

國立交通大學

機械工程學系

碩士論文

雙壓電致動器幫浦之流固耦合分析

Analysis of the Fluid-Structure Coupling Flow in A
Bimorph Piezoelectric Micropump

研究生：陳信宏

指導教授：崔燕勇博士

中華民國九十九年七月

雙壓電致動器幫浦之流固耦合分析

Analysis of the Fluid-Structure Coupling Flow in A Bimorph
Piezoelectric Micropump

研究生：陳信宏

Student : Shin-Hung Chen

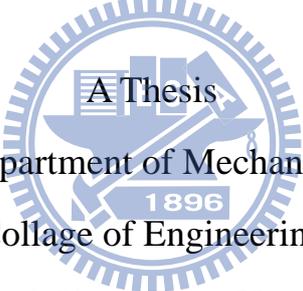
指導教授：崔燕勇

Advisor : Yeng-Yung Tsui

國立交通大學

機械工程學系

碩士論文



Submitted to Department of Mechanical Engineering
College of Engineering

National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the degree of

Master of Science

In

Mechanical Engineering

July 2010

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十九年七月

雙壓電致動器幫浦之流固耦合分析

研究生：陳信宏

指導教授：崔燕勇 博士

國立交通大學機械工程學系(研究所)碩士班

摘要

本文為研究雙壓電致動器幫浦之流固耦合分析，將 ANSYS 軟體與 CFD 程式結合來分析此幫浦特性，利用 ANSYS 來計算固體力學部份，而 CFD 程式則負責計算流體力學之部分。在耦合計算時，將幫浦內的流體壓力和流體剪力視為固體力學之外力限制條件；將壓電振動平板之位移視為流體之牆邊界條件，來完成 ANSYS 軟體和 CFD 程式的結合。結果發現幫浦之流量同時受到電壓、擺動振幅和振動頻率影響，且觀察出欲增加幫浦流量的最好之方法為增加電壓的大小。同時發現將壓電振動平板放置於流體中並且受電壓之負載時，其共振頻率將會有明顯的下降。

本文同時利用 ANSYS 之調和分析來計算此壓電致動器幫浦在不同外部負載頻率下的振幅大小，並與 ANSYS 結合 CFD 的結果做比較，得到非常接近的結果，因此可證明 ANSYS 與 CFD 程式的結合計算方法具有相當程度的可信度。而本程式之優點為耦合時可以分析流場情況，例如：速度場、流線、壓力場，但 ANSYS 之調和分析無法分析流場的狀況，只能探討壓電振動平板受電壓後於水中之振幅反應。

Analysis of the Fluid-Structure Coupling Flow in A Bimorph Piezoelectric Micropump

Student : Shin-Hung Chen

Advisor : Dr. Yeng-Yung Tsui

Department of Mechanical Engineering

National Chiao Tung University

ABSTRACT

This thesis is mainly aimed the calculation of the flow in oscillatory flow pumps using bimorph piezoelectric actuators, combining ANSYS finite element software with CFD program in order to solve Fluid-Structure interaction(FSI) problems. For computational simulations of the piezoelectric pump, the ANSYS is used; for computational simulations of the flow field, the CFD program is used. The result showed that flow rate of the flow pump is deeply affected by voltage, amplitude and frequency. In order to increase the flow rate of flow pumps is applied more high voltage. The resonance frequency of piezoelectric actuators is decreasing clear by setting piezoelectric actuators in fluids.

The amplitude of the piezoelectric actuator of this thesis had been compared with the calculation of ANSYS harmonic analysis, and we received good result. This coupled method can analysis the vector field, streamline, pressure of flow field, but ANSYS harmonic analysis can't.

誌謝

能完成這篇論文必須要感謝崔燕勇教授，感謝崔老師兩年來的指導，從老師的身上不只學習到學術知識，學到更多的是做事應有的態度以及分析和解決問題的能力，還有增加了我的抗壓性，再次感謝崔老師，您的教導我相信一生都受用無窮！同時也要感謝尹慶中老師和他的學生鄭博毅同學在壓電材料和 ANSYS 軟體應用上給予我的幫助。

再來是感謝 307 實驗室全體，感謝吳添成學長總是能一通電話過去馬上就給我協助。感謝胡育昌學長總是細心且熱情的幫我修正 Fortran 程式。感謝林仕文學長從我一進實驗室那天起就對我特別的照顧，一起修課一同小酌、幫我解決困難，課業和玩樂方面都照顧的非常周到。感謝陳俊佑學長，幫我解決所有研究上遇到的問題，並且聽我吐苦水，充當我的心靈導師。感謝我的同窗郭大慶、鄭為陽和何光桓，尤其是郭大慶你絕對是個好戰友。感謝學弟們林子翔、賴胤男、黃義政，有你們在的實驗室變的熱鬧多了，招來兩個痞子房業勳和黃思齊，實驗室變的輕鬆、壓力沒那麼大，希望未來實驗室有你們可以更蒸蒸日上。

接下來感謝幾個朋友，王派宣、王澤瑋、田希文、李其霖、吳建賢、周佳仁、張國維、黃志瑋、鍾鼎駒、戴培祐、蘇彥甫，感謝你們在我碩士班生活的兩年，甚至是我求學一路走來，陪我度過所有的喜怒哀樂，沒有你們我走不到這裡，謝謝，未來還有更長的路，先謝過了兄弟們。

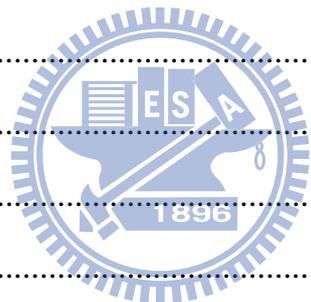
最後感謝我的家人，阿公、阿婆、外公、外婆、爸、媽、姊、兵叔、岱芸、官俊，家人是最強大的後盾，謝謝你們對我的栽培和放縱，還有不知道歸類何處的謝孟穎，謝啦。

目錄

摘要.....	i
ABSTRACT.....	ii
誌謝.....	iii
目錄.....	iv
表目錄.....	viii
圖目錄.....	ix
符號表.....	xiv
一、緒論.....	1
1.1 前言(微幫浦介紹).....	1
1.2 流固耦合介紹.....	2
1.3 文獻回顧.....	3
1.3.1 數值模擬相關的文獻.....	3
1.3.2 類魚幫浦相關的實驗文獻.....	5
1.4 研究內容.....	6
二、數學模式.....	7
2.1 基本假設.....	7
2.1.1 流體假設.....	7
2.1.2 固體假設.....	7
2.2 流體運動模式.....	7
2.2.1 ALE 座標系之統御方程式.....	7
2.2.2 流場邊界條件(Boundary Condition).....	8
2.3 固體運動模式.....	8
2.3.1 結構運動方程式.....	8
2.3.2 壓電方程式.....	9

2.3.3 壓電參數矩陣極化方向轉換	9
2.3.4 振動平板的限制條件(Constraint).....	11
三、數值方法	12
3.1 流體力學數值方法	12
3.1.1 有限體積法(Finite Volume Method)	12
3.1.1.1 有限體積法的離散.....	12
3.1.1.2 離散化.....	12
3.1.1.2.1 非穩態項(Unsteady Term)	12
3.1.1.2.2 對流項(Convection Term).....	13
3.1.1.2.3 擴散項(Diffusion Term).....	14
3.1.1.2.4 源項(Source Term)	15
3.1.1.3 線性代數式的整理.....	15
3.1.2 空間守恆定理(Space Conservation Law)	15
3.1.2.1 空間守恆定理的簡介.....	15
3.1.2.2 質量源(Mass Sources).....	16
3.1.2.3 空間守恆定理.....	17
3.1.2.4 整理 SCL 應用於 FVM 及 PISO	18
3.1.3 PISO 演算法	18
3.1.3.1 PISO 演算法的簡介	18
3.1.3.2 速度與壓力之間的耦合.....	18
3.1.3.2.1 預測步驟(Predictor Step).....	18
3.1.3.2.2 第一次修正步驟(1st Corrector Step)	19
3.1.3.2.3 第二次修正步驟(2nd Corrector Step).....	21
3.1.3.2.4 壓力修正方程式的整理	22
3.1.3.3 邊界條件的給定.....	23
3.1.3.3.1 進出口壓力邊界的流量計算	23

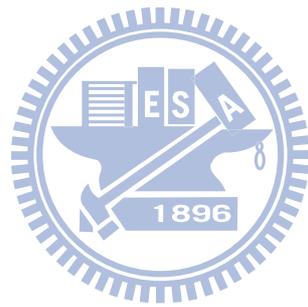
3.1.3.3.2 進出口壓力邊界的速度計算	23
3.1.3.3.3 牆邊界條件的計算	24
3.2 固體力學數值方法	24
3.2.1 有限元素法(Finite Element Method)軟體基本架構	24
3.2.2 ANSYS 商用軟體	25
3.2.3 限制條件的給定	25
3.2.3.1 壁面剪力(Shear Force).....	25
3.2.3.2 壁面壓力	26
3.3 網格的移動.....	27
3.4 流固耦合演算流程	27
四、結果與討論.....	28
4.1 ANSYS 分析.....	28
4.2 模態分析.....	28
4.2.1 ANSYS 建模	28
4.2.2 自然頻率	28
4.3 系統阻尼設定.....	29
4.4 調和分析.....	29
4.4.1 單純壓電振動平板的 ANSYS 建模	30
4.4.2 水中壓電振動平板的 ANSYS 建模	30
4.4.3 共振頻率(resonance frequency)和振幅	30
4.5 暫態分析.....	31
4.5.1 ANSYS 壓電振動平板建模	32
4.5.2 CFD 流場建模	32
4.5.3 流場分析	32
4.5.4 電壓對流量造成之影響.....	34
4.5.5 增加流道高度對流場之影響	34



五、結論.....36

參考文獻.....37

附錄.....91



表目錄

表(一) PZT-4 的材料常數【17】	39
表(二) 黃銅的材料常數	39
表(三) 模態分析結果之前 10 組自然頻率	40
表(四) 阻尼比係數	40
表(五) 水的性質	40
表(六) 電壓 30V、60V、120V 在不同外部負載頻率下之流量結果	41
表(七) ANSYS 調和分析和 ANSYS 結合 CFD 結果比較，流道高度為 5mm 和 8mm 的 振動平板振幅	41



圖目錄

《圖 2.1》雙壓電致動器(a)擺動示意圖(b)平板材料剖析.....	42
《圖 2.2》流場尺寸示意圖.....	42
《圖 2.3》座標軸方向代號.....	43
《圖 2.4》壓電致動器之電壓給定致動方式(parallel mode).....	43
《圖 3.1》擴散項離散化 over-relaxed 法之標示圖.....	44
《圖 3.2》計算邊界壓力示意圖.....	44
《圖 3.3》利用網格速度計算體積改變量.....	45
《圖 3.4》(a)顯式法和(b)隱式法的體積改變結果.....	45
《圖 3.5》不同時階大小的隱式法結果(a)較大時階(b)較小時階.....	46
《圖 3.6》利用各面移動前後的新舊點位置直接算出體積.....	46
《圖 3.7》兩個時階中的網格位置變化(a)各面掃過的體積(b)顯示體積重疊.....	47
《圖 3.8》壓力邊界示意圖.....	48
《圖 3.9》壓力邊界之流量計算.....	48
《圖 3.10》計算壁面剪力示意圖.....	49
《圖 3.11》流場網格分割區塊.....	49
《圖 3.12》一週期內的流場局部網格運動情形(a)1/4T(b)2/4T(c)3/4T(d)1T.....	51
《圖 3.13》流固耦合演算流程.....	52
《圖 4.1》模態分析、調和分析之單純壓電振動平板、暫態分析的模型建立.....	53
《圖 4.2》模態分析限制條件示意圖.....	53
《圖 4.3》模態分析之模型完成圖.....	54
《圖 4.4》第一模態之模態圖.....	54
《圖 4.5》第二模態之模態圖.....	54
《圖 4.6》第三模態之模態圖.....	55
《圖 4.7》調和分析之單純壓電振動平板的限制條件示意圖.....	55

《圖 4.8》調和分析之單純壓電振動平板的模型完成圖.....	56
《圖 4.9》調和分析之水中壓電振動平板的模型建立.....	56
《圖 4.10》調和分析之水中壓電振動平板的限制條件示意圖.....	57
《圖 4.11》調和分析之水中壓電振動平板的模型完成圖.....	57
《圖 4.12》阻尼比為 0.01 時，ANSYS 調和分析在無水及加入有水元素(Fluid29)之比較，振動平板尾端振幅隨頻率的變化.....	58
《圖 4.13》阻尼比為 0.1 時，ANSYS 調和分析在無水及加入有水元素(Fluid29)之比較，振動平板尾端振幅隨頻率的變化.....	58
《圖 4.14》阻尼比為 1 時，ANSYS 調和分析在無水及加入有水元素(Fluid29)之比較，振動平板尾端振幅隨頻率的變化.....	59
《圖 4.15》阻尼比為 15 時，ANSYS 調和分析在無水及加入有水元素(Fluid29)之比較，振動平板尾端振幅隨頻率的變化.....	59
《圖 4.16》ANSYS 調和分析在無水及加入有水元素(Fluid29)之不同阻尼比振動平板尾端振幅隨頻率的變化.....	60
《圖 4.17》ANSYS 調和分析在無水及加入有水元素(Fluid29)之不同阻尼比振動平板尾端振幅隨頻率的變化.....	60
《圖 4.18》暫態分析的限制條件示意圖.....	61
《圖 4.19》暫態分析之流體壓力給定.....	61
《圖 4.20》暫態分析之流體剪力給定.....	62
《圖 4.21》暫態分析之固力模型完成圖.....	62
《圖 4.22》流場網格數目和尺寸圖(a)流場實際網格尺寸(b)網格 6976 格的局部放大圖(c) 網格 13952 格的局部放大圖(d)網格 27904 格的局部放大圖.....	63
《圖 4.23》三種網格測試的流量結果圖，阻尼比 15、電壓 120V、外部負載頻率 20hz.....	63
《圖 4.24》頻率 10，最後一週期振動平板尾端頂點的變化圖(a)位置隨時間的變化(b)速度隨時間的變化.....	64

《圖 4.25》頻率 10，振動平板振幅放大 50 倍運動圖($t=16/100T$ 、 $41/100T$ 、 $66/100T$ 、 $91/100T$).....	65
《圖 4.26》頻率 10，流場壓力隨時間變化圖($t=16/100T$ 、 $41/100T$ 、 $66/100T$ 、 $91/100T$).....	66
《圖 4.27》頻率 10，流場流線隨時間變化圖($t=16/100T$ 、 $41/100T$ 、 $66/100T$ 、 $91/100T$).....	67
《圖 4.28》頻率 20，最後一週期振動平板尾端頂點的變化圖(a)位置隨時間的變化(b)速度隨時間的變化.....	68
《圖 4.29》頻率 20，振動平板振幅放大 50 倍運動圖($t=16/100T$ 、 $41/100T$ 、 $66/100T$ 、 $91/100T$).....	69
《圖 4.30》頻率 20，流場壓力隨時間變化圖($t=18/100T$ 、 $44/100T$ 、 $68/100T$ 、 $94/100T$).....	70
《圖 4.31》頻率 20，流場流線隨時間變化圖($t=18/100T$ 、 $44/100T$ 、 $68/100T$ 、 $94/100T$).....	71
《圖 4.32》頻率 50，最後一週期振動平板尾端頂點的變化圖(a)位置隨時間的變化(b)速度隨時間的變化.....	72
《圖 4.33》頻率 50，振動平板振幅放大 50 倍運動圖($t=16/100T$ 、 $41/100T$ 、 $66/100T$ 、 $91/100T$).....	73
《圖 4.34》頻率 50，流場壓力隨時間變化圖($t=20/100T$ 、 $45/100T$ 、 $70/100T$ 、 $95/100T$).....	74
《圖 4.35》頻率 50，流場流線隨時間變化圖($t=20/100T$ 、 $45/100T$ 、 $70/100T$ 、 $95/100T$).....	75
《圖 4.36》頻率 100，最後一週期振動平板尾端頂點的變化圖(a)位置隨時間的變化(b)速度隨時間的變化.....	76
《圖 4.37》頻率 100，振動平板振幅放大 50 倍運動圖($t=16/100T$ 、 $41/100T$ 、 $66/100T$ 、 $91/100T$).....	77

《圖 4.38》	頻率 100，流場壓力隨時間變化圖($t=30/100T$ 、 $50/100T$ 、 $80/100T$ 、 $1T$)	78
《圖 4.39》	頻率 100，流場流線隨時間變化圖($t=30/100T$ 、 $50/100T$ 、 $80/100T$ 、 $1T$)	79
《圖 4.40》	阻尼比為 15 時，不同頻率於 0~5 秒的流量隨時間之變化	80
《圖 4.41》	ANSYS 調和分析和 CFD-ANSYS 耦合分析之結果：阻尼比為 15 時，振動平板尾端的振幅大小	80
《圖 4.42》	頻率 10、20、50、100 在各個頻率的特定取樣時間的振動平板振幅放大 50 倍運動圖	81
《圖 4.43》	ANSYS 調和分析和 CFD-ANSYS 耦合分析之結果：阻尼比為 15 時，電壓為 30V、60V、120V 振動平板尾端的振幅大小	82
《圖 4.44》	阻尼比為 15 時，電壓為 30V、60V、120V 時 CFD-ANSYS 耦合分析之流量大小	82
《圖 4.45》	頻率 10、入口高度 5mm 和 8mm，最後一週期振動平板尾端頂點的變化圖 (a)位置隨時間的變化(b)速度隨時間的變化	83
《圖 4.46》	頻率 10，入口高度 8mm，流場壓力隨時間變化圖($t=16/100T$ 、 $41/100T$ 、 $66/100T$ 、 $91/100T$)	84
《圖 4.47》	頻率 10，入口高度 8mm，流場流線隨時間變化圖($t=16/100T$ 、 $41/100T$ 、 $66/100T$ 、 $91/100T$)	85
《圖 4.48》	頻率 20，入口高度 8mm，流場流線隨時間變化圖($t=18/100T$ 、 $44/100T$ 、 $68/100T$ 、 $94/100T$)	86
《圖 4.49》	頻率 50，入口高度 8mm，流場流線隨時間變化圖($t=20/100T$ 、 $45/100T$ 、 $70/100T$ 、 $95/100T$)	87
《圖 4.50》	頻率 100，入口高度 8mm，流場流線隨時間變化圖($t=30/100T$ 、 $50/100T$ 、 $80/100T$ 、 $1T$)	88
《圖 4.51》	阻尼比為 15 時，入口高度 8mm，不同頻率於 0~5 秒的流量隨時間變化	89
《圖 4.52》	阻尼比為 15 時，入口高度為 5mm 和 8mm 的 CFD-ANSYS 耦合分析之流	

量大小89

《圖 4.53》ANSYS 調和分析和 CFD-ANSYS 耦合分析之結果：阻尼比為 15 時，入口高度為 5mm 和 8mm，振動平板尾端的振幅大小90

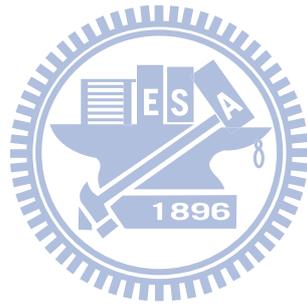


符號表

符號	定義
c	剛性常數
C	阻尼係數
d	壓電應變常數
\bar{d}	正交向量
D	電位移
e	壓電應力常數
E	電場
F_f^C	面上的對流通量
F_f^D	面上的擴散通量
K	勁度(stiffness)
\dot{m}	質量流率
\dot{m}_f	面上的質量流率
\dot{m}_f^r	流體相對於面上的質量流率
M	質量
P	流體壓力
S	應變
\bar{S}_f	面的法向量
\bar{S}_w	壁面之面法向量
t	時間
T	應力
\bar{V}	流體速度向量
\bar{V}_g	網格速度向量
希臘符號	
α	庫倫阻尼係數
β	結構阻尼係數
$\bar{\delta}_{Pnb}$	P 到 nb 距離向量
ε	介電常數
ζ	阻尼比
μ	黏滯係數
ρ	密度
$\bar{\tau}_w$	壁面剪應力
ω	自然角頻率



ΔV_f	一個面掃過的體積
上標	
n	此一時間的未知數
o	前一時間的已知數
—	主格點與鄰近格點之內差
'	修正量
下標	
f	面上的值
nb	鄰近格點的值
P	主格點的值
w	壁面上的值



一、緒論

1.1 前言(微幫浦介紹)

利用微尺寸幫浦來傳輸液體或是氣體已被廣泛的研究，而微幫浦發展至今大概分為兩大類：機械式的位移幫浦(displacement pumps)和非機械式的動力幫浦(dynamics pumps)。位移幫浦主要有三種形式：蠕動式(peristaltic)、轉動式(rotary)、往復式(reciprocating)；其動力來源包含：靜電式(Electrostatic)、熱氣式(Thermopneumatic)、壓電式(Piezoelectric)和電磁式(Electromagnetic)。其中往復式幫浦是利用機械式的振動方式來推動流體，最著名的為薄膜幫浦(diaphragm pump)。非機械式的動力幫浦則是利用離心力(centrifugal)、電水力學(electrohydrodynamic)、聲學(acoustic streaming)和超音速(ultrasonic)等原理所運作的幫浦。位移幫浦適合用來傳遞似氣體的流體和低雷諾數流體，而動力幫浦主要用來分析流體的一些特性，例如流體的離子強度。

在眾多類型的微幫浦中，唯讀壓電微幫浦的研究不斷的推陳出新。結合壓電致動器使微幫浦的型態更進一步，因壓電微幫浦的壓電致動器具有簡易的結構、高輸出效率、高精確度和低耗電功率等優勢。因此可應用範圍極廣，例如生醫工程裡的血液幫浦、微量皮下葯劑輸送系統：在傳遞葯物時是因為處在高壓環境，進而產生的紊流和過大的剪應力會破壞生物組織，造成生物細胞的壞死，若經由控制信號與微幫浦振動頻率，將葯物定時定量的輸入到人體內的循環系統中，如此一來便不需要經常的去注射葯物，也可以減輕病患的痛苦。或是電子散熱元件：電腦主機的冷卻風扇常見為旋轉葉片型，而此類型風扇通常伴隨著高電功率。雖然在許多應用的成果令人滿意，但旋轉馬達所產生的噪音常常令人無法忍受。因此發展出雙壓電致動型風扇，雙壓電致動型風扇的結構簡單且可精確的控制風速。我們將旋轉葉片型風扇和雙壓電致動型風扇比較後可得知，雙壓電致動型風扇沒有嘈雜的噪音、具有較長的壽命期(約 25000 小時)和低耗電功率(小於 100mW)。因此可以推斷雙壓電致動型風扇在許多應用層面上，將可取代傳統的旋

轉型風扇。除此之外壓電致動器也可利用它的推進特性，應用於水中的推進裝置。此種推進裝置是將兩片壓電片夾住一平板使它擺動，類似魚尾的擺動。這種類生物的推進裝置具有高推進效率和無聲的特性，因此可運用於軍事單位上。本文即是研究此類生物推進裝置，將其固定於水中，運用其推進原理成為新型的幫浦。

1.2 流固耦合介紹

流固耦合可應用於分析飛機的機翼振翅、大樓受風力的影響、流體流經彈性管和血管問題。本文即是研究壓電振動平板和流體的交互作用，利用振動平板的擺動來推動流體，然而振動平板在推動流體的同時，流體也會產生一反作用力去影響振動平板的擺動，如此交互的作用稱為流固耦合。在解決耦合問題時，必須同時解決流體力學和固體力學問題，而這兩種問題通常用不同的方法來求解，因此兩種物理現象用一套程式來求解將是一個困難的挑戰。

工業應用和科學研究的許多問題中，都會產生流固耦合 (Fluid-Structure interaction, FSI) 的物理現象。耦合的問題牽涉到多方面的物理現象，因此學者們發展出一些方法來近似流固耦合。解決耦合問題共可分為完全統一法 (monolithic approaches) 和分段法 (partitioned approaches) 【3】。完全統一法在解流體問題和固體問題是用同一套程式、且同時進行求解。分段法在解流體之統御方程式和解固體之結構特性時需用不同的程式。在分段法中，通常以有限元素法 (finite element method, FEM) 來求解固體力學的問題；解決流體力學方面的問題時，較常見為利用有限體積法 (finite volume method, FVM) 和有限元素法。而利用有限體積法來求解固體力學問題也是可行，但較少見。分段法中另一項值得注意的是耦合的強度。在每個時階 (time step) 中計算流體與固體的反覆交互作用時，決定耦合成功與否的收斂條件稱作隱式分段法 (implicit partitioned approach)。在一個時階中，隱式分段法的耦合強度優於顯式法 (explicit approach)。

解決 FSI 的流體問題時，目前已證實以 ALE (arbitrary Lagrangian-Eulerian) 座標系之統御方程式配合移動網格的方法來求解最合適。

1.3 文獻回顧

1.3.1 數值模擬相關的文獻

(A) 移動網格的研究

本文研究的流場中，壓電振動平板做大幅度的振動，流場中的網格會隨著振動平板一起運動，因此我們必須探討移動邊界和移動網格的問題和方法。以下為學者們對移動邊界和移動網格所做的相關研究。

1988 年，Demirdzic et al. 【1】 研究移動邊界問題中，由質量守恆定理推導出空間守恆定理，並將空間守恆定理結合有限體積法來求解問題。並解決空間守恆可能衍生出人為的質量源誤差問題。

1998 年，Egelja et al. 【2】 利用有限體積法求解自由表面流，邊界利用非正交的固定邊界和移動網格來近似自由表面。運用 SIMPLE 壓力修正法結合移動網格的空間守恆定理進行疊代，使流場滿足流體的連續性。

2008 年，Sternel et al. 【3】 利用隱式分割(implicit partitioned)的 ALE 法來近似流固耦合(FSI)的問題。並且深入研究求解過程中運用非線性多重網格法(nonlinear multigrid)、適當的鬆弛因子(underrelaxation factor)和適當的移動網格對耦合問題的準確性提升效果。最後得到線性配合橢圓的混合網格法和純橢圓網格法，此二種網格法比較可以節省計算時間和提供較好的準確度。

2008 年，Zhang et al. 【4】 研究包含移動邊界的三維非穩態不可壓縮流。在計算移動網格時，空間差分利用有限體積法，時間利用 implicit dual time stepping scheme，則可滿足幾何守恆定律。選擇三角網格來建立類魚模型，給定魚尾的運動方式，進行數值模擬。最後得到的數據和文獻比較，顯現出相同的趨勢。

2009 年，Srikanth et al. 【5】 利用 CFD 來解決可壓縮的空氣流入典型吸入式腔體的問題，並且研究移動網格和固定電極連結的方法。利用 Altair's HyperMesh 軟體建立腔體模型和結構性網格。利用 ANSYS-CFX 給定邊界條件且進行流場的模擬計算。結果顯示腔體移動的速度，確切影響吸入式腔體的壓力變化。並且得到吸入式腔體的運動為定性的，可作為研究 electro-fluid dynamics 斷路器的基礎。

(B) 流固耦合的研究

2002 年，Slone et al. 【6】 致力於只使用一套程式—PHYSICA—來解決流固耦合的問題，且流場和固力結構體的網格處理也是直接一起分割，因此不會有兩套軟體整合上的問題和繁雜的互傳資料。流固耦合的方式採用分段法，流力部分在解 N-S 方程式是利用 FVM 來離散，利用 SIMPE 法則來作壓力修正。固力部分是利用 FEM 來離散方程式，由 Newmark 預測修正演算法來解方程式。他們所分析的流固耦合例子，為三維流場中置入一長方形棒，由流體對長棒作用，計算出棒子受力後的彎曲變形和流場結果。

2006 年，Nakasone et al. 【7】 利用 ANSYS 求解雙壓電晶片致動器和流體之間的交互作用以及流量大小，並藉由改變致動器的振動頻率、振幅、平板厚度以及流體的性質來探討整體的流量。此作者在模擬計算時並非是完全的流固耦合模擬，是先使用 ANSYS 的調和分析計算流固耦合後壓電振動平板的隨外部負載頻率改變的振幅，再利用不同外部負載頻率下的振幅大小，輸入到單純 CFD 程式進行流場計算，最後經由實驗結果證實與模擬結果相似。

2007 年，Vatanabe et al. 【8】 利用 ANSYS 求解雙壓電晶片雙致動器和流體之間的交互作用以及流量大小。在管道中置入兩個壓電致動器，比較不同的擺放方式對流場的出口流量的影響。此作者同樣在模擬計算時並非是完全的流固耦合模擬，也是先使用 ANSYS 的調和分析計算流固耦合後壓電振動平板之隨外部負載頻率改變的振幅頻率之間的關係，再利用不同外部負載頻率下的振幅大小，輸入到單純 CFD 程式進行流場計算。在實驗和模擬比較數據的部份有較大誤差，但由模擬分析可看出於管道中置入兩壓電致動器在無相位差時有較大的流量輸出。

2008 年，Xia and Lin 【9】 利用非結構性網格和有限體積法來離散固體力學方程式，並且評估有限體積法適合用在分析受流體影響的固體結構上。時間上採用 implicit dual-time 的方法能得到較高的準確度，且作者採用之耦合方法為分段法。最後作者和其他學者所研究的數值計算結果相比較得到相當好的結果。

2009 年，Lima et al.【10】利用 ANSYS 求解雙壓電晶片致動器和流體之間的交互作用以及流量大小，並藉由改變致動器的振動頻率、振幅、平板厚度以及流體的性質來探討整體的流量。此作者在模擬計算時並非是完全的流固耦合模擬，是先使用 ANSYS 的調和分析計算流固耦合後壓電振動平板的隨外部負載頻率改變的振幅頻率之間的關係，再利用不同外部負載頻率下的振幅大小，輸入到單純 CFD 程式進行流場計算，求出平板第二模態震動比平板第一模態震動所產生的流量大。未來並研究壓電電所產生的熱對流場的影響。

2009 年，陳俊佑【11】研究壓電無閥式微幫浦流固耦合分析，利用 CFD 程式結合商程式 ANSYS 進行運算。ANSYS 負責固體力學部份之壓電致動器運算，並將壓電致動器各位置變形的速度傳給 CFD 運算，CFD 則回傳壓力至 ANSYS 進行流固耦合的運算。並且探討在不同操作頻率下微幫浦之特性。

1.3.2 類魚幫浦相關的實驗文獻

2000 年，Yoo et al.【12】研究壓電型風扇來替代嘈雜的旋轉型葉片風扇。分別以電壓 110 V、220 V 和頻率 60 Hz 來測試壓電風扇對電子裝置的冷卻效果，也同時分析和測試不同的振動薄片所造成的影響。作者發現，當固定壓電片的長度(L)，振動薄片的長度(l)增加反而造成振動薄片的共振頻率降低。最後測試出由 220 V 和 60 Hz 所驅動的連續型葉片(series-type fan)、振動薄片長度 $l=31.8$ mm、薄片材質 S6 時，有最大位移 35.5 mm、最大風速 3.1 m/s。且振動薄片的長度影響共振頻率較寬度來得顯著。

2007 年，Kosa et al.【13】研究一種新穎的推進法，原理是利用擺動的後尾使之可以在低雷諾數的流場前進。先利用機械、電和流體的耦合模型—放大實驗的模型—來分析出解析解。由解析分析出在後尾的長度等於 10 mm 時，可以使微小的機器人以最佳的速度 5 cm/s 推進。由實驗證明此推進法在低雷諾數確實可發揮效益。

1.4 研究內容

本文的研究，主要是利用計算流體力學和計算力學的方式來分析雙壓電振動幫浦之流固耦合問題。將壓電材料施以正負交替的電壓驅動平板，使薄板產生週期性的上下擺動。由於振動平板的擺動類似魚尾運動，我們將振動平板前端固定，可造成流體向後方流動，達到流體傳輸的功能。

流體的數值模擬中，我們採用非結構性網格的數值方法，流體之統御方程式採用 ALE 座標系統，以便於解決移動邊界的問題。利用有限體積法(Finite Volume Method)離散統御方程式，採用 PISO 壓力速度修正法和空間守恆定理(Space Conservation Law)來滿足連續方程式，可求得在每個時階流場中的情況。將流體所計算出流體壓力和流體剪力施加於 ANSYS 中振動平板的邊界，ANSYS 之振動平板再同時被施加電壓，來計算出下個時階的振動平板位移，觀察反覆的作動情況下之流場情形。並比較施加不同外部負載電壓之大小和頻率，來分析幫浦的流量大小，進而求得幫浦的最大流量。

並且探討壓電振動平板跟流體耦合後的振動情形，包含：共振頻率、擺動振幅。比較不同外部負載電壓和外部負載頻率，壓電致動器之致動情形。

二、數學模式

本文模擬之雙壓電振動幫浦其物理模型共包含流體、壓電材料、金屬材料，模型示意圖如《圖 2.1》，利用壓電和金屬材料所組成之壓電振動平板的擺動來推動流體，且流體將會回饋壓力和剪力給壓電和金屬，因此模擬計算必須同時利用流體力學和固體力學的數值方法，並且將流體固體耦合。

本章之數學模型共分為流體運動模式和固體運動模式部分，因為兩者的運動方程式之型式不同，以及不同的邊界條件關係，所以分別描述之。本文固體和流體詳細的模型尺寸示意圖如《圖 2.2》所示。

2.1 基本假設

2.1.1 流體假設

本文所假設的工作流體性質如下：不可壓縮流(incompressible Flow)，假設工作流體的密度為常數。忽略重力項(neglect body force)。非穩態流場(unsteady)，在本文模擬中，流場中的壓電振動平板會隨時間變化，平板的振動造成兩端進出口有流體流進或流出，故假設流場為非穩態的情況。

2.1.2 固體假設

二維之振動平板假設為有限厚度之平板，壓電致動器型式採用棒型致動器。

2.2 流體運動模式

2.2.1 ALE 座標系之統御方程式

在計算流體力學問題時若網格為靜止不動，一般是使用 Eulerian 座標系統。

Eulerian 座標系之統御方程式：

$$\text{連續方程式(Continuity Equation): } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\text{動量方程式(Momentum Equation): } \frac{\partial (\rho \vec{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) = -\nabla P + \nabla \cdot (\mu \nabla \vec{V}) \quad (2.2)$$

但在探討流固耦合時，是無法單獨使用 Eulerian 座標系統求解的複雜流場，因此本文利用 ALE 座標系統。在 ALE(arbitrary Lagrangian-Eulerian)座標系統下之網格，不管網格移動的速度分佈成線性或非線性，皆可容易的描述。當網格的移

動速度和流體速度相等時，可視為 Lagrangian 系統；當存在網格固定不動時，則可視為 Eulerian 系統。所以 ALE 座標系適合用來分析流體的交界面、自由表面流和最常見的移動邊界問題。本文研究的流場即是必須使用 ALE 座標系求解移動邊界問題。

ALE 座標系之統御方程式：

$$\text{連續方程式(Continuity Equation): } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho(\bar{V} - \bar{V}_g)] = 0 \quad (2.3)$$

$$\text{動量方程式(Momentum Equation): } \frac{\partial(\rho\bar{V})}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho(\bar{V} - \bar{V}_g)\bar{V}] = -\nabla P + \nabla \cdot (\mu\nabla\bar{V}) \quad (2.4)$$

其中 μ 為黏滯係數、 ρ 為流體密度、 ∇P 為壓力梯度、 \bar{V} 為流體速度、 \bar{V}_g 為網格速度、 $\bar{V} - \bar{V}_g$ 代表流體相對於網格的流速。比較 Eulerian 和 ALE 座標系之統御方程式可明顯的發現，ALE 座標系之統御方程式只是在連續方程式和動量方程式中的對流項多了相對速度的概念。

2.2.2 流場邊界條件(Boundary Condition)

(A) 出入口邊界條件

本文模擬的進出口邊界為壓力邊界。

壓力邊界：考慮兩端出入口在不同壓力差的流量變化，出入口的速度計算同樣採用對流邊界條件，其數學式子和詳細計算過程稍後在 3.1.3.3 節介紹。

(B) 牆邊界條件

牆為無滑移邊界條件(No-Slip Condition)，牆和流體速度相等 ($u - u_{wall} = 0$ ， $v - v_{wall} = 0$)。於本文研究中，在流體部分將壓電振動平板也設為牆邊界條件，因此壓電振動平板為具有速度之牆邊界，且壓電振動平板運動時將會改變流場之幾何形狀。

2.3 固體運動模式

2.3.1 結構運動方程式

結構受外力作用，其運動狀態可以用應力型式來表現，稱為 Navier equation。

結合適當的邊界條件和壓電方程式，便可求得棒型壓電致動器之位移、應變和應力等性質。下式即為直角座標系之 Navier equation：

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + f_i = \rho \ddot{u}_i + f_i \quad (2.5)$$

其中 σ_{ij} 代表應力、 u_i 代表位移、 ρ 代表結構密度、 f_i 代表作用在結構上之外力。

2.3.2 壓電方程式

壓電材料是具有壓電效應和焦電效應的一種材料，這些效應構成了物理中的力學、電學和熱學之間的交互關係。而早在 1880 年居禮兄弟(Piere Curie and Jacques Curie)即發現了壓電效應，至今仍然被廣泛的運用在生活之中，更表現出越簡單的科技，實是越容易被廣泛的長久使用，【14】。

本文選用之壓電材料必須將電能(電學)轉換機械能(力學)，因此採用機電交互作用為 e-form 型式的壓電方程式：

$$\begin{aligned} T_p &= c_{pq}^E S_q - e_{pj} E_j \\ D_i &= e_{iq} S_q + \varepsilon_{ij}^S E_j \end{aligned} \quad (2.6)$$

其中 E 代表電場、T 代表應力、D 代表電位移、S 代表應變。c 代表剛性常數、e 代表壓電常數、 ε 代表介電常數。下標第一個符號代表應力所在平面的法線方向；下標第二個符號代表應力的作用方向；其中 p,q=1、2、...、6；i,j=1、2、3；且由《圖 2.3》可知 1、2、3 各代表 x、y、z 軸方向，4、5、6 各代表 yz、zx、xy 方向。因此可知(2.5)式和(2.6)式之應力應關係為 $\sigma_{11} = T_1$ 、 $\sigma_{22} = T_2$ 、 $\sigma_{33} = T_3$ 、 $\sigma_{23} = T_4$ 、 $\sigma_{13} = T_5$ 、 $\sigma_{12} = T_6$ 。

2.3.3 壓電參數矩陣極化方向轉換

將 e-form 型式的壓電方程式完全以矩陣展開可得：

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & c_{14}^E & c_{15}^E & c_{16}^E & e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ c_{21}^E & c_{22}^E & c_{23}^E & c_{24}^E & c_{25}^E & c_{26}^E & e_{12} & e_{22} & e_{32} \\ c_{31}^E & c_{32}^E & c_{33}^E & c_{34}^E & c_{35}^E & c_{36}^E & e_{13} & e_{23} & e_{33} \\ c_{41}^E & c_{42}^E & c_{43}^E & c_{44}^E & c_{45}^E & c_{46}^E & e_{14} & e_{24} & e_{34} \\ c_{51}^E & c_{52}^E & c_{53}^E & c_{54}^E & c_{55}^E & c_{56}^E & e_{15} & e_{25} & e_{35} \\ c_{61}^E & c_{62}^E & c_{63}^E & c_{64}^E & c_{65}^E & c_{66}^E & e_{16} & e_{26} & e_{36} \\ e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} & e_{15} & e_{16} & \varepsilon_{11}^S & \varepsilon_{12}^S & \varepsilon_{13}^S \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} & e_{25} & e_{26} & \varepsilon_{21}^S & \varepsilon_{22}^S & \varepsilon_{23}^S \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} & e_{35} & e_{36} & \varepsilon_{31}^S & \varepsilon_{32}^S & \varepsilon_{33}^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

當壓電材料的極化方向為 Z 方向時，上方矩陣可表示如下：

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{31} \\ c_{12}^E & c_{11}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{31} \\ c_{13}^E & c_{13}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33}^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$c_{66}^E = \frac{c_{11}^E - c_{22}^E}{2} \quad (2.9)$$

欲將 Z 方向極化的壓電材料參數轉換為 X 方向極化和 Y 方向極化，必須做座標轉換的處理，因此 X 方向極化的壓電方程式表示如下：

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{33}^E & c_{13}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 & e_{33} & 0 & 0 \\ c_{13}^E & c_{11}^E & c_{12}^E & 0 & 0 & 0 & e_{31} & 0 & 0 \\ c_{13}^E & c_{12}^E & c_{11}^E & 0 & 0 & 0 & e_{31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{66}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 & 0 & e_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & e_{15} & 0 \\ e_{33} & e_{31} & e_{31} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33}^S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & \varepsilon_{11}^S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{11}^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Y 方向極化的壓電方程式：

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{13}^E & c_{12}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{31} & 0 \\ c_{13}^E & c_{33}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{33} & 0 \\ c_{12}^E & c_{13}^E & c_{11}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & e_{15} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & \varepsilon_{11}^S & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{33} & e_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{33}^S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{11}^S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

本文之模型，定義水平方向為 X 方向、垂直方向為 Y 方向，因此選定 Y 方向極化的壓電方程式，詳細的轉換座標方法可參考附錄 1，而本文之極化情況和致動方式如《圖 2.4》。

2.3.4 振動平板的限制條件(Constraint)

我們將壓電振動平板一端固定(clamped)，另一端為自由端，如《圖 2.1》可做往復式的擺動，其限制條件數學表示式如下：

$$u(0,t)=0 \quad , \quad u_x(0,t)=0 \quad (2.12)$$

其中 u 代表位移、 u_x 代表應變(strain)。

壓電振動平板與流體接觸的周圍必須受外力的限制條件，外力即流體的壓力和流體剪力。

壓電振動平板之壓電部分具有電壓的限制條件。

2.4 流固耦合

本文之模擬首先由電壓驅動振動平板移動，此時壓電振動平板的移動造成流場的幾何形狀變形和流體的流動，流體產生壓力和剪力施加於振動平板上，如此反覆的運動使流體運動速度逐漸變大並且到達週期性的變化，進而觀察中間轉換過程和到達週期性變化時的流場情況以及固體結構運動情形。

三、數值方法

本文之數值方法同樣也分為流體力學和固體力學部份，其中流體力學數值方法運用於 CFD 程式共包含有限體積法、空間守恆定理和 PISO 演算法；固體力學數值方法則是利用有限元素法之套裝商用軟體 ANSYS 來做分析。

3.1 流體力學數值方法

本文計算流體力學部份，是對第二章所提到的 ALE 座標系之統御方程式做處理，利用有限體積法離散統御方程式，並且運用空間守恆定理和 PISO 演算法來滿足流體之連續性，並進而求解出流場內各個位置的速度和壓力值。

3.1.1 有限體積法(Finite Volume Method)

3.1.1.1 有限體積法的離散

我們將前一章裡所提到的統御方程式(2.4)式改成下列通式：

$$\frac{\partial(\rho\vec{V})}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho(\vec{V} - \vec{V}_g)\vec{V}] = \nabla \cdot (\mu\nabla\vec{V}) + q \quad (3.1)$$

將上式積分後可得下式：

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\forall} \rho\vec{V} d\forall + \iiint_{\forall} \nabla \cdot [\rho(\vec{V} - \vec{V}_g)\vec{V}] d\forall = \iiint_{\forall} \nabla \cdot (\mu\nabla\vec{V}) d\forall + \iiint_{\forall} q d\forall \quad (3.2)$$

【非穩態項】 【對流項】 【擴散項】 【源項】

透過高斯散度定理，將(3.2)式的對流項和擴散項由體積分轉換為面積分，可得下式：

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\forall} \rho\vec{V} d\forall + \oiint_S \rho(\vec{V} - \vec{V}_g)\vec{V} \cdot d\vec{S} = \oiint_S \mu\nabla\vec{V} \cdot d\vec{S} + \iiint_{\forall} q d\forall \quad (3.3)$$

3.1.1.2 離散化

3.1.1.2.1 非穩態項(Unsteady Term)

對於有移動邊界的不可壓縮流，其網格的體積會隨時間而改變。

$$\iiint_{\forall} \frac{\partial(\rho\vec{V})}{\partial t} d\forall = \frac{\rho \cdot \Delta\forall}{\Delta t} (\vec{V}^n - \vec{V}^o) \quad (3.4)$$

\vec{V}^o 為前一個時間的已知數、 \vec{V}^n 為這一個時間的未知數，因此在計算上可將 \vec{V}^o 移進

源項。

3.1.1.2.2 對流項(Convection Term)

將(3.3)式中的對流項離散化，可得下式：

$$\oint_S \rho (\vec{V} - \vec{V}_g) \vec{V} \cdot d\vec{S} = \sum_f \dot{m}_f \vec{V}_f = \sum_f F_f^C \quad (3.5)$$

其中下標 f 代表面上的值、 \dot{m}_f 代表流經面上的質量流率(mass flow rate)、 \vec{S}_f 代表面之法向量、 F_f^C 代表面上的對流通量，而對於在面上的值，我們是透過相鄰網格以線性內差的方式求之。流體相對於面上的質量流率定義如下：

$$\dot{m}_f^r = \rho_f (\vec{V} - \vec{V}_g)_f \cdot \vec{S}_f \quad (3.6)$$

上式為 ALE 座標系統御方程式的重點，因加進了網格速度的變化，網格的移動速度會直接影響面上的質量流率。因此上式的計算方式必須配合空間守恆定理，詳細過程稍後於 3.1.2.3 節作介紹。

另外，本文求解對流通量採用的方式為一階上風法(first-order upwind difference)和中央差分法(second-order central difference)的混合方式，稱作混合差分法(hybrid difference)，因此對流通量可表示如下：

$$F_f^C = F_f^{UD} + \gamma (F_f^{CD} - F_f^{UD}) \quad (3.7)$$

其中 γ 的值介於 0~1 之間，當 $\gamma=0$ 時為一階上風法、 $\gamma=1$ 時為中央差分法。上式等號右手邊第二項為前一個時間的值，故將其移至源項中計算。

在一階上風法裡，面上的值取決於其上游。例如： \dot{m}_f 由主格點流向外，面上的值等於主格點的值； \dot{m}_f 由外流向主格點，面上的值等於鄰近格點的值。

在中央差分法裡， \vec{V}_f 的值取決於相鄰網格的內差：

$$\vec{V}_f = (1-w)\vec{V}_p + w\vec{V}_{nb} \quad (3.8)$$

其中 w 為權重係數(weighting factor)、下標 P 代表主格點的值、下標 nb 代表鄰近格點的值。

最後將一階上風法和中央差分法的關係式代入(3.7)式可得：

$$F_f^C = \max(\dot{m}_f, 0)\bar{V}_p^n + \max(-\dot{m}_f, 0)\bar{V}_{nb}^n + \gamma \left\{ \dot{m}_f \left[(1-w)\bar{V}_p^o + w\bar{V}_{nb}^o \right] - \max(\dot{m}_f, 0)\bar{V}_p^o - \max(-\dot{m}_f, 0)\bar{V}_{nb}^o \right\} \quad (3.9)$$

其中上標 n 代表這個時間的未知數、上標 o 代表前一個時間的已知數。最後將面上對流通量的已知數移進源項。

3.1.1.2.3 擴散項(Diffusion Term)

將(3.3)式中的擴散項離散化，可得下式：

$$\oiint_S \mu \nabla \bar{V} \cdot d\bar{S} \approx \sum_f \mu_f (\nabla \bar{V}_f) \cdot \bar{S}_f = \sum_f F_f^D \quad (3.10)$$

其中 μ_f 代表面上的黏滯係數、 F_f^D 代表面上的擴散通量。針對非結構性網格問題，

在擴散項的部份我們利用 Over-Relax 的方法來近似原來的面法向量。首先將 \bar{S}_f 分成兩部分表示：

$$\bar{S}_f = \bar{d} + (\bar{S}_f - \bar{d}) \quad (3.11)$$

上式等號右手邊第一項為正交向量、等號右手邊第二項為非正交向量。而正交向量 \bar{d} 的定義如下：

$$\bar{d} = \frac{|\bar{S}_f|^2}{\bar{\delta}_{pnb} \cdot \bar{S}_f} \bar{\delta}_{pnb} \quad (3.12)$$

其中 $\bar{\delta}_{pnb}$ 定義如《圖 3.1》所示。將(3.11)式和(3.12)式代入(3.10)式可得：

$$F_f^D = \mu_f \nabla \bar{V}_f \cdot \bar{S}_f = \mu_f \nabla \bar{V}_f \cdot \bar{d} + \mu_f \nabla \bar{V}_f \cdot (\bar{S}_f - \bar{d}) = \frac{\mu_f |\bar{S}_f|^2}{\bar{\delta}_{pnb} \cdot \bar{S}_f} (\bar{V}_{nb}^n - \bar{V}_p^n) + \mu_f \Delta \bar{V}_f \cdot (\bar{S}_f - \bar{d}) \quad (3.13)$$

其中上標 n 代表這個時間的未知數、上標 o 代表前一個時間的已知數。且上式等號右手邊第一項為正交項、第二項為非正交項。最後同樣地，將面上擴散通量的已知數移進源項。

3.1.1.2.4 源項(Source Term)

在計算中，我們將壓力梯度視為已知值，並放至源項。對於非結構性網格問題，求解壓力梯度會需要用到邊界上的壓力，因此做以下推導：

$$P_b - P_p = \nabla P \cdot \bar{\delta}_{pnb} \quad (3.14)$$

其中下標 b 代表壁面上的中點、 $\bar{\delta}_{pnb}$ 代表 P 到 b 距離向量如《圖 3.2》。

將壓力梯度利用(3.2)式和(3.3)式相同之方法近似，並離散化可得：

$$\nabla P = \frac{1}{\nabla} \sum_f P_f \bar{S}_f = \frac{1}{\nabla} \left(P_b \bar{S}_b + \sum_{f \neq b} P_f \bar{S}_f \right) \quad (3.15)$$

其中 $f \neq b$ 代表不包含邊界的其餘各面。將(3.15)式代入(3.14)式可得邊界上之壓力：

$$P_b = \frac{P_p + \frac{1}{\nabla} \sum_{f \neq b} P_f \bar{S}_f \cdot \bar{\delta}_{pb}}{1 - \frac{1}{\nabla} \bar{S}_b \cdot \bar{\delta}_{pb}} \quad (3.16)$$

3.1.1.3 線性代數式的整理

將前一小節所離散的非穩態項、對流項、擴散項及源項代回(3.3)式，可整理成下列的線性代數式：

$$A_p \bar{V}_p^n = \sum_{nb} A_{nb} \bar{V}_{nb}^n + S - \nabla P^o \Delta \nabla \quad (3.17)$$

其中 $A_p = \sum_{nb} A_{nb} + \rho \frac{\Delta \nabla}{\Delta t}$

$$A_{nb} = \frac{\mu_f |\bar{S}_f|^2}{\bar{\delta}_{pnb} \cdot \bar{S}_f} + \max(-\dot{m}_f, 0)$$

$$S = \sum_f \left\{ -\left[\gamma (F_f^{CD} - F_f^{UD}) \right]^o + \mu_f \nabla \bar{V}_f^o (\bar{S}_f - \bar{d}) \right\} + \rho \frac{\Delta \nabla}{\Delta t} \bar{V}^o$$

3.1.2 空間守恆定理(Space Conservation Law)

3.1.2.1 空間守恆定理的簡介

在計算移動邊界和移動網格的問題時，有一專門探討網格體積隨時間的變化是否守恆之定理，稱作空間守恆定理(Space Conservation Law)，表示式如下：

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\forall} d\forall + \oiint_S \bar{V}_g \cdot d\bar{S} = 0 \quad (3.18)$$

其中 \bar{V}_g 代表網格速度，詳細的推導過程稍後於 3.1.2.3 節中描述。

Demirdzic et al. 【1】已研究空間守恆定理應用於有限體積法，只要能解決人為造成的質量源(mass source)問題，在任意的網格移動速度和任意的時階皆能達到精確的模擬結果。

3.1.2.2 質量源(Mass Sources)

處理移動網格的問題時，我們必須計算每個時階的網格體積改變量，《圖 3.3》即是利用網格速度來計算時階中的體積改變。若在計算過程中，體積改變量處理的不完善，將可能產生質量源(mass source)，流場無法滿足空間守恆定理。因此必須注意是否產生質量源【15】。

為了清楚的介紹質量源，接下來所舉的例子皆以簡單的二維四邊型網格做解釋。以下即是產生質量源的例子。《圖 3.4》為分別運用顯式法(explicit scheme)和隱式法(implicit scheme)，利用網格面上的速度，來計算體積改變量。可發現顯式法會少算一塊體積，即《圖 3.4a》中的右上角空白區塊；而隱式法會多算一塊體積，即《圖 3.4b》中的右上角紅色區塊。少算或多算到的網格體積改變量，即稱為質量源。質量源所造成的誤差，將會影響數值模擬的準確度和收斂性。

為了降低質量源造成的誤差，我們可將時階縮小，如《圖 3.5》。可以發現《圖 3.5b》的質量源小於《圖 3.5a》的質量源，但此誤差還是會隨著時間累積。

因此我們直接利用，新舊網格各面的節點位置，算出網格體積改變量。如《圖 3.6》，我們找出網格一個面移動前後的節點共四點，利用這四點的位置，算出此面移動造成的體積改變量。每個面都運用此算法，如此一來可精確的算出網格體積隨時間的改變量，以解決質量源的問題。

另外，在判斷網格體積的增加或漸少方面，我們是利用網格面的移動速度和面向量內積，取其值之正負來確定網格各面所掃過的體積為增加或減少。最後將網格各面所掃過的體積相加減，便可算出網格整體體積是增加或減小。

3.1.2.3 空間守恆定理

將連續方程式(2.3)式整理如下：

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\forall} \rho d\forall + \oiint_S \rho (\vec{V} - \vec{V}_g) \cdot d\vec{S} = 0 \quad (3.19)$$

若將上式假想為流體速度趨近於 0，可得控制體積的形狀和位置隨時間的改變式，即是空間守恆定理(3.18)式。再透過 3.1.1.2 節提到方式將(3.18)式離散化可得：

$$\frac{\forall^{n+1} - \forall^n}{\Delta t} - \sum_f (\vec{V}_g \cdot \vec{S})_f = 0 \quad (3.20)$$

在每個時階中，控制體積各個面所掃過的體積相加減，會等於新跟舊的整體體積的差值如下：

$$\frac{\forall^{n+1} - \forall^n}{\Delta t} = \frac{\sum_f \Delta \forall_f}{\Delta t} \quad (3.21)$$

其中 $\Delta \forall_f$ 為一個面掃過的體積， $f = e, w, n, s$ ，如《圖 3.7》所示。將(3.21)式代入(3.20)

式可得：

$$(\vec{V}_g \cdot \vec{S})_f = \frac{\Delta \forall_f}{\Delta t} = \dot{\forall}_f \quad (3.22)$$

因此由(3.6)式所定義的 \dot{m}_f^r 可表示如下：

$$\dot{m}_f^r = \rho_f (\vec{V} - \vec{V}_g)_f \cdot \vec{S}_f = \rho_f \vec{V}_f \cdot \vec{S}_f - \rho_f \dot{\forall}_f \quad (3.23)$$

上式將 $\vec{V}_g \cdot \vec{S}_f$ 提出變為 $\dot{\forall}_f$ ，即是採用 3.1.2.2 節所提到的計算方法，直接算出網格

各面的體積改變量，因此 \dot{m}_f^r (流體相對於面上的質量流率) 將不會產生質量源。

接下來必須讓連續方程式滿足空間守恆定理，因此將(3.19)式離散：

$$\rho \frac{\forall^{n+1} - \forall^n}{\Delta t} + \sum_f \dot{m}_f^r = 0 \quad (3.24)$$

將(3.23)式代入上式：

$$\rho \frac{\forall^{n+1} - \forall^n}{\Delta t} + \sum_f \rho_f \vec{V}_f \cdot \vec{S}_f - \left(\rho_f \frac{\forall^{n+1} - \forall^n}{\Delta t} \right) = 0$$

$$\sum_f \rho_f \bar{V}_f \cdot \bar{S}_f = 0 \quad (3.25)$$

上式即為不可壓縮流之連續方程式的差分形式，且可表示如下：

$$\nabla \cdot (\rho \bar{V}) = 0 \quad (3.26)$$

上式即為不可壓縮流之連續方程式的微分形式。因此本文的 ALE 統御方程式的連續方程式(2.3)式將簡化為和網格速度無關的(3.26)式，並且再配合(2.4)式的動量方程式來描述本文流體的運動模式。

3.1.2.4 整理 SCL 應用於 FVM 及 PISO

有限體積法中，在離散化對流項(3.6)式所定義出的 m'_f (流體相對於面上的質量流率)，必須運用(3.23)式的方式計算，避免造成質量源的累積。本章推導出(3.26)式連續方程式將運用於稍後介紹的 PISO 壓力速度修正法當中的(3.41)式和(3.47)式，詳細的過程稍後於 3.1.3.2 節中討論。

3.1.3 PISO 演算法

3.1.3.1 PISO 演算法的簡介

至今已發展出幾種壓力速度修正法，即包含可求解非穩態問題的 PISO 演算法，其他還有專門求解穩態問題的 SIMPLE、SIMPLER 和 SIMPLEC 等。壓力速度修正法應用於本研究，主要是為了滿足質量守恆以及修正第三章離散過後的統御方程式所解出的速度場和壓力值。

Issa【16】於 1986 年發展出非疊代的 PISO(Pressure Implicit with Splitting of Operators)壓力速度修正演算法，來計算非穩態可壓縮流的問題。而 Issa 證實 PISO 同時也適合求解需要反覆疊代的穩態流場問題。因此本文採用 PISO 演算法來求解非穩態不可壓縮流流場。PISO 共包含一個預測步驟和兩次修正步驟，詳細過程將在後面幾節介紹。

3.1.3.2 速度與壓力之間的耦合

3.1.3.2.1 預測步驟(Predictor Step)

將(3.17)式表示如下：

$$A_p \bar{V}_p^* = \sum_{nb} A_{nb} \bar{V}_{nb}^* + (S - \nabla P_p^o \Delta \nabla) \quad (3.27)$$

其中 \bar{V}^* 代表未修正的速度場、 P^o 代表未修正的壓力值。利用現有(guessed)的壓力值 P^o 求解上式動量方程式，可得到速度場 \bar{V}^* ，但並不滿足連續方程式。因此我們必須利用後面的兩次修正步驟，修正速度場和壓力值來滿足連續方程式和空間守恆定理。

3.1.3.2.2 第一次修正步驟(1st Corrector Step)

將(3.25)式移項整理過後，主格點速度場可表示如下：

$$\bar{V}_p^* = \frac{\sum_{nb} A_{nb} \bar{V}_{nb}^* + S}{A_p} - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_p \nabla P_p^o = \bar{H}_p^* - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_p \nabla P_p^o \quad (3.28)$$

其中 \bar{H}_p^* 為 \bar{V}_{nb}^* 的函數。

同樣的，控容面上的速度與壓力關係式可透過(3.28)式表示為：

$$\bar{V}_f^* = \bar{H}_f^* - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \nabla P_f^o \quad (3.29)$$

另外

$$\bar{H}_f^* = \bar{V}_f + \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \nabla P_f \quad (3.30)$$

將(3.30)式代入(3.29)式，控容面上的速度與壓力關係式最後可表示成：

$$\bar{V}_f^* = \bar{V}_f + \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \bar{\nabla} P_f - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \nabla P_f^o \quad (3.31)$$

上式括弧中的值是取主格點和鄰近格點的平均值，如下：

$$\left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_p + \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_{nb} \right] \quad (3.32)$$

且(3.31)式中，上標"—"表示由主格點 P 與控容面 f 相鄰之格點 nb 內差而得，如下：

$$\bar{\nabla} P_f = w_p \nabla P_{nb} + (1 - w_p) \nabla P_p \quad (3.33)$$

$$\bar{\vec{V}}_f = w_p \bar{\vec{V}}_{nb} + (1-w_p) \bar{\vec{V}}_p \quad (3.34)$$

其中 w_p 為權重因子(weighting factor)。

未修正的面上質量流率 \dot{m}_f^* ，可寫成下式：

$$\begin{aligned} \dot{m}_f^* &= \rho_f \bar{\vec{V}}_f^* \cdot \bar{\vec{S}}_f \\ &= \rho_f \bar{\vec{V}}_f \cdot \bar{\vec{S}}_f - \rho_f \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \left(\frac{|\bar{\vec{S}}_f|^2}{\bar{\vec{\delta}}_{Pnb} \cdot \bar{\vec{S}}_f} \right) [(P_{nb} - P_p) - \nabla P_f \cdot \bar{\vec{\delta}}_{Pnb}] \end{aligned} \quad (3.35)$$

而上式也必需避免產生質量源，因此利用(3.23)式的方法，可得：

$$\dot{m}_f^* = \rho_f \bar{\vec{V}}_f \cdot \bar{\vec{S}}_f - \rho_f \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \left(\frac{|\bar{\vec{S}}_f|^2}{\bar{\vec{\delta}}_{Pnb} \cdot \bar{\vec{S}}_f} \right) [(P_{nb} - P_p) - \nabla P_f \cdot \bar{\vec{\delta}}_{Pnb}] \quad (3.36)$$

依照(3.28)式的形式，修正後的速度與壓力關係式可表示為：

$$\bar{\vec{V}}_p^{**} = \bar{H}_p^* - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_p \nabla P_p^* \quad (3.37)$$

其中 $\bar{\vec{V}}_p^{**}$ 為第一次修正後的速度、 P_p^* 為第一次修正後的壓力。

將(3.37)式與(3.28)式相減，可得速度修正量和壓力修正量的關係式如下：

$$\bar{\vec{V}}_p' = - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_p \nabla P_p' \quad (3.38)$$

其中 $\bar{\vec{V}}_p' \equiv \bar{\vec{V}}_p^{**} - \bar{\vec{V}}_p^*$ ， $\nabla P_p' = \nabla P_p^* - \nabla P_p^o$ ，上標'' ' '即為我們的修正量。上述的方程式

是在網格主格點上推出，其亦可使用在每個主控面上。

$$\bar{\vec{V}}_f' = - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \nabla P_f' \quad (3.39)$$

第一次修正後的流量值可表示如下：

$$\begin{aligned} \dot{m}_f^{**} &= \dot{m}_f^* + \dot{m}_f' \\ &= \dot{m}_f^* + \rho_f \bar{\vec{V}}_f' \cdot \bar{\vec{S}}_f \end{aligned}$$

$$= \dot{m}_f^* - \rho_f \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \frac{|\bar{S}_f|^2}{\bar{\delta}_{Pnb} \cdot \bar{S}_f} (P_{nb}' - P_p') - \rho_f \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \nabla P_f' \cdot (\bar{S}_f - \bar{d}) \quad (3.40)$$

為了滿足空間守恆定理，第一次修正後的流量值必須滿足(3.25)式，如下：

$$\sum_f \dot{m}_f^{**} = 0 \quad (3.41)$$

最後將(3.40)式代入(3.41)式，可整理成下列的線性代數式：

$$A_p^P P_p' = \sum_f A_{nb}^P P_{nb}' + S_{p1}^1 + S_{p2}^1 \quad (3.42)$$

其中上標 P 代表壓力修正方程式、上標”1”代表第一次修正；

$$A_{nb}^P = \rho_f \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \frac{|\bar{S}_f|^2}{\bar{\delta}_{Pnb} \cdot \bar{S}_f}$$

$$A_p^P = \sum_f A_{nb}^P$$

$$S_{p1}^1 = -\sum_f \dot{m}_f^*$$

$$S_{p2}^1 = \sum_f \rho_f \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \nabla P_f' \cdot (\bar{S}_f - \bar{d})$$



3.1.3.2.3 第二次修正步驟(2nd Corrector Step)

透過求解(3.42)式，進而得到了第一次修正過後的速度 \bar{V}^{**} 和壓力值 P^* 。第二次修正步驟中，主格點與相鄰格點速度與壓力關係式可表示為：

$$\bar{V}_p^{***} = \bar{H}_p^{**} - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_p \nabla P_p^{**} \quad (3.43)$$

將(3.43)式和(3.37)式相減，速度修正量及壓力修正量可表示成下面關係：

$$\bar{V}_p'' = \bar{H}_p' - \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_p \nabla P_p'' \quad (3.44)$$

其中 $\bar{V}'' \equiv \bar{V}^{***} - \bar{V}^{**}$ ， $\bar{V}' \equiv \bar{V}^{**} - \bar{V}^*$ ， $\nabla P_p'' = \nabla P_p^{**} - \nabla P_p^*$ 。

因此流量修正可表示成下式：

$$\dot{m}_f'' = -\rho_f \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \frac{|\bar{S}_f|^2}{\bar{\delta}_{Pnb} \cdot \bar{S}_f} (P_{nb}'' - P_p'') - \rho_f \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \nabla P_f'' \cdot (\bar{S}_f - \bar{d}) + \rho_f \frac{\sum_f A_{nb} \bar{V}_{nb}'}{A_p} \cdot \bar{S}_f \quad (3.45)$$

第二次修正後的流量值可表示如下：

$$\dot{m}_f^{***} = \dot{m}_f^{**} + \dot{m}_f'' \quad (3.46)$$

為了滿足空間守恆定理，第二次修正後的流量值也必須滿足(3.25)式，如下：

$$\sum_f \dot{m}_f^{***} = \sum_f \dot{m}_f^{**} + \sum_f \dot{m}_f'' = 0 \quad (3.47)$$

將上式結合(3.41)式可得：

$$\sum_f \dot{m}_f'' = 0 \quad (3.48)$$

將(3.45)式代入(3.48)式，可整理成下列的線性代數式：

$$A_p^p P_p'' = \sum_f A_{nb}^p P_{nb}'' + S_{P1}^2 + S_{P2}^2 \quad (3.49)$$

其中係數 A_p^p 、 A_{nb}^p 和(3.42)式之係數相同，上標“2”代表第二次修正；

$$S_{P1}^2 = -\rho_f \left(\frac{\sum_f A_{nb} \bar{V}_{nb}'}{A_p} \right)_f \cdot \bar{S}_f$$

$$S_{P2}^2 = \sum_f \rho_f \left(\frac{\Delta \nabla}{A_p} \right)_f \nabla P_f'' \cdot (\bar{S}_f - \bar{d})$$

3.1.3.2.4 壓力修正方程式的整理

在兩次的修正步驟中，為了使結果更可靠，我們將每次的修正步驟再分成兩部分運算：第一部分僅包含源項 S_{P1} ，而第二部分僅包含 S_{P2} 。求解壓力修正代數方程式順序如下：

$$\text{第一次修正} \begin{cases} \text{正交修正} & : A_p P_p' = \sum_f A_{nb} P_{nb}' + S_{P1}^1 \\ \text{非正交修正} & : A_p P_p' = \sum_f A_{nb} P_{nb}' + S_{P2}^1 \end{cases}$$

$$\text{第二次修正} \begin{cases} \text{正交修正} & : A_p P_p'' = \sum_f A_{nb} P_{nb}'' + S_{P1}^2 \\ \text{非正交修正} & : A_p P_p'' = \sum_f A_{nb} P_{nb}'' + S_{P2}^2 \end{cases}$$

其中 S_{P2} 為非正交的源項，對於正交網格 $S_{P2} = 0$ 。另外，對於幾何外型較為複雜的非結構性網格問題，可重複比較多次的非正交修正。

3.1.3.3 邊界條件的給定

3.1.3.3.1 進出口壓力邊界的流量計算

欲求解壓力邊界的流量，必須先在進出口邊界處設定壓力值，再利用此壓力值修正出入口的流量。步驟如下：

第一步：將壓力邊界相鄰的網格點上之壓力，設定成給定的值。

第二步：再求解兩次壓力修正方程式中，將壓力邊界相鄰的網格點上之壓力修正值設成 0，即 $P' = 0$ 如《圖 3.8》。因此壓力修正方程式的係數和源項必須做以下的調整：

$$A_p^p P_p' = \sum_f A_{nb}^p P_{nb}' + S_{P1} + S_{P2} \quad (3.50)$$

其中 $S_{P1} = S_{P2} = 0$ ， $A_{nb}^p = 0$

第三步：求解完壓力修正方程式，最後讓壓力邊界相鄰之網格滿足質量守恆定理：

$$\sum_f \dot{m}_f = 0 \quad (3.51)$$

如《圖 3.9》所示，壓力邊界上的質量流率可表示為下式：

$$\dot{m}_{f4} = -(\dot{m}_{f1} + \dot{m}_{f2} + \dot{m}_{f3}) \quad (3.52)$$

3.1.3.3.2 進出口壓力邊界的速度計算

欲計算壓力邊界上的進出口速度，本文採用對流邊界條件(Convective Boundary Condition)，其數學式子為：

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial t^*} + u_c^* \frac{\partial \phi^*}{\partial x^*} = 0 \quad (3.53)$$

將上式離散後可得：

$$\frac{\phi_b^{*n} - \phi_b^{*o}}{\Delta t^*} + u_c^* \frac{\phi_b^{*n} - \phi_{nb}^{*n}}{\Delta x^*} = 0 \quad (3.54)$$

其中上標 n 、 o 代表新跟舊的值，下標 b 、 nb 代表壓力邊界和其相鄰網格的值， u_c^* 代表無因次之對流流速。將(3.54)式整理如下：

$$\phi_b^{*n} = \frac{\phi_b^{*o} + Cr \phi_{nb}^{*n}}{1 + Cr} \quad (3.55)$$

其中 $Cr = \frac{u_c^* \Delta t^*}{\Delta x^*}$ ， Cr 為 Courant number。

3.1.3.3 牆邊界條件的計算

流體力學計算中的流道上下壁面和壓電振動平板皆視為牆邊界條件。流道上下壁面之牆是固定不動，因此牆速度 V_{wall} 和流體速度 V 皆為 0，即 ($V = 0$ 、 $V_{wall} = 0$)。而壓電振動平板的牆邊界條件中的牆是會隨著時間改變位置，因此數學式子為牆的速度和流體速度相等，即 ($V_{wall} = V$)。

3.2 固體力學數值方法

3.2.1 有限元素法(Finite Element Method)軟體基本架構

有限元素法即是將一個實體的物件，從點開始、線、面、體積將物體的實際情況描述好後，將其分割為不同大小、不同形狀、不同材料和不同的區域，而每個小區域稱之為元素，再進行處理。而一個實體物件不可能分割為無限個元素，皆為有限的分割，因此稱為有限元素法。

分析者利用自己領域的需求，將每一個元素節點上的作用力方程式推導出來，並將整個物體中的所有元素組合，構成最後的系統聯立方程式進行求解。

一般完整的有限元素法分析程式必須包含前處理(Preprocessing)、求解器(Solution)和後處理(Postprocessing)三大部分。

前處理：選用適當元素、定義材料特性矩陣、建立模型、元素切割。

求解器：選擇分析類型、定義限制條件、求解線性代數方程式。

後處理：將求解結果例如：位移、應變、應力、頻率等資料，利用動畫、等位圖形、表格、數據歸納表…等不同方式將結果呈現出來。

3.2.2 ANSYS 商用軟體

ANSYS 為目前較受歡迎的有限元素法電腦設計程式軟體之一，ANSYS 軟體從 1971 年的 2.0 版發展至今 2010 年的 12.0 版，本文固體力學部份的分析即是採用 ANSYS 的 11.0 版。ANSYS 軟體於工程實際上的運用相當的廣泛，包括航太工程、機械工程、土木工程、甚至電機和電子工程皆有涉及到，並且其準確度和可信度已達到某種程度的標準。

ANSYS 於固體結構力學的分析範圍包含，模態分析、調和分析、暫態分析、破壞力學分析、挫屈分析、線性與非線性材料分析、線性與非線性幾何分析、最佳化分析等。而 ANSYS 的使用方式共分為交談模式(interactive mode)和非交談模式(batch mode)，交談模式即是進入 ANSYS 軟體後，點擊圖形選項和指令選項進行模型的建立、檢視和修改模型，完成整個分析流程，此方式較為人性化且適合初學者使用。非交談模式則是將整個分析流程包含建模和邊界條件等指令儲存於文字檔案裡，再一次給到 ANSYS 裡直接分析。非交談模式難度較高，但對於非常複雜的模型或流程、同一個模型進行不同的分析則非常方便，並且在重建模型時較不易出錯、文字檔裡較容易除錯、元素分割方便編號等好處。

本文使用 ANSYS 軟體的方式即是採用非交談模式方法，所運用到的分析包含模態分析、調和分析和暫態分析。

各個分析方法詳細的步驟以及建模方式、限制條件給定、求解器設定將於稍後第四章內的 4.2 節、4.4 節和 4.5 節內，分別詳述。

3.2.3 限制條件的給定

3.2.3.1 壁面剪力(Shear Force)

在流場的計算中，相鄰壁面的網格，必須計算其壁面剪力，個別代號如《圖 3.10》。其中 P 代表相鄰壁面之主格點、w 為壁面、 \bar{S}_w 為壁面之面向量、 $\bar{\tau}_w$ 為壁面剪應力(shear stress)、 δn 為 P 點至壁面 w 的垂直距離、 \bar{n} 為壁面朝向格子之單位法向量。又 P 點之速度為 \bar{V}_p 、壁面之速度為 \bar{V}_w ，因此主格點 P 相對於壁面 w 之相

對速度可表示為：

$$\delta\vec{V} = \vec{V}_p - \vec{V}_w \quad (3.56)$$

壁面朝向格子之單位法向量 \vec{n} 為：

$$\vec{n} = -\frac{S_{wx}\vec{i} + S_{wy}\vec{j}}{|\vec{S}_w|} \quad (3.57)$$

因此可計算出，垂直壁面的相對速度分量為：

$$\begin{aligned} \delta\vec{V}^\perp &= (\delta\vec{V} \cdot \vec{n})\vec{n} \\ &= \frac{\delta u S_{wx} + \delta v S_{wy}}{|\vec{S}_w|} \frac{S_{wx}\vec{i} + S_{wy}\vec{j}}{|\vec{S}_w|} \\ &= \frac{1}{|\vec{S}_w|^2} (\delta u S_{wx}^2 + \delta v S_{wx} S_{wy}) \vec{i} + \frac{1}{|\vec{S}_w|^2} (\delta u S_{wx} S_{wy} + \delta v S_{wy}^2) \vec{j} \end{aligned} \quad (3.58)$$

可得平行壁面的相對速度分量為：

$$\begin{aligned} \delta\vec{V}^\parallel &= \delta\vec{V} - \delta\vec{V}^\perp \\ &= \frac{1}{|\vec{S}_w|^2} (\delta u S_{wy}^2 - \delta v S_{wx} S_{wy}) \vec{i} + \frac{1}{|\vec{S}_w|^2} (-\delta u S_{wx} S_{wy} + \delta v S_{wx}^2) \vec{j} \end{aligned} \quad (3.59)$$

因此壁面剪應力為：

$$\vec{\tau}_w = \mu \frac{\delta\vec{V}^\parallel}{\delta n} \quad (3.60)$$

最後可得壁面剪力為：

$$\vec{F}_w = \mu \frac{\delta\vec{V}^\parallel}{\delta n} |\vec{S}_w| \quad (3.61)$$

將上式流場所算出的流體壁面剪力給於壓電振動平板與流體的接觸面上，成為壓電振動平板之外力負載限制條件。

3.2.3.2 壁面壓力

利用(3.16)式所計算出之流體壁面壓力給於壓電振動平板與流體的接觸面上，成為壓電振動平板之外力負載限制條件。

3.3 網格的移動

網格的運動方式大致有橢圓正交法(elliptic orthogonal method)、橢圓法(pure elliptic method)、線性內差法(linear interpolation method)【3】。本文研究之流場網格作動方式為根據線性內差方式運動，此網格移動方式較能節省程式的計算時間，但遇到彎曲角度很大的擺動時準確性會降低。如《圖 3.11》所示，本文將網格運動分為四個區塊分別定義線性內差，《圖 3.12》為一週期內的網格運動結果。

3.4 流固耦合演算流程

CFD 程式結合 ANSYS 軟體的在一個時階下的流固耦合演算步驟，如下：

步驟一：於 ANSYS 中給定壓電振動平板所受的電壓，並計算振動平板的位移，將位移結果給於 CFD 程式。

步驟二：CFD 程式利用壓電振動平板新的位移計算出流場網格移動過後的資訊，運用 FVM、SCL、PISO 計算出流場的速度場、壓力、剪力和流量，並將壁面壓力和壁面剪力給定於 ANSYS 中之壓電振動平板與流體的接觸面上。

重複步驟一和步驟二，到達欲求的時間及可結束程式，演算流程的關係圖可參考《圖 3.13》。

四、結果與討論

4.1 ANSYS 分析

本文共利用 ANSYS 做了模態分析(modal analysis)、調和分析(harmonic analysis)和暫態分析(transient analysis)，共選用 PLANE42、PLANE13、FLUID29 三種元素。PLANE42 為常見的二維固體元素，每個節點具有位移的自由度。PLANE13 為二維具有壓電性質的固體元素，每個節點的自由度包含位移、電壓和溫度。FLUID29 為二維流體元素，每個節點具有位移和壓力的自由度。

每種分析的過程，包含建模方法、設定參數和設定限制條件，將在後面小節分別詳細敘述。

4.2 模態分析

模態分析的主要目的為分析結構系統只受瞬間之初使外力後的自然頻率和振動模態。本文首先利用模態分析對壓電振動平板進行分析，所求得之自然頻率將於 4.3 節決定阻尼值，方可進行後續的調和分析及暫態分析。

4.2.1 ANSYS 建模

模型尺寸如《圖 2.2》所示之固體力學部份，金屬元素選用 PLANE42、壓電元素選用 PLANE13，壓電和金屬的材料參數列於表(一)、表(二)。首先建立模型重要的節點，再將點連成線，連線時設定每條線欲分割的數目，最後將線圍成 2 維平面。再來給定每個面的材料，並將每個面分割為若干個元素，即完成模型的建立，如《圖 4.1》。

模態分析之求解方法選用區塊 lanczos 法，取前 10 組自然頻率(natural frequency)。

限制條件為振動平板左端固定，水平及垂直方向無位移，示意圖如《圖 4.2》、完成模型如《圖 4.3》。

4.2.2 自然頻率

利用模態分析對壓電振動平板進行分析，求得壓電振動平板之自然頻率和模

態圖。將前 10 組之自然頻率列於表(三)，《圖 4.4》~《圖 4.6》分別為第一自然頻率至第三自然頻率之模態圖。

4.3 系統阻尼設定

在做完模態分析所求得之自然頻率為設定結構系統阻尼的重要參數，因為實際的物體結構皆具有阻尼。於接下來的調和分析 and 暫態分析都必須設定壓電振動平板的系統阻尼，在此節做本文之系統阻尼設定介紹。

本文於 ANSYS 內之阻尼給定方式選用 Rayleigh 阻尼(Rayleigh damping)，又稱為比例阻尼(proportional damping)。若結構之運動方程式以矩陣方式表示如下：

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F\} \quad (4.1)$$

其中 $[C]$ 為阻尼矩陣。比例阻尼的方式即是將 $[C]$ 替換為 $\alpha[M]$ 庫倫阻尼(Coulomb damping)和 $\beta[K]$ 結構阻尼(structural damping)的表示式，如下：

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (4.2)$$

又阻尼比和 α 、 β 的關係如下：

$$\alpha + \beta\omega_i^2 = 2\omega_i\zeta_i \quad (4.3)$$

其中 ω_i 代表第 i 個模態的自然角頻率、 ζ_i 代表第 i 個模態的阻尼比。因此只要給定兩組模型之自然角頻率和阻尼比，即可利用上式解聯立計算出 α 、 β 值，來表示 ANSYS 之阻尼矩陣。

本文之模態分析結果顯示第一自然頻率為 188、第二自然頻率為 1181，並給定阻尼比 0.01、0.1、1、15 代入(4.3)式，解出之解列於表(四)。

4.4 調和分析

調和分析之主要目的為探討結構系統受到週期性外力作用時，結構系統的穩態反應。本文利用調和分析對壓電振動平板進行分析，以求得當振動平板受電壓外力時，系統於不同阻尼比和不同外部負載頻率下的振幅穩態反應。

本文之調和分析共探討了兩種模型，一為和模態分析相同的模型，即單純壓

電振動平板。另一為水中之壓電振動平板，模型尺寸和《圖 2.1》相同。

4.4.1 單純壓電振動平板的 ANSYS 建模

此模型尺寸和模態分析相同，模型尺寸如《圖 2.1》之壓電和金屬部份，建模完成圖和《圖 4.1》相同。

分析之求解方法選用全解法，外部負載頻率的範圍為 5hz 至 40hz，頻率範圍內間隔為 5hz。阻尼比之給定列於表(四)。

限制條件同樣為振動平板左端固定；兩片壓電靠近流體的兩側給定電壓 0 伏特、靠近金屬兩側給定電壓 120 伏特。調和分析中所設定的限制條件示意圖可參考《圖 4.7》、模型完成圖如《圖 4.8》。

4.4.2 水中壓電振動平板的 ANSYS 建模

另一為水中之壓電振動平板，模型加入了流體元素選用 FLUID29，流體選用水，性質列於表(五)、模型尺寸如《圖 2.1》，建模完成圖如《圖 4.9》。其中流體元素和固體元素的共用節點必須做 ANSYS 指令「sf,all,fsi,1」定義流固耦合介面的處裡才可耦合，可參考附錄 2。

分析之求解方法同樣選用全解法，外力頻率的範圍同樣為 5hz 至 40hz，頻率範圍內間隔為 5hz。阻尼比之給定列於表(四)。

限制條件同樣為振動平板左端固定；兩片壓電靠近流體的兩側給定電壓 0 伏特、靠近金屬兩側給定電壓 120 伏特；流場兩端進出口壓力為 0、流場上下邊界和阻塊邊界的流體元素水平和垂直方向位移為 0。調和分析中所設定的限制條件可參考《圖 4.10》、模型完成圖如《圖 4.11》。

4.4.3 共振頻率(resonance frequency)和振幅

在 ANSYS 的調和分析中，做了兩種模型來比較，一是單純振動平板的強迫振動分析(Forced-vibration analysis)，另一是振動平板周圍加入了流體的強迫振動分析。並且在分析中考慮不同阻尼比，比較阻尼比為 0.01、0.1、1、15 時對振動平板的振動行為所造成的影響。其中阻尼比為 0.01 和 0.1 時為低阻尼系統 (underdamped system)，阻尼比等於 1 時為臨界阻尼系統(critical damped system)，

阻尼比等於 15 時為過阻尼系統(overdamped system)。

由《圖 4.12》和《圖 4.13》可以看出，在水中之振動平板的共振頻率會比單純振動平板的共振頻率低了許多，甚至在頻率 1~400hz 範圍內可以看到水中振動平板的第二共振頻率。比較《圖 4.12》~《圖 4.13》得知當阻尼比越大，水中振動平板和單純振動平板的振幅皆是越來越小。觀察《圖 4.12》看出當阻尼比為 0.01 時，單純振動平板的第一共振頻率之振幅大於水中振動平板的第一共振頻率和第二共振頻率的振幅。當阻尼比改變為 0.1 時，觀察《圖 4.13》可以發現，此時單純振動平板的第一共振頻率時的振幅已經小於水中振動平板的第一共振頻率振幅，但仍然大於水中振動平板的第二共振頻率。由《圖 4.14》中可觀察到，當阻尼比為 1 時，單純振動平板的振幅已衰減到看不出共振頻率的形態，而水中振動平板的第一共振頻率依然清晰可見，但第二共振頻率也已經衰減到快要無法辨識。當阻尼比為 15 時，如《圖 4.15》，此時水中振動平板和單純振動平板的振幅皆已衰減更多並無法觀察出共振頻率，另外觀察到當外部負載頻率大於等於 20hz，水中振動平板的振幅皆是小於單純振動平板的振幅。

再來是個別比較單純壓電振動平板和水中壓電振動平板的振幅隨阻尼的變化。由《圖 4.16》可以看出單純壓電振動平板在阻尼比為 0.01 時的共振頻率為 175hz，當阻尼比增加時共振頻率會稍微減小，且同樣可以看出振幅也是隨阻尼比的增加而越來越低。《圖 4.17》為水中壓電振動平板的不同阻尼比之振幅比較圖，從圖中可以看出在阻尼比為 0.01 時的第一共振頻率為 35hz、第二共振頻率為 305hz，在阻尼比增加時同樣可以看出第一共振頻率和第二共振頻率皆有減小的情況。於《圖 4.17》還可觀察出，當阻尼比增加時，第二共振頻率的振幅減小速度會比第一共振頻率的振幅來的快許多，當阻尼比為 1 時已經幾乎觀察不到第 2 共振頻率的位置。

4.5 暫態分析

暫態分析之主要目的為探討結構系統受到隨時間變化的非週期性外力時，其結構系統隨時間變化的反應，例如：位移反應、速度反應、加速度反應…等。

本文即利用暫態分析來進行 CFD 和 ANSYS 的流固耦合分析，設定時階為 0.001 秒，觀察壓電振動平板在阻尼比為 15 時，所受到週期性的電壓外力和非週期性的流體壓力、流體剪力的反應情形，並且觀察因為振動平板之位移，所造成流場幾何形狀改變的流場內狀況。

4.5.1 ANSYS 壓電振動平板建模

本文之暫態分析是結合 ANSYS 和實驗室自行發展的 CFD 程式，先只介紹 ANSYS 固體力學的建模和設定部分。流場中固體力學模型為雙壓電片夾住一金屬片，尺寸、建模方式和模態分析以及調和分析之單純壓電振動平板相同，如《圖 4.1》。

暫態分析之求解方法選用全解法，選擇阻尼比為表(四)中的阻尼比 15。

限制條件為振動平板左端固定；兩片壓電靠近流體的兩側給定電壓 0 伏特、靠近金屬兩側給定電壓 120 伏特的正弦 \sin 函數($120\sin(2\pi ft)$)；流場在每個時間下計算出的流體壓力，給定於振動平板和流體接觸的元素邊上。暫態分析之限制條件可參考《圖 4.18》、模型之流體壓力給定可參考《圖 4.19》、模型之流體剪力給定可參考《圖 4.20》、模型完成圖如《圖 4.21》。

4.5.2 CFD 流場建模

本文做了三組的流場網格測試，網格數分別為：6976、13952、27904，網格圖如《圖 4.22》所示。設定電壓為 120 伏特、阻尼比 15、外部負載頻率 20hz，進行 ANSYS 結合 CFD 程式的暫態耦合分析，《圖 4.23》為三組網格分析出的流量結果。由《圖 4.23》可以看出網格加密後，網格與網格間的流量差距變小，因此本文選擇 27904 這組網格為本文的流場網格。27904 這組網格水平方向共分割 368 格，垂直方向共分割 80 格。

4.5.3 流場分析

觀察外部負載電壓頻率為 10、20、50、100 時，流場內的壓力、流線和速度向量的變化圖。《圖 4.24》為頻率為 10 時，振動平板尾端在一週期內的變化；《圖 4.25》為頻率為 10 時的壓電振動平板振幅放大 50 倍的運動情形圖；《圖 4.26》

為頻率為 10 時，一週期內所挑選特定時間點的壓力變化圖；《圖 4.27》為頻率為 10 時；一週期內所挑選特定時間點的流線變化圖。同樣地，《圖 4.28》~《圖 4.31》為頻率為 20 的流場變化圖、《圖 4.32》~《圖 4.35》為頻率為 50 的流場變化圖、《圖 4.36》~《圖 4.39》為頻率 100 的流場變化圖；而《圖 4.29》、《圖 4.33》、《圖 4.37》各為頻率分別在 20、50、100 時的振動平板振幅放大 50 倍的運動情形。

由《圖 4.24》和《圖 4.26》可知振動平板的擺動會造成流場內的壓力改變，當振動平板向上擺動時，振動平板上方壓力較大、下方壓力較小，而當振動平板向下擺動時，振動平板下方壓力較大、上方壓力較小；此物理現象可用迎風面和背風面的觀點來解釋，當振動平板向上擺動時，振動平板上方流場則類似迎風面、平板下方則類似背風面，因此迎風面壓力大、背風面壓力小。並且觀察《圖 4.27》可發現，在振動平板的背風面區域較容易產生迴流。此迎風面/背風面之物理現象皆可由《圖 4.24》~《圖 4.39》觀察得到。

由《圖 4.27》、《圖 4.31》、《圖 4.35》和《圖 4.39》可以發現，當外部負載電壓的頻率越高時，振動平板造成的迴流可以傳遞的越遠。造成此現象的是因為外部負載的頻率越高時，流體的對流作用會比流體擴散作用強的許多，因此流體產生的迴流比較不容易被擴散作用給耗散掉。

由《圖 4.40》可以看出，在阻尼比為 15 時，外部負載頻率越高時，流場流量會越大，但流場的流量大小並非完全和頻率大小成比例，在本文研究中所有流量的計算皆設單位深度為 9cm。

《圖 4.41》為阻尼比為 15 時比較兩種模擬的振幅結果，其一為利用 ANSYS 調和分析的水中振動平板結果，另一為 ANSYS 暫態分析的單純振動平板結合 CFD 程式之耦合結果。可以觀察出 ANSYS 暫態分析結合 CFD 所計算出的振幅非常接近於 ANSYS 調和分析的振幅。

《圖 4.42》為頻率為 10、20、50、100 時在各個特定取樣時間的振動平板尾端振幅放大 50 倍疊加圖，比較《圖 4.41》可以確定在阻尼比 15 時，頻率越大振幅越小。

4.5.4 電壓對流量造成之影響

此節將給定不同電壓 30V、60V、120V 來觀察耦合後的振動平板振幅和流場流量的大小。

《圖 4.43》中同樣為比較調和分析的水中壓電振動平板結果和 ANSYS 暫態分析與 CFD 程式的耦合結果，由圖中可以看出電壓越大，振動平板的振幅擺動會越大，振幅的大小和電壓的大小成相同的比例，詳細的數據列於表(六)。由

《圖 4.43》中還可觀察出，當電壓越低，ANSYS 與 CFD 耦合的結果會越近調和分析的結果。

《圖 4.44》為阻尼比等於 15 時在三種不同電壓下各個頻率的流量大小，可以看出同樣是電壓越大流量越大；單純比較同一頻率下的流量可以發現，流量的大小並非和電壓大小成完全相同的比例；更有趣的現象為頻率越大時流量越大，因為由

《圖 4.43》可以知道阻尼比為 15 時頻率越大時振幅會越小，但由於振動頻率的增加使得擺動次數變多，頻率和振幅兩者的總和結果，流量大小還是隨著頻率變大的增加。另外觀察《圖 4.44》還可以發現電壓越大的時候，隨著振動頻率的增加，流量大小的變化幅度也比較明顯，電壓為 120V 就比電壓為 30V 變化來的明顯。

4.5.5 增加流道高度對流場之影響

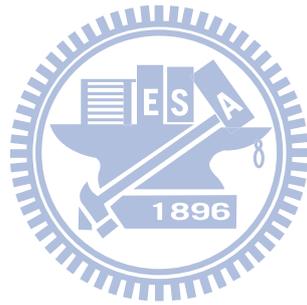
此節特別探討增加流道高度對流場的影響，從原本高度 5mm 增加到 8mm，比較流場的情況。流場的垂直方向加大，而垂直方向的網格數目也成相同比例增多。

由《圖 4.45》可以發現，比較流道高度為 5mm 和 8mm 的振動平板尾端位移和速度的值和相位皆是非常接近。並且將《圖 4.26》和《圖 4.46》比較後，發覺流場的壓力隨時間的變化也是大致相同。因此在此節的將中點放在流場的流線圖和流量大小。

《圖 4.47》~《圖 4.50》為 8mm 流道高的流場流線圖，其頻率 10、20、50、100 的擷取時間和 5mm 流道高的流場擷取時間相同，因為從《圖 4.45》可以知道改變流道高度後振動平板的位移和速度皆非常接近。比較《圖 4.27》和《圖 4.47》，因為流道的加寬，阻塊上下方流道變大，流體的流動變得比較順暢，振動平板尾端的迴流也變得較大；同樣觀察《圖 4.31》和《圖 4.48》、《圖 4.35》和《圖 4.49》、《圖 4.39》和《圖 4.50》，皆可發現此現象。

由《圖 4.51》可以觀察出流道加高後的流量變化，同樣是流量隨頻率增高而加大，特別值得注意的是頻率為 100 時，在 3.5 秒以後流量反而下降。此原因可由《圖 4.50》看出，因振動平板擺動造成的迴流流道了出口處，右邊出口的速度有逆流的情況，因此造成幫浦的流量略為下降。由《圖 4.52》得知，當流道加高後，各個外部負載頻率下的流量皆增加，但頻率越高的流量增加量較頻率低的流量增加量還來的低。

最後同樣利用 ANSYS 的調和分析來模擬流道高為 8mm 的振動平板尾端擺動振幅大小和暫態分析的耦合結果做比較，結果如《圖 4.53》所示；當流道高度增加時，振動平板尾端的振幅會略為增加，並且頻率越高將造成平板的振幅增加量越大；且同樣可以看出流道高度增加後，ANSYS 調和分析的結果和 CFD-ANSYS 耦合分析之結果、趨勢都還是相當的接近。



五、結論

本研究可以歸納出以下幾點結論：

- 將壓電振動平板放入水中後，壓電振動平板的共振頻率明顯的下降許多，並且當阻尼比增加時，共振頻率會越來越難觀察到。
- 當阻尼比增加時，水中壓電振動平板之第二共振頻率的振幅下降幅度會比第一共振頻率的振幅下降速度來還快。
- 幫浦之流量並非單純隨著振動平板的擺動振幅增加而流量增加，流量也會受平板的擺動頻率影響。在本文研究之過阻尼壓電振動平板的流場結果為平板振動頻率越高時，雖然擺動振幅較小，但幫浦流量還是會較大。
- 幫浦之流量同時受到電壓大小、擺動振幅大小和振動頻率影響。在相同振動頻率下，電壓越大造成擺動振幅越大，壓電震動幫浦之流量越大。並且觀察出欲增加幫浦之流量大小最好之方法為增加電壓大小。
- 本文研究之 ANSYS 與 CFD 程式結合的流固耦合程式分析出的振動平板擺動振幅大小和 ANSYS 調和分析的振動平板擺動振幅結果相當接近，因此可證明本文結合 ANSYS 與 CFD 程式之流固耦合程式具有相當程度的準確性。本程式之優點為耦合時可以分析流場情況，例如：速度場、流線、壓力場，而 ANSYS 之調和分析無法分析流場的狀況，只能探討壓電振動平板受電壓後於水中之振幅反應。
- 流道高度從 5mm 增加為 8mm 後，過阻尼系統之振動平板的振幅會略為增加，幫浦的整體流量會增加，但隨著外部負載頻率的增加，流量增加量會越來越少。
- 本文之 ANSYS 與 CFD 程式結合的流固耦合計算程式，目前只能計算過阻尼系統的耦合情況，未來希望可以朝臨界阻尼、低阻尼系統的耦合計算邁進。

參考文獻

- 【1】 Demirdzic, I., Peric, M., “Space conservation law in finite volume calculations of fluid flow”, International Journal for Numerical Method in Fluids, Vol. 8, 1037-1050, 1988.
- 【2】 Egelja, A., Schafer, M., Durst, F., “An adaptive grid Eulerian method for the computation of free surface flows”, International Journal of Computational Fluid Dynamics, Vol. 10, 213-224, 1998.
- 【3】 Sternel, D.C., Schafer, M., Heck, M., Yigit, S., “Efficiency and accuracy of fluid-structure interaction simulations using an implicit partitioned approach”, Comput. Mech., 43, 103-113, 2008.
- 【4】 Zhang, Z., Gil, A.J., Hassan, O., Morgan, K., “The simulation of 3D unsteady incompressible flows with moving boundaries on unstructured meshes”, Computers & Fluids, 37, 620-631, 2008.
- 【5】 Srikanth, C., Bhasker, C., “Flow analysis in valve with moving grids through CFD techniques”, Advances in Engineering Software, 40, 193-201, 2009.
- 【6】 Slone, A.K., Pericleous, K., Bailey, C., Cross, M., “Dynamic fluid-structure interaction using finite volume unstructured mesh procedures”, Computers and Structures, 80, 371-390, 2002.
- 【7】 Nakasone, P.H., Silva, E.C.N., “Viability study of a piezoelectric pump using computational simulation”, 2006.
- 【8】 Vatanabe, S.L., Pires, R.F., Choi, A., Nakasone, P.H., Emilio, C.N., ”Viability study of oscillatory flow pumps using bimorph piezoelectric actuators”, Nanosensors, Microsensors, and Biosensors and Systems 2007, edited by Vijay K. Varadan, Proc. of SPIE Vol. 6528, 65280X, 2007.
- 【9】 Xia, G., Lin, C.L., “An unstructured finite volume approach for structural dynamics

in response to fluid motions”, Computers and Structures, 86, 684-701,2008.

- 【10】 Lima, C.R., Vatanabe, S.L., Choi, A., Nakasone, P.H., Pires, R.F., Emilio, C.N., “A biomimetic piezoelectric pump: Computational and experimental characterization”, Sensors and Actuators, A 152, 110-118, 2009.
- 【11】 陳俊佑，”壓電無閥式微幫浦流固耦合分析”，國立交通大學，碩士論文，民國98年。
- 【12】 Yoo, J.H., Hong, J.I., Cao, W., “Piezoelectric ceramic bimorph coupled to thin metal plate as cooling fan for electronic devices”, Sensors and Actuators, 79, 8-12, 2000.
- 【13】 Kosa, G., Shoham, M., Associate Member, IEEE, and Menashe Zaaroor, “Propulsion method for swimming microrobots”, IEEE Transactions on Robotics, Vol. 23, No. 1, 137-150, 2007.
- 【14】 周卓明，”壓電力學”，全華科技圖書股份有限公司，民國92年。
- 【15】 Ferziger, J.H., Peric, M., Computational Methods for Fluid Dynamics, Springer, Germany, 2002.
- 【16】 Issa, R.I., “Solution of the Implicit Discretised Fluid Flow Equation by Operator-Splitting”, J. Computation Physics, Vol.62, pp.40-65, 1985.
- 【17】 Ramirez, F., Heyliger, P.R., Pan, E., ”Free vibration response of two-dimensional magneto-electro-elastic laminated plates“, Journal of Sound and Vibration, 292, 626-644, 2006.

表(一) PZT-4 的材料常數【17】

密度(kg/m ³)	剛性係數(10 ¹⁰ N/m ²)					
ρ	c_{11}^E	c_{12}^E	c_{13}^E	c_{33}^E	c_{44}^E	c_{66}^E
7750	12.1	7.54	7.52	11.1	2.11	2.28

壓電應力/電荷(N/(V·m))			相對介電常數	
e_{31}	e_{33}	e_{15}	$\frac{\epsilon_{11}^S}{\epsilon_0}$	$\frac{\epsilon_{33}^S}{\epsilon_0}$
-5.35	15.8	12.3	916	830

註： $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ (F/m)



表(二) 黃銅的材料常數

楊氏係數 Young's modulus (GPa)	蒲松比 Poisson's ratio	密度(kg/m ³)
E	ν	ρ
110	0.34	8970

表(三) 模態分析結果之前 10 組自然頻率

第 i 模態	自然頻率(hz)
1	188
2	1181
3	3300
4	6454
5	10643
6	15852
7	22063
8	23162
9	29257
10	37412

表(四) 阻尼比係數

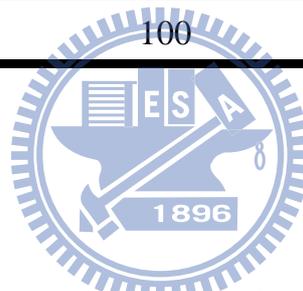
阻尼比 Damping ratio	α	β
0.01	2.044×10^1	2.323×10^{-6}
0.1	2.044×10^2	2.323×10^{-5}
1	2.044×10^3	2.323×10^{-4}
15	3.066×10^4	3.485×10^{-3}

表(五) 水的性質

黏滯係數 viscosity($kg/(m \cdot s)$)	聲傳速度(m/s)	密度(kg/m^3)
μ_{water}	V_{water}	ρ_{water}
0.001003	1500	998

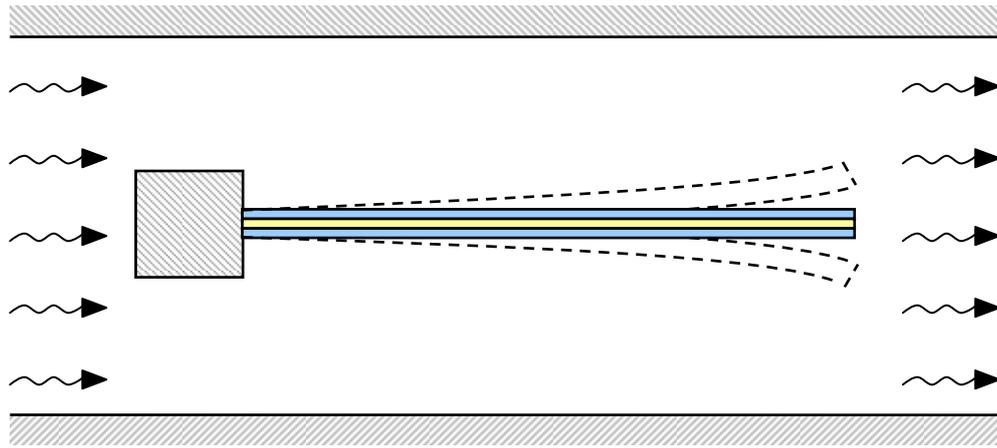
表(六) 電壓 30V、60V、120V 在不同外部負載頻率下之流量結果

電壓(V)	外部負載頻率(hz)	流量(cc/sec)
30	10	0.227
	20	0.266
	50	0.281
	100	0.296
60	10	0.871
	20	1.022
	50	1.135
	100	1.295
120	10	2.578
	20	3.378
	50	4.287
	100	5.343

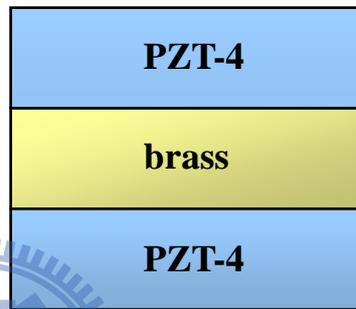


表(七) ANSYS 調和分析和 ANSYS 結合 CFD 結果比較，流道高度為 5mm 和 8mm 的振動平板振幅

Hight(mm)	Frequency(hz)	Harmonic analysis amplitude(m)	FSI calculation amplitude(m)	Error(%)
5	10	2.254×10^{-4}	2.236×10^{-4}	0.799
	20	1.349×10^{-4}	1.321×10^{-4}	2.076
	50	6.666×10^{-5}	6.473×10^{-5}	2.895
	100	3.603×10^{-5}	3.401×10^{-5}	5.606
8	10	2.250×10^{-4}	2.240×10^{-4}	0.444
	20	1.358×10^{-4}	1.340×10^{-4}	1.325
	50	6.824×10^{-5}	6.638×10^{-5}	2.726
	100	3.730×10^{-5}	3.480×10^{-5}	6.702

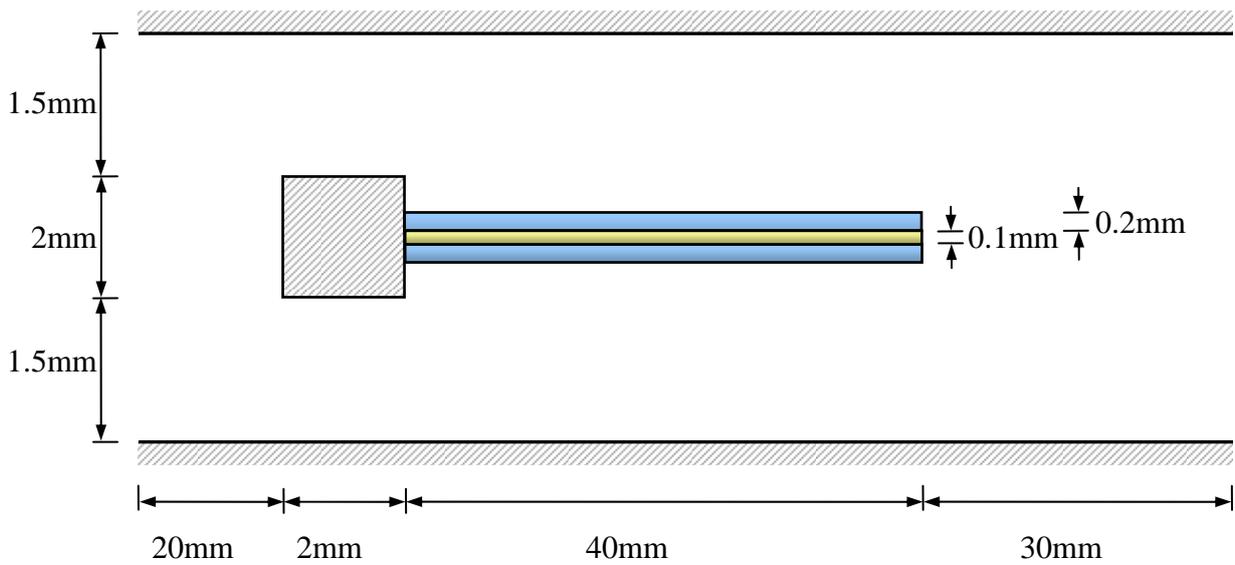


(a)

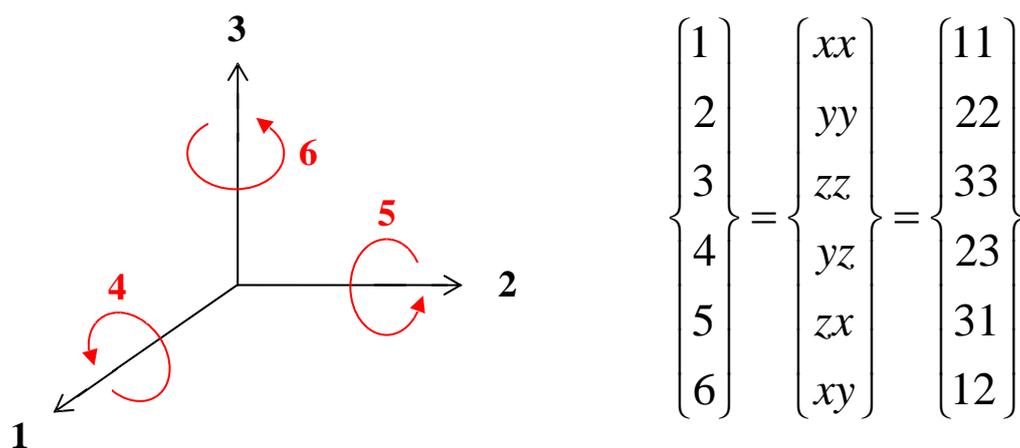


(b)

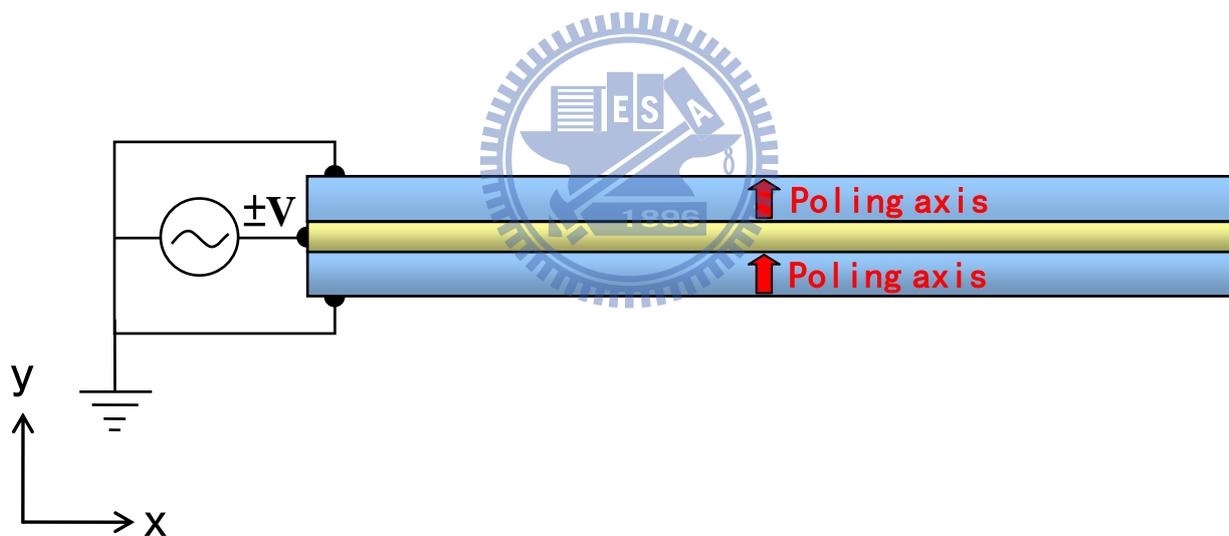
《圖 2.1》雙壓電致動器(a)擺動示意圖(b)平板材料剖析



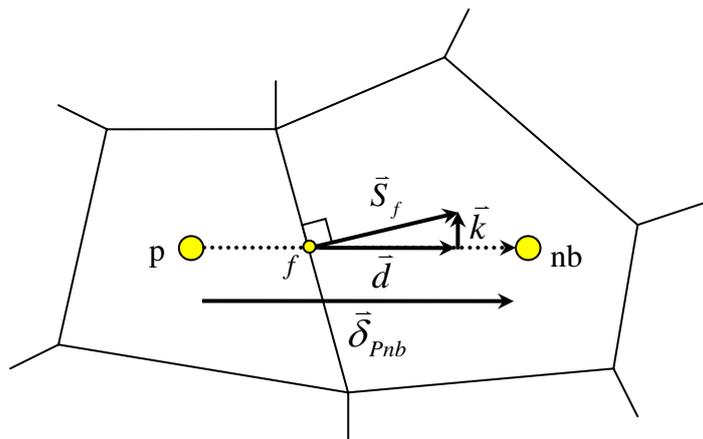
《圖 2.2》流場尺寸示意圖



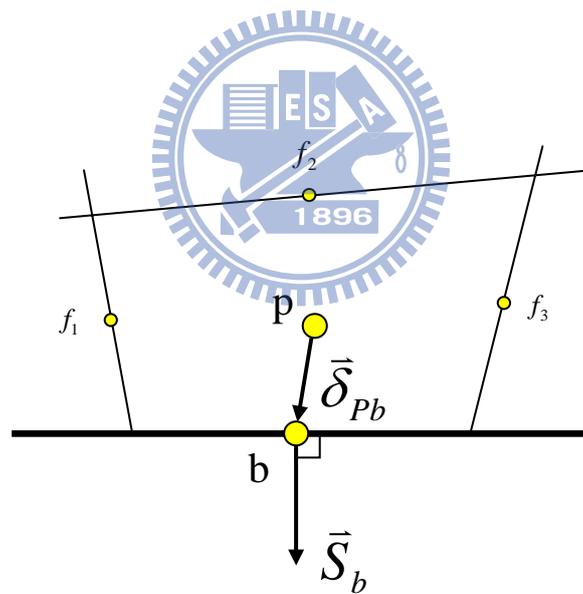
《圖 2.3》座標軸方向代號



《圖 2.4》壓電致動器之電壓給定致動方式(parallel mode)

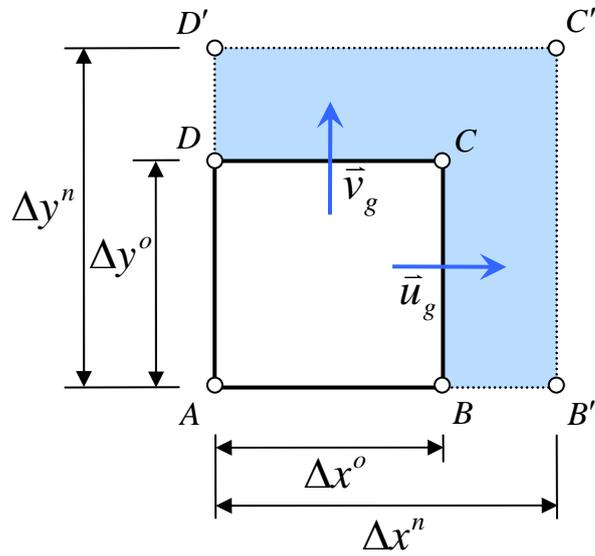


《圖 3.1》擴散項離散化 over-relaxed 法之標示圖



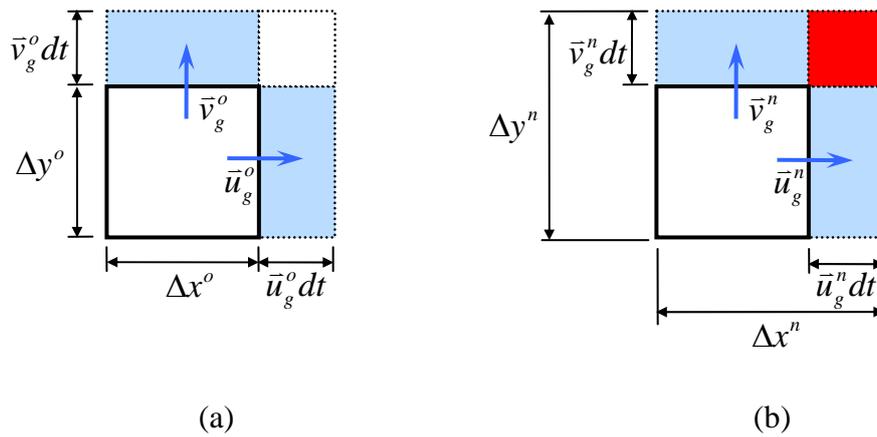
《圖 3.2》計算邊界壓力示意圖

..... New level
 — Old level

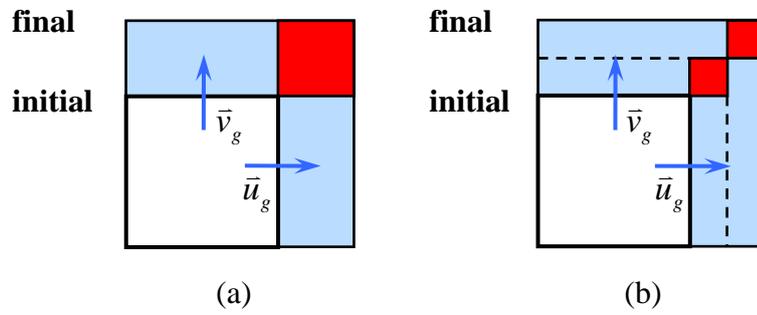


《圖 3.3》利用網格速度計算體積改變量

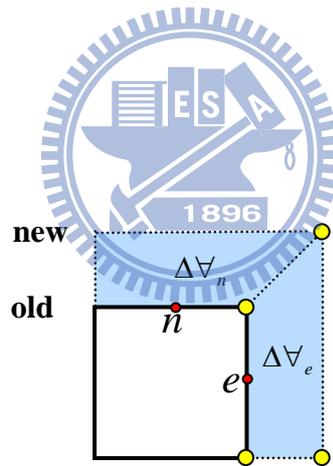
..... New level
 — Old level



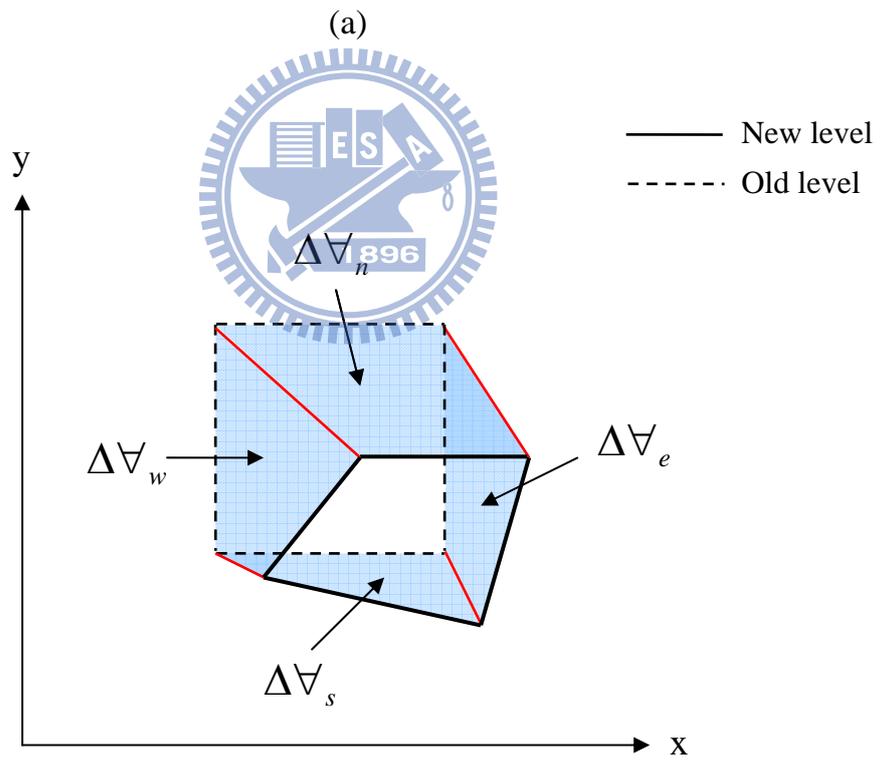
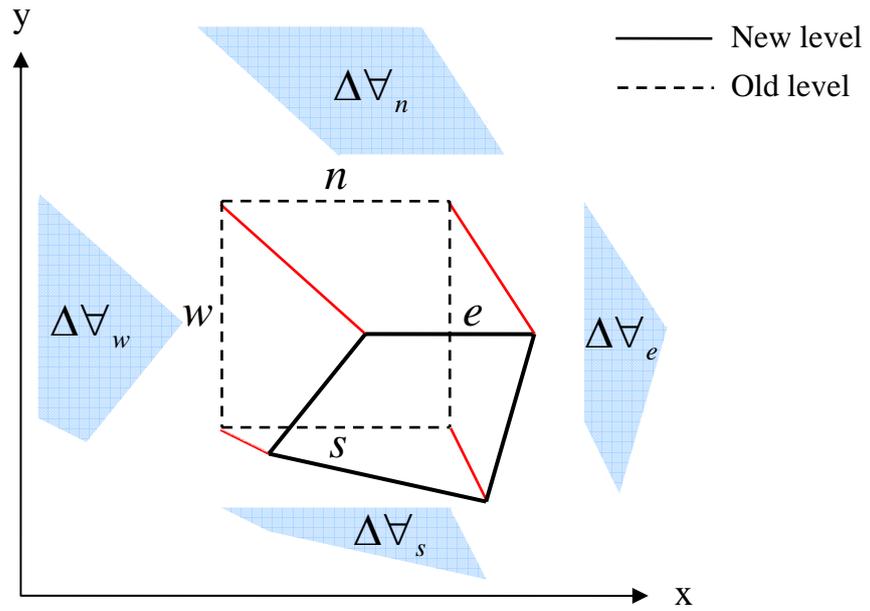
《圖 3.4》(a)顯式法和(b)隱式法的體積改變結果



《圖 3.5》不同時階大小的隱式法結果(a)較小時階(b)較小時階

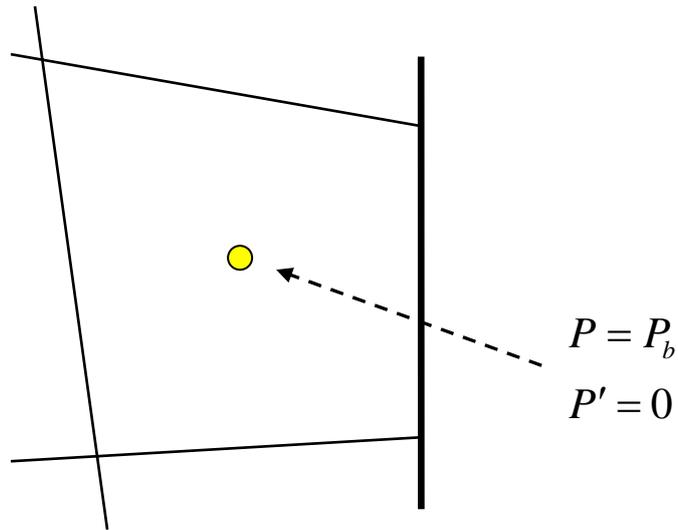


《圖 3.6》利用各面移動前後的新舊點位置直接算出體積

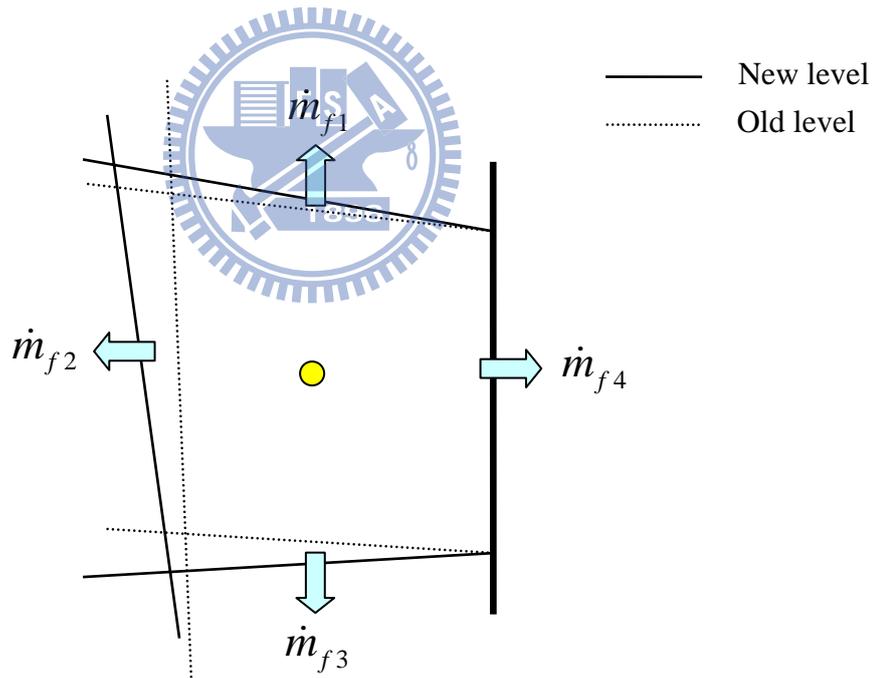


(b)

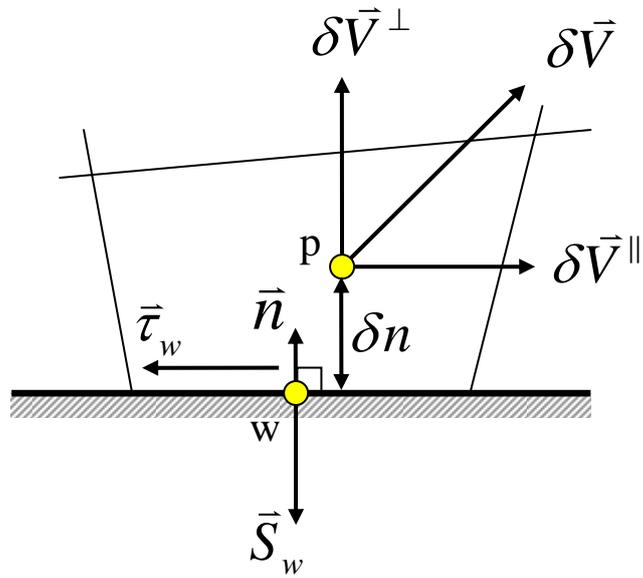
《圖 3.7》兩個時階中的網格位置變化(a)各面掃過的體積(b)顯示體積重疊



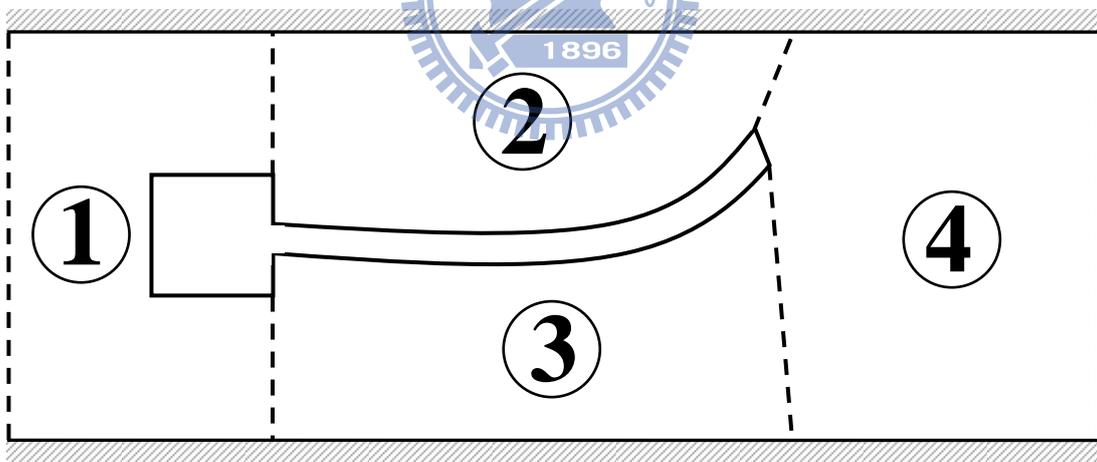
《圖 3.8》壓力邊界示意圖



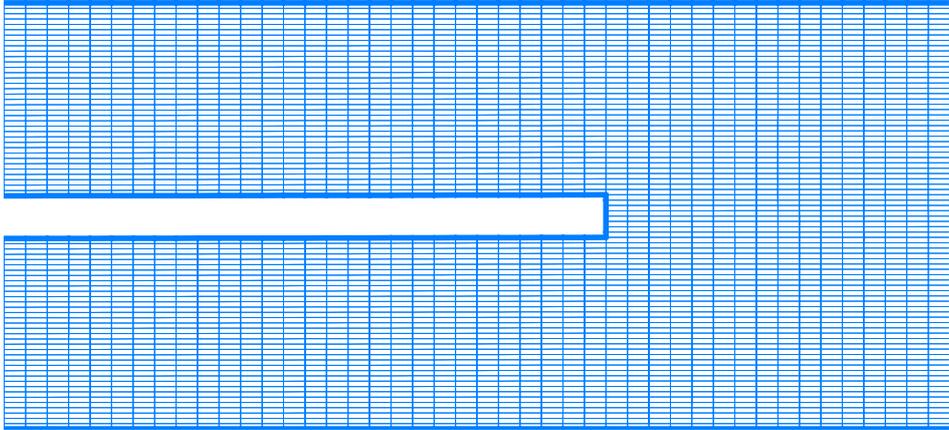
《圖 3.9》壓力邊界之流量計算



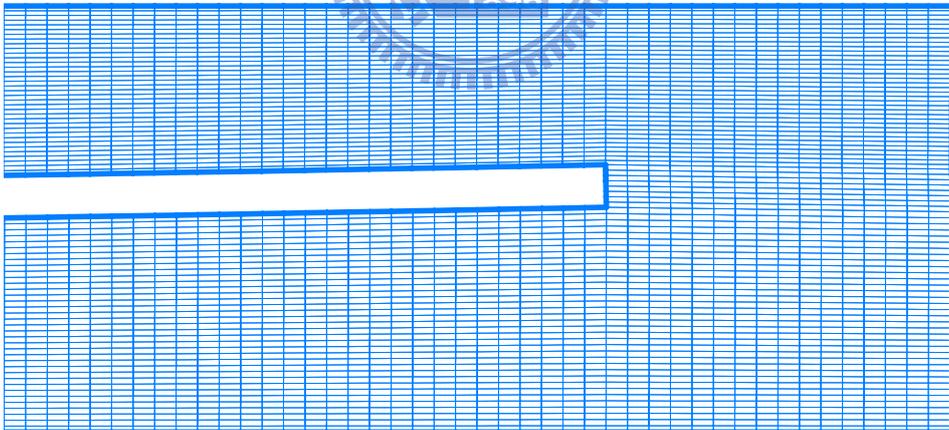
《圖 3.10》計算壁面剪力示意圖



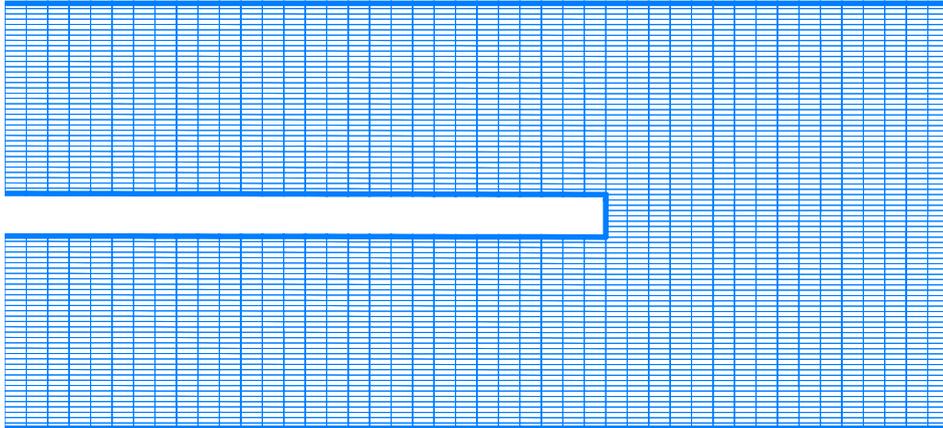
《圖 3.11》流場網格分割區塊



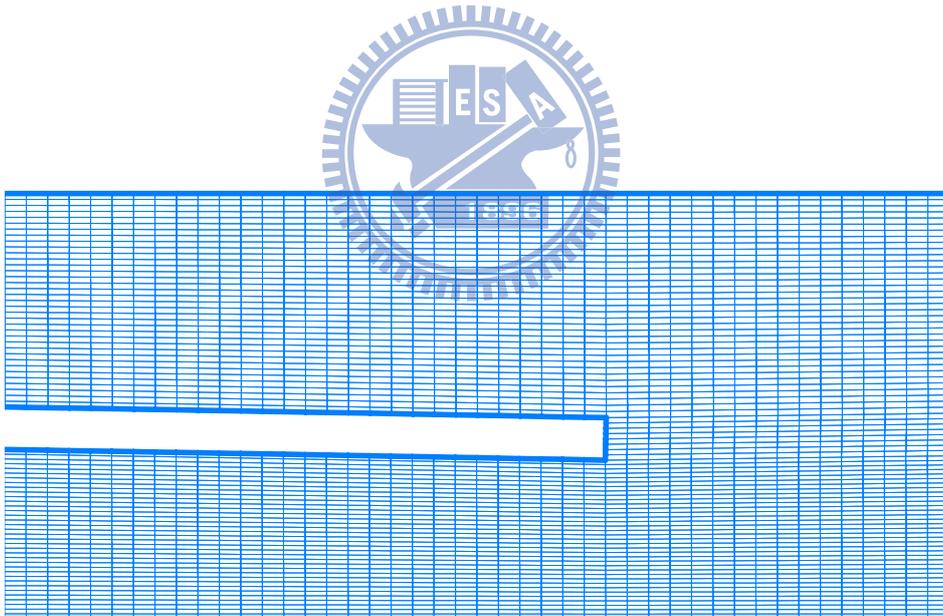
(a)1/4T



(b)2/4T

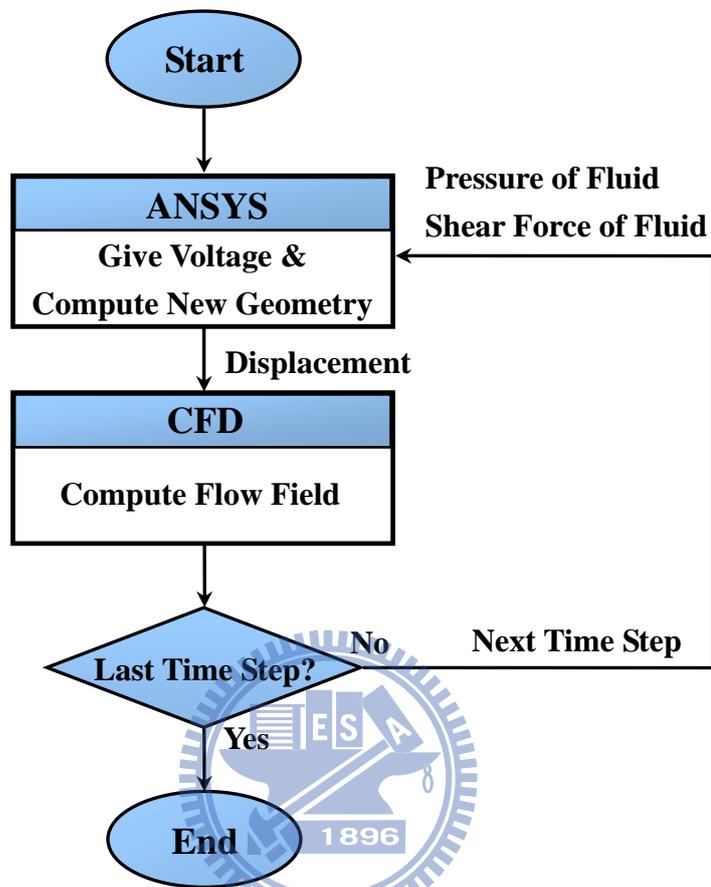


(c)3/4T

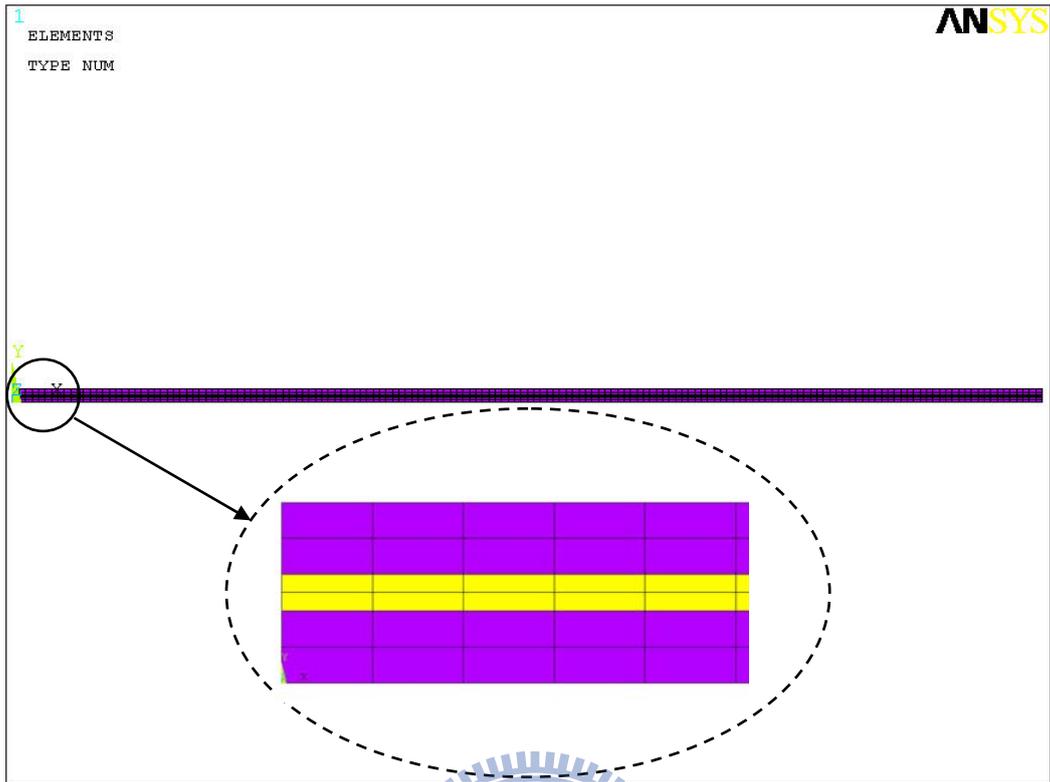


(d)1T

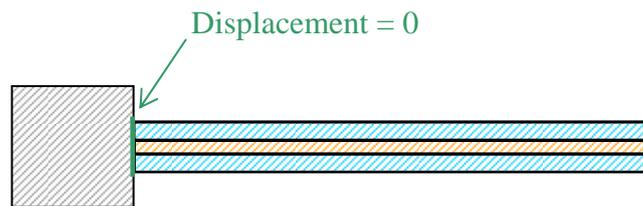
《圖 3.12》一週期內的流場局部網格運動情形(a)1/4T(b)2/4T(c)3/4T(d)1T



《圖 3.13》流固耦合演算流程



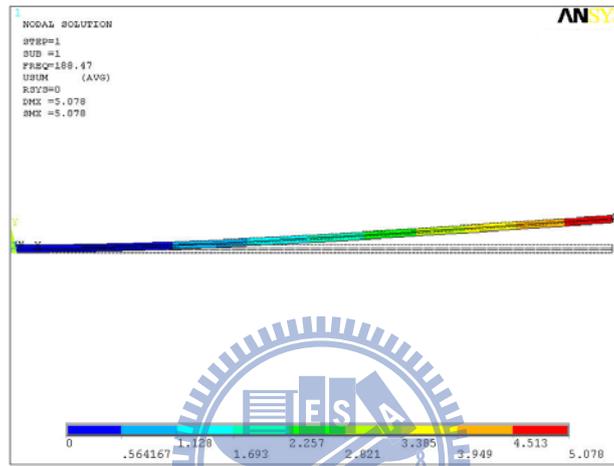
《圖 4.1》模態分析、調和分析之單純壓電振動平板、暫態分析的模型建立



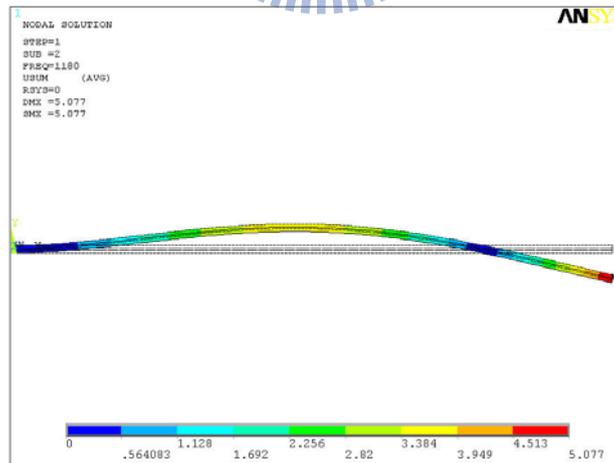
《圖 4.2》模態分析限制條件示意圖



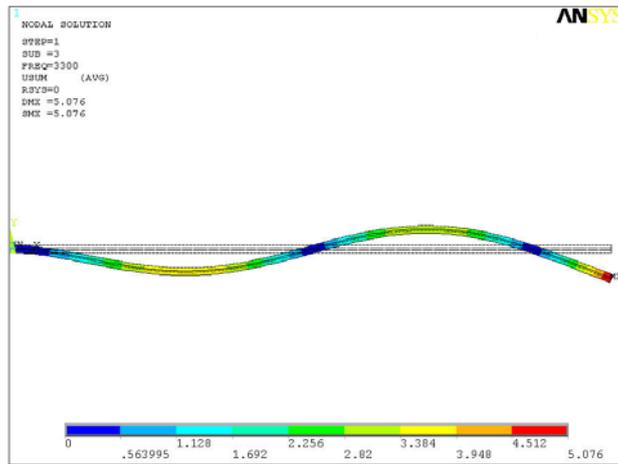
《圖 4.3》模態分析之模型完成圖



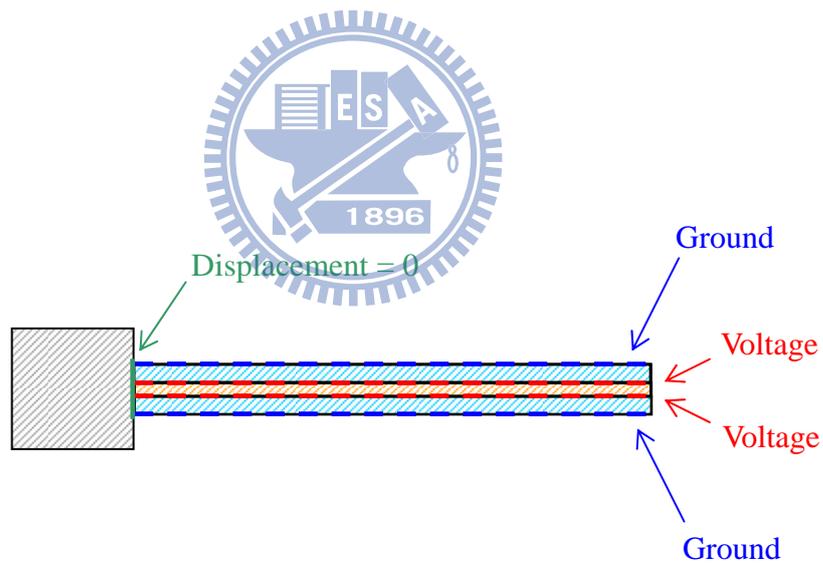
《圖 4.4》第一模態之模態圖



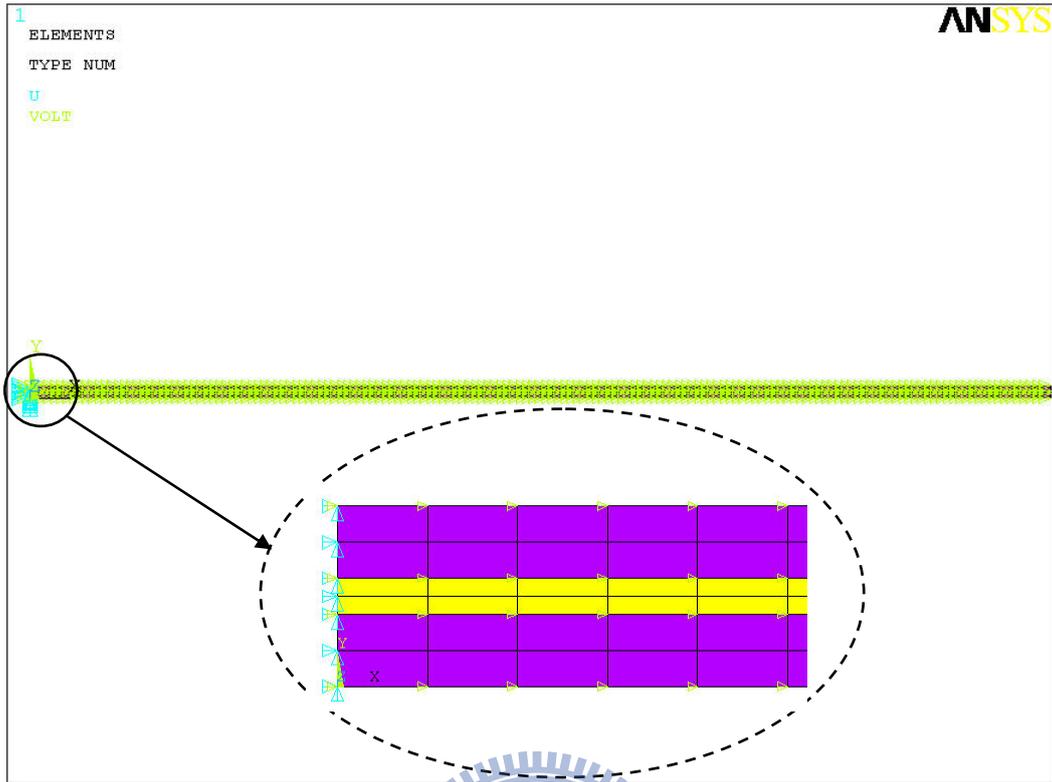
《圖 4.5》第二模態之模態圖



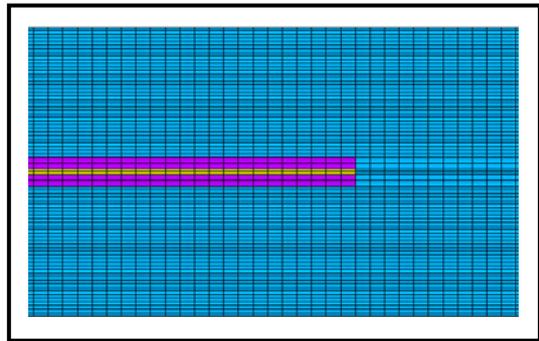
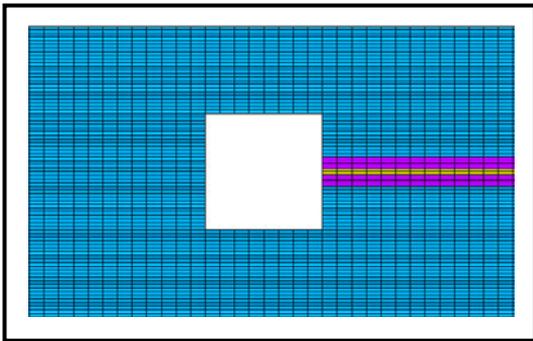
《圖 4.6》第三模態之模態圖



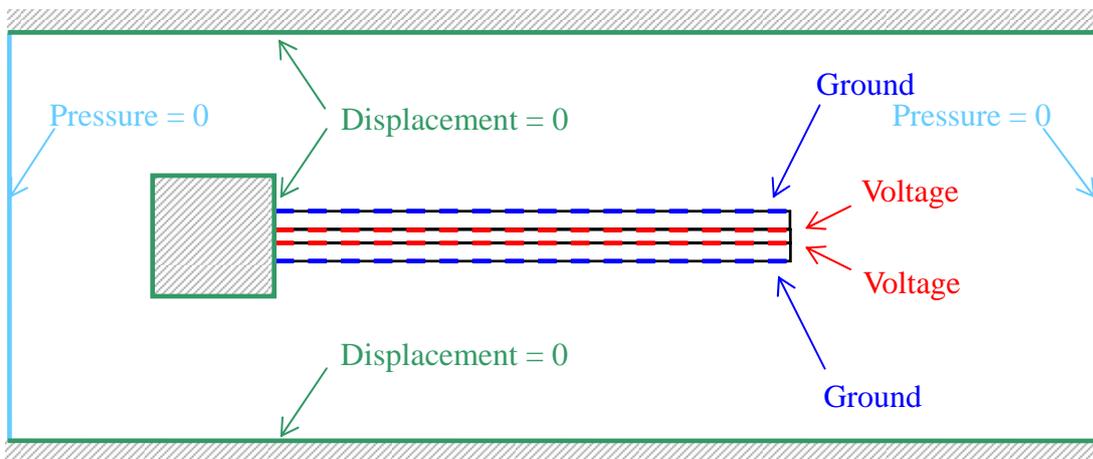
《圖 4.7》調和分析之單純壓電振動平板的限制條件示意圖



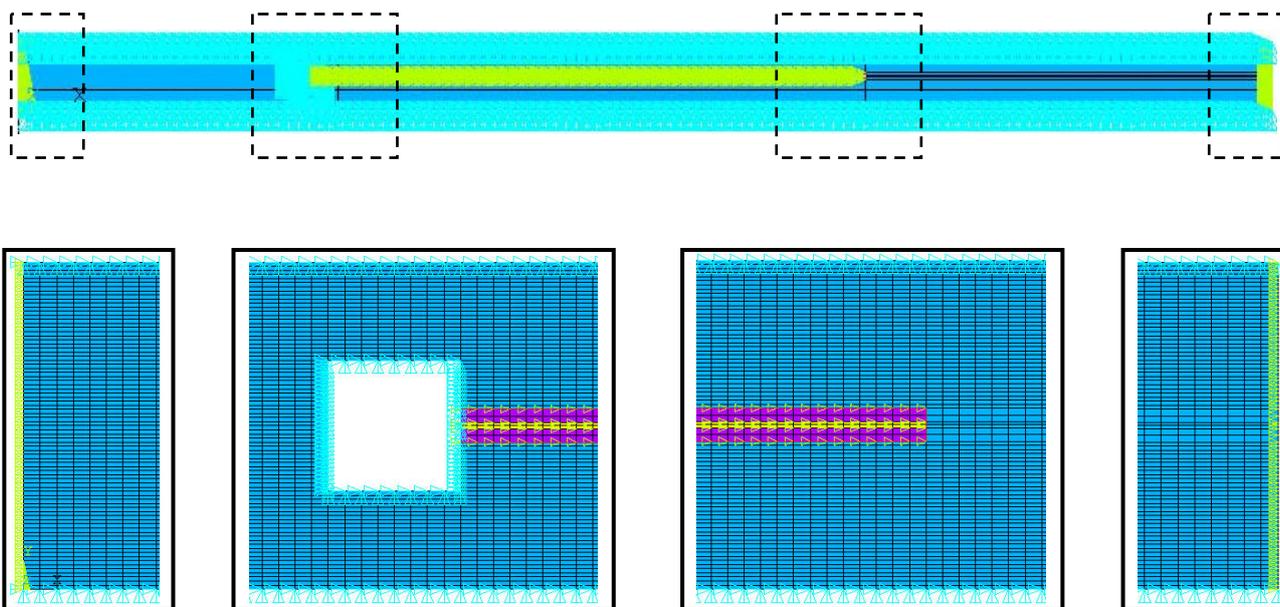
《圖 4.8》調和分析之單純壓電振動平板的模型完成圖



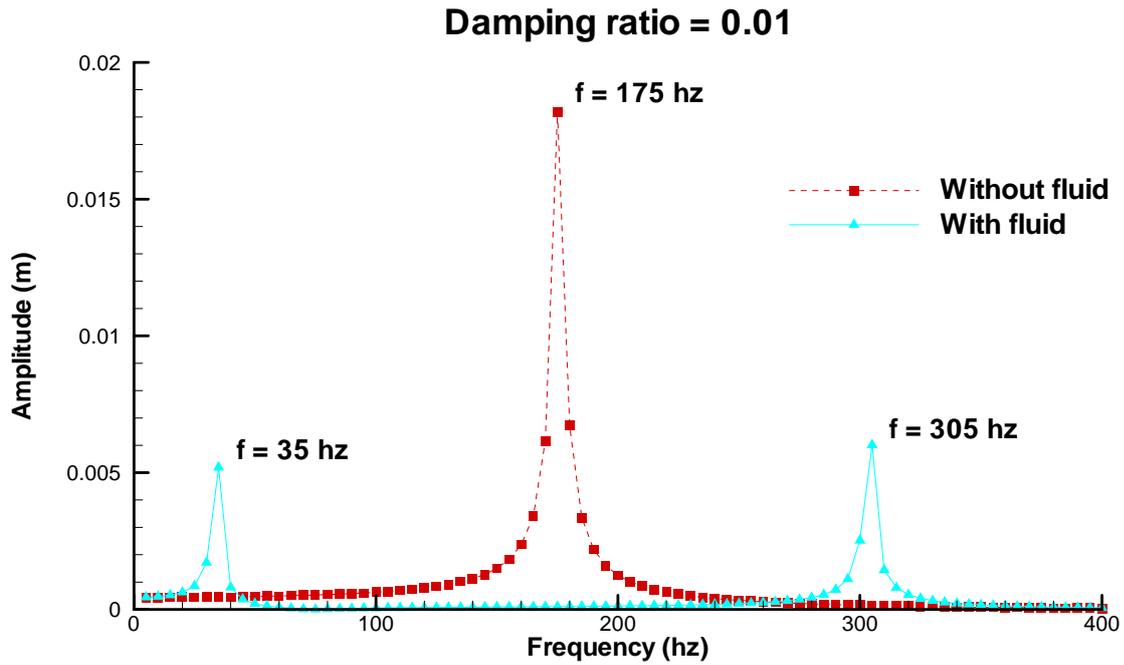
《圖 4.9》調和分析之水中壓電振動平板的模型建立



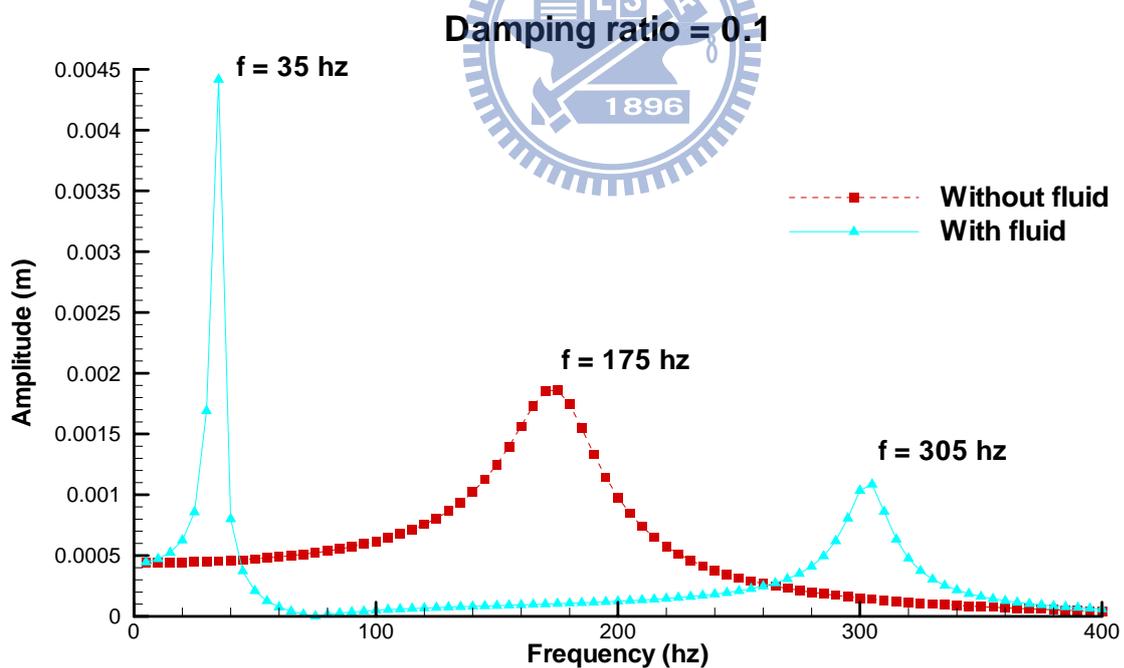
《圖 4.10》調和分析之水中壓電振動平板的限制條件示意圖



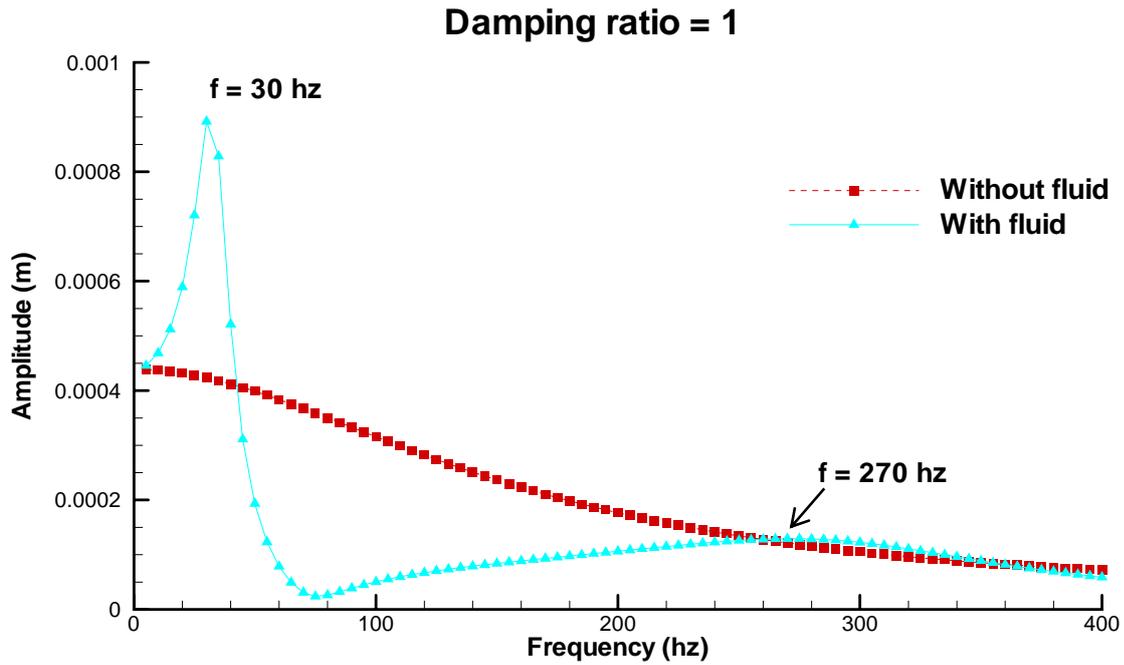
《圖 4.11》調和分析之水中壓電振動平板的模型完成圖



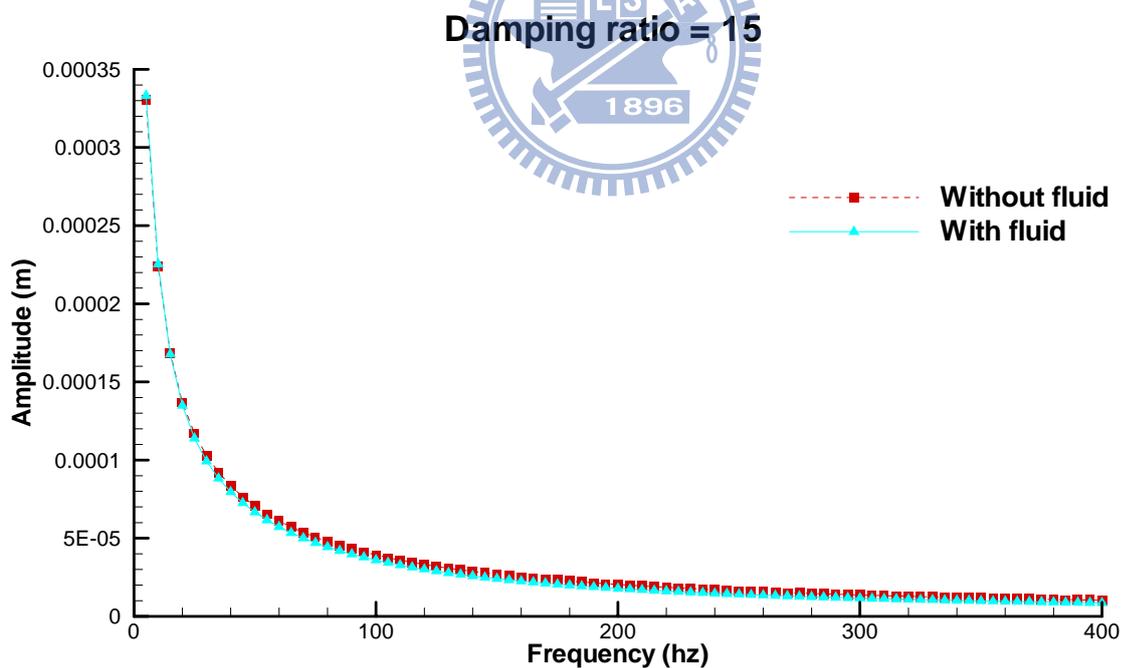
《圖 4.12》 阻尼比為 0.01 時，ANSYS 調和分析在無水及加入有水元素(Fluid29)之比較，振動平板尾端振幅隨頻率的變化



《圖 4.13》 阻尼比為 0.1 時，ANSYS 調和分析在無水及加入有水元素(Fluid29)之比較，振動平板尾端振幅隨頻率的變化

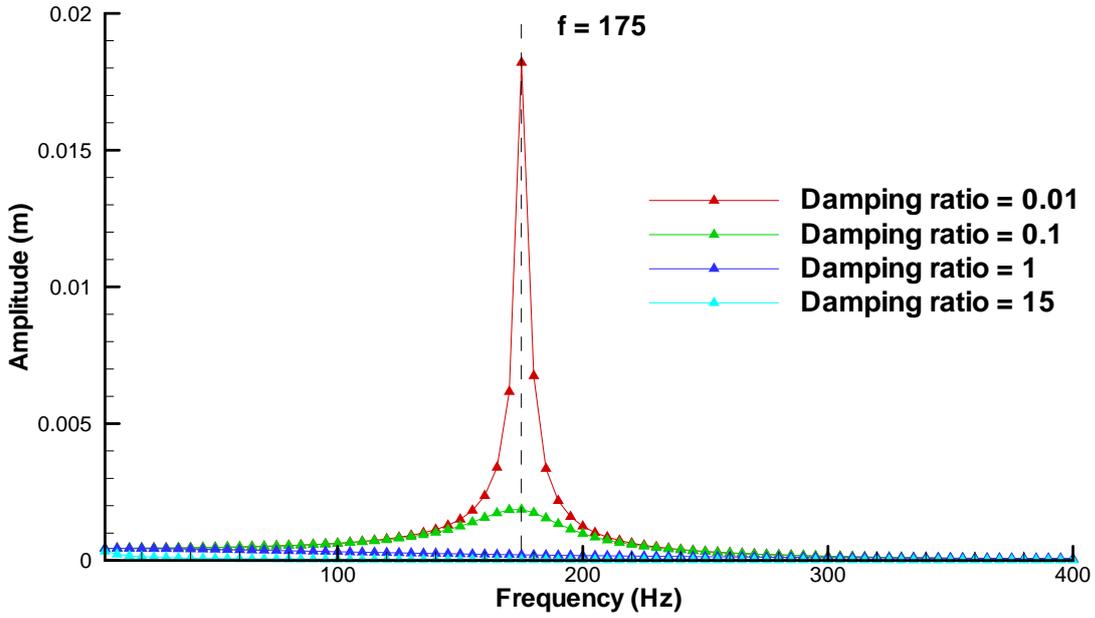


《圖 4.14》阻尼比為 1 時，ANSYS 調和分析在無水及加入有水元素(Fluid29)之比較，
振動平板尾端振幅隨頻率的變化



《圖 4.15》阻尼比為 15 時，ANSYS 調和分析在無水及加入有水元素(Fluid29)之比較，
振動平板尾端振幅隨頻率的變化

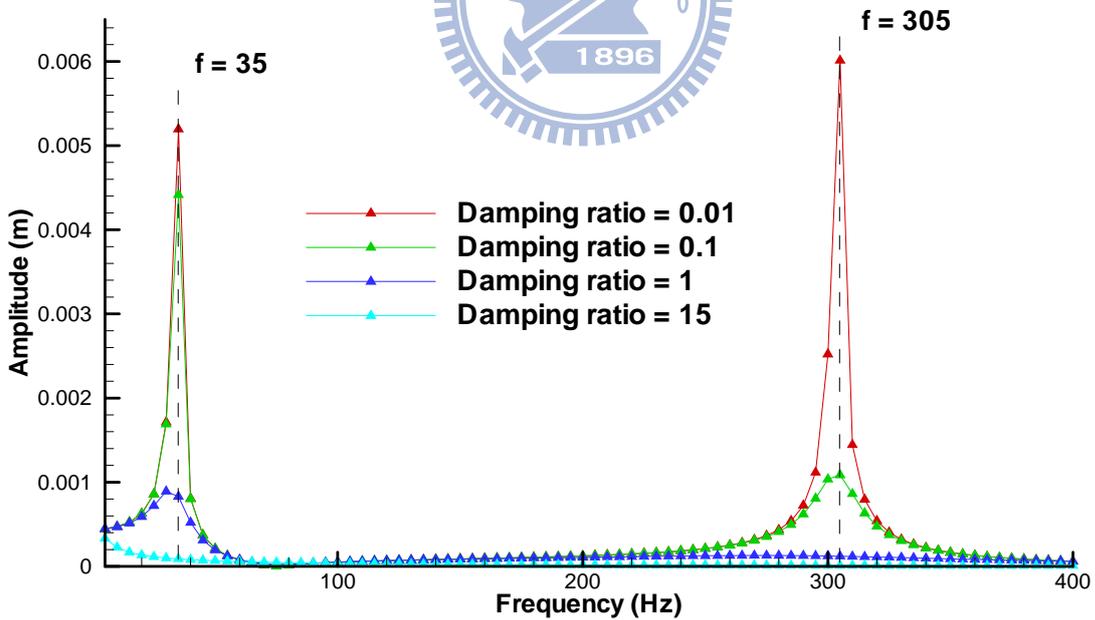
Harmonic analysis (ANSYS)



《圖 4.16》ANSYS 調和分析在無水及加入有水元素(Fluid29)之不同阻尼比振動平板尾

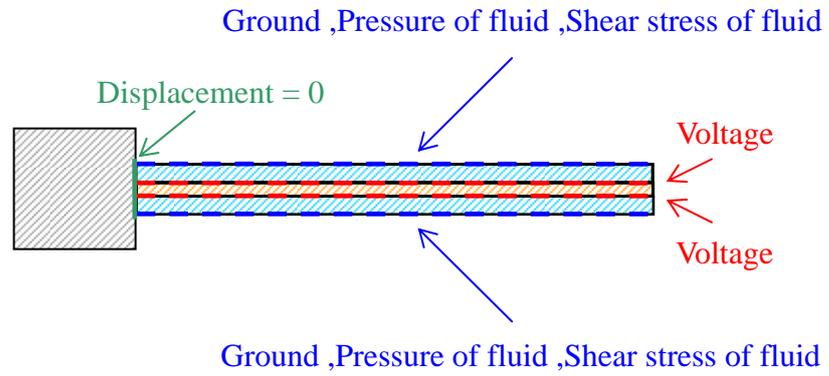
端振幅隨頻率的變化

Harmonic analysis with fluid (ANSYS)

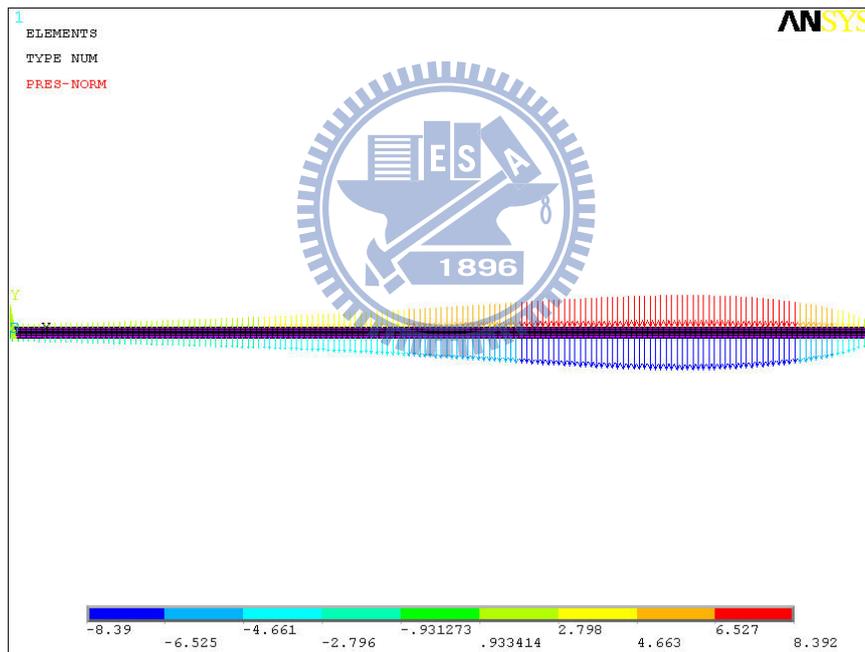


《圖 4.17》ANSYS 調和分析在無水及加入有水元素(Fluid29)之不同阻尼比振動平板尾

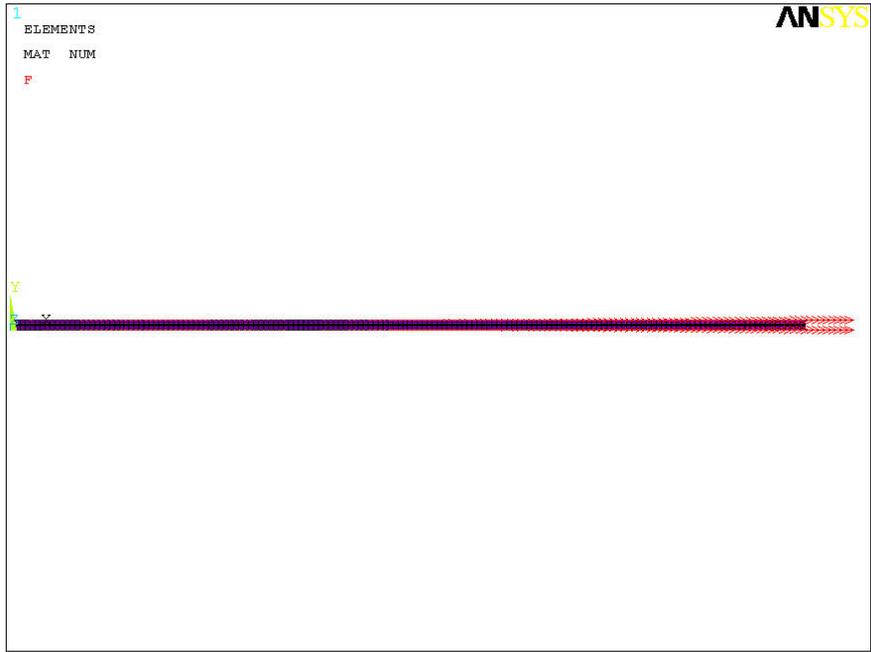
端振幅隨頻率的變化



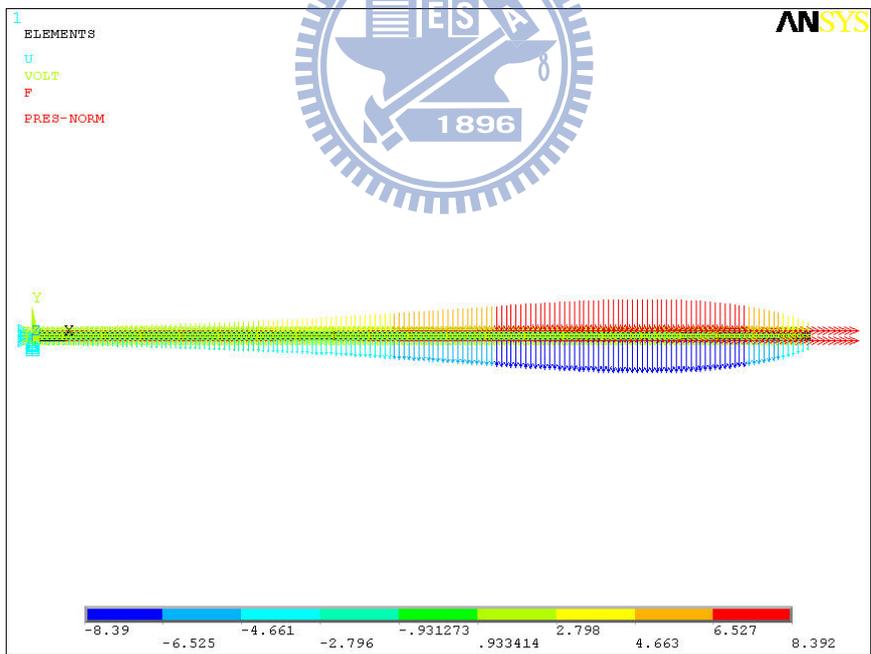
《圖 4.18》暫態分析的限制條件示意圖



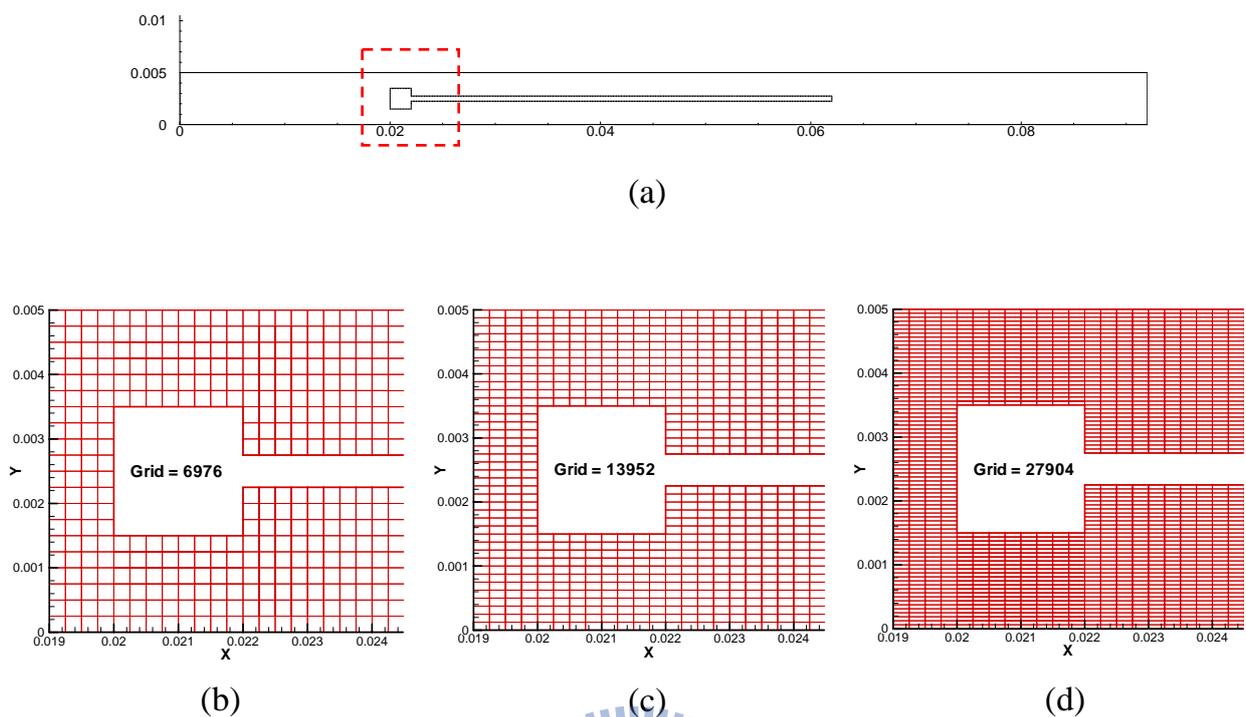
《圖 4.19》暫態分析之流體壓力給定



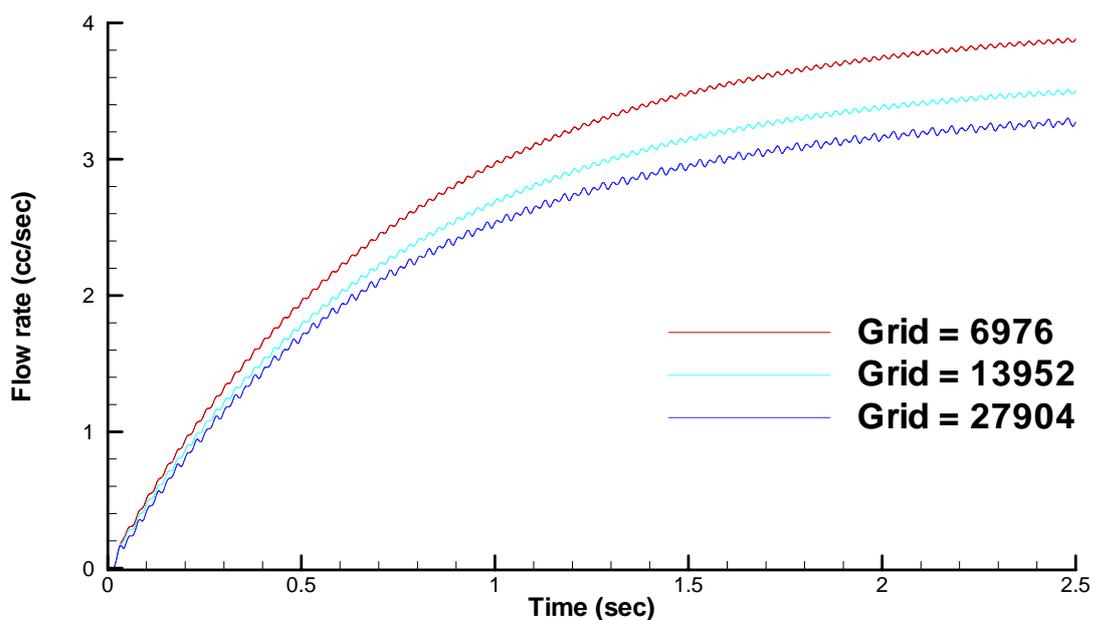
《圖 4.20》暫態分析之流體剪力給定



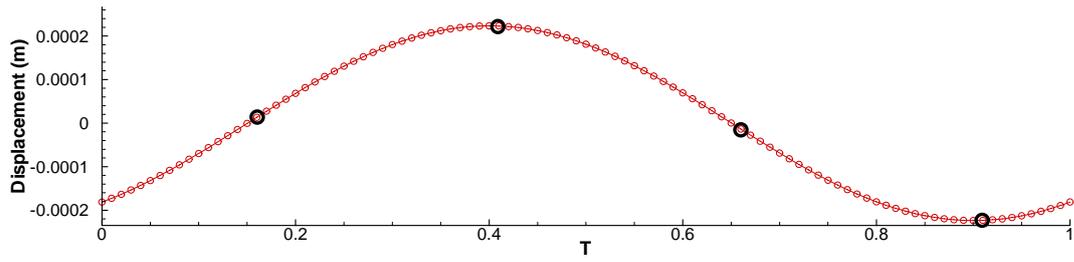
《圖 4.21》暫態分析之固力模型完成圖



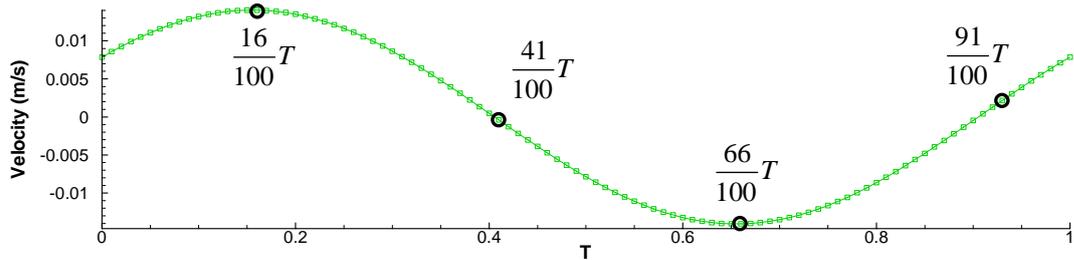
《圖 4.22》流場網格數目和尺寸圖(a)流場實際網格尺寸(b)網格 6976 格的局部放大圖
(c) 網格 13952 格的局部放大圖(d)網格 27904 格的局部放大圖



《圖 4.23》三種網格測試的流量結果圖，阻尼比 15、電壓 120V、外部負載頻率 20hz



(a)



(b)

《圖 4.24》頻率 10，最後一週期振動平板尾端頂點的變化圖(a)位置隨時間的變化(b)

速度隨時間的變化



$$t = \frac{16}{100}T$$



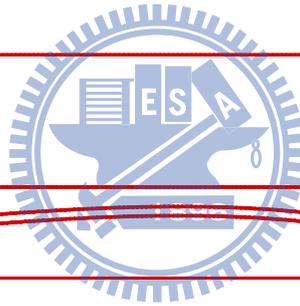
$$t = \frac{41}{100}T$$



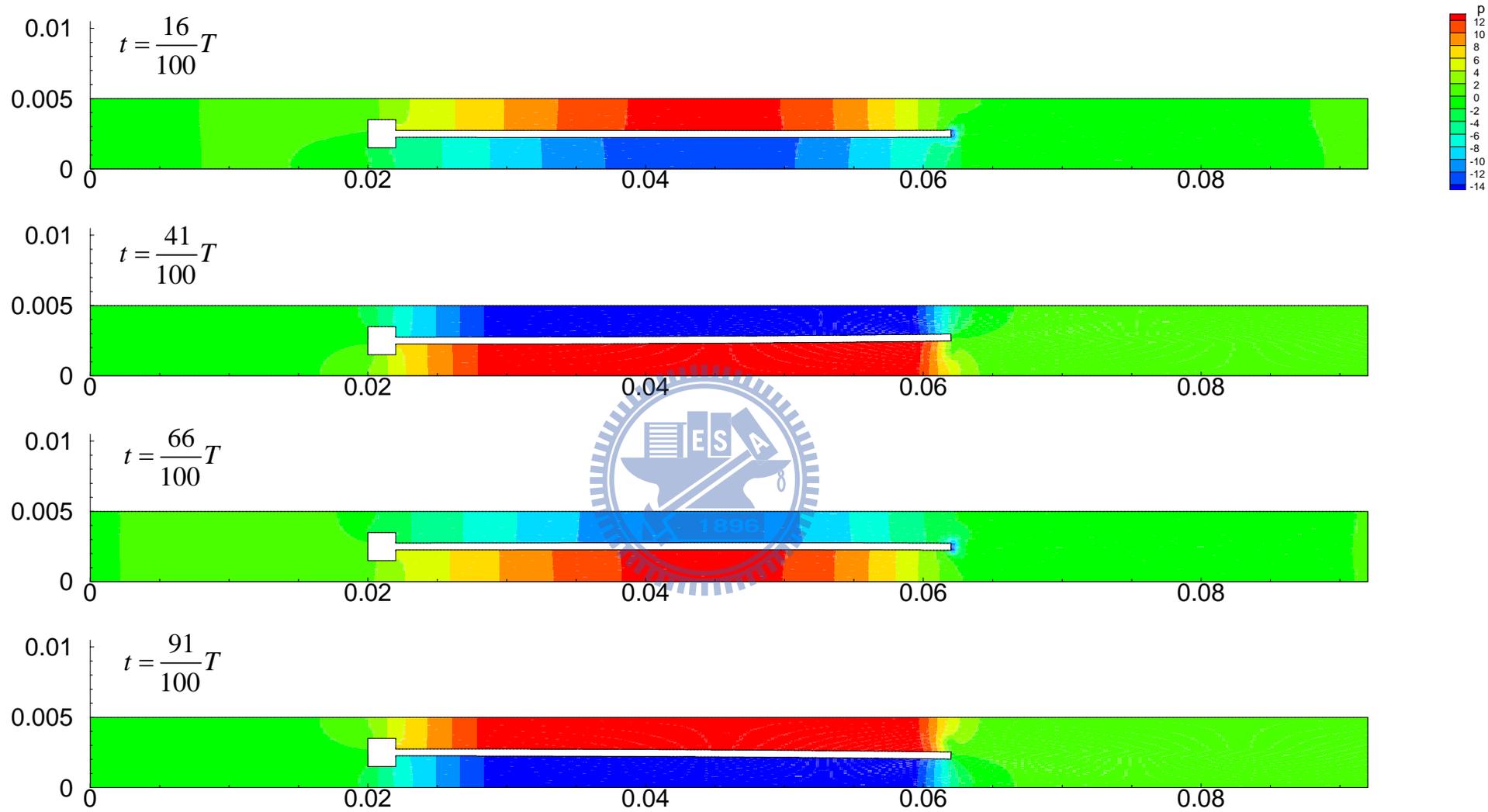
$$t = \frac{66}{100}T$$



$$t = \frac{91}{100}T$$



《圖 4.25》頻率 10，振動平板振幅放大 50 倍運動圖($t=16/100T$ 、 $41/100T$ 、 $66/100T$ 、 $91/100T$)



《圖 4.26》頻率 10，流場壓力隨時間變化圖($t=16/100T$ 、 $41/100T$ 、 $66/100T$ 、 $91/100T$)

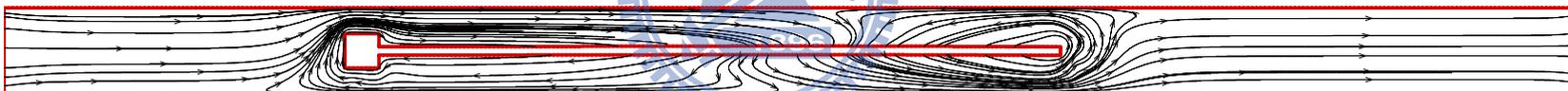
$$t = \frac{16}{100}T$$



$$t = \frac{41}{100}T$$



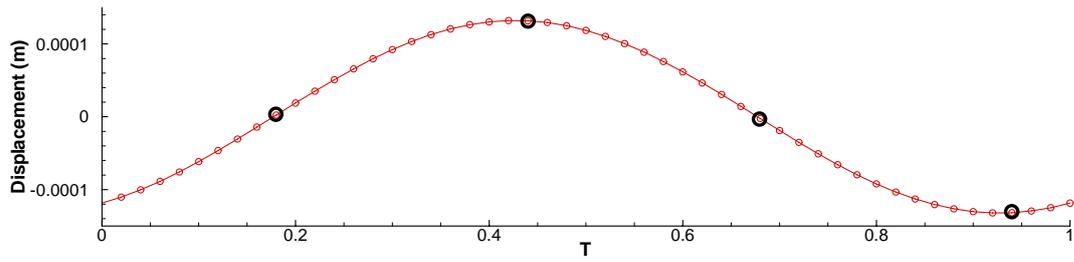
$$t = \frac{66}{100}T$$



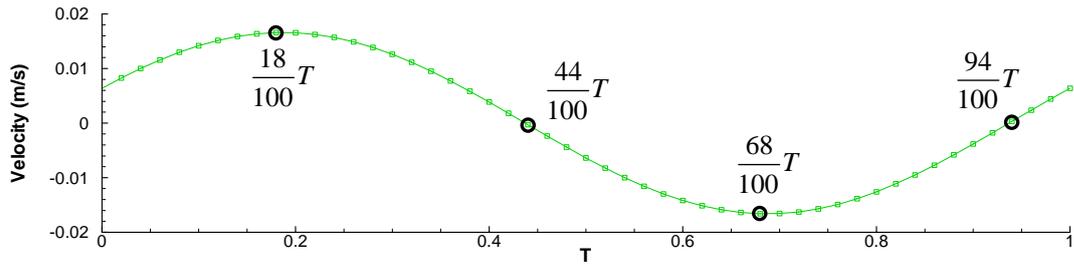
$$t = \frac{91}{100}T$$



《圖 4.27》頻率 10，流場流線隨時間變化圖($t=16/100T$ 、 $41/100T$ 、 $66/100T$ 、 $91/100T$)



(a)



(b)

《圖 4.28》頻率 20，最後一週期振動平板尾端頂點的變化圖(a)位置隨時間的變化(b)

速度隨時間的變化



$$t = \frac{18}{100}T$$



$$t = \frac{44}{100}T$$



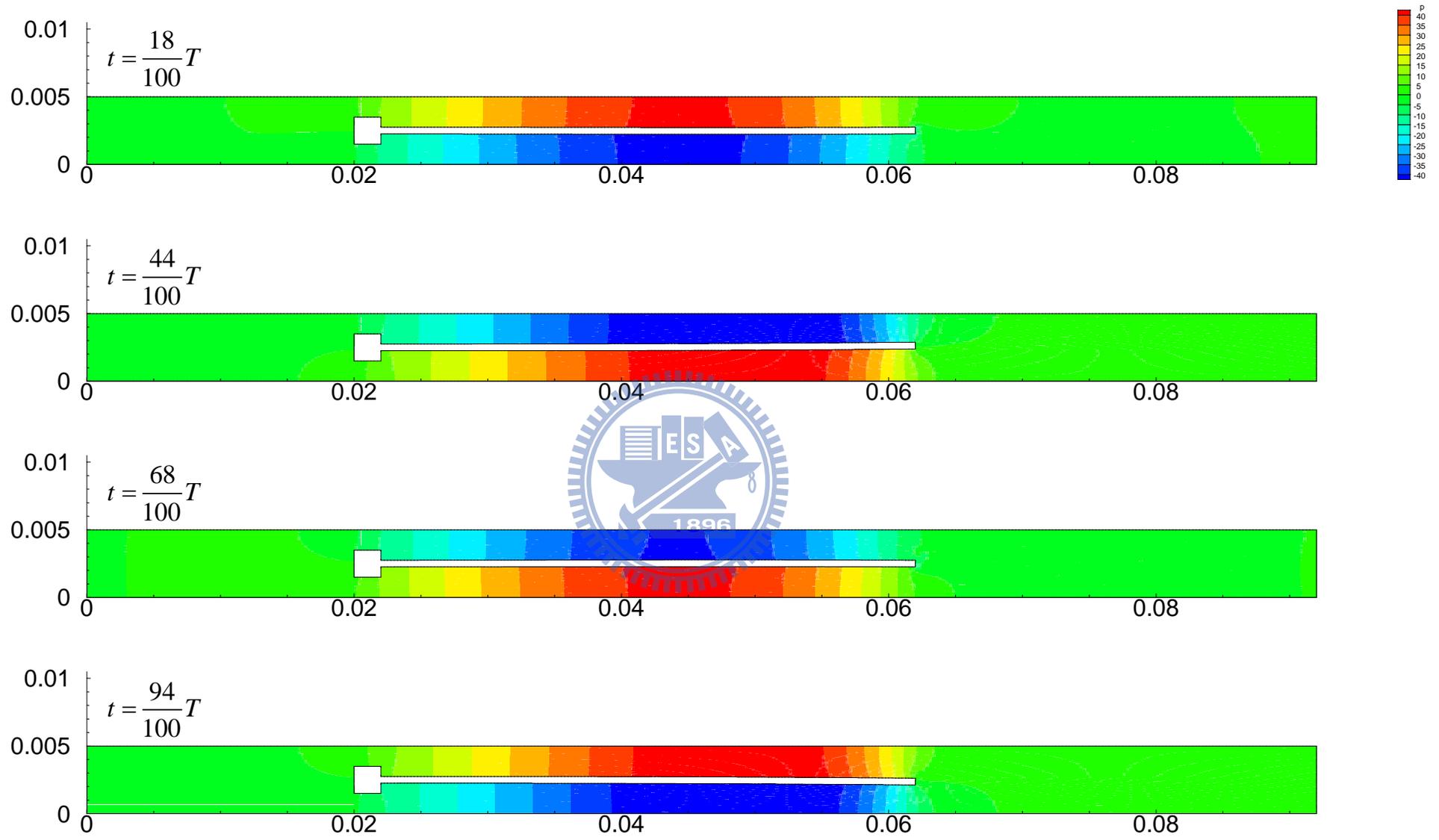
$$t = \frac{68}{100}T$$



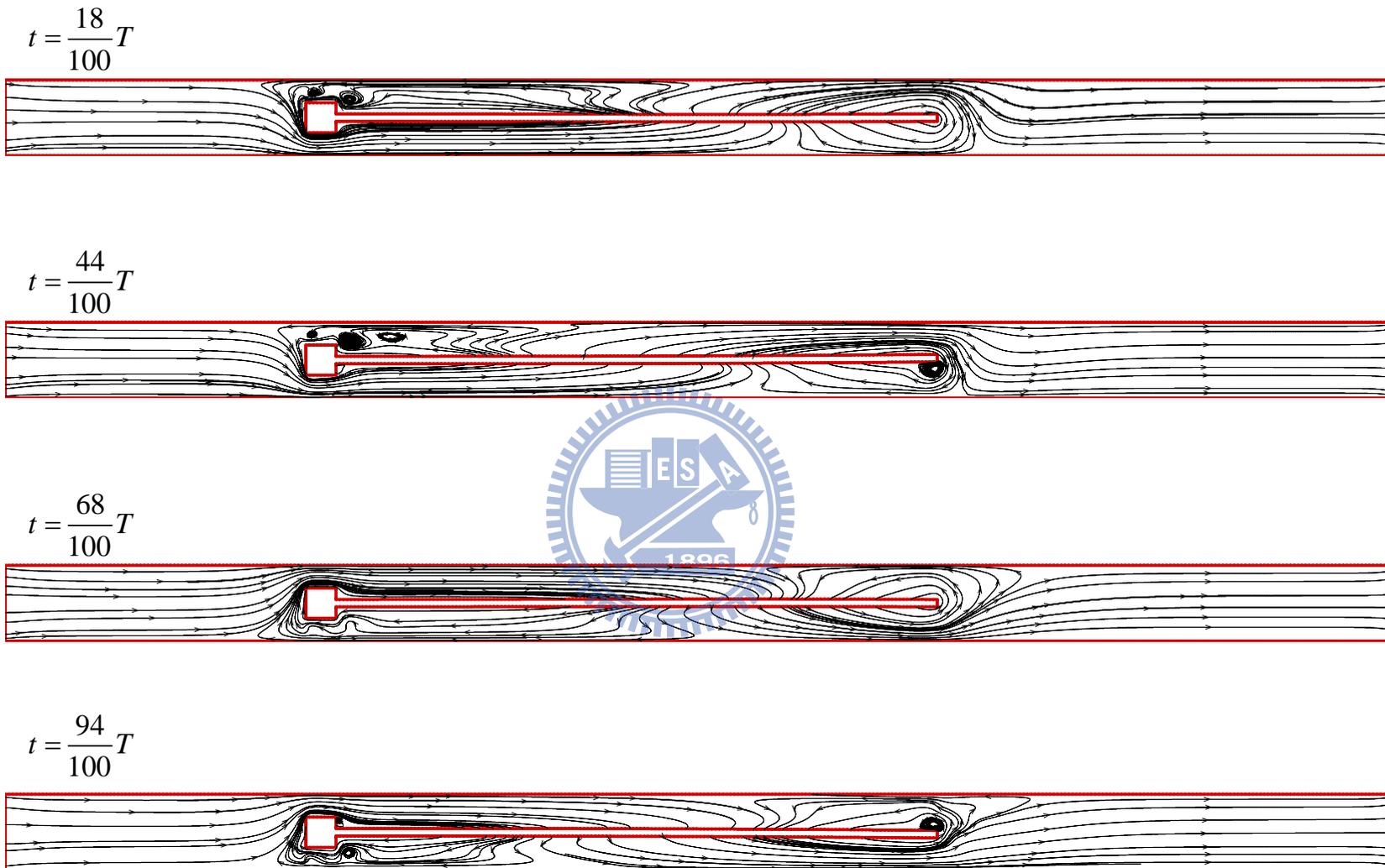
$$t = \frac{94}{100}T$$



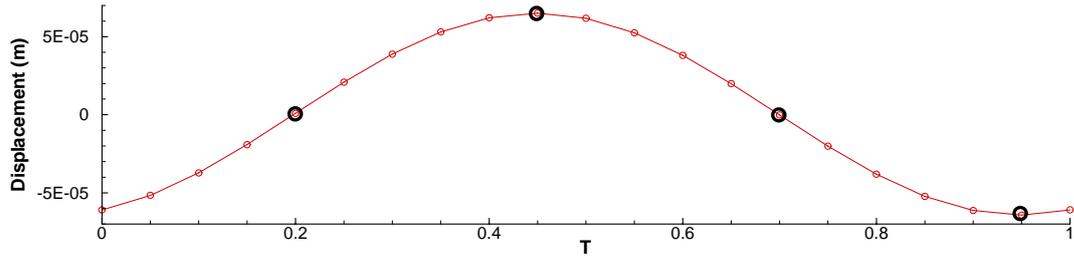
《圖 4.29》頻率 20，振動平板振幅放大 50 倍運動圖($t=16/100T$ 、 $41/100T$ 、 $66/100T$ 、 $91/100T$)



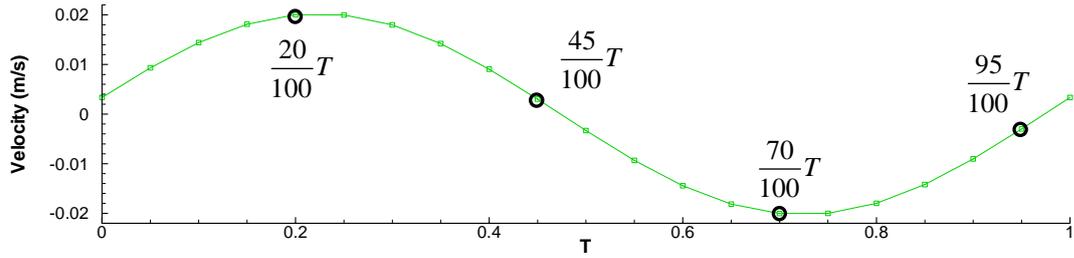
《圖 4.30》頻率 20，流場壓力隨時間變化圖($t=18/100T$ 、 $44/100T$ 、 $68/100T$ 、 $94/100T$)



《圖 4.31》頻率 20，流場流線隨時間變化圖($t=18/100T$ 、 $44/100T$ 、 $68/100T$ 、 $94/100T$)



(a)



(b)

《圖 4.32》頻率 50，最後一週期振動平板尾端頂點的變化圖(a)位置隨時間的變化(b)

速度隨時間的變化



$$t = \frac{20}{100}T$$



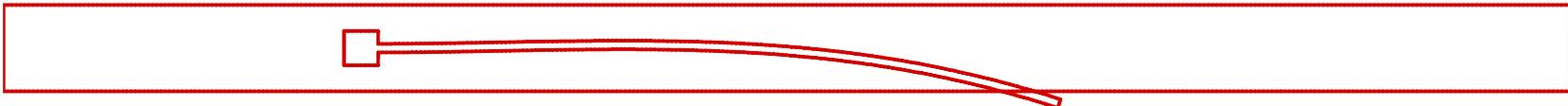
$$t = \frac{45}{100}T$$



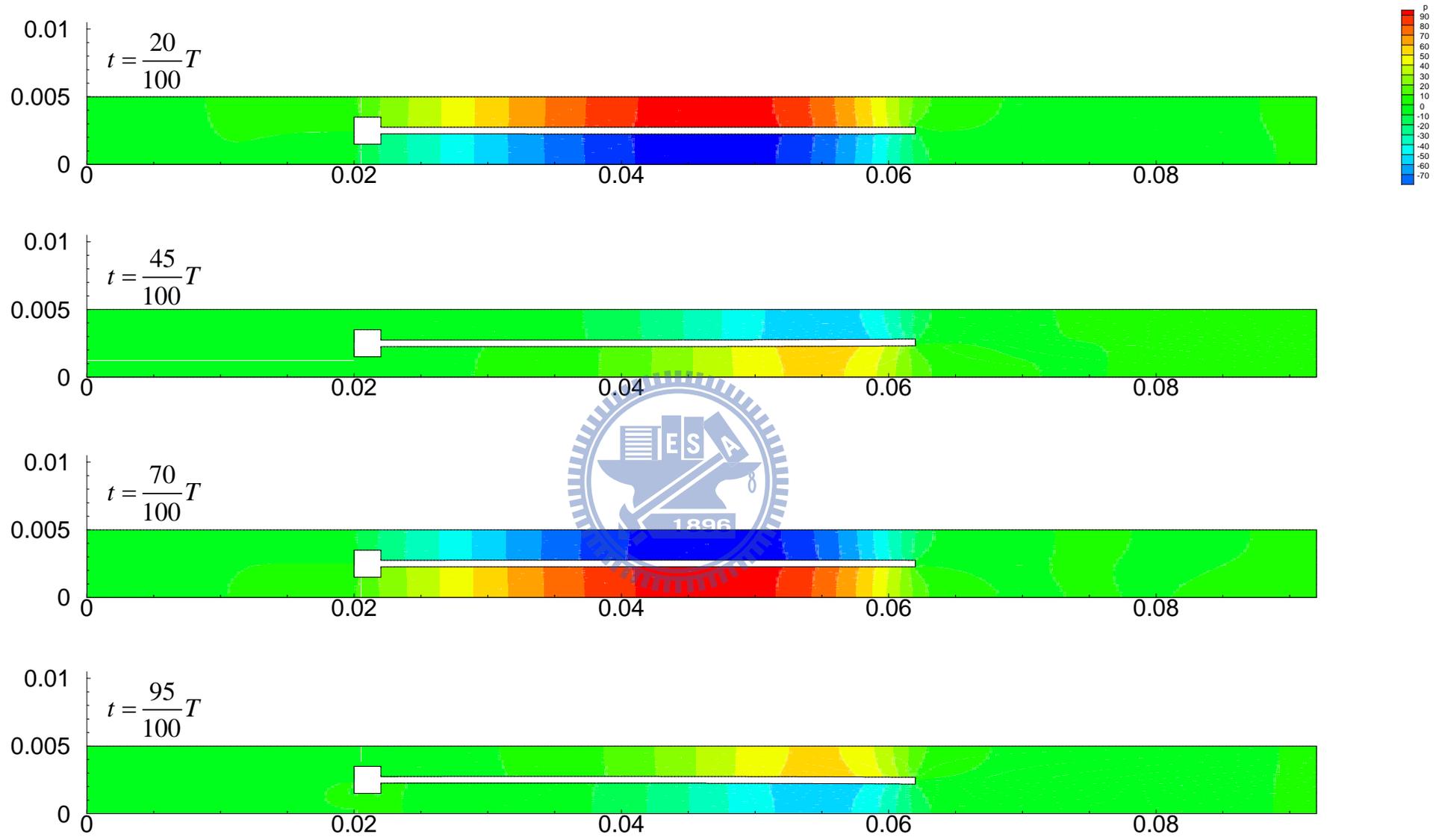
$$t = \frac{70}{100}T$$



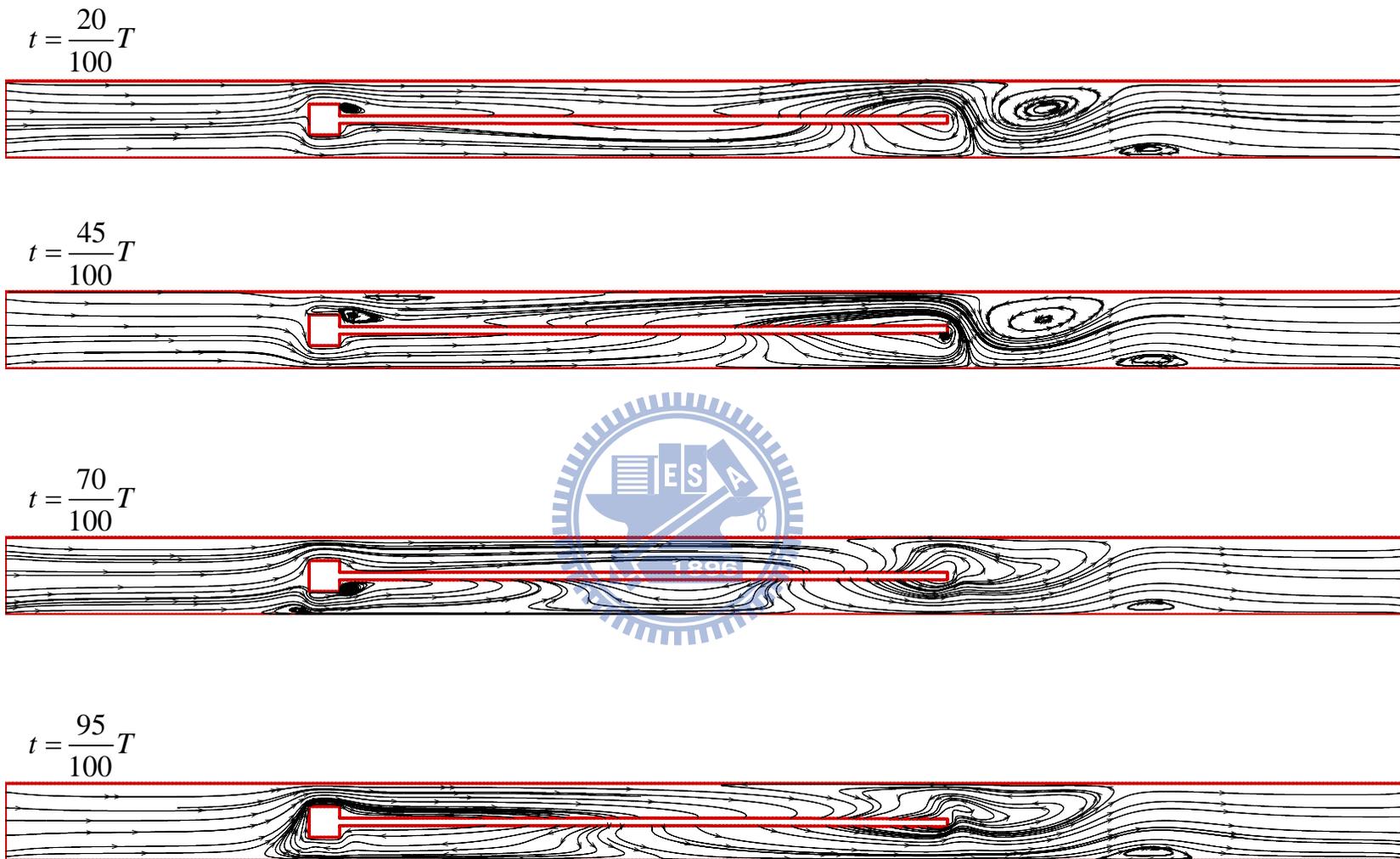
$$t = \frac{95}{100}T$$



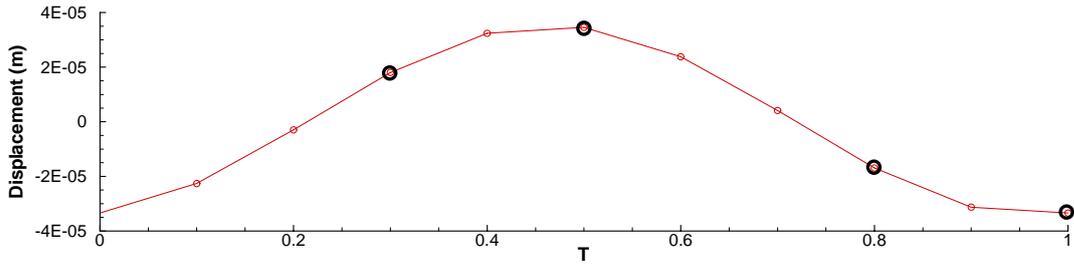
《圖 4.33》頻率 50，振動平板振幅放大 50 倍運動圖($t=16/100T$ 、 $41/100T$ 、 $66/100T$ 、 $91/100T$)



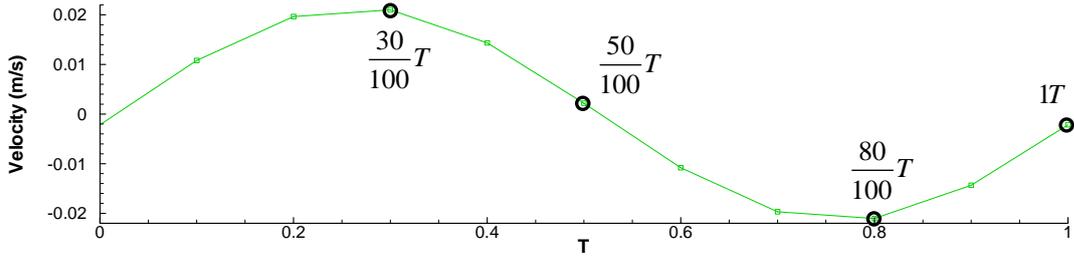
《圖 4.34》頻率 50，流場壓力隨時間變化圖($t=20/100T$ 、 $45/100T$ 、 $70/100T$ 、 $95/100T$)



《圖 4.35》頻率 50，流場流線隨時間變化圖($t=20/100T$ 、 $45/100T$ 、 $70/100T$ 、 $95/100T$)



(a)



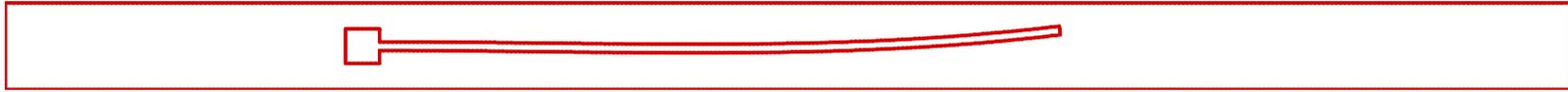
(b)

《圖 4.36》頻率 100，最後一週期振動平板尾端頂點的變化圖(a)位置隨時間的變化(b)

速度隨時間的變化



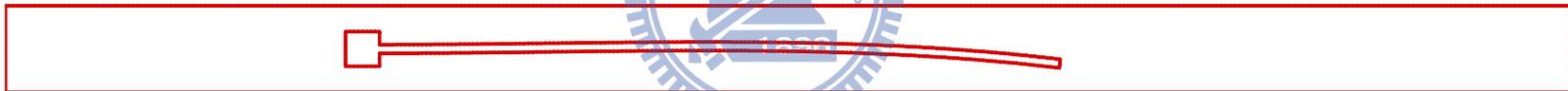
$$t = \frac{30}{100}T$$



$$t = \frac{50}{100}T$$



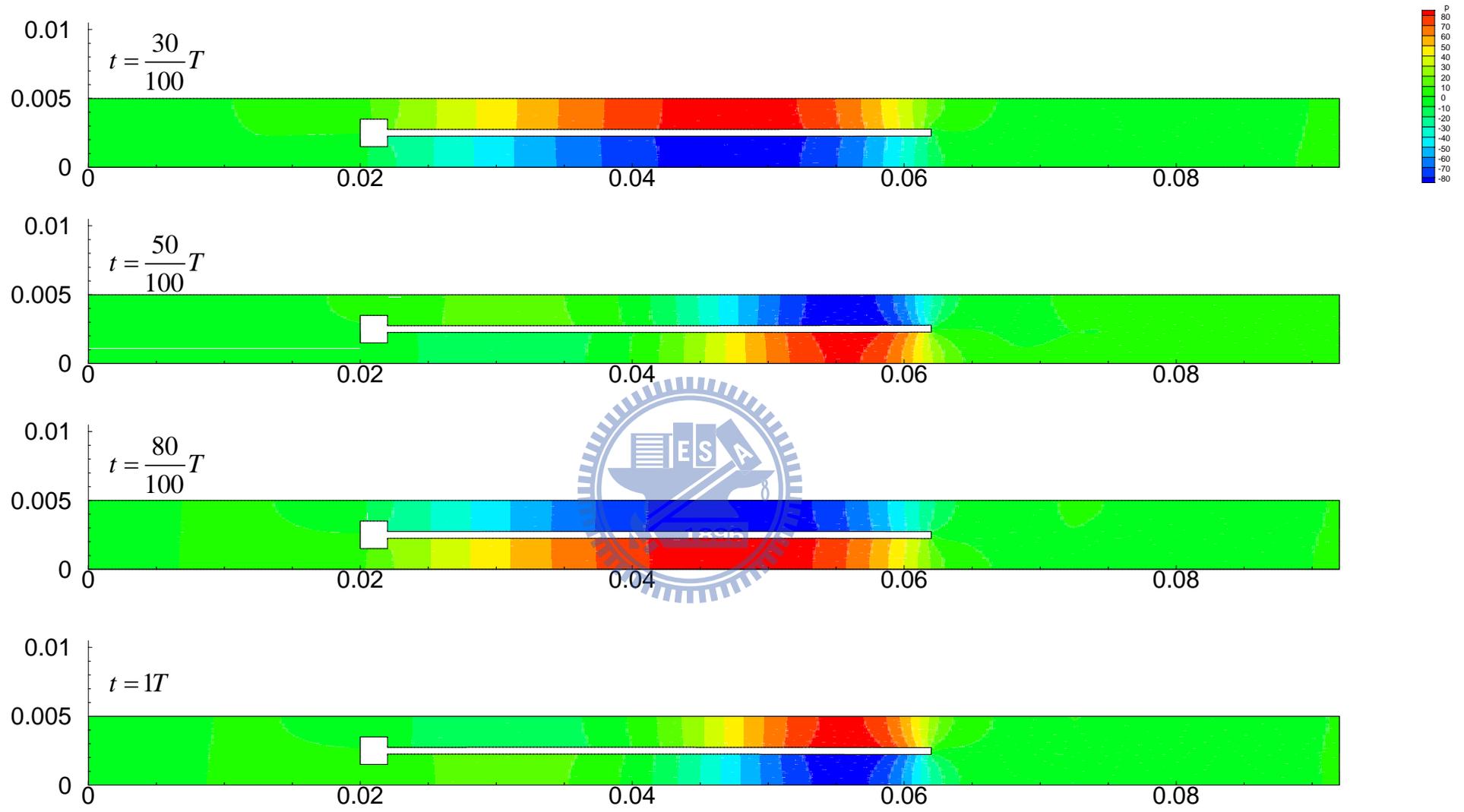
$$t = \frac{80}{100}T$$



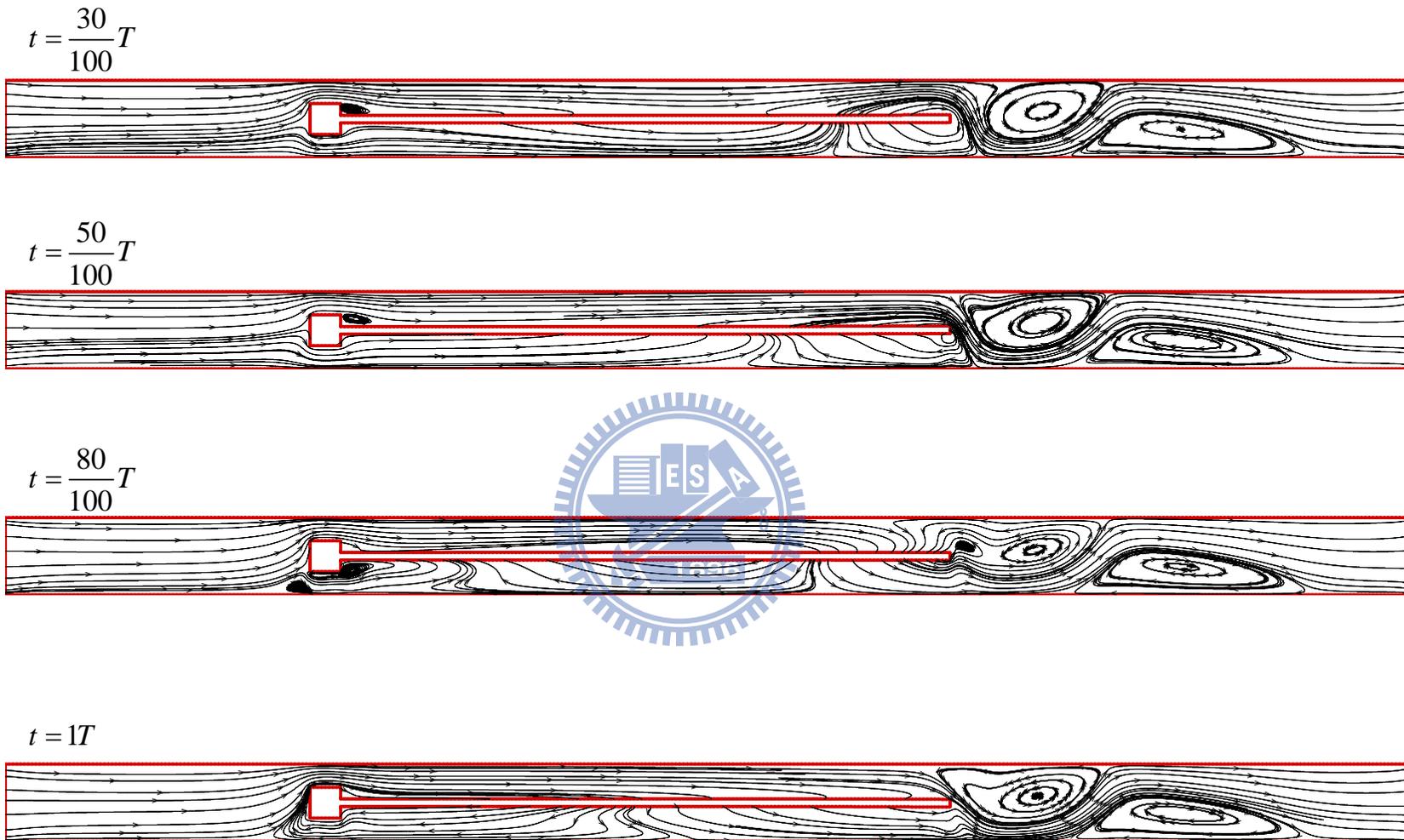
$$t = 1T$$



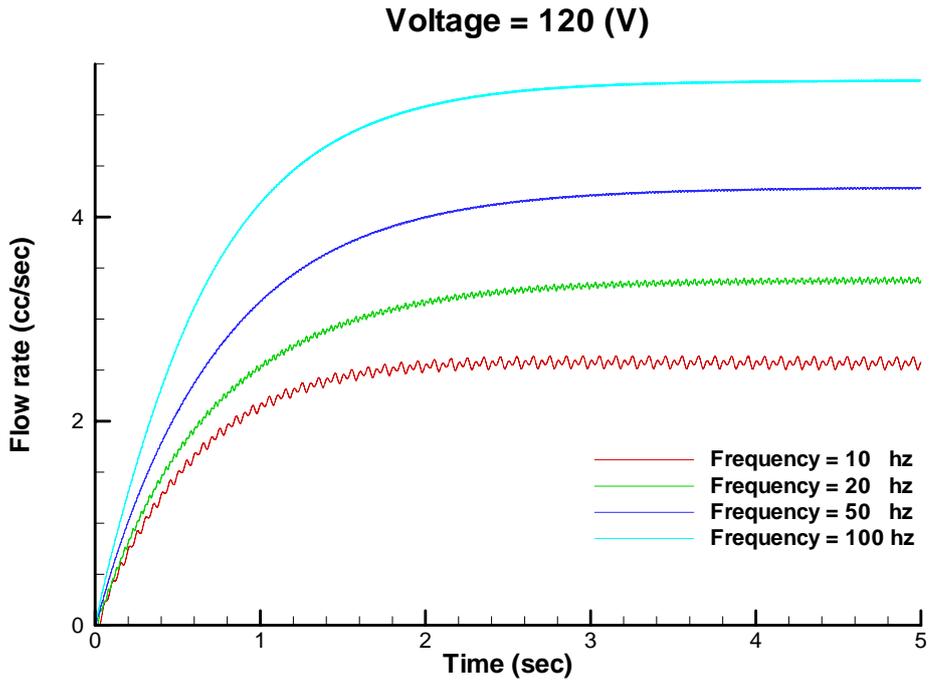
《圖 4.37》頻率 100，振動平板振幅放大 50 倍運動圖($t=16/100T$ 、 $41/100T$ 、 $66/100T$ 、 $91/100T$)



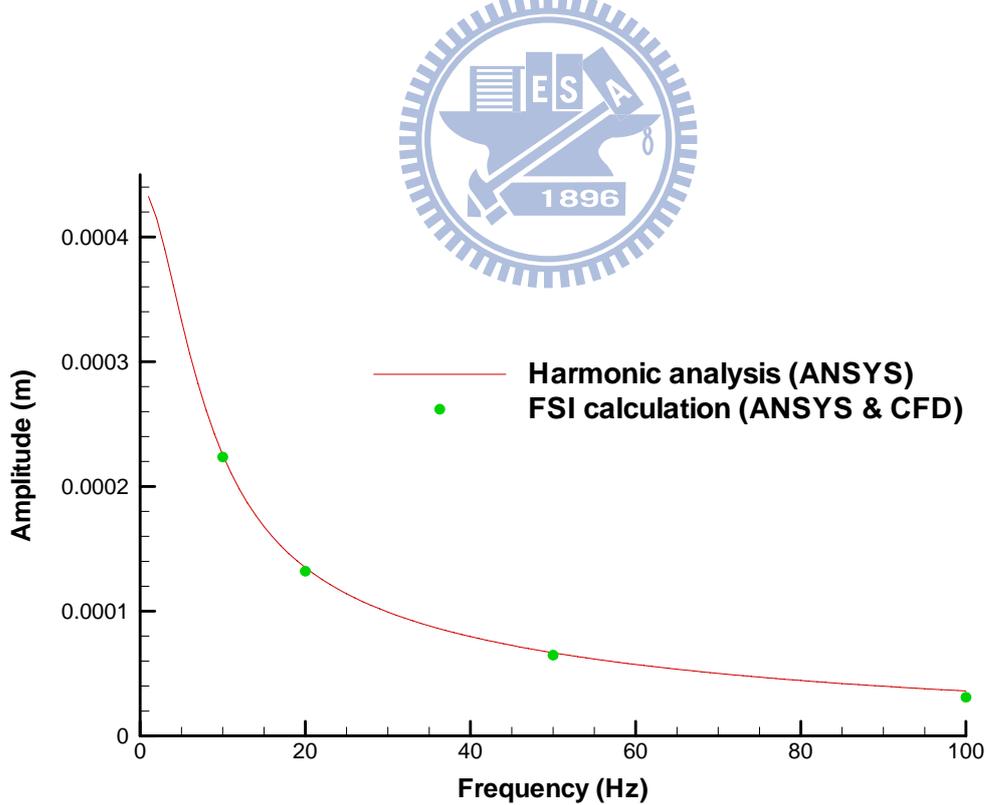
《圖 4.38》頻率 100，流場壓力隨時間變化圖($t=30/100T$ 、 $50/100T$ 、 $80/100T$ 、 $1T$)



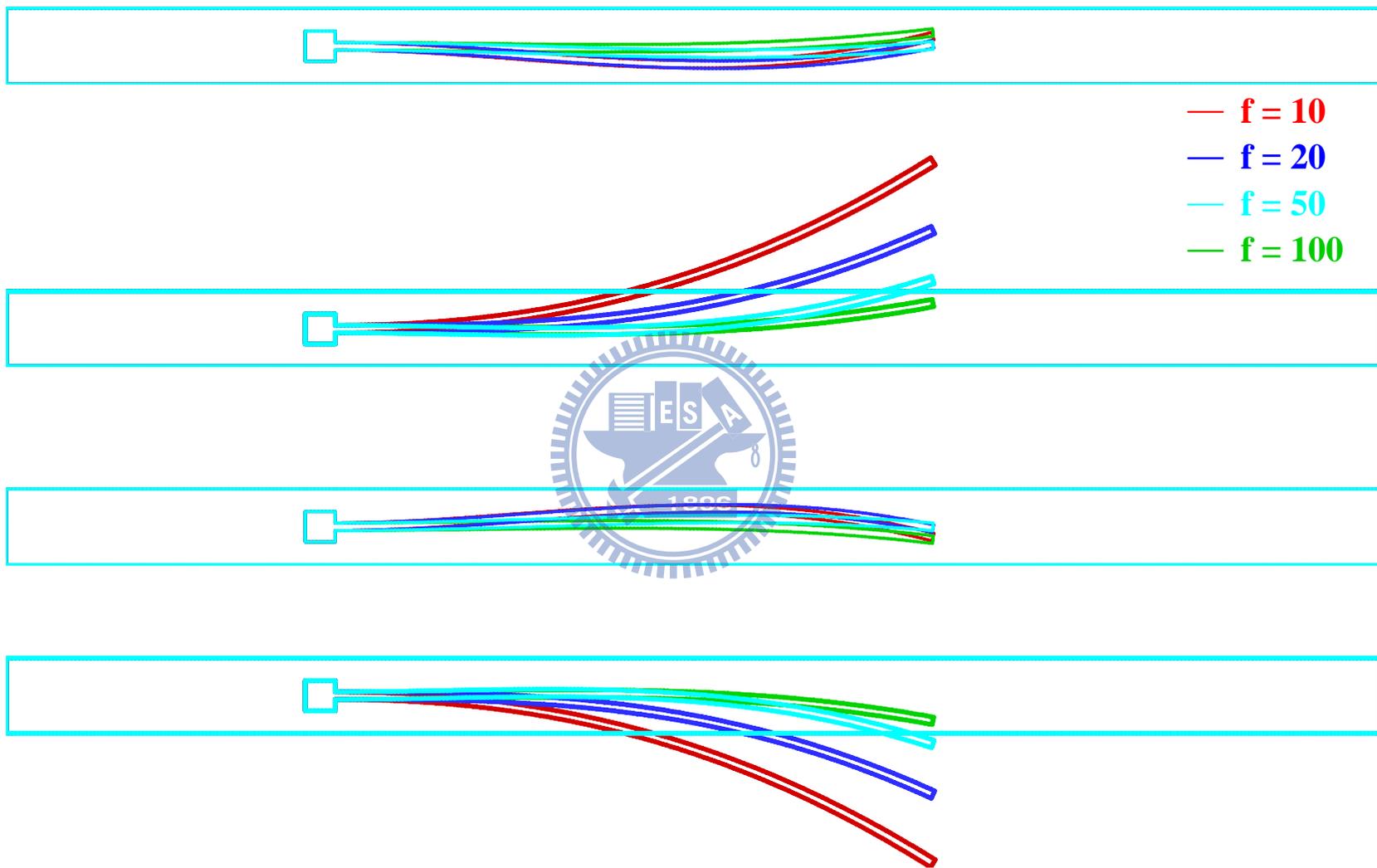
《圖 4.39》頻率 100，流場流線隨時間變化圖($t=30/100T$ 、 $50/100T$ 、 $80/100T$ 、 $1T$)



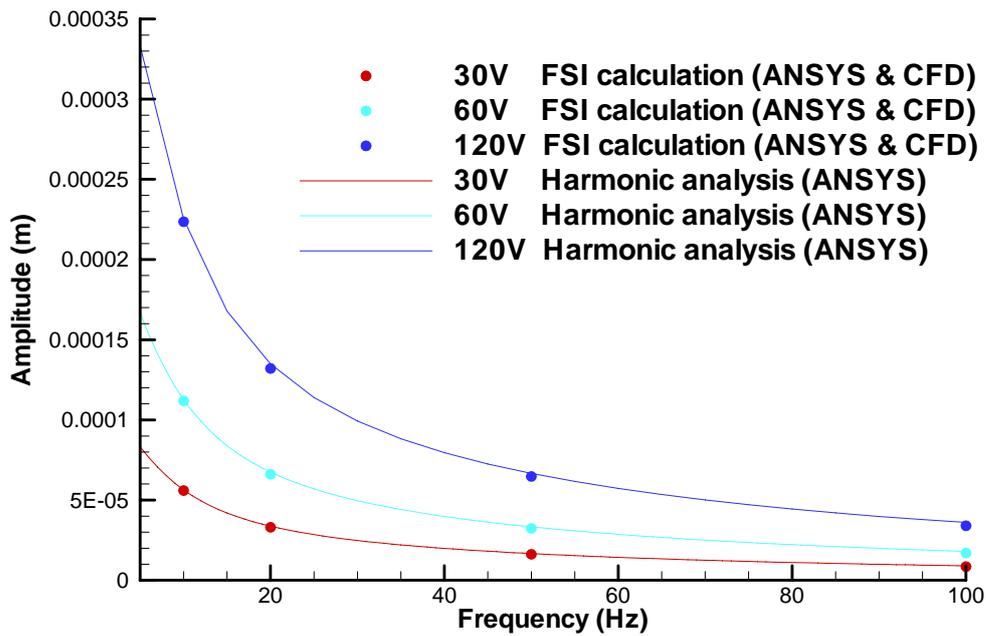
《圖 4.40》阻尼比為 15 時，不同頻率於 0~5 秒的流量隨時間之變化



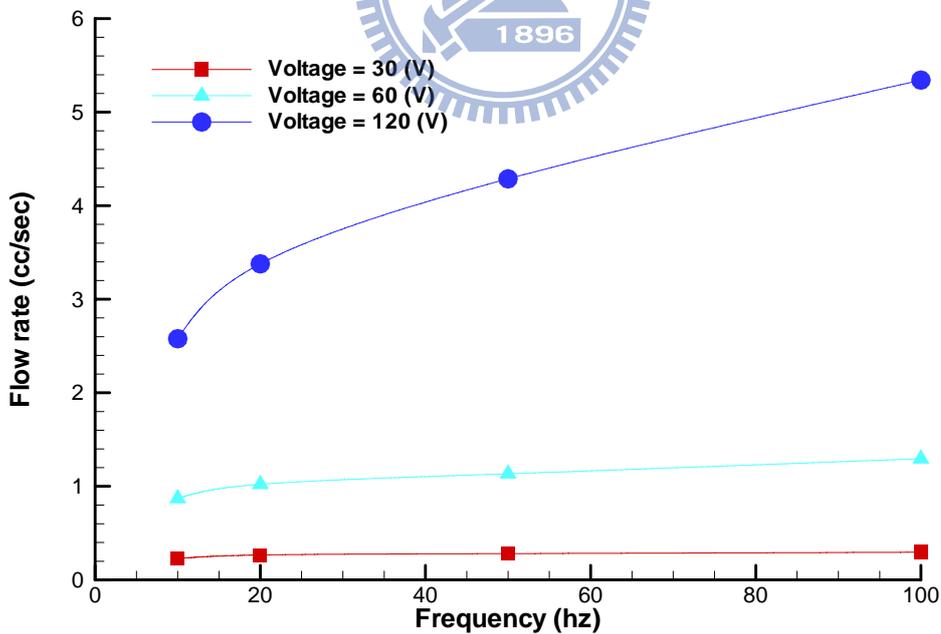
《圖 4.41》ANSYS 調和分析和 CFD-ANSYS 耦合分析之結果：阻尼比為 15 時，振動平板尾端的振幅大小



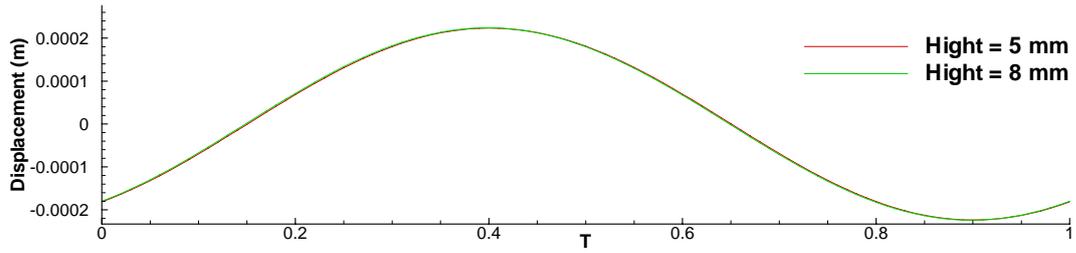
《圖 4.42》頻率 10、20、50、100 在各個頻率的特定取樣時間的振動平板振幅放大 50 倍運動圖



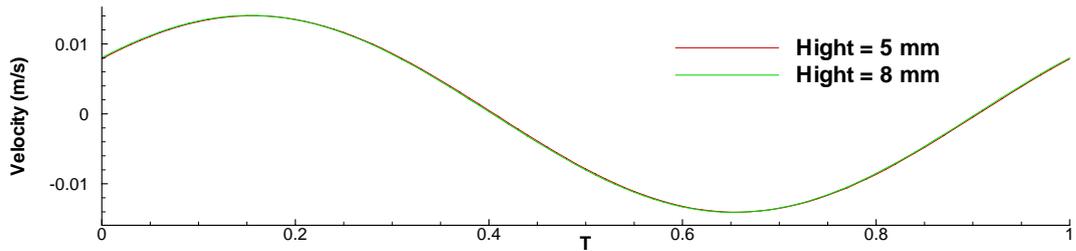
《圖 4.43》ANSYS 調和分析和 CFD-ANSYS 耦合分析之結果：阻尼比為 15 時，電壓為 30V、60V、120V 振動平板尾端的振幅大小



《圖 4.44》阻尼比為 15 時，電壓為 30V、60V、120V 時 CFD-ANSYS 耦合分析之流量大小



(a)

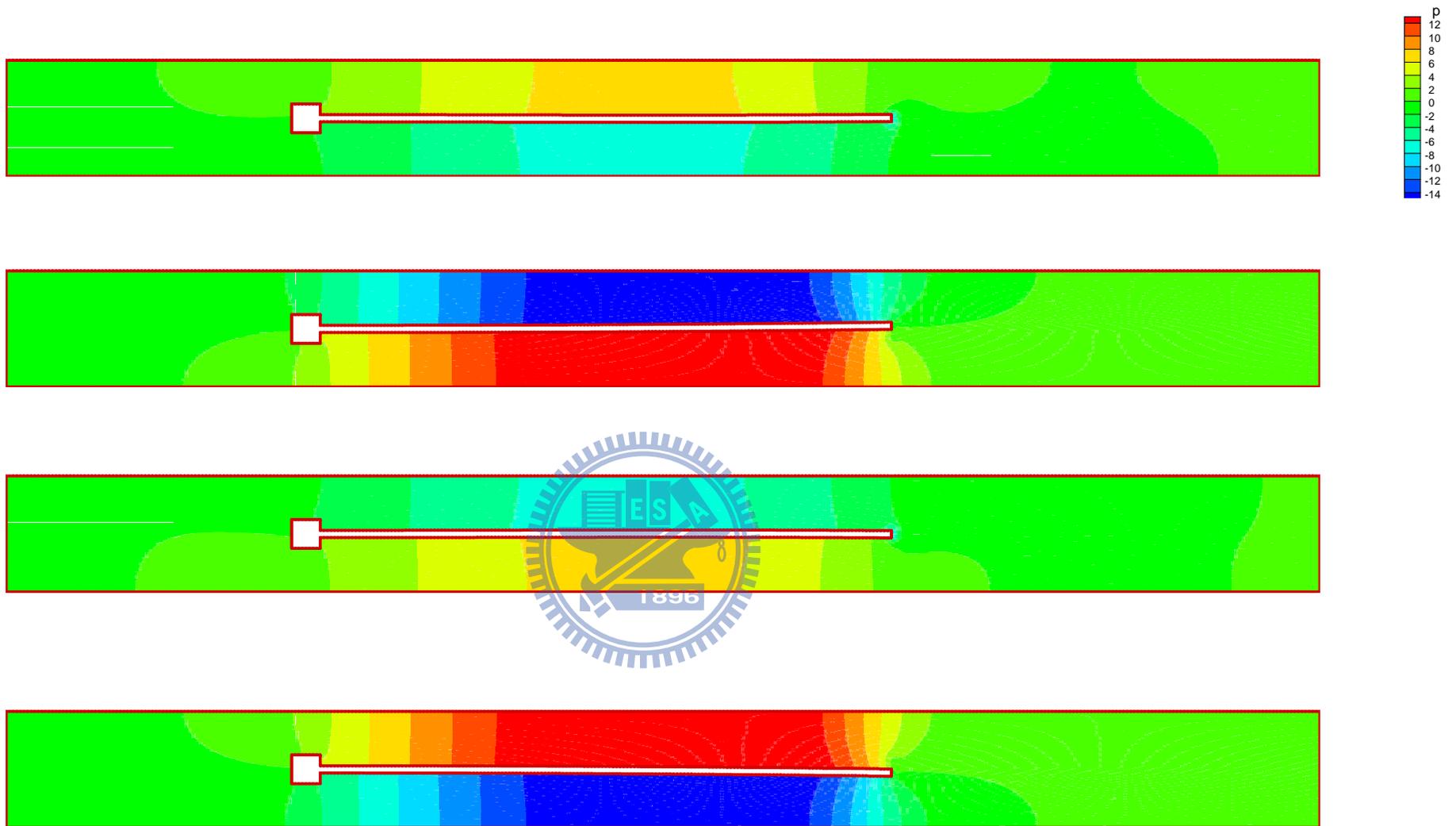


(b)

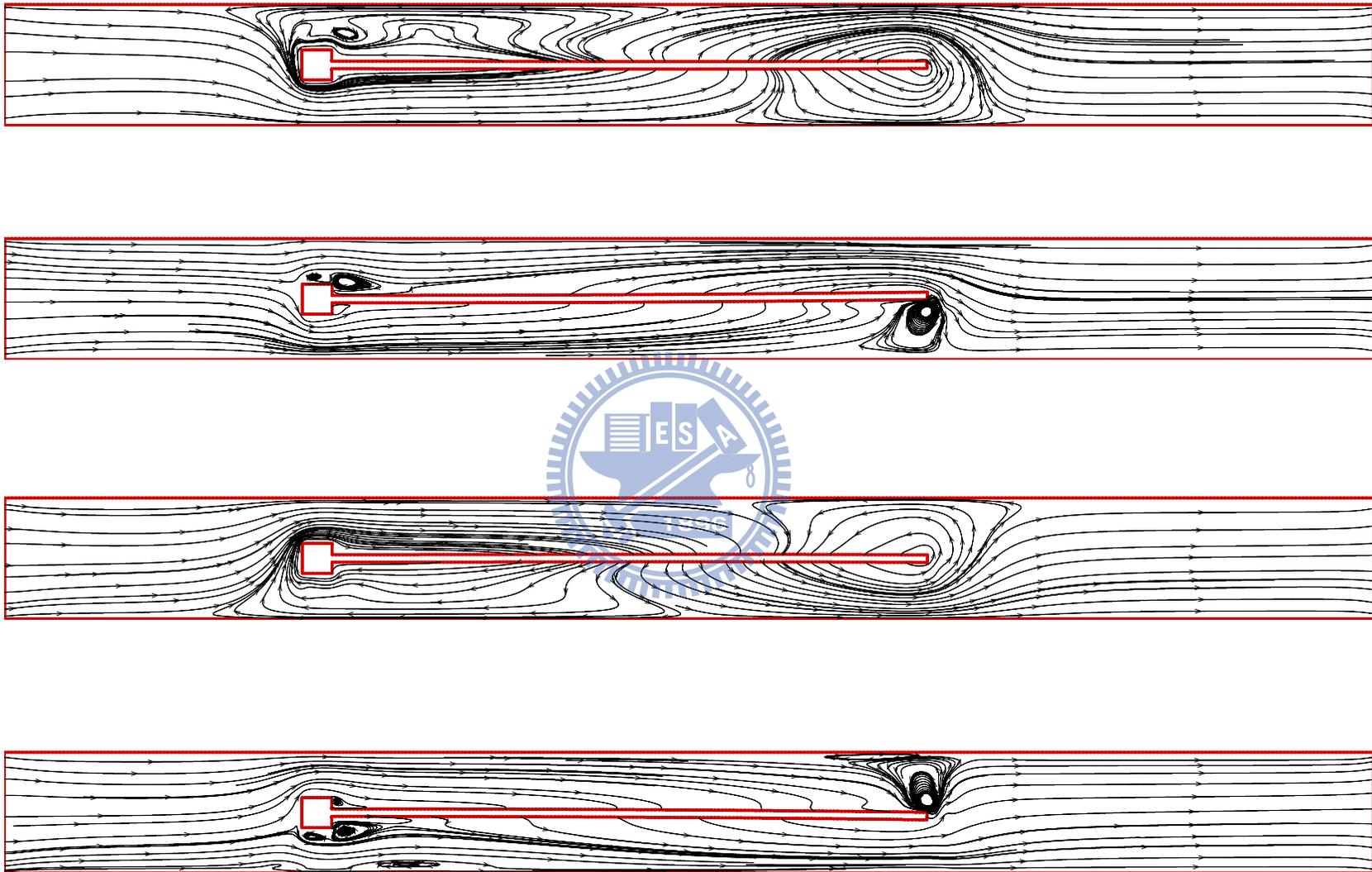
《圖 4.45》頻率 10、入口高度 5mm 和 8mm，最後一週期振動平板尾端頂點的變化圖

(a)位置隨時間的變化(b)速度隨時間的變化

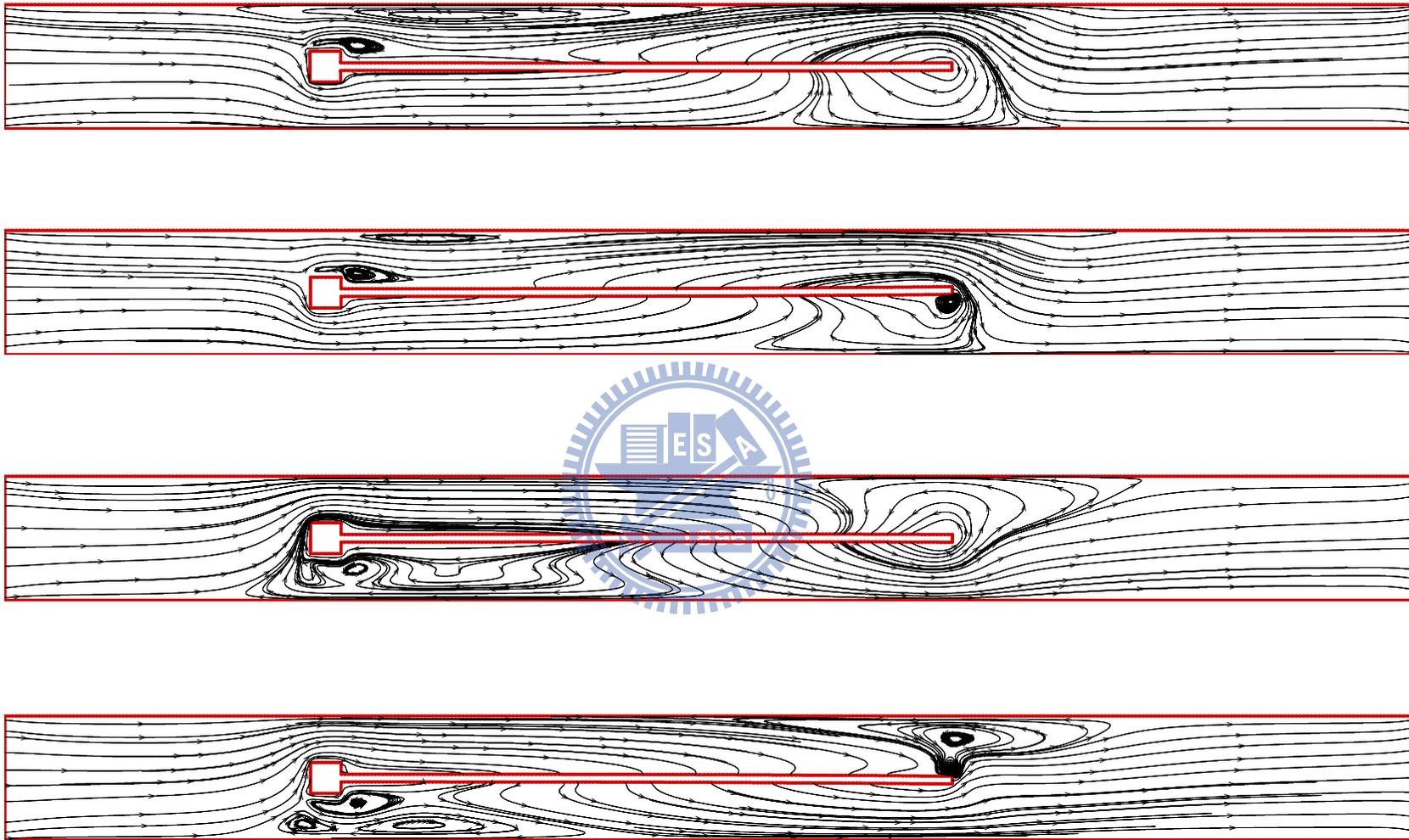




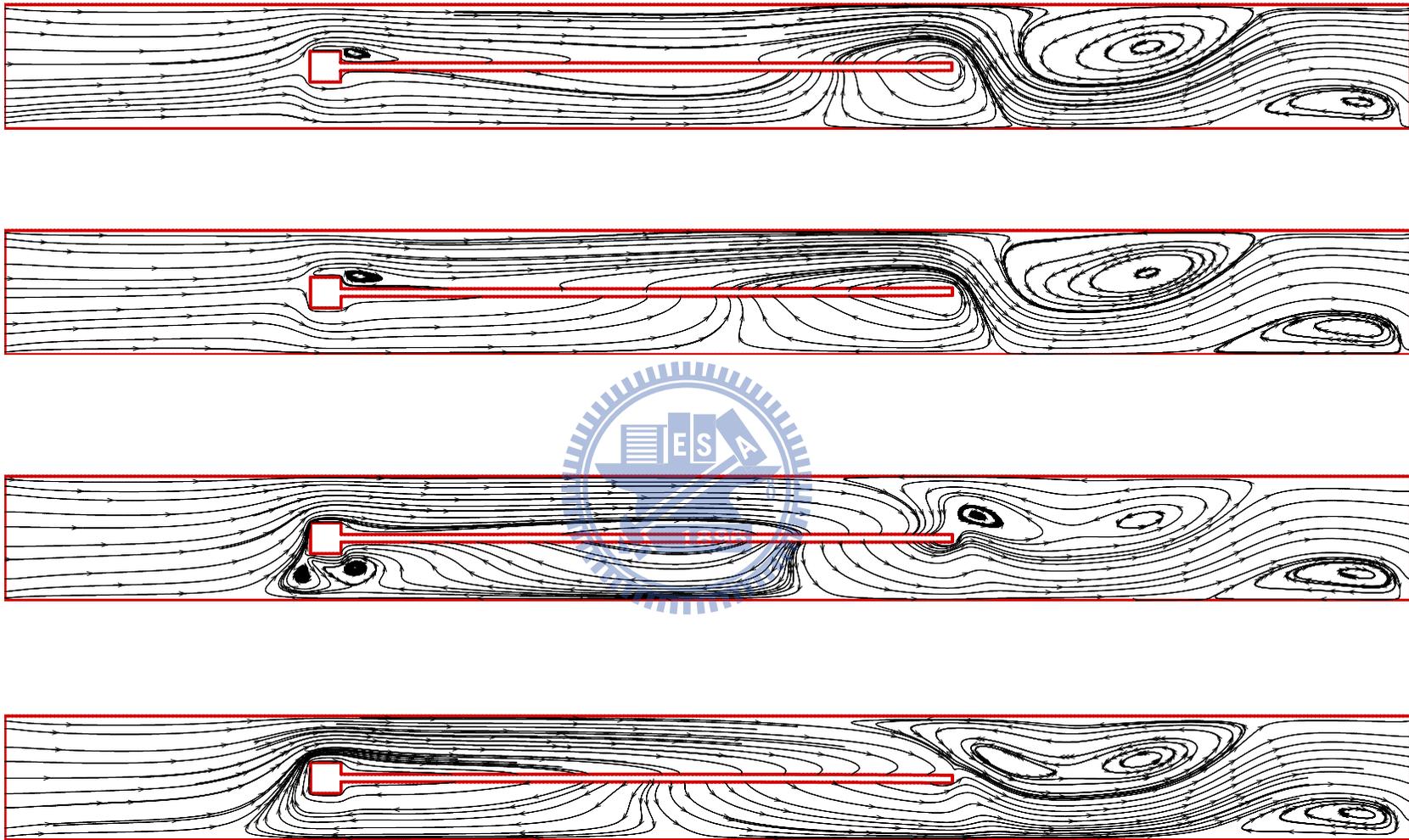
《圖 4.46》頻率 10，入口高度 8mm，流場壓力隨時間變化圖($t=16/100T$ 、 $41/100T$ 、 $66/100T$ 、 $91/100T$)



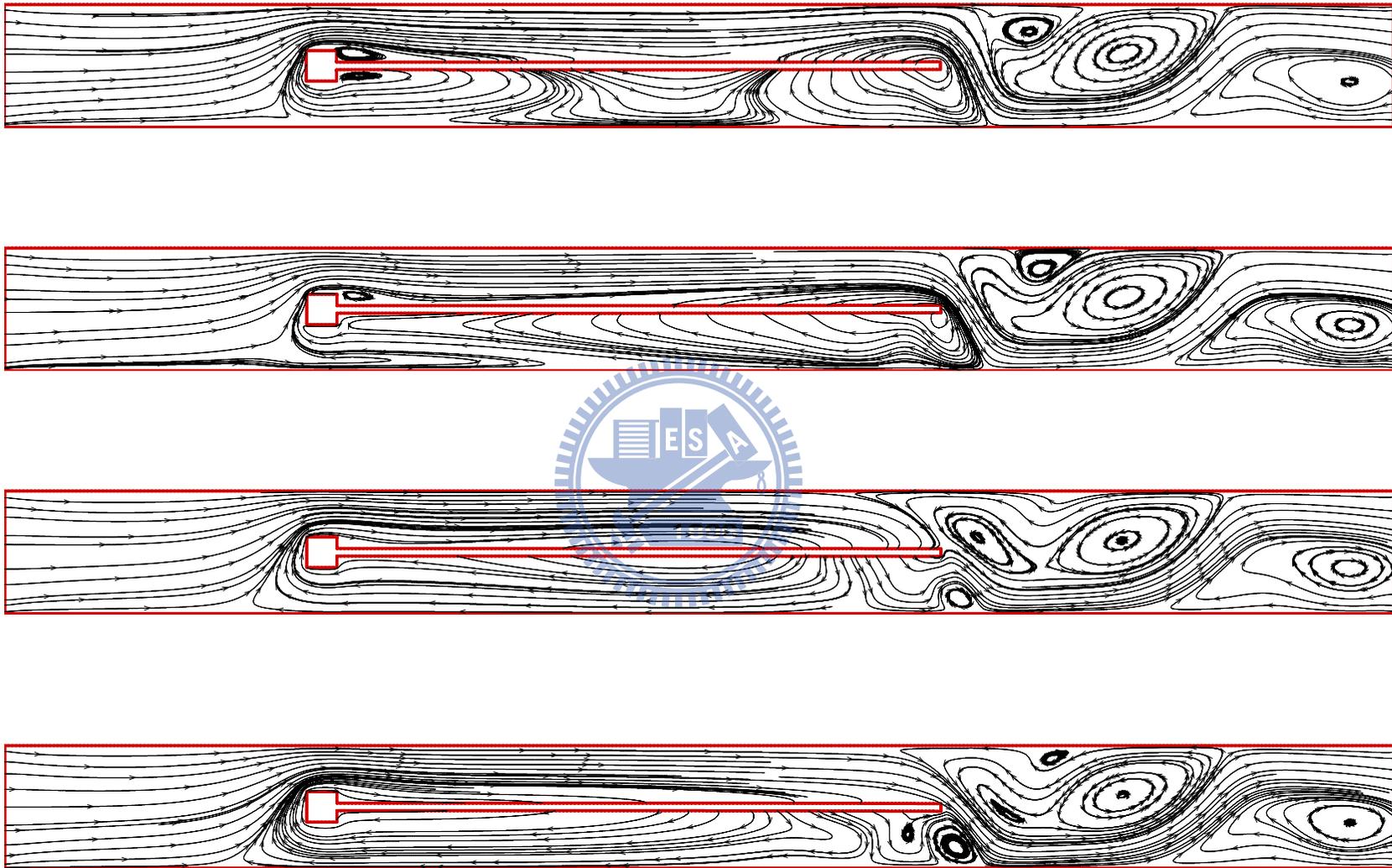
《圖 4.47》頻率 10，入口高度 8mm，流場流線隨時間變化圖($t=16/100T$ 、 $41/100T$ 、 $66/100T$ 、 $91/100T$)



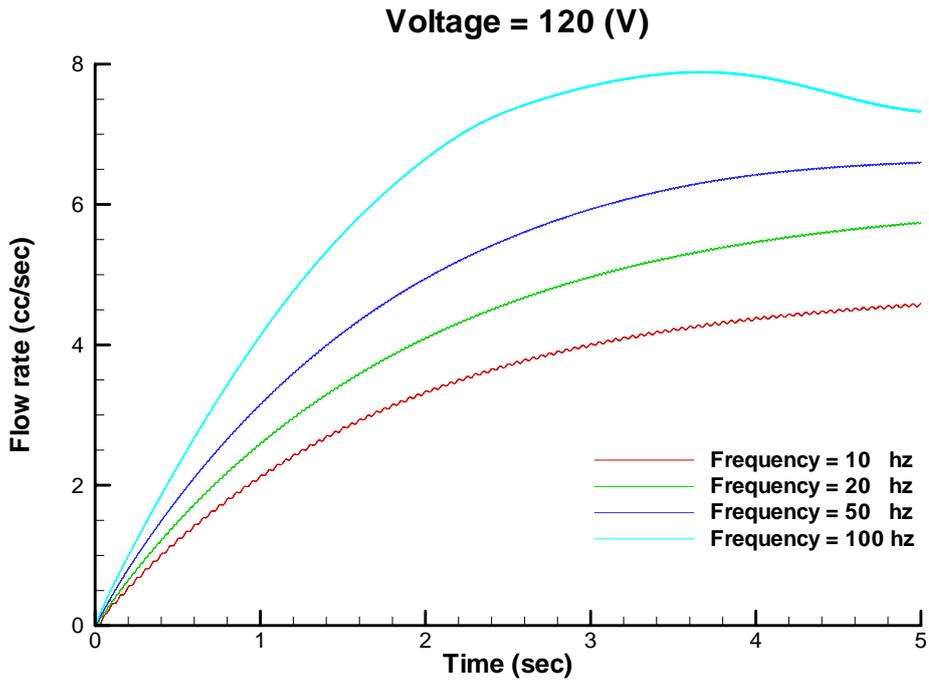
《圖 4.48》頻率 20，入口高度 8mm，流場流線隨時間變化圖($t=18/100T$ 、 $44/100T$ 、 $68/100T$ 、 $94/100T$)



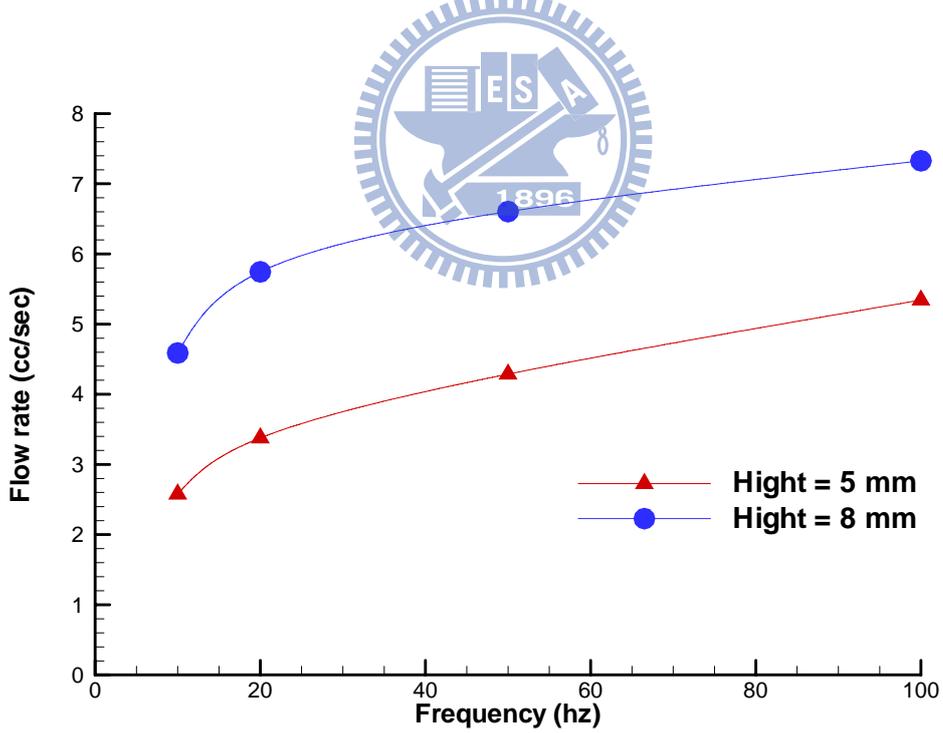
《圖 4.49》頻率 50，入口高度 8mm，流場流線隨時間變化圖($t=20/100T$ 、 $45/100T$ 、 $70/100T$ 、 $95/100T$)



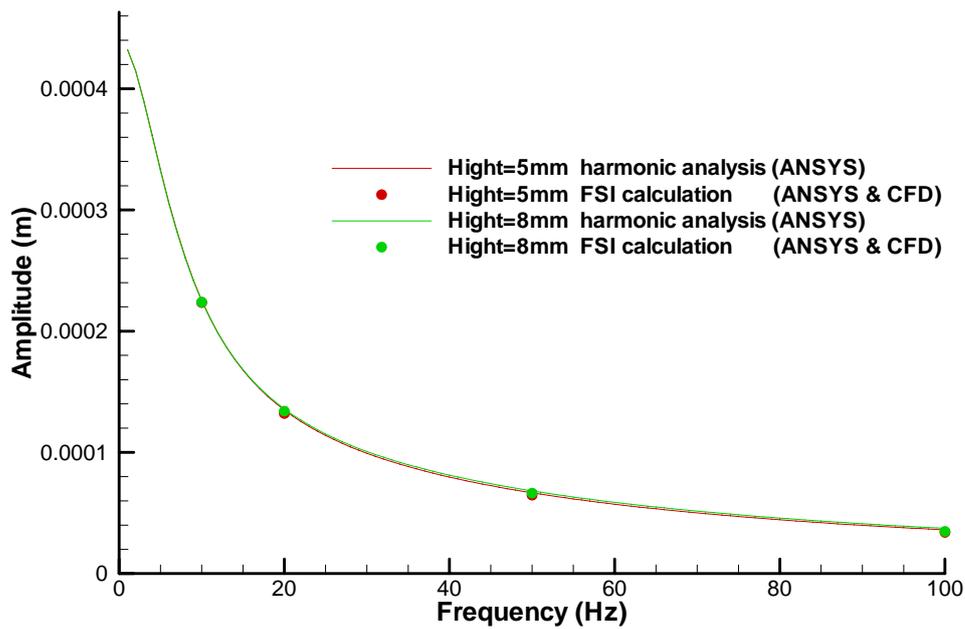
《圖 4.50》頻率 100，入口高度 8mm，流場流線隨時間變化圖($t=30/100T$ 、 $50/100T$ 、 $80/100T$ 、 $1T$)



《圖 4.51》阻尼比為 15 時，入口高度 8mm，不同頻率於 0~5 秒的流量隨時間變化



《圖 4.52》阻尼比為 15 時，入口高度為 5mm 和 8mm 的 CFD-ANSYS 耦合分析之流量大小



《圖 4.53》ANSYS 調和分析和 CFD-ANSYS 耦合分析之結果：阻尼比為 15 時，入口高度為 5mm 和 8mm，振動平板尾端的振幅大小



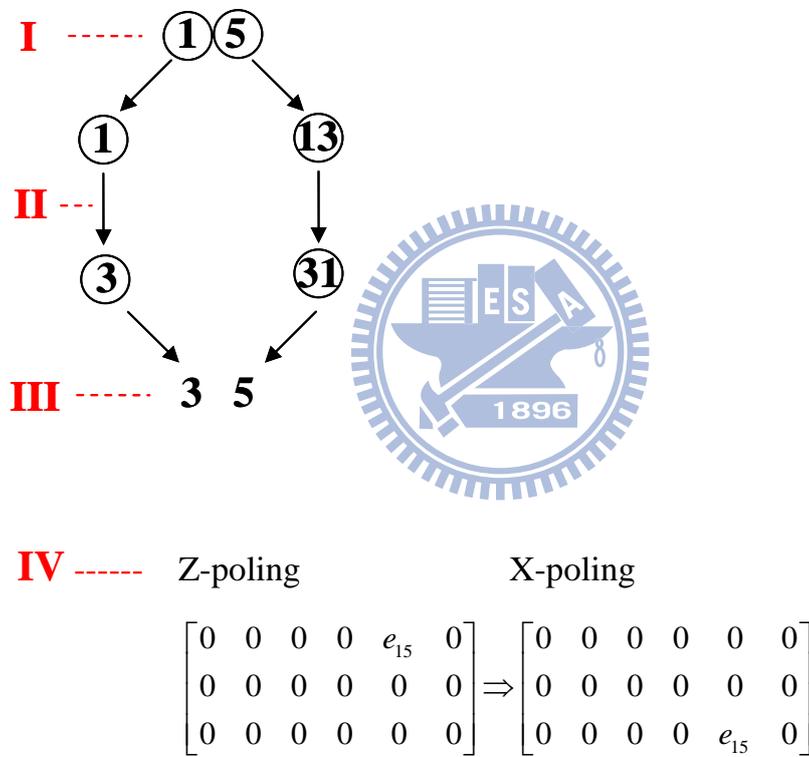
附錄

附錄 1：壓電矩陣極化方向轉換方法

轉換方法：

- I. 將原位置編號列出
- II. 轉換座標
- III. 算出新位置
- IV. 將原位置的值放入新位置

範例：Z 方向極化轉換為 X 方向極化，矩陣內原本位置為 15 的參數 e_{15} 。



附錄 2：調和分析耦合方法：

在調和分析的建模當中，當模型建好並且元素分割完成，即前處理完畢後，進入求解器時給定限制條件。當中存在非常關鍵的步驟即以下三行指令

```
esel,s,type,,3  
sf,all,fsi,1  
ALLSEL,ALL
```

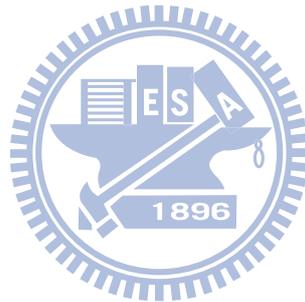
此指令必須用於所有的流體元素和固體元素的交界處，即是宣告此交界處為流固耦合介面(Fluid-Structure Interaction, FSI)。

```
esel,s,type,,3
```

上式的 3 其實是本文於程式中自行定義流體元素 Fluid29 的 element type 編號為 3。

```
sf,all,fsi,1
```

上式為宣告為 FSI 介面，詳細介紹可參考 ANSYS 內的 Help Topics。



簡歷

個人資料 PERSONAL INFORMATION

姓名 Name 陳信宏 Shin-Hung Chen	性別 Sex 男 male	血型 Blood Type A	
出生日期 Birth Date 74年10月20日	身高 Height 172 cm	體重 Weight 60 kg	
興趣 Hobby 吉他、足球、棒球、西洋音樂、排羽球			
電子郵件信箱 E-mail : goddess.me97g@g2.nctu.edu.tw			

學歷 EDUCATION

教育	學校名稱	系所別	起迄年月
碩士	國立交通大學	機械工程學系(熱流組)	97/9~99/7
學士	私立長庚大學	機械工程學系	93/9~97/6
高中	國立新竹高中	一般生	90/9~93/6

