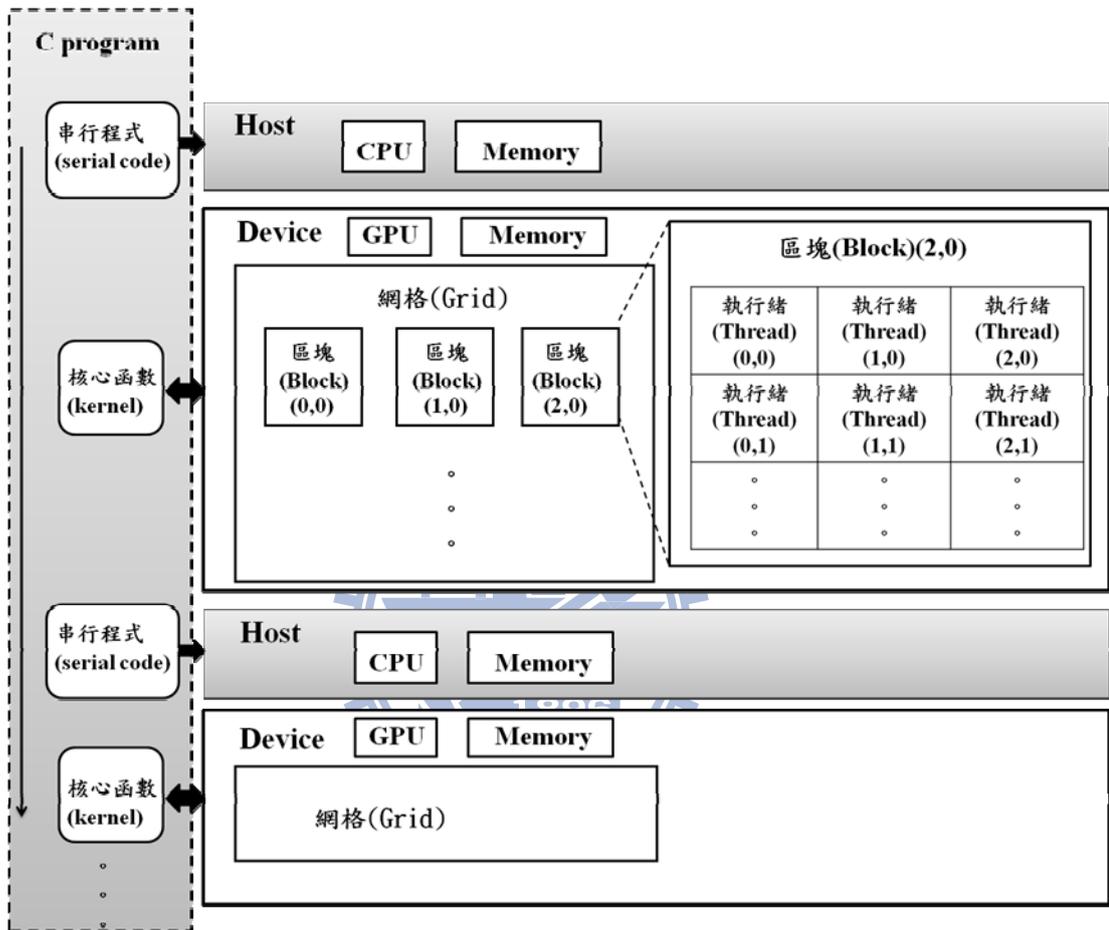


圖 3-5 CUDA 平台架構圖

第四章 結果與討論

本研究探討三維漸縮煙囪管道的漸縮角度對高溫壁面附近溫度與速度場的影響，並說明高溫壁面上平均紐塞數隨著漸縮角度改變而產生的變化，進而比較不同角度對流場及溫度場的影響與對熱傳效率的提升。本研究共計算四個不同漸縮角度及兩個不同雷諾數的案例。另外本研究在程式模擬計算中使用的為有因次之參數，但為求結果討論之比較方便性，故在輸出及數據表示上則轉為無因次之表示法，如下所示為無因次化參數：

$$X = \frac{x}{d_1}, \quad Y = \frac{y}{d_1}, \quad Z = \frac{z}{d_1}, \quad \frac{d_2}{d_1} = 0.64$$

$$U = \frac{u}{u_0}, \quad V = \frac{v}{u_0}, \quad W = \frac{w}{u_0}$$

$$V_{mag} = \sqrt{(U)^2 + (V)^2 + (W)^2}$$

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_h - T_0}, \quad T_0 = 298K, \quad T_h = 310K$$

$$P = \frac{p}{\frac{1}{2}\rho_0 u_0^2}, \quad \rho_0 = 1.1842 \text{ kg/m}^3$$

以空氣為工作流體，其黏度及熱傳導係數依 Sutherlands's law 如下所示：

$$\mu(T) = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{T_0 + S}{T + S} \right) \quad (4-1)$$

$$k(T) = \mu \frac{\gamma R}{(\gamma - 1) \text{Pr}} \quad (4-2)$$

其中

$$S_{air} = 110, \quad \mu_0 = 1.85 \times 10^{-5} \text{ Ns/m}^2, \quad R = 287 \text{ J/kg} \cdot \text{K},$$

$$\text{Pr} = 0.72, \quad \gamma = 1.4$$

考慮流體的黏性及可壓縮性，以下將雷諾數和局部紐塞數定義為：

$$\text{Re} = \frac{\rho_0 u_0 d_1}{\mu_0} \quad (4-3)$$

$$Nu_x = \frac{d_1}{k_0(T_h - T_0)} \left[k(T) \frac{\partial T}{\partial n} \right] \quad (4-4)$$

$$Nu_y = \frac{d_1}{k_0(T_h - T_0)} \left[k(T) \frac{\partial T}{\partial n} \right] \quad (4-5)$$

其中 n 為垂直高溫壁面方向

在模擬計算之前，為求在此物理模型下能獲得精確之計算結果，而不使用過多網格而致花費時間過長，故需作網格測試以期能使用較少網格數而得最佳計算效率。本研究比較在網格大小依次序為 $y \times z \times x$ ，以 $40 \times 40 \times 170$ 、 $45 \times 45 \times 190$ 、 $50 \times 50 \times 210$ 三種網格作紐塞數比較，以雷諾數為 200，漸縮角度 30 度為例，來作沿高溫壁面上中間位置之紐塞數圖。如圖 4-1 所示，使用網格數最 $40 \times 40 \times 170$ 時，可見其紐塞數稍高於其他兩種網格所得結果；而在使用網格較大的 $45 \times 45 \times 190$ 及 $50 \times 50 \times 210$ 時所得結果十分貼近，故本研究採用 $45 \times 45 \times 190$ 為總網格數，以期在最佳網格數得精確之結果。

由於本研究再出口邊界條件使用非反射性邊界，為確認流場中速度場的正确性，本研究將以其漸縮角度為 0 度，雷諾數為 200 下，比較非反射性邊界出口而後段管道長度約為進口方形邊長的 2 倍時，及完全發展流出口而後段管道長度約為進口方形邊長的 15 倍時之紐塞數。首先需確認完全發展流出口之流場正确性，其出口速度解析解如下：

$$u(y, z) = \frac{4d_1^2}{\mu\pi^3} \left(-\frac{dp}{dx} \right) \sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{(i-1)}{2}} \left[1 - \frac{\cosh\left(\frac{i\pi z}{d_1}\right)}{\cosh\left(\frac{i\pi}{2d_1}\right)} \right] \times \frac{\cos\left(\frac{i\pi y}{d_1}\right)}{i^3} \quad (4-6)$$

無因次化為：

$$U(Y, Z) = \frac{u(y, z)}{u_0}$$

結果如圖 4-2 所示，可以看出來此情況的數值解和解析解十分的吻合，出口最大速度大約為進口速度的兩倍，由此結果可得知完全發展流出口條件正確。圖 4-3(a) 可見兩者在沿高溫壁面中央的紐塞數比較圖，而圖 4-3(b) 中實線為使用非反射性邊界出口之管道的出口位置速度圖，及圓點則表示完全發展流出口之管道在相同位置之速度圖，由上述兩張圖示可得無論是在速度場及溫度場中，皆非常接近，故亦由此可確認本研究依非反射

性邊界出口條件所得流場正確，並且可大幅減少管道長度及網格數。

接著在平行化方法部分，由於本研究在 CUDA 平台以顯示卡作平行運算之工具，故在 CPU 及 GPU 記憶體交換資料可能有些許誤差，圖 4-4 中為漸縮角度 30 度且雷諾數為 200 之三維煙囪管道，在沿高溫壁面中央的紐塞數比較圖，可見在使用 CUDA 平台下使用平行運算與未使用平行方法之結果相當接近，依此判斷此平行化方法之流場正確。另外在表 4-1 為不同的中央處理器 CPU 與顯示卡的計算效能比較圖，測試在雷諾數為 200，漸縮角度為 30 度的案例，其中可見前兩欄為使用 OpenMp 平行化方法，此時計算效能較低；而使用顯示卡作平行化工具則使計算效能最佳，目前本研究可達一般四核中央處理器約 4.7 倍的運算速度，可見其顯著的計算效能提升。

在本研究中，分別以雷諾數為 200 及 400，來計算漸縮角度為 0 度、30 度、60 度及 90 度的三維漸縮煙囪管道。第一個案例是以雷諾數 200，漸縮角度為 0 度的長方形管道，從中央 XY 截面的流線圖 4-5(a)，可見在壁面邊界層的影響下，靠近壁面的流線將往中間靠近，並在最後趨於一致；圖 4-5(b) 為等溫線圖，在高溫壁面附近由於溫度較高，流體藉流動快速的帶走熱能，故在靠近高溫壁面區域等溫線分布密集，而後離開高溫壁面區域則流體溫度不再上升。圖 4-6 為沿高溫壁面上不同位置的速度場截面圖，其中 A 至 B 點為流體進口及高溫壁面起始位置，G 至 H 點為高溫壁面最後方銜接絕熱壁面位置。圖 4-6(a) 為在流場初始入口位置的 A 至 B 點截面，此時均勻流剛進入管道，邊緣受壁面影響速度較慢；圖 4-6(b)~(c) 已進入管道中，因此速度邊界層開始漸漸出現；圖 4-6(d) 可見越往後面速度邊界層越明顯，且速度往中間加快。圖 4-7(a) 表示前述 A~H 點各位置的局部紐塞數比較圖，在 A 至 B 點由於進口流體溫度低，故此時的壁面紐塞數最大，而兩角落邊緣受壁面影響熱傳效果稍減，流體繼續沿高溫壁面流動，至 C 到 D 點及 E 到 F 點，越靠後段流體溫度越高，壁面紐塞數亦隨之降低，最後 G 到 H 點因位於高溫壁面的最後方並銜接絕熱壁面處，後方流體溫度較低，因此其紐塞數微高於 C 到 D 點及 E 到 F 點位置。圖 4-7(b) 為對 X 方向比較在沿高溫壁面區域邊緣的 A 點至 G 點以及中間的 I 點至 J 點得熱傳效果，以均勻流為入口的條件下，一開始入口速度十分接近，故兩者起始的紐塞數幾乎相同，其中由於本研究為一三維管道，在流場邊緣及角落部分

會較明顯因兩壁面邊界層交互作用影響，使流體無法完全貼合壁面，所以兩者相比之下可見中間 I 點至 J 點的熱傳效果高於邊緣的 A 點至 G 點，此外流體越往後方(正 X 方向)流動，後方流體逐漸受高溫壁面傳導加熱，而使紐塞數逐漸降低，直至高溫壁面最後方位置，因流體不再被加熱，反而使紐塞數些微升高。

第二個案例探討的是雷諾數為 200，漸縮角度為 30 度的三維煙囪管道，高溫壁面區域涵括前段管道及漸縮管道部分。在圖 4-8(a)為其中央 XY 截面流線圖，可見到流線沿主流方向流動，在靠近漸縮管道時，因為壁面形狀的快速改變，流體受本身黏性的影響偏離壁面；而圖 4-8(b)為等溫線圖，前方與長直管道類似，在高溫壁面附近溫度較高，流體藉流動快速的帶走熱能，故在靠近高溫壁面區域等溫線分布密集，而越往後管道壁面附近流體因被加熱，等溫線分布逐漸變疏，直至進入漸縮管道前受先前所述的流體與壁面分離影響，此位置為高溫壁上熱傳效率最低處，之後進入漸縮管道時，流體受管道截面積的快速縮小，速度加快，此時流體能快速帶走高溫壁上熱量，熱傳效應再度變好，等溫線分布亦隨之密集。圖 4-9(a)~(d)表示在高溫壁上不同位置的截面速度場分佈圖，圖 4-9(a) 為在沿高溫壁面區域入口位置(點 A 至點 B)，可見進口高速流體稍遠離壁面，邊緣流速較慢；圖 4-9(b)為即將進入漸縮管道的位置(點 C 至點 D)，速度場分佈稀疏，剛進入漸縮管道位置(點 E 至點 F)示於圖 4-9(c)，流體速度加快，速度場分佈線稍加密集，流體繼續向後流動，如圖 4-9(d) 為即將離開漸縮管道位置(點 G 至點 H)，此處為流體在漸縮管道中速度最快之位置。圖 4-10(a)為如前述在高溫面上各位置在 Y 方向上的局部紐塞數圖，為方便漸縮管道上各點紐塞數的表示，將圖中各點投影在主流方向的 X 座標。入口流體溫度低，故 A 至 B 點有最高紐塞數，而流體向後流動逐漸被加熱，紐塞數逐漸降低，至 C 到 D 點位置為紐塞數最低處，流體進入漸縮管道後流速增加，E 至 F 點紐塞數有些微升高，再往後流場截面積逐漸縮小，流速逐漸加快，直至漸縮管道出口 G 到 H 點時紐塞數大幅升高，明顯增強整體的熱傳效益。4-10(b)為對 X 方向比較在沿高溫壁面區域邊緣的 A 點至 G 點以及中間的 I 點至 J 點的熱傳效率比較，因以均勻流為入口，使進口溫度在 A 及 I 點皆十分接近，故兩者起始的紐塞數幾乎相同，如前述由於三維管道在流場邊緣及角落部分，流體受壁面作用影響，使流體無法完全貼

合壁面，所以兩者相比之下可見中間 I 點至 J 點的熱傳效果高於邊緣的 A 點至 G 點，而在洽進入漸縮管道時則為流體分離最為明顯之處，故將在此紐塞數分布出現了驟降的凹處，而後流體進入漸縮管道，此時主流速度明顯加快，帶動流體熱量交換，使熱傳效應的增強，紐塞數分布再次逐漸回升。

圖 4-11 為雷諾數為 200，漸縮角度為 60 度的三維漸縮煙囪管道，高溫壁面區域一樣涵括前段管道及漸縮管道部分。圖 4-11(a) 的中央 XY 截面流線圖，相較於漸縮角度 30 度的案例，此時流線分布在進入漸縮管道前位置，因漸縮角度的大幅改變，使流體與壁面分離，即將進入漸縮管道的位置猶為明顯；而 4-11(b) 可見其等溫線分布，在前段管道的溫度分佈沿高溫壁面逐漸稀疏，此時壁面熱傳效果隨之漸漸降低，至漸縮管道部分流體因管道形狀劇烈的改變而致流體加速，熱傳效應再次回升，等溫線分布由最疏處漸轉變為密集分佈。圖 4-12(a)~(d) 為高溫壁面上各位置截面速度場分佈圖，圖 4-12(a) 表示入口處流場如前述案例，邊緣速度較慢，而進入漸縮管道前如圖 4-12(b) 速度邊界層較為明顯，流體剛進入漸縮管道後，流體加速，可見得圖 4-12(c) 速度層分佈較為密集，至漸縮管道最後位置如圖 4-12(d) 流體速度最快，速度場分佈緊密且往中央加速。圖 4-13 為在高溫壁面上的局部紐塞數比較圖，前述的 A~H 點局部紐塞數分佈圖如圖 4-13(a) 所示，流場入口處 A 至 B 點為低溫均勻流，因此紐塞數最高，邊緣受壁面影響紐塞數稍低，而至 C 到 D 點及 E 到 F 點處靠近漸縮的轉角處，此時流體受大角度的漸縮管道阻擋，兩者紐塞數分佈皆極低，最後因 G 至 H 點位置速度加快，熱傳效益增強，紐塞數雖升高但壁面影響更為明顯，兩方靠近邊緣紐塞數明顯遽降。下方圖 4-13(b) 為沿壁面中間的 I 點至 J 點及沿邊緣的 A 點至 G 點紐塞數比較，除邊緣受壁面效應影響而使其紐塞數較低，前段短道紐塞數亦較 30 度的紐塞數微低，主因是流體在靠近漸縮管道時，流體與壁面分離而致熱傳效應低落外，減縮角度偏大會造成流體在主流方向流動受到些微阻礙，使前段管道流體速度降低，熱傳效果隨之減低，而後進入漸縮管道後，流體速度明顯加快，紐塞數分佈快速升高，熱傳效果較好。

圖 4-14 為雷諾數為 200，漸縮角度為 90 度的案例。圖 4-14(a) 為流線圖，從最邊緣流線可見得流體受 90 度壁面影響，幾乎完全繞過邊緣直角附近的區域；圖 4-14(b) 為等

溫線圖，前段管道隨後方流體被逐漸加熱，等溫線分布沿壁面越往後方越見稀疏，而前段管道最後的直角處由於流體受直角壁面阻擋，流動緩慢，等溫線分佈最疏。流體進口位置 A 點到 B 點的速度場分佈圖如圖 4-15(a)所示，只有邊緣受壁面影響速度偏小，而 4-15(b)中進入漸縮管道前的 C 至 D 點已靠近 90 度的管道，流體受前方壁面阻擋，邊緣速度漸趨緩慢，圖 4-15(c)可見沿進入漸縮管道的 E 至 F 點，流體在壁面前速度場中幾乎沒有明顯變化，流動非常緩慢，直至漸縮管道出口位置的 G 至 H 點，因即將進入截面積較小的後方管道，速度邊界層較密集，流體加速。圖 4-16(a)為上述 A~H 點局部紐塞數比較圖，低溫流體進口位置 A 點到 B 點紐塞數最大，至 90 度管道前流速非常緩慢，高溫壁面的傳遞的熱量難以從此處被流體帶離，故 C 至 D 點及 E 至 F 點熱傳效率極低，紐塞數最小，至漸縮管道出口位置的 G 至 H 點，因即將進入截面積較小的後方管道，流體加速，故此時紐塞數較大。圖 4-16(b)為沿高溫壁面上中間及邊緣的局部紐塞數比較圖，由於此時 90 度管道上的點都在同一 X 座標上，故此案例另外定義一個座標以利紐塞數的表示， l 為沿高溫壁面 \overline{AG} 或 \overline{IJ} 的實際長度，其無因次表示法：

$$L = \frac{l}{d_1} \quad (4-7)$$

圖 4-16(b)可見 \overline{AG} 和 \overline{IJ} 轉角處紐塞數最低，且相較於前述漸縮角度較小的案例，前段管道的紐塞數亦較低，可推測此時因整個漸縮管道明顯阻擋靠近高溫壁面的流體，進而影響流動及熱傳，而在靠近後方管道處，流體速度稍為增加，故在後方紐塞數仍有部分升高。

雷諾數為 200 的各案例比較雷諾數為 400 時，各個不同漸縮角度之熱傳情況。圖 4-17(a)為為漸縮角度為 0 度時之流線圖，類似雷諾數維 200 之案例；而圖 4-17(b)為其等溫線圖，由於流體速度較快，能快速傳遞熱量，可見得其等溫線較密。圖 4-18(a)~(d)則為 A 至 B 點、C 至 D 點、E 至 F 點及 G 至 H 點截面速度場分佈圖，趨勢與雷諾數較小時相似。而圖 4-19(a)~(b)可見得此時的高溫壁面局部紐塞數較雷諾數為 200 時高。漸縮角度為 30 度時，圖 4-20(a)為流線圖，與雷諾數較小時有類似趨勢；而此時流體速度較快，可見圖 4-20(b)等溫線較密集，圖 4-21(a)~(d)為 A~H 各位置速度場分佈圖，流體由

入口處往漸縮管道流動，速度逐漸加快，速度邊界層圖越清楚。4-22(a)為沿 Y 方向在高溫壁面上的局部紐塞數比較圖，圖 4-22(b)為沿 X 方向的局部紐塞數比較圖，可見得紐塞數明顯在不同位置皆有較雷諾數為 200 時有升高的趨勢，且在出漸縮管道前 G 至 H 點位置，因此時管道形狀改變及壁面效應影響，將流體往中間方向加速，使其靠近兩端有最高紐塞數，推測此時雷諾數的增加有助於熱傳效果的增益。在漸縮角度為 60 度的案例時，圖 4-23(a)為流線圖，圖 4-23(b)為等溫線圖，可見得此時等溫線仍較雷諾數為 200 時更緊密。而各位置截面速度場分佈圖示於圖 4-24(a)~(d)，速度邊界層分布與雷諾數為 200 時類似。沿高溫壁面 Y 方向的局部紐塞數比較圖 4-25(a)在 G 至 H 位置亦在兩端附近有最高紐塞數，而沿高溫壁面 X 方向中央與邊緣局部紐塞數比較圖 4-25(b)則可見較雷諾數為 200 的案例高。最後漸縮角度為 90 度的案例，圖 4-26(a)的流線圖及圖 4-26(b)等溫線圖趨勢與前述類似，等溫線因流體速度快而較為緊密。圖 4-27(a)~(c)則為 A~H 點之不同位置的截面速度場分佈圖，而圖 4-27(b)(c)可見靠近邊緣因 90 度壁面阻擋，流速極為緩慢。圖 4-28(a)的局部紐塞數分佈圖因流體速度較大，沖擊高溫壁面較為劇烈，故此時在 G 至 H 點位置相較於雷諾數為 200 明顯較大，且靠近兩端點附近有較好的熱傳效果，紐塞數大。其在沿 X 方向的局部紐塞數比較如圖 4-28(b)，相較於雷諾數較小時趨勢類示，雖然些微增加，但影響熱傳增益有限。

接下來由圖 4-29(a)~(b)為不同雷諾數下，比較在高溫壁面上各個漸縮角度的平均紐塞數大小，而平均紐塞數定義如下：

$$\overline{Nu} = \frac{1}{A} \int \int_{x,y} Nu_x dXdY \quad (4-8)$$

其中 A 為高溫壁面的面積。

由圖中可得較高雷諾數可使流體速度較快，帶動熱量傳遞，有助於熱傳效率的增益，而平均紐塞數最大於漸縮角度為 30 度。圖 4-30(a)(b)可見在漸縮角度 30 度的案例後方紐塞數較大，由於此時流體在流經漸縮管道時，受道截面積的快速縮小之影響，流體在進入漸縮管道後能夠以較大速度帶走高溫壁面之熱量，故使其在平均紐塞數較漸縮角度為 0 度時有更好的熱傳效果；而接下來漸縮角度為 60 度時，因其漸縮角度太大，在進入漸

縮管道時雖能加速流體，如圖 4-30(c)所示，使其在漸縮管道的高溫壁面附近能有較高的熱傳量，但卻因前段管道受到阻擋，靠近壁面流速減緩甚至反彈，使其前段的熱傳效果反而大幅減低，故在平均紐塞數未隨漸縮角度而升高。而漸縮角度為 90 度的案例可見圖 4-30(d)，由圖中可知結果類似於漸縮角度 60 度的案例，因流體進入前段管道後，受前方因漸縮角度過大，而使流體更受阻擋，此時漸縮管道上熱傳效果甚至較 60 度的案例為低，因實際截面積縮小部分已在後段管道而非高溫壁面，故其流體加速影響有限，其實熱傳效益最低之案例。圖 4-31(a)~(d)為在雷諾數為 400 時的各案例平均紐塞數，結果與上述雷諾數為 200 時相似，且因流體速度較快，平均紐塞數較高。



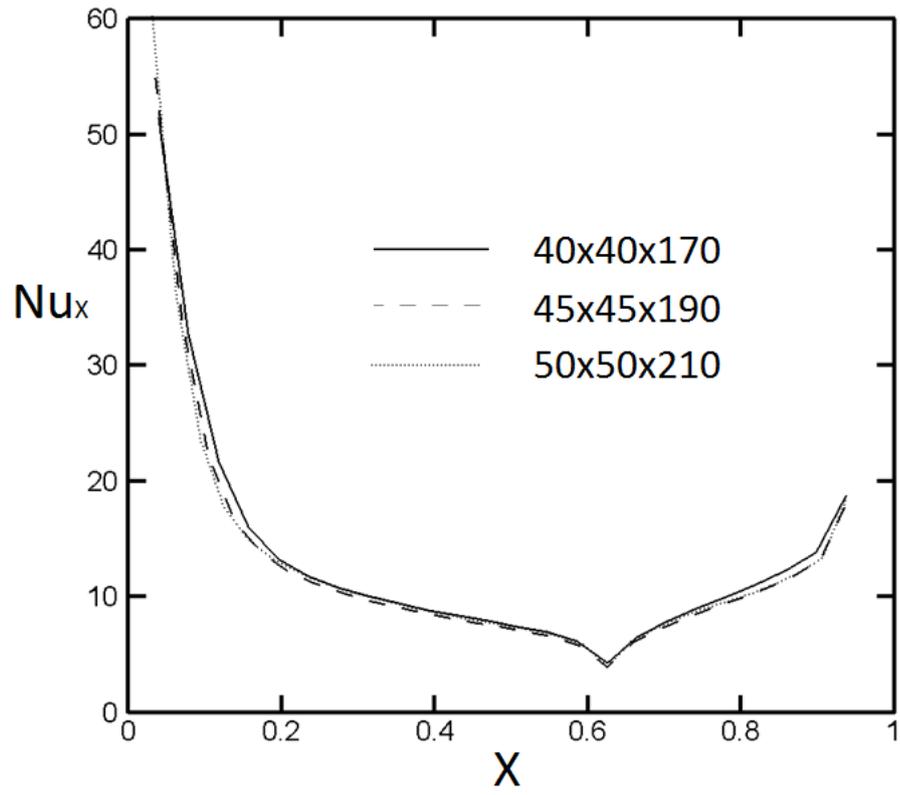


圖 4-1 網格測試圖($Re=200$, $\phi = \frac{\pi}{6}$)

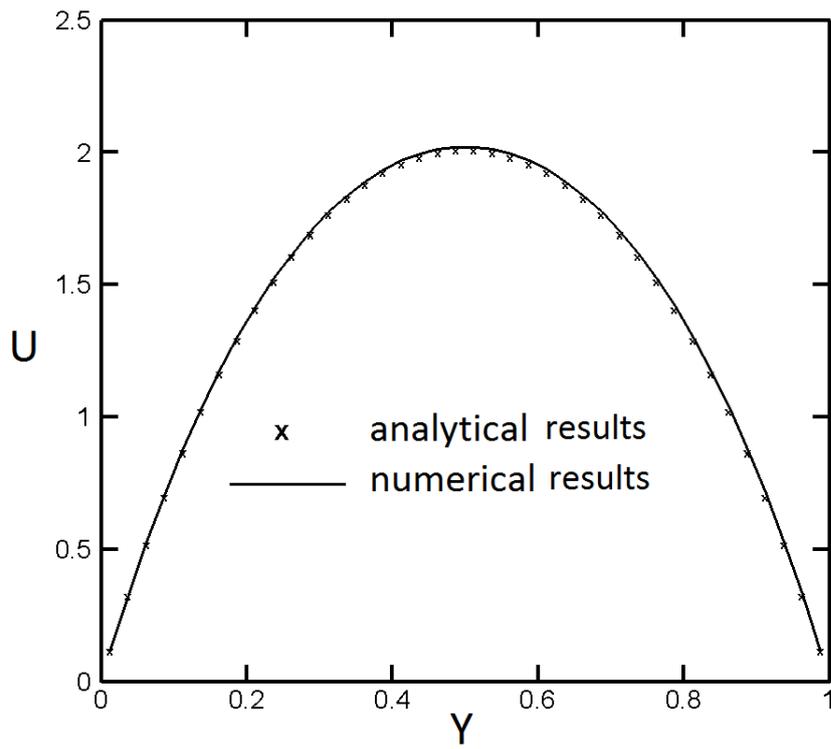


圖 4-2 完全發展流出口解析解對照圖($Re=200$, $\phi=0$)

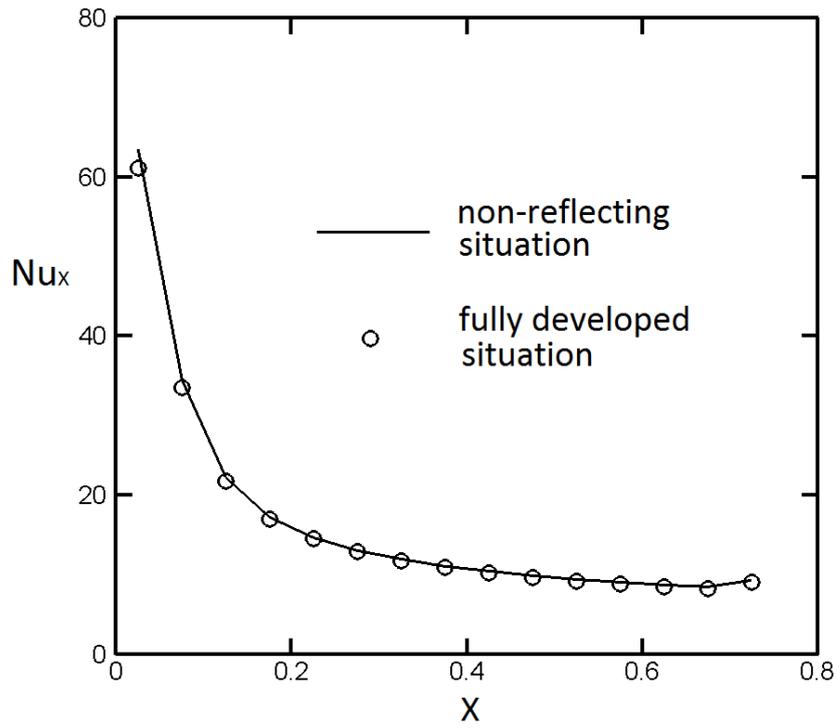


圖 4-3 (a) 完全發展流與非反射性邊界出口條件紐塞數比較圖

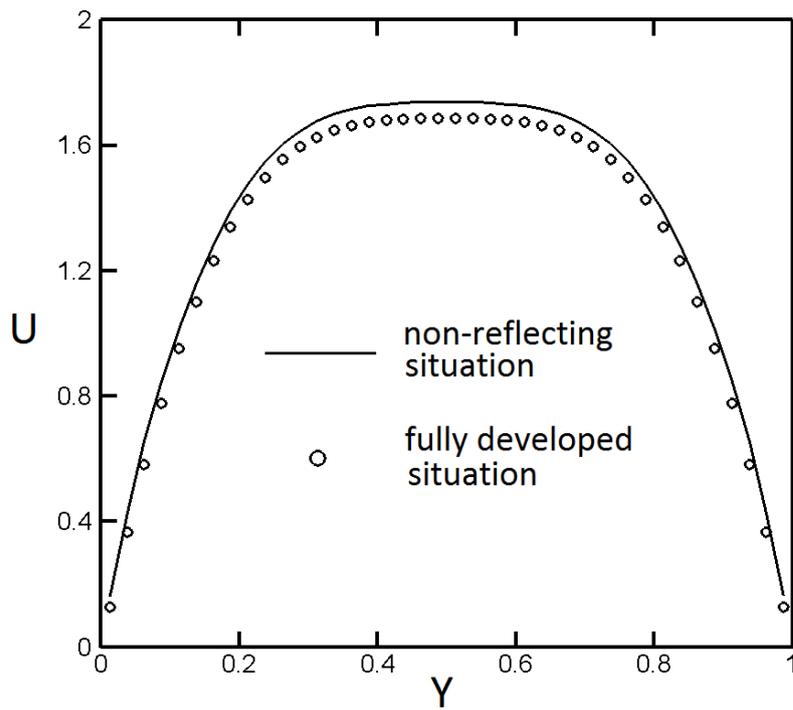


圖 4-3 (b) 完全發展流與非反射性邊界相同位置速度比較圖

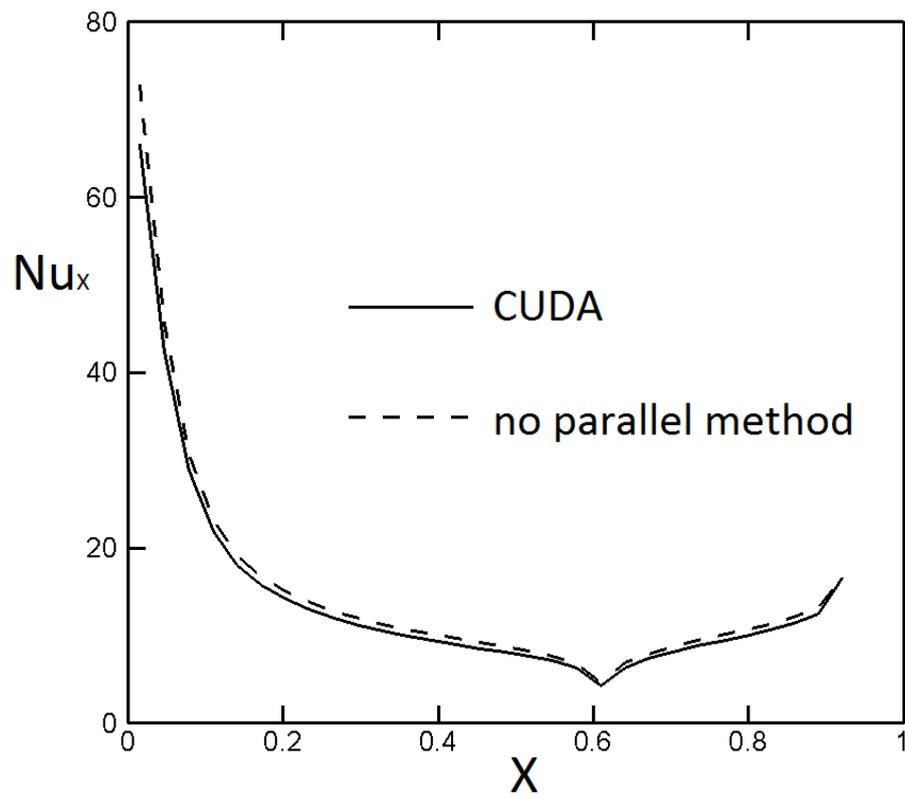


圖 4-4 使用 CUDA 平行化與未使用平行化紐塞數比較圖

表 4-1 平行化方法計算效率比較表

	CPU	CPU	GPU
Type	Intel Quad Q6600 (4 core)	Intel Core i7 (4 core)	Nvidia Tesla C1060
Grids	190x45x45	190x45x45	190x45x45
Parallel method	OpenMp	OpenMp	CUDA
Sec/step	0.93	0.494	0.197
Scaling	1	1.88	4.72

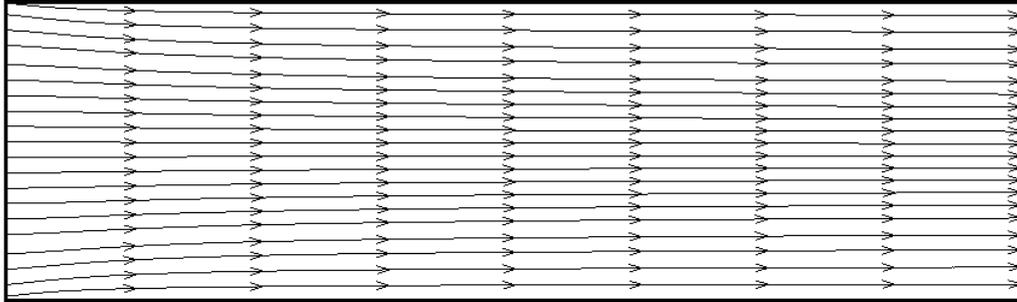


圖 4-5 (a) 中央 XY 截面流線圖($Re=200$, $\phi = 0$)

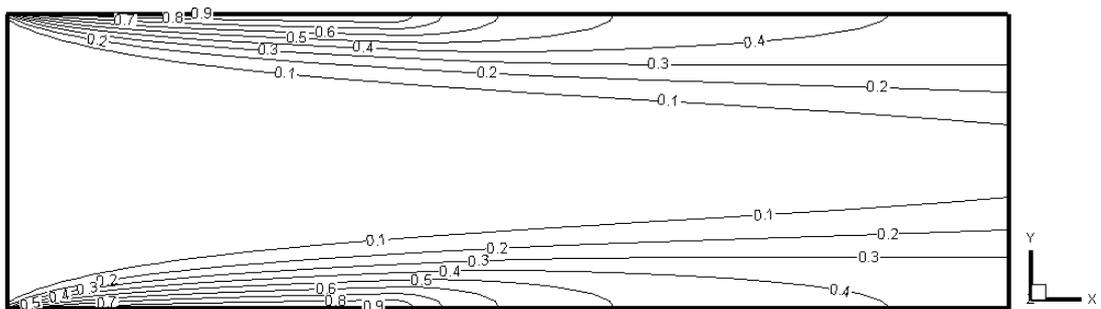


圖 4-5 (b) 中央 XY 截面等溫線圖($Re=200$, $\phi = 0$)

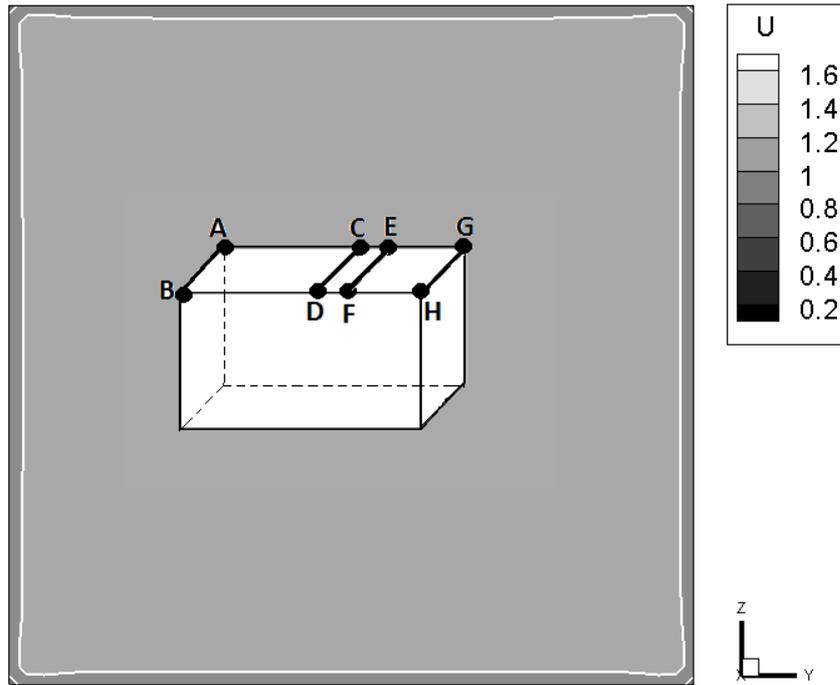


圖 4-6(a) A 點至 B 點速度場分布($Re=200$, $\phi = 0$)

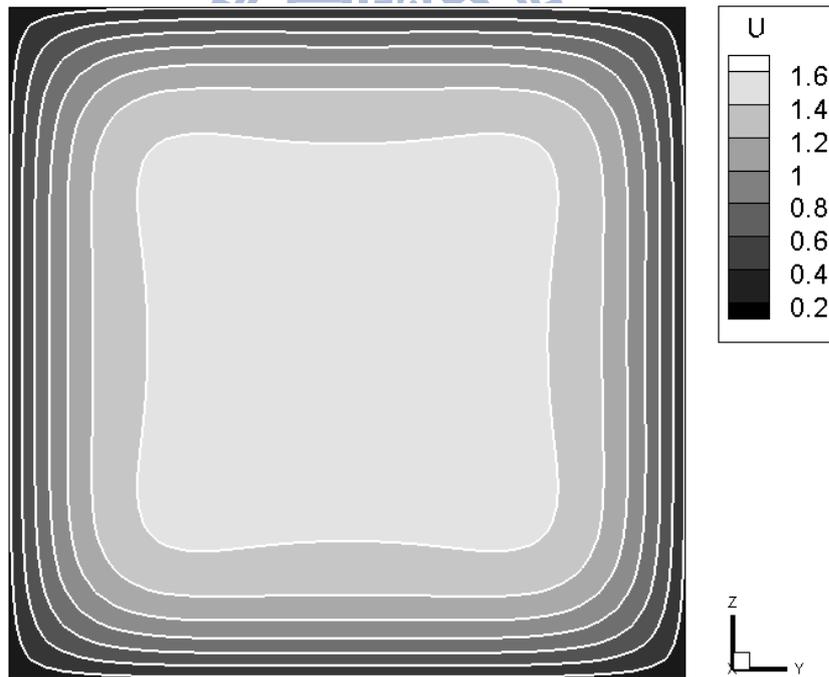


圖 4-6(b) C 點至 D 點速度場分布($Re=200$, $\phi = 0$)

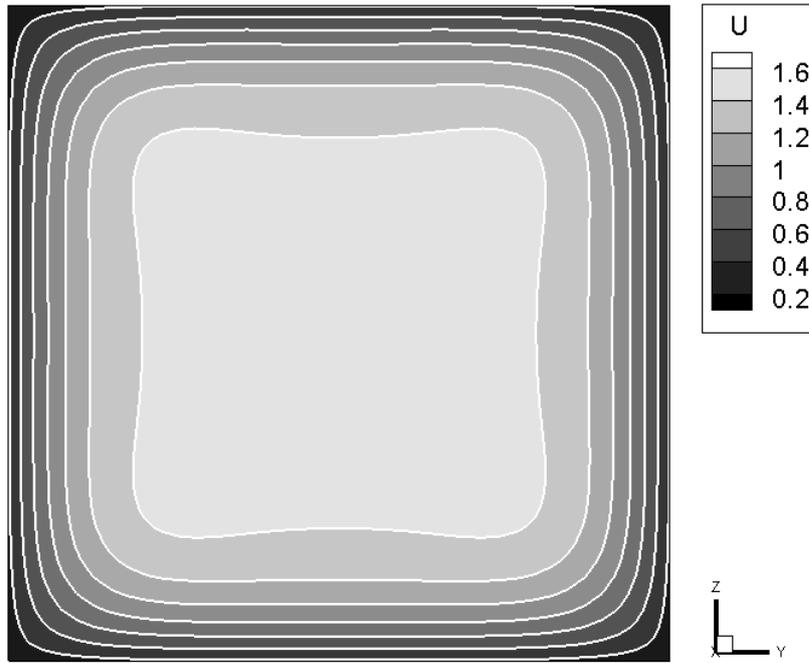


圖 4-6(c) E 點至 F 點速度場分布($Re=200$, $\phi = 0$)

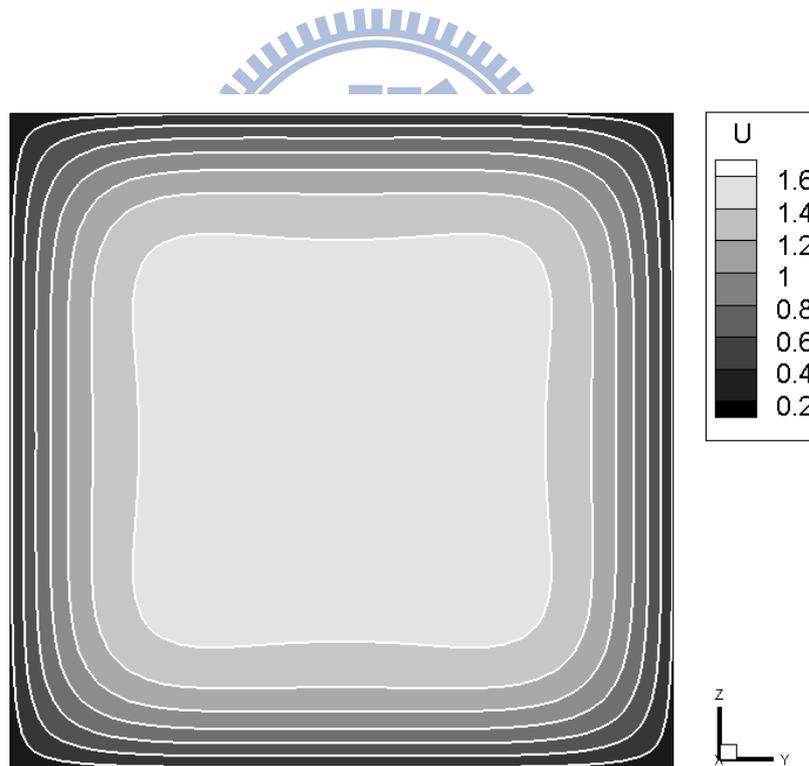


圖 4-6(d) G 點至 H 點速度場分布($Re=200$, $\phi = 0$)

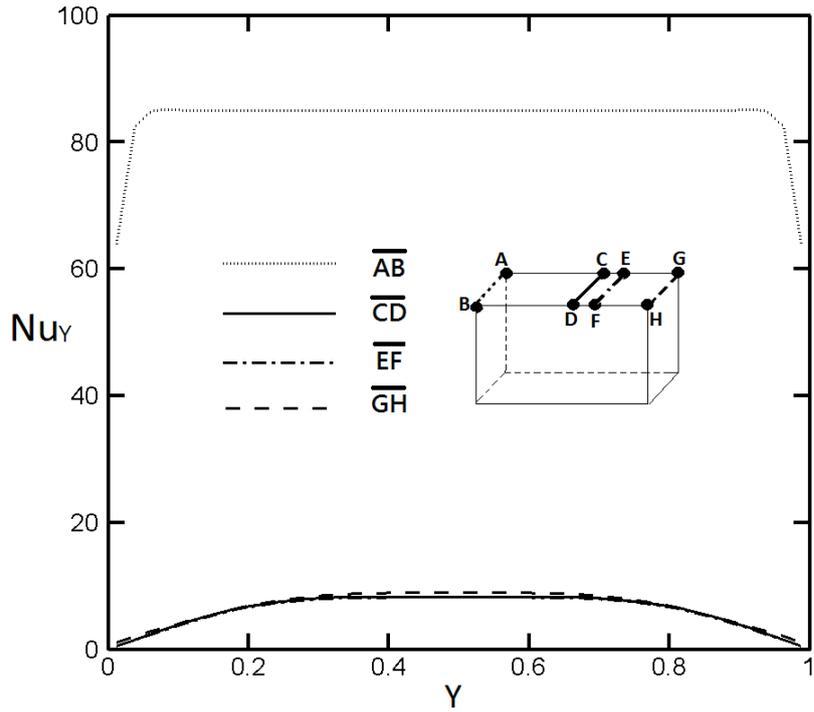


圖 4-7(a) 沿 Y 方向局部紐塞數比較圖($Re=200$, $\phi=0$)

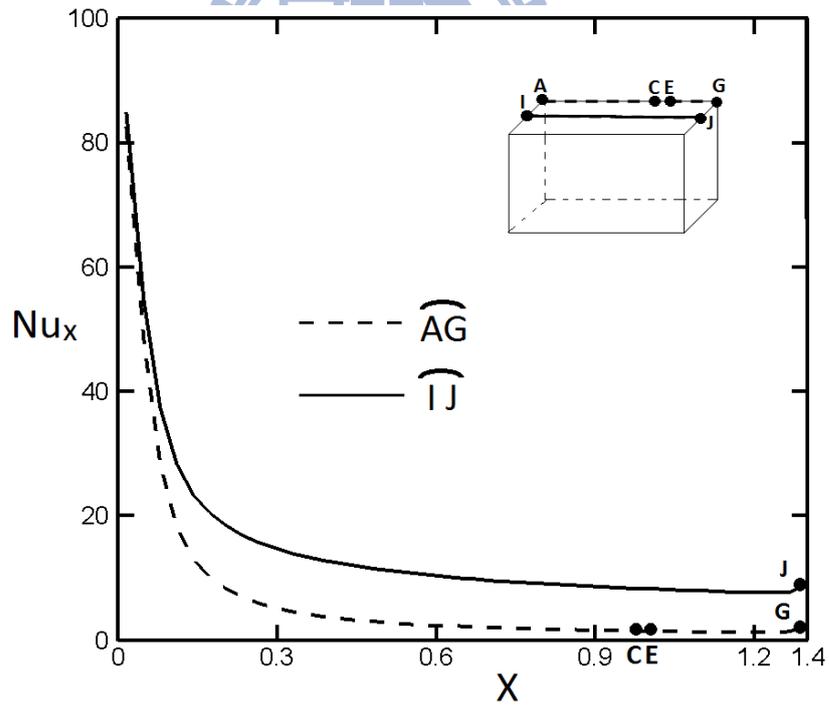


圖 4-7(b) 沿 X 方向局部紐塞數比較圖($Re=200$, $\phi=0$)

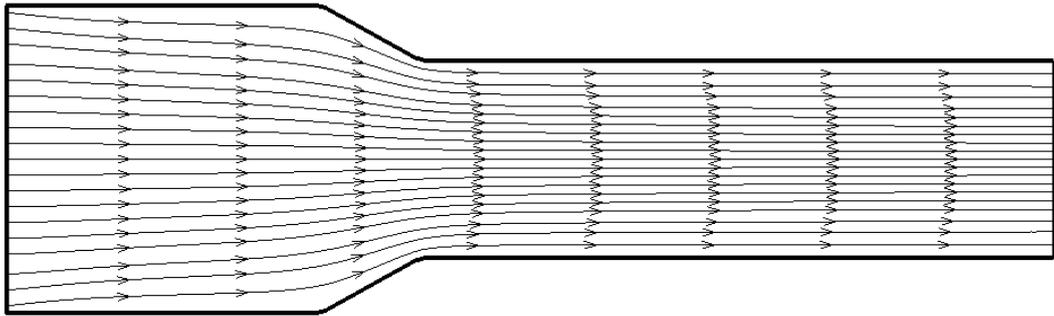


圖 4-8 (a) 中央 XY 截面流線圖($Re=200$, $\phi = \frac{\pi}{6}$)

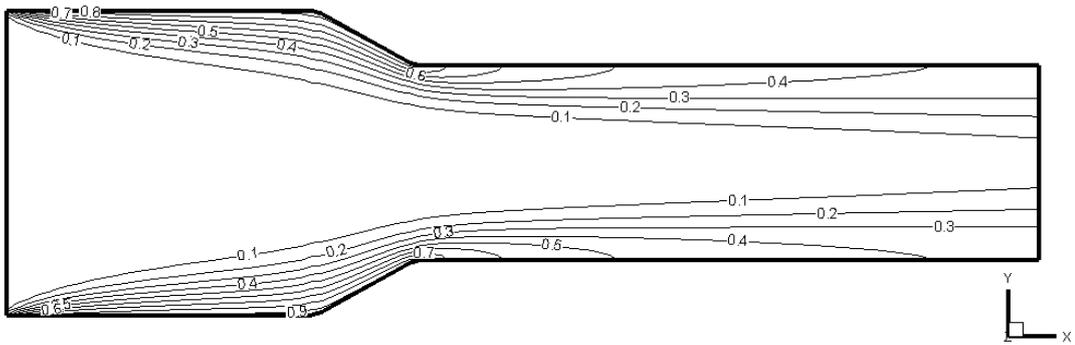


圖 4-8 (b) 中央 XY 截面等溫線圖($Re=200$, $\phi = \frac{\pi}{6}$)

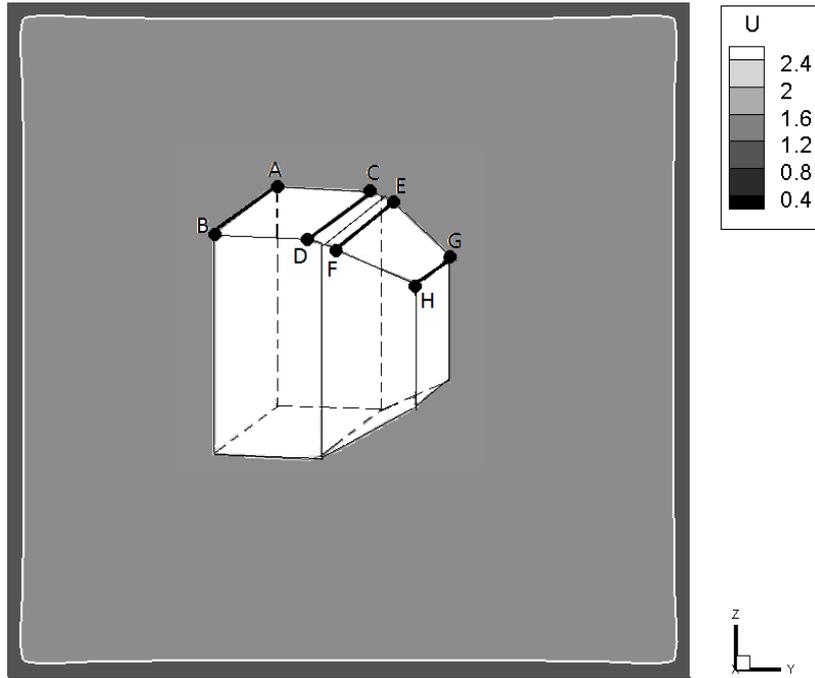


圖 4-9(a) A 點至 B 點速度場分布($Re=200$, $\phi = \frac{\pi}{6}$)

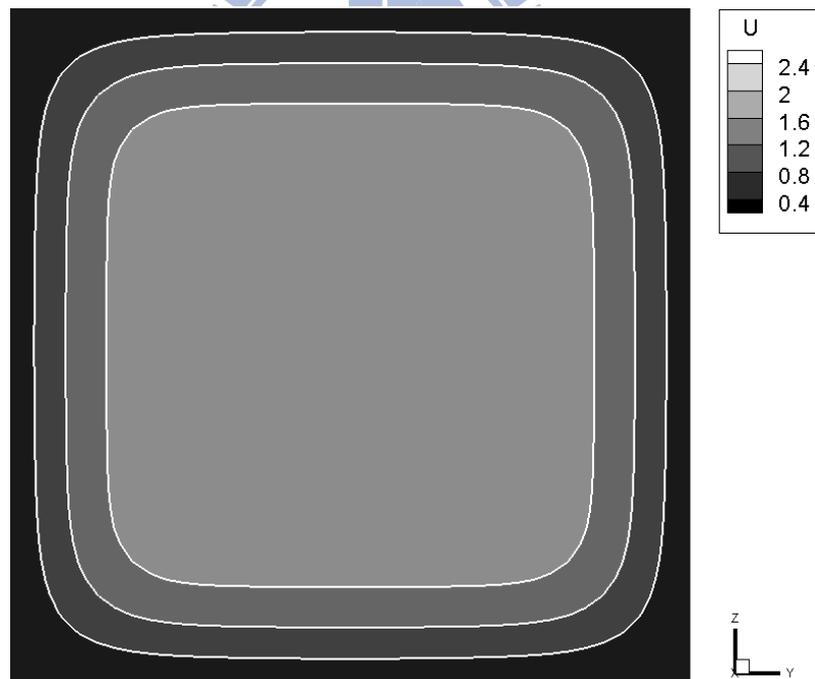


圖 4-9(b) C 點至 D 點速度場分布($Re=200$, $\phi = \frac{\pi}{6}$)

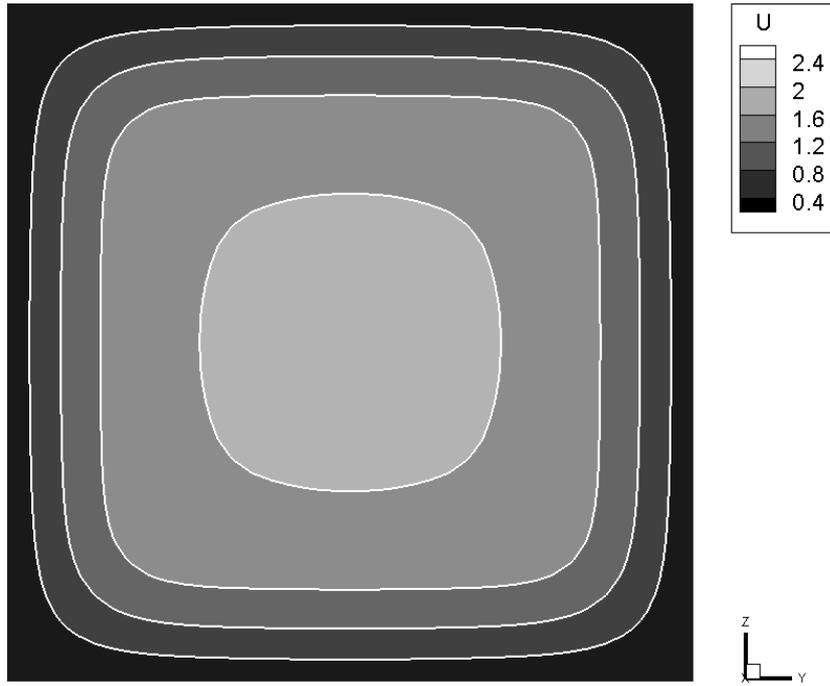


圖 4-9(c) E 點至 F 點速度場分布($Re=200$, $\phi = \frac{\pi}{6}$)

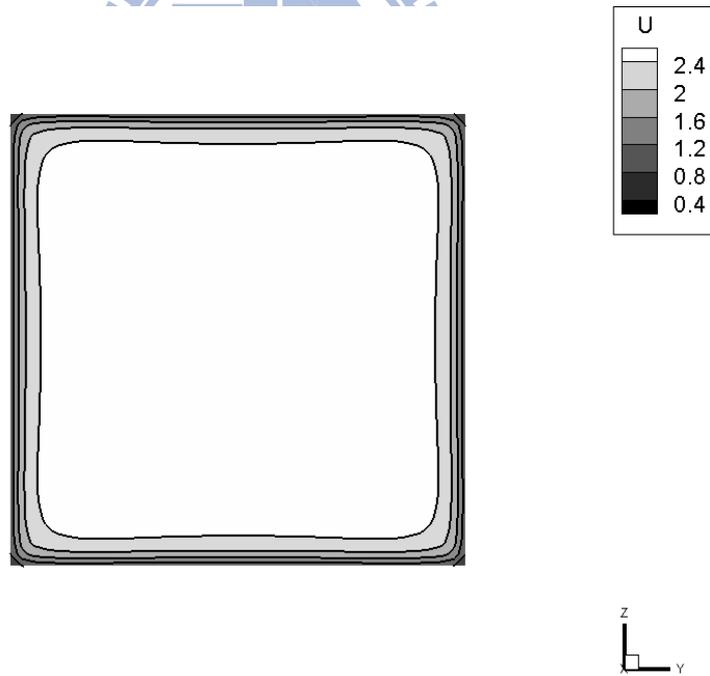


圖 4-9(d) G 點至 H 點速度場分布($Re=200$, $\phi = \frac{\pi}{6}$)

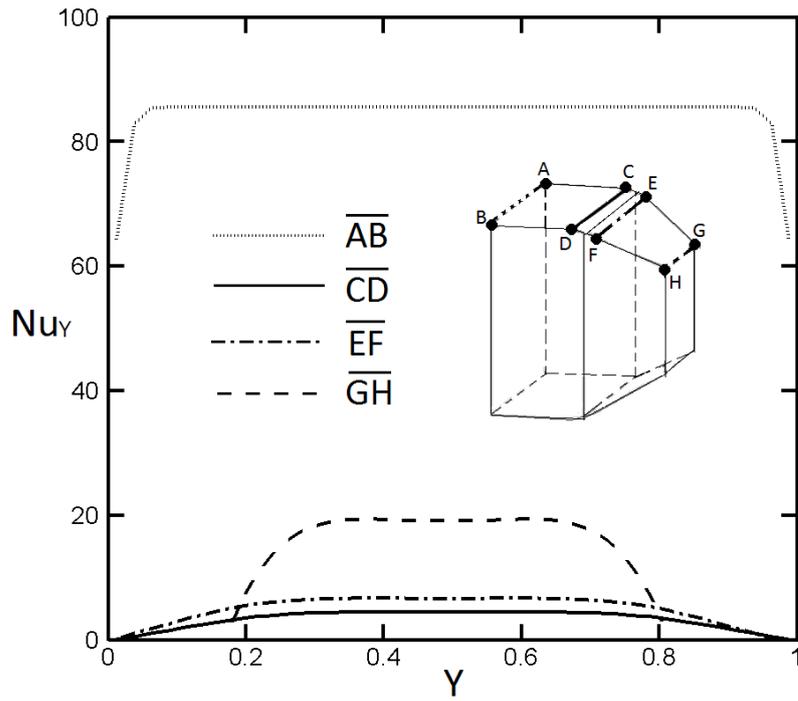


圖 4-10(a) 沿 Y 方向局部紐塞數比較圖($Re=200$, $\phi = \frac{\pi}{6}$)

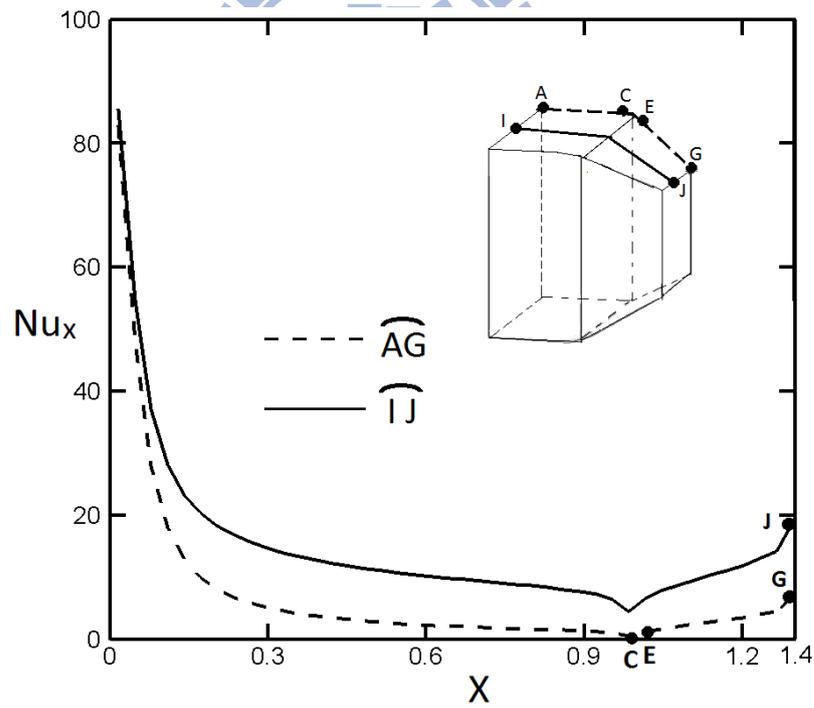


圖 4-10(b) 沿 X 方向局部紐塞數比較圖($Re=200$, $\phi = \frac{\pi}{6}$)

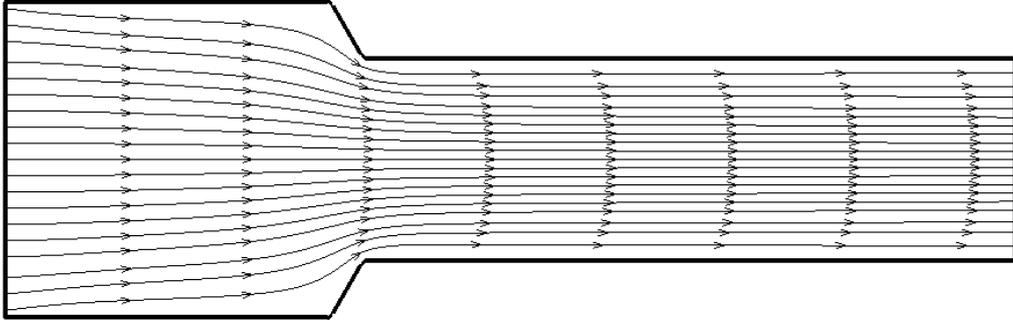


圖 4-11 (a) 中央 XY 截面流線圖($Re=200$, $\phi = \frac{\pi}{3}$)

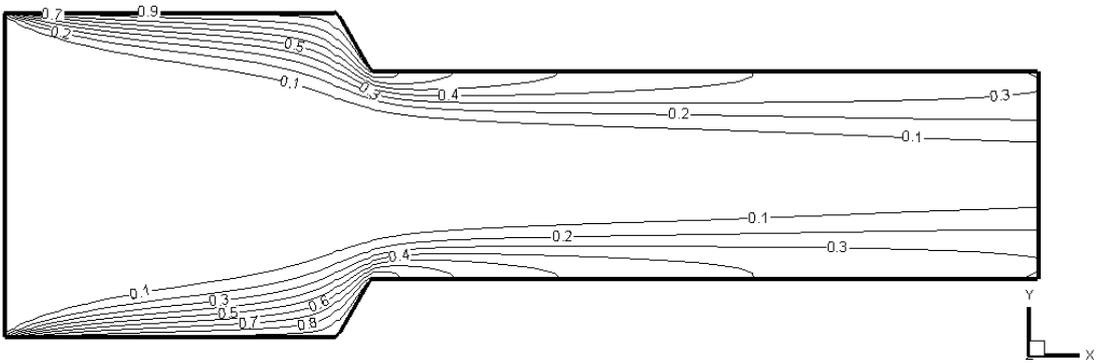


圖 4-11 (b) 中央 XY 截面等溫線圖($Re=200$, $\phi = \frac{\pi}{3}$)

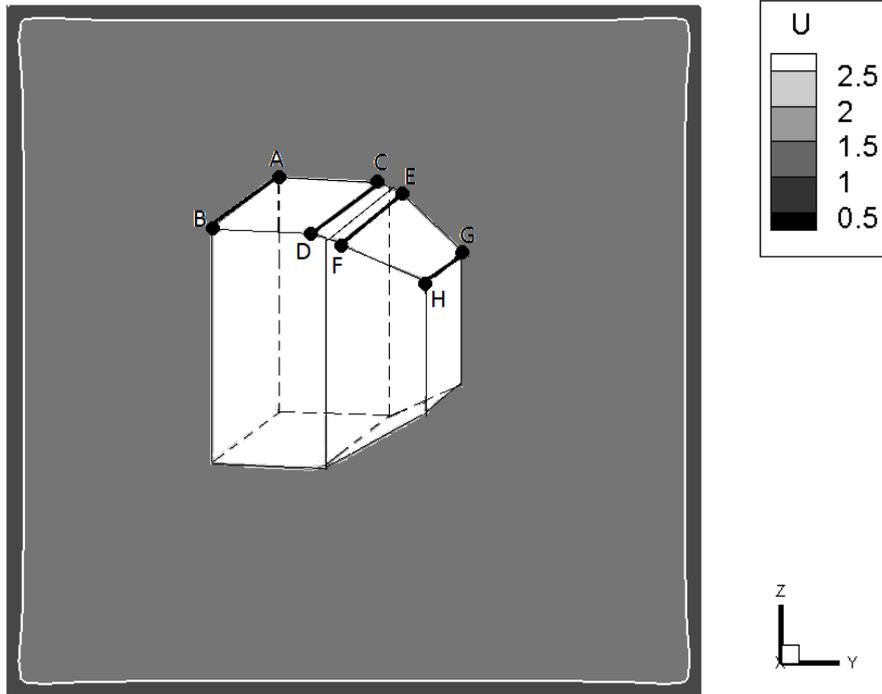


圖 4-12(a) A 點至 B 點速度場分布($Re=200$, $\phi = \frac{\pi}{3}$)

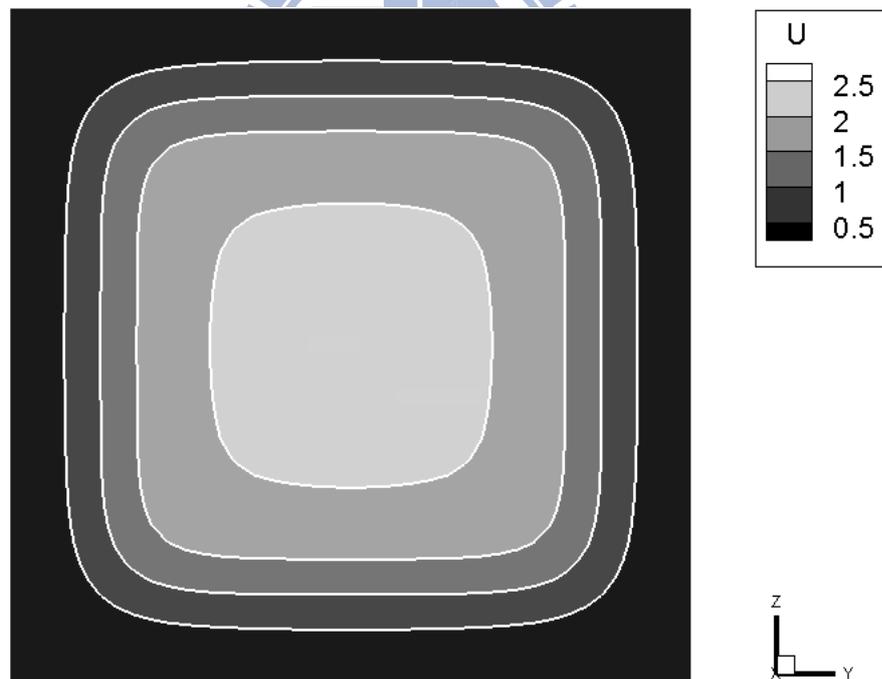


圖 4-12(b) C 點至 D 點速度場分布($Re=200$, $\phi = \frac{\pi}{3}$)

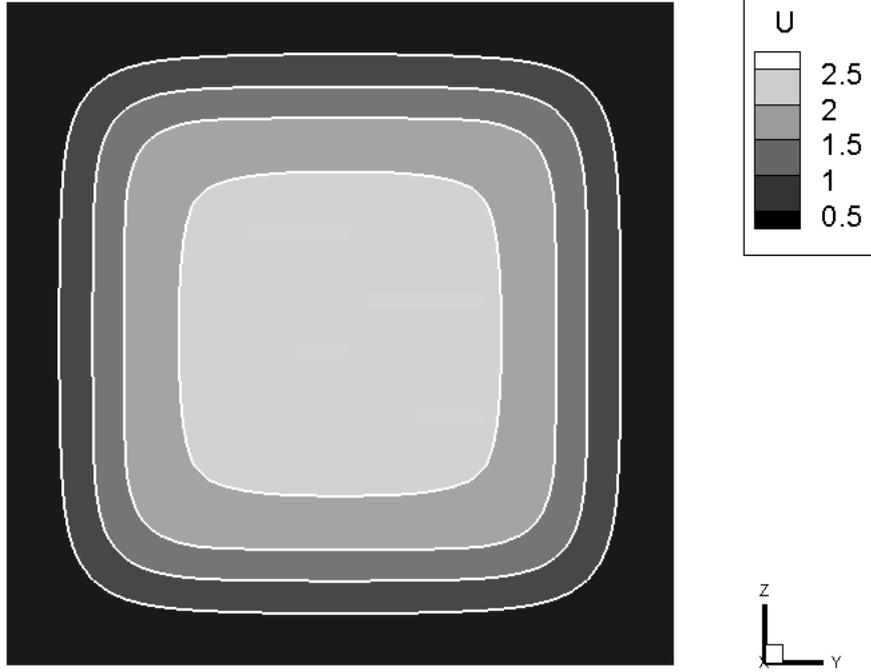


圖 4-12(c) E 點至 F 點速度場分布($Re=200$, $\phi = \frac{\pi}{3}$)

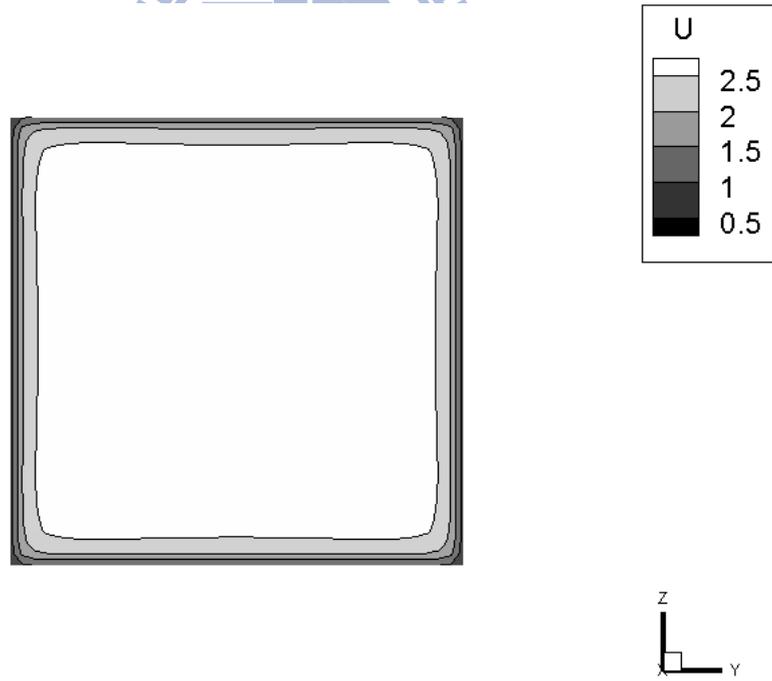


圖 4-12(d) G 點至 H 點速度場分布($Re=200$, $\phi = \frac{\pi}{3}$)

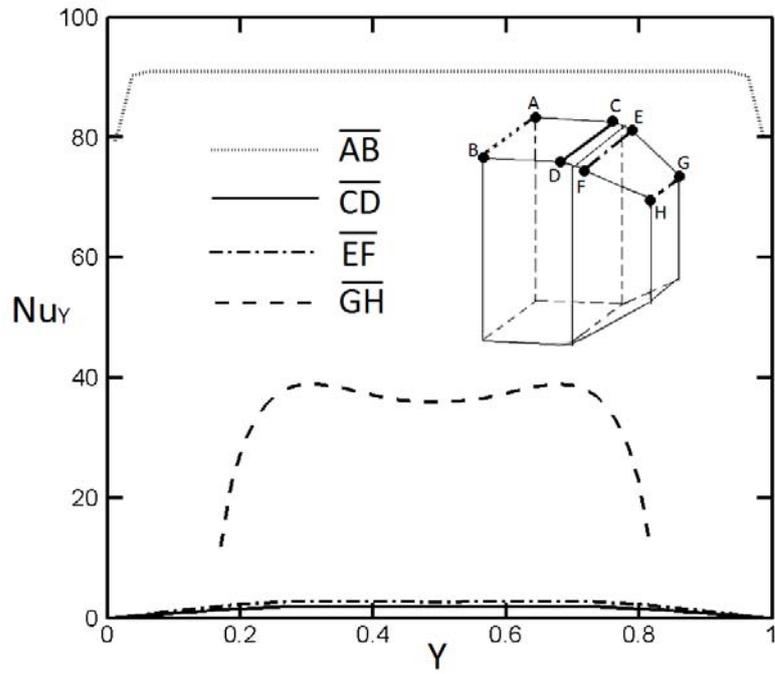


圖 4-13(a) 沿 Y 方向局部紐塞數比較圖($Re=200$, $\phi = \frac{\pi}{3}$)

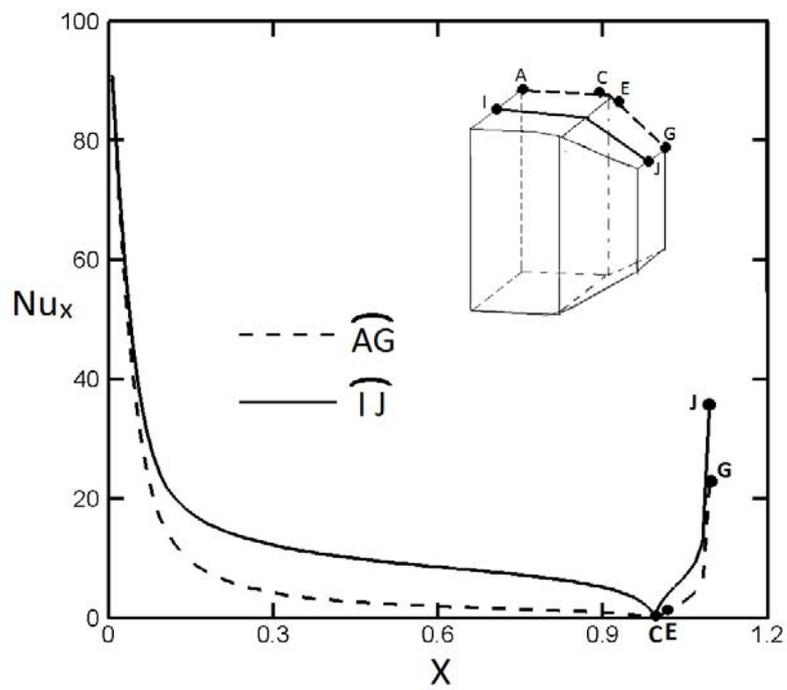


圖 4-13(b) 沿 X 方向局部紐塞數比較圖($Re=200$, $\phi = \frac{\pi}{3}$)

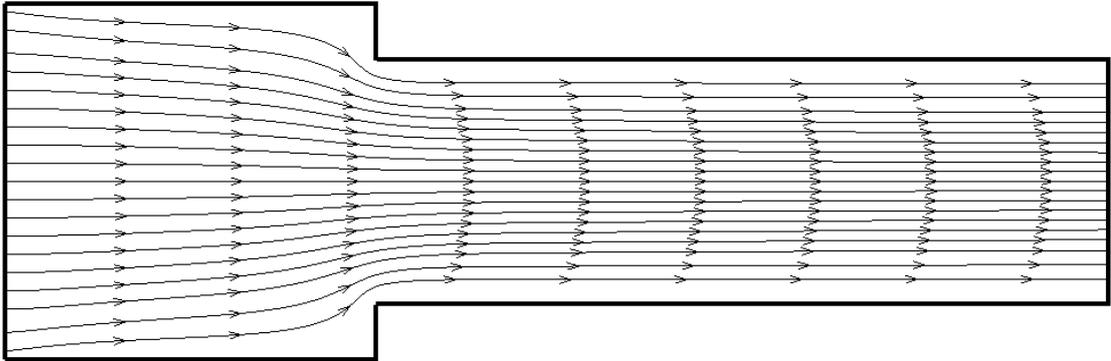


圖 4-14 (a) 中央 XY 截面流線圖($Re=200$, $\phi = \frac{\pi}{2}$)

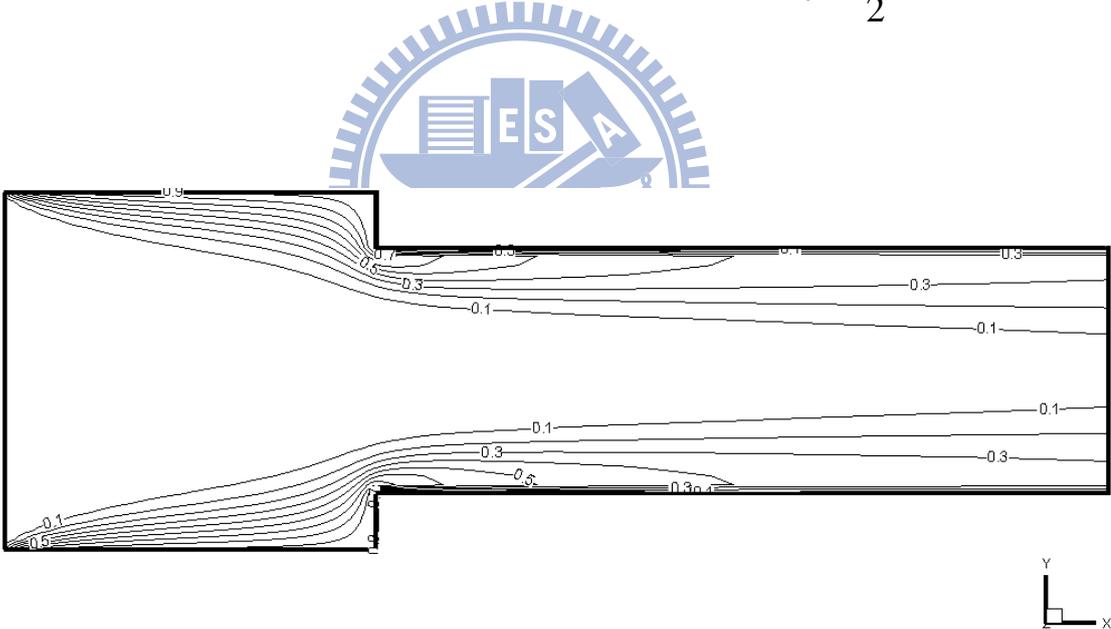


圖 4-14 (b) 中央 XY 截面等溫線圖($Re=200$, $\phi = \frac{\pi}{2}$)

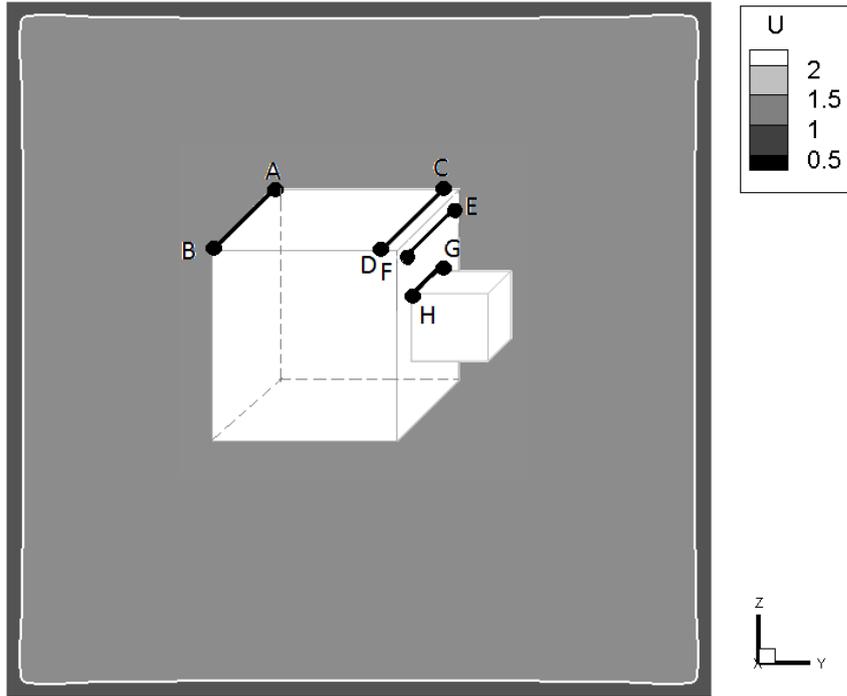


圖 4-15(a) A 點至 B 點速度場分布($Re=200$, $\phi = \frac{\pi}{2}$)

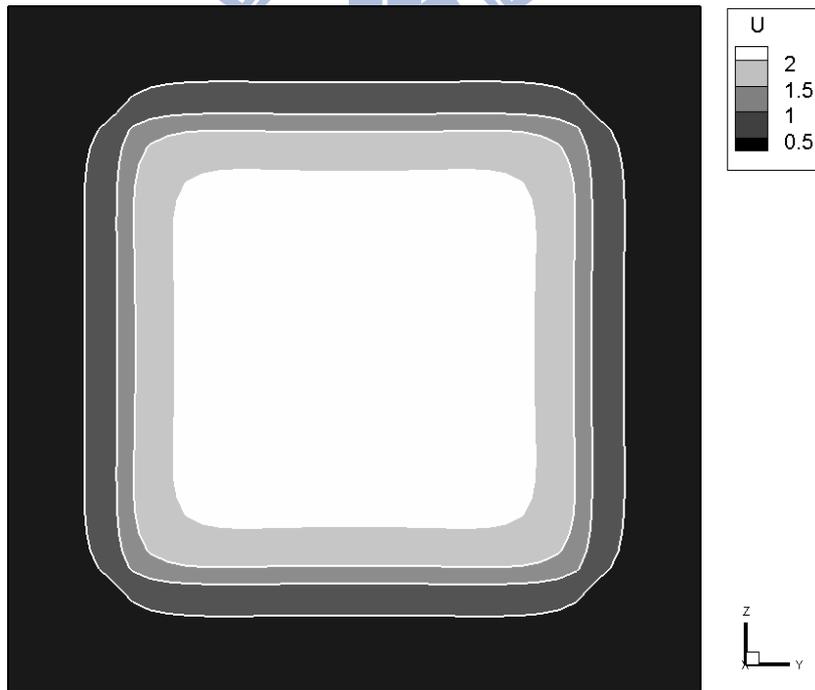


圖 4-15(b) C 點至 D 點速度場分布($Re=200$, $\phi = \frac{\pi}{2}$)

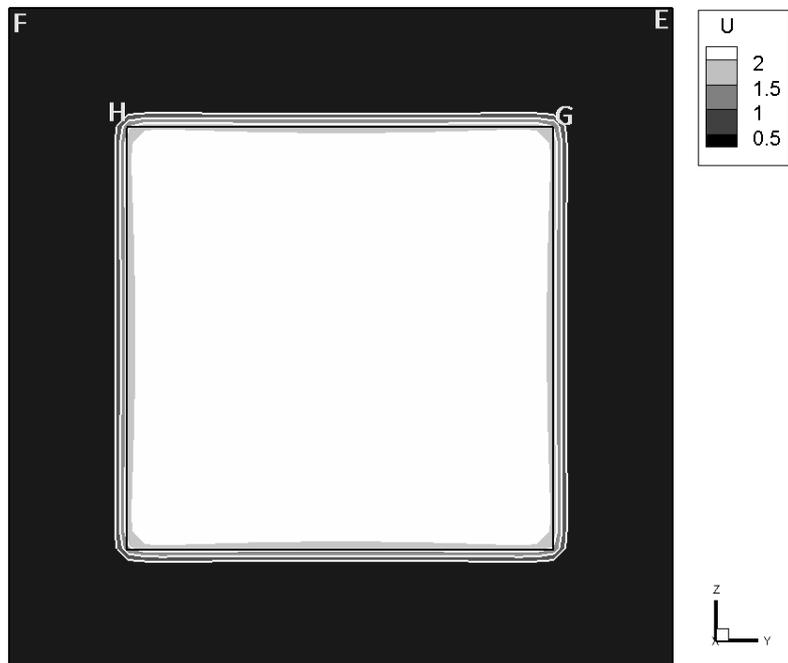


圖 4-15(c)E 至 F 點及 G 至 H 點速度場分布($Re=200$, $\phi = \frac{\pi}{2}$)

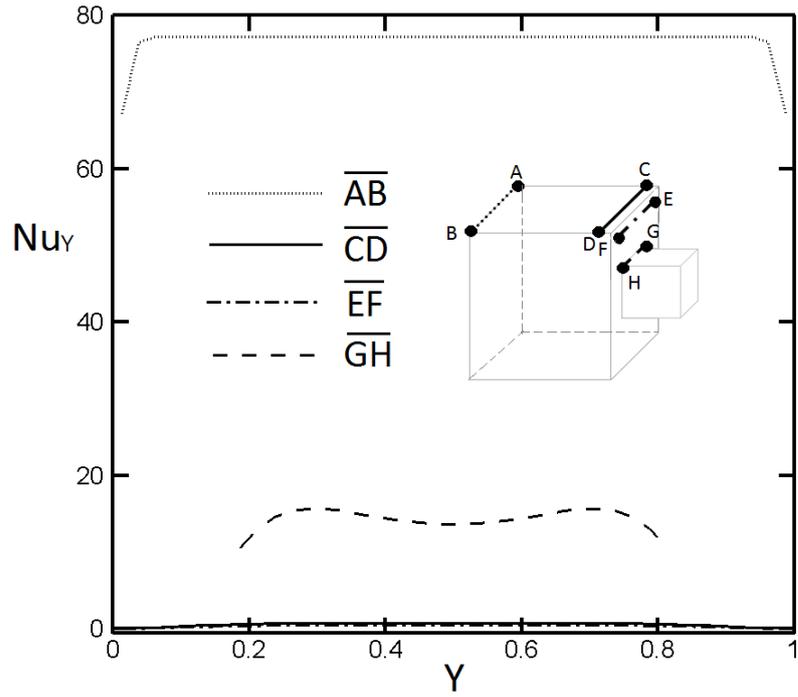


圖 4-16(a) 沿 Y 方向局部紐塞數比較圖($Re=200$, $\phi = \frac{\pi}{2}$)

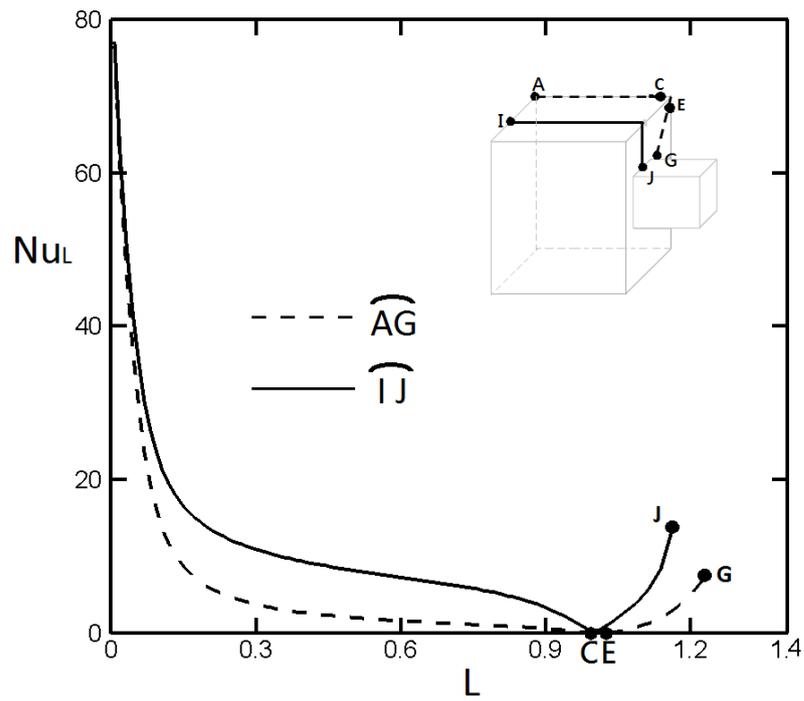


圖 4-16(b) 沿 X 方向局部紐塞數比較圖($Re=200$, $\phi = \frac{\pi}{2}$)

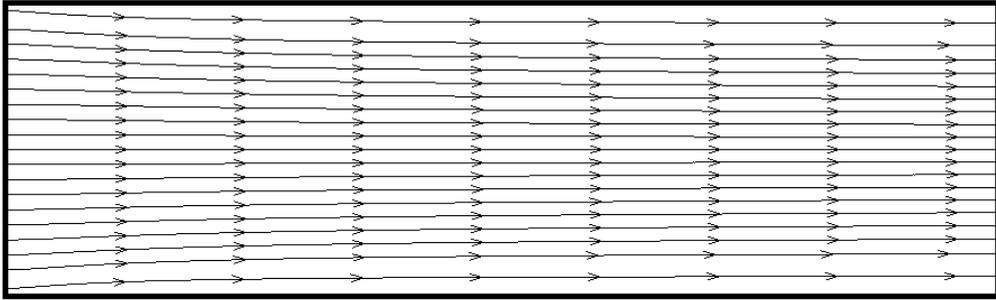


圖 4-17 (a) 中央 XY 截面流線圖($Re=400$, $\phi = 0$)

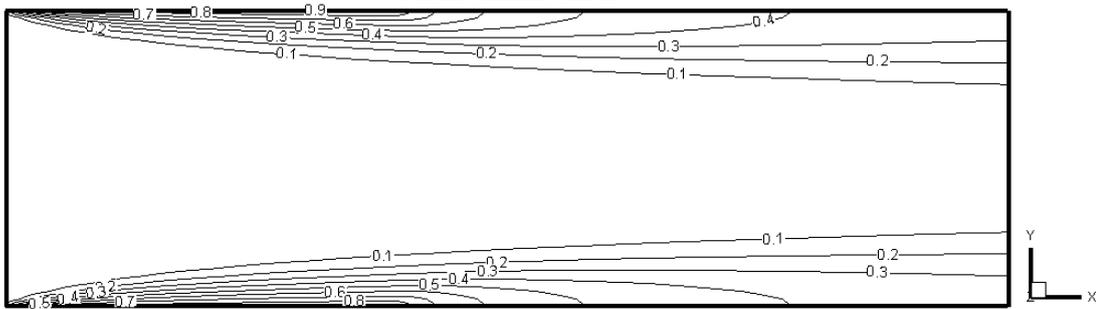


圖 4-17 (b) 中央 XY 截面等溫線圖($Re=400$, $\phi = 0$)

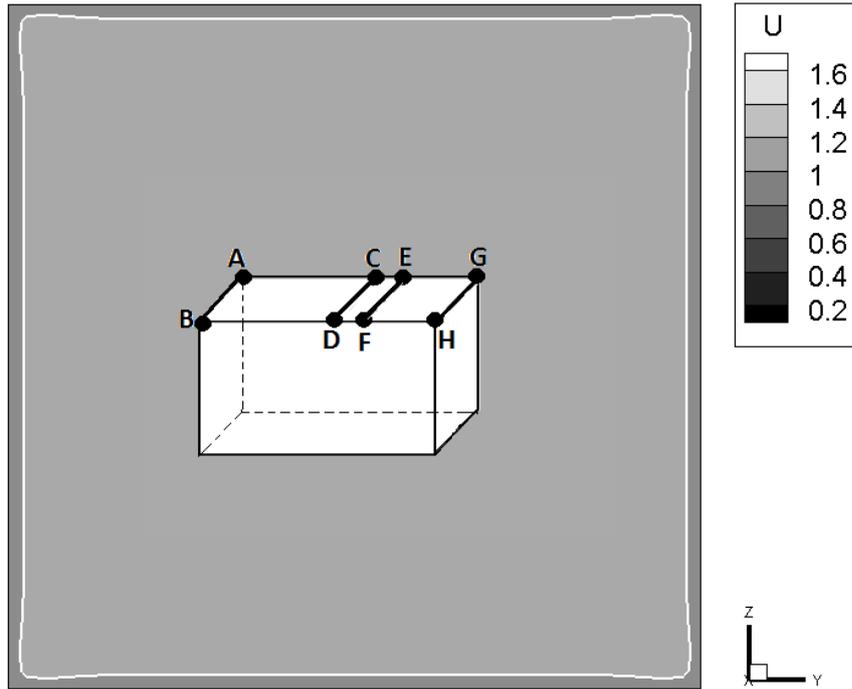


圖 4-18(a) A 點至 B 點速度場分布($Re=400$, $\phi = 0$)

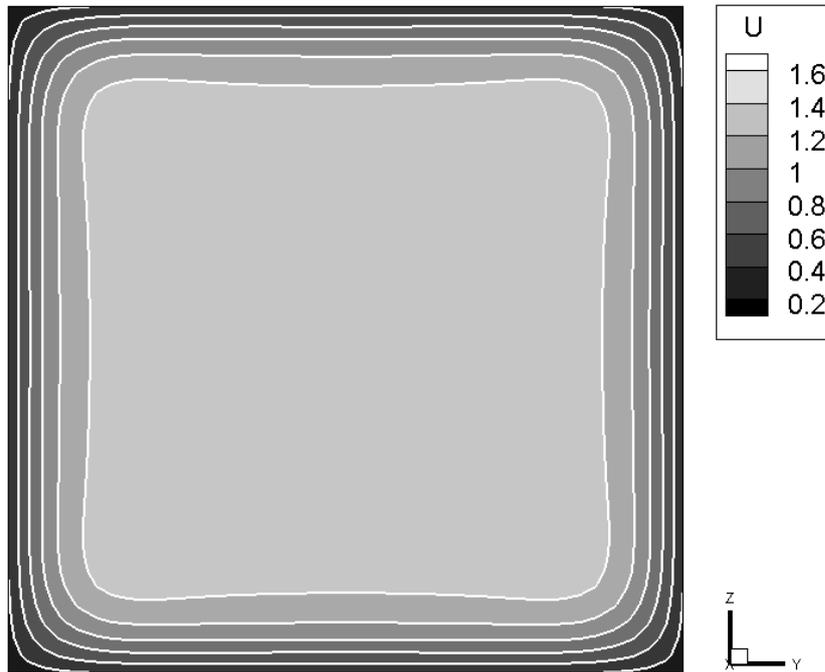


圖 4-18(a) C 點至 D 點速度場分布($Re=400$, $\phi = 0$)

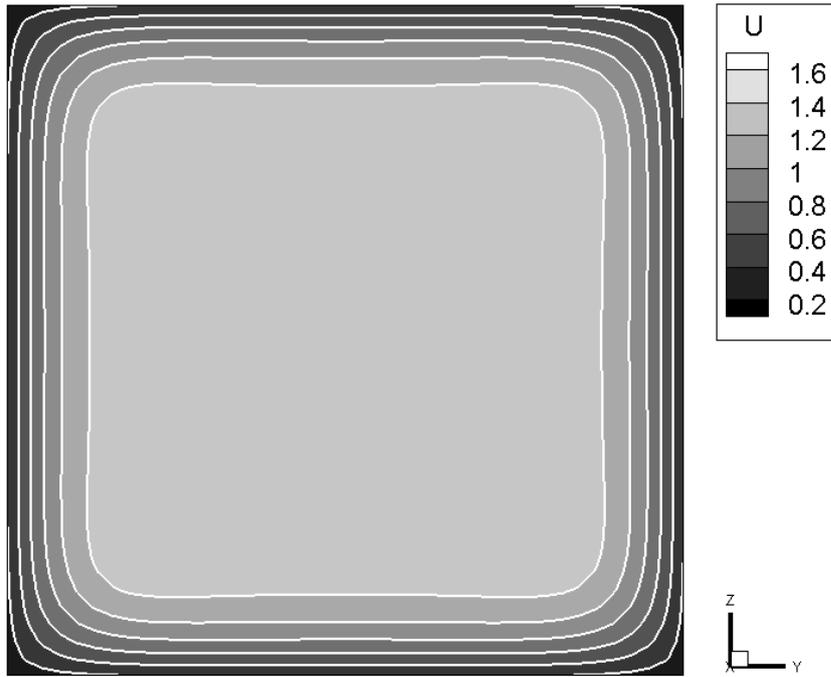


圖 4-18(c) E 點至 F 點速度場分布($Re=400$, $\phi = 0$)

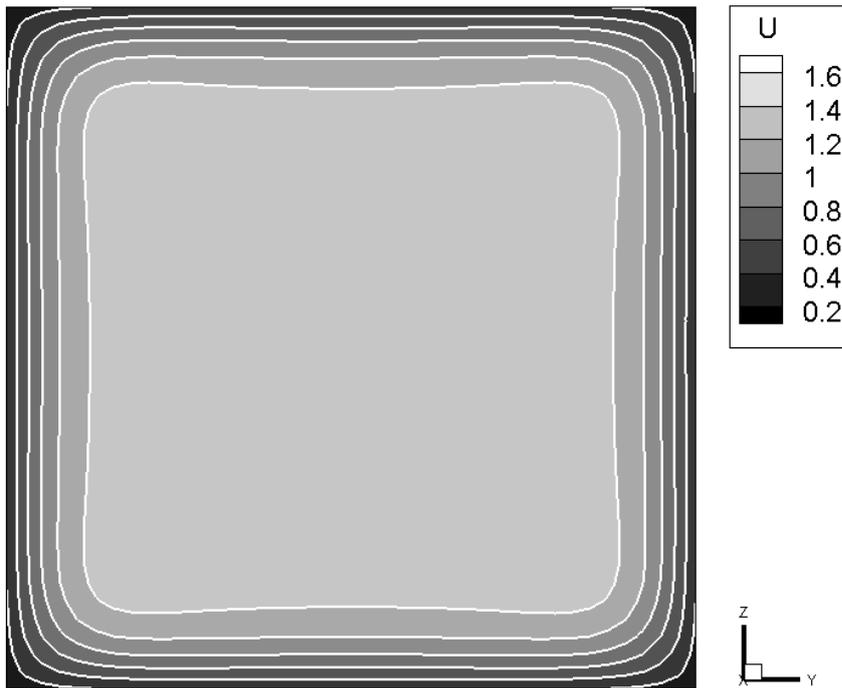


圖 4-18(d) G 點至 H 點速度場分布($Re=400$, $\phi = 0$)

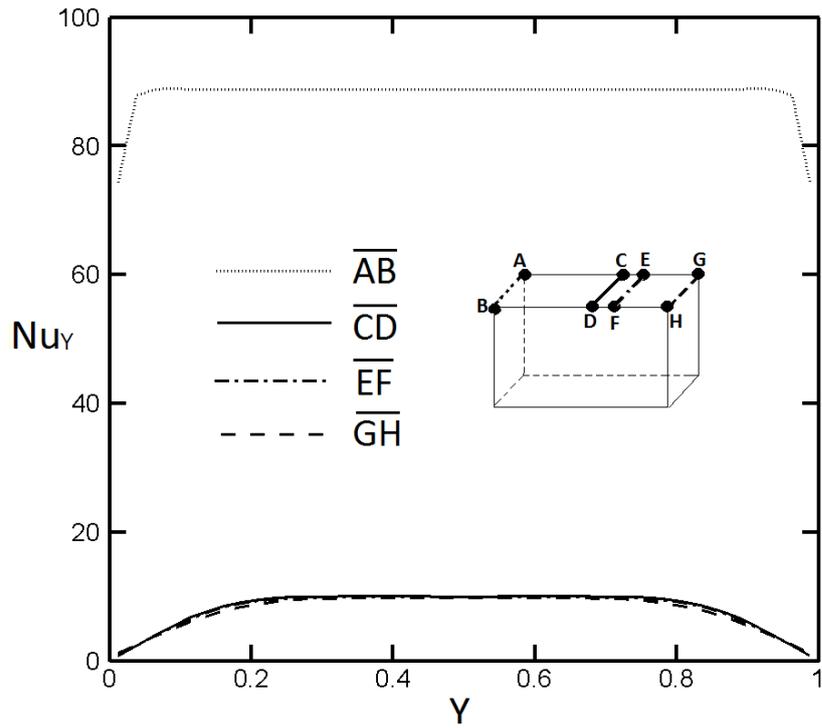


圖 4-19(a) 沿 Y 方向局部紐塞數比較圖($Re=400, \phi=0$)

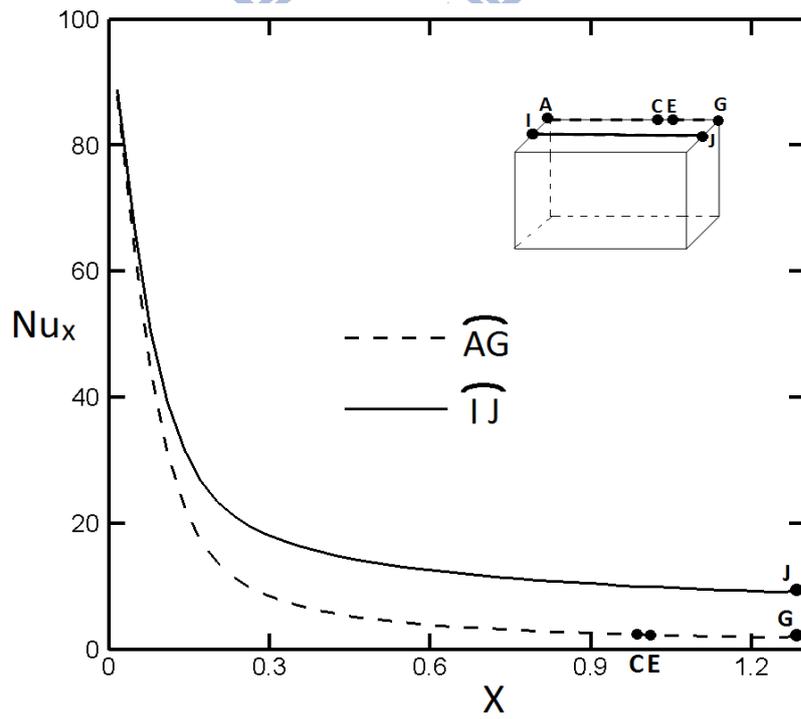


圖 4-19(b) 沿 X 方向局部紐塞數比較圖($Re=400, \phi=0$)

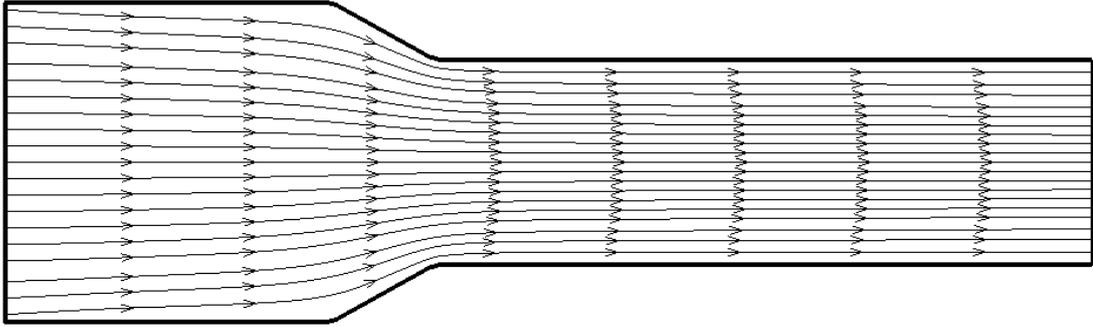


圖 4-20 (a) 中央 XY 截面流線圖($Re=400$, $\phi = \frac{\pi}{6}$)

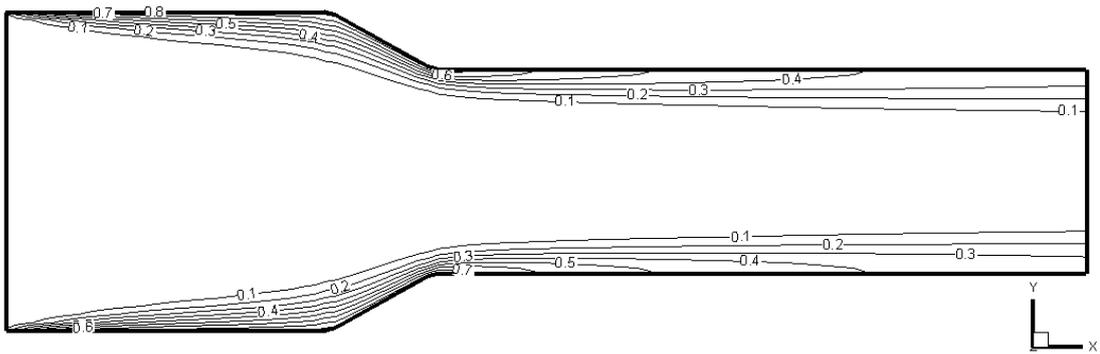


圖 4-20 (b) 中央 XY 截面等溫線圖($Re=400$, $\phi = \frac{\pi}{6}$)

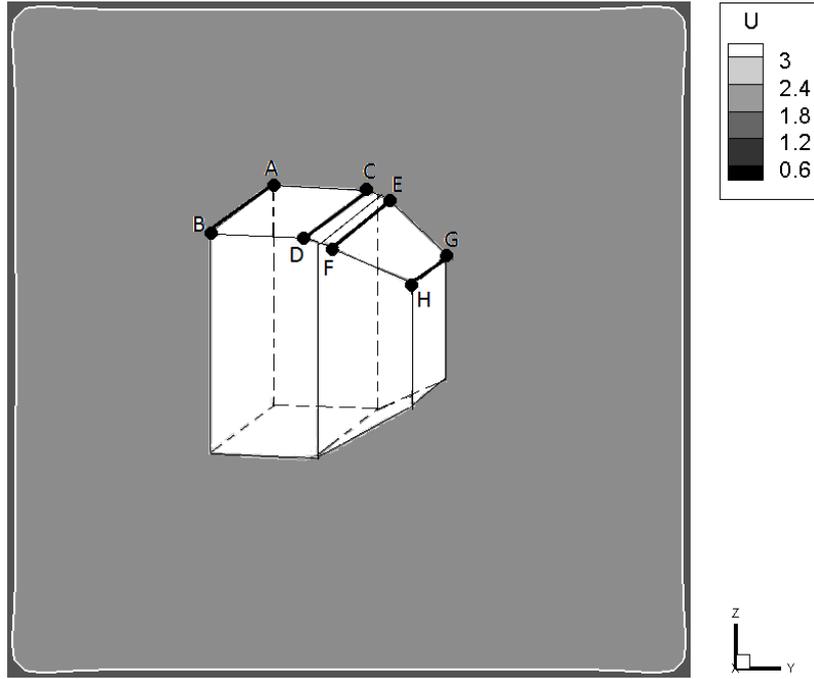


圖 4-21(a) A 點至 B 點速度場分布($Re=400$, $\phi = \frac{\pi}{6}$)

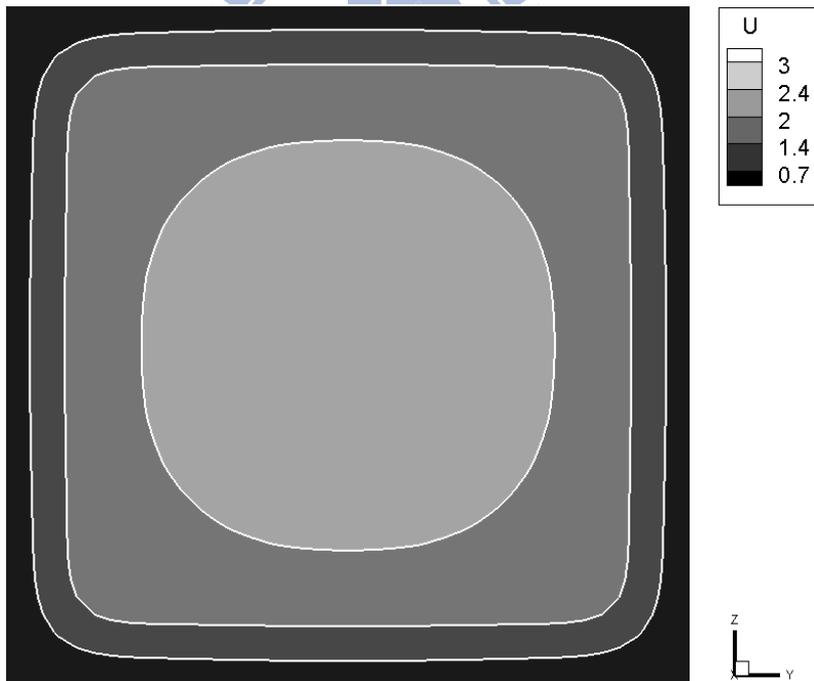


圖 4-21(b) C 點至 D 點速度場分布($Re=400$, $\phi = \frac{\pi}{6}$)

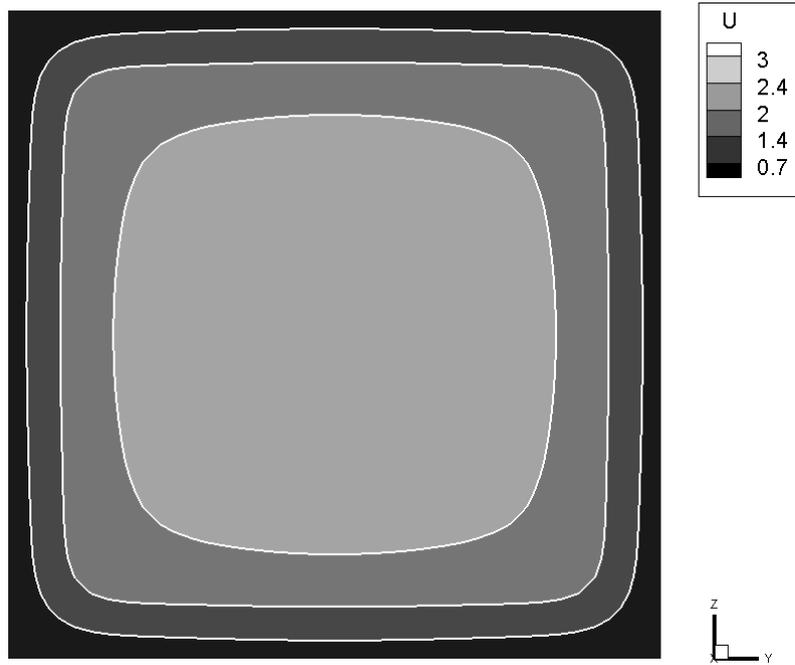


圖 4-21(c) E 點至 F 點速度場分布($Re=400$, $\phi = \frac{\pi}{6}$)

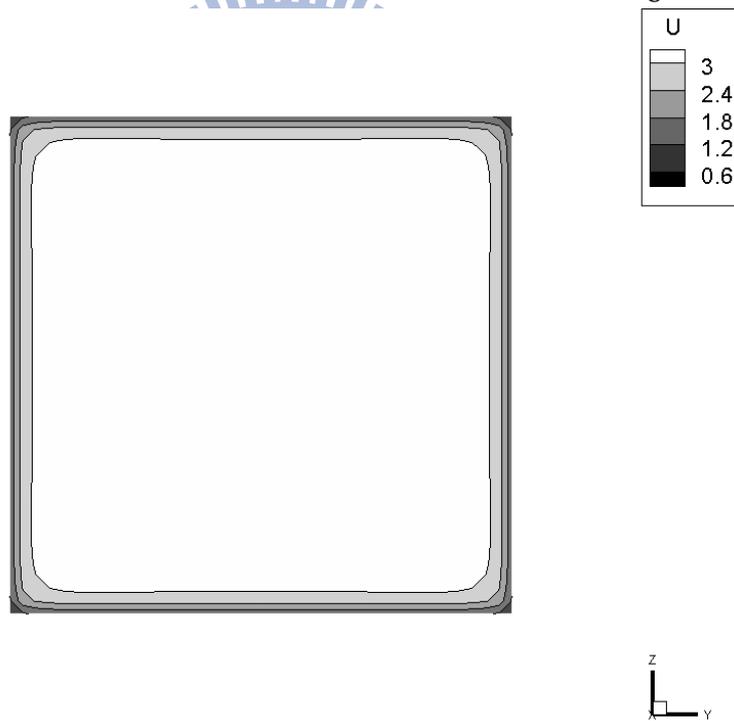


圖 4-21(d) G 點至 H 點速度場分布($Re=400$, $\phi = \frac{\pi}{6}$)

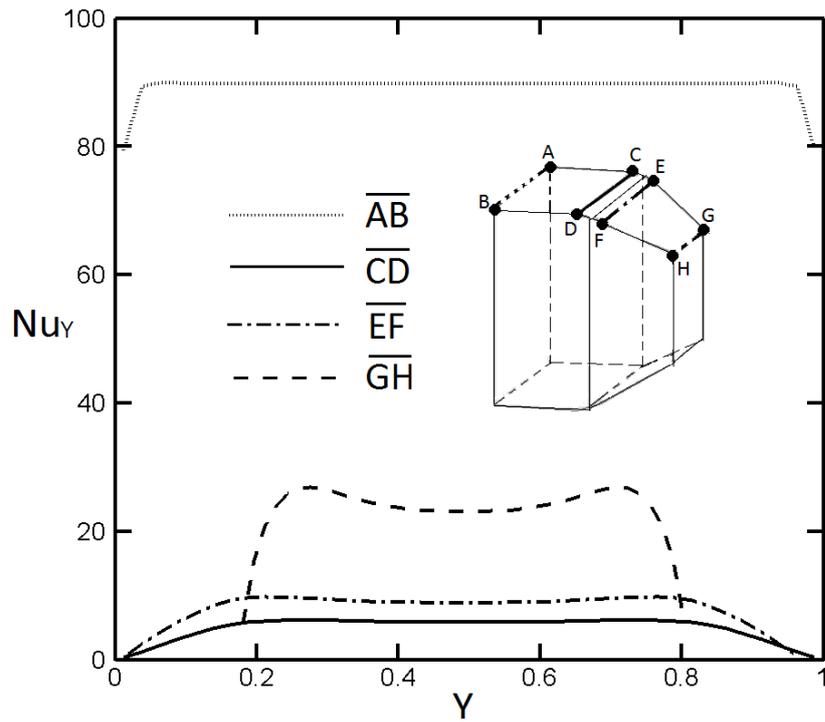


圖 4-22(a) 沿 Y 方向局部紐塞數比較圖($Re=400$, $\phi = \frac{\pi}{6}$)

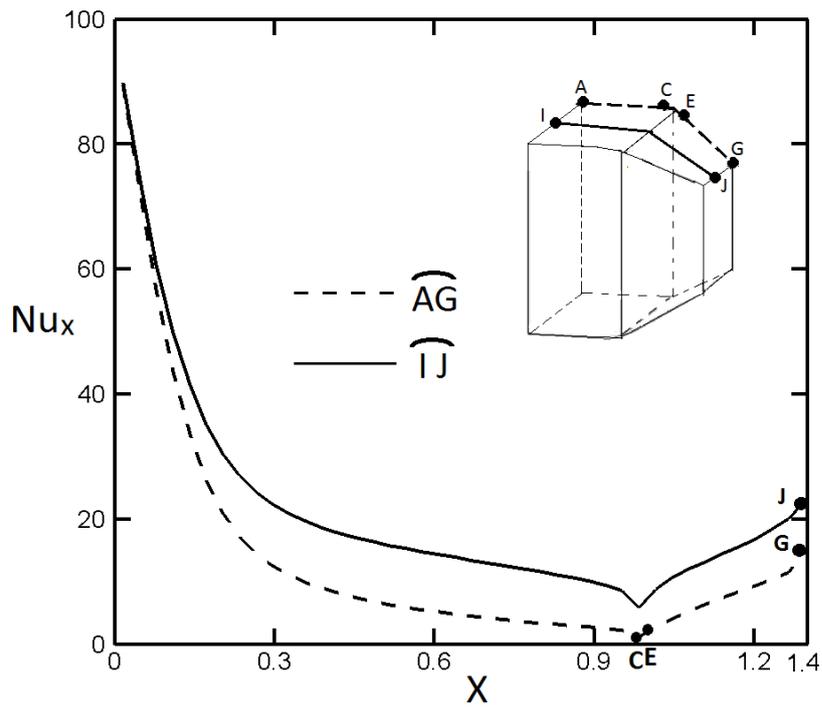


圖 4-22(b) 沿 X 方向局部紐塞數比較圖($Re=400$, $\phi = \frac{\pi}{6}$)

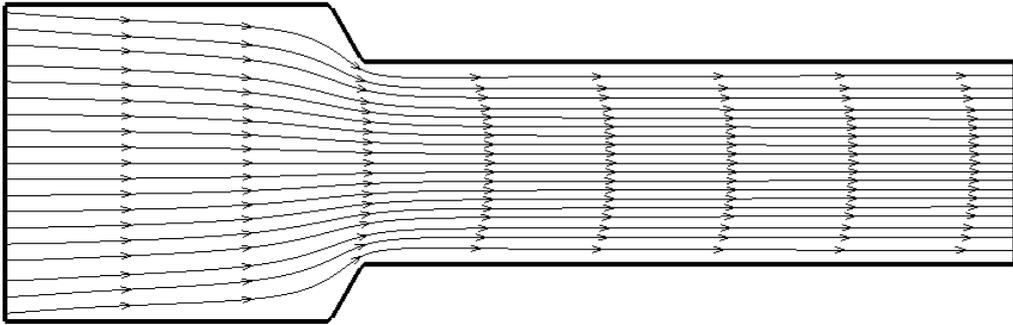


圖 4-23 (a) 中央 XY 截面流線圖($Re=400$, $\phi = \frac{\pi}{3}$)

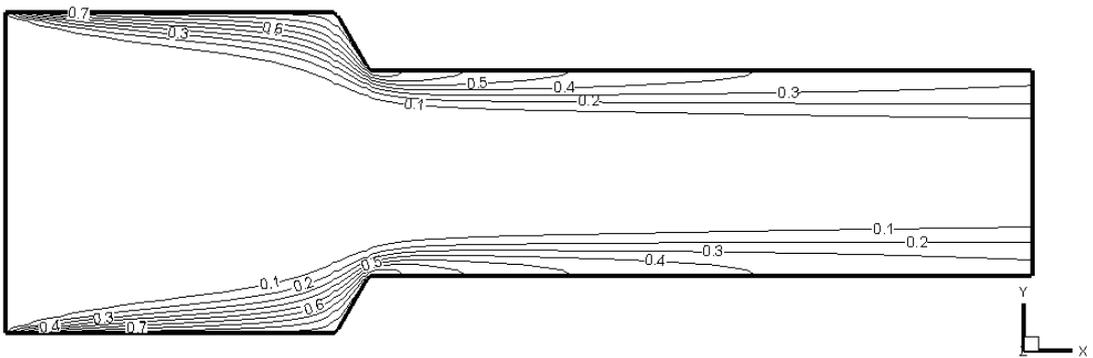


圖 4-23 (b) 中央 XY 截面等溫線圖($Re=400$, $\phi = \frac{\pi}{3}$)

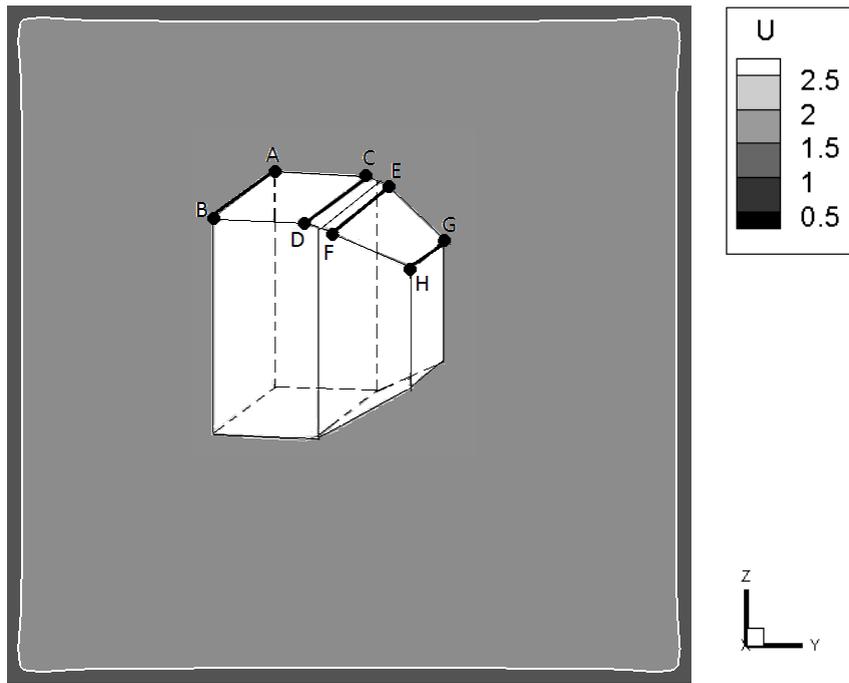


圖 4-24(a) A 點至 B 點速度場分布($Re=400$, $\phi = \frac{\pi}{3}$)

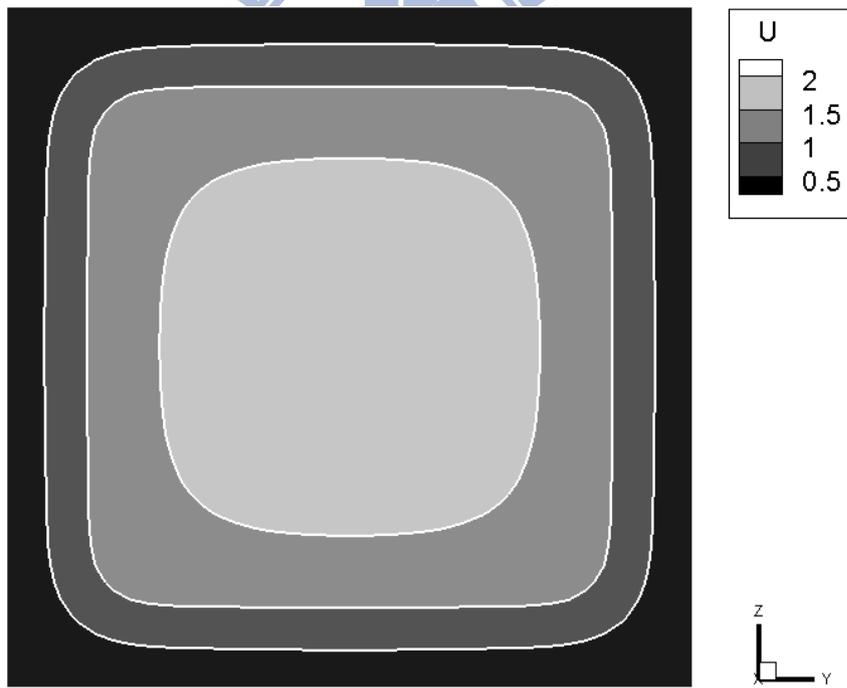


圖 4-24(b) C 點至 D 點速度場分布($Re=400$, $\phi = \frac{\pi}{3}$)

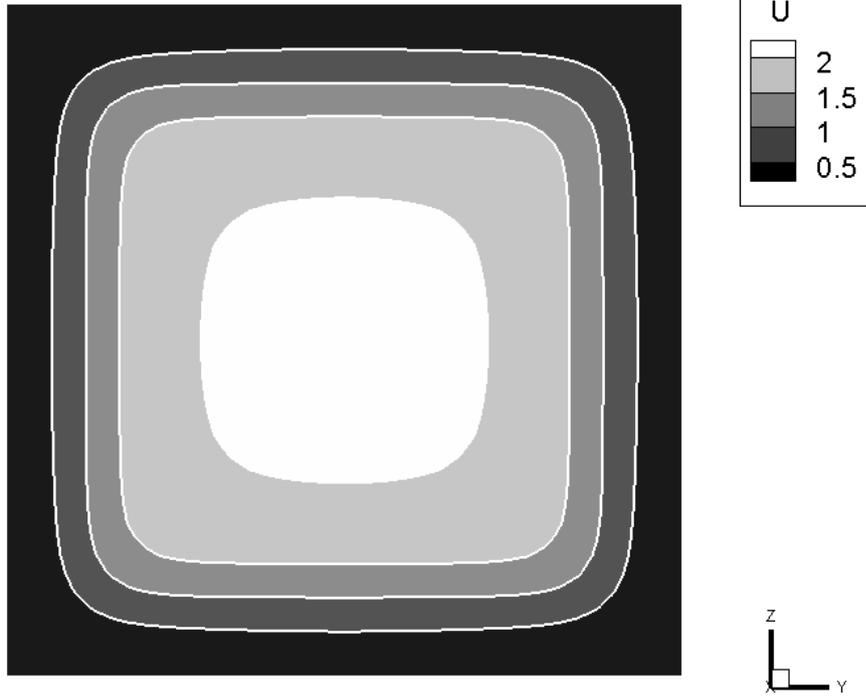


圖 4-24(c) E 點至 F 點速度場分布($Re=400$, $\phi = \frac{\pi}{3}$)

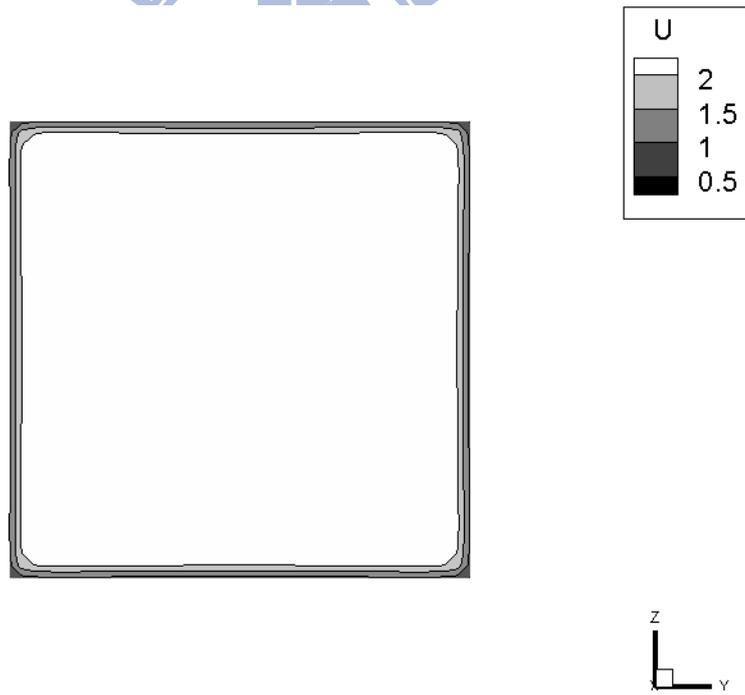


圖 4-24(d) G 點至 H 點速度場分布($Re=400$, $\phi = \frac{\pi}{3}$)

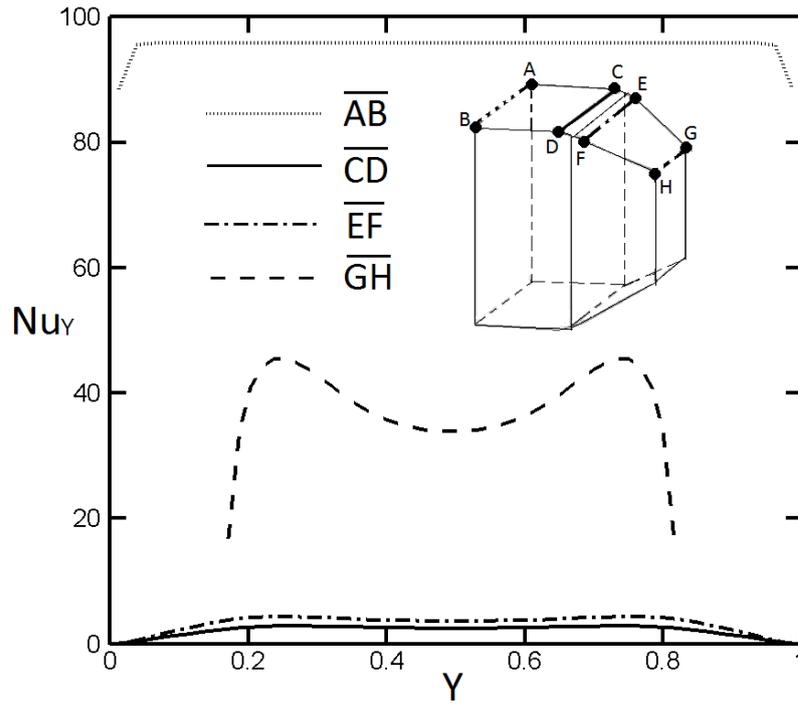


圖 4-25(a) 沿 Y 方向局部紐塞數比較圖($Re=400$, $\phi = \frac{\pi}{3}$)

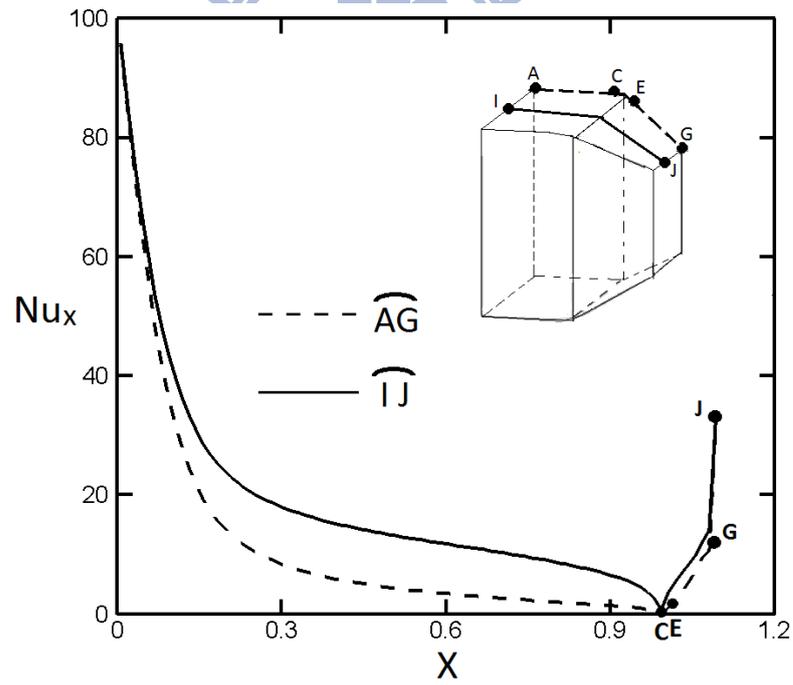


圖 4-25(b) 沿 X 方向局部紐塞數比較圖($Re=400$, $\phi = \frac{\pi}{3}$)

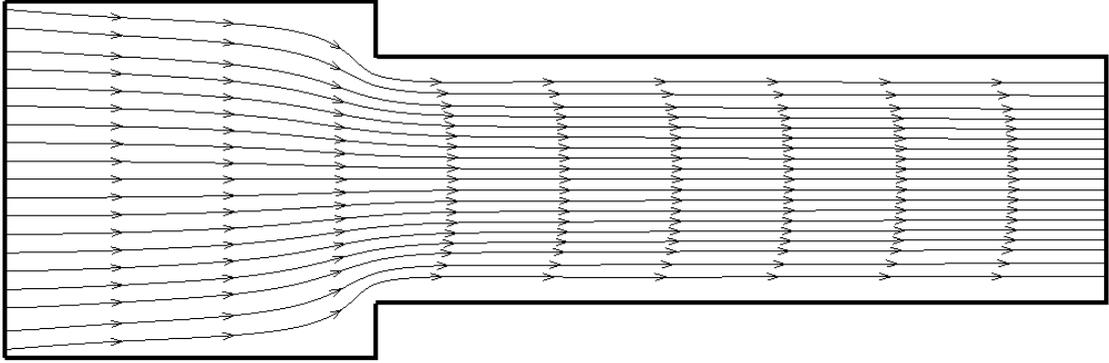


圖 4-26 (a) 中央 XY 截面流線圖($Re=400$, $\phi = \frac{\pi}{2}$)

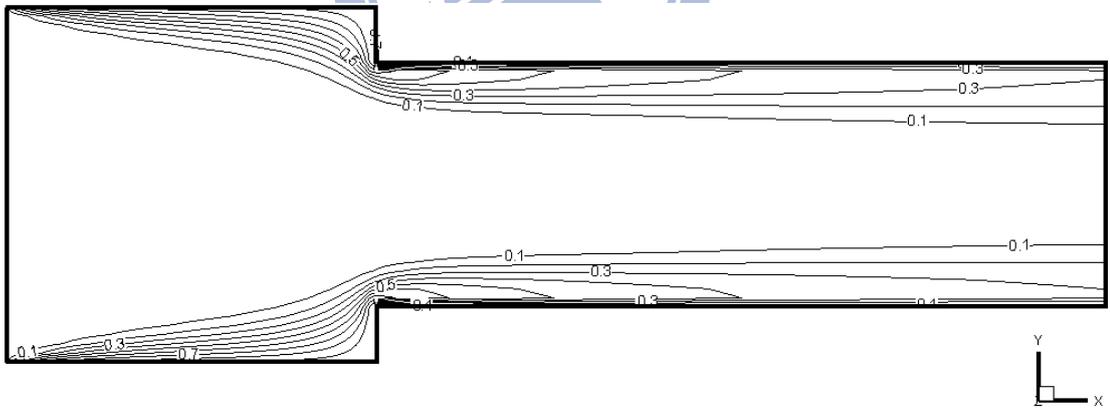


圖 4-26 (b) 中央 XY 截面等溫線圖($Re=400$, $\phi = \frac{\pi}{2}$)

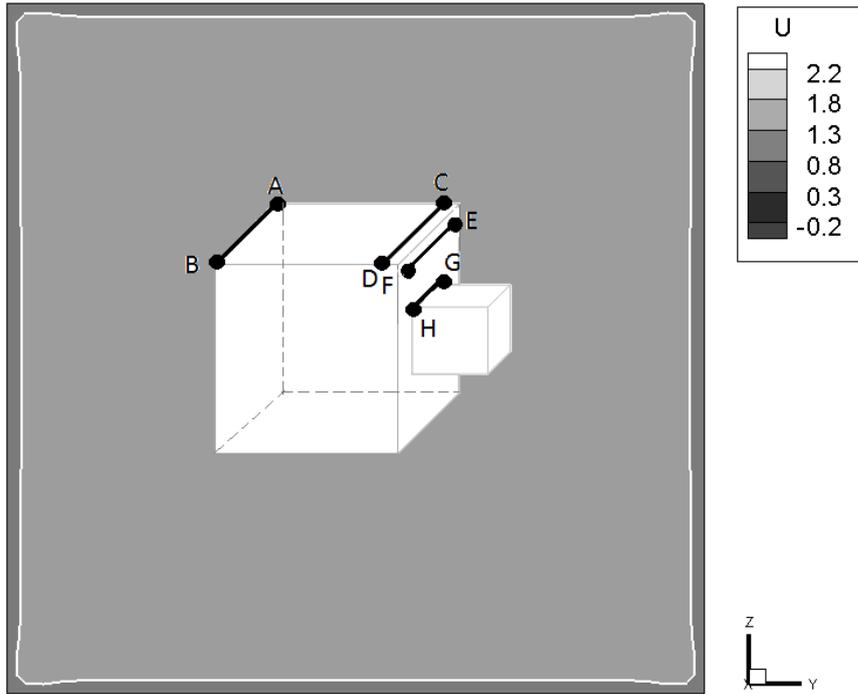


圖 4-27(a) A 點至 B 點速度場分布($Re=400$, $\phi = \frac{\pi}{2}$)

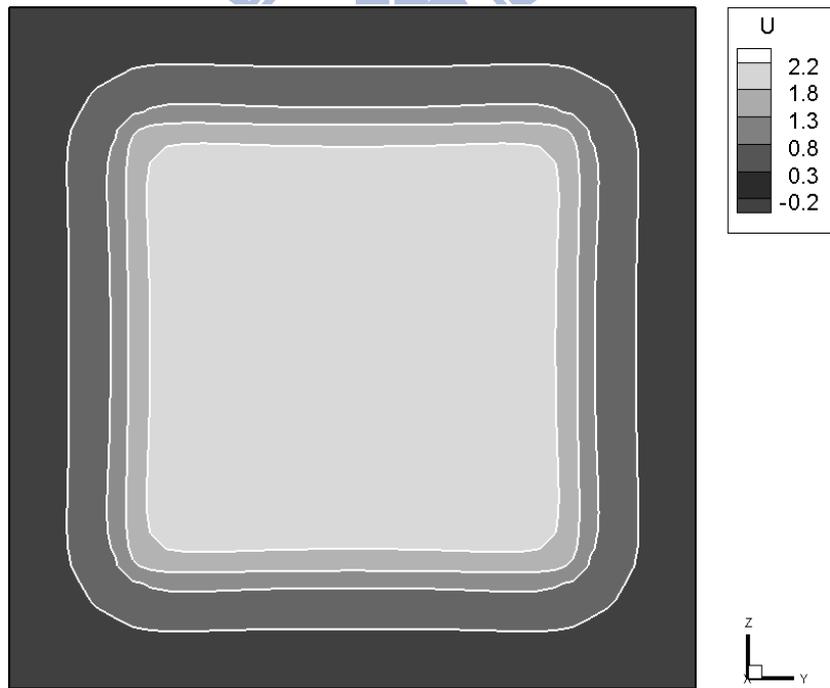


圖 4-27(b) C 點至 D 點速度場分布($Re=400$, $\phi = \frac{\pi}{2}$)

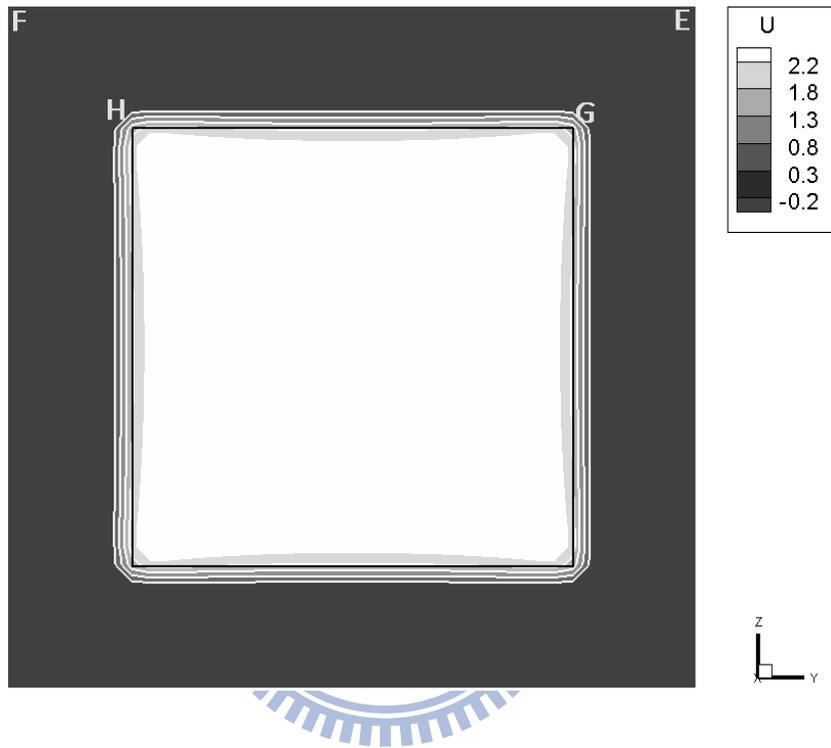


圖 4-27(c) E 至 F 點及 G 至 H 點速度場分布 ($Re=400$, $\phi = \frac{\pi}{2}$)

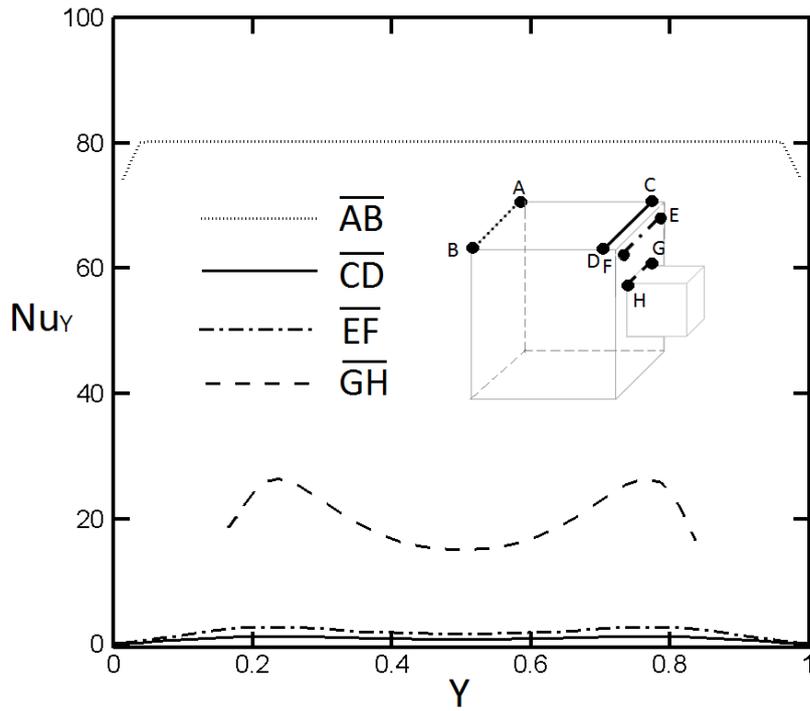


圖 4-28(a) 沿 Y 方向局部紐塞數比較圖($Re=400$, $\phi = \frac{\pi}{2}$)

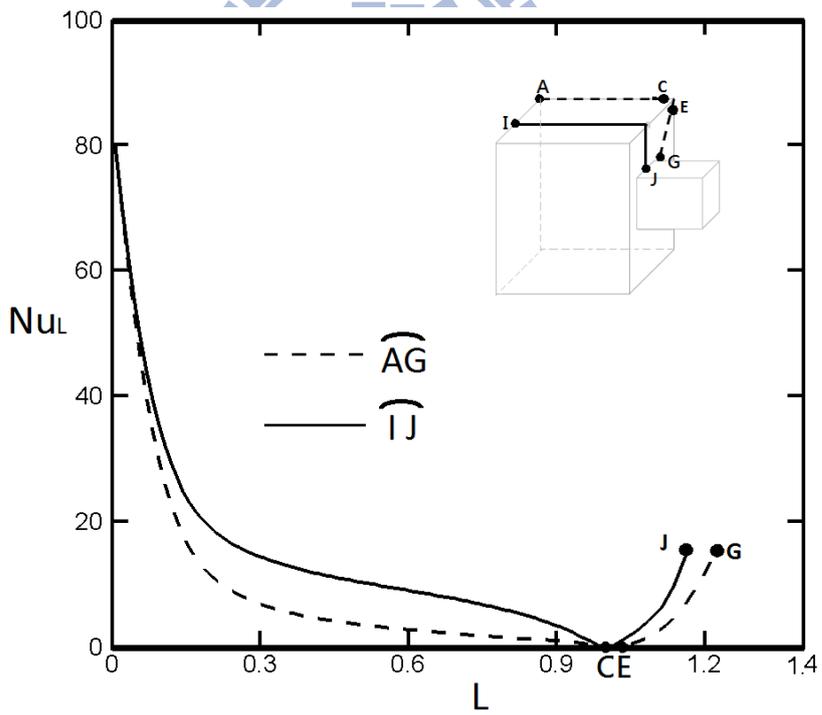


圖 4-28(b) 沿 X 方向局部紐塞數比較圖($Re=400$, $\phi = \frac{\pi}{2}$)

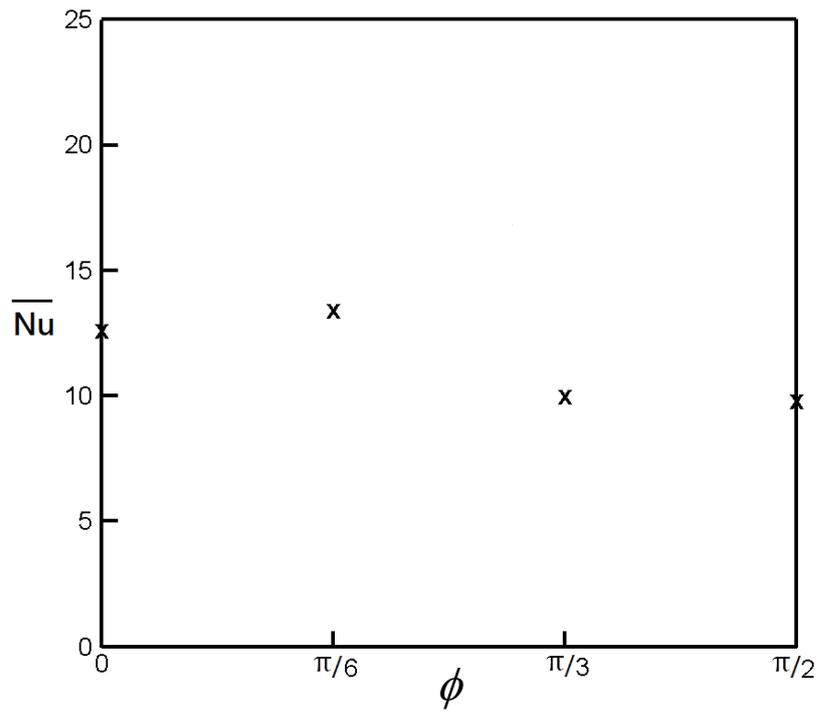


圖 4-29(a) Re=200 時不同角度平均紐塞數比較圖

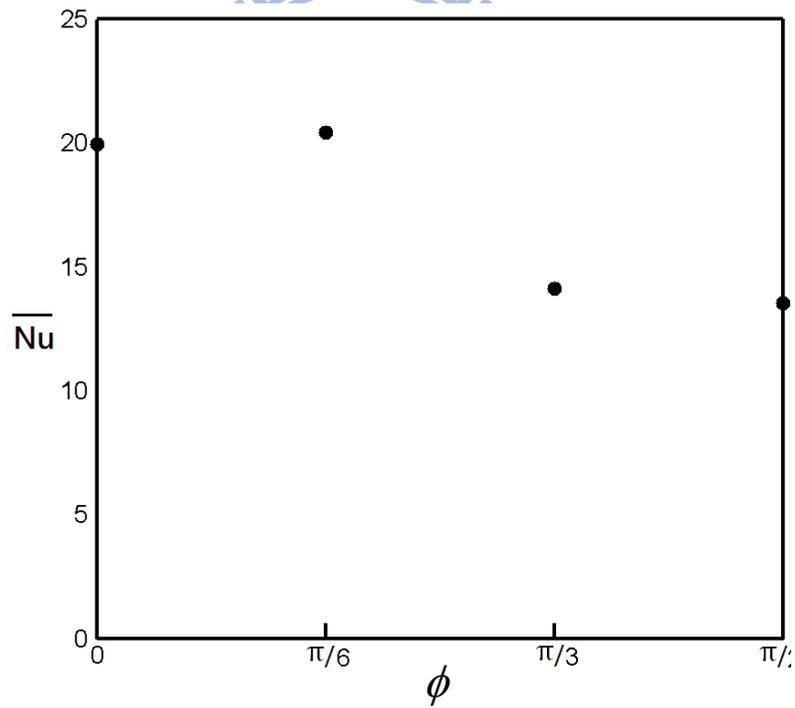


圖 4-29(b) Re=400 時不同角度平均紐塞數比較圖

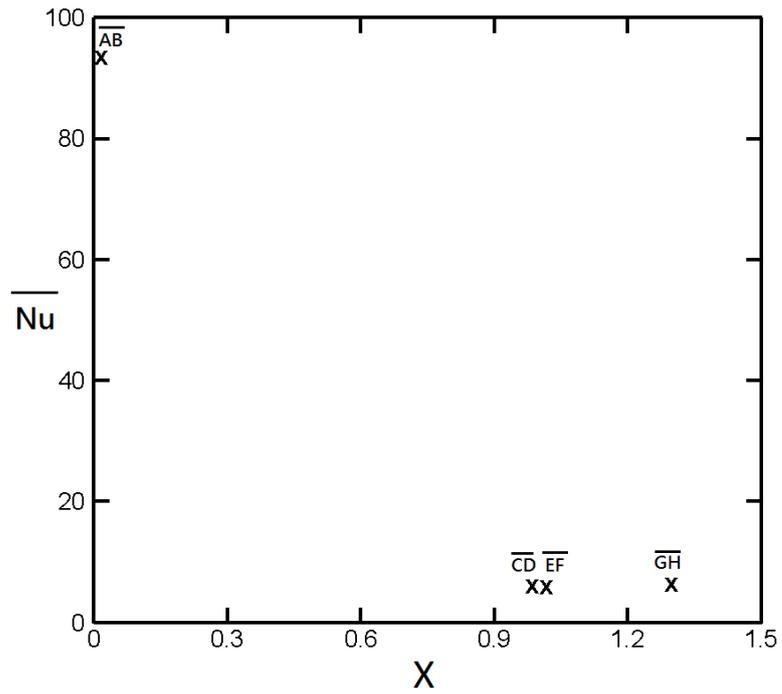


圖 4-30(a) 不同位置平均紐塞數比較圖($Re=200$, $\phi = 0$)

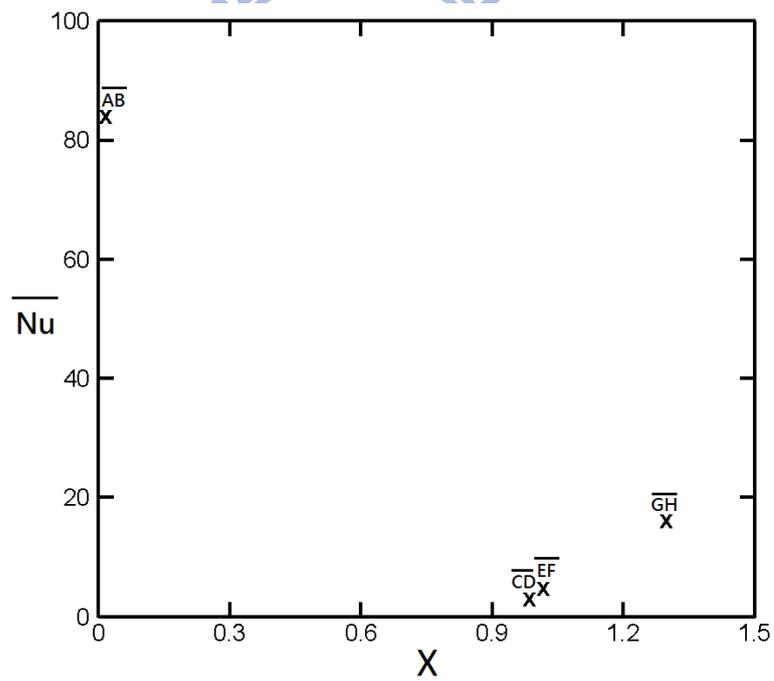


圖 4-30(b) 不同位置平均紐塞數比較圖($Re=200$, $\phi = \frac{\pi}{6}$)

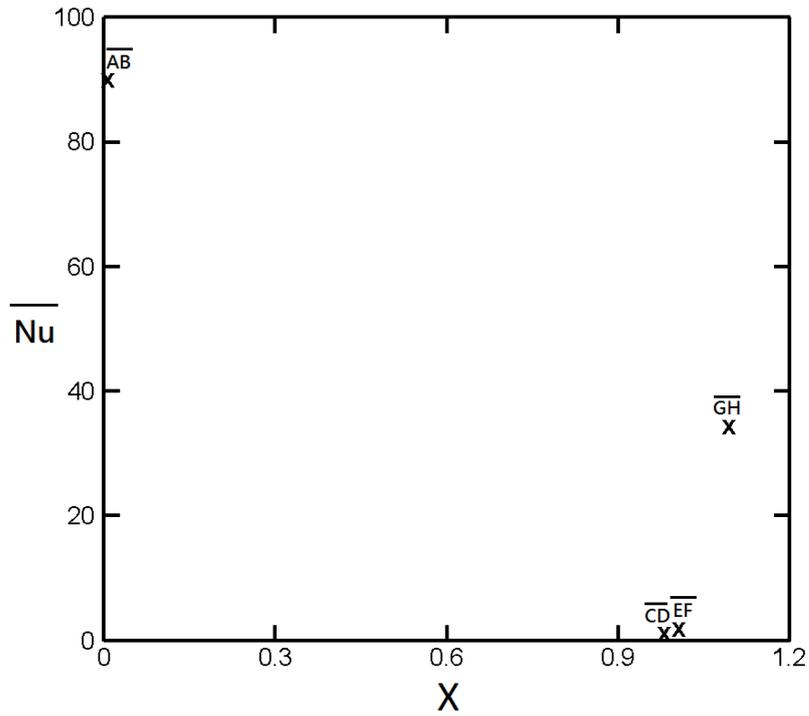


圖 4-30(c) 不同位置平均紐塞數比較圖($Re=200$, $\phi = \frac{\pi}{3}$)

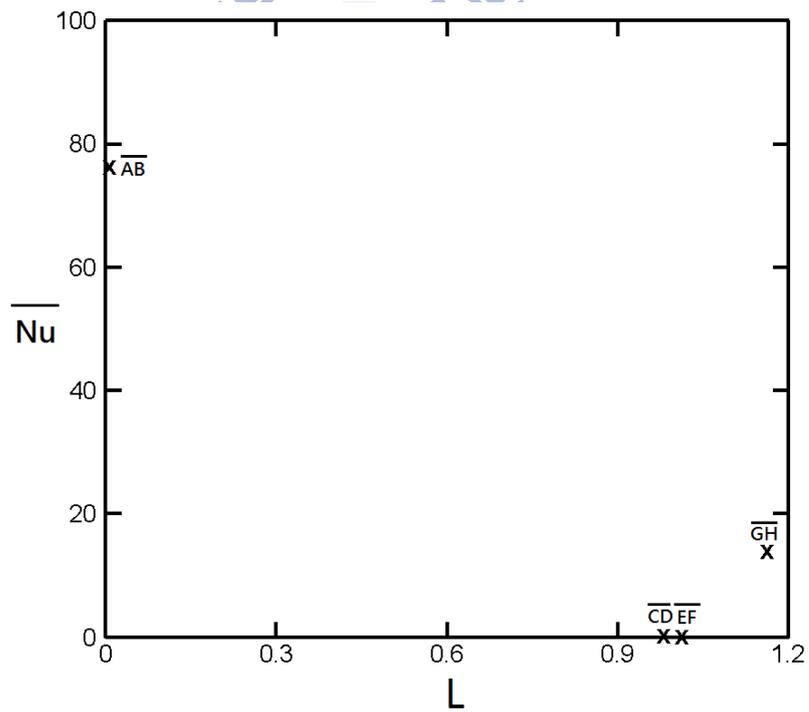


圖 4-30(d) 不同位置平均紐塞數比較圖($Re=200$, $\phi = \frac{\pi}{2}$)

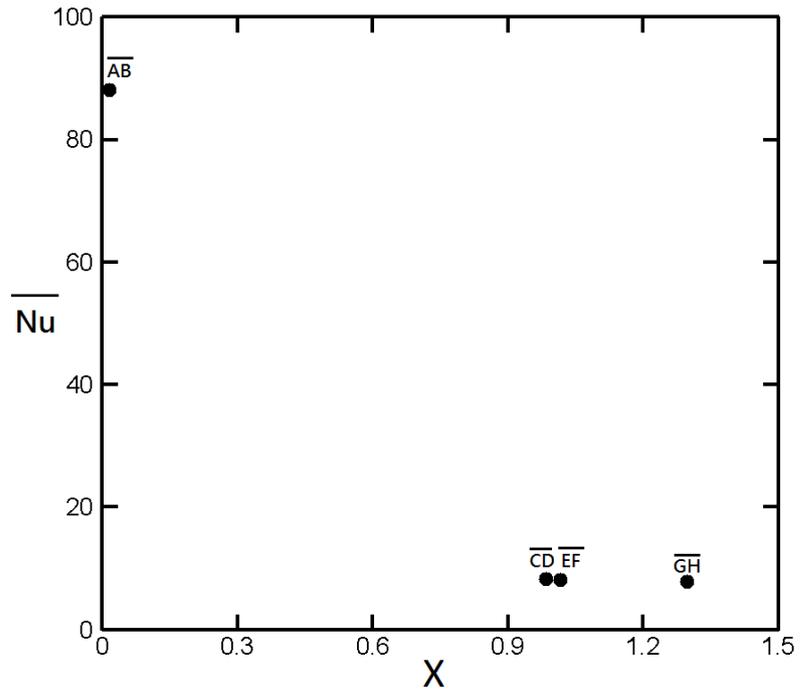


圖 4-31(a) 不同位置平均紐塞數比較圖($Re=400$, $\phi = 0$)

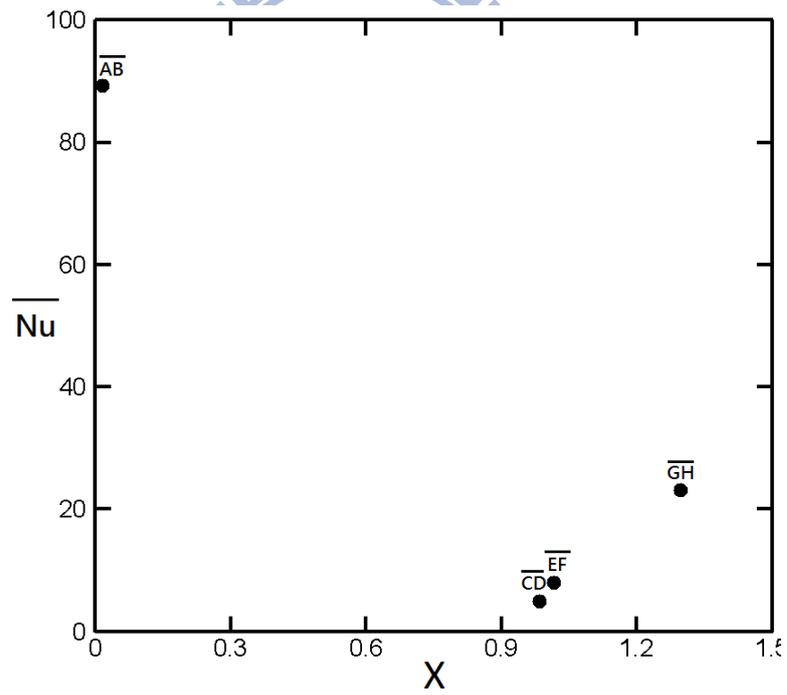


圖 4-31(b) 不同位置平均紐塞數比較圖($Re=400$, $\phi = \frac{\pi}{6}$)

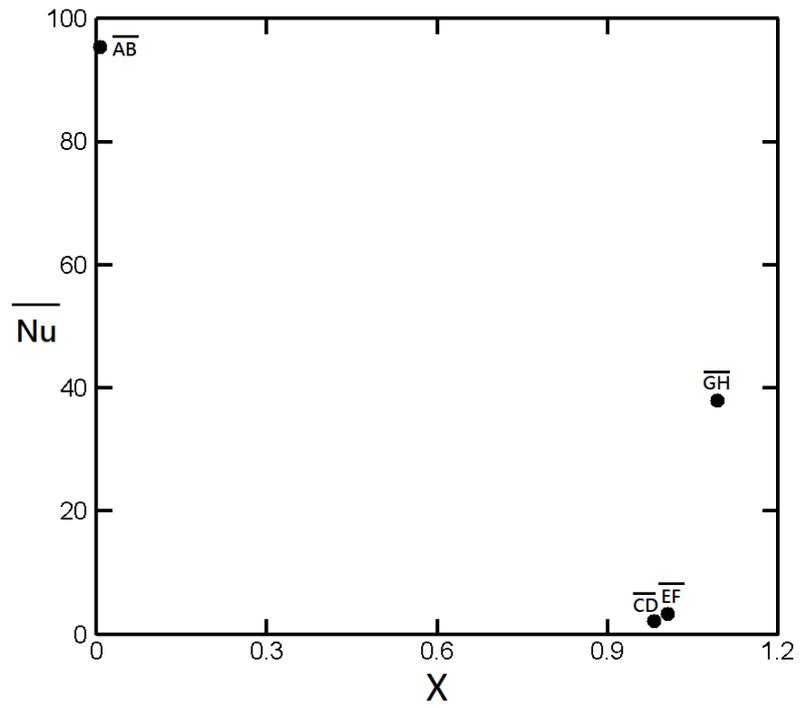


圖 4-31(c) 不同位置平均紐塞數比較圖($Re=400$, $\phi = \frac{\pi}{3}$)

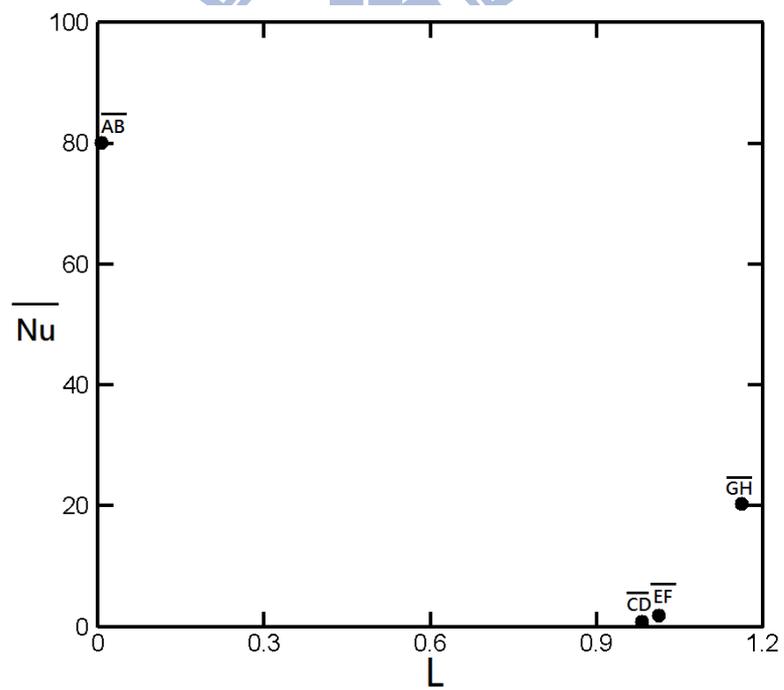


圖 4-31(d) 不同位置平均紐塞數比較圖($Re=400$, $\phi = \frac{\pi}{2}$)

第五章 結論

本研究利用數值方法探討可壓縮流在三維漸縮煙囪管道中的流動與熱傳機構。將 Navier-Stokes 方程式分成黏性項及非黏性項兩部分，黏性項採用二階中央差分法，而非黏性項的部分則以 Roe 法來解方程式，出口設非反射性邊界條件避免低速可壓縮流中壓力波的干擾。並使用顯示卡作為平行運算工具，以 CUDA 運算平台在程式中加入平行化處理。根據本研究計算模擬的結果，與前述的各案例討論，所得到結論如下：

1. 採用代數格點的網格建置方法(algebraic grid generation)，以座標轉換的方式，將物理平面之漸縮處拉伸展開成一規則的計算平面，此一方式使程式能以生成速度快而易控制的格點並獲得精確的計算結果。
2. 使用 CUDA 計算平台於平行運算，不但可大幅縮短計算時間，且可降低電腦成本與使用空間。以雙精準浮點數下解本文之三維漸縮煙囪管道，結果顯示卡計算速度約為四核中央處理器的 4.72 倍。
3. 在三維漸縮管道中，因主流方向中流場截面積逐漸縮小，使流速加快，故在此時流體中央熱傳效果大幅增加。但壁面與壁面的夾角隨之減小，致流經夾角附近的流體，因壁面摩擦阻抗增加流速降低，熱傳效率隨之劣化，此一現象當漸縮角度增大而更為明顯。此外雷諾數越大，熱傳效果越好。

參考文獻

1. B. Zamora, A.S. Kaiser, and A. Viedma , "On the Effects of Rayleigh Number and Inlet Turbulence Intensity Upon the Buoyancy-induced Mass Flow Rate in Sloping and Convergent Channels," International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 51, issues 19-20, pp.4985-5000, 2008.
2. E.M.Sparrow and R.Ruiz, " Experiments on Natural Convection in Divergent Vertical Channels and Correlation of Divergent, Convergent,and Parallel-Channel Nusselt Numbers," International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 31, no. 11,pp.2197-2205,1988.
3. E.M.Sparrow,R.Ruiz,and L.F.A.Azevedo," Experimental and Numerical Investigation of Natural Convection in Convergent Vertical Channel," International Journal of Heat and Mass Transfer,vol.31,pp.907-915,1988.
4. Chin-Chia Su and Huang Lin," Heat Transfer and Preeure Drop Characteristics of Flow in Convergent and Divergent Ducts," International Journal of Energy Research,vol.15, issue 7, pp.581-591,1991.
5. Chin-Chia Su and Huang Lin,"Forced Convection in Convergent and Divergent Ducts of Rectangular Cross Section," Numerical Heat Transfer, Part A, vol.20, issue 4 , pp. 445-458 , 1991.
6. Chin-Chia Su ,and Ray-Hong Lin," Experimental Studies on Flow in Convergent and Divergent Ducts of Rectangular Cross Section," International Journal of Energy Research,vol.21,pp.77-86,1997.
7. Kihmk. D. , Kim J. H. ,and Fletcher L. S. , "Investigation of Natural Convection in Heat Transfer in Converging Channel Flow Using a Specklegram Technique," Journal of Heat Transfer , vol. 115, no.1, pp. 140-148 , 1993.
8. Mutama K. R. ,and Iacovides H.," The Investigation of Developing Flow and Heat Transfer in a Long Converging Duct," Journal of Heat Transfer,

- vol. 115, no.4, pp. 897-903 , 1993.
9. S.A.M.Said," Investigation of Natural Convection in Convergent Vertical Channels," International Journal of Energy Research, vol. 20, pp. 559-567, 1996.
 10. J.S.Shalash,J.D.Tarasuk,and D.Naylor," Experimental and Numerical Studies of Natural Convection Heat Transfer in Vertical Converging Channel Flows," Proceeding of Fourth Experimental Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics ,pp.2167-2174,1997.
 11. N. Bianco and S. Nardini," Numerical Analysis of Natural Convection in Air in a Vertical Convergent Channel with Uniformly Heated Conductive Walls," International Communications in Heat and Mass Transfer, vol. 32, issue 6, pp. 758-769, 2005.
 12. Nicola Bianco, Luigi Langellotto, Oronzio Manca and Sergio Nardini," Thermal Design and Optimization of Vertical Convergent Channels in Natural Convection," Applied Thermal Engineering, vol.26, issues 2-3, pp.170-177, 2006.
 13. Nicola Bianco, Oronzio Manca, and Sergio Nardini," Experimental Investigation on Natural Convection in a Convergent Channel With Uniformly Heated Plates," International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 50, issues 13-14, pp. 2772-2786 , 2007.
 14. A. S. Kaiser, B. Zamora, and A. Viedma," Correlation for Nusselt Number in Natural Convection in Vertical Convergent Channels at Uniform Wall Temperature by a Numerical Investigation,"International Journal of Heat and Fluid Flow, vol. 25, issue 4, pp. 671-682, 2004.
 15. Y.B. Tao, Y.L. He, J. Huang, Z.G. Wu, W.Q. Tao," Three-dimensional Numerical Study of Wavy Fin-and-tube Heat Exchangers and Field Synergy Principle Analysis,"International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 50, pp. 1163-1175, 2007.
 16. Fernando V. Castellanos, Joao N.N. Quaresma, Renato M. Cotta," Convective Heat Transfer Enhancement in Low Reynolds number Flows with Wavy Walls,"International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 53, pp. 2022-2034, 2010.

17. C.-C. Wang and C.-K. Chen, "Forced Convection in a Wavy-Wall Channel," International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 45, issue 12, pp.2587-2595 , 2002.
18. C.-C. Wang and C.-K. Chen, "Mixed Convection Boundary Layer Flow of Non-Newtonian Fluids along Vertical Wavy Plates," International Journal of Heat and Fluid Flow, vol. 23, pp. 831-839, 2002.
19. T.M.Huang,C,Gau,and Win Aung,"Mixed Convection Flow and Heat Transfer in a Heated Vertical Convergent Channel,"International Journal of Heat and Mass Transfer,vol.38,no.13,pp.2445-2456,1995.
20. C.Gau,C.W.Liu,T.M.Huang,and Win Aung, "Secondary Flow and Enhancement of Heat Transfer in Horizontal Parallel-Plate and Convergent Channels Heating from Below,"International Journal of Heat and Mass Transfer, vol.42,pp.2629-2647,1999.
21. C.Gau and C.W.Liu,"Onset of Secondary Flow and Enhancement of Heat Transfer in Horizontal Convergent and Divergent Channels Heated from Below," International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 47, pp.5427-5438, 2004.
22. C.S. Yang, C.L. Lin, and C. Gau, "Film Cooling Performance and Heat Transfer over an Inclined Film-cooled Surface at Different Convergent Angles with Respect to Highly Turbulent Mainstream," Applied Thermal Engineering, vol. 29, issue 1, pp. 167-177 ,2009.
23. B. Zamora and A.S. Kaiser, "Optimum Wall-to-wall Spacing in Solar Chimney Shaped Channels in Natural Convection by Numerical Investigation," Applied Thermal Engineering, vol.29, issue 4, pp. 762-769,2009.
24. W.-S. Fu,C.-C. Li,C.-P. Huang,and J.-C. Huang,"An Investigation of a High Temperature Difference Natural Convection in a Finite Length Channel without Boussinesq Assumption," International Journal of Heat and Mass Transfer,vol.52,pp.2571-2580,2009.
25. T.J. Poinso, S.K. Lele,"Boundary Conditions for Navier–Stokes," Journal of Computational Physics, vol. 101,pp. 104–129,1992.

26. P.L. Roe,"Approximation Riemann Solver, Parameter Vectors, and Difference Schemes," Journal of Computational Physics, vol. 43, pp. 357–372, 1981.
27. J.M. Weiss, W.A. Simth, "Preconditioning Applied to Variable and Constants Density Flows," AIAA ,vol. 33,pp. 2050–2056,1995.
28. I. Abalakin, A. Dervieux, T. Kozubskaya," A Vertex Centered High Order MUSCL Scheme Applying to Linearised Euler Acoustics," INRIA, no. 4459, 2002.
29. Seokkwan Yoon, Antony Jamesont, "Lower-Upper Symmetric-Gauss-Seidel Method for the Euler and Navier-Stokes Equations," AIAA,vol. 26,no. 9,1988.
30. Klaus A.Hoffmann and Steve T.Chiang," Computational Fluid Dynamics for engineers," Wichita, Kan. : Engineering Education System, 1993.
31. Brandvik T, Pullan G," Acceleration of a 3D Euler Solver Using Commodity Graphics Hardware," Forty-sixth AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, AIAA 2008-607, 2008.
32. Andrew Corrigan,Fernando F. Camelli,Rainald Lohner,John Wallin," Running Unstructured Grid-based CFD solvers on Modern Graphics Hardware," International Journal for Numerical Methods in Fluids,DOI:10.1002,flid. 2254, 2010.
33. nVIDIA , CUDA, <http://www.nvidia.com/cuda/>
34. W.-S. Fu, C.-C. Li, W.-F. Lin, Y.-H. Chen," Roe Scheme with Preconditoning Method for Large Eddy Simulation of Compressible Turbulent Channel Flow," International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol.61, pp.888-910.
35. J. Dennis, P. Thomas, B. Pieter, "Recent Enhancements to OVERFLOW," Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 35th, Reno, NV, 1997.