

國立交通大學

機械工程學系

碩士論文

挫屈梁之靜態與動態分析

Static and dynamic analysis of buckled beam

研究生：林運融

指導教授：蕭國模 博士

中華民國九十九年八月

挫屈梁之靜態與動態分析
Static and dynamic analysis of buckled beam

研究生：林運融

Student： Yun-rong Lin

指導教授：蕭國模 博士

Advisor： Dr. Kuo-Mo Hsiao

國立交通大學

機械工程學系

碩士論文



A Thesis
Submitted to Department of Mechanical Engineering
College of Engineering
National Chiao Tung University
in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master of Science
in
Mechanical Engineering
September 2010
Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十九年八月

挫屈梁之靜態與動態分析

Static and dynamic analysis of Buckled Beam

研究生：林運融

指導教授：蕭國模博士

國立交通大學機械工程學系碩士班

摘要

本研究主要利用共旋轉有限元素法結合浮動框架法（floating frame method）推導兩端點具旋轉角之挫屈梁受到基座簡諧振動的運動方程式，本文中提出一個數值程序，決定挫屈梁之初始形狀、挫屈梁受到各種負荷時的非線性靜態行為，以及受到基座簡諧振動與非對稱簡諧外力時的非線性動態行為。

本文將挫屈梁的運動方程式建立在一個與其基座有相同速度及加速度的總體座標上，本文在梁元素當前的變形位置上建立元素座標，元素座標與總體座標有相同速度及加速度。本文利用非線性梁理論的一致線性化、d'Alembert 原理和虛功原理，在當前的元素座標上，推導梁元素的節點變形力、節點慣性力及剛度矩陣。本文將基座的絕對加速度造成的慣性力視為

等效外力。

本文使用基於 Newton-Raphson 法及弧長控制法的增量迭代法來求解非線性平衡方程式，及採用基於 Newmark 直接積分法與 Newton-Raphson 法的增量迭代法求解非線性運動方程式。本研究先以數值例題探討兩端具相同旋轉角之挫屈梁的非線性靜態行為，本研究發現當兩端具旋轉角之挫屈梁受均佈側向載重時，其主要平衡路徑上之分歧點與極限點的力負荷參會隨著端點轉角的增加先大幅增加再減小。本研究再以數值例題探討挫屈梁受到基座簡諧振動與非對稱簡諧外力時的主共振現象、超諧共振現象及跳躍現象，本研究觀察到挫屈梁受到均勻的基座簡諧振動時，會引起挫屈梁的非對稱振動，並找出在不同基座振動頻率，產生跳躍現象所需的最小等效外力。



Static and dynamic analysis of buckled beam

Student : Yun-Rong Lin

Advisor : Dr. Kuo-Mo Hsiao

Department of Mechanical Engineering

National Chiao Tung University

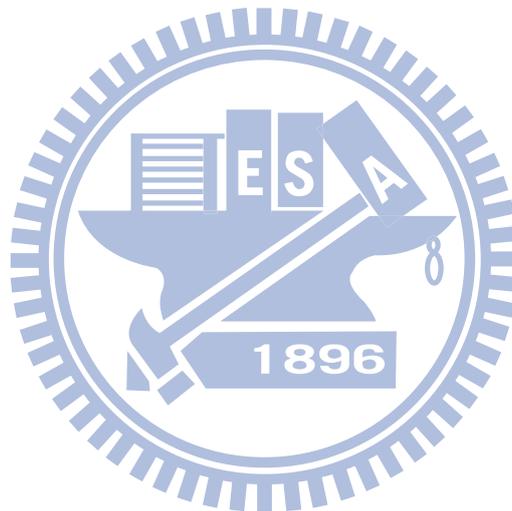
Abstract

In this paper a co-rotational finite element formulation combined with the floating frame method is used to derive the equations of motion for a clamped-clamped buckled beam with end rotations subjected to base excitation. A numerical procedure is proposed for the determination of the initial shape of the buckled beam, nonlinear static behavior of the buckled beam subjected to lateral loads, and nonlinear dynamic behavior of the buckled beam subjected to uniform sinusoidal base excitation and asymmetric sinusoidal lateral load.

The equations of motion of the buckled beam are defined in a global moving coordinates. The element coordinates are constructed at the current configuration of the beam element. The velocity and acceleration of the global coordinates and the current element coordinates are chosen to be the velocity and acceleration of the base of the buckled beam. The element deformation nodal forces, inertia nodal forces, stiffness matrix and mass matrix are systematically derived by consistent linearization of the fully geometrically non-linear beam theory using the d'Alembert principle and the virtual work principle in the current element coordinates. The inertia force of the buckled beam corresponding to the absolute acceleration of the base is regarded as an equivalent external load for the buckled beam.

An incremental-iterative method based on the Newton-Raphson method combined with constant arc length of incremental displacement vector is employed for the solution of nonlinear equilibrium equations. An incremental-iterative method based on the Newmark direct integration method and the Newton-Raphson method is employed here for the solution of the nonlinear equations of motion. Numerical examples are studied to demonstrate the accuracy and efficiency of the proposed method and to investigate the effect of end rotation on the nonlinear static behavior of buckled beam. When the buckled beam is subjected to uniform lateral load, it is observed that the loading

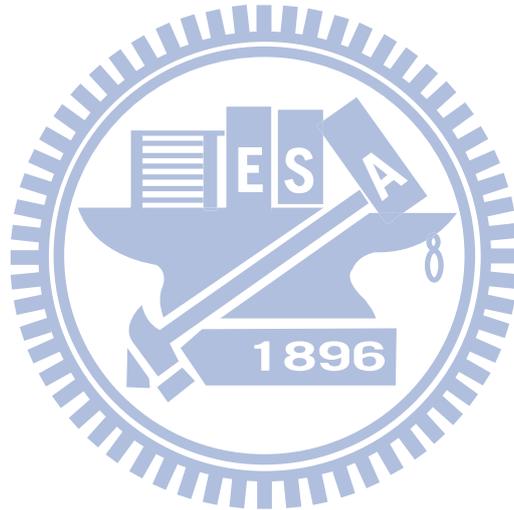
parameters corresponding to the bifurcation point and limit point on the equilibrium path increase remarked and then decrease with the increase of the end rotation of the buckled beam. Numerical examples are also studied to investigate the primary resonance, superharmonic resonance and snap-through phenomenon for the buckled beam subjected to uniform sinusoidal base excitation and asymmetric sinusoidal lateral load. The asymmetric vibration induced by symmetric load is observed. The minimum loading parameters of uniform sinusoidal lateral load at different frequencies required to initiate the dynamic snap-through motion are determined.



誌謝

衷心感謝蕭國模老師兩年來在學業上的指導以及生活上的照顧，使得本文能夠順利完成，老師您辛苦了。同時感謝尹慶忠老師、金大仁老師擔任口試委員，對本文提出了建議，使得本文更加完善。感謝蔡明旭學長、周裕淳學長在課業上的幫助，蔡秉宏同學、林寬政同學及學弟盧致群、黃楚彰、翁林甫兩年來的陪伴，使我的碩士班生活並不孤單。

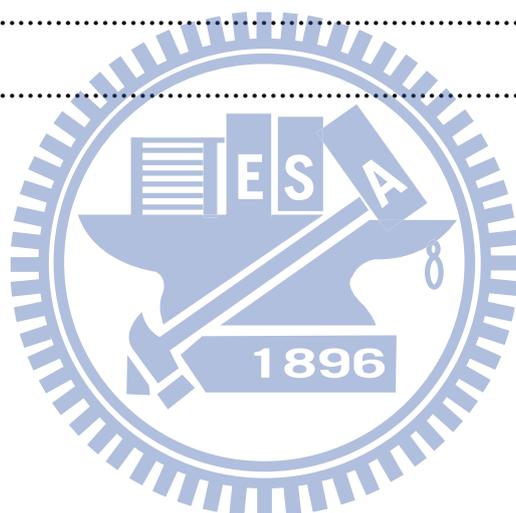
最後要感謝我的父母親與家人對我的鼓勵，使我能完成這段學業，在此以此成果獻給所有關心我的人。



目錄

中文摘要	I
英文摘要	III
誌謝	V
目錄	VI
表目錄	VIII
圖目錄	IX
第一章 導論	1
第二章 理論推導	6
2.1 問題描述	6
2.2 基本假設	6
2.3 座標系統描述	7
2.4 梁的變形描述	8
2.5 梁元素的節點內力	15
2.6 元素的剛度矩陣	20
2.7 元素的質量矩陣	21
2.8 元素的阻尼力與阻尼矩陣	22
2.9 基座振動所造成的等效外力	22
2.10 系統的平衡方程式與運動方程式	23
第三章 數值方法及程序	25
3.1 增量迭代法	25
3.2 二分法	27
3.3 Newmark 直接積分法	27
第四章 數值例題	30

4.1 梁挫屈後的側向位移與軸向變形.....	30
4.2 挫屈梁受端點轉角作用的靜態分析.....	31
4.3 具端點轉角之挫屈梁的自然頻率.....	32
4.4 具端點轉角之挫屈梁受側向負荷的靜態分析.....	33
4.5 梁基座振動時具端點轉角之挫屈梁的動態行為.....	36
4.6 挫屈梁受不對稱側向分佈力之靜態行為.....	43
4.7 挫屈梁受不對稱側向分佈力之動態行為.....	44
第五章 結論與展望.....	47
參考文獻.....	49
附表.....	54
附圖.....	64



表目錄

表一	具端點轉角之挫屈梁($\delta_0 = 97\mu m$)的端點反力及 C 點側向位移 ..	54
表二	具端點轉角之挫屈梁($\delta_0 = 97\mu m$)的自然頻率	54
表三	具端點轉角之挫屈梁受側向中點集中負荷的分歧點與極限點	55
表四	具端點轉角之挫屈梁受側向均佈負荷的分歧點與極限點	55
表五	主共振現象及跳躍現象.....	56
表六	主共振現象及跳躍現象.....	57
表七	超諧共振現象及跳躍現象 $\omega_b \approx \frac{1}{2}\omega_2$	58
表八	超諧共振現象及跳躍現象 $\omega_b \approx \frac{1}{2}\omega_2$	59
表九	超頻共振現象及跳躍現象 $\omega_b \approx \frac{1}{3}\omega_2$	60
表十	阻尼對跳躍現象的影響 $p_{eff} = 7.5 \times 10^{-4}$, $\omega_b \approx \omega_2$	61
表十一	阻尼對跳躍現象的影響 $p_{eff} = 1.8 \times 10^{-3}$, $\omega_b \approx \frac{1}{2}\omega_2$	62
表十二	挫屈梁受非對稱均佈力之主共振現象及跳躍現象 $\omega_b \approx \omega_1$	63

圖目錄

圖一	兩端固定的直梁.....	64
圖二	直梁一端受軸向壓縮及側向挫屈示意圖.....	64
圖三	(a)變形前的梁(b)挫屈梁(c)施加端點轉角(d)至於剛性基座.....	65
圖四	座標系統.....	66
圖五	梁的變形圖.....	66
圖六	挫屈梁之軸向位移 Δ - 側向位移 δ_0 曲線.....	67
圖七	挫屈梁兩端受轉角負荷之負荷 θ_B - 側向位移 v_c 曲線.....	67
圖八	挫屈梁兩端受轉角負荷之負荷 θ_B - 反力 F_B 曲線.....	68
圖九	挫屈梁兩端受轉角負荷之負荷 θ_B - 反力 M_B 曲線.....	68
圖十	簡支梁受端點軸向位移負荷作用的示意圖.....	69
圖十一	簡支梁受軸向位移負荷之負荷 Δ - 側向位移 δ_0 曲線.....	69
圖十二	簡支梁受軸向位移負荷之側向位移 δ_0 - 反力 F_B 曲線.....	70
圖十三	簡支梁受軸向位移負荷之側向位移 δ_0 - 端點轉角 θ_B 曲線.....	70
圖十四	$\theta_B = 0$ 之挫屈梁的前五個振動模態.....	71
圖十五	$\theta_B = 0.7 \text{ rad}$ 之挫屈梁的前五個振動模態.....	72
圖十六	具端點轉角之挫屈梁受集中力負荷作用的示意圖.....	73
圖十七	具端點轉角之挫屈梁受集中載重之負荷-位移圖.....	74
圖十八	具端點轉角之挫屈梁受集中載重之負荷 P_c - 反力 F_B 圖.....	75
圖十九	具端點轉角之挫屈梁受集中載重之負荷 P_c - 反力 M_B 圖.....	76
圖二十	受集中載重之挫屈梁 ($\theta_B = 0$) 在第一個分歧點的(a)次要平衡路徑 (b)無因次側向位移分佈圖.....	77
圖二十一	受集中載重之挫屈梁 ($\theta_B = 0.3 \text{ rad}$) 在第一個分歧點的(a)次要平	

衡路徑(b)無因次側向位移分佈圖.....	78
圖二十二 具端點轉角之挫屈梁受均佈力負荷作用的示意圖.....	79
圖二十三 具端點轉角之挫屈梁受均佈負荷之負荷-位移圖	80
圖二十四 具端點轉角之挫屈梁受均佈負荷之負荷-反力 F_B 圖.....	81
圖二十五 具端點轉角之挫屈梁受均佈負荷之負荷-反力 M_B 圖	82
圖二十六 受均佈載重之挫屈梁($\theta=0$)的(a)次要平衡路徑及(b)無因次側向 位移分佈圖	83
圖二十七 受均佈載重之挫屈梁($\theta=0.3rad$)的(a)次要平衡路徑及(b)無因 次側向位移分佈圖	84
圖二十八 具端點轉角之挫屈梁受集中力及力矩負荷作用的示意圖 ...	85
圖二十九 具端點轉角之挫屈梁受中點力矩之負荷-位移圖(u_c).....	85
圖三十 具端點轉角之挫屈梁受中點力矩之負荷-位移圖(v_c).....	86
圖三十一 具端點轉角之挫屈梁受中點力矩之負荷-位移圖(θ_c).....	86
圖三十二 具端點轉角之挫屈梁受中點側力及力矩之負荷-位移圖(u_c)	87
圖三十三 具端點轉角之挫屈梁受中點側力及力矩之負荷-位移圖(v_c)	87
圖三十四 具端點轉角之挫屈梁受中點側力及力矩之負荷-位移圖(θ_c)	88
圖三十五 挫屈梁受到基底振動示意圖.....	88
圖三十六 挫屈梁在小振幅下的頻率響應圖($p_{eff} = 1 \times 10^{-4} N/m$)	89
圖三十七 挫屈梁再不同大小芝等效力作用下，在主頻率附近的頻率響應 圖	89
圖三十八 挫屈梁中點位移的歷時分析	

($p_{eff} = 7.5 \times 10^{-4} N/m$, $\omega_b = 41.1kHz$).....	90
圖三十九 挫屈梁在第十個外力周期之側向位移分佈圖	
($p_{eff} = 7.5 \times 10^{-4} N/m$, $\omega_b = 41.1kHz$).....	91
圖四十 挫屈梁在第二十一個外力周期之側向位移分佈圖	
($p_{eff} = 7.5 \times 10^{-4} N/m$, $\omega_b = 41.1kHz$).....	92
圖四十一 挫屈梁中點位移的歷時分析圖	
($p_{eff} = 7.5 \times 10^{-4} N/m$, $\omega_b = 39.6kHz$).....	93
圖四十二 挫屈梁在第十五個外力周期之側向位移分佈圖	
($p_{eff} = 7.5 \times 10^{-4} N/m$, $\omega_b = 39.6kHz$).....	94
圖四十三 挫屈梁在第二十五個外力周期之側向位移分佈圖	
($p_{eff} = 7.5 \times 10^{-4} N/m$, $\omega_b = 39.6kHz$).....	95
圖四十四 挫屈梁之超頻共振頻率響應圖 $\omega_b \approx \frac{1}{2}\omega_2$	96
圖四十五 挫屈梁中點位移的歷時分析圖	
($p_{eff} = 1.7 \times 10^{-3} N/m$, $\omega_b = 21.2kHz$).....	97
圖四十六 挫屈梁在第十三個外力周期之側向位移分佈圖	
($p_{eff} = 1.7 \times 10^{-3} N/m$, $\omega_b = 21.2kHz$).....	98
圖四十七 挫屈梁在第十五個外力周期之側向位移分佈圖	
($p_{eff} = 1.7 \times 10^{-3} N/m$, $\omega_b = 21.2kHz$).....	99
圖四十八 挫屈梁中點位移之歷時分析圖	
($p_{eff} = 1.8 \times 10^{-3} N/m$, $\omega_b = 21.2kHz$).....	100

圖四十九 挫屈梁在第十八個外力周期之側向位移分佈圖	
($p_{eff} = 1.8 \times 10^{-3} N/m$, $\omega_b = 21.2kHz$).....	101
圖五十 挫屈梁在第二十四個外力周期之側向位移分佈圖	
($p_{eff} = 1.8 \times 10^{-3} N/m$, $\omega_b = 21.2kHz$).....	102
圖五十一 挫屈梁之超頻共振頻率頻率響應圖 $\omega_b \approx \frac{1}{3}\omega_2$	103
圖五十二 挫屈梁中點位移之歷時分析	
($p_{eff} = 2.6 \times 10^{-3} N/m$, $\omega_b = 14.35kHz$).....	104
圖五十三 挫屈梁在第二十一個外力周期之側向位移分佈圖	
($p_{eff} = 2.6 \times 10^{-3} N/m$, $\omega_b = 14.35kHz$).....	105
圖五十四 挫屈梁在第二十六個外力周期之側向位移分佈圖	
($p_{eff} = 2.6 \times 10^{-3} N/m$, $\omega_b = 14.35kHz$).....	106
圖五十五 有阻尼與無阻尼之挫屈梁的側向位移頻率響應圖	
($p_{eff} = 7.5 \times 10^{-4}$, $\omega_b \approx \omega_2$).....	107
圖五十六 (a)無阻尼與(b)有阻尼之挫屈梁中點位移歷時分析圖	
($p_{eff} = 7.5 \times 10^{-4} N/m$, $\omega_b = 39.6kHz$).....	108
圖五十七 (a)無阻尼與(b)有阻尼之挫屈梁中點位移歷時分析圖	
($p_{eff} = 7.5 \times 10^{-4} N/m$, $\omega_b = 41.6kHz$).....	109
圖五十八 有阻尼之挫屈梁中點位移之歷時分析圖	
($p_{eff} = 8.593 \times 10^{-4} N/m$, $\omega_b = 39.6kHz$).....	110

圖五十九	有阻尼與無阻尼之挫屈梁的側向位移頻率響應圖	
	$(p_{eff} = 1.8 \times 10^{-3}, \omega_b \approx \frac{1}{2} \omega_2)$	111
圖六十	有阻尼之挫屈梁中點位移之歷時分析圖	
	$(p_{eff} = 2.343 \times 10^{-4} N/m, \omega_b = 21.2 kHz)$	112
圖六十一	挫屈梁發生跳躍現象所需的最小等效力.....	113
圖六十二	挫屈梁受不對稱分佈力示意圖.....	113
圖六十三	挫屈梁受不對稱分佈力之負荷-位移 u_c 圖.....	114
圖六十四	挫屈梁受不對稱分佈力之負荷-位移 v_c 圖.....	114
圖六十五	挫屈梁受不對稱分佈力之負荷-位移 θ_c 圖.....	115
圖六十六	受不對稱均佈載重之挫屈梁的無因次側向位移分佈圖.....	115
圖六十七	挫屈梁受不對稱動態分佈力示意圖.....	116
圖六十八	挫屈梁受非對稱均佈力之小振幅的頻率軸向位移響應圖	
	$(\lambda = 1 \times 10^{-4} N/m)$	116
圖六十九	挫屈梁受非對稱均佈力之小振幅的頻率側向位移響應圖	
	$(\lambda = 1 \times 10^{-4} N/m)$	117
圖七十	挫屈梁受非對稱均佈力之小振幅的頻率轉角位移響應圖	
	$(\lambda = 1 \times 10^{-4} N/m)$	117
圖七十一	挫屈梁受非對稱均佈力之大振幅的頻率軸向位移響應圖	

($\lambda = 3 \times 10^{-3} N/m, \omega_b \approx \omega_1$)	118
圖七十二 挫屈梁受非對稱均佈力之大振幅的頻率側向位移響應圖	
($\lambda = 3 \times 10^{-3} N/m, \omega_b \approx \omega_1$)	118
圖七十三 挫屈梁受非對稱均佈力之大振幅的頻率轉角位移響應圖	
($\lambda = 3 \times 10^{-3} N/m, \omega_b \approx \omega_1$)	119
圖七十四 (a) $m = 0$ 與(b) $m = 0.5\%$ 之挫屈梁中點位移之歷時分析圖	
($\lambda = 3 \times 10^{-3} N/m, \omega_b = 28.0kHz$)	120
圖七十五 挫屈梁在第二十個外力周期之側向位移分佈圖	
($\lambda = 3.0 \times 10^{-3} N/m, \omega_b = 28.0kHz, m = 0$)	121
圖七十六 挫屈梁在第二十五個外力周期之側向位移分佈圖	
($\lambda = 3.0 \times 10^{-3} N/m, \omega_b = 28.0kHz, m = 0$)	122
圖七十七 挫屈梁在第二十個外力周期之側向位移分佈圖	
($\lambda = 3.0 \times 10^{-3} N/m, \omega_b = 28.0kHz, m = 0.5\%$)	123
圖七十八 挫屈梁在第二十五個外力周期之側向位移分佈圖	
($\lambda = 3.0 \times 10^{-3} N/m, \omega_b = 28.0kHz, m = 0.5\%$)	124
圖七十九 挫屈梁受非對稱均佈力之主共振的側向位移頻率響應圖 $\omega_b \approx \omega_1$	
.....	125
圖八十 挫屈梁受非對稱均佈力中點位移之歷時分析圖	
($\lambda = 3.4 \times 10^{-3} N/m, \omega_b = 27.7kHz, m = 0.5\%$)	126

圖八十一	挫屈梁在第十五個外力周期之側向位移分佈圖	
	$(\lambda = 3.4 \times 10^{-3} N/m, \omega_b = 27.7 kHz, m = 0.5\%)$	127
圖八十二	挫屈梁在第二十三個外力周期之側向位移分佈圖	
	$(\lambda = 3.4 \times 10^{-3} N/m, \omega_b = 27.7 kHz, m = 0.5\%)$	128
圖八十三	挫屈梁受非對稱均佈力之大振幅的頻率軸向位移響應圖	
	$(\lambda = 3 \times 10^{-3} N/m, \omega_b \approx \frac{1}{2} \omega_1)$	129
圖八十四	挫屈梁受非對稱均佈力之大振幅的頻率側向位移響應圖	
	$(\lambda = 3 \times 10^{-3} N/m, \omega_b \approx \frac{1}{2} \omega_1)$	129
圖八十五	挫屈梁受非對稱均佈力之大振幅的頻率轉角位移響應圖	
	$(\lambda = 3 \times 10^{-3} N/m, \omega_b \approx \frac{1}{2} \omega_1)$	130
圖八十六	挫屈梁受非對稱均佈力之大振幅的頻率軸向位移響應圖	
	$(\lambda = 3 \times 10^{-3} N/m, \omega_b \approx \frac{1}{3} \omega_1)$	130
圖八十七	挫屈梁受非對稱均佈力之大振幅的頻率側向位移響應圖	
	$(\lambda = 3 \times 10^{-3} N/m, \omega_b \approx \frac{1}{3} \omega_1)$	131
圖八十八	挫屈梁受非對稱均佈力之大振幅的頻率轉角位移響應圖	
	$(\lambda = 3 \times 10^{-3} N/m, \omega_b \approx \frac{1}{3} \omega_1)$	131

第一章 緒論

挫屈梁為將一水平細長直梁(如圖一)兩端端點固定後，在一端端點施加一超過其挫屈臨界值的軸向位移 Δ ，則梁會以第一挫屈模態產生側向位移(如圖二)，本文中以 δ_0 表示梁中心點(C點)的側向位移，以 h 表示梁的厚度，並以 δ_0/h 表示挫屈程度，此一挫屈梁受側力時具有雙穩態平衡解(bistable)，此一特性經常被應用在微機電領域，如致動器[27]、感測器[26]，為了提高挫屈梁在使用上的安全性及性能，故在設計與分析時，必須能精確的預測及描述挫屈梁受力時的靜態與動態行為，因此已有許多學者對挫屈梁的靜態與動態非線性行為進行了研究[1、2、5、12、13、17、19、20-22、25、29-31]。

文獻[26]分析 2 個中間固定的平行曲梁受側向負荷的位移，梁的形狀為直梁受軸力壓縮後之第一挫屈模態，文中假設其側向位移為直梁受軸力之各種挫屈模態組合，用模態分析與有限元素分析來模擬不同初始拱起高度曲梁之側向負荷與中點位移的關係與挫屈後行為，用來預測、解釋、設計這種平行梁結構的雙穩態行為，其分析的梁之尺寸為 $L=3000\mu m$ ， $t=10\mu m$ ， $b=540\mu m$ ，拱起高度 $\delta=60\mu m$ 的曲梁，並與實驗結果互相印證。

文獻[24]考慮了曲梁製造時的初始殘留應力，分析梁受側向分佈力時的形狀變化，因為一個挫屈梁通常是直梁受軸向壓力製造，但是文獻上在分析原本製造形狀為曲梁時很少考慮殘留應力，文中考慮的梁形狀尺寸為 $L=2000\mu m$ 、 $3000\mu m$ ， $t=5\mu m$ ， $b=10\mu m$ ，拱起高度 $\delta\leq 30\mu m$ ，探討曲梁的平衡路徑、跳躍行為與雙平衡位置，同時也有與實驗結果比較，結果相當吻合。

當一個結構受到周期負荷時，通常存在一個周期解，該周期負荷的頻率對周期解振幅的曲線稱為振動的頻率響應曲線，若振動為線性振動，當

負荷的頻率接近結構的自然振動頻率，周期振動的振幅會增加很多，這種現象即為所謂的共振。在振動分析中，共振現象一直都是非常重要的研究課題，相對於線性振動，非線性振動有許多特殊的共振現象，非線性振動的共振現象可分為[13]: 1.主共振(primary resonance)，當外力頻率 Ω 接近系統自然頻率 ω_n 時之共振現象； 2.次諧共振(subharmonic resonance) 發生於外力頻率 Ω 接近系統自然頻率 ω_n 之 k 倍時 ($\Omega \approx k\omega_n$)，其中 k 為整數) 之共振現象； 3.超諧共振(superharmonic resonance)，發生於外力頻率 Ω 接近系統自然頻率 ω_n 之 $1/k$ 倍時 ($\Omega \approx \omega_n/k$) 之共振現象； 4.external resonance，發生於外力頻率接近系統自然頻率 ω_n 之線性組合時 ($\Omega \approx \sum_i^N k_i \omega_i$ ，其中 k 為整數) 之共振現象； 5.internal resonance，發生於系統自然頻率 ω_n 之線性組合接近於零 ($\sum_i^N k_i \omega_i \approx 0$ ，其中 k 為整數) 之共振現象。

對於一個挫屈梁受到動態周期負荷的非線性振動問題，可用一個非線性 PDE 來描述其運動方程式，在一般的情況下很難求得此 PDE 的周期解，文獻[20]使用 direct method，即非線性分析理論中的多尺度法[33]，假設側向位移 $v(x,t) = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i v_i(x,t)$ ， $0 < \varepsilon \ll 1$ ，直接代回運動方程式求解，此法在弱非線性振動的問題可得到準確的解，但在不適用在強非線性振動的問題，文獻上大多使用數值方法求得近似解，常見的一種方法為假設模態法，即假設位移函數 $v(x,t) = \sum_1^N \phi_n(x) q_n(t)$ ，其中 $\phi_n(x)$ 為假設的模態，通常採用挫屈梁的挫屈模態或線性振動模態，再使用 Galerkin method，將一個 PDE 簡化成 N 個 ODE，另一個常見的方法為使用 Galerkin finite element method，同樣可將一個 PDE 問題簡化成為 n 個節點位移的 ODE 問題，在簡化至 ODE 問題後，為了求得 $q_n(t)$ 的周期解，通常可以使用下列兩類方法，1. 使用直接積分法(direct integration method)[21] 求出 $q_n(t)$ 的週期解，2. 假設 $q_n(t)$ 具有週期解，用傅利葉級數展開， $q_n(t) = y_{n0} + \sum_1^K x_{nk} \sin k\tau + y_{nk} \cos k\tau$

其中 $\tau = \omega t$ ， ω 為負荷的頻率，並求解待定係數 x_{nk} ， y_{nk} ，若將傅利葉級數代回原 ODE 直接用比較係數法求解待定係數，則稱為 harmonic balance method(HBM)[33]，若將傅利葉級數代回原 ODE 後，在時間域用 Galerkin method 將 N 個 ODE 化成 $N \times (2K+1)$ 個非線性代數方程式，再用牛頓法求解求解待定係數，則稱為 Fourier–Galerkin -Newton (FGN) method 或 incremental harmonic balance (IHB) method[9]。

文獻[29]Tseng 等人分析了一挫屈梁受到基礎振動時的非線性行為，文中假設軸力為常數，位移函數 $v(x,t) = \sum_1^N \phi_n(x)q_n(t)$ ，並假設 $\phi_n(x)$ 為前 N 個挫屈模態並將 N 取 2(僅取前兩個模態)，配合 HBM 解出 $q_n(t)$ 的週期解(傅利葉級數僅取至第三項)，文中指出挫屈梁會有著超諧運動(superharmonic motion)，以及跳躍現象(snap-through)，不過文中也指出，使用前兩個挫屈模態來模擬挫屈梁的非線性振動行為僅適用於 $\delta_0/h < 2$ 。

文獻[30] Yamaki 等人同樣假設模態法，假設 $\phi_n(x)$ 為前 N 個梁挫屈前的振動模態，同時 N 取 2，再使用 HBM 解出 $q_n(t)$ 的週期解，文中分析了直梁與挫屈梁在受到週期性外力時的頻率響應圖，於頻率響應圖中可看出非線性振動的主共振、超諧共振、次諧共振現象，同時 Yamaki 等人以實驗[31]來驗證[30]假設模態法僅使用前兩個模態來模擬側向位移的準確性，在 $\delta_0/h < 0.8$ 的情況下，[30]與[31]有著很好的一致性。

文獻[21]與[25]使用假設模態法，假設 $\phi_n(x)$ 為前 N 個挫屈模態並將 N 取 2，用 Runge-Kutta numerical integration method 求得 $q_n(t)$ 的週期解，[25]分析了挫屈梁在非線性振動下的跳躍現象(snap-through motion)，[21]分析了挫屈梁之靜態行為及動態行為，並以實驗比較，在靜態分析中，當挫屈程度 $\delta_0/h > 4$ 後，實驗與理論便出現相當大的誤差，在動態分析則指出當挫屈程度較大時，使用對稱周期外力(正弦函數)會激起反對稱的振動模態。

文獻[20] Lacarbonarag 使用了 direct method 來分析挫屈梁的非線性振動，並且與僅使用單一模態的假設模態法進行比較，文中指出僅使用單一模態的假設模態法，可能得到錯誤的結論。文獻[13] Emam 假設挫屈梁的應變為小應變，挫屈梁的旋轉角為中等程度旋轉下，使用假設模態法，假設側向位 $v = \sum_1^N \phi_n(x)q_n(t)$ ，並假設 $\phi_n(x)$ 為前 N 個挫屈後的線性振動模態，Emam 分別取 $N=1\sim 4$ ，進行挫屈梁的動態與靜態分析，在靜態分析，Emam 以 $N=1\sim 4$ 分別模擬 $\delta_0/h=2.31$ 的挫屈梁前兩個對稱挫屈模態的三個平衡位置並與解析解比較，說明在 $\delta_0/h=2.31$ 時， N 需取至第四項方夠準確，在動態分析，Emam 假設外力頻率接近系統自然頻率，在 $\delta_0/h < 4.38$ 時， $N=1\sim 4$ 與 Direct method 得到的頻率響應圖均呈現軟彈簧特性，即隨著變形加大時系統剛性變小的特性，當 $\delta_0/h > 5.77$ ， $N=1$ 或 $N=2$ 得到的頻率響應圖均呈現硬彈簧特性，即隨著變形加大時系統剛性變大的特性，但 $N=3$ 、 $N=4$ 及 Direct method 得到的頻率響應圖依舊呈現軟彈簧特性，所以 $N=1$ 或 $N=2$ 只適用於挫屈程度很小的挫屈梁，同時 Emam 也探討了主共振、次諧共振與 internal resonance 現象，不過文獻[13]中探討的挫屈梁之 δ_0/h 的最大值僅至 6.35。

文獻[18]中 Koivurova 使用有限元素法及(FGN) method 分析 string 受到一軸向變化位移時的非線性行為，文獻[14]中 Gupat 等人假設梁在小應變、中等程度的旋轉角及側向位移下，使用有限元素法，令軸向位移及側向位移為三次多項式，分別分析了不同邊界條件下的直梁於大振幅自由振動下的非線性振動頻率與線性振動頻率比，並指出若假設位移函數為 simple harmonic motion(SHM)，則非線性振動頻率與線性振動頻率比將會存在小誤差，利用 HBM 可得到修正係數。

文獻[8]中 Chen 等人使用有限元素法，配合 incremental harmonic balance

(IHB) method[9]，分析了不同的平面結構在非線性振動下的頻率響應圖，文中顯示梁在非線性振動下的共振現象(超諧共振、次諧共振)也顯示了直梁具有硬彈簧特性，小程度挫屈的挫屈梁具有軟彈簧特性。

文獻[5]中 Buchailot 分析一挫屈梁受到周期基底振動的周期解，挫屈梁的挫屈程度 $\delta_0/h=200$ ，文獻[5]使用假設模態法，但僅使用前兩的挫屈模態模擬梁的側向位移，並假設第一個模態的自然頻率與挫屈程度 δ_0/h 不是線性關係，第二個模態的自然頻率遠小於第一個模態的自然頻率且第二個模態的自然頻率不是常數，進而分析挫屈梁受到基底振動時的穩定性，但其分析結果與其實驗結果似乎不一致，根據文獻[13]中所述，在挫屈程度較大的情況下僅使用兩個模態是不夠準確的，因此文獻[5]中之結果的準確性仍有待驗證。

從上述的文獻回顧中可知，已經有許多的學者探討了挫屈梁的靜態與動態非線性行為，但大多數的文獻中，挫屈程度 δ_0/h 均不超過 10，而關於大挫屈程度下挫屈梁的非線性行為文獻還相當缺乏，因而本研究將探討一個大挫屈程度下挫屈梁受到外力時的靜態行為與受到基座振動時的動態行為，並找出產生跳躍現象所需的最小等效外力。

本研究使用的方法為共旋轉有限元素法，本研究採用基於牛頓法及定弧長法的增量迭代探討挫屈梁受到外力時的靜態行為，本研究使用 New mark 直接積分法及基於牛頓法的增量迭代法，探討挫屈梁受到基座振動時的動態行為，並求出頻率響應圖，本研究利用頻率響應圖探討挫屈梁的主共振、超諧共振、次諧共振及跳躍現象。

第二章 理論推導

2.1 問題描述

如圖三(a)，本文考慮一個均勻斷面的尤拉梁，梁的長度為 L ，梁的厚度為 h ，梁的寬度為 b ，將軸向 A 、 B 兩端側向固定 (clamped-clamped) 後，施加軸向的位移 Δ ，當軸向壓縮量超過挫屈臨界值 Δ_{cr} 後，此梁便會產生側向挫屈，此時以 δ_0 表示梁中心點的側向位移，再繼續增加軸向位移 Δ ，直到挫屈梁中心點的側向位移 δ_0 到達一定高度後，將 B 點軸向固定如圖三(b)所示，即為所謂的挫屈梁。本研究將挫屈梁的兩個固定端 A 、 B 分別施加一個如圖三(c)所示之旋轉角 θ_A 、 θ_B ，再將 A 、 B 端固接在如圖三(d)所示一剛性基座上，本文將分別探討如圖三(d)之梁的靜態及動態之幾何非線性行為。在靜態方面，本文考慮剛性基座是靜止的，該梁受到不同的力負荷時，探討 θ_A 、 θ_B 對於該梁靜態行為的影響。在動態方面，本文考慮該基座有一固定方向的絕對位移 $y_b = y_b(t)$ ，本文中僅考慮 $y_b(t) = y_0 \sin(\omega_b t)$ ，其中 y_b 為基座的振幅， ω_b 為基座的振動頻率，本文將探討該梁受到基座振動時的動態行為。本文將在該基座上描述梁結構的位移、變形和速度、加速度。

2.2 基本假設

在本文的推導中對梁所作的基本假設如下：

- (1) Euler-Bernoulli 假設成立。
- (2) 梁元素的形心軸之單位長度伸長量(unit extension)為一常數。
- (3) 梁元素的變形與應變皆為小變形與小應變。

2.3 座標系統

本文是使用共旋轉有限元素法[10]，將梁分割成若干個兩個節點的梁元素，節點 1 及節點 2 為元素的兩個端點。為了描述系統的運動與梁元素的位移、變形、速度、加速度，本文定義了兩組座標系統。

(a) 總體坐標系統(global coordinate system) $X_i (i=1,2)$

如圖三(d)所示，總體座標系統為一個動座標系統，剛接在以已知的 $y_b(t)$ 進行上下平移的基座上，結構體所有節點的座標、速度、加速度，系統的邊界條件、平衡方程式、運動方程式及其他座標系統的基底，均在此座標系統上定義。在靜態分析時， $y_b(t)=0$ ，總體座標系為一固定座標系。在動態分析時，總體座標和基底有相同的速度 $\dot{y}_b(t)$ 及加速度 $\ddot{y}_b(t)$ 。

(b) 元素座標系統(element coordinate system) $x_i (i=1,2)$

元素座標系統是建立在每一梁元素當前的變形位置上，如圖四所示，元素座標系統的原點是定義在節點 1 上， x_1 軸的方向為梁元素兩節點連線的方向， x_2 軸的方向由右手定則決定，再動態分析時，本文中元素座標為一動座標，其原點與基底有相同的絕對速度 $\dot{y}_b(t)$ 及絕對加速度 $\ddot{y}_b(t)$ ，本文中梁元素的位移、變形、速度、加速度、節點力及運動方程式，均在此座標中定義。

本文中元素方程式首先建立在元素座標上，然後經由座標轉換，轉換至總體座標系統，元素座標系統與總體座標系統關係可表示成

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}_{GE} \mathbf{x} \quad (2.3.1)$$

$$\mathbf{A}_{GE} = \begin{bmatrix} \cos \theta_e & -\sin \theta_e \\ \sin \theta_e & \cos \theta_e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \{X_1 \quad X_2\}, \quad \mathbf{x} = \{x_1 \quad x_2\}$$

其中 θ_e 為元素座標 x_1 軸與總體座標 X_1 的夾角，本文以 $\{\}$ 代表行向量。

2.4 梁元素的變形描述

本文採用文獻[24]的梁元素，為了文章的完整性，本章中將重複該元素的推導過程，本章中亦將推導該元素在基底振動時所受的等效節點力。

本文是在元素座標上描述梁元素的變形與幾何形狀。由 2.2 節中的基本假設可知，梁元素的變形可由其形心軸在元素座標上的位移及其斷面的旋轉決定。本文採用梁元素變形前形心軸的長度為獨立變數。

2.4.1 梁元素的位移

圖五中的 Q 點為梁中的任意點， P 點為 Q 點在形心軸上的對應點，即 P 點與 Q 點位於梁的同一斷面上。在元素座標上， P 點在梁變形前後的位置向量可分別表示為 $\{x, 0\}$ 與 $\{x_p(x, t), v(x, t)\}$ 。其中 t 為時間， $x_p(x, t)$ 及 $v(x, t)$ 分別是 P 點在 x_1 與 x_2 軸方向的座標。 Q 點在梁變形前後的位置向量可分別表示如下

$$\mathbf{r}_0 = \{x, y\}$$

$$\mathbf{r} = \{x_p - y \sin \theta, y \cos \theta + v\} \quad (2.4.1)$$

其中 x 、 y 分別為梁變形前 Q 點在 x_i ($i=1, 2$) 軸的座標， θ 為 x_1 軸和形心軸的切線向量的夾角。 $\sin \theta$ 及 $\cos \theta$ 可表示成如下

$$\sin \theta \approx \theta = \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{1}{1 + \varepsilon_0} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.4.2)$$

$$\cos \theta = \frac{\partial x_p}{\partial s} = (1 - \sin^2 \theta)^{1/2} \approx (1 - \theta^2)^{1/2} \quad (2.4.3)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\partial s - \partial x}{\partial x} = \frac{\partial s}{\partial x} - 1 \quad (2.4.4)$$

其中 s 為 o 點到 P 點間形心軸在變形後的弧長，而 ε_0 為形心軸的單位伸長

量(unit extension)。由(2.4.3)至(2.4.4)式， $x_p(x,t)$ 可以表示成下式

$$x_p(x,t) = u_1 + \int_0^x [(1 + \varepsilon_0)^2 - v_{,x}^2]^{1/2} dx \quad (2.4.5)$$

其中 u_1 為節點 1 在 x_1 方向上的位移，由元素座標系統的定義，其值為零，但其變分及對時間的微分並不為零。

由小變形的假設，利用近似式 $[(1 + \varepsilon_0)^2 - v_{,x}^2]^{1/2} \approx (1 + \varepsilon_0 - \frac{1}{2}v_{,x}^2)$ ，(2.4.5)式可表示成

$$x_p(x,t) = u_1 + \int_0^x (1 + \varepsilon_0 - \frac{1}{2}v_{,x}^2) dx \quad (2.4.6)$$

由(2.4.6)式及基本假設(2)可以得到形心軸的單位伸長量 ε_0

$$\varepsilon_0 = \frac{l - L}{L} + \frac{1}{2L} \int_0^L v_{,x}^2 dx \quad (2.4.7)$$

$$l = L + u_2 - u_1$$

2.4.2 梁元素的應變

將(2.4.2)及(2.4.3)式代入(2.4.1)式在小變形的假設下，利用近似式

$(1 - \theta^2)^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$ ，可以將位置向量 \mathbf{r} 重新寫成如下

$$\mathbf{r} = \{x_p - y\theta, y(1 - \frac{1}{2}\theta^2) + v\} \quad (2.4.8)$$

本文中的應變採用工程應變。為了推導上的方便，本文中先推導出 Green strain ε_{ij} ，再由 Green strain 求得與其對應之工程應變。Euler 梁的 Green strain 非為零的應變只有 ε_{11} ，可表示成

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_1^t \mathbf{g}_1 - 1) \quad (2.4.9)$$

其中

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \quad (2.4.10)$$

將(2.4.8)式代入(2.4.10)式，可得 \mathbf{g}_1 的分量 g_{11} 和 g_{12} 如下

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1 + \varepsilon_0 - \frac{1}{2} v_{,x}^2 - y \theta_{,x} \\ g_{12} &= v_{,x} - y \theta_{,x} \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

(2.4.11)式中 θ 對 x 的一次微分，可以表示成

$$\theta_{,x} \approx -\frac{1}{(1 + \varepsilon_0)^2} \varepsilon_{0,x} v_{,x} + \frac{1}{1 + \varepsilon_0} v_{,xx} \approx \frac{1}{1 + \varepsilon_0} v_{,xx} \quad (2.4.12)$$

將 (2.4.2) 式中 θ 及 (2.4.12) 式中 $\theta_{,x}$ 分別代入 (2.4.11) 式，可以將 g_{11} 和 g_{12} 重新寫成如下

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1 + \varepsilon_0 - \frac{1}{2} v_{,x}^2 - y \frac{v_{,xx}}{(1 + \varepsilon_0)} \\ g_{12} &= v_{,x} - y \frac{v_{,x} v_{,xx}}{(1 + \varepsilon_0)^2} \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

將 (2.4.13) 式代入 (2.4.9) 式，在小變形的假設下，利用近似式

$$\frac{1}{(1 + \varepsilon_0)} \approx (1 - \varepsilon_0), \text{ 且保留變形參數及其微分到二次項，可將應變 } \varepsilon_{11}$$

表示如下

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_0 + \frac{1}{2} \varepsilon_0^2 - y v_{,xx} + \frac{1}{2} y^2 v_{,xx}^2 \quad (2.4.14)$$

Green strain ε_{11} 與工程應變 e_{11} 間的關係如下

$$e_{11} = (1 + 2\varepsilon_{11})^{1/2} - 1 \quad (2.4.15)$$

當應變很小時(2.4.15)式可以用下列近似值代替

$$e_{11} = \varepsilon_{11} - \frac{1}{2}\varepsilon_{11}^2 \quad (2.4.16)$$

由(2.4.14)式及(2.4.16)式，且保留變形參數及其微分到二次項，可得工程應變 e_{11} 如下

$$e_{11} = \varepsilon_0 - (1 - \varepsilon_0)yv_{,xx} \quad (2.4.17)$$

本文中假設梁元素變形後的形心軸的側向位移 $v(x)$ 為 x 的三次 Hermitian 多項式。因此(2.4.7)式之 $v_{,x}$ 可表示成

$$v(x) = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}^t \{v_1, v'_1, v_2, v'_2\} = \mathbf{N}_b^t \mathbf{u}_b \quad (2.4.18)$$

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)^2(2 + \xi), \quad N_2 = \frac{L}{8}(1 - \xi^2)(1 - \xi),$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)^2(2 - \xi), \quad N_4 = \frac{L}{8}(-1 + \xi^2)(1 + \xi) \quad (2.4.19)$$

$$\xi = -1 + \frac{2x}{L} \quad (2.4.20)$$

其中 $v_j (j=1,2)$ 是 v 在節點 j 的節點值， v'_j 則是 $v' = \frac{\partial v}{\partial x}$ 在節點 $j (j=1,2)$ 之節點值， $N_i (i=1-4)$ 代表形狀函數(shape function)。

2.4.3 梁元素之應變變分和位置向量變分及速度和加速度

因本文用虛功原理及 d'Alembert 原理推導節點內力，所以需要應變的變分，位置向量的變分及速度和加速度。其推導如下：

將(2.4.17)式變分可以得到

$$\delta e_{11} = \delta \varepsilon_0 + yv_{,xx} \delta \varepsilon_0 - (1 - \varepsilon_0)y \delta v_{,xx} \quad (2.4.21)$$

將(2.4.7)式變分可以得到 $\delta \varepsilon_0$ 表示如下

$$\delta\varepsilon_0 = \delta\mathbf{u}_a^t \mathbf{G}_a + \delta\mathbf{u}_b^t \mathbf{G}_b \quad (2.4.22)$$

其中

$$\mathbf{u}_a = \{u_1, u_2\}$$

$$\mathbf{u}_b = \{v_1, v_1', v_2, v_2'\}$$

$$\mathbf{G}_a = \frac{1}{L} \{-1, 1\}$$

$$\mathbf{G}_b = \{G_{b1}, G_{b2}, G_{b3}, G_{b4}\} = \frac{1}{L} \int \mathbf{N}'_b v_{,x} dx \quad (2.4.23)$$

將(2.4.18)式對 x 的一次微分及二次微分，可分別表示如下

$$v_{,x} = \mathbf{N}'_b{}^t \mathbf{u}_b$$

$$v_{,xx} = \mathbf{N}''_b{}^t \mathbf{u}_b \quad (2.4.24)$$

將(2.4.18)及(2.4.24)式變分可以得到

$$\delta v = \delta\mathbf{u}_b^t \mathbf{N}_b$$

$$\delta v_{,x} = \delta\mathbf{u}_b^t \mathbf{N}'_b$$

$$\delta v_{,xx} = \delta\mathbf{u}_b^t \mathbf{N}''_b \quad (2.4.25)$$

將(2.4.22)、(2.4.24)及(2.4.25)代入(2.4.21)式，可以將 δe_{11} 重新寫成如下

$$\delta e_{11} = \delta\mathbf{u}_a^t \mathbf{G}_a (1 + yv_{,xx}) + \delta\mathbf{u}_b^t [\mathbf{G}_b - \mathbf{N}''_b (1 - \varepsilon_0) y] \quad (2.4.26)$$

由(2.4.8)式可得位置向量 \mathbf{r} 的變分如下

$$\delta \mathbf{r} = \{\delta r_1, \delta r_2\} = \{-y\delta\theta + \delta x_p, -y\theta\delta\theta + \delta v\} \quad (2.4.27)$$

將(2.4.6)式變分後再將(2.4.22)式代入，可以得到

$$\delta x_p = \delta \mathbf{u}_a^t \mathbf{N}_a + \frac{1+\xi}{2} L \delta \mathbf{u}_b^t \mathbf{G}_b - \int_0^x v_{,x} \delta v_{,x} dx \quad (2.4.28)$$

$$\mathbf{N}_a = \left\{ \frac{1-\xi}{2}, \frac{1+\xi}{2} \right\} \quad (2.4.29)$$

其中 \mathbf{u}_a 、 \mathbf{u}_b 、 \mathbf{G}_b 和 ξ 已在(2.4.20)及(2.4.23)式中定義。

將(2.4.2)變分可以得到

$$\cos \theta \delta \theta \approx \delta \theta = \delta[(1-\varepsilon_0)v_{,x}] = -\delta \varepsilon_0 v_{,x} + (1-\varepsilon_0) \delta v_{,x} \quad (2.4.30)$$

將(2.4.28)、(2.4.29)及(2.4.30)式代入(2.4.27)式，位置向量的變分 $\delta \mathbf{r}$ 可以寫成

$$\begin{aligned} \delta r_1 &= \delta \mathbf{u}_a^t \mathbf{N}_a + \frac{1+\xi}{2} L \delta \mathbf{u}_b^t \mathbf{G}_b - \int_0^x v_{,x} \delta v_{,x} dx + \underline{y v_{,x} \delta \varepsilon_0} - y(1-\varepsilon_0) \delta v_{,x} \\ \delta r_2 &= \delta v + \underline{y(1-\varepsilon_0) v_{,x}^2 \delta \varepsilon_0} - \underline{y(1-\varepsilon_0)^2 v_{,x} \delta v_{,x}} \end{aligned} \quad (2.4.31)$$

因為梁元素為小變形，所以 $v_{,x}$ 在元素較多時都將趨近於零，故在計算慣性力時，上式中畫底線的項可以忽略。將(2.4.25)式代入(2.4.30)式並忽略加底線的項可得

$$\begin{aligned} \delta r_1 &= \delta \mathbf{u}_a^t \mathbf{N}_a - y(1-\varepsilon_0) \delta v_{,x} \\ \delta r_2 &= \delta \mathbf{u}_b^t \mathbf{N}_b \end{aligned} \quad (2.4.32)$$

梁的絕對速度表示成

$$\mathbf{v} = \{v_1, v_2\} = \mathbf{v}_0 + \dot{\mathbf{r}} \quad (2.4.33)$$

其中 \mathbf{v}_0 為元素座標原點 o 的絕對速度， $\dot{\mathbf{r}}$ 為 Q 點對元素座標的相對速度，由元素座標的定義， \mathbf{v}_0 可表示成

$$\mathbf{v} = \dot{y}_b \{ \sin \theta_e, \cos \theta_e \} \quad (2.4.34)$$

其中 $\dot{y}_b = \frac{d}{dt} y_b$ 為基座的絕對速度，由(2.4.8)對時間微分可得 $\dot{\mathbf{r}}$

$$\dot{\mathbf{r}} = \{\dot{r}_1, \dot{r}_2\} = \dot{r}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{r}_2 \mathbf{e}_2 \quad (2.4.35)$$

$$\dot{r}_1 = \dot{x}_p - y\dot{\theta}$$

$$\dot{r}_2 = \dot{v} - y\dot{\theta}$$

本文()表示對()時間的微分。

梁的加速度可由(2.4.33)及(2.4.35)式對時間微分一次求得

$$\mathbf{a} = \{a_x, a_y\} = \mathbf{a}_0 + \ddot{\mathbf{r}} \quad (2.4.36)$$

$$\mathbf{a}_0 = \ddot{y}_b \{ \sin \theta_e, \cos \theta_e \}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \{\ddot{r}_1, \ddot{r}_2\} = \ddot{r}_1 \mathbf{e}_1 + \ddot{r}_2 \mathbf{e}_2 \quad (2.4.37)$$

$$\ddot{r}_1 = \ddot{x}_p - y\ddot{\theta}$$

$$\ddot{r}_2 = \ddot{v} - y\ddot{\theta}^2 - y\theta\ddot{\theta}$$

其中 \mathbf{a}_0 為元素座標原點 o 的絕對加速度， $\ddot{\mathbf{r}}$ 為 Q 點對元素座標的相對加速度。

將(2.4.6)式分別對時間做微分一次及微分二次，可以得到

$$\dot{x}_p = \dot{u}_1 + \dot{\epsilon}_0 x - \int_0^x v_{,x} \dot{v}_{,x} dx \quad (2.4.38)$$

$$\ddot{x}_p = \ddot{u}_1 + \ddot{\varepsilon}_0 x - \int_0^x (\dot{v}_{,x}^2 + v_{,x} \ddot{v}_{,x}) dx$$

將(2.4.2)式 $\sin \theta \approx \theta = \frac{1}{1 + \varepsilon_0} v_{,x} \approx (1 - \varepsilon_0) v_{,x}$ 分別對時間做微分一次及微分

二次，可以得到

$$\dot{\theta} = (1 - \varepsilon_0) \dot{v}_{,x} - \dot{\varepsilon}_0 v_{,x} \quad (2.4.39)$$

$$\ddot{\theta} = (1 - \varepsilon_0) \ddot{v}_{,x} - 2\dot{\varepsilon}_0 \dot{v}_{,x} - \ddot{\varepsilon}_0 v_{,x}$$

將(2.4.7)式對時間做微分一次，可以得到

$$\dot{\varepsilon}_0 = \mathbf{G}_a^t \dot{\mathbf{u}}_a + \frac{1}{L} \int_0^L v_{,x} \dot{v}_{,x} dx \quad (2.4.40)$$

將(2.4.2)、(2.4.38)、(2.4.39)及(2.4.40)式代入(2.4.37)式，我們可以將(2.4.37)式改寫成

$$\begin{aligned} \ddot{r}_1 = & \mathbf{N}_a^t \ddot{\mathbf{u}}_a + \frac{1 + \xi}{2} \int_0^L \dot{v}_{,x}^2 dx - \int_0^x (\dot{v}_{,x}^2 + v_{,x} \ddot{v}_{,x}) dx \\ & - y[(1 - \varepsilon_0) \ddot{v}_{,x} - 2(\frac{1}{L} \mathbf{G}_a^t \dot{\mathbf{u}}_a + \frac{1}{L} \int_0^L v_{,x} \dot{v}_{,x} dx) \dot{v}_{,x} - \ddot{\varepsilon}_0 v_{,x}] \end{aligned} \quad (2.4.41)$$

$$\begin{aligned} \ddot{r}_2 = & \ddot{v} - y[(1 - \varepsilon_0) \dot{v}_{,x} - \dot{\varepsilon}_0 v_{,x}]^2 \\ & - \underline{y(1 - \varepsilon_0) v_{,x} [(1 - \varepsilon_0) \ddot{v}_{,x} - 2\dot{\varepsilon}_0 \dot{v}_{,x} - \ddot{\varepsilon}_0 v_{,x}]} \end{aligned}$$

將上式中含有 v 或 $v_{,x}$ 等位移量之加底線項忽略，(2.4.41)重新寫成

$$\begin{aligned} \ddot{r}_1 = & \mathbf{N}_a^t \ddot{\mathbf{u}}_a + \frac{1 + \xi}{2} \int_0^L \dot{v}_{,x}^2 dx - \int_0^x \dot{v}_{,x}^2 dx - y[(1 - \varepsilon_0) \ddot{v}_{,x} - \frac{2}{L} \mathbf{G}_a^t \dot{\mathbf{u}}_a \dot{v}_{,x}] \quad (2.4.42) \\ \ddot{r}_2 = & \ddot{v} - y[(1 - \varepsilon_0) \dot{v}_{,x}]^2 \end{aligned}$$

2.5 梁元素的節點內力

本文利用虛功原理及 d'Alembert 原理在座標上求對應於元素節點參數

的元素節點內力。若給端點 $j (j = 1, 2)$ 一個虛位移 δu_j 、 δv_j 和 $\delta \phi_j$ ，則由虛功原理可知，對應於該端點的虛位移、外力所作的虛功 δW_{ext} 等於內力所作的虛功 δW_{int} 即

$$\delta W_{ext} = \delta W_{int} \quad (2.5.1)$$

在本推導中將 δW_{ext} 視為元素的節點內力 \mathbf{f} 對節點虛位移 $\delta \mathbf{q}$ 所做的功，可表示成

$$\delta W_{ext} = \delta \mathbf{q}^t \mathbf{f} = \delta \mathbf{u}_a^t \mathbf{f}_a + \delta \mathbf{u}_{b\phi}^t \mathbf{f}_b \quad (2.5.2)$$

其中

$$\delta \mathbf{q} = \{\delta u_1, \delta v_1, \delta \phi_1, \delta u_2, \delta v_2, \delta \phi_2\} \quad (2.5.3)$$

$$\delta \mathbf{u}_a = \{\delta u_1, \delta u_2\} \quad (2.5.4)$$

$$\delta \mathbf{u}_{b\phi} = \{\delta v_1, \delta \phi_1, \delta v_2, \delta \phi_2\} \quad (2.5.5)$$

$$\mathbf{f} = \{f_{11}, f_{21}, m_1, f_{12}, f_{22}, m_2\} \quad (2.5.6)$$

$$\mathbf{f}_a = \{f_{11}, f_{12}\} = \mathbf{f}_a^d + \mathbf{f}_a^I \quad (2.5.7)$$

$$\mathbf{f}_b = \{f_{21}, m_1, f_{22}, m_2\} = \mathbf{f}_b^d + \mathbf{f}_b^I \quad (2.5.8)$$

其中 $\delta \mathbf{u}_a$ 為軸方向的虛位移， $\delta \mathbf{u}_{b\phi}$ 為側向的虛位移， \mathbf{f}_a 、 \mathbf{f}_b 為對應於 $\delta \mathbf{u}_a$ 、 $\delta \mathbf{u}_{b\phi}$ 的節點力， $\phi_j (j=1,2)$ 為節點 j 的轉角， $f_{ij} (i=1,2, j=1,2)$ 為節點 j 在 x_i 方向的節點力， $m_j (j=1,2)$ 為節點 j 的力矩， \mathbf{f}_a^d 及 \mathbf{f}_b^d 為與變形有關的節點內力， \mathbf{f}_a^I 及 \mathbf{f}_b^I 為與慣性力有關的節點內力。

內力所作的虛功為虛應變所造成的虛功，本文將慣性力(質量與負的絕

對加速度之乘積)中的相對加速度 $\ddot{\mathbf{r}}$ 所做的虛功併入內力所作的虛功，而基座的絕對加速度所做的虛功當作等效外力所做的虛功，故內力所作的虛功可以表示成：

$$\delta W_{\text{int}} = \delta \mathbf{q}_\theta^t \mathbf{f}_\theta = \delta \mathbf{u}_a^t \mathbf{f}_a^\theta + \delta \mathbf{u}_b^t \mathbf{f}_b^\theta = \int_V E e_{11} \delta e_{11} dV + \int_V \rho \ddot{\mathbf{r}}^t \delta \mathbf{r} dV \quad (2.5.9)$$

其中

$$\delta \mathbf{q}_\theta = \{\delta u_1, \delta v_1, \delta v'_1, \delta u_2, \delta v_2, \delta v'_2\} \quad (2.5.10)$$

$$\delta \mathbf{u}_a = \{\delta u_1, \delta u_2\} \quad (2.5.11)$$

$$\delta \mathbf{u}_b = \{\delta v_1, \delta v'_1, \delta v_2, \delta v'_2\} \quad (2.5.12)$$

$$\mathbf{f}_\theta = \{f_{11}^\theta, f_{21}^\theta, m_1^\theta, f_{12}^\theta, f_{22}^\theta, m_2^\theta\} \quad (2.5.13)$$

$$\mathbf{f}_a^\theta = \{f_{11}^\theta, f_{12}^\theta\} = \mathbf{f}_a^{D\theta} + \mathbf{f}_a^{I\theta} \quad (2.5.14)$$

$$\mathbf{f}_b^\theta = \{f_{21}^\theta, m_1^\theta, f_{22}^\theta, m_2^\theta\} = \mathbf{f}_b^{D\theta} + \mathbf{f}_b^{I\theta} \quad (2.5.15)$$

其中 $\delta \mathbf{q}_\theta$ 為對應於元素虛應變 δe_{11} 和虛位移 $\delta \mathbf{r}$ 的節點虛位移， \mathbf{f}_θ 為對應於 $\delta \mathbf{q}_\theta$ 的等效節點力， m_j^θ ($j=1,2$)為對應於虛位移 $\delta v'_j$ ($j=1,2$)的廣義力矩。 E 為楊氏係數， ρ 為梁的密度， V 為梁在未變形前的體積， $\ddot{\mathbf{r}}$ 為(2.4.36)式之相對加速度。(2.5.9)式中，右式的第一項為應力所作的虛功，第二項為相對慣性力 $\rho \ddot{\mathbf{r}}$ 所作的虛功。

由(2.4.23)、(2.4.30)式可得

$$\delta \mathbf{q}_\theta = \mathbf{T}_{\theta\phi} \delta \mathbf{q} \quad (2.5.16)$$

$$\mathbf{T}_{\theta\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\theta_1}{L} & \theta_1 G_{b1} & 1 + \varepsilon_0 + \theta_1 G_{b2} & \frac{\theta_1}{L} & \theta_1 G_{b3} & \theta_1 G_{b4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\theta_2}{L} & \theta_2 G_{b1} & \theta_2 G_{b2} & \frac{\theta_2}{L} & \theta_2 G_{b3} & 1 + \varepsilon_0 + \theta_2 G_{b4} \end{bmatrix} \quad (2.5.17)$$

其中 $\theta_j = \frac{v'_j}{1 + \varepsilon_0}$ ($j = 1, 2$)。

由反梯度法則 (Contragradient Law) [12]及(2.5.16)式可得

$$\mathbf{f} = \mathbf{T}_{\theta\phi}^t \mathbf{f}_\theta \quad (2.5.18)$$

將(2.4.17)式之 e_{11} 及(2.4.26)式之 δe_{11} 代入(2.5.9)式右邊的第一項，並保留變形參數到二次項，可以得到應力所做的虛功

$$\begin{aligned} & \int_V E e_{11} \delta e_{11} dV \\ &= \delta \mathbf{u}_a^t [EAL\varepsilon_0 - EI(1 - \varepsilon_0) \int v_{,xx}^2 dx] \mathbf{G}_a \\ &+ \delta \mathbf{u}_b^t [EA\varepsilon_0 \int \mathbf{N}'_b v_{,x} dx + EI(1 - \varepsilon_0)^2 \int \mathbf{N}''_b v_{,xx} dx] \end{aligned} \quad (2.5.19)$$

其中

$$I = \int y^2 dA \quad (2.5.20)$$

上式中 A 為梁的斷面積， $\int(\)dx$ 中的積分範圍是從 0 到 L 。

將(2.4.42)式及(2.4.32)式之 $\delta \mathbf{r}$ 代入(2.5.9)式右邊的第二項，並保留變形參數對時間的微分到二次項，可以得到相對慣性力所做的虛功

$$\begin{aligned}
 & \int_1^2 \rho \ddot{\mathbf{r}}^t \delta \mathbf{r} dV \\
 &= \int [(\delta r_1) \ddot{r}_1 + (\delta r_2) \ddot{r}_2] dV \\
 &= \delta \mathbf{u}_a^t \left\{ \rho A \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_a^t dx \ddot{\mathbf{u}}_a + \rho A \int \mathbf{N}_a \left(\frac{1+\xi}{2} \int_0^L \dot{v}_{,x}^2 dx - \int_0^x \dot{v}_{,x}^2 dx \right) dx \right\} \\
 & \quad + \delta \mathbf{u}_b^t \left\{ \rho A \int \mathbf{N}_b \ddot{v} dx + \rho I (1-\varepsilon_0)^2 \int \mathbf{N}'_b \ddot{v}_{,x} dx - 2\rho I (1-\varepsilon_0) \mathbf{G}_a^t \dot{\mathbf{u}}_a \int \mathbf{N}'_b \dot{v}_{,x} dx \right\}
 \end{aligned} \tag{2.5.21}$$

將(2.5.21)及(2.5.19)式代入(2.5.9)式後可求得對應於 $\delta \mathbf{u}_a$ 和 $\delta \mathbf{u}_b$ 的節點力向量為

$$\mathbf{f}_a^\theta = \mathbf{f}_a^{d\theta} + \mathbf{f}_a^{I\theta} \tag{2.5.23}$$

$$\mathbf{f}_a^{d\theta} = [EAL\varepsilon_0 - EI(1-\varepsilon_0)] \int v_{,xx}^2 dx \mathbf{G}_a \tag{2.5.24}$$

$$\mathbf{f}_a^{I\theta} = \rho A \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_a^t dx \ddot{\mathbf{u}}_a + \rho A \int \mathbf{N}_a \left(\frac{1+\xi}{2} \int_0^L \dot{v}_{,x}^2 dx - \int_0^x \dot{v}_{,x}^2 dx \right) dx \tag{2.5.25}$$

$$\mathbf{f}_b^\theta = \mathbf{f}_b^{d\theta} + \mathbf{f}_b^{I\theta} \tag{2.5.26}$$

$$\mathbf{f}_b^{d\theta} = f_{12}^\theta \int \mathbf{N}'_b v_{,x} dx + EI(1-\varepsilon_0)^2 \int \mathbf{N}''_b v_{,xx} dx \tag{2.5.27}$$

$$\mathbf{f}_b^{I\theta} = \rho A \int \mathbf{N}_b \ddot{v} dx + \rho I \int \mathbf{N}'_b \ddot{v}_{,x} dx - 2\rho I \mathbf{G}_a^t \dot{\mathbf{u}}_a \int \mathbf{N}'_b \dot{v}_{,x} dx \tag{2.5.28}$$

由(2.5.18)式及(2.5.23)–(2.5.28)式並忽略慣性力中節點參數與其對時間微

分的耦合項，可得

$$\mathbf{f}_a^d = AEL\varepsilon_0\mathbf{G}_a \quad (2.5.29)$$

$$\mathbf{f}_a^I = \mathbf{f}_a^{I\theta} \quad (2.5.30)$$

$$\mathbf{f}_b^d = EA\varepsilon_0\int \mathbf{N}'_b v_{,x} dx + EI(1-\varepsilon_0)\int \mathbf{N}''_b v_{,xx} dx \quad (2.5.31)$$

$$\mathbf{f}_b^I = \mathbf{f}_b^{I\theta} \quad (2.5.32)$$

2.6 元素的剛度矩陣

因為在數值計算時，對於系統運動方程式的平衡迭代過程中需要先求得梁元素切線剛度矩陣和質量矩陣。依元素切線剛度矩陣的定義可知，對應於 $\delta\mathbf{q}$ 元素剛度矩陣 \mathbf{k} 可以表示成

$$\mathbf{k} = \frac{\partial \mathbf{f}^d}{\partial \mathbf{q}} \quad (2.6.1)$$

其中 \mathbf{k} 為對應於 $\delta\mathbf{q}$ 元素剛度矩陣可以由下列之子矩陣 \mathbf{k}_{ij} ($i = a, b, j = a, b$)組合而成

$$\mathbf{k}_{aa} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^d}{\partial \mathbf{u}_a} = \frac{EA}{L}\mathbf{G}_a\mathbf{G}_a^t - \frac{EI}{L^2}\int v_{,xx}^2 dx \mathbf{G}_a\mathbf{G}_a^t \quad (2.6.2)$$

$$\mathbf{k}_{ab} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^d}{\partial \mathbf{u}_b} = \mathbf{0} \quad (2.6.3)$$

$$\mathbf{k}_{ba} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^d}{\partial \mathbf{u}_a} = \mathbf{0} \quad (2.6.4)$$

$$\mathbf{k}_{bb} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^d}{\partial \mathbf{u}_b} = EI(1 - \varepsilon_0)^2 \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_b''^t dx \quad (2.6.5)$$

2.7 元素的質量矩陣

元素的質量矩陣 \mathbf{m} 可表示成

$$\mathbf{m} = \frac{\partial \mathbf{f}^I}{\partial \ddot{\mathbf{q}}} \quad (2.7.1)$$

其中 \mathbf{f}^I 可以由(2.5.30)、(2.5.32)式中的 \mathbf{f}_a^I 、 \mathbf{f}_b^I 組成， $\ddot{\mathbf{q}}$ 是元素的節點加速度，可以表示成

$$\ddot{\mathbf{q}} = \{\ddot{u}_1, \ddot{v}_1, \ddot{\theta}_1, \ddot{u}_2, \ddot{v}_2, \ddot{\theta}_2\} \quad (2.7.2)$$

\mathbf{m} 為一對稱矩陣，利用直接勁度法[12]，可由下列的次矩陣組合而成

$$\mathbf{m}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{f}_i^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_j}, \quad i, j = a, b \quad (2.7.3)$$

其中 $\ddot{\mathbf{u}}_a = \{\ddot{u}_1, \ddot{u}_2\}$

$$\ddot{\mathbf{u}}_b = \{\ddot{v}_1, \ddot{\theta}_1, \ddot{v}_2, \ddot{\theta}_2\}$$

由(2.7.3)、(2.5.30)式和(2.5.32)式矩陣 \mathbf{m}_{ij} 表示如下

$$\mathbf{m}_{aa} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_a} = \rho A \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_a^t dx \quad (2.7.4)$$

$$\mathbf{m}_{ab} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_b} = \mathbf{0} \quad (2.7.5)$$

$$\mathbf{m}_{ba} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_a} = \mathbf{0} \quad (2.7.6)$$

$$\mathbf{m}_{bb} = \frac{\delta \mathbf{f}_b^I}{\delta \ddot{\mathbf{u}}_b} = \rho A \int \mathbf{N}_b \mathbf{N}_b^t dx + \rho I \int \mathbf{N}'_b \mathbf{N}'_b{}^t dx = \mathbf{m}_T + \mathbf{m}_R \quad (2.7.7)$$

2.8 元素的阻尼力與阻尼矩陣

本文中假設元素的阻尼力 \mathbf{f}_v 可以表示成

$$\mathbf{f}_v = \mathbf{c}\dot{\mathbf{q}} \quad (2.8.1)$$

$$\mathbf{c} = a_1 \mathbf{m} + a_2 \mathbf{k} \quad (2.8.2)$$

其中 \mathbf{c} 稱為阻尼矩陣， $\dot{\mathbf{q}}$ 為元素的節點速度， a_1 、 a_2 為常數， \mathbf{m} 為梁元素的質量矩陣， \mathbf{k} 為梁元素的線性剛度矩陣，本文中梁元素的是 \mathbf{m} 由(2.7.4)和(2.7.7) 式的 \mathbf{m}_{aa} 及 \mathbf{m}_{bb} 組合而成[17]。

2.9 基座振動所造成的等效外力

當基座以 $y_b(t)$ 進行上下振動時，梁元素之絕對加速度如(2.4.36)式所示，梁元素所受的慣性力為 $-\rho(\mathbf{a}_0 + \ddot{\mathbf{r}})$ ，本研究已在 2.5 節中將 $-\rho\ddot{\mathbf{r}}$ 所做的虛功併入內力所做的虛功，本節中將 $-\rho\mathbf{a}_0$ 所做的虛功式為等效節點外力所做的虛功，並推導如下：

$$\delta W_{ext} = \delta \mathbf{q}^t \mathbf{P}_{eff}^e = \delta \mathbf{u}_a^t \mathbf{P}_a^e + \delta \mathbf{u}_b^t \mathbf{P}_b^e \quad (2.9.1)$$

其中 $\delta \mathbf{u}_a$ 、 $\delta \mathbf{u}_b$ 已在(2.4.23)式定義， \mathbf{P}_a^e 、 \mathbf{P}_b^e 為對應於 $\delta \mathbf{u}_a$ 、 $\delta \mathbf{u}_b$ 之等效節點外力。

將(2.4.36)式之 \mathbf{a}_0 及(2.4.27)式代入(2.9.1)式可得

$$-\int_V \delta \mathbf{r}^t \rho \mathbf{a}_0 dV = \rho A \ddot{y}_b \sin \theta_e \delta \mathbf{u}_a^t \int \mathbf{N}_a dx + \rho A \ddot{y}_b \cos \theta_e \delta \mathbf{u}_b^t \int \mathbf{N}_b dx \quad (2.9.2)$$

由(2.9.1)、(2.9.2)式可求得對應於 $\delta \mathbf{u}_a$ 、 $\delta \mathbf{u}_b$ 之等效節點外力向量。

$$\mathbf{P}_a^e = -\rho A \ddot{y}_b \sin \theta_e \int \mathbf{N}_a^t dx \quad (2.9.3)$$

$$\mathbf{P}_b^e = -\rho A \ddot{y}_b \cos \theta_e \int \mathbf{N}_b^t dx \quad (2.9.4)$$

由(2.9.3)、(2.9.4)式可得由基座振動所造成的等效外力 \mathbf{P}_{eff}^e

$$\mathbf{P}_{eff}^e = \rho A \ddot{y}_b \left\{ \frac{L}{2} \sin \theta_e \quad \frac{L}{2} \cos \theta_e \quad \frac{L^2}{12} \cos \theta_e \quad \frac{L}{2} \sin \theta_e \quad \frac{L}{2} \cos \theta_e \quad -\frac{L^2}{12} \cos \theta_e \right\} \quad (2.9.5)$$

本文僅考慮 $y_b(t) = y_0 \sin(\omega_b t)$ ，則(2.9.5)式可改寫如下：

$$\mathbf{P}_{eff}^e = p_{eff} \sin(\omega_b t) \left\{ \frac{L}{2} \sin \theta_e \quad \frac{L}{2} \cos \theta_e \quad \frac{L^2}{12} \cos \theta_e \quad \frac{L}{2} \sin \theta_e \quad \frac{L}{2} \cos \theta_e \quad -\frac{L^2}{12} \cos \theta_e \right\} \quad (2.9.6)$$

其中 $p_{eff} = \rho A \omega_b^2 y_0$ ，由(2.3.1)式可將 \mathbf{P}_{eff}^e 轉換至 global coordinate system

$$\mathbf{P}_{eff}^G = p_{eff} \sin(\omega_b t) \left\{ 0 \quad \frac{L}{2} \quad \frac{L^2}{12} \cos \theta_e \quad 0 \quad \frac{L}{2} \quad -\frac{L^2}{12} \cos \theta_e \right\} \quad (2.9.7)$$

2.10 系統的平衡方程式與運動方程式

系統的運動方程式可表示成

$$\Psi = \mathbf{F}(\mathbf{Q}, \lambda_d \mathbf{Q}_d) - \mathbf{P}_{eff}^G - \lambda_f \mathbf{P} = 0 \quad (2.10.1)$$

其中 Ψ 為系統的不平衡力， \mathbf{F} 為系統節點內力， \mathbf{Q}_d 為參考位移負荷向量， \mathbf{P}_{eff}^G 為等效外力向量， \mathbf{P} 為參考力負荷向量， λ_f 為力負荷參數， λ_d 為位移負荷參數， \mathbf{Q} 為在時間為 t 時系統的節點位移，其中 \mathbf{F} 由系統慣性力 \mathbf{F}^I 、系統變形力 \mathbf{F}^D 、系統阻尼力 \mathbf{F}^V 組成。 \mathbf{F}^I 、 \mathbf{F}^D 及 \mathbf{F}^V 可由(2.5.29 - 2.5.32)、(2.8.1)式中的元素節點慣性力 \mathbf{f}^I 、元素節點變形力 \mathbf{f}^d 、元素阻尼力 \mathbf{f}_v 從元素座標轉換到總體座標後組合而成。

在靜態分析時，剛性基座為靜止的，即 $\mathbf{P}_{eff}^G = \mathbf{0}$ ，故(2.10.1)可改寫如下

$$\Psi = \mathbf{F}(\mathbf{Q}, \lambda_d \mathbf{Q}_d) - \lambda_f \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (2.10.2)$$

(2.10.2)為本研究中靜態分析的非線性平衡方程式。

在動態分析時，本研究考慮如圖三(d)所示之挫曲梁僅受到基底振動所造成的等效外力，故 $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ ，則(2.10.1)可改寫如下

$$\Psi = \mathbf{F}(\mathbf{Q}, \lambda_d \mathbf{Q}_d) - \mathbf{P}_{eff}^G = \mathbf{0} \quad (2.10.3)$$

(2.10.3)為本研究中動態分析的運動方程式。

第三章 數值計算方法與程序

本文解非線性平衡方程式(2.10.2)式的數值計算方法是基於牛頓-拉福森(Newton-Raphson)法配合弧長控制(arc length control)法的增量迭代法。本文中以系統切線剛度的行列式值為零當作挫屈的準則，為了求得挫屈負荷，本文採用二分法[36]，決定增量位移的長度，以求得系統切線剛度矩陣之行列式值為零的平衡位置。為了求得次要平衡路徑，本文中在平衡路徑的第一個挫屈負荷分歧點加入一個與第一挫屈模態向量方向一致的擾動位移[34]。而本文解非線性平衡方程式(2.10.3)式的數值計算方法是基於牛頓-拉福森法配合 Newmark 直接積分法的增量迭代法[10]。

3.1 增量迭代法

若第 I 個增量的平衡位置為已知，則在此位置的系統切線剛度矩陣 \mathbf{K}_T 可以求得，且第 $I+1$ 個增量的初始增量位移向量 $\Delta\mathbf{Q}$ ，可利用尤拉預測值 (Euler predictor) 求得

$$\Delta\mathbf{Q} = \Delta\lambda\mathbf{Q}_T, \quad (3.1.1)$$

其中 $\Delta\lambda$ 為初始增量負荷參數， $\mathbf{Q}_T = \mathbf{K}_T^{-1}\mathbf{P}_{ref}$ 為參考負荷向量 \mathbf{P}_{ref} 的切線解。 $\Delta\lambda$ 可利用下式求出

$$\Delta\lambda = \pm \Delta\ell / (\mathbf{Q}_T^t \mathbf{Q}_T)^{1/2}, \quad (3.1.2)$$

其中正負符號之決定方法如下：若第 I 與 $I-1$ 個增量收斂時，系統切線剛度矩陣之行列式值同號，則 $\Delta\lambda$ 的正負符號和第 I 個增量時相同；若異號則符號相反。 $\Delta\ell$ 表第 $I+1$ 個增量的增量弧長，其值可以如下決定

$$\Delta l = (J_D/J_I)^{1/2} \Delta l_I, \quad (3.1.3)$$

其中 J_D 為給定的期望迭代次數， J_I 為第 I 個增量，迭代至平衡所使用的迭代次數， Δl_I 為第 I 個增量的增量弧長。

本文中第一個增量的增量弧長 Δl_1 是由下式決定

$$\Delta l_1 = \frac{R_{\max} \|\mathbf{R}_0\|}{I_{\max} |r_c|} \quad (3.1.4)$$

上式中 R_{\max} 為給定的參考自由度之最大位移量， $\|\mathbf{R}_0\|$ 為參考負荷向量 \mathbf{P}_{ref} 作用下的系統線性解 \mathbf{R}_0 的 Euclidean norm， I_{\max} 為給定之最大增量次數， $|r_c|$ 為 \mathbf{R}_0 在參考自由度的分量的絕對值。

在平衡迭代時增量位移向量 $\Delta \mathbf{Q}$ 及增量負荷 $\Delta \lambda$ 已知，由 $\Delta \mathbf{Q}$ 可求得梁結構新的變形位置。再利用 2.5 與 2.6 節的方法，求得元素座標上的節點內力及剛度矩陣。而對應此位置的負荷參數為 $\lambda = \lambda_I + \Delta \lambda$ ，其中 λ_I 為第 I 個增量達平衡時的負荷參數， $\Delta \lambda$ 即增量負荷參數。當系統內力及外力求得後，不平衡力量 Ψ 向量可由 (2.10.2) 式求得。若不能滿足收斂準，則利用定弧長控制法，求得一位移修正量 $\delta \mathbf{Q}$ 與負荷參數修正量 $\delta \lambda$ ，並加入前一次迭代的 $\Delta \mathbf{Q}$ 與 $\Delta \lambda$ 中，而得一新的增量位移向量與增量負荷參數，再進行下一次的迭代。 $\delta \mathbf{Q}$ 與 $\delta \lambda$ 可由下列二式決定

$$\delta \mathbf{Q} = \mathbf{K}_T^{-1} (-\Psi + \delta \lambda \mathbf{P}) \quad (3.1.5)$$

$$\Delta l^2 = (\Delta \mathbf{Q} + \delta \mathbf{Q})^t (\Delta \mathbf{Q} + \delta \mathbf{Q}) \quad (3.1.6)$$

以上之迭代計算過程一直重覆至滿足收斂準則為止。本文採用的收斂準則為

$$\frac{\|\boldsymbol{\Psi}\|}{\|\mathbf{P}_r\|\sqrt{N}} < e_{tol}^s$$

其中 \mathbf{P}_r 為端點反力， e_{tol}^s 為給定的容許誤差值，4.1、4.2、4.3、4.5 節中 $e_{tol}^s = 10^{-7}$ ，4.4 節中 $e_{tol}^s = 10^{-5}$ 。

3.2 二分法

利用3.1節的增量迭代法可以求得靜態分析時結構之主要平衡路徑。在每個增量的迭代收斂時，可以得到該增量在其平衡位置的負荷參數 λ 及結構切線剛度矩陣的行列式值 $D(\lambda)$ 。令 λ_I 及 $D(\lambda_I)$ 分別表示第 I 個增量在其平衡位置的 λ 及 $D(\lambda)$ 之值。 λ_{I+1} 及 $D(\lambda_{I+1})$ 分別表示第 $I+1$ 的增量在其平衡位置的 λ 及 $D(\lambda)$ 之值。 Δl_{I+1} 表示第 $I+1$ 個增量的增量位移向量之弧長。若 $D(\lambda_I)$ 大於零且 $D(\lambda_{I+1})$ 小於零則可利用以下二分法求得挫屈負荷參數 λ_{NB} ：

- (1) 令 $\Delta l_L = 0$, $\Delta l_R = \Delta l_{I+1}$, $\lambda_L = \lambda_I$, $\lambda_R = \lambda_{I+1}$ ，其中下標 L 及 R 表示左界及右界。
- (2) 取 $\Delta l_{I+1} = \frac{\Delta l_L + \Delta l_R}{2}$ ，重作第 $I+1$ 個增量迭代，並求得新的 λ_{I+1} 及 $D(\lambda_{I+1})$ 。
- (3) 若 $D(\lambda_{I+1})$ 大於零，則令 $\lambda_L = \lambda_{I+1}$, $\Delta l_L = \Delta l_{I+1}$
若 $D(\lambda_{I+1})$ 小於零，則令 $\lambda_R = \lambda_{I+1}$, $\Delta l_R = \Delta l_{I+1}$
- (4) 若滿足下式挫屈誤差準則

$$\frac{|\lambda_R - \lambda_L|}{|\lambda_{I+1}|} < e_\lambda \quad (3.2.1)$$

其中 e_λ 為給定的容許誤差值，則 λ_{I+1} 即為系統挫屈負荷，否則回到步驟(2)，重新展開下一次二分法迭代，本文中取 $e_\lambda = 10^{-10}$ 。

3.3 Newmark 直接積分法

Newmark 直接積分法乃假設在時間 t_n 時，滿足動平衡方程式(2.10.3)的平衡位置、速度 $\dot{\mathbf{U}}_n$ 和加速度 $\ddot{\mathbf{U}}_n$ 為已知，則在 $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ 時刻之平衡位置、速度 $\dot{\mathbf{U}}_{n+1}$ 和加速度 $\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}$ 可由下述迭代過程得到。

1. 令在 t_{n+1} 時刻的初始增量位移猜測值 $\Delta\mathbf{U} = \mathbf{0}$

$$\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}^0 = \frac{1}{\beta\Delta t^2}\Delta\mathbf{U} - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\mathbf{U}}_n - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{\mathbf{U}}_n \quad (3.3.1)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1}^0 = \dot{\mathbf{U}}_n + \Delta t[(1-\gamma)\ddot{\mathbf{U}}_n + \gamma\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}^0] \quad (3.3.2)$$

其中 $\beta = \frac{1}{4}$ 、 $\gamma = \frac{1}{2}$ 。

2. 令 $\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} = \ddot{\mathbf{U}}_{n+1}^0$ ， $\dot{\mathbf{U}}_{n+1} = \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^0$

3. 由 $\Delta\mathbf{U}$ (或 $\delta\mathbf{U}$)及上次迭代後的變形位置得到此次迭代後的變形位置，再算出系統的節點變形力 \mathbf{F}_{n+1}^D 。由 $\dot{\mathbf{U}}_{n+1}$ 、 $\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}$ 及最新的變形位置算出系統的節點慣性力 \mathbf{F}_{n+1}^I 及阻尼力 \mathbf{F}_{n+1}^V 。由在 t_{n+1} 時刻的外力 $(\mathbf{P}_{eff}^G)_{n+1}$ 、 \mathbf{F}_{n+1}^D 、 \mathbf{F}_{n+1}^I 、 \mathbf{F}_{n+1}^V 及系統動平衡方程式(2.10.3)算出系統不平衡力

$$\Psi_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1}^I + \mathbf{F}_{n+1}^D + \mathbf{F}_{n+1}^V - (\mathbf{P}_{eff}^G)_{n+1} \quad (3.3.3)$$

4. 檢查 $\|\Psi_{n+1}\|$ 是否滿足收斂準則，若滿足則迭代停止，本文採用的收斂準則為

$$\frac{\|\Psi_{n+1}\|}{p_{eff}L(|\sin(\omega_b t)| + \Delta t)\sqrt{N}} < e_{tol}^d$$

e_{tol}^d 為給定的容許誤差，等效外力 $p_{eff} > 10^{-4}$ 時， $e_{tol}^d = 10^{-5}$ ，等效外力

$p_{eff} < 10^{-4}$ 時， $e_{tol}^d = 10^{-4}$ 。

5. 若不滿足，則由

$$\delta\mathbf{U} = -[\hat{\mathbf{K}}]^{-1}\Psi_{n+1} \quad (3.3.4)$$

得一增量位移修正量 $\delta\mathbf{U}$ ，其中

$$[\hat{\mathbf{K}}] = \frac{1}{\beta\Delta t^2}[\mathbf{M}] + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}[\mathbf{C}] + [\mathbf{K}] \quad (3.3.5)$$

為系統有效剛度矩陣(effective stiffness matrix)， $[\mathbf{M}]$ 、 $[\mathbf{K}]$ 表系統之質量與剛度矩陣。 $[\mathbf{C}]$ 為阻尼矩陣，本文中採用[34]

$$[\mathbf{C}] = a_1[\mathbf{M}] + a_2[\mathbf{K}] \quad (3.3.6)$$

其中 a_1 、 a_2 為常數，本文取 $a_1 = 50$ 、 $a_2 = 0$

6. 令

$$\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}^0 = \dot{\mathbf{U}}_{n+1} + \frac{1}{\beta\Delta t^2}\delta\mathbf{U} \quad (3.3.7)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1}^0 = \dot{\mathbf{U}}_{n+1} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\delta\mathbf{U} \quad (3.3.8)$$

7. 回到 2.

若上述迭代程序經過一預先設定的迭代次數還不收斂時，則將時間增量 Δt 減半，令 $t_{n+1} = t_n + \frac{\Delta t}{2}$ ，然後再重複上述迭代程序。但在下一時刻，則

將時間增量改為 $\Delta t + \frac{\Delta t}{2}$ 。

第四章 數值例題與結果

在本章中，將以第二章之梁元素以及第三章所提的數值方法與程序，分析如圖三(a)之所示之水平直梁在不同的邊界條件下，受不同位移負荷及力負荷的靜態及動態之幾何非線性行為。在本章中所考慮的梁之材料常數與幾何常數，除非文中另有說明外，皆採用文獻[5]中的數據，其值如下：密度 $\rho = 2320 \text{ kg/m}^3$ 、楊氏係數 $E = 150 \text{ GPa}$ 、斷面寬度 $b = 8 \times 10^{-6} \text{ m}$ 、斷面厚度 $h = 0.48 \times 10^{-6} \text{ m}$ 、長度 $L = 550 \times 10^{-6} \text{ m}$ 、斷面面積 $A = 3.84 \times 10^{-12} \text{ m}^2$ 、斷面慣性矩 $I = 7.3728 \times 10^{-26} \text{ m}^4$ ，細長比 $\eta = \frac{AL^2}{I} = 3969.3$ 。本章中的例題除另有說明外，均不考慮阻尼，初始速度及初始加速度均為零。本章中的例題除另有說明外，梁均分成 40 的等長度的元素。

4.1 梁挫屈後的側向位移與軸向變形

本章中先將圖三(a)之所示之梁的 A、B 兩端固定，再給 B 端一個軸向位移負荷 Δ ，當 Δ 超過挫屈臨界值 $\Delta_{cr} = \frac{4\pi^2 I}{AL}$ [16] 後，此梁便會產生如圖三(b)所示之側向挫屈，本章中稱梁在圖三(b)的狀態為初始狀態的挫屈梁，在不會引起混淆的情況下，簡稱為挫屈梁， δ_0 為挫屈梁中點 C 的側向位移。本例題將探討挫屈梁的側向位移 δ_0 與軸向變形 Δ 的關係，並與文獻[28]的解析解比較。本例題考慮了兩種分別具有不同材料及幾何性質的梁：(a)即本章中一開始提到的梁，(b) [28]: $E = 21 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ 、 $b = 1.905 \times 10^{-2} \text{ m}$ 、

$h = 3.81 \times 10^{-4} m$ 、 $L = 0.64 m$ 、 $A = 7.25 \times 10^{-6} m^2$ 、 $I = 8.78 \times 10^{-14} m^4$ ，細長比

$\eta = \frac{AL^2}{I} = 5819.0$ 。圖六為本文分析的結果與解析解[28]，解析解[28]可以表

示成 $\frac{\delta_0}{h} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\zeta - 1}$ ， $\zeta = \frac{\Delta}{\Delta_{cr}}$ ，解析解[28]為根據以下的假設求得的：(1)梁

沒有軸向變形，(2)挫屈梁的側向位移為其挫屈模態 $v(x) = \frac{\delta_0}{2} (1 - \cos \frac{2\pi x}{L})$ 。

從圖六中可以看出當 $\frac{\delta_0}{h} < 100$ 時(a)、(b)與解析解都幾乎重合，當 $\frac{\delta_0}{h} > 100$ 時

(b)比(a)接近解析解，這應是(b)比(a)的細長比大，與解析解的假設較接近。

為了與文獻[5]的結果做比較，本章在以後的小節中除另有說明外，皆取

$\delta_0 = 97 \times 10^{-6} m$ ($\delta_0/h = 202.0833$)， $\Delta = 44.45 \times 10^{-6} m$ ，

$\Delta_{cr} = 1.3781 \times 10^{-9} m$ ， $\zeta = \frac{\Delta}{\Delta_{cr}} = 3.225 \times 10^4$ 。

4.2 挫屈梁受端點轉角作用的靜態分析

本節在如圖三(b)所示之挫屈梁兩端 A、B 各施加一個旋轉角 θ_A 、 θ_B ，使其成為如圖三(c)所示之結構，本例題僅考慮 $\theta_A = \theta_B$ 的情況。圖七到圖九及表一為本文分析的結果，其中 v_c 為梁中點 C 的位移， v_c 是從圖三(c)中 $\delta_0 = 97 \mu m$ 的平衡位置算起， F_B 及 M_B 為 B 點的反力及力矩，其方向如圖三(c)所示。圖七到圖九中的 a 點為 $M_B = 0$ 的點，該點對應的 $\theta_B = 0.572 rad$ 、 $F_B / EA = 0.6563 \times 10^{-6}$ 、 $v_c = 0$ ，此時該梁兩端的受力狀態相當於一個如圖十所示 C 點的側向位移 $\delta_0 = 97 \mu m$ 之挫屈簡支梁，b 點為 $F_B = 0$ 的點，該點

對應的 $\theta_B = 0.7047 \text{ rad}$ 、 $M_B L / EI = -1.408$ 、 $v_c / h = -8.3246$ 、 $(\delta_0 + v_c) / h = 193.7587$ ，此時該梁的受力狀態相當於簡支梁受到純彎矩(pure bending)作用，由材料力學[16]很容易得知簡支梁受到純彎矩作用時將形成一個曲率半徑 $R = |EI / M_B| = L / 2\theta_B$ 的圓弧，將上述的值代入相當吻合，再由簡單的三角函數可求得該圓弧中點的高度 $(\delta_0 + v_c) / h = 193.84$ ，該值與本文分析的結果相當接近。

本節另外考慮了如圖十所示之簡支梁，該簡支梁受到一軸向位移負荷 Δ ，並產生側向挫屈，令 δ_0 表示梁中心點 C 的側向位移。圖十一到圖十三為本文分析的結果，從圖十二、十三中可以看出當挫屈高度 $\delta_0 = 97 \mu\text{m}$ ($\delta_0 / h = 202.833$) 時，兩端的轉角 $\theta = 0.573 \text{ rad}$ ，端點 B 的反力 $F_B / EA = 0.6529 \times 10^{-6}$ ，此結果與前述挫屈梁受端點轉角作用， $M_B = 0$ 的時候結果非常接近，由以上的比較，可以說明本文所提的數學模型、數值方法程式應是正確的。

為了方便稱呼，本文中將稱呼受端點轉角作用後的挫屈梁為具端點轉角的挫屈梁，在不會引起混淆的情況下，仍簡稱為挫屈梁。本章中將在以後的小節中探討具端點轉角的挫屈梁之自然振動、受不同負荷的非線性行為及受基座振動的動態反應。

4.3 具端點轉角之挫屈梁的自然頻率

本節中將探討 B 點轉角 θ_B 對挫屈梁自然頻率的影響，本文採用次空間

法求結構的自然頻率及對應的模態，表二為不同 θ_B 之挫屈梁的前五個自然頻率，從表二中可以發現 $\theta_B = 0$ 時本研究的結果與文獻[5]的實驗及理論分析的結果相當接近，從表二中亦可發現當 $0 \leq \theta_B \leq 0.6rad$ 時，挫屈梁的自然頻率隨著 θ_B 增加而增加，當 $\theta_B > 0.6rad$ ，有些自然頻率隨著 θ_B 增加而稍微下降。圖十四及圖十五分別為 $\theta_B = 0$ 、 $\theta_B = 0.7rad$ 時，前五個自然頻率所對應的振動模態。由圖十四、十五可以發現不同 θ_B 之挫屈梁的第一個振動頻率對應的側向位移之振動模態是反對稱的，第二個振動頻率對應的側向位移之振動模態是對稱的。

4.4 具端點轉角之挫屈梁受側向負荷的靜態分析

本節中首先考慮如圖三(d)所示的具端點轉角之挫屈梁受到一如圖十六所示之集中載重 P_c 作用，其中 v_c 為 C 點的側向位移， v_c 是從圖三(d)未加 P_c 時的平衡位置開始算起。圖十七為具不同 θ_B 之挫屈梁受集中負荷時，其主要平衡路徑的負荷-位移圖，圖中標示 B 或 B_i 的點為該曲線上的分歧點(bifurcation point)，標示 L 的點為該曲線的極限點(limit point)。由圖十七中可以發現除了 $\theta_B = 0$ 的主要平衡路徑具有三個分歧點外，所有的主要平衡路徑均只有一個分歧點，表三為圖十七中各曲線之第一個分歧點與極限點的座標值，表三中 \bar{v}_{cr}^{b1} 、 \bar{P}_{cr}^{b1} 、 \bar{v}_{cr}^L 、 \bar{P}_{cr}^L 的定義如下：

$$\bar{v}_{cr}^{b1} = \frac{v_{cr}^{b1}}{h}, \quad \bar{P}_{cr}^{b1} = \frac{P_{cr}^{b1} L^2}{EI}, \quad \bar{v}_{cr}^L = \frac{v_{cr}^L}{h}, \quad \bar{P}_{cr}^L = \frac{P_{cr}^L L^2}{EI}$$

其中 v_{cr}^{b1} 與 P_{cr}^{b1} 為第一個分歧點 v_c 與 P_c 的值，而 $\theta_B = 0$ 第二個分歧點的座標值為 $\bar{P}_{cr}^{b2} = 159.19$ 、 $\bar{v}_{cr}^{b2} = 70.09$ ，第三個分歧點的座標值為 $\bar{P}_{cr}^{b3} = 160$ 、 $\bar{v}_{cr}^{b3} = 86.24$ ， v_{cr}^L 與 P_{cr}^L 為極限點 v_c 與 P_c 的值，由表三及圖十七可以發現 \bar{P}_{cr}^L 時隨著 θ_B 的增加而大幅減少，但 \bar{P}_{cr}^{b1} 隨著 θ_B 的增加而慢慢增加再減少， \bar{P}_{cr}^{b1} 與 \bar{P}_{cr}^L 隨著 θ_B 的增加而慢慢接近，在 $\theta_B < 0.7rad$ 時，主要平衡路徑上分歧點會比極限點先出現，當 $\theta_B = 0.7rad$ 時，極限點則會比分歧點先出現，圖十七中可以發現 $\theta_B \leq 0.3rad$ 時，第一個分歧點前，各主要平衡路徑幾乎重合。圖十八、十九為負荷 P_c -反力 F_B 圖，圖二十及圖二十一分別為 $\theta_B = 0$ 和 $\theta_B = 0.3rad$ 之挫屈梁的次要平衡路徑及對應的無因次側向位移的分佈圖。

本節接著考慮如圖三(d)所示的挫屈梁受到一如圖二十二所示之分佈載重 λ ，圖二十三為其主要平衡路徑的負荷-位移圖，表四為圖二十三中各曲線之第一個分歧點與極限點的座標值，其中 v_c 、 \bar{v}_{cr}^b 、 \bar{v}_{cr}^L 的定義與受集中載重時的定義相同，而 $\bar{\lambda}_{cr}^b$ 、 $\bar{\lambda}_{cr}^L$ 定義如下：

$$\bar{\lambda}_{cr}^{b1} = \frac{\lambda_{cr}^b L^3}{EI}, \quad \bar{\lambda}_{cr}^L = \frac{\lambda_{cr}^L L^3}{EI}$$

λ_{cr}^b 為分歧點的負荷參數 λ 的值， λ_{cr}^L 為極限點的負荷參數 λ 的值。

由圖二十三可發現，受到均佈負荷時，所有 θ_B 的主平衡路徑僅只有一個分歧點，由圖二十三及表四可發現，當 $\theta_B < 0.6rad$ 時， $\bar{\lambda}_{cr}^b$ 及 $\bar{\lambda}_{cr}^L$ 都會隨著 θ_B 增加而增加，在 $\theta_B > 0.6rad$ 後， $\bar{\lambda}_{cr}^b$ 仍隨著 θ_B 增加而緩慢增加再減少，但是 $\bar{\lambda}_{cr}^L$ 則會隨著 θ_B 增加而大幅減少。圖二十四、二十五為負荷 λ -反力 F_B 圖，

圖二十六及圖二十七為 $\theta_B = 0$ 及 $\theta_B = 0.3\text{rad}$ 的次要平衡路徑及對應的無因次側向位移的分佈圖。

本節中接著考慮如圖三(d)所示之具端點轉角的挫屈梁受到如圖二十八所示之集中力及力矩負荷，本例題之負荷施加的次序如下：先施加一個固定大小的集中力 $P_c = P_0$ ，使挫屈梁到達一個新的平衡位置，然後在該平衡位置同時再施加一個集中力 λ_1 及力矩 λ_2 ，此時 $P_c = P_0 + \lambda_1$ ， $M_c = \lambda_2$ 。本節中僅考慮下列兩種情況：

1. $P_0 = 0$ 、 $\lambda_1 = 0$ 、 $\lambda_2 = \lambda$
2. $P_0 = 0.1P_{cr}$ 、 $\lambda_1 = \lambda$ 、 $\lambda_2 = \frac{5EI}{6P_{cr}L}\lambda$

其中 λ 為外力負荷參數， $P_{cr} = P_{cr}^{b1}$ 為端點轉角為 θ_B 的挫屈梁，其中點 C 受集中載重 P_c 作用時，第一個分歧點的挫屈負荷，其值列於表三中。

本例題僅考慮 $\theta_B = 0$ 、 0.1 、 0.3rad ，圖二十九到圖三十四為本文分析結果。

圖二十九到圖三十四中 C 點的位移 u_c 、 v_c 及轉角 θ_c 都是從施加集中力 $P_c = P_0$ 後的平衡位置算起。由圖二十九到圖三十一中可以發現當挫屈梁僅受力矩作用時，軸向位移 u_c 及轉角 θ_c 與 M_c 的關係幾乎是線性的，但側向位移 v_c 與 M_c 的關係是高度非線性的。轉角 θ_c 及側向位移 v_c 的剛度隨著 θ_B 增加而增加，但軸向位移 u_c 的剛度隨著 θ_B 增加而稍微減少。由圖三十二到圖三十四中可以發現當挫屈梁同時受一個集中力及力矩作用時，軸向位移 u_c 、側向位移 v_c 及轉角 θ_c 與 M_c 的關係都是高度非線性的，且軸向位移 u_c 、側向位移

v_c 及轉角 θ_c 的剛度都隨著負荷增加而快速的減少，增加 θ_B 似乎可以增加轉角 θ_c 的剛度及增加挫屈梁同時受一個集中力及力矩作用時的極限點。

4.5 梁基座振動時具端點轉角之挫屈梁的動態行為

本節中考慮一如圖三十五所示 $\theta_B = 0$ 之挫屈梁，其基座的運動為一個垂直方向的週期運動 $y_b(t) = y_0 \sin \omega_b t$ ，其中 y_0 是振幅、 ω_b 是頻率、 t 是時間，此時挫屈梁相對於基座的運動和圖三(c)所示之挫屈梁 ($\theta_B = 0$ 時) 受到一如圖二十二所示之均佈載重 $\lambda(t) = p_{eff} \sin \omega_b t$ 時的運動相同，其中 $p_{eff} = \rho A y_0 \omega_b^2$ 稱為等效外力，本節將探討不同的等效外力及基座振動頻率對於圖三(c)所示之挫屈梁 ($\theta_B = 0$ 時) 動態行為的影響。本節將先探討主共振現象(primary resonance)及超諧共振現象(superharmonic resonance)，再探討挫屈梁的跳躍現象(snap through)，並找出在不同基座振動頻率下，挫屈梁產生跳躍現象所需的最小等效力，本節使用 Newmark 直接積分法，所有例題的時間增量 Δt 均為 $5 \times 10^{-9} s$ ，由表二可知挫屈梁的第五個自然振動週期約為 Δt 的 900 倍，本文中曾測試過不同的 Δt ，發現此 Δt 得到的結果在各種情況下都是準確的。由 4.3 節知道本研究考慮的挫屈梁的第一個振動頻率 $\omega_1 = 25.80 \text{kHz}$ 對應的側向位移之振動模態是反對稱的，第二個振動頻率 $\omega_2 = 44.26 \text{kHz}$ 對應的側向位移之振動模態是對稱的。因本節中考慮的等效側向力為均佈力，故該負荷引起的側向振動應是對稱的，但文獻上有反對

稱側向振動的報告，所以本節中將加以探討。

4.5.1 小振幅振動的主共振現象 $\omega_b \approx \omega_2$

由 4.4 節及表四可以知道，本挫屈梁受均佈負荷的第一個分歧點之負荷參數 $\lambda_{cr}^{b1} = \frac{EI}{L^3} \bar{\lambda}_{cr}^{b1} = 4.887 \times 10^{-3} N/m$ ，由圖二十三中可以發現在 $\lambda \ll \lambda_{cr}$ 時，負荷位移曲線幾乎為一直線，且位移很小，所以當基座振動的等效力 $p_{eff} \ll \lambda_{cr}^{b1}$ 時，挫屈梁的振動應該接近線性振動的行為，所以本例題考慮等效力 $p_{eff} = 1 \times 10^{-4} N/m$ 的基底振動之動態分析，來探討挫屈梁小振幅振動的共振現象。本例題每一外力頻率分析了 25 個外力周期，並以 25 個外力週期內 C 點的最大側向位移 $|v_c|_{max}$ 當作每個外力頻率的響應，本例題考慮的基座振動頻率 ω_b 為 13 ~ 49 kHz，圖三十六為本例題所得到的頻率響應圖，其中 $V = |v_c|_{max} / h$ ，從圖三十六中可以看到基座振動頻率 $\omega_b \approx 43.6 kHz$ 時會有一個主共振現象且振幅不大，由表二可以發現此振動頻率與本文及文獻[5]得到的第二個線性自然振動頻率很接近，這結果應是合理的。

4.5.2 大振幅振動的主共振現象及跳躍現象 ($\omega_b \approx \omega_2$)

本節中將探討 ω_b 接近 ω_2 時挫屈梁的大振幅振動的共振現象及跳躍現象，本節中考慮四個不同大小的等效力： $p_{eff} = 6 \times 10^{-4}$ 、 7×10^{-4} 、 7.5×10^{-4} 、 $1 \times 10^{-3} N/m$ 。本節中每一個案的分析時間原則上為 25 個外力周期，但若

分析過程中發現 C 點的最大側向位移 $|v_c|_{\max}$ 大於 $100h$ ，則將分析時間增加到 30 個外力周期。分析過程中，若 C 點的最大側向位移 $|v_c|_{\max}$ 大於 $202h$ 之時間總和超過三個外力周期，則判定結構已產生跳躍現象並停止該分析。本節中稱在分析時間內 C 點的最大軸向位移 $|u_c|_{\max}$ 、最大側向位移 $|v_c|_{\max}$ 及最大旋轉角度 $|\theta_c|_{\max}$ 為挫屈梁在該外力頻率的響應。表五、表六為 C 點位移在不同等效力及頻率的無因次響應，其中 U 、 V 、 Θ 的定義如下：

$$U = |u_c|_{\max} / h \quad V = |v_c|_{\max} / h \quad \Theta = |\theta_c|_{\max}$$

圖三十七為無因次側向位移的頻率響應，由圖三十七及表五、表六中可以發現在基座振動頻率接近系統第二個自然振動頻率時，產生跳躍現象所需的最小等效力 $p_{eff} = 7 \times 10^{-4} N/m$ 。當側向振動是對稱的， $\Theta = 0$ ，所以由 Θ 的大小應可以判斷側向振動不對稱的程度，由表五、表六中可發現在產生跳躍現象時側向振動是不對稱的，在產生跳躍現象附近的 ω_b 亦會造成不對稱的側向振動，其振幅有時並不是很大。

圖三十八為 $p_{eff} = 7.5 \times 10^{-4} N/m$ 、 $\omega_b = 41.1 kHz$ C 點位移的歷時分析，其中 $\tau = \omega_b t$ ，從圖三十八中可以看出當 $\tau < 15$ ， C 點的軸向位移 u_c 及轉角 θ_c 幾乎為零，這代表側向振動是接近對稱的，當 $\tau > 15$ ， C 點的軸向位移 u_c 及轉角 θ_c 增加，代表側向振動不對稱的程度增加，圖三十九、四十分別為 $p_{eff} = 7.5 \times 10^{-4} N/m$ 、 $\omega_b = 41.1 kHz$ 時，挫屈梁在第十及第二十一個外力周期之側向位移分佈圖，從圖三十九中可以看到挫屈梁的側向振動確實是接

近對稱的振動，從圖四十中可以看到挫屈梁的側向振動確實是不對稱的振動，而且是接近反對稱的振動，圖四十一為 $p_{eff} = 7.5 \times 10^{-4} N/m$ 、 $\omega_b = 39.6 kHz$ C 點的歷時分析，由圖四十一可以看出，當 $\tau > 15$ ，挫屈梁有不對稱的側向振動，當 $\tau > 23$ ，挫屈梁產生跳躍現象，圖四十二、四十三分別為 $p_{eff} = 7.5 \times 10^{-4} N/m$ 、 $\omega_b = 39.6 kHz$ 第十五個及第二十五個外力周期之側向位移分佈圖，從圖四十二、四十三可以看到看到挫屈梁的側向振動確實是不對稱的振動，但亦不是接近反對稱的振動。

4.5.3 超諧共振現象($\omega_b \approx \frac{1}{2}\omega_2$)及跳躍現象

本節中將探討 ω_b 接近 $\frac{1}{2}\omega_2$ 時挫屈梁的大振幅振動的共振現象及跳躍現象，本節中考慮六個不同大小的等效力： $p_{eff} = 1.5 \times 10^{-3}$ 、 1.6×10^{-3} 、 1.7×10^{-3} 、 1.8×10^{-3} 、 1.9×10^{-3} 、 $2 \times 10^{-3} N/m$ ，本節中分析過程及變數的定義均與 4.5.2 節相同。表七、表八為 C 點位移在不同等效力及頻率的無因次響應，圖四十四為無因次側向位移的頻率響應，由圖四十四及表七、表八中可以發現在 $\omega_b \approx \frac{1}{2}\omega_2$ 時，產生跳躍現象所需的最小等效力 p_{eff} 為 $1.8 \times 10^{-3} N/m$ 。由表七、表八中可發現在產生跳躍現象時側向振動是不對稱的，在產生跳躍現象附近的 ω_b 亦會造成不對稱的側向振動，其振幅有時並不是很大。

圖四十五為 $p_{eff} = 1.7 \times 10^{-3} N/m$ 、 $\omega_b = 21.2 kHz$ C 點的歷時分析，由圖四十

五可以看出，當 $\tau > 10$ ，挫屈梁有不對稱的側向振動，圖四十六、四十七分別為 $p_{eff} = 1.7 \times 10^{-3} N/m$ 、 $\omega_b = 21.2 kHz$ 第十三個及第十五個外力周期之側向位移分佈圖，從圖四十六、四十七可以看到看到挫屈梁的側向振動確實是不對稱的振動，但不是很接近反對稱的振動。

圖四十八為 $p_{eff} = 1.8 \times 10^{-3} N/m$ 、 $\omega_b = 21.2 kHz$ C 點的歷時分析，由圖四十八可以看出，挫屈梁有跳躍現象，圖四十九、五十分別為 $p_{eff} = 1.8 \times 10^{-3} N/m$ 、 $\omega_b = 21.2 kHz$ 第十八個及第二十四個外力周期之側向位移分佈圖，從圖四十九、五十可以看到看到挫屈梁的側向振動確實是不對稱的振動，但不是很接近反對稱的振動。

4.5.4 超諧共振現象($\omega_b \approx \frac{1}{3}\omega_2$)及跳躍現象

本節中將探討 ω_b 接近 $\frac{1}{3}\omega_2$ 時挫屈梁的大振幅振動的共振現象及跳躍現象，本節中考慮三個不同大小的等效力： $p_{eff} = 2.5 \times 10^{-3}$ 、 2.55×10^{-3} 、 $2.6 \times 10^{-3} N/m$ ，本節中分析過程及變數的定義均與 4.5.2 節相同。表九為 C 點位移在不同等效力及頻率的無因次響應，圖五十一為無因次側向位移的頻率響應，由圖五十一及表九中可以發現在 $\omega_b \approx \frac{1}{3}\omega_2$ 時，產生跳躍現象所需的最小等效力 p_{eff} 為 $2.55 \times 10^{-3} N/m$ 。由表九中可發現在產生跳躍現象時側向振動是不對稱的，在產生跳躍現象附近的 ω_b 亦會造成不對稱的側向振動，其振幅有時並不是很大。

圖五十二為 $p_{eff} = 2.6 \times 10^{-3} N/m$ 、 $\omega_b = 14.35 kHz$ C 點的歷時分析，由圖五十二可以看出，當 $\tau > 12$ ，挫屈梁有不對稱的側向振動，圖五十三、五十四分別為 $p_{eff} = 2.6 \times 10^{-3} N/m$ 、 $\omega_b = 14.35 kHz$ 第二十一個及第二十六個外力周期之側向位移分佈圖，從圖五十三、五十四可以看到看到挫屈梁的側向振動確實是不對稱的振動，但不是很接近反對稱的振動。

4.5.5 阻尼對於跳躍現象的影響

從 4.5.2 及 4.5.3 中可得知在 ω_b 接近 $\frac{1}{2}\omega_2$ 、等效力 p_{eff} 為 $1.8 \times 10^{-3} N/m$ 時，會有跳躍現象產生，而在 ω_b 接近 ω_2 、等效力 p_{eff} 為 $7.5 \times 10^{-4} N/m$ 亦會有跳躍現象產生，本節將探討阻尼對上述兩種條件的影響，本節中考慮阻尼係數 $a_1 = 50 \text{ sec}^{-1}$ ，分析過程及變數的定義均與 4.5.2 節相同。表十為等效力 $p_{eff} = 7.5 \times 10^{-4} N/m$ 時 C 點位移在有阻尼與無阻尼情況下的頻率無因次響應，圖五十五為無因次側向位移的頻率響應，從圖五十五及表十中可以發現當等效力 $p_{eff} = 7.5 \times 10^{-4} N/m$ 、 $\omega_b = 41.1 kHz$ ，在無阻尼情況下會有跳躍現象產生，而有阻尼的情況則不會產生跳躍現象。圖五十六為 $p_{eff} = 7.5 \times 10^{-4} N/m$ $\omega_b = 39.6 kHz$ 有阻尼及無阻尼情況下的歷時分析比較，從圖五十六中可以看到在加入阻尼後確實不會產生跳躍現象。圖五十七為 $p_{eff} = 7.5 \times 10^{-4} N/m$ $\omega_b = 41.6 kHz$ 有阻尼及無阻尼的歷時分析比較，由圖五十七中可發現在加入阻尼後， C 點的側向最大位移反而變的比較大，

代表在非線性振動中，無阻尼情況下的最大振幅未必比有阻尼情況下大。

圖五十八為 $p_{eff} = 8.593 \times 10^{-4} N/m$ ， $\omega_b = 39.6 kHz$ C 點的歷時分析，從圖五十八中可以發現有跳躍現象產生，代表即使在加入阻尼後，只要等效力的大小足夠大，一樣會產生跳躍現象。

圖五十九及表十一為等效外力 $p_{eff} = 1.8 \times 10^{-3} N/m$ 時 C 點位移在有阻尼與無阻尼情況下的頻率無因次響應，從圖五十九可以發現當等效力 $p_{eff} = 1.8 \times 10^{-3} N/m$ 、 $\omega_b = 21.2 kHz$ ，在無阻尼情況下會有跳躍現象產生，而有阻尼的情況則不會。圖六十為 $p_{eff} = 2.343 \times 10^{-3} N/m$ ， $\omega_b = 21.2 kHz$ 時 C 點的歷時分析。



4.5.6 跳躍現象臨界點

本節將探討不同頻率下產生跳躍現象所需的最小等效外力，並與文獻[5]做比較。本節中每一個案的分析時間原則上為 25 個外力周期，但若分析過程中發現 C 點的最大側向位移 $|v_c|_{\max}$ 大於 $100h$ ，則將分析時間增加到 30 個外力周期。分析過程中，若 C 點的最大側向位移 $|v_c|_{\max}$ 大於 $202h$ ，則判定結構已產生跳躍現象並停止該分析。

本節尋找產生跳躍現象所需最小等效力的流程如下：

1. 先給予一個初始的等效外力 p_{eff}^0 ，進行動態分析。

2. 判斷 $p_{eff} = p_{eff}^0$ 時是反產生跳躍現象，若 p_{eff}^0 會產生跳躍現象，則 $p_{eff}^R = p_{eff}^0$ ，若 p_{eff}^0 不會產生跳躍現象，則 $p_{eff}^L = p_{eff}^0$ ，執行第三步。

3. 判斷是否滿足下列判別式

$$\frac{p_{eff}^R - p_{eff}^L}{p_{eff}^R + p_{eff}^L} < 5\%$$

若不滿足上式，則 $p_{eff}^0 = (p_{eff}^R + p_{eff}^L)/2$ ，回到第一步，若滿足上式，則判定 p_{eff}^R 為產生跳躍現象所需的最小等效力。圖六十一為本文分析的結果並與文獻[5]比較，從圖中可以看出本文分析的結果在趨勢上與文獻[5]相同，但等效力的大小遠比文獻[5]小，從 4.4 節中可以得知如圖三(d)所示之梁受到均佈力負荷時，第一個分歧點 λ_{cr}^{b1} 為 $4.887 \times 10^{-3} N/m$ ，及當 $\lambda > \lambda_{cr}^{b1}$ 則會產生跳躍現象，故產生的跳躍現象所需的最小等效外力應該皆小於 λ_{cr}^{b1} ，可以說明本文分析的結果為合理的，同時代表文獻[5]僅用兩個模態來分析具大挫屈程度之挫屈梁的動態行為是不夠準確的。

4.6 挫屈梁受不對稱側向分佈力之靜態行為

本節中考慮如圖三(b)所示之挫屈梁受到一如圖六十二所示之非對稱分佈力作用，該負荷可視為一個大小為 $(1+0.5m)\lambda$ 的對稱均佈力和一個大小為 $0.5m\lambda$ 的反對稱均佈力的組合。圖六十三、六十四及六十五分別為 $m=0.5\%$ 時，其主要平衡路徑的負荷-位移 u_c 圖、負荷-位移 v_c 圖、負荷-位移 θ_c 圖，

圖中標示 L 的點為該曲線的極限點。由圖中可以發現主要平衡路徑上並不含有分歧點，而極限點的座標值 $\bar{\lambda}_{cr}^L = 72.098$ 、 $\bar{v}_{cr}^L = 12.265$ ，其中 $\bar{\lambda}_{cr}^L$ 與 \bar{v}_{cr}^L 的定義與 4.4 節相同，該點的座標值相當接近 4.4 節中挫屈梁受對稱側向均佈力時，主要平衡路徑上第一個分歧點的座標值，因 m 僅為 0.5%，所以這應是合理的。圖六十六為對應於圖六十三—六十五中不同點的無因次側向位移分佈圖。

4.7 挫屈梁受不對稱側向分佈力之動態行為

本節中考慮一如圖六十七所示挫屈梁，受到一非對稱分佈力，該分佈力和圖六十二之靜態負荷的分佈相同，本節將探討對稱均佈力中含少許反對稱均佈力時，對挫屈梁之動態行為的影響。本節將探討主共振現象，再探討挫屈梁的跳躍現象，本節所使用的方法與 4.5 節中相同。

4.7.1 小振幅振動的主共振現象

由 4.5 節與 4.6 節中可以得知，在 $\lambda = 1 \times 10^{-4} N/m$ 時，挫屈梁的振動應該是小振幅振動且接近線性振動行為，所以本例題考慮 $m = 0.5\%$ 、 $\lambda = 1 \times 10^{-4} N/m$ 的動態分析，分析過程與 4.5.1 節相同。圖六十八、六十九、七十分別為軸向位移的頻率響應圖、側向位移的頻率響應圖及轉角的頻率響應圖，從圖中可以看到在外力頻率 $\omega_b \approx 25.7 \text{ kHz}$ 、 $\omega_b \approx 43.6 \text{ kHz}$ 時會有

主共振現象且振幅不大，由表二可以發現會發生主共振現象的頻率相當接近本文得到的第一個線性自然振動頻率及第二個線性自然振動頻率，此結果為合理的。從圖中也可以發現，在小振幅振動時，對稱的外力($m=0$)無法激起反對稱的模態。

4.7.2 大振幅振動的主共振現象及跳躍現象($\omega_b \approx \omega_1$)

本節中將探討 ω_b 接近 ω_1 時挫屈梁的大振幅振動的共振現象與跳躍現象，本節中考慮 $m=0.5\%$ ， $\lambda=3 \times 10^{-3}$ 、 3.3×10^{-3} 、 3.4×10^{-3} 、 $3.5 \times 10^{-3} N/m$ 的動態分析，分析過程與4.5.2節相同。圖七十一、七十二、七十三分別為 $\lambda=3 \times 10^{-3} N/m$ 的軸向位移的頻率響應圖、側向位移的頻率響應圖及轉角的頻率響應圖，從圖中可以看到在 $m=0.5\%$ 、外力頻率 $\omega_b \approx 28 \text{ kHz}$ 時會有大振幅的主共振現象，由圖中也可以看出，對稱外力($m=0$)無法激起該共振現象。圖七十四為 $\lambda=3 \times 10^{-3} N/m$ 、 $\omega_b = 28 \text{ kHz}$ ， $m=0$ 與 $m=0.5\%$ 的歷時分析比較，從圖中可以看出 $m=0$ 為對稱振動，而 $m=0.5\%$ 為非對稱的振動。圖七十五、七十六為 $\lambda=3 \times 10^{-3} N/m$ 、 $\omega_b = 28 \text{ kHz}$ 、 $m=0$ 第二十個及第二十五個外力周期之側向位移分布圖，從圖中可以看到挫屈梁的側向振動確實為對稱的振動。圖七十七、七十八為 $\lambda=3 \times 10^{-3} N/m$ 、 $\omega_b = 28 \text{ kHz}$ 、 $m=0.5\%$ 第二十個及第二十五個外力周期之側向位移分布圖，由圖中可以看出挫屈梁的側向振動為接近反對稱的振動。表十二為 $m=0.5\%$ 在不同外

力及頻率的無因次響應，圖七十九為無因次側向位移的頻率響應圖，由表十二及圖七十九可以發現在 $\omega_b \approx \omega_1$ 時，產生跳躍現象所需的最小外力 λ 為 $3.4 \times 10^{-3} N/m$ ，在產生跳躍現象附近的 ω_b 亦會造成不對稱的側向振動，其振幅並不是很大。圖八十為 $\lambda = 3.4 \times 10^{-3} N/m$ 、 $\omega_b = 27.7 kHz$ 、 $m = 0.5\%$ 的歷時分析圖，從圖中可以看到當 $\tau > 10$ ，挫屈梁有不對稱的側向振動，當 $\tau > 22$ 挫屈梁有跳躍現象的產生。圖八十一、八十二為 $\lambda = 3.4 \times 10^{-3} N/m$ 、 $\omega_b = 27.7 kHz$ 、 $m = 0.5\%$ 第二十個及第二十五個外力周期之側向位移分布圖，從圖中可以看到挫屈梁的振動為接近反對稱的振動。

4.7.3 大振幅振動的超諧共振現象

本節中將探討 ω_b 接近 $\frac{1}{2}\omega_1$ 與 $\frac{1}{3}\omega_1$ 時，挫屈梁的大振幅振動的共振現象，本節中考慮 $\lambda = 3 \times 10^{-3} N/m$ ，分析過程及變數的定義均與4.5.2節相同。圖八十三、八十四、八十五為 ω_b 接近 $\frac{1}{2}\omega_1$ 時，挫屈梁中點的軸向位移頻率響應圖、側向位移頻率響應圖及轉角位移頻率響應圖，從圖中可以看出在 $\omega_b \approx \frac{1}{2}\omega_1$ 時，有超諧共振出現。圖八十六、八十七、八十八為 ω_b 接近 $\frac{1}{3}\omega_1$ 時，挫屈梁中點的軸向位移頻率響應圖、側向位移頻率響應圖及轉角位移頻率響應圖，從圖中亦可看出有超諧共振的現象產生。

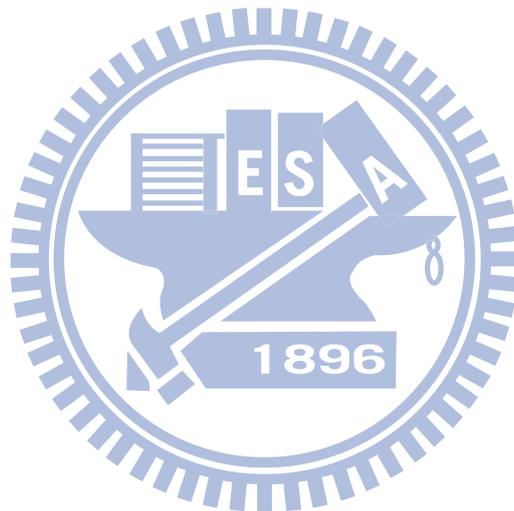
第五章 結論與展望

本研究利用共旋轉有限元素法，探討大挫屈程度之挫屈梁兩端具旋轉角受到靜態負荷時的非線性行為，另外探討了挫屈梁受到一周期性基座振動時的動態行為，本研究在梁元素當前的變形位置建立元素座標，並在元素座標上推導梁元素的節點內力及剛度矩陣。本研究採用 Newton-Raphson 法的增量迭代法求解非線性靜平衡方程式，另採用 Newmark 直接積分與 Newton-Raphson 法的增量迭代法求解動平衡方程式。

本研究在第四章以數值例題探討了挫屈梁的兩端點具有不同旋轉角下、挫屈梁受到不同的靜態負荷時的非線性靜態行為，另探討了挫屈梁受基座振動，在不同的頻率下，受到不同的等效外力時的共振現象及跳躍現象，從 4.1 節、4.2 節可以看出本研究中所用方法及數值程序的正確性。由 4.3 節中可知對挫屈梁兩端點施加旋轉角時，挫屈梁的自然振動頻率會隨著的增加而增加。由 4.4 節中可以發現兩端點具旋轉角之挫屈梁，受到一集中載重時，在主要平衡路徑上之極限點的力負荷參數會隨著旋轉角的增加而大幅減少，但第一個分歧點的力負荷參數會隨著旋轉角的增加而慢慢增加再減少，而受到均佈載重時，在主要平衡路徑上之分歧點的力負荷參數與極限點的力負荷參數會隨著旋轉角的增加而大幅增加。

從 4.5 節中可以看到挫屈梁受到基座振動時的主共振現象、超諧共振現象及跳躍現象，超頻共振現象會發生在基座振動頻率接近系統自然頻率二

分之一及三分之一時，而任意頻率均會產生跳躍現象，只要等效外力足夠大，4.5 節中亦找出了在任意頻率下產生跳躍所需的最小等效外力，與文獻的結果比較可得知假設模態法僅使用前兩個挫屈模態來模擬大挫屈程度之挫屈梁的動態行為是不夠準確的，本文的結果應可以用來驗證假設模態法動態分析結果的準確性。



參考文獻

- [1] Abou-Rayyan, A.M., Nayfeh, A. H. and Mook, D.T., 1992, "Nonlinear Response of a Parametrically Excited Buckled Beam," *Nonlinear Dynamics*, Vol. 4, pp. 499-525
- [2] Afaneh, A. A. and Ibrahim, R. A., 1992, "Nonlinear Response of an Initially Buckled Beam with 1:1 Internal Resonance to Sinusoidal Excitation," *Nonlinear Dynamics*, Vol. 4, pp. 547-571
- [3] Bhashyam ,G. R. and Prathap, G., 1980, "Galerkin Finite Element Method for Non-Linear Beam Vibrations," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 72, pp.191-203
- [4] Briseghella, L., Majorana, C.E. and Pellegrino, C., 1998, "Dynamic Stability of Elastic Structures: a Finite Element Approach," *Computers and Structures*, Vol. 69, pp.11-25
- [5] Buchaillot, L., Millet, O. and Quevy, E., 2007, "Post-Buckling Dynamic Behavior of Self-Assembled 3D Microstructures," *Microsystem Technologies*, Vol. 14, pp. 69-78
- [6] Casals-Terre, J., Fargas-Marques, A. and Shkel, A. M., 2008, "Snap-Action Bistable Micromechanisms Actuated by Nonlinear Resonance," *Journal of Microelectrimechanical Systems*, Vol. 17, pp. 1082-1093
- [7] Chang, T. P. and Liu, Y. N., 1996, "Dynamic Finite Element Analysis of a Nonlinear Beam Subjected to a Moveing Load," *International Journal of Solids Structures*, Vol. 33, pp. 1673-1688
- [8] Chen, S.H., Cheung, Y.K. and Xing, H.X., 2001, "Nonlinear Vibration of Plane Structures by Finite Element and Incremental Harmonic Blance Method," *Nonlinear Dynamics*, Vol.26, pp.87-104
- [9] Cheung, Y. K., Chen, S. H. and Lau, S. L., 1990, "Application of the Incremental Harmonic Balance Method to Cubic Non-linearity systems", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 140, pp.273-286
- [10] Crisfield M.A., 1981, "A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure

That Handles Snap Through,” *Computers and Structures*, Vol. 13, pp. 55-62.

[11] Dawe, D.J., 1984, “Matrix and Finite Element Displacement Analysis of Structures” Oxford University, N.Y.

[12] El-Bassiouny, A. F., 2006, “Nonlinear Vibration of a Post-Buckled Beam Subjected to External and Parametric Excitations,” *Physica Scripta*, Vol. 74, pp.39-54

[13] Emam, S. A., 2002, A Theoretical and Experimental Study of Nonlinear Dynamics of Buckled Beams, Ph.D. Dissertation, Department of Engineering Mechanics, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA.

[14] Gupta, R.K., Babu, G. J., Ranga Janardhan, G. and Venkateswara, G., 2009, “Relatively Simple Finite Element Formulation for the Large Amplitude Free Vibration of Uniform Beam,” *Finite Element in Analysis Design*, Vol. 45, pp.624-631

[15] Hsiao, K. M., and JANG, J. Y., 1989, “Nonlinear Dynamic Analysis of Elastic Frames” *Computers and Structures*, Vol. 33, No. 4, pp. 1057–1063.

[16] Hibbeler R.C., 2005, “Mechanics Of Materials”, 6th Edition, Upper Saddle River, N.J., Pearson Prentice Hall

[17] Ji, J. C. and Hansen, C. H., 2000, “Non-linear Response of a Post-buckled Beam Subjected to a Harmonic Axial Excitation,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 237, pp 303–318

[18] Koivurova, H., 2009, “The Numerical Study of the Nonlinear Dynamics of a Light Axially Moving String,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol.320, pp.373-385

[19] Kreider, W. and Nayfeh, A. H., 1998, “Experimental Investigation of Single-Mode Responses in a Fixed-Fixed Buckled Beam,” *Nonlinear Dynamics*, Vol. 15, pp.155-177

[20] Lacarbonara, W., 1997, A Theoretical and Experimental Investigation of Nonlinear Vibrations of Buckled Beams, Master Thesis, Department of Engineering Mechanics, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA.

- [21] Lee, Y. Y., Poon, W. Y. and Ng, C. F., 2006, “Anti-Symmetric Mode Vibration of a Curved Beam Subject to Autoparametric excitation,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 209, pp. 48–64
- [22] Lestari, W. and Hanagud, S., 2001, “Nonlinear Vibration of Buckled Beam: Some Exact Solutions,” *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38, pp.4741-4757
- [23] Narayanan, S. and Sekar P., 1998, “A Frequency Domain Based Numeric-Analytical Method for Non-Linear Dynamical Systems”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 211, pp409-424
- [24] Park S., Hah D., 2008, “Pre-shaped Buckled-beam Actuators: Theory and Experiments” *Sensors and Actuators: A.Physical*, Vol. 148, No. 1, pp. 186–192.
- [25] Poon, W. Y., Ng, C. F. and Lee, Y. Y., 2002, “Dynamic Stability of a Curved Beam Under Sinusoidal Loading,” *Proceedings Institution of Mechanical Engineers*, Vol. 216, pp. 209-217
- [26] Qiu, J., Lang, J. H. and Slocum, A. H., 2004, “A Curved-beam Bistable Mechanism” *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 13, No. 2, pp. 137– 146
- [27] Samuel, B. A., Desai, A. V. and Haque, M. A., 2006, “Design and Modeling of a MEMS Pico-Newton Loading/Sensing Device” *Sensors and Actuators: A.Physical*, Vol. 127, No. 1, pp. 155-162.
- [28] Tsai M. H. and Hsiao K. M., 2009, “Nonlinear Analysis of a Buckled Beam Under Lateral Load” In: Proceedings of international conference on

computational design in engineering, Seoul, Korea, November 3-6

[29] Tseng, W. Y. and Dugundji, J., 1971, “Nonlinear Vibrations of a Buckled Beam Under Harmonic Excitation,” *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 38, pp. 467-476.

[30] Yamaki, N. and Mori, A., 1979, “Non-Linear Vibrations of a Clamped Beam with Initial Deflection and Initial Axial Displacement, Part 1: Theory,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 71, pp.333-346

[31] Yamaki, N. and Mori, A., 1979, “Non-Linear Vibrations of a Clamped Beam with Initial Deflection and Initial Axial Displacement, Part 2: Experiment,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 71, pp.347-360m

[32] Zhao, J., Jia, J., He, X., and Wang, H., 2008, “Post-buckling and Snap-Through Behavior of Inclined Slender Beams,” *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 75, 041020 (7 pages)

[33] 朱因遠, 1992, 非線性振動和運動穩定性, 中國, 陝西, 西安交通大學

[34] 周裕淳, 2009, “以有限元素法分析旋轉傾斜尤拉梁的穩態便型與自由振動”, 國立交通大學機械工程研究所碩士論文, 臺灣, 新竹

[35] 楊榮澤, 1995, ”梁元素之一致性共旋轉有限元素推導法及其應用” 交通大學機械工程研究所博士班論文, 臺灣, 新竹

[36] 賴文斌, 1994, “三維梁非線性挫屈及挫屈後行為研究”, 交通大學機械工程學系碩士論文, 臺灣, 新竹.



表一 具端點轉角之挫屈梁($\delta_0 = 97\mu m$)的端點反力及 C 點側向位移

θ_B (rad)	v_c/h	$(\delta_0 + v_c)/h$	F_B/EA (10^{-6})	$M_B L/EI$
0	0.000E+0	2.021E+2	2.611E+0	3.630E+0
0.01	5.747E-1	2.027E+2	2.582E+0	3.599E+0
0.02	1.126E+0	2.032E+2	2.552E+0	3.567E+0
0.1	4.729E+0	2.068E+2	2.316E+0	3.267E+0
0.2	7.314E+0	2.094E+2	2.013E+0	2.791E+0
0.3	7.894E+0	2.100E+2	1.693E+0	2.202E+0
0.4	6.568E+0	2.087E+2	1.348E+0	1.501E+0
0.5	3.422E+0	2.055E+2	9.657E-1	6.823E-1
0.6	-1.457E+0	2.006E+2	5.320E-1	-2.639E-1
0.7	-7.954E+0	1.941E+2	2.810E-2	-1.351E+0
0.8	-1.591E+1	1.862E+2	-5.708E-1	-2.599E+0

表二 具端點轉角之挫屈梁($\delta_0 = 97\mu m$)的自然頻率

θ_B (rad)	ω_1 (Hz)	ω_2 (Hz)	ω_3 (Hz)	ω_4 (Hz)	ω_5 (Hz)
0	2.580E+4	4.426E+4	9.258E+4	1.413E+5	2.192E+5
0[5] theoretical	2.95E+4	4.420E+4	-	-	-
0[5] experimental	2.97E+4	42.81E+4	-	-	-
0.01	2.590E+4	4.478E+4	9.312E+4	1.417E+5	2.196E+5
0.02	2.600E+4	4.531E+4	9.365E+4	1.421E+5	2.201E+5
0.1	2.676E+4	4.960E+4	9.783E+4	1.459E+5	2.236E+5
0.2	2.767E+4	5.495E+4	1.026E+5	1.516E+5	2.281E+5
0.3	2.858E+4	5.986E+4	1.067E+5	1.583E+5	2.325E+5
0.4	2.955E+4	6.369E+4	1.098E+5	1.649E+5	2.363E+5
0.5	3.062E+4	6.573E+4	1.120E+5	1.696E+5	2.391E+5
0.6	3.184E+4	6.554E+4	1.133E+5	1.705E+5	2.407E+5
0.7	3.326E+4	6.321E+4	1.139E+5	1.677E+5	2.410E+5
0.8	3.495E+4	5.938E+4	1.140E+5	1.630E+5	2.405E+5

表三 具端點轉角之挫屈梁受側向中點集中負荷的分歧點與極限點

θ_B (rad)	\bar{v}_{cr}^{b1}	\bar{P}_{cr}^{b1}	\bar{v}_{cr}^L	\bar{P}_{cr}^L
0	4.74991	39.0142	86.2404	160.998
0.01	4.70528	39.4768	22.4229	99.5062
0.1	5.08973	43.3201	30.8163	83.6115
0.3	13.1111	49.3451	44.225	64.5608
0.5	39.0258	50.0028	55.5521	51.6185
0.7	128.126	35.0609	67.3303	42.7334

表四 具端點轉角之挫屈梁受側向均佈負荷的分歧點與極限點

θ_B (rad)	\bar{v}_{cr}^{b1}	$\bar{\lambda}_{cr}^{b1}$	\bar{v}_{cr}^L	$\bar{\lambda}_{cr}^L$
0	11.4826	73.5245	53.3121	104.675
0.01	10.9806	74.5217	52.7869	106.447
0.1	6.4857	83.1051	47.2413	122.349
0.3	-2.21106	99.5566	30.1503	157.664
0.5	-5.74895	111.653	7.46067	194.066
0.6	-3.42148	115.445	-5.65515	213.88
0.7	4.07861	116.915	19.6855	152.024
0.8	21.8028	114.174	35.4638	118.981

表五 主共振現象及跳躍現象(一)

ω_b (kHz)	$p_{eff} = 6.0 \times 10^{-4} N/m$			$p_{eff} = 7.0 \times 10^{-4} N/m$		
	U	V	Θ	U	V	Θ
3.31E+1	3.35E-4	2.04E+0	3.27E-5	3.37E-4	2.52E+0	2.80E-5
3.36E+1	2.51E-4	2.20E+0	1.91E-5	2.46E-4	2.70E+0	1.53E-5
3.41E+1	1.79E-4	2.36E+0	1.20E-5	2.37E-4	2.90E+0	1.71E-5
3.46E+1	2.58E-4	2.52E+0	1.81E-5	2.52E-4	3.10E+0	8.18E-6
3.51E+1	2.41E-4	2.79E+0	2.67E-5	4.19E-4	3.55E+0	3.76E-5
3.56E+1	1.65E-4	2.84E+0	9.19E-6	2.37E-4	3.52E+0	1.10E-5
3.61E+1	1.69E-4	3.13E+0	4.06E-6	2.00E-4	3.93E+0	1.04E-5
3.66E+1	1.46E-4	3.39E+0	1.44E-5	2.27E-4	4.31E+0	9.99E-6
3.71E+1	2.13E-4	3.82E+0	7.52E-6	2.43E-4	4.79E+0	7.13E-6
3.76E+1	1.43E-4	4.22E+0	4.90E-6	2.59E-4	5.34E+0	7.83E-6
3.81E+1	1.91E-4	4.82E+0	2.16E-5	3.23E-4	6.07E+0	3.66E-5
3.86E+1	2.68E-4	5.52E+0	3.54E-5	3.03E-4	7.17E+0	2.41E-5
3.91E+1	5.15E-4	6.54E+0	6.88E-5	3.11E-4	8.90E+0	2.70E-5
3.96E+1	6.09E-4	8.23E+0	2.87E-5	7.14E-1	1.28E+1	2.47E-2
4.01E+1	4.12E-2	1.29E+1	1.79E-3	2.54E+1	1.29E+2	8.12E-1
4.06E+1	2.30E+1	1.10E+2	6.96E-1	1.16E+1	6.00E+1	4.61E-1
4.11E+1	3.01E+0	4.79E+1	1.37E-1	2.90E+1	4.07E+2	8.82E-1
4.16E+1	1.82E+1	6.01E+1	5.66E-1	9.00E+0	5.22E+1	3.48E-1
4.21E+1	3.33E-1	3.78E+1	1.63E-2	2.25E+0	4.59E+1	8.16E-2
4.26E+1	2.12E+0	3.03E+1	8.79E-2	1.20E+1	3.77E+1	2.67E-1
4.31E+1	5.82E+0	2.67E+1	1.48E-1	1.50E+1	3.67E+1	3.29E-1
4.36E+1	3.92E+0	2.53E+1	8.49E-2	8.51E+0	2.78E+1	2.17E-1
4.41E+1	6.44E+0	2.32E+1	1.49E-1	4.94E+0	2.46E+1	1.37E-1
4.46E+1	1.90E+0	1.88E+1	4.59E-2	1.40E+0	2.05E+1	4.14E-2
4.51E+1	3.52E-1	1.67E+1	9.35E-3	7.73E-1	1.86E+1	2.55E-2
4.56E+1	1.70E-1	1.48E+1	5.20E-3	3.88E-1	1.74E+1	1.52E-2
4.61E+1	1.09E-1	1.26E+1	4.24E-3	4.71E-2	1.51E+1	1.71E-3
4.66E+1	5.83E-3	1.32E+1	2.29E-4	2.21E-2	1.45E+1	7.18E-4
4.71E+1	2.88E-3	1.06E+1	8.05E-5	2.55E-1	2.21E+1	6.65E-3
4.76E+1	6.48E-3	1.46E+1	2.16E-4	1.28E-1	1.87E+1	4.50E-3
4.81E+1	2.24E-3	1.27E+1	7.59E-5	1.57E-2	1.52E+1	5.40E-4
4.86E+1	1.01E-3	1.04E+1	2.42E-5	4.20E-3	1.23E+1	1.26E-4

表六 主共振現象及跳躍現象(二)

ω_b (kHz)	$p_{eff} = 7.5 \times 10^{-4} N/m$			$p_{eff} = 1.0 \times 10^{-3} N/m$		
	U	V	Θ	U	V	Θ
3.31E+1	3.97E-4	2.77E+0	4.26E-5	8.03E-4	4.12E+0	9.93E-5
3.36E+1	2.65E-4	2.97E+0	2.37E-5	5.85E-4	4.42E+0	3.59E-5
3.41E+1	2.45E-4	3.18E+0	2.25E-5	9.59E-4	4.79E+0	7.55E-5
3.46E+1	3.10E-4	3.43E+0	3.62E-5	5.31E-4	5.35E+0	1.75E-5
3.51E+1	3.58E-4	3.95E+0	3.81E-5	4.89E-4	6.29E+0	2.75E-5
3.56E+1	2.51E-4	3.94E+0	6.44E-6	4.42E-4	6.17E+0	2.04E-5
3.61E+1	2.52E-4	4.30E+0	1.12E-5	4.51E-4	6.71E+0	1.90E-5
3.66E+1	2.49E-4	4.79E+0	1.01E-5	5.89E-4	7.48E+0	2.06E-5
3.71E+1	2.85E-4	5.31E+0	1.49E-5	7.03E-4	8.53E+0	2.23E-5
3.76E+1	3.19E-4	6.01E+0	1.46E-5	1.34E-2	1.01E+1	7.23E-4
3.81E+1	2.82E-4	6.94E+0	1.37E-5	6.80E-1	1.27E+1	2.86E-2
3.86E+1	4.26E-4	8.19E+0	5.10E-5	2.21E+1	4.09E+2	7.42E-1
3.91E+1	4.45E-3	1.05E+1	2.25E-4	3.31E+1	1.52E+2	8.43E-1
3.96E+1	3.00E+1	4.09E+2	8.22E-1	2.88E+1	4.11E+2	8.67E-1
4.01E+1	2.35E+1	1.05E+2	7.88E-1	3.88E+1	1.40E+2	8.90E-1
4.06E+1	1.71E+1	6.52E+1	6.39E-1	2.86E+1	1.16E+2	7.52E-1
4.11E+1	1.33E+1	5.69E+1	4.67E-1	2.37E+1	8.50E+1	6.52E-1
4.16E+1	1.68E+1	4.86E+1	3.85E-1	3.25E+1	1.26E+2	7.93E-1
4.21E+1	9.21E-1	4.72E+1	4.52E-2	2.98E+1	1.46E+2	8.50E-1
4.26E+1	5.88E+0	3.91E+1	1.44E-1	7.00E+0	5.24E+1	2.74E-1
4.31E+1	9.61E+0	3.38E+1	3.22E-1	1.43E+1	6.66E+1	6.07E-1
4.36E+1	8.13E+0	2.99E+1	2.74E-1	1.76E+1	4.99E+1	4.22E-1
4.41E+1	7.73E+0	2.39E+1	2.10E-1	1.88E+1	5.72E+1	5.51E-1
4.46E+1	4.79E+0	2.26E+1	1.81E-1	2.06E+1	8.05E+1	7.07E-1
4.51E+1	6.51E-1	1.97E+1	2.42E-2	1.30E+1	3.82E+1	4.26E-1
4.56E+1	7.79E-1	1.77E+1	2.66E-2	3.46E+0	2.90E+1	1.20E-1
4.61E+1	7.91E-4	1.66E+1	2.12E-5	1.82E+1	6.33E+1	5.65E-1
4.66E+1	5.17E-2	1.44E+1	1.77E-3	1.80E+1	6.70E+1	5.52E-1
4.71E+1	4.65E+0	2.55E+1	1.45E-1	3.87E+0	2.57E+1	1.01E-1
4.76E+1	1.72E-1	1.97E+1	5.01E-3	1.30E+0	2.07E+1	4.26E-2
4.81E+1	1.86E-2	1.59E+1	6.90E-4	1.27E+0	1.94E+1	3.36E-2
4.86E+1	9.39E-3	1.31E+1	2.72E-4	2.27E-1	1.55E+1	7.95E-3

表七 超諧共振現象及跳躍現象 $\omega_b \approx \frac{1}{2}\omega_2$ (一)

ω_b (kHz)	$p_{eff} = 1.5 \times 10^{-3} N/m$			$p_{eff} = 1.6 \times 10^{-3} N/m$			$p_{eff} = 1.7 \times 10^{-3} N/m$		
	U	V	Θ	U	V	Θ	U	V	Θ
2.03E+1	7.66E-5	4.86E+0	1.28E-5	1.59E-4	5.54E+0	2.03E-5	1.44E-4	6.34E+0	1.17E-5
2.04E+1	1.45E-4	5.00E+0	1.37E-5	1.42E-4	5.83E+0	1.38E-5	1.90E-4	6.70E+0	1.88E-5
2.05E+1	1.51E-4	5.25E+0	1.88E-5	1.49E-4	6.03E+0	1.29E-5	1.15E-4	7.05E+0	1.03E-5
2.06E+1	1.15E-4	5.57E+0	1.23E-5	1.27E-4	6.43E+0	1.63E-5	2.17E-4	7.53E+0	1.59E-5
2.07E+1	7.79E-5	5.89E+0	9.93E-6	1.54E-4	6.88E+0	1.63E-5	3.12E-4	8.03E+0	2.98E-5
2.08E+1	1.15E-4	6.31E+0	1.16E-5	2.26E-4	7.41E+0	1.41E-5	7.18E-4	8.83E+0	3.89E-5
2.09E+1	2.52E-4	6.77E+0	2.11E-5	6.94E-4	8.16E+0	3.51E-5	5.71E-3	1.00E+1	2.72E-4
2.10E+1	3.60E-4	7.62E+0	2.48E-5	7.62E-2	9.39E+0	3.59E-3	2.30E+0	1.25E+1	1.06E-1
2.11E+1	1.95E-2	8.79E+0	7.39E-4	9.49E+0	2.90E+1	3.54E-1	1.72E+1	5.91E+1	4.92E-1
2.12E+1	9.10E+0	3.37E+1	3.55E-1	1.24E+1	3.62E+1	4.17E-1	1.87E+1	6.19E+1	5.22E-1
2.13E+1	1.28E+1	4.04E+1	4.38E-1	1.71E+1	7.27E+1	5.73E-1	1.82E+1	7.71E+1	6.01E-1
2.14E+1	1.93E+1	7.37E+1	5.87E-1	1.42E+1	6.84E+1	5.41E-1	1.59E+1	4.57E+1	4.82E-1
2.15E+1	1.40E+1	5.35E+1	4.61E-1	1.46E+1	4.52E+1	4.55E-1	1.75E+1	6.91E+1	5.60E-1
2.16E+1	1.31E+1	2.91E+1	3.81E-1	1.44E+1	5.22E+1	4.92E-1	1.20E+1	5.00E+1	4.31E-1
2.17E+1	1.22E+1	3.96E+1	4.01E-1	1.07E+1	3.98E+1	4.06E-1	1.44E+1	4.24E+1	4.28E-1
2.18E+1	9.94E+0	3.18E+1	3.63E-1	9.94E+0	3.25E+1	3.69E-1	1.02E+1	2.87E+1	3.56E-1
2.19E+1	6.92E+0	2.05E+1	2.62E-1	7.20E+0	2.13E+1	2.70E-1	7.21E+0	2.09E+1	2.68E-1
2.20E+1	3.95E+0	1.25E+1	1.73E-1	5.48E+0	1.64E+1	2.24E-1	6.35E+0	1.84E+1	2.47E-1
2.21E+1	6.64E-1	1.03E+1	2.80E-2	6.02E+0	1.68E+1	2.38E-1	6.33E+0	1.79E+1	2.46E-1
2.22E+1	1.13E-1	9.02E+0	4.99E-3	4.91E+0	1.30E+1	1.89E-1	6.80E+0	1.69E+1	2.48E-1
2.23E+1	4.26E-2	7.82E+0	2.20E-3	2.35E+0	9.04E+0	7.93E-2	5.79E+0	1.65E+1	2.28E-1

表八 超頻共振現象及跳躍現象 $\omega_b \approx \frac{1}{2}\omega_2$ (二)

ω_b (kHz)	$p_{eff} = 1.8 \times 10^{-3} N/m$			$p_{eff} = 1.9 \times 10^{-3} N/m$			$p_{eff} = 2.0 \times 10^{-3} N/m$		
	U	V	Θ	U	V	Θ	U	V	Θ
2.03E+1	1.50E-4	7.27E+0	1.43E-5	4.63E-4	8.30E+0	2.41E-5	2.04E-2	9.53E+0	8.44E-4
2.04E+1	2.01E-4	7.66E+0	1.43E-5	1.36E-3	8.77E+0	7.81E-5	6.04E-2	1.02E+1	2.36E-3
2.05E+1	2.82E-4	8.04E+0	1.40E-5	9.44E-3	9.37E+0	4.25E-4	1.05E+0	1.12E+1	4.68E-2
2.06E+1	6.15E-4	8.73E+0	2.99E-5	2.60E-1	1.02E+1	1.13E-2	4.79E+0	1.73E+1	1.74E-1
2.07E+1	1.20E-2	9.57E+0	4.69E-4	1.69E+0	1.15E+1	6.86E-2	1.30E+1	4.58E+1	4.39E-1
2.08E+1	3.53E-1	1.07E+1	1.57E-2	9.14E+0	3.34E+1	3.49E-1	1.34E+1	4.71E+1	4.39E-1
2.09E+1	8.87E+0	3.60E+1	3.56E-1	1.97E+1	1.03E+2	6.30E-1	1.78E+1	5.54E+1	4.75E-1
2.10E+1	1.58E+1	5.19E+1	4.72E-1	1.73E+1	8.99E+1	6.21E-1	2.26E+1	8.75E+1	6.00E-1
2.11E+1	1.59E+1	4.54E+1	4.77E-1	1.71E+1	5.32E+1	5.08E-1	2.44E+1	8.39E+1	6.24E-1
2.12E+1	4.33E+1	4.09E+2	1.04E+0	2.98E+1	4.06E+2	8.61E-1	2.79E+1	3.94E+2	7.87E-1
2.13E+1	1.90E+1	1.07E+2	6.98E-1	1.65E+1	8.35E+1	5.85E-1	2.07E+1	7.16E+1	5.71E-1
2.14E+1	1.79E+1	6.09E+1	5.44E-1	1.82E+1	7.71E+1	5.50E-1	2.15E+1	1.01E+2	6.44E-1
2.15E+1	1.66E+1	6.21E+1	4.82E-1	1.79E+1	6.56E+1	5.54E-1	1.42E+1	5.28E+1	4.89E-1
2.16E+1	1.32E+1	5.52E+1	4.79E-1	1.47E+1	6.05E+1	5.10E-1	1.45E+1	5.75E+1	4.89E-1
2.17E+1	1.22E+1	3.24E+1	3.77E-1	1.11E+1	4.33E+1	4.36E-1	1.20E+1	3.49E+1	3.84E-1
2.18E+1	1.14E+1	4.05E+1	3.93E-1	1.01E+1	3.44E+1	3.83E-1	1.12E+1	3.62E+1	3.79E-1
2.19E+1	9.44E+0	2.40E+1	3.17E-1	1.02E+1	3.46E+1	3.83E-1	1.19E+1	4.71E+1	4.36E-1
2.20E+1	7.46E+0	2.20E+1	2.83E-1	9.88E+0	2.81E+1	3.41E-1	1.27E+1	4.20E+1	4.14E-1
2.21E+1	7.00E+0	1.79E+1	2.58E-1	8.05E+0	2.22E+1	2.92E-1	5.33E+0	1.69E+1	2.39E-1
2.22E+1	7.73E+0	2.33E+1	2.99E-1	8.41E+0	2.66E+1	3.27E-1	1.01E+1	2.85E+1	3.40E-1
2.23E+1	6.26E+0	1.81E+1	2.45E-1	6.57E+0	1.80E+1	2.47E-1	6.86E+0	1.99E+1	2.64E-1

表九 超頻共振現象及跳躍現象 $\omega_b \approx \frac{1}{3}\omega_2$ (一)

$p_{eff} = 2.5 \times 10^{-3} N/m$ $p_{eff} = 2.55 \times 10^{-3} N/m$ $p_{eff} = 2.6 \times 10^{-3} N/m$									
ω_b (kHz)	U	V	Θ	U	V	Θ	U	V	Θ
1.4300E+1	8.61E+0	2.34E+1	2.95E-1	1.18E+1	3.72E+1	3.78E-1	1.35E+1	4.43E+1	4.13E-1
1.4325E+1	1.22E+1	2.99E+1	3.49E-1	1.21E+1	3.30E+1	3.95E-1	1.12E+1	3.46E+1	3.69E-1
1.4350E+1	1.25E+1	3.84E+1	4.36E-1	4.10E+1	4.11E+2	1.09E+0	3.40E+1	2.68E+2	8.62E-1
1.4375E+1	1.39E+1	4.86E+1	4.16E-1	1.38E+1	3.87E+1	3.75E-1	1.18E+1	3.17E+1	3.60E-1
1.4400E+1	1.35E+1	4.85E+1	5.05E-1	4.07E+1	4.10E+2	9.05E-1	1.34E+1	3.62E+1	3.93E-1
1.4425E+1	1.06E+1	3.46E+1	3.67E-1	1.11E+1	3.22E+1	3.71E-1	4.09E+1	3.96E+2	9.86E-1
1.4450E+1	1.44E+1	4.84E+1	4.69E-1	1.06E+1	3.81E+1	3.76E-1	1.76E+1	4.53E+1	5.06E-1
1.4475E+1	1.86E+1	5.20E+1	4.95E-1	1.37E+1	3.86E+1	4.44E-1	1.68E+1	4.98E+1	4.93E-1
1.4500E+1	1.27E+1	3.05E+1	3.83E-1	1.89E+1	4.47E+1	4.67E-1	1.42E+1	4.87E+1	4.80E-1
1.4525E+1	1.28E+1	3.64E+1	3.83E-1	1.01E+1	3.72E+1	3.47E-1	1.34E+1	4.06E+1	3.79E-1
1.4550E+1	1.10E+1	3.86E+1	3.97E-1	1.16E+1	3.79E+1	3.44E-1	1.46E+1	4.03E+1	4.21E-1
1.4575E+1	1.10E+1	3.32E+1	3.73E-1	9.94E+0	3.52E+1	3.35E-1	1.11E+1	3.61E+1	3.50E-1
1.4600E+1	1.20E+1	2.73E+1	3.51E-1	1.47E+1	5.11E+1	4.80E-1	1.16E+1	3.36E+1	3.65E-1



表十 阻尼對跳躍現象的影響 $p_{eff} = 7.5 \times 10^{-4} N/m$, $\omega_b \approx \omega_2$

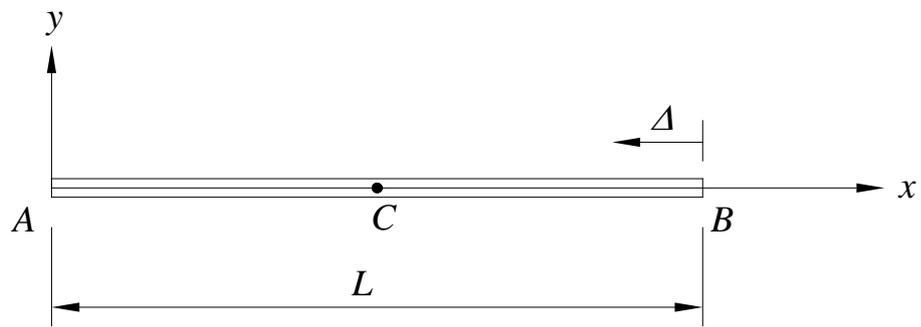
ω_b (kHz)	$a_1 = 50 \text{sec}^{-1}$			$a_1 = 0$		
	\bar{u}_c / h	\bar{v}_c / h	$\bar{\theta}_c / h$	\bar{u}_c / h	\bar{v}_c / h	$\bar{\theta}_c / h$
2.91E+1	4.22E-4	1.86E+0	1.53E-5	4.19E-4	1.86E+0	1.95E-5
2.96E+1	3.67E-4	1.77E+0	1.72E-5	3.62E-4	1.79E+0	1.57E-5
3.01E+1	4.02E-4	2.05E+0	3.20E-5	3.85E-4	2.06E+0	3.21E-5
3.06E+1	3.33E-4	2.15E+0	1.11E-5	3.50E-4	2.16E+0	1.48E-5
3.11E+1	5.63E-4	2.27E+0	4.62E-5	3.10E-4	2.29E+0	2.34E-5
3.16E+1	3.40E-4	2.41E+0	2.66E-5	4.14E-4	2.42E+0	3.63E-5
3.21E+1	3.78E-4	2.73E+0	2.49E-5	3.15E-4	2.76E+0	3.58E-5
3.26E+1	3.12E-4	2.59E+0	2.69E-5	3.05E-4	2.61E+0	2.27E-5
3.31E+1	3.36E-4	2.75E+0	2.78E-5	3.97E-4	2.77E+0	4.26E-5
3.36E+1	4.08E-4	2.95E+0	2.74E-5	2.65E-4	2.97E+0	2.37E-5
3.41E+1	2.59E-4	3.18E+0	2.53E-5	2.45E-4	3.18E+0	2.25E-5
3.46E+1	6.42E-4	3.41E+0	4.74E-5	3.10E-4	3.43E+0	3.62E-5
3.51E+1	4.72E-4	3.92E+0	5.11E-5	3.58E-4	3.95E+0	3.81E-5
3.56E+1	2.74E-4	3.90E+0	8.67E-6	2.51E-4	3.94E+0	6.44E-6
3.61E+1	2.45E-4	4.27E+0	1.49E-5	2.52E-4	4.30E+0	1.12E-5
3.66E+1	2.38E-4	4.76E+0	6.94E-6	2.49E-4	4.79E+0	1.01E-5
3.71E+1	2.49E-4	5.30E+0	1.38E-5	2.85E-4	5.31E+0	1.49E-5
3.76E+1	2.66E-4	5.96E+0	9.35E-6	3.19E-4	6.01E+0	1.46E-5
3.81E+1	2.97E-4	6.86E+0	2.85E-5	2.82E-4	6.94E+0	1.37E-5
3.86E+1	2.97E-4	8.11E+0	4.23E-5	4.26E-4	8.19E+0	5.10E-5
3.91E+1	2.77E-3	1.04E+1	1.39E-4	4.45E-3	1.05E+1	2.25E-4
3.96E+1	3.05E+1	1.15E+2	6.24E-1	3.00E+1	4.09E+2	8.22E-1
4.01E+1	3.55E+1	1.29E+2	7.79E-1	2.35E+1	1.05E+2	7.88E-1
4.06E+1	2.15E+1	9.34E+1	8.18E-1	1.71E+1	6.52E+1	6.39E-1
4.11E+1	2.54E+1	1.27E+2	7.90E-1	1.33E+1	5.69E+1	4.67E-1
4.16E+1	3.23E+1	1.08E+2	7.67E-1	1.68E+1	4.86E+1	3.85E-1
4.21E+1	1.04E+0	4.71E+1	3.48E-2	9.21E-1	4.72E+1	4.52E-2
4.26E+1	5.49E-2	3.89E+1	1.49E-3	5.88E+0	3.91E+1	1.44E-1
4.31E+1	1.68E+1	5.20E+1	4.46E-1	9.61E+0	3.38E+1	3.22E-1
4.36E+1	4.63E+0	2.99E+1	1.51E-1	8.13E+0	2.99E+1	2.74E-1
4.41E+1	4.96E+0	2.38E+1	1.30E-1	7.73E+0	2.39E+1	2.10E-1
4.46E+1	4.59E+0	2.23E+1	1.75E-1	4.79E+0	2.26E+1	1.81E-1
4.51E+1	2.78E-1	1.96E+1	1.04E-2	6.51E-1	1.97E+1	2.42E-2
4.56E+1	6.27E-1	1.76E+1	2.14E-2	7.79E-1	1.77E+1	2.66E-2
4.61E+1	3.91E-2	1.66E+1	1.18E-3	7.91E-4	1.66E+1	2.12E-5
4.66E+1	2.96E-2	1.43E+1	1.01E-3	5.17E-2	1.44E+1	1.77E-3
4.71E+1	1.71E+0	2.53E+1	5.00E-2	4.65E+0	2.55E+1	1.45E-1
4.76E+1	3.81E-2	1.96E+1	1.11E-3	1.72E-1	1.97E+1	5.01E-3
4.81E+1	5.85E-3	1.59E+1	2.09E-4	1.86E-2	1.59E+1	6.90E-4
4.86E+1	2.89E-2	1.30E+1	8.45E-4	9.39E-3	1.31E+1	2.72E-4

表十一 阻尼對跳躍現象的影響 $p_{eff} = 1.8 \times 10^{-3} N/m$, $\omega_b \approx \frac{1}{2}\omega_2$

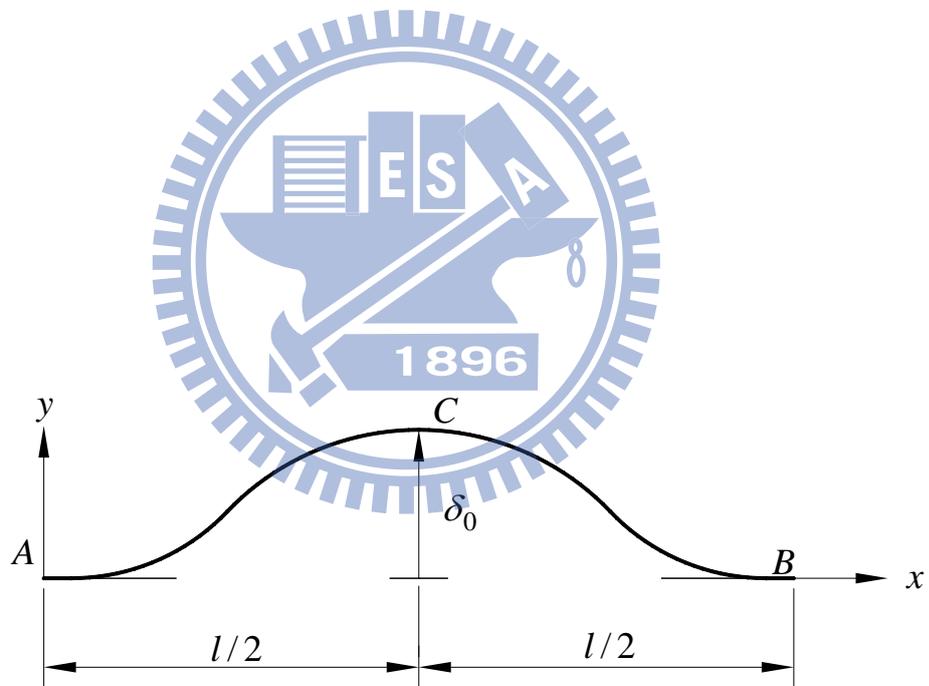
ω_b (kHz)	$a_1 = 50 \text{sec}^{-1}$			$a_1 = 0$		
	U	V	Θ	U	V	Θ
2.03E+1	2.09E-4	7.24E+0	1.75E-5	1.50E-4	7.27E+0	1.43E-5
2.04E+1	2.32E-4	7.60E+0	1.49E-5	2.01E-4	7.66E+0	1.43E-5
2.05E+1	3.04E-4	8.00E+0	2.40E-5	2.82E-4	8.04E+0	1.40E-5
2.06E+1	5.71E-4	8.70E+0	3.55E-5	6.15E-4	8.73E+0	2.99E-5
2.07E+1	6.86E-3	9.48E+0	2.86E-4	1.20E-2	9.57E+0	4.69E-4
2.08E+1	2.61E-1	1.06E+1	1.15E-2	3.53E-1	1.07E+1	1.57E-2
2.09E+1	9.34E+0	3.76E+1	3.78E-1	8.87E+0	3.60E+1	3.56E-1
2.10E+1	1.56E+1	4.95E+1	4.62E-1	1.58E+1	5.19E+1	4.72E-1
2.11E+1	1.57E+1	4.49E+1	4.74E-1	1.59E+1	4.54E+1	4.77E-1
2.12E+1	2.97E+1	1.30E+2	7.14E-1	4.33E+1	4.09E+2	1.04E+0
2.13E+1	1.87E+1	8.84E+1	6.68E-1	1.90E+1	1.07E+2	6.98E-1
2.14E+1	1.59E+1	5.67E+1	4.92E-1	1.79E+1	6.09E+1	5.44E-1
2.15E+1	1.55E+1	6.21E+1	4.92E-1	1.66E+1	6.21E+1	4.82E-1
2.16E+1	1.37E+1	5.50E+1	4.78E-1	1.32E+1	5.52E+1	4.79E-1
2.17E+1	1.23E+1	3.73E+1	4.04E-1	1.22E+1	3.24E+1	3.77E-1
2.18E+1	1.42E+1	4.46E+1	4.36E-1	1.14E+1	4.05E+1	3.93E-1
2.19E+1	1.02E+1	2.54E+1	3.15E-1	9.44E+0	2.40E+1	3.17E-1
2.20E+1	6.79E+0	1.99E+1	2.61E-1	7.46E+0	2.20E+1	2.83E-1
2.21E+1	6.85E+0	1.82E+1	2.56E-1	7.00E+0	1.79E+1	2.58E-1

表十二 挫屈梁受非對稱均佈力之主共振現象及跳躍現象 $\omega_b \approx \omega_1$

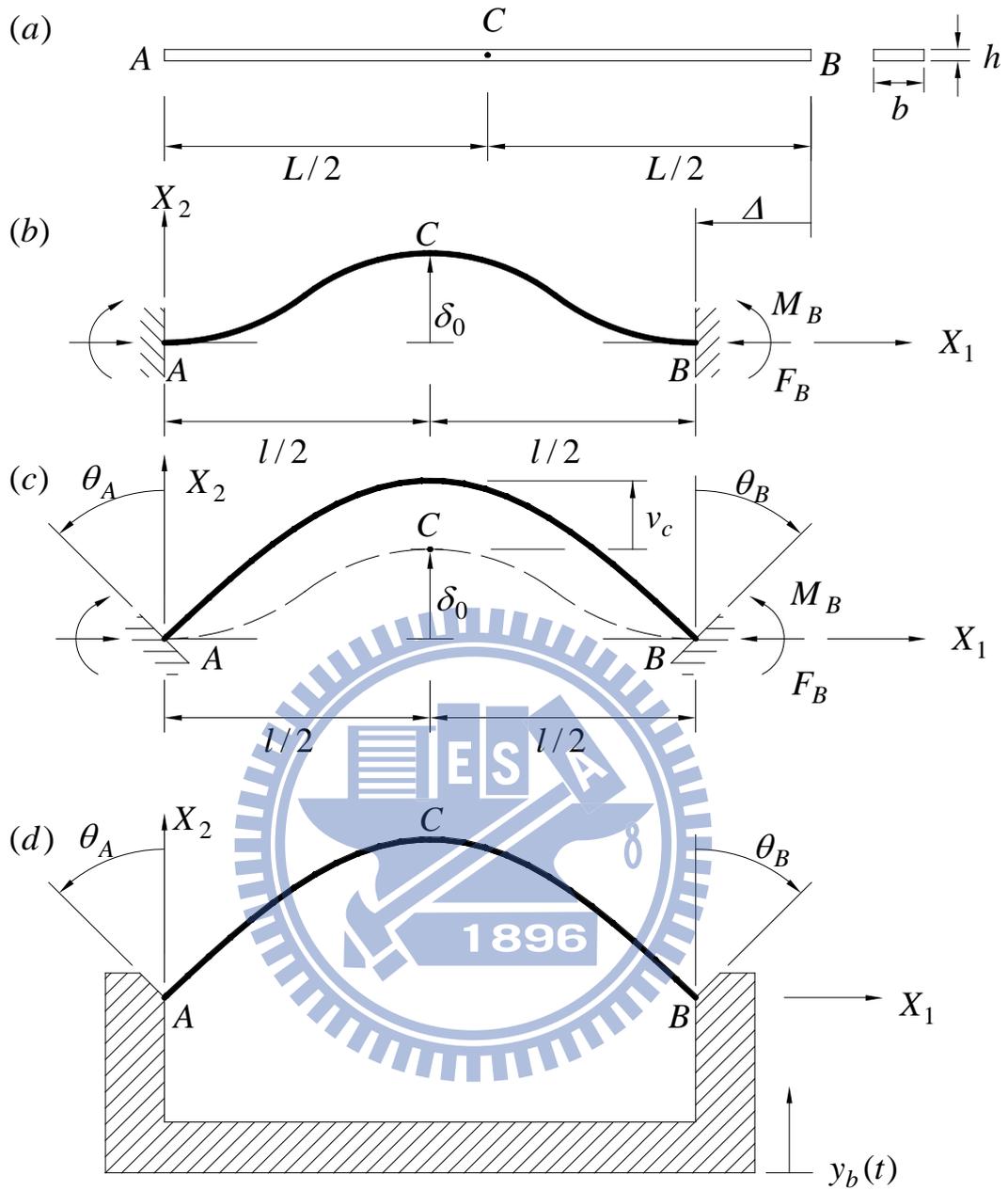
	$\lambda = 3.3 \times 10^{-3} N/m$			$\lambda = 3.4 \times 10^{-3} N/m$			$\lambda = 3.5 \times 10^{-3} N/m$		
ω_b (kHz)	U	V	Θ	U	V	Θ	U	V	Θ
2.65E+1	4.58E-1	1.26E+1	1.82E-2	4.54E-1	1.36E+1	1.83E-2	2.01E-1	1.46E+1	7.84E-3
2.66E+1	2.88E+0	1.38E+1	1.18E-1	3.00E+0	1.44E+1	1.39E-1	1.72E+0	1.54E+1	7.12E-2
2.67E+1	2.89E+0	1.38E+1	1.27E-1	2.70E+0	1.44E+1	1.02E-1	3.39E+0	1.84E+1	1.45E-1
2.68E+1	3.92E+0	1.39E+1	1.59E-1	2.35E+0	1.60E+1	9.61E-2	7.85E+0	2.93E+1	2.76E-1
2.69E+1	3.97E+0	1.62E+1	1.62E-1	9.00E+0	3.24E+1	3.25E-1	3.60E+1	4.14E+2	9.33E-1
2.70E+1	4.18E-1	1.51E+1	1.60E-2	3.60E+0	2.89E+1	1.22E-1	1.04E+1	3.49E+1	3.52E-1
2.71E+1	8.77E-1	2.55E+1	4.15E-2	1.19E+1	5.41E+1	4.62E-1	5.51E-3	3.17E+1	2.20E-4
2.72E+1	9.59E-1	2.27E+1	3.94E-2	8.66E-1	2.46E+1	4.11E-2	2.51E-2	2.71E+1	9.14E-4
2.73E+1	3.12E-1	1.94E+1	1.32E-2	2.69E+0	2.13E+1	1.42E-1	1.37E-1	2.40E+1	5.39E-3
2.74E+1	5.93E-1	1.74E+1	2.74E-2	4.31E-1	1.89E+1	2.03E-2	3.81E-2	2.00E+1	1.81E-3
2.75E+1	3.23E-1	1.71E+1	1.46E-2	5.58E-1	1.72E+1	2.23E-2	2.03E-3	1.99E+1	8.91E-5
2.76E+1	1.23E+0	1.62E+1	5.02E-2	2.09E+0	1.98E+1	7.51E-2	5.13E-1	2.38E+1	1.88E-2
2.77E+1	5.96E+0	2.00E+1	2.32E-1	4.31E+1	3.89E+2	8.17E-1	7.93E-3	2.69E+1	3.39E-4
2.78E+1	8.11E+0	2.55E+1	3.03E-1	3.73E+0	2.48E+1	1.56E-1	5.08E-1	2.17E+1	1.88E-2
2.79E+1	2.33E+0	2.24E+1	1.01E-1	8.22E+0	2.32E+1	2.81E-1	1.92E-2	1.93E+1	7.70E-4
2.80E+1	4.54E+0	2.20E+1	2.07E-1	7.36E-1	1.82E+1	3.22E-2	4.02E-2	1.99E+1	1.74E-3
2.81E+1	4.19E-1	1.72E+1	1.92E-2	3.02E+0	1.95E+1	1.24E-1	8.04E-1	2.10E+1	3.73E-2
2.82E+1	2.19E+0	1.72E+1	9.62E-2	8.37E+0	3.14E+1	3.11E-1	3.49E+0	2.19E+1	1.23E-1
2.83E+1	6.49E+0	2.27E+1	2.51E-1	3.57E+0	2.03E+1	1.21E-1	2.56E+0	2.14E+1	9.07E-2
2.84E+1	6.77E+0	2.22E+1	2.37E-1	3.61E+0	2.09E+1	1.61E-1	9.91E-1	2.25E+1	5.62E-2
2.85E+1	3.67E+0	2.03E+1	1.45E-1	6.18E+0	3.20E+1	3.27E-1	4.16E-1	2.14E+1	2.01E-2



圖一、兩端固定的直梁



圖二 直梁一端受軸向壓縮及側向挫屈示意圖

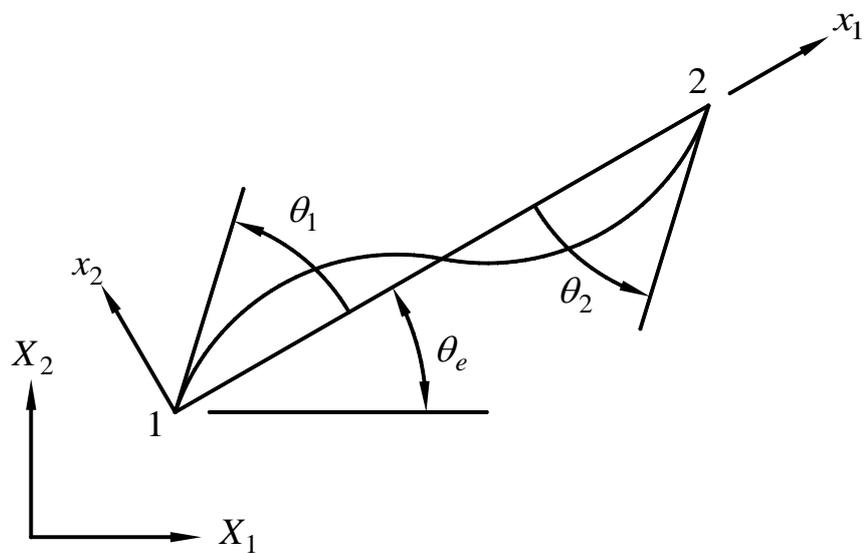


圖三 (a)變形前的梁

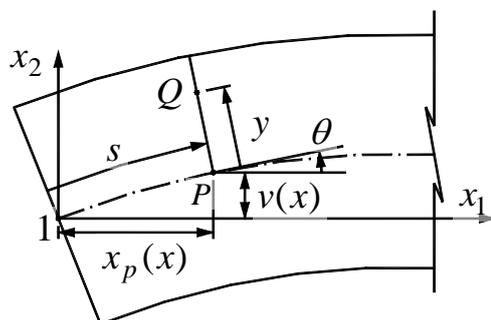
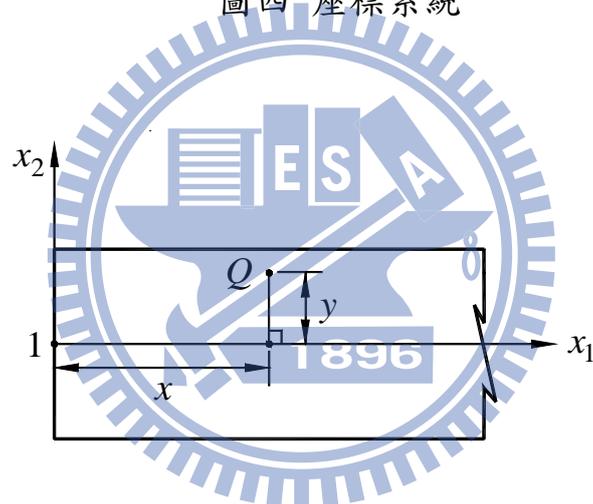
(b)施加軸向變形(a)變成為挫屈梁

(c)將(b)施加端點轉角

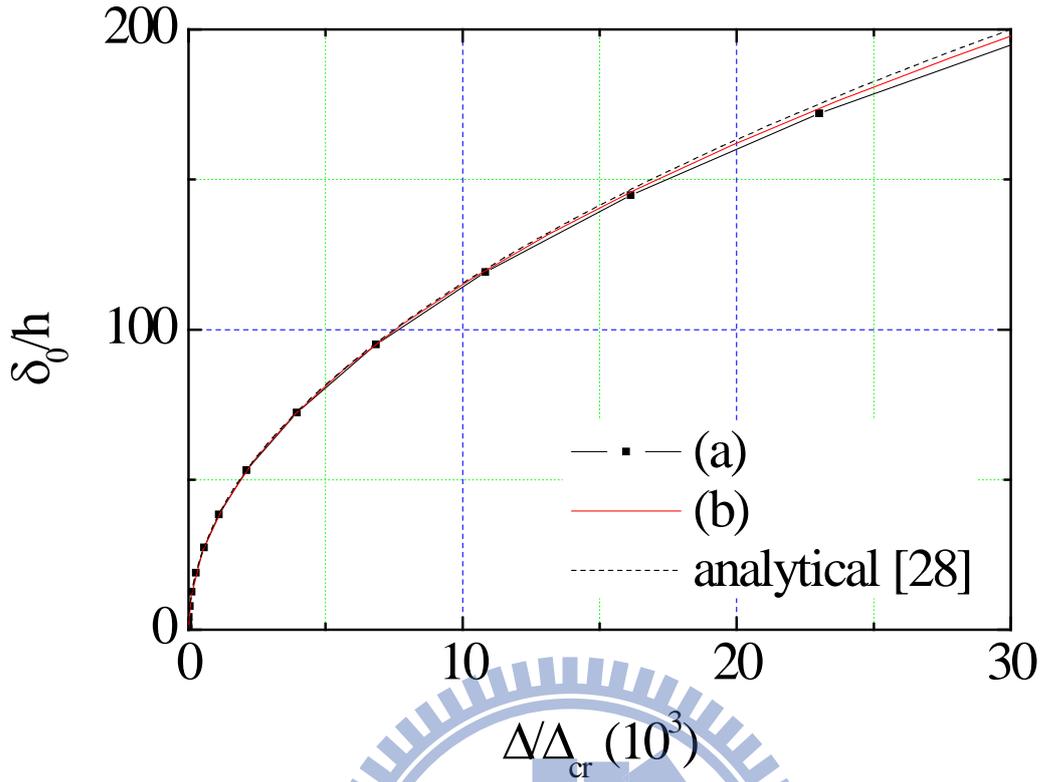
(d)將(c)置於剛性基座



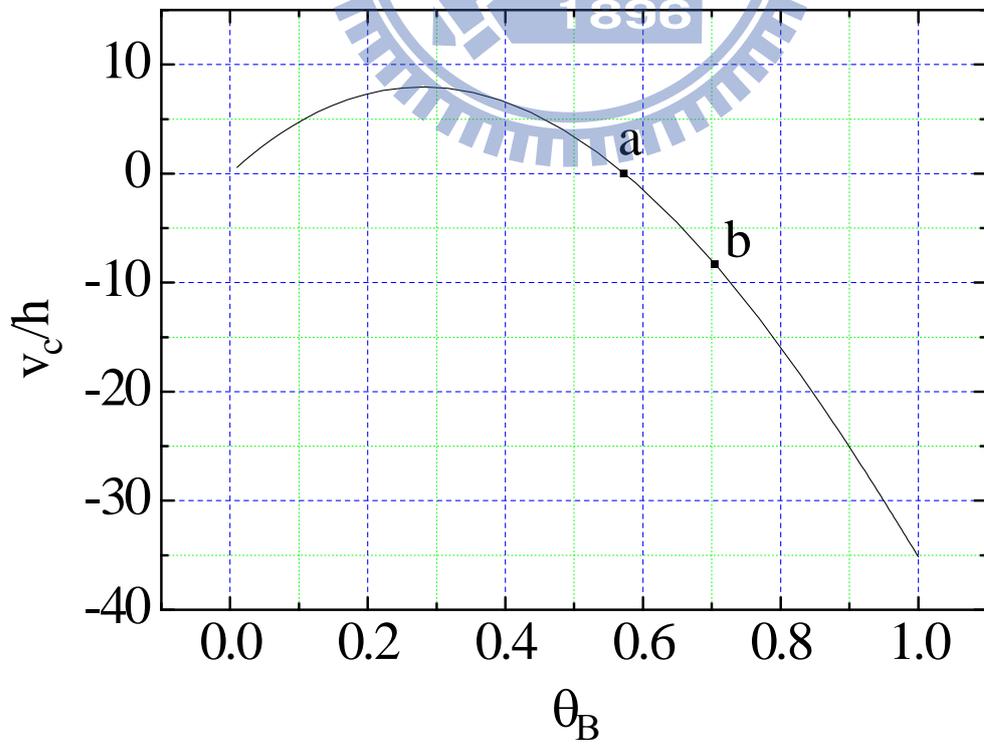
圖四 座標系統



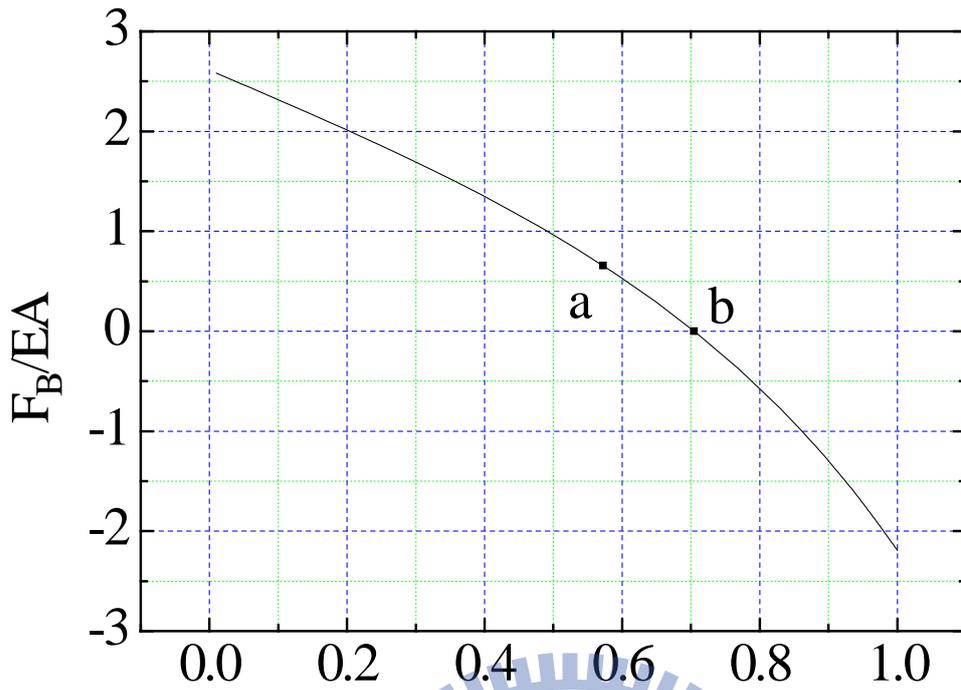
圖五 梁的變形圖



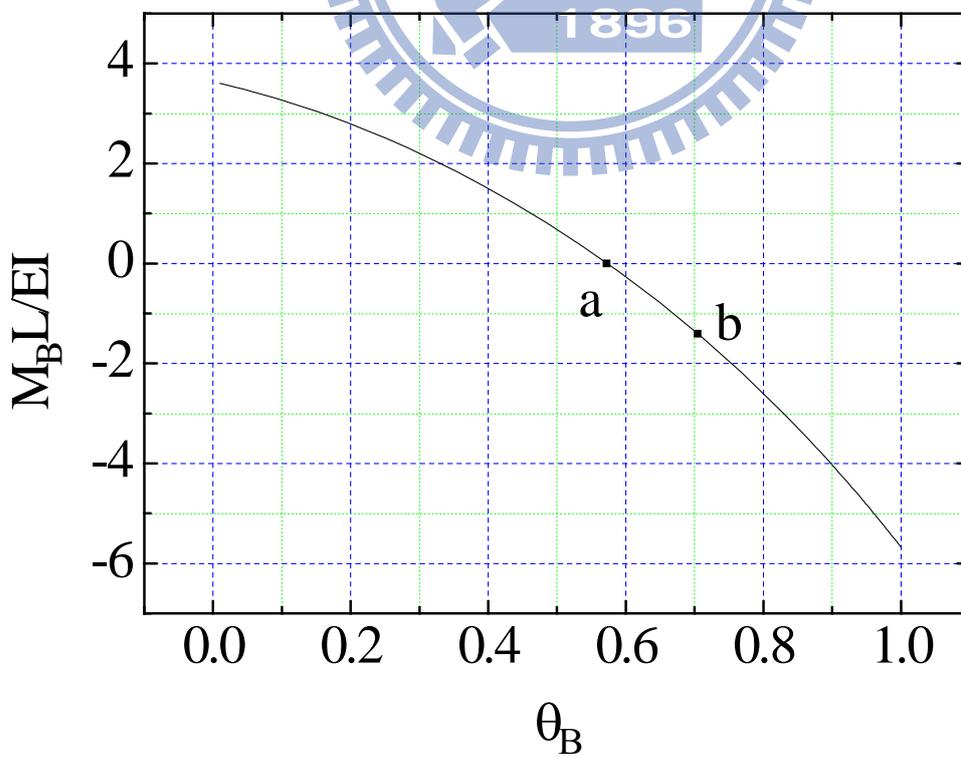
圖六 挫屈梁之軸向位移 Δ —側向位移 δ_0 曲線



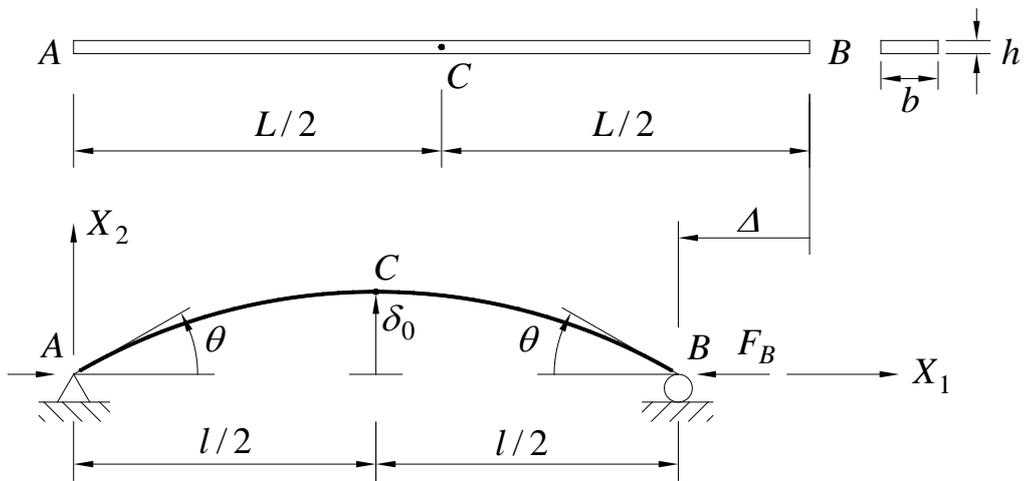
圖七 挫屈梁兩端受轉角負荷之負荷 θ_B —側向位移 v_c 曲線



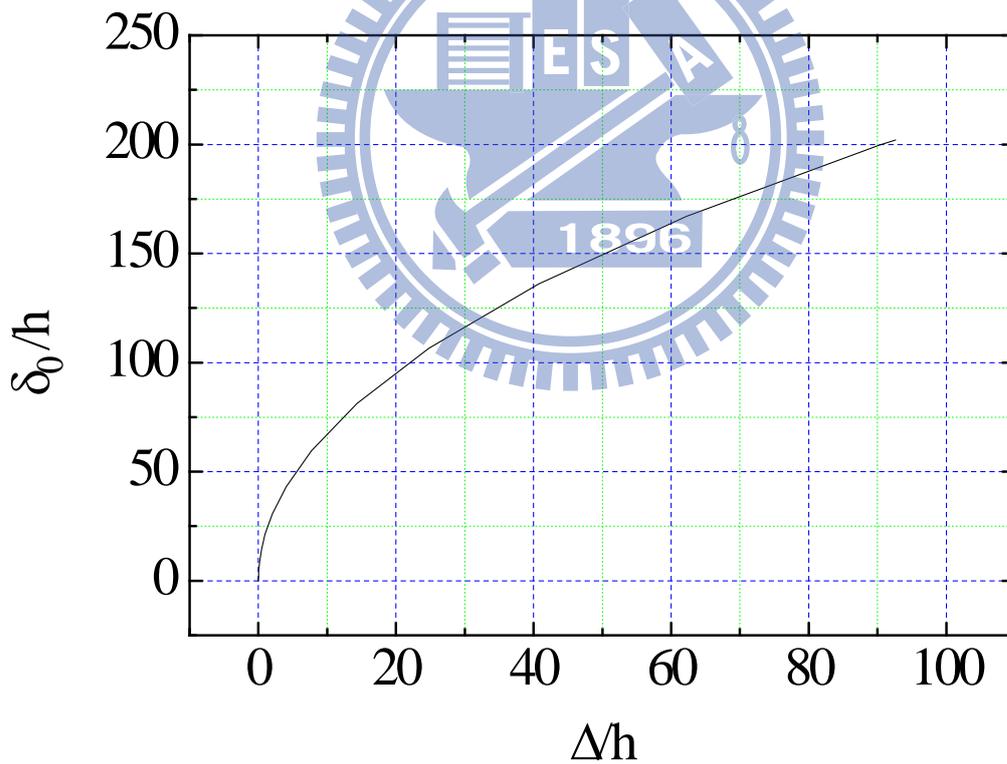
圖八 挫屈梁兩端受轉角負荷之負荷 θ_B —反力 F_B 曲線



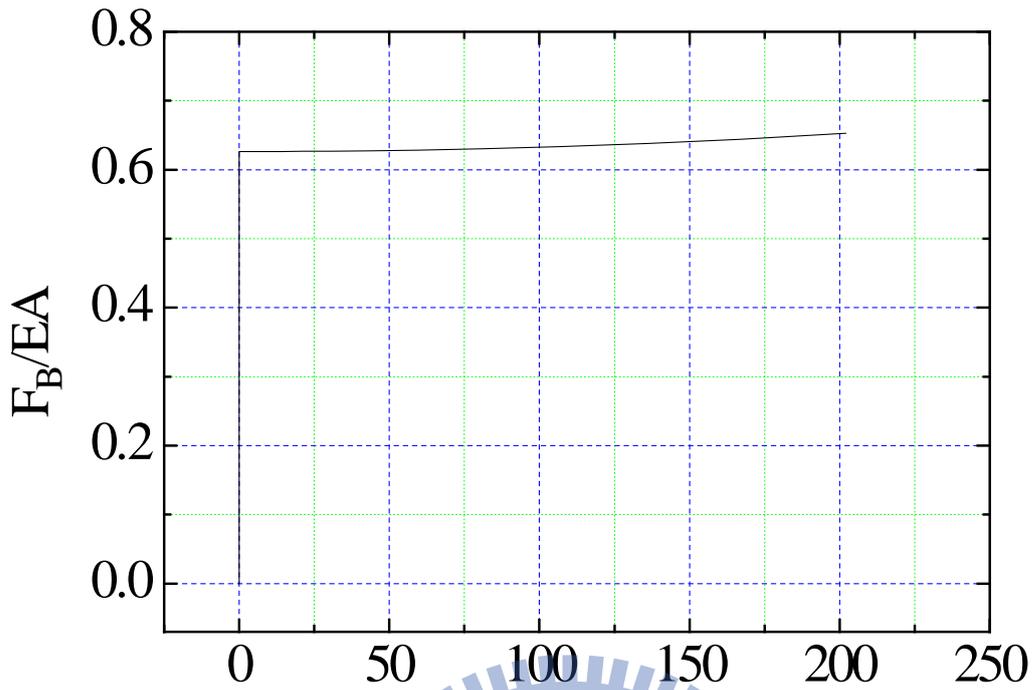
圖九 挫屈梁兩端受轉角負荷之負荷 θ_B —反力 M_B 曲線



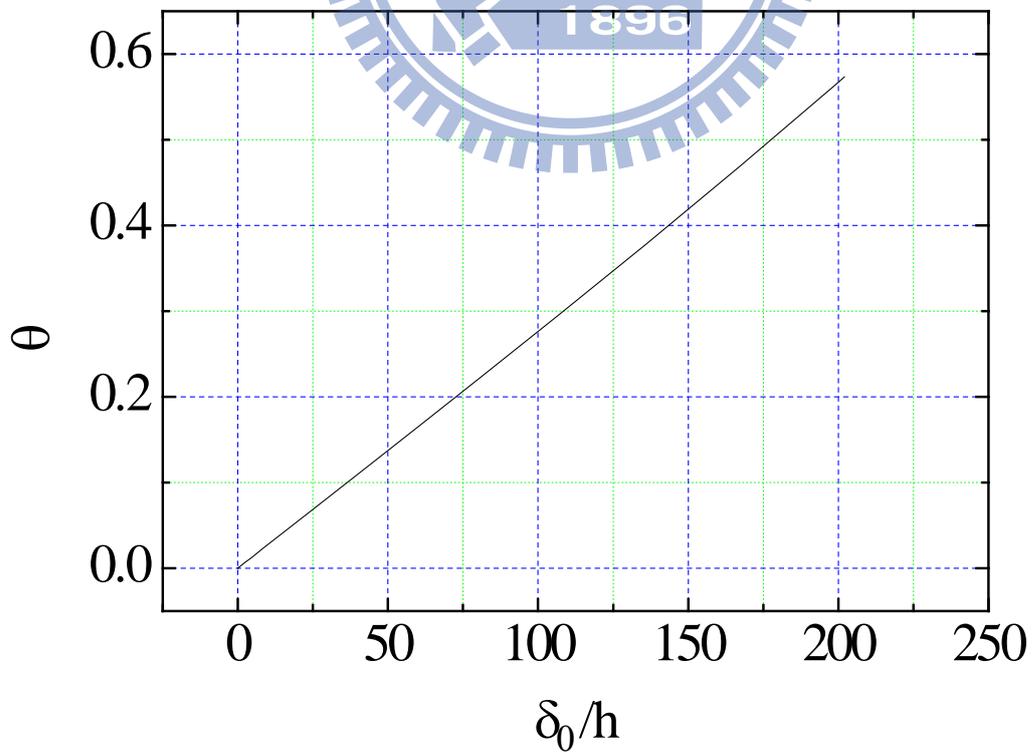
圖十 簡支梁受端點軸向位移負荷作用的示意圖



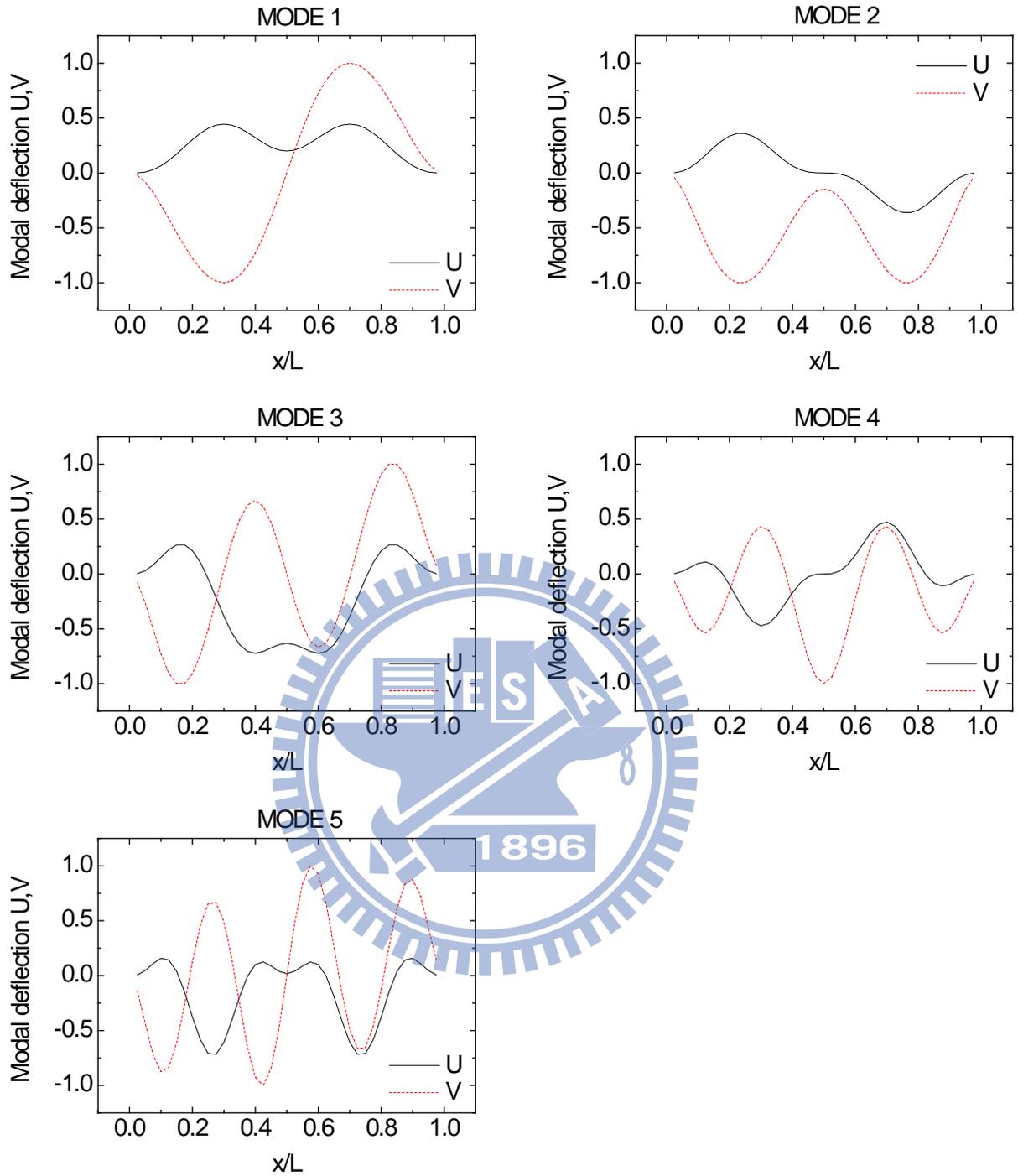
圖十一 簡支梁受軸向位移負荷之負荷 Δ —側向位移 δ_0 曲線



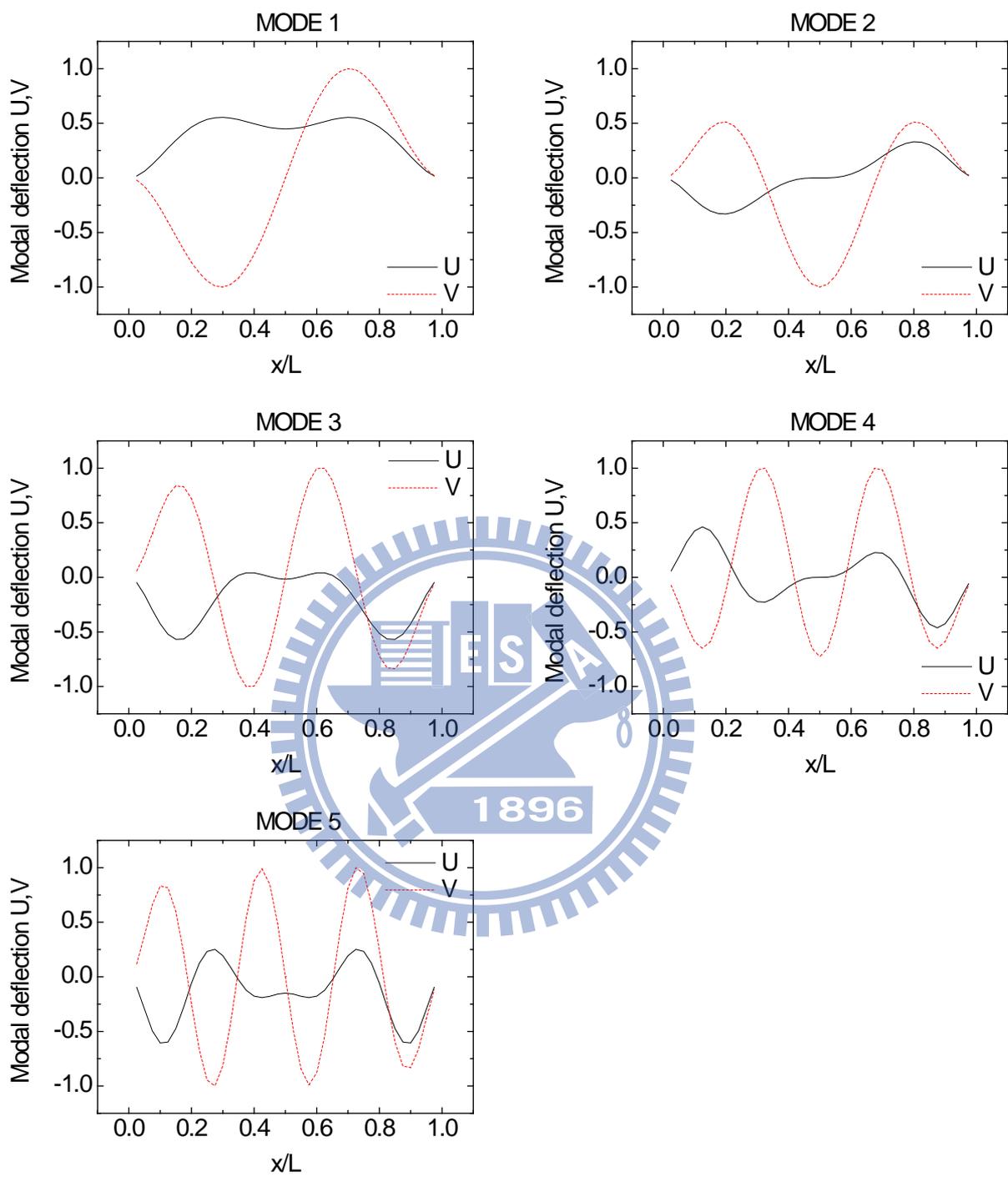
圖十二 簡支梁受軸向位移負荷之側向位移 δ_0 - 反力 F_B 曲線



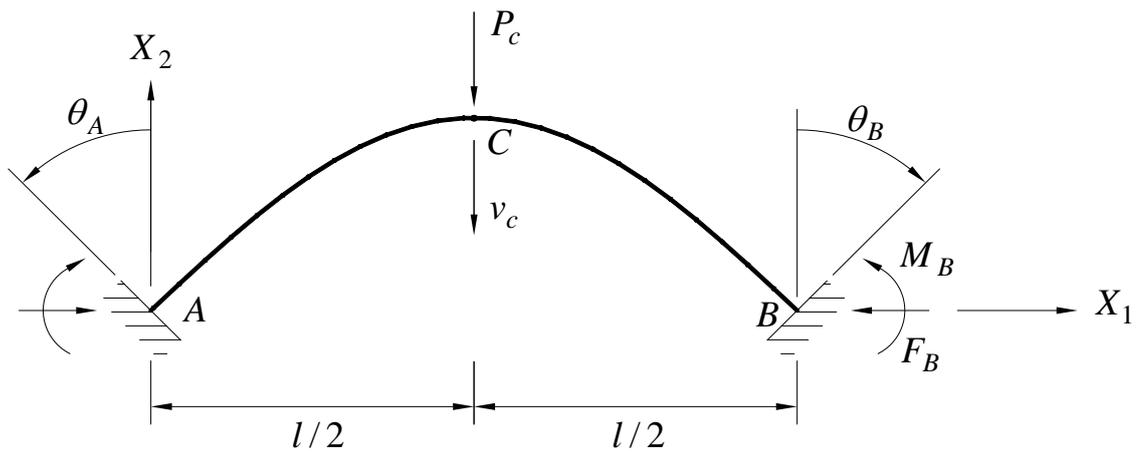
圖十三 簡支梁受軸向位移負荷之側向位移 δ_0 - 端點轉角 θ_B 曲線



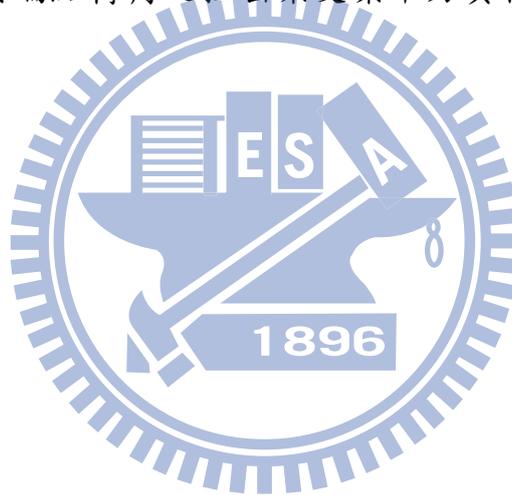
圖十四 $\theta_B = 0$ 之挫屈梁的前五個振動模態

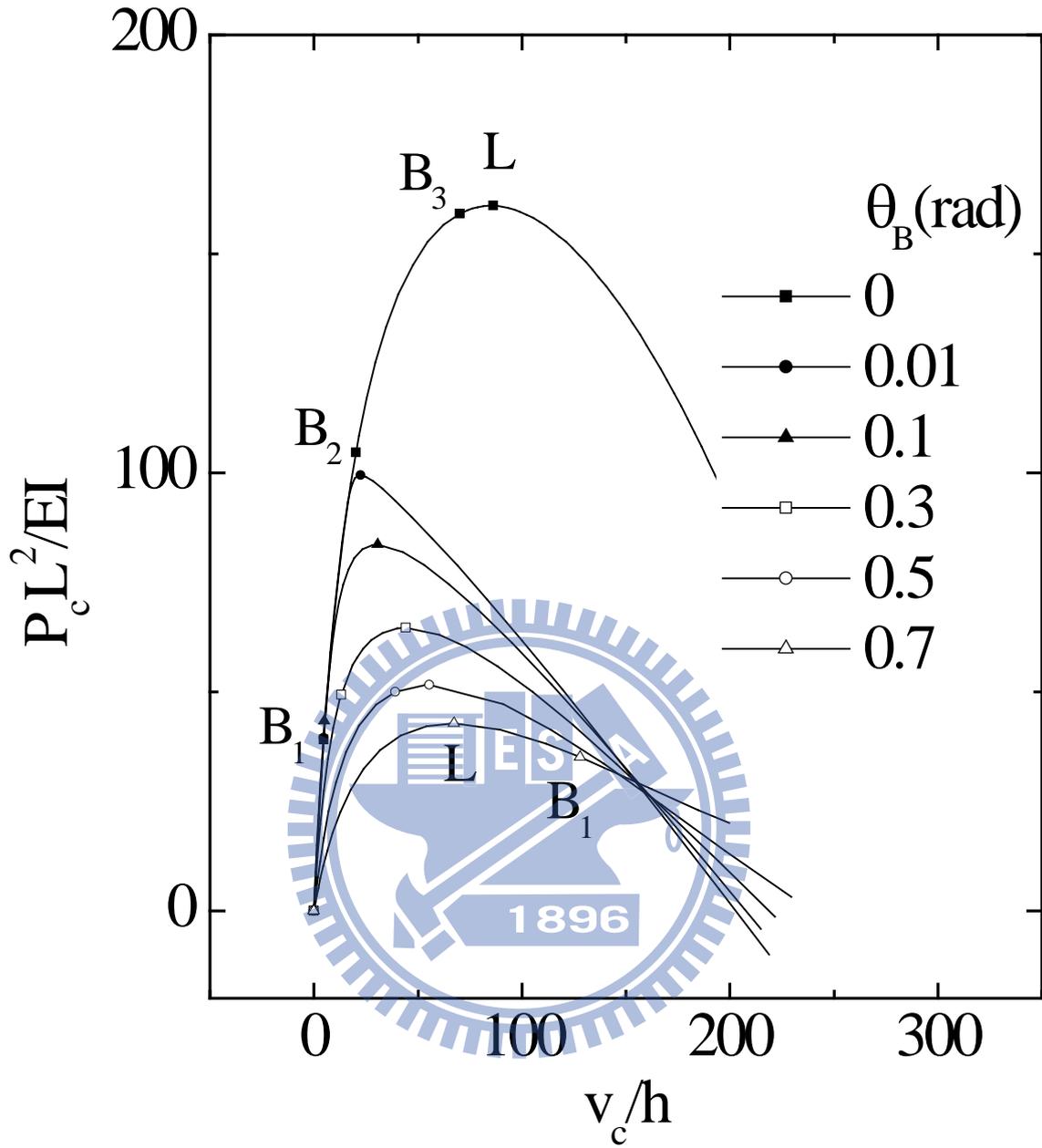


圖十五 $\theta_B = 0.7$ 之挫屈梁的前五個振動模態

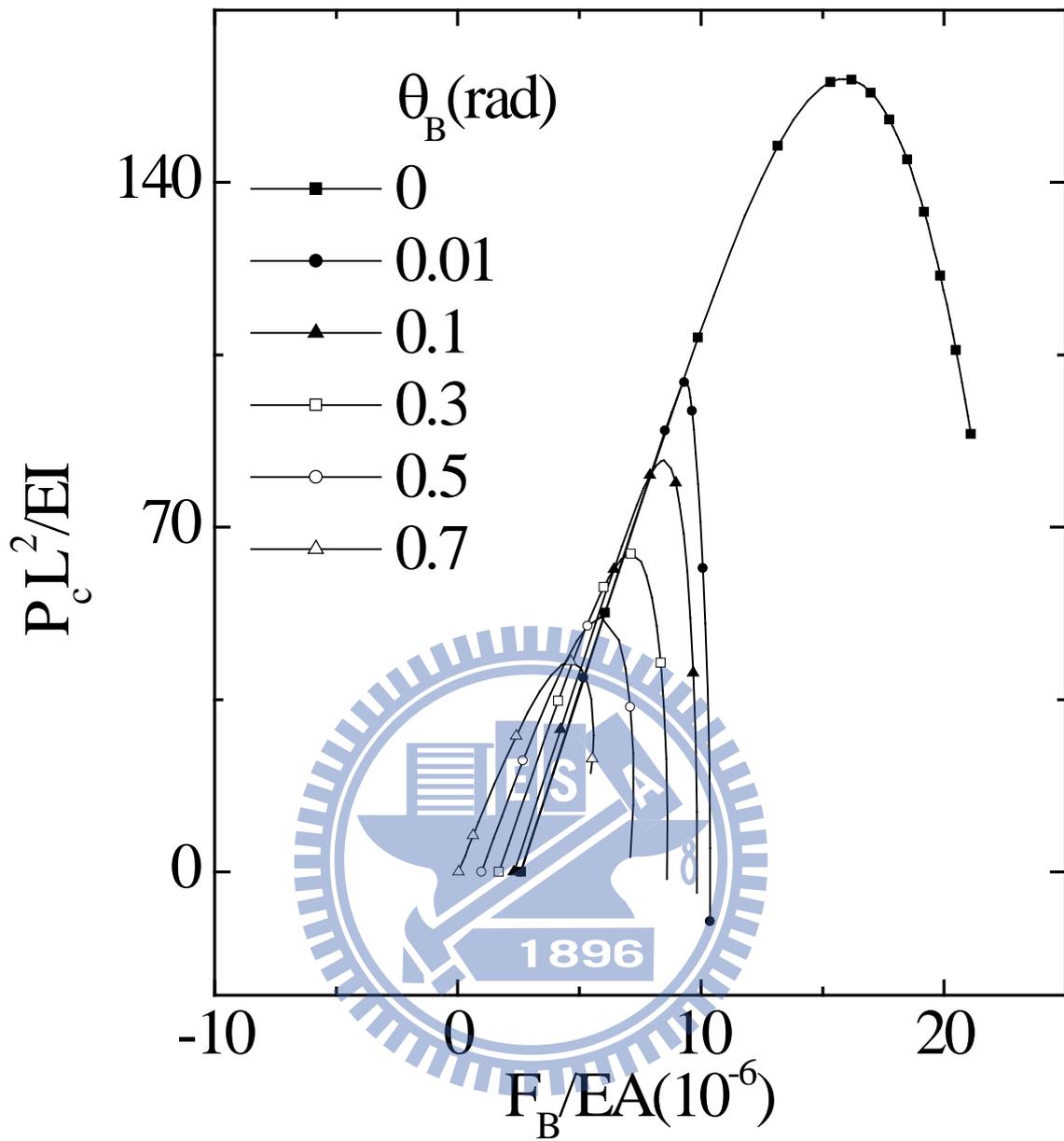


圖十六 具端點轉角之挫屈梁受集中力負荷作用的示意圖

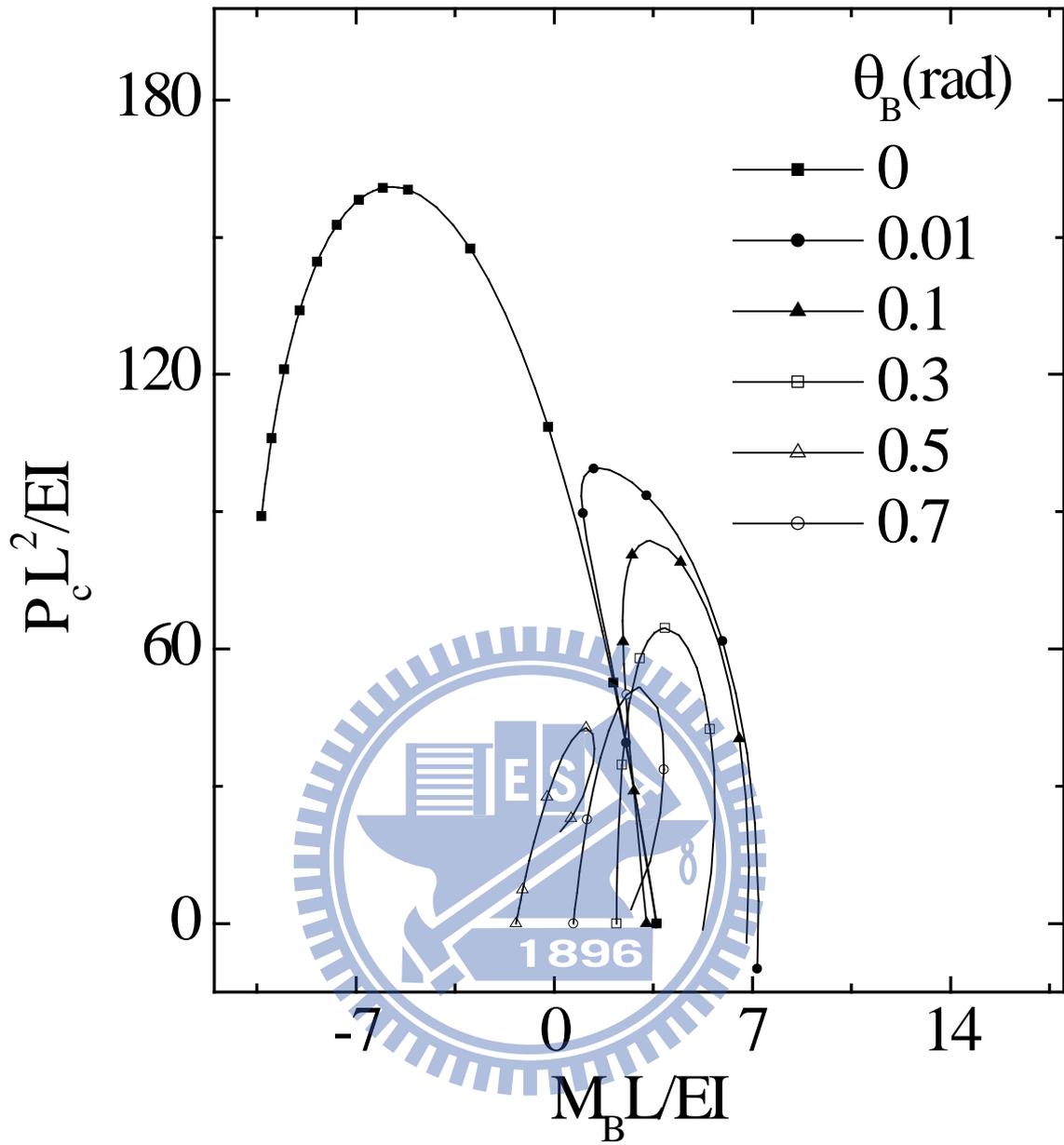




圖十七 具端點轉角之挫屈梁受集中載重之負荷-位移圖

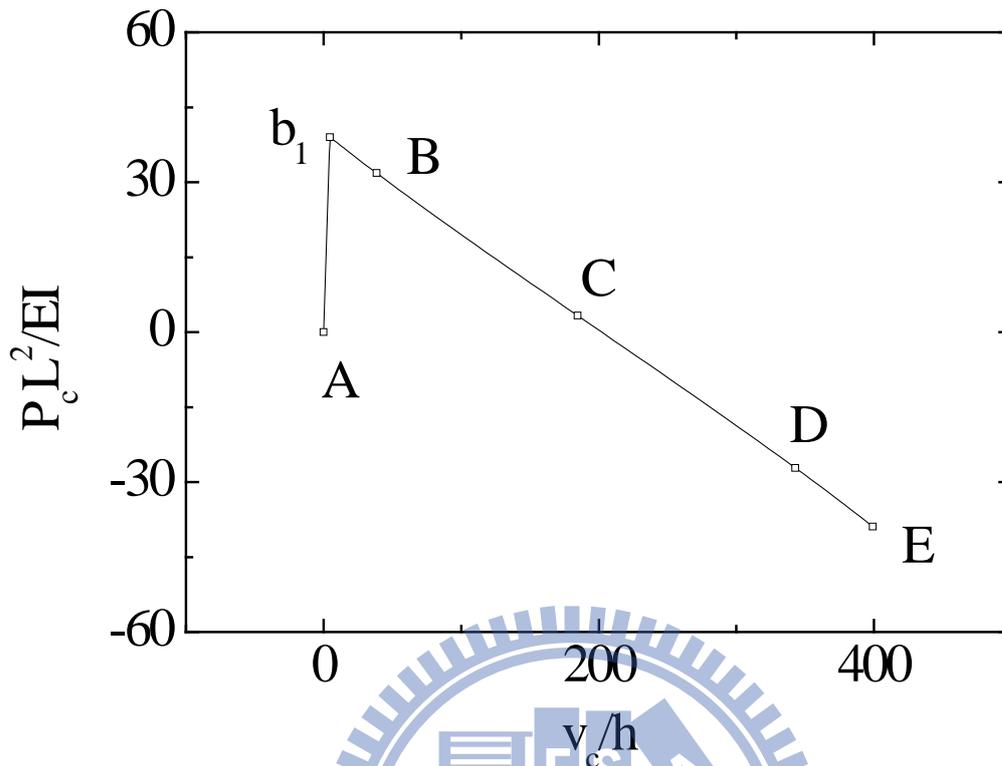


圖十八 具端點轉角之挫屈梁受集中載重之負荷 P_c -反力 F_B 圖

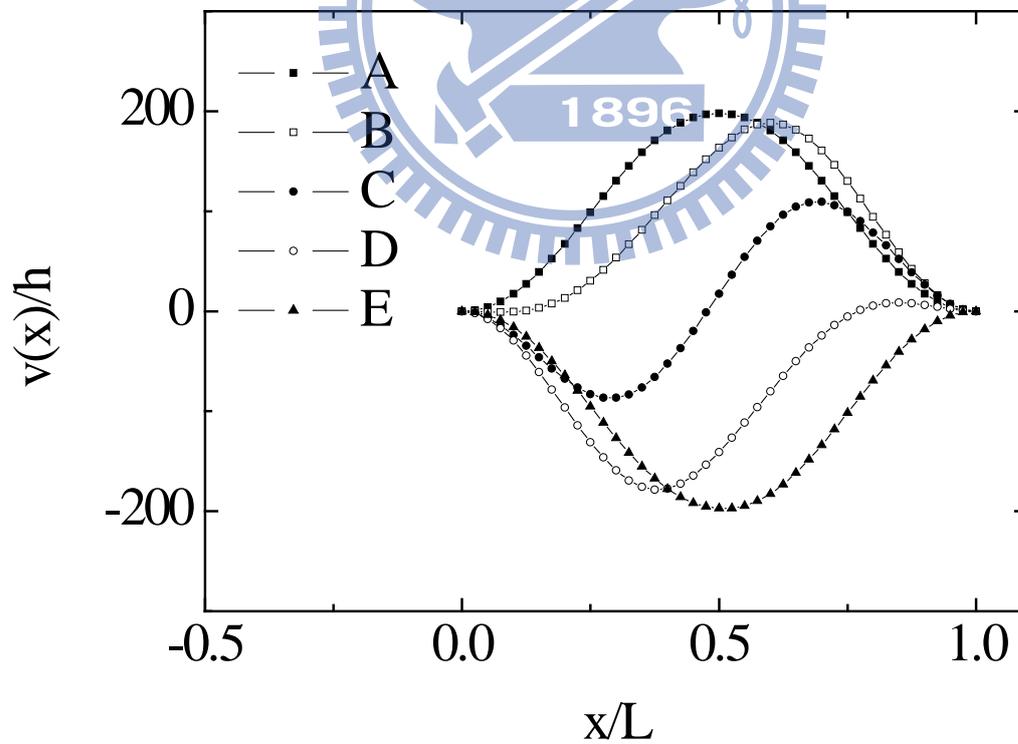


圖十九 具端點轉角之挫屈梁受集中載重之負荷 P_c - 反力 M_B 圖

(a)



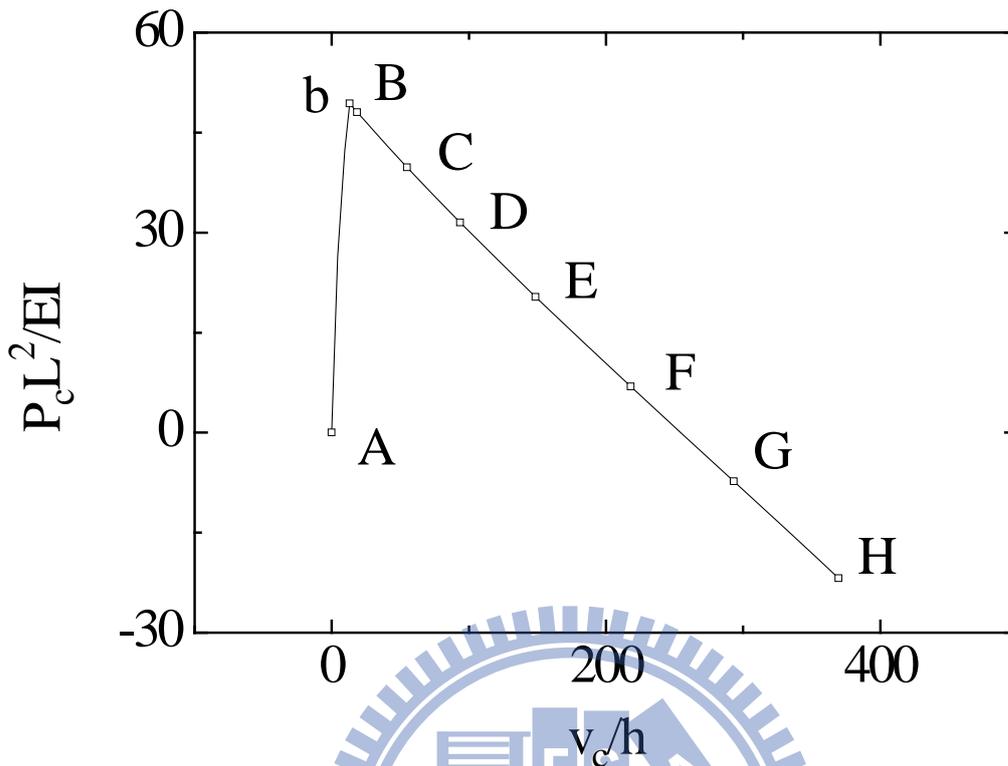
(b)



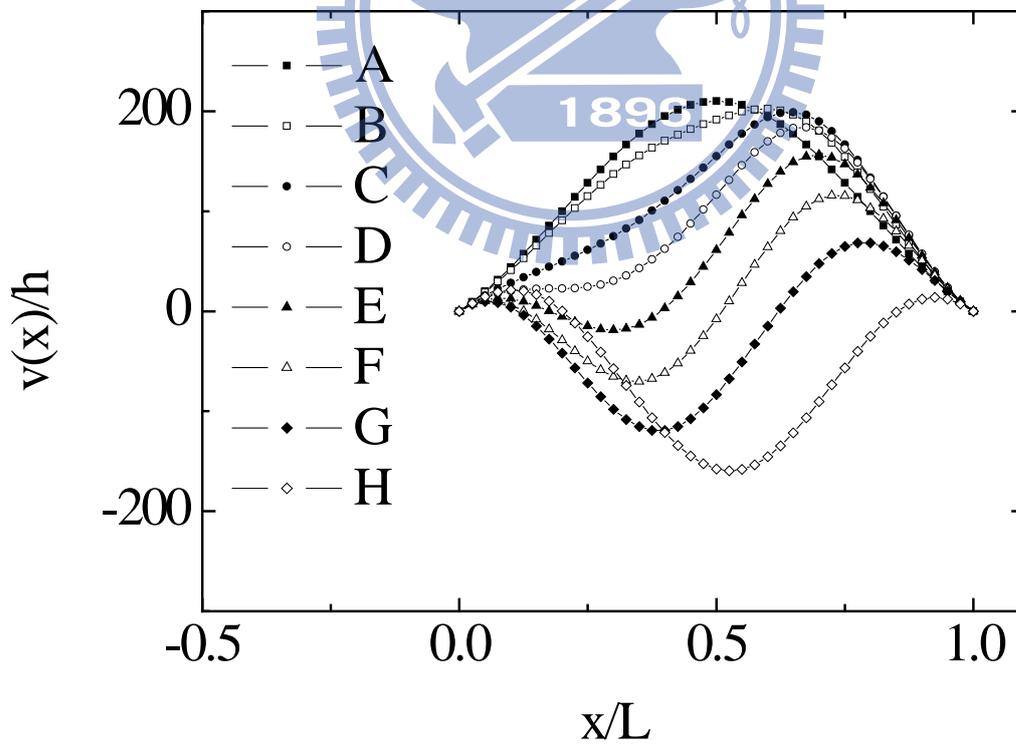
圖二十 受集中載重之挫屈梁($\theta_B = 0$)在第一個分歧點的(a)次要平衡路徑

(b)無因次側向位移分佈圖

(a)

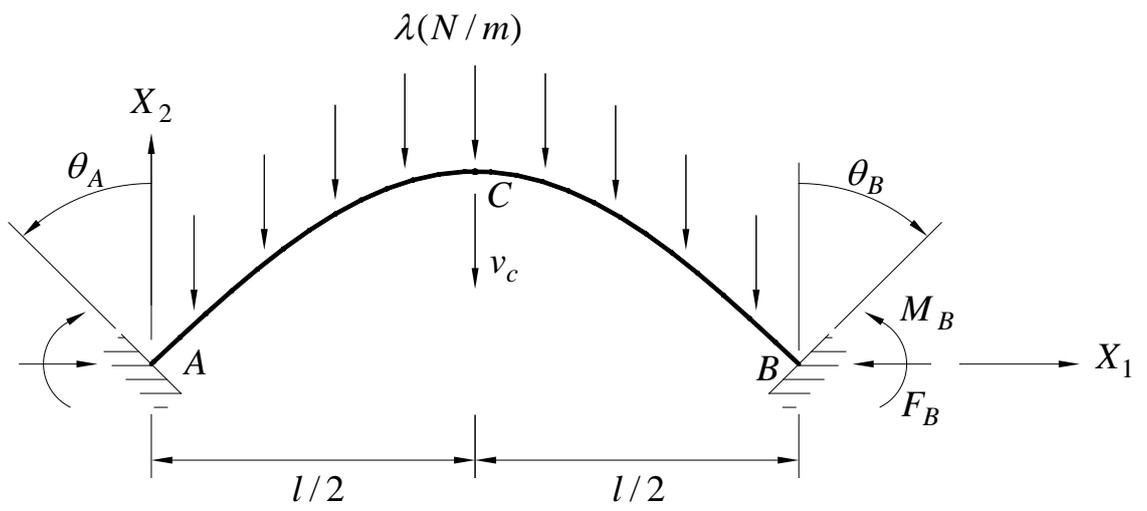


(b)

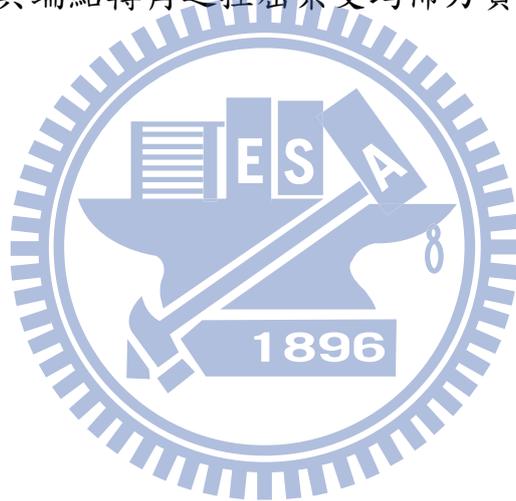


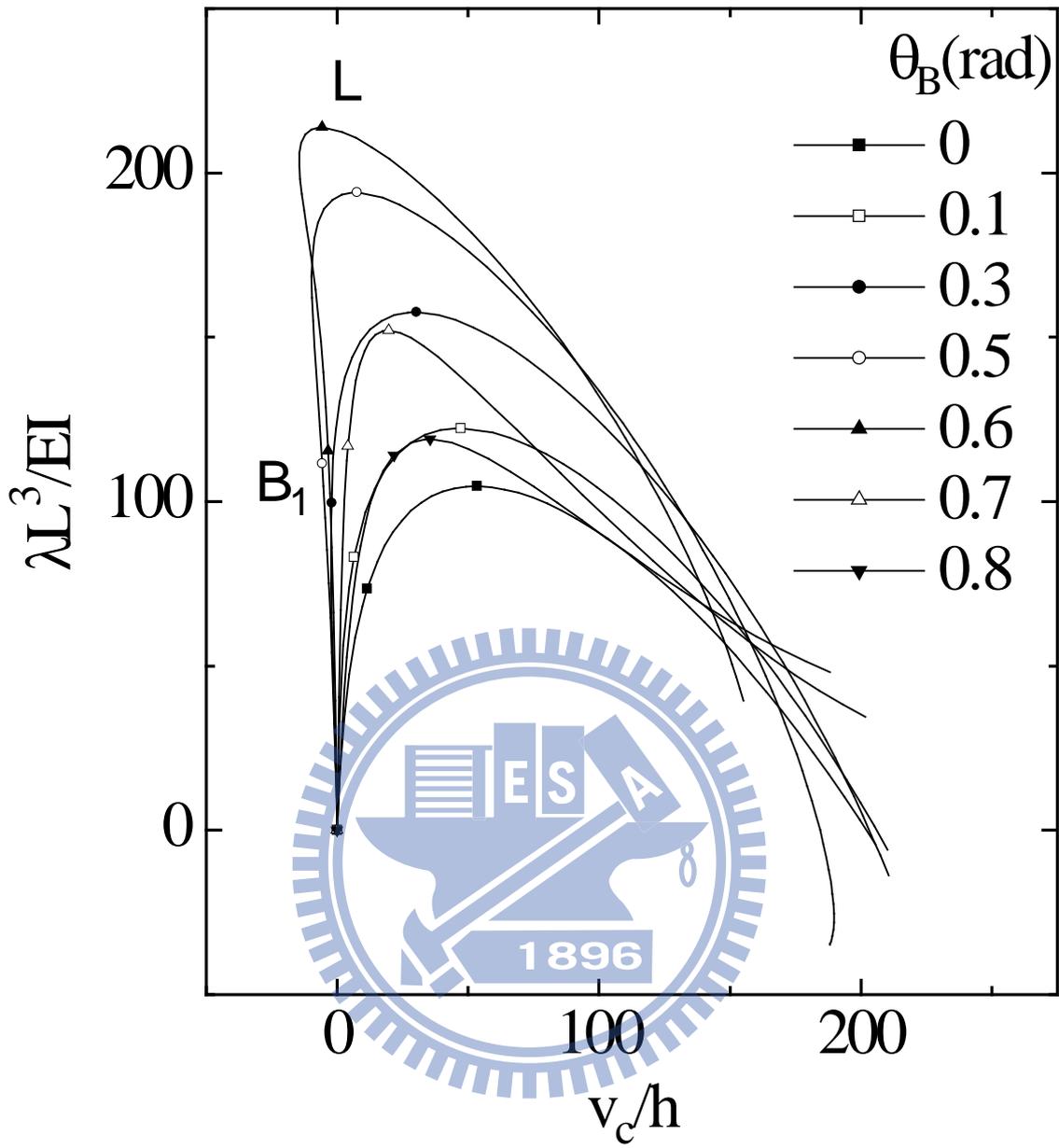
圖二十一 受集中載重之挫屈梁($\theta_B = 0.3rad$)在第一個分歧點的(a)次要平

衡路徑(b)無因次側向位移分佈圖

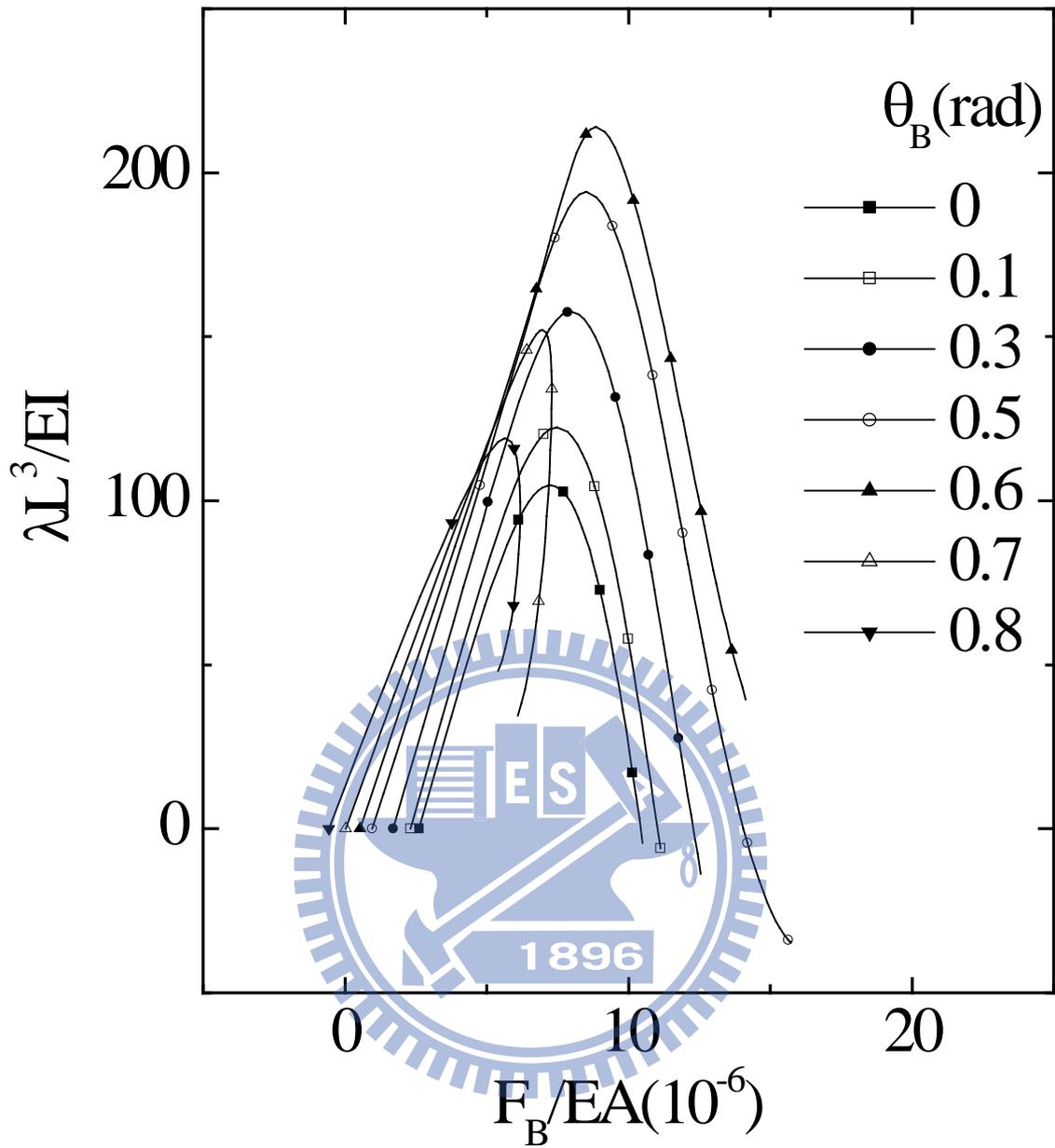


圖二十二 具端點轉角之挫屈梁受均佈力負荷作用的示意圖

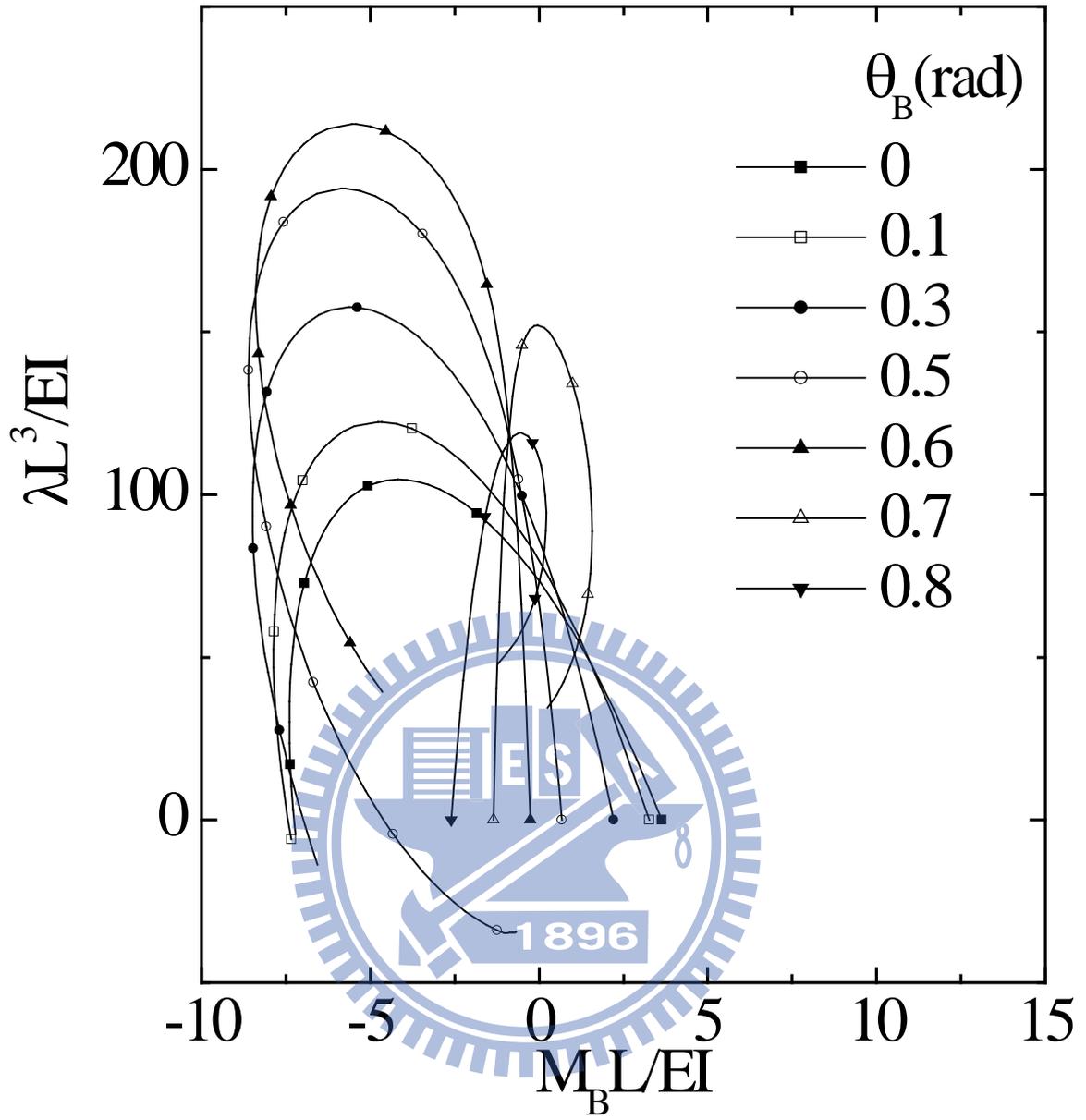




圖二十三 具端點轉角之挫屈梁受均佈負荷之負荷-位移圖

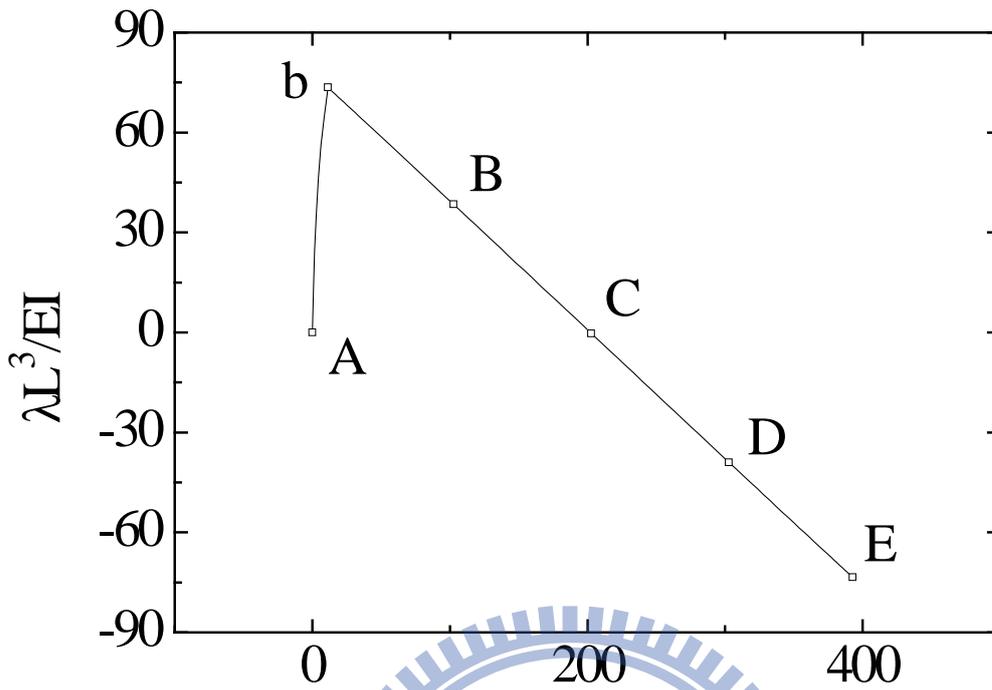


圖二十四 具端點轉角之挫屈梁受均佈負荷之負荷-反力 F_B 圖

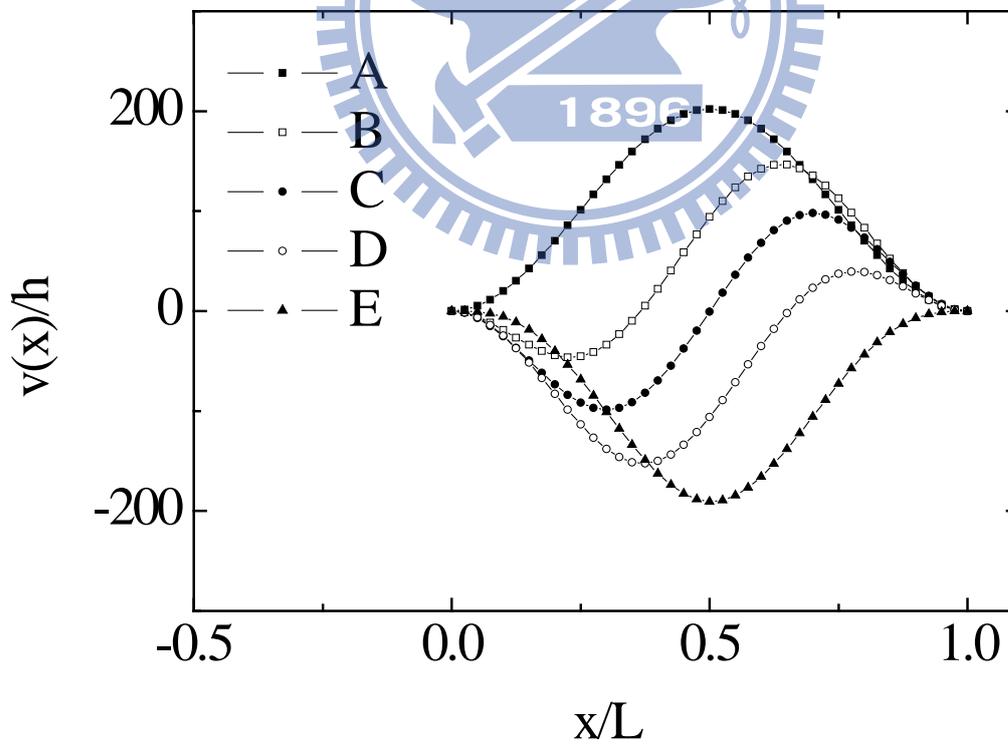


圖二十五 具端點轉角之挫屈梁受均佈負荷之負荷-反力 M_B 圖

(a)



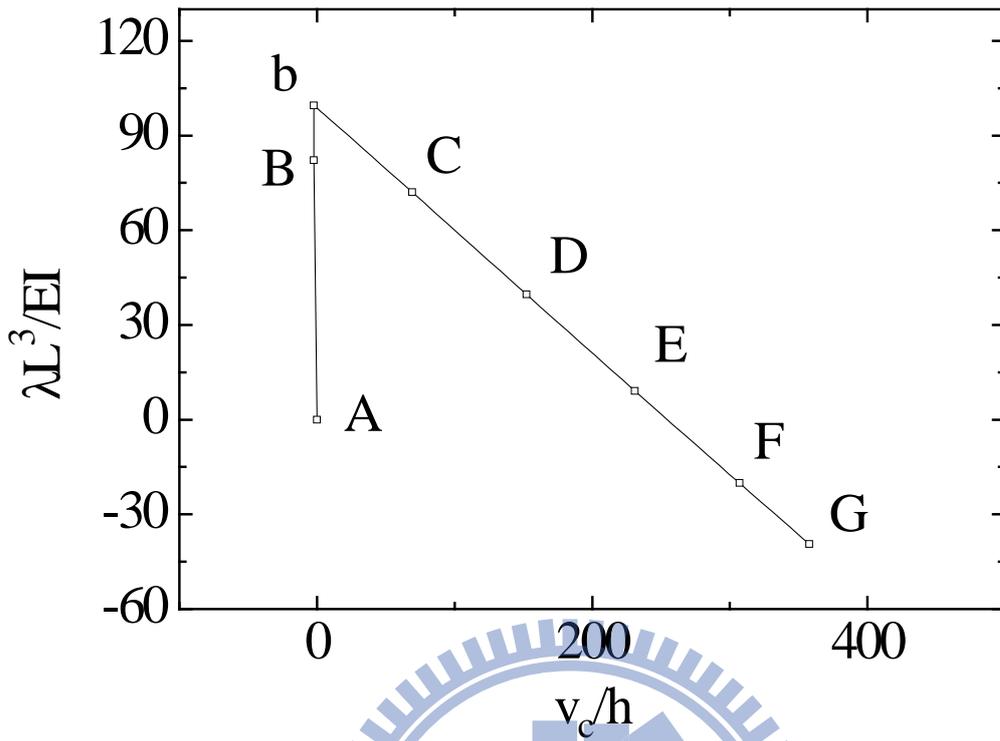
(a)



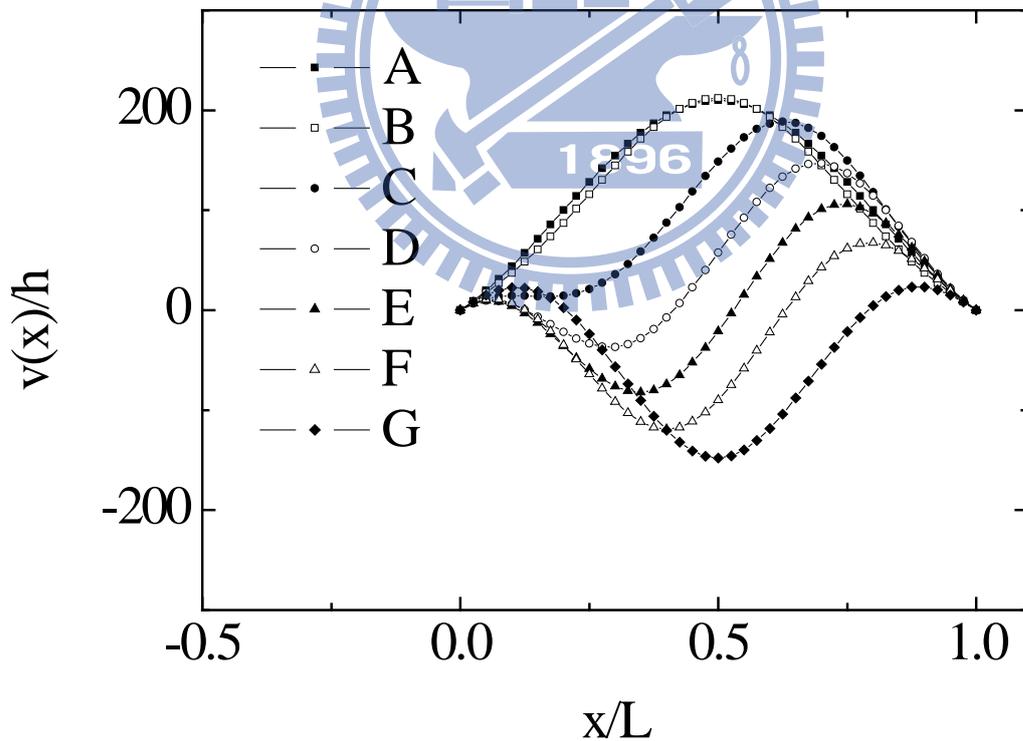
圖二十六 受均佈載重之挫屈梁($\theta=0$)的(a)次要平衡路徑及(b)無因次側向

位移分佈圖

(a)

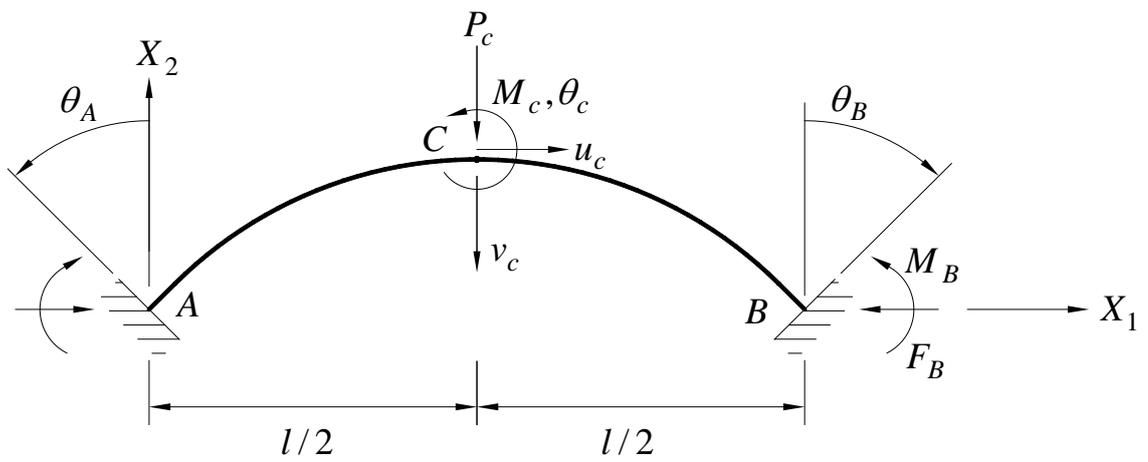


(b)

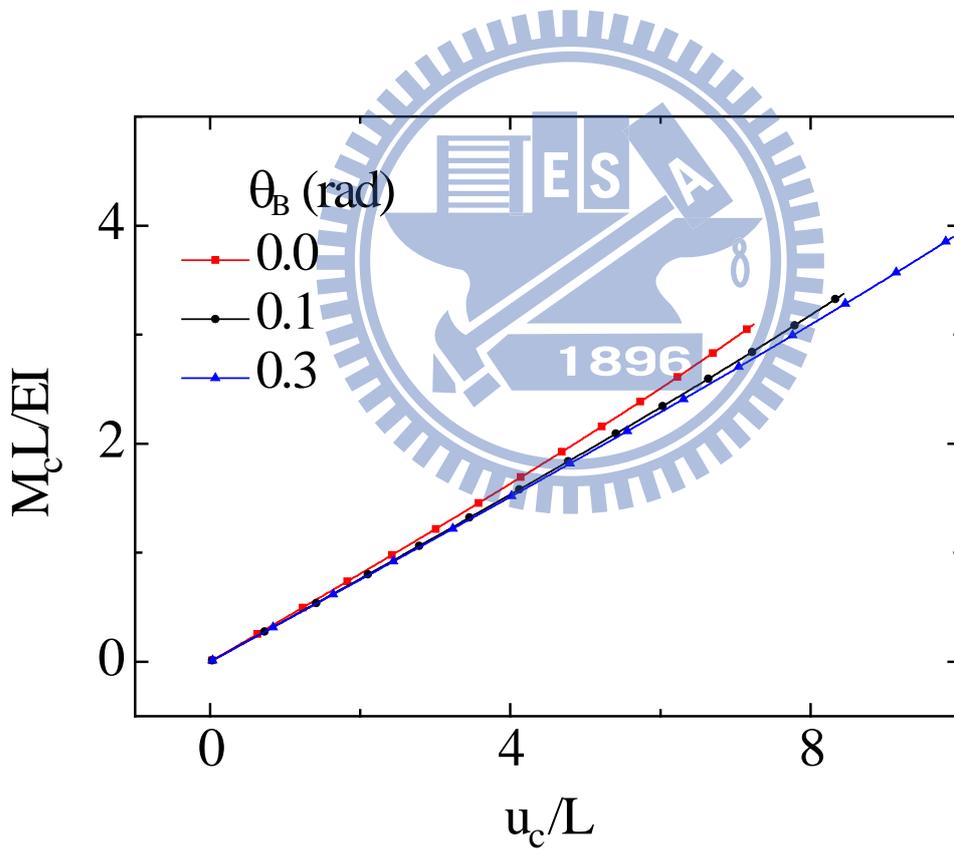


圖二十七 受均佈載重之挫屈梁($\theta=0.3rad$)的(a)次要平衡路徑及(b)無因次

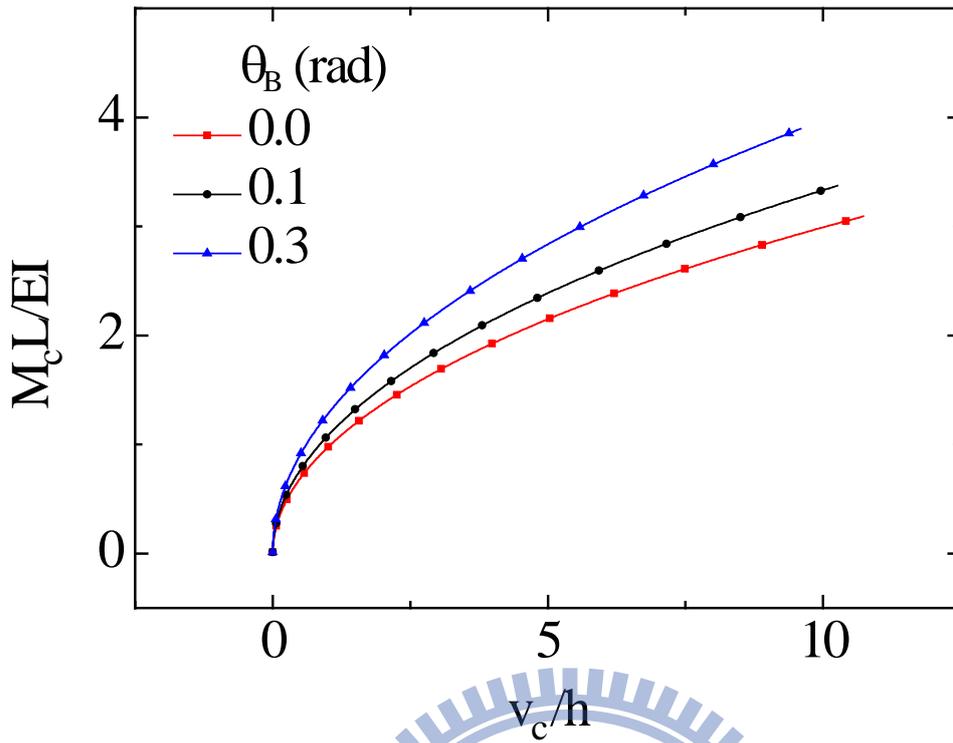
側向位移分佈圖



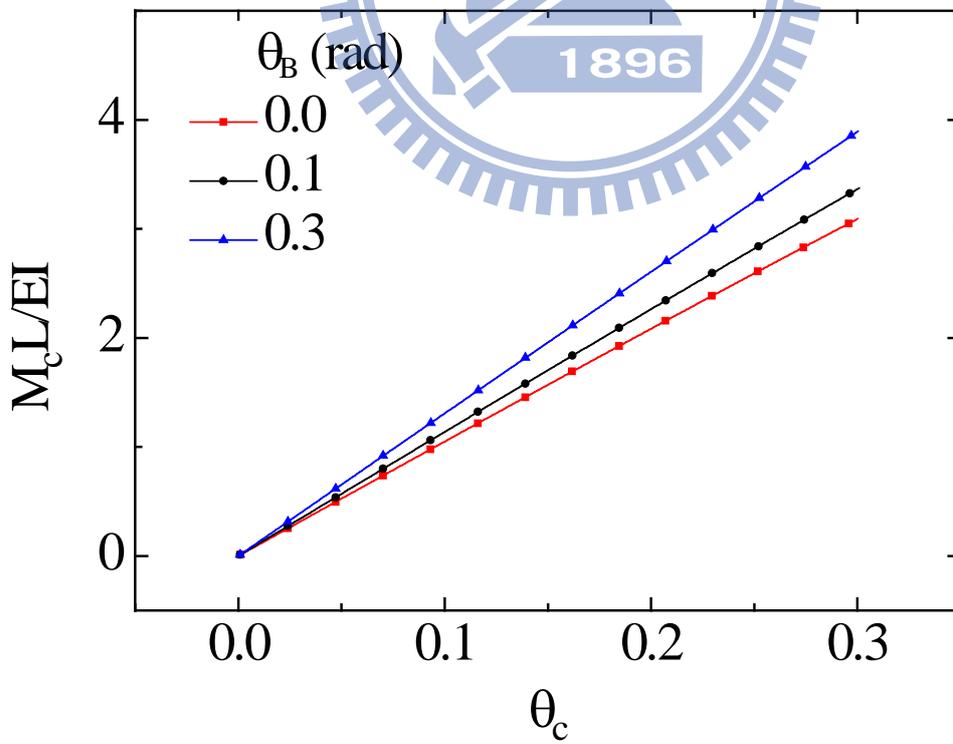
圖二十八 具端點轉角之挫屈梁受集中力及力矩負荷作用的示意圖



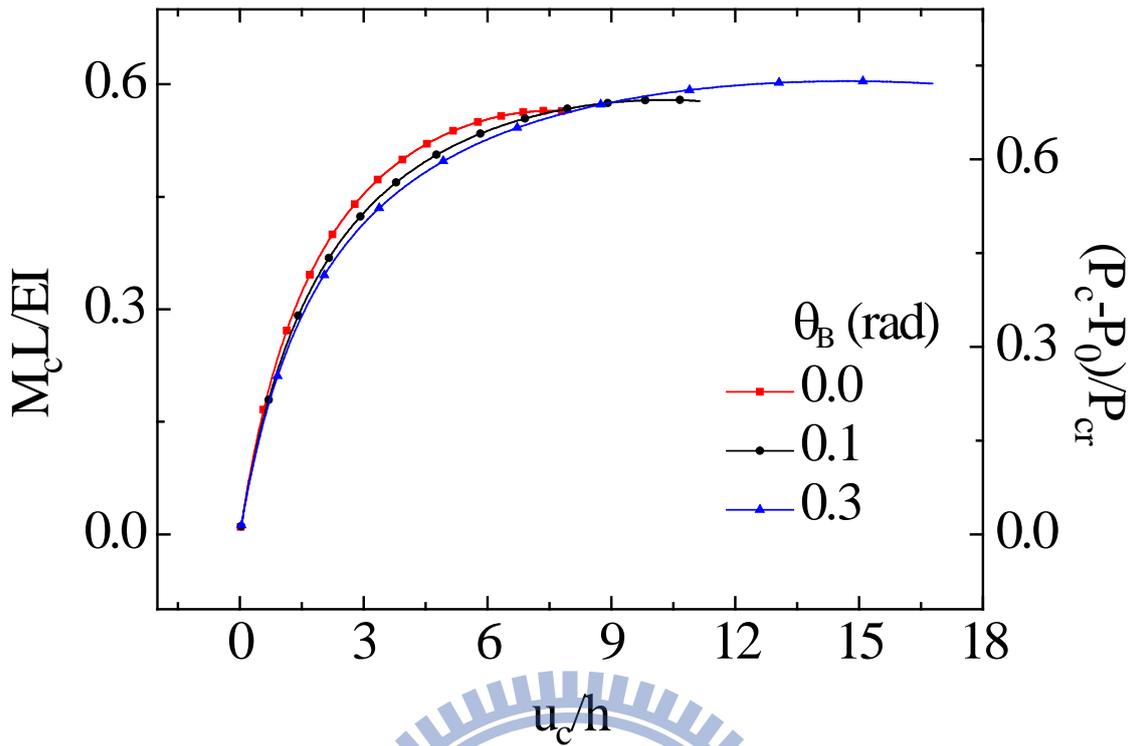
圖二十九 具端點轉角之挫屈梁受中點力矩之負荷-位移圖(u_c)



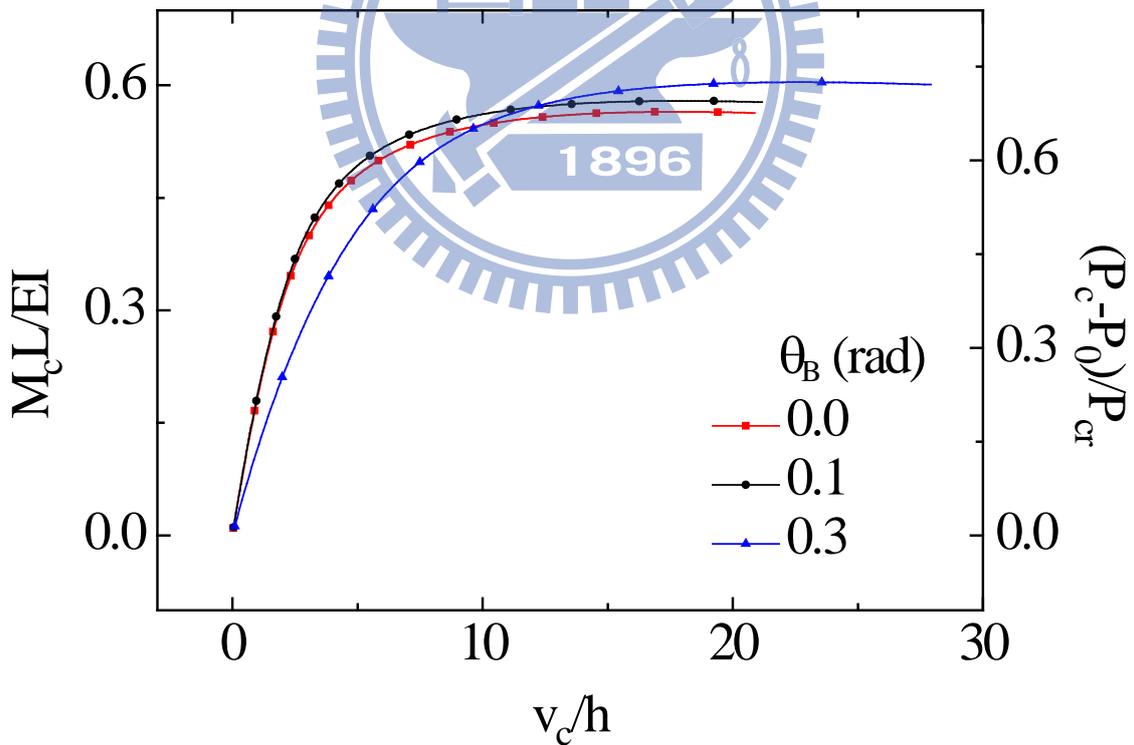
圖三十 具端點轉角之挫屈梁受中點力矩之負荷-位移圖(v_c)



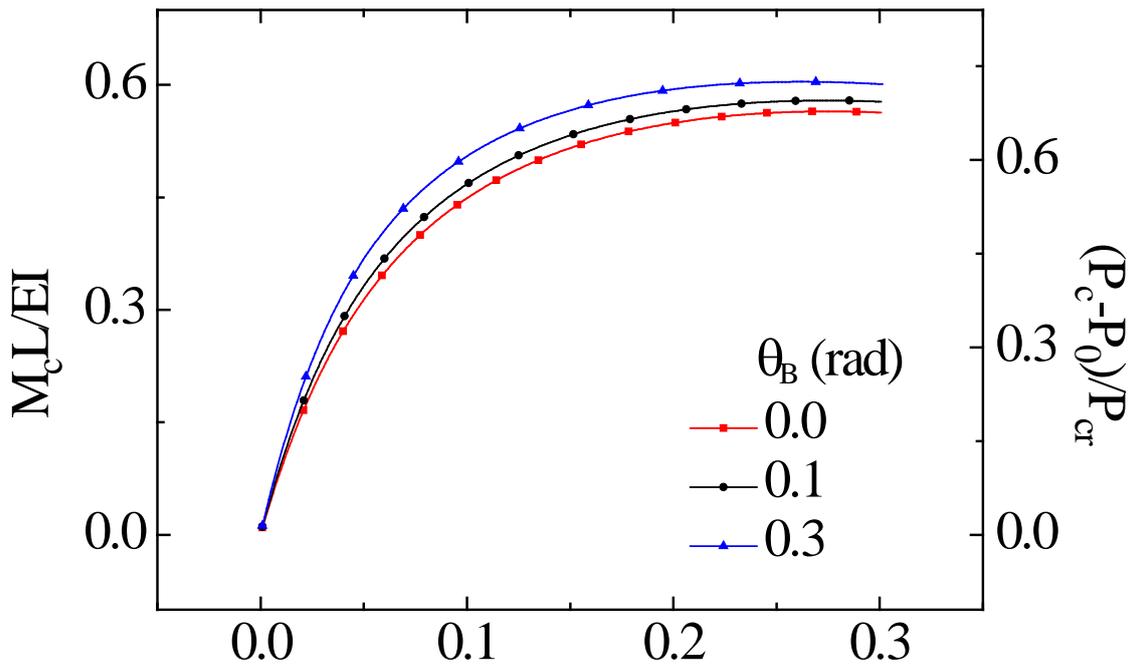
圖三十一 具端點轉角之挫屈梁受中點力矩之負荷-位移圖(θ_c)



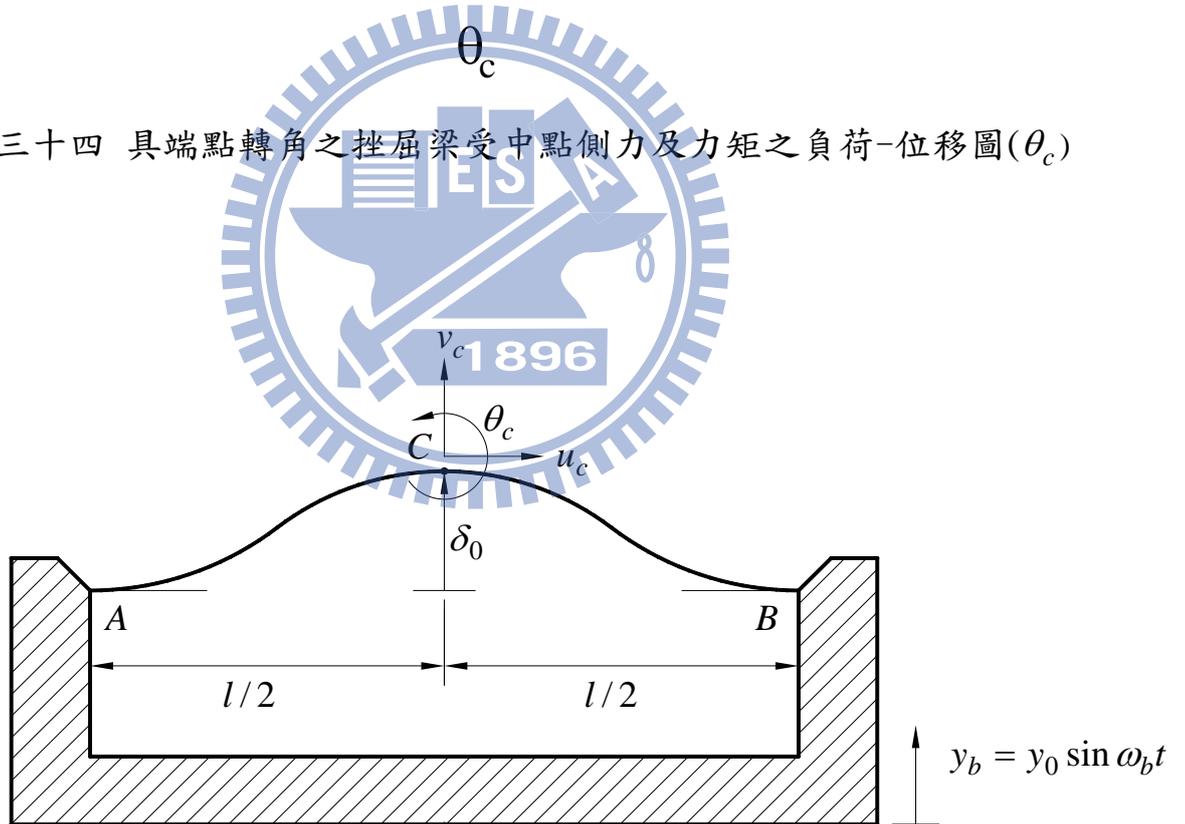
圖三十二 具端點轉角之挫屈梁受中點側力及力矩之負荷-位移圖(u_c)



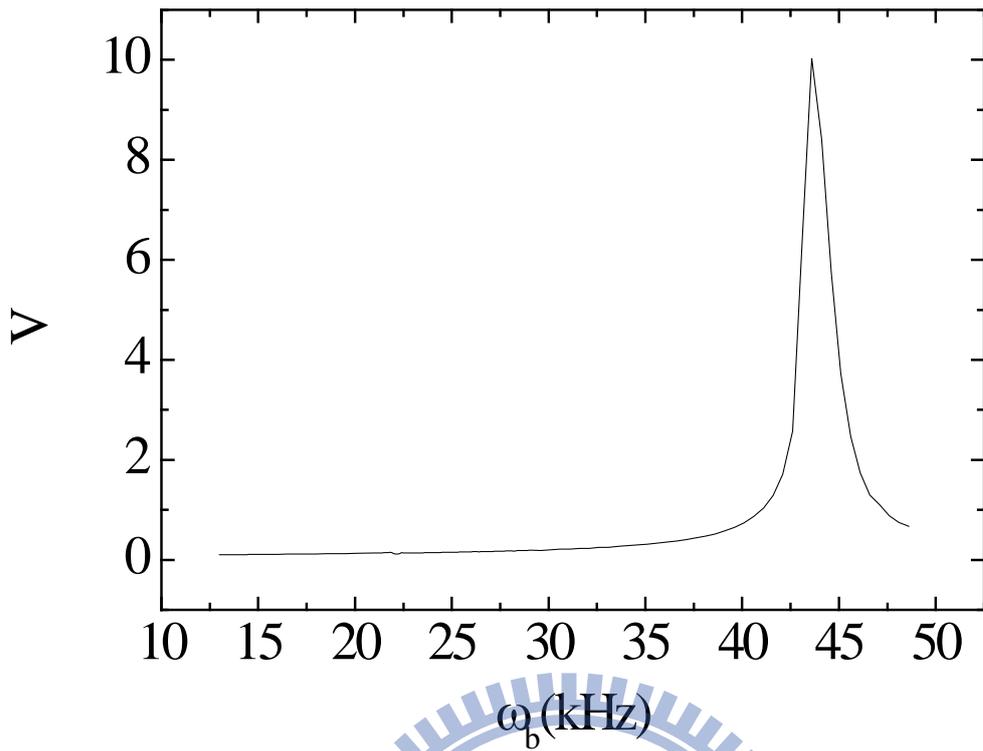
圖三十三 具端點轉角之挫屈梁受中點側力及力矩之負荷-位移圖(v_c)



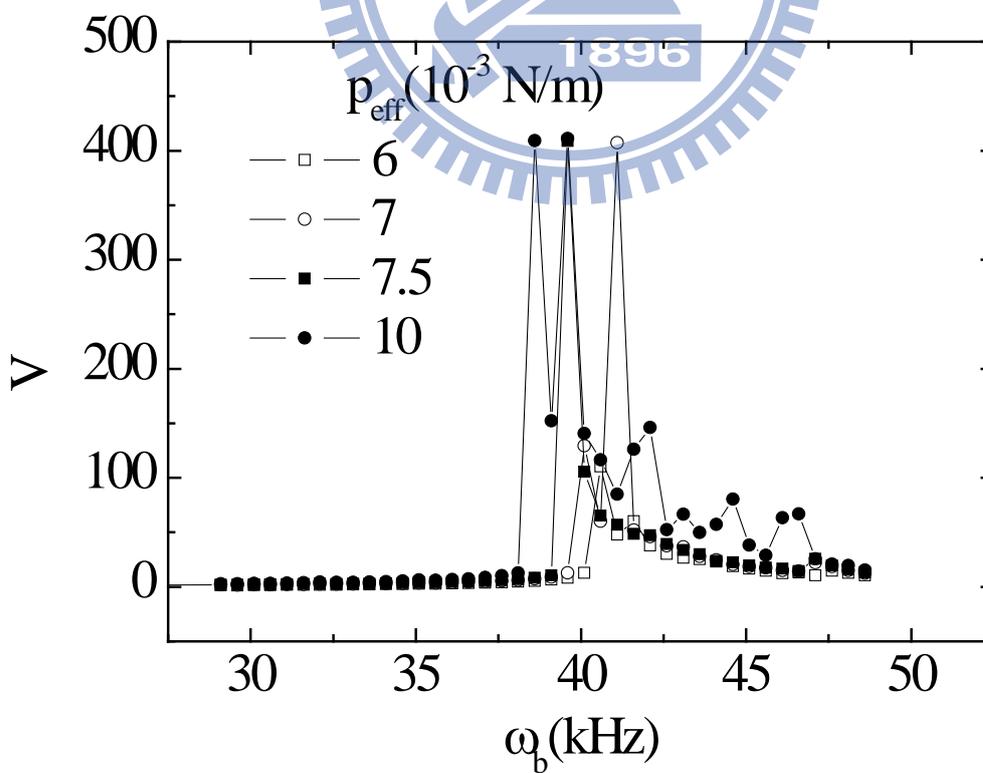
圖三十四 具端點轉角之挫屈梁受中點側力及力矩之負荷-位移圖(θ_c)



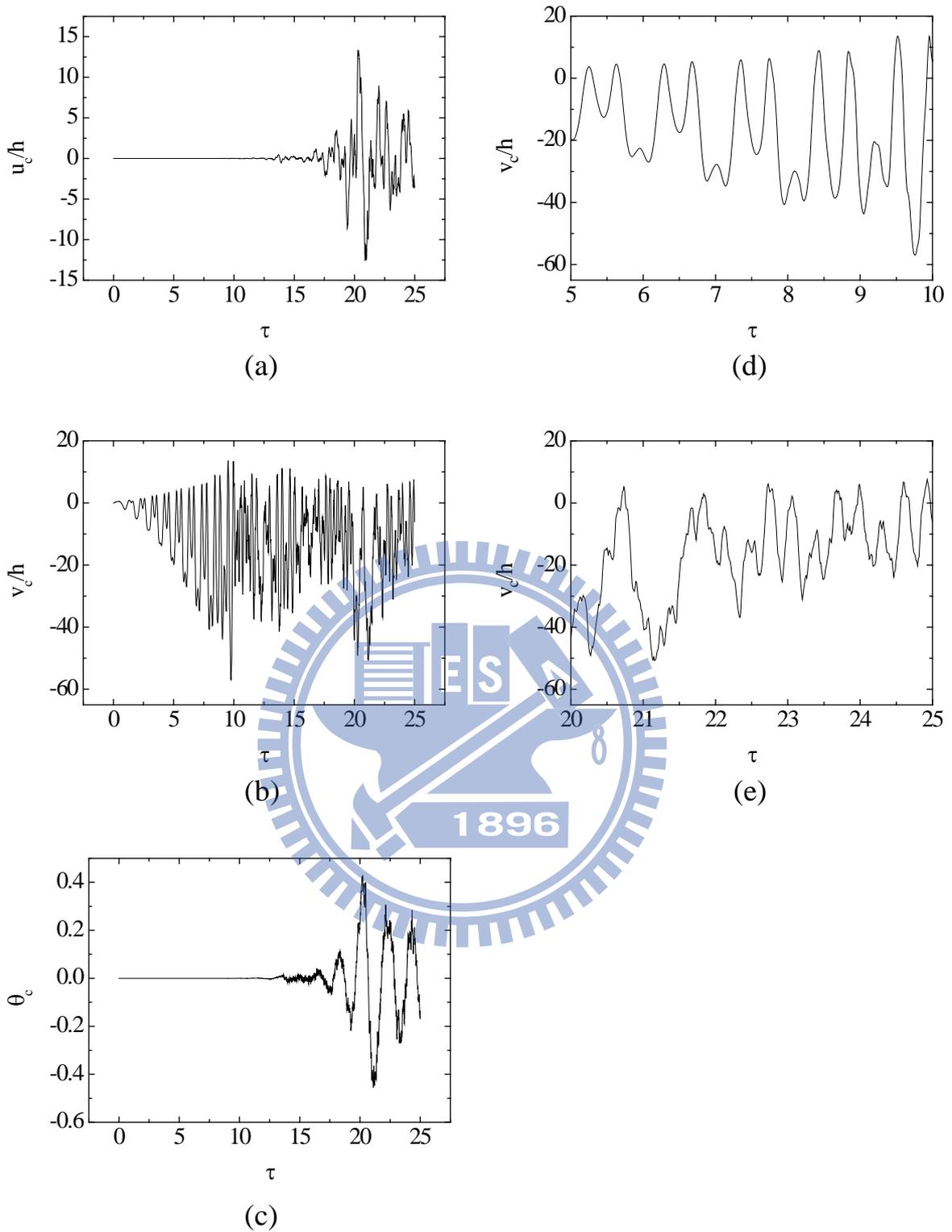
圖三十五 挫屈梁受到基底振動示意圖



圖三十六 挫屈梁之小振幅的頻率側向位移響應圖 ($p_{eff} = 1 \times 10^{-4} N/m$)

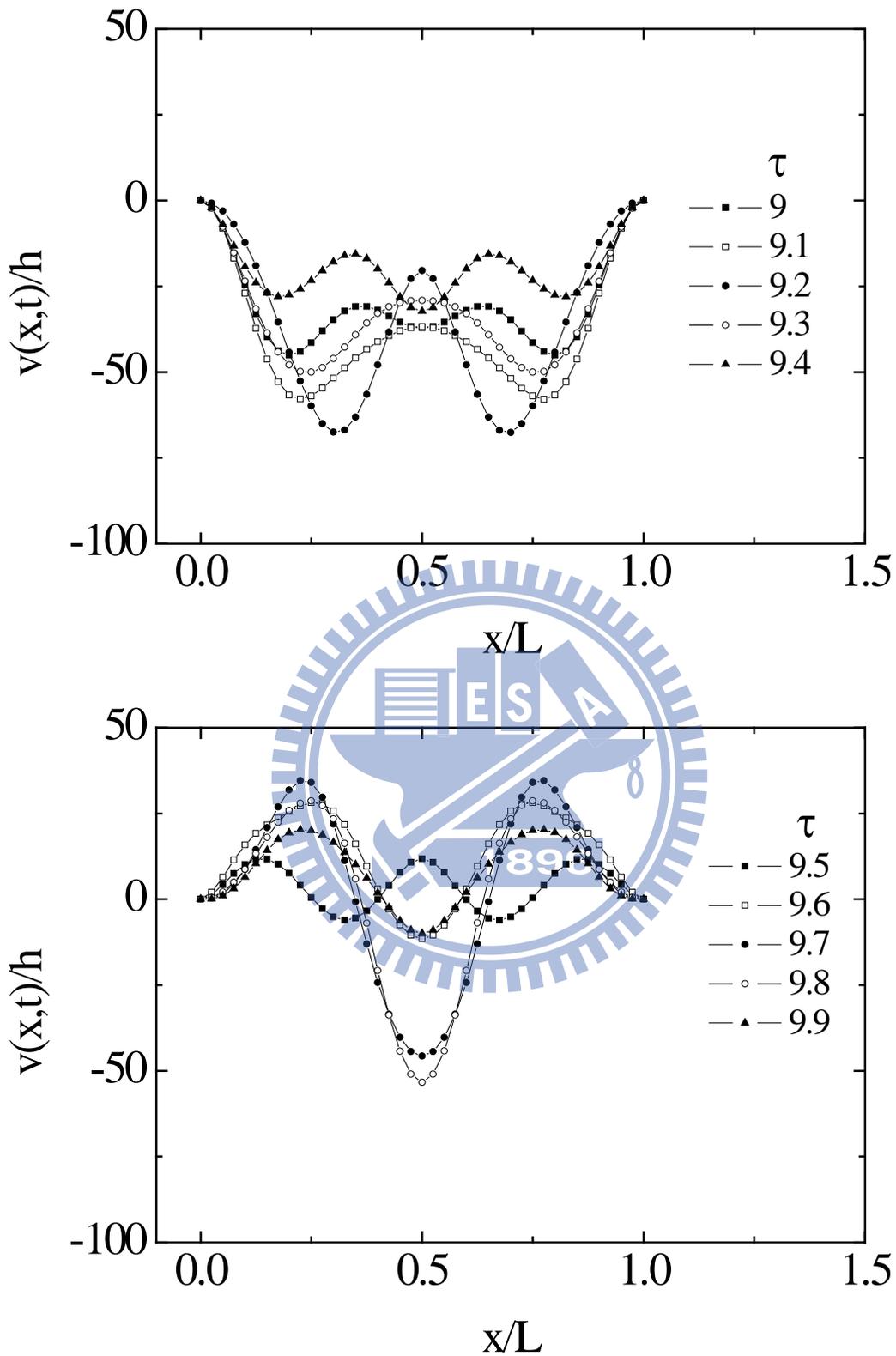


圖三十七 挫屈梁在主共振頻率附近大振幅的側向位移之頻率響應圖



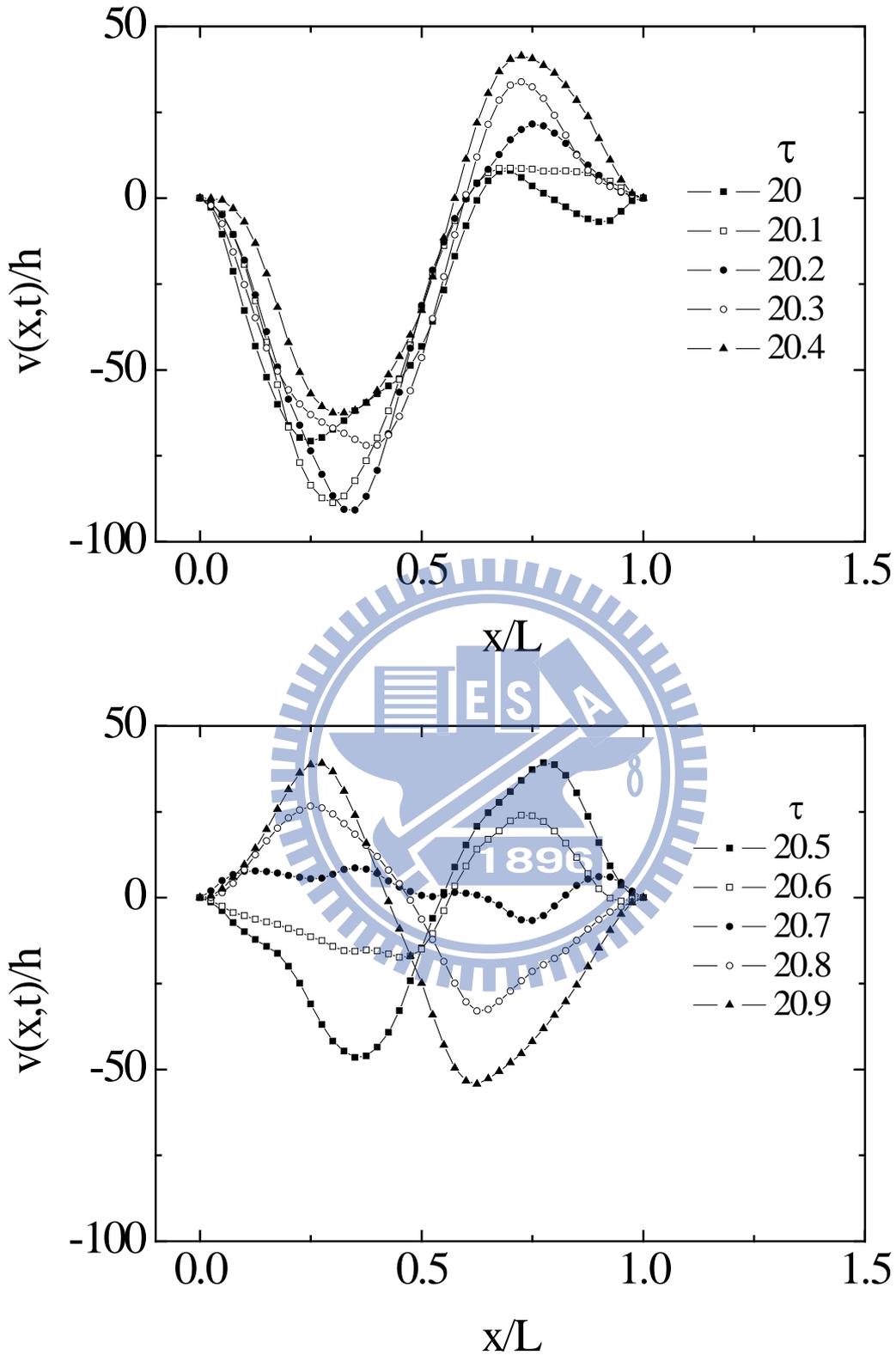
圖三十八 挫屈梁中點位移的歷時分析

$$(P_{eff} = 7.5 \times 10^{-4} N/m, \omega_b = 41.1 kHz)$$



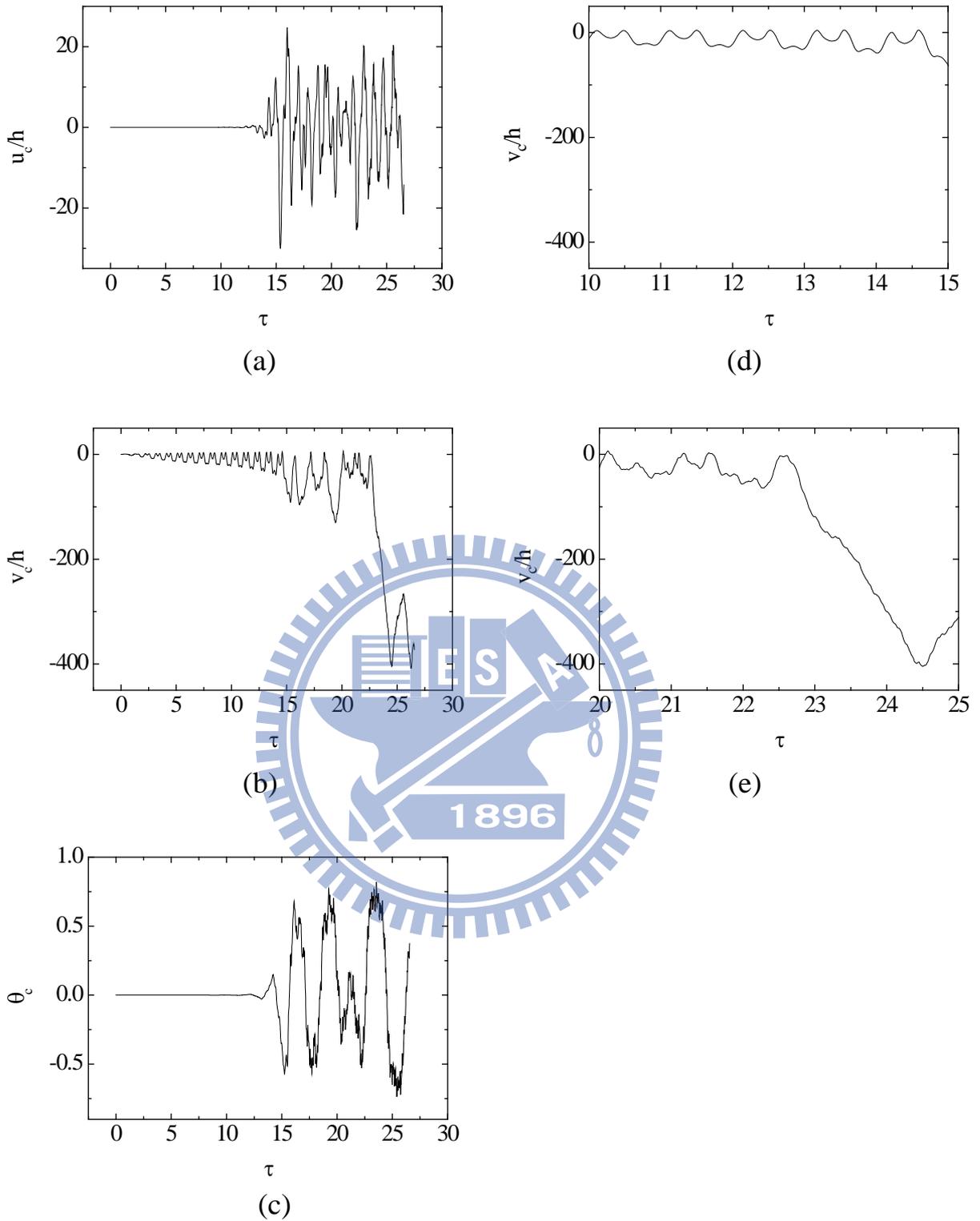
圖三十九 挫屈梁在第十個外力周期之側向位移分佈圖

$$(p_{eff} = 7.5 \times 10^{-4} N/m, \omega_b = 41.1 kHz)$$



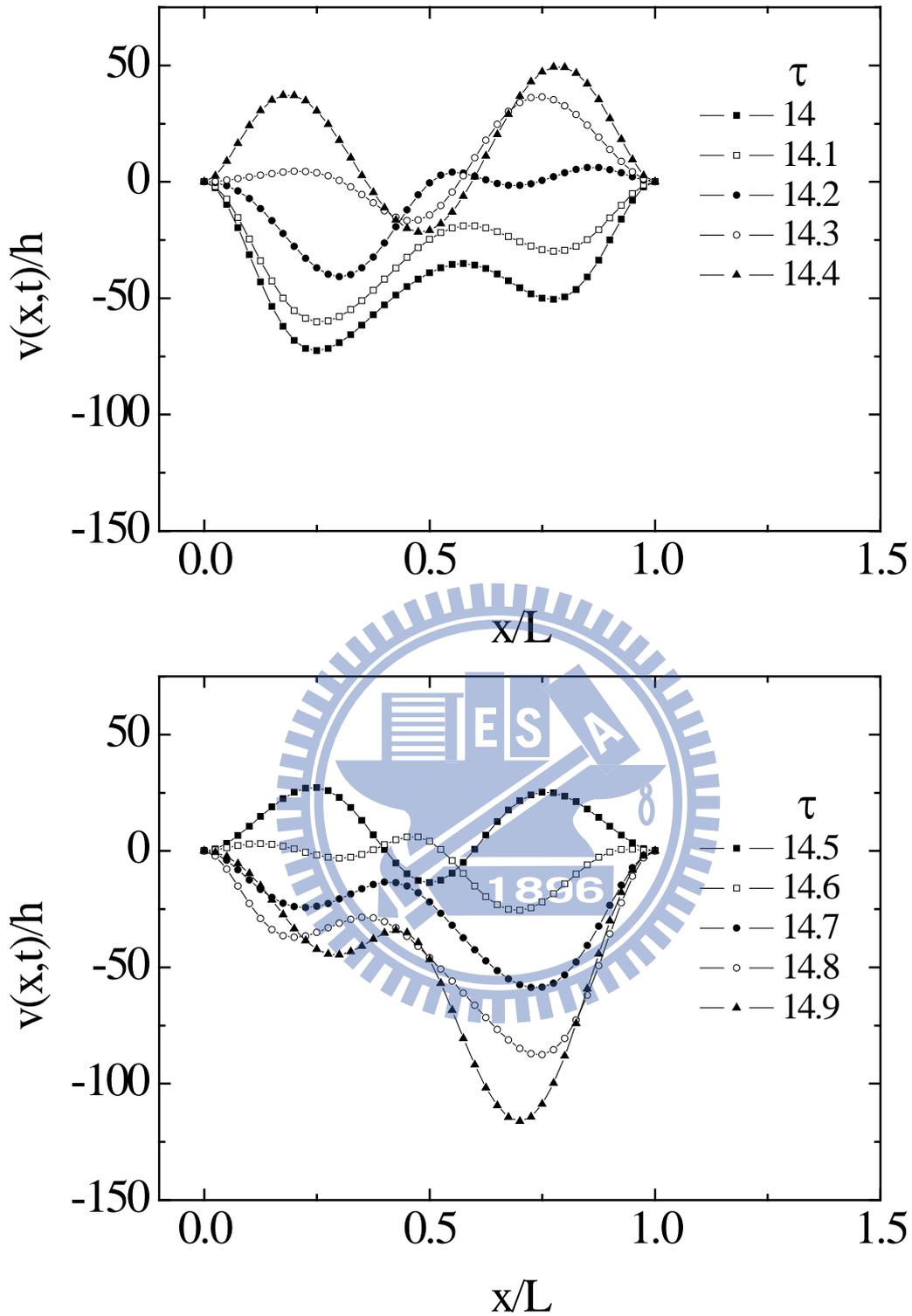
圖四十 挫屈梁在第二十一個外力周期之側向位移分佈圖

$$(p_{eff} = 7.5 \times 10^{-4} N/m, \omega_b = 41.1 kHz)$$



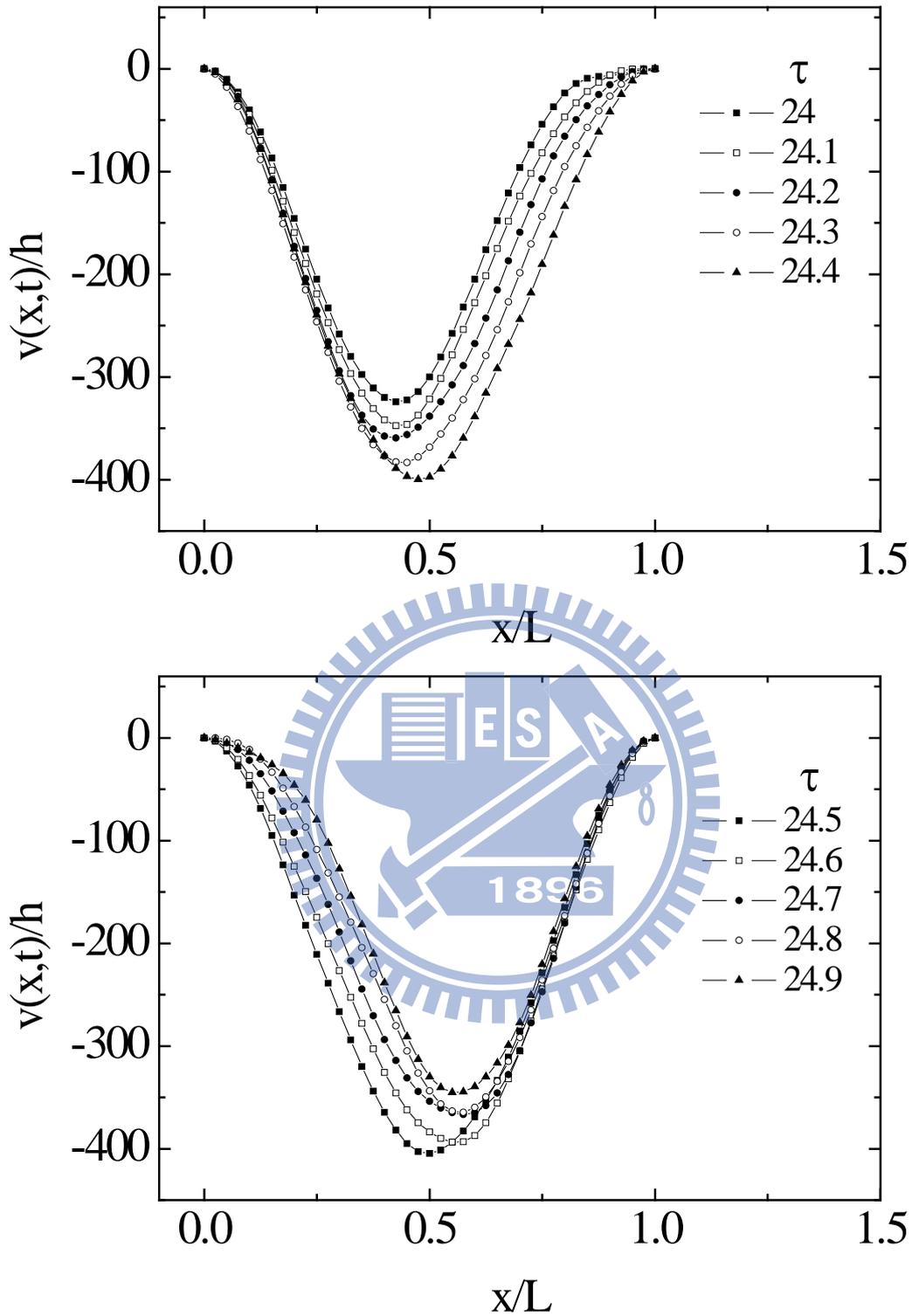
圖四十一 挫屈梁中點位移的歷時分析圖

$$(p_{eff} = 7.5 \times 10^{-4} N/m, \omega_b = 39.6 kHz)$$



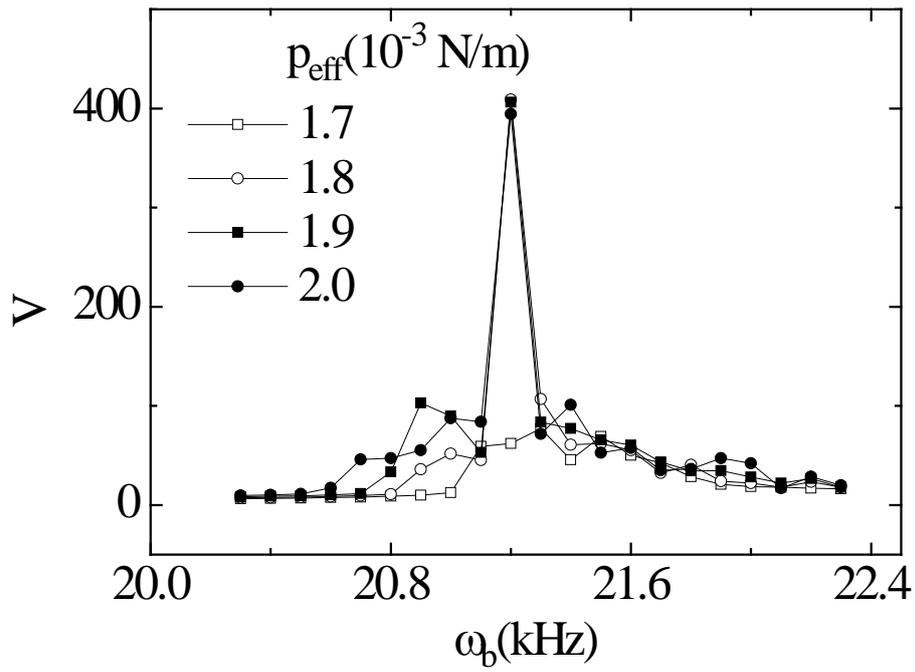
圖四十二 挫屈梁在第十五個外力周期之側向位移分佈圖

$$(p_{eff} = 7.5 \times 10^{-4} N/m, \omega_b = 39.6 kHz)$$



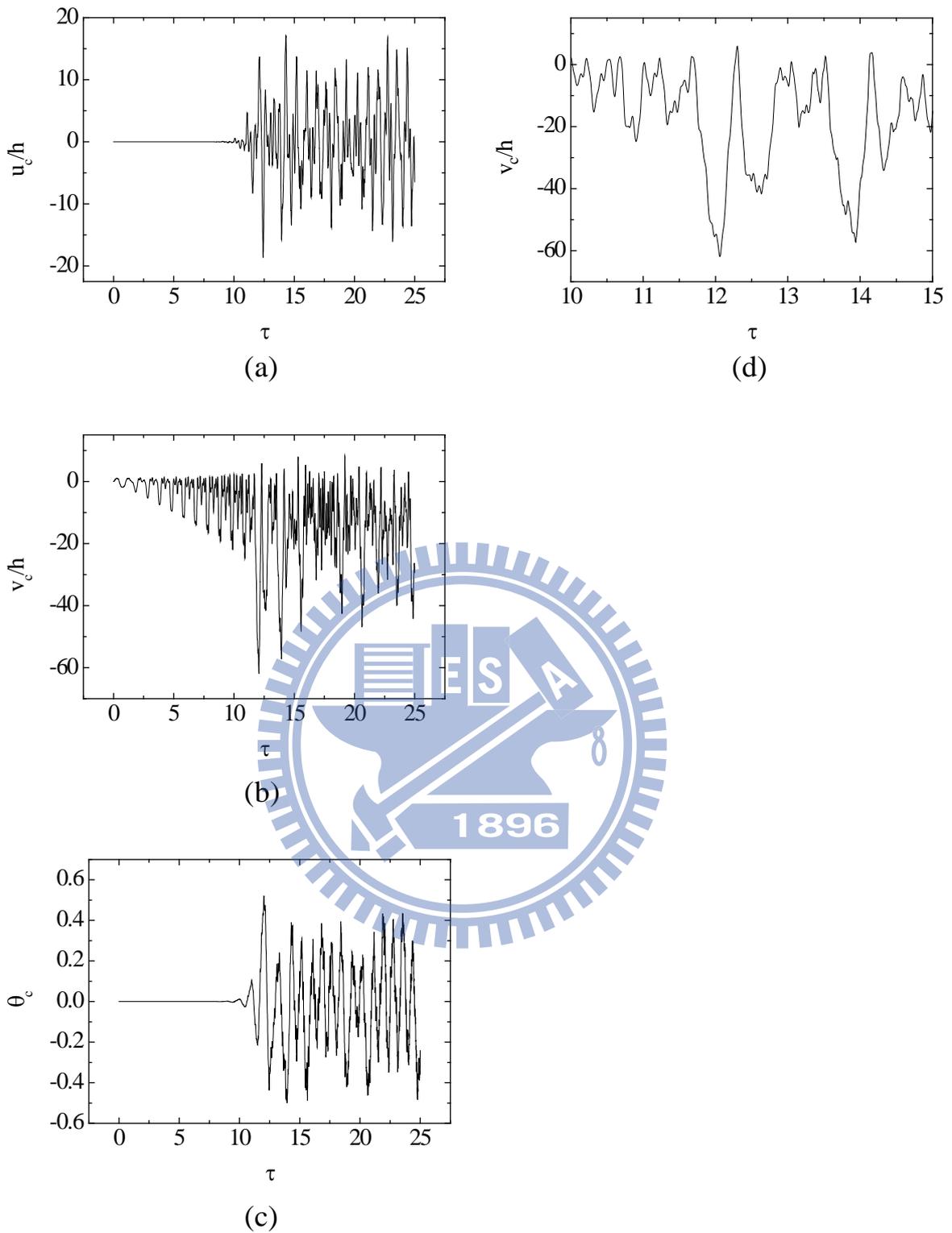
圖四十三 挫屈梁在第二十五個外力周期之側向位移分佈圖

$$(p_{eff} = 7.5 \times 10^{-4} N/m, \omega_b = 39.6 kHz)$$



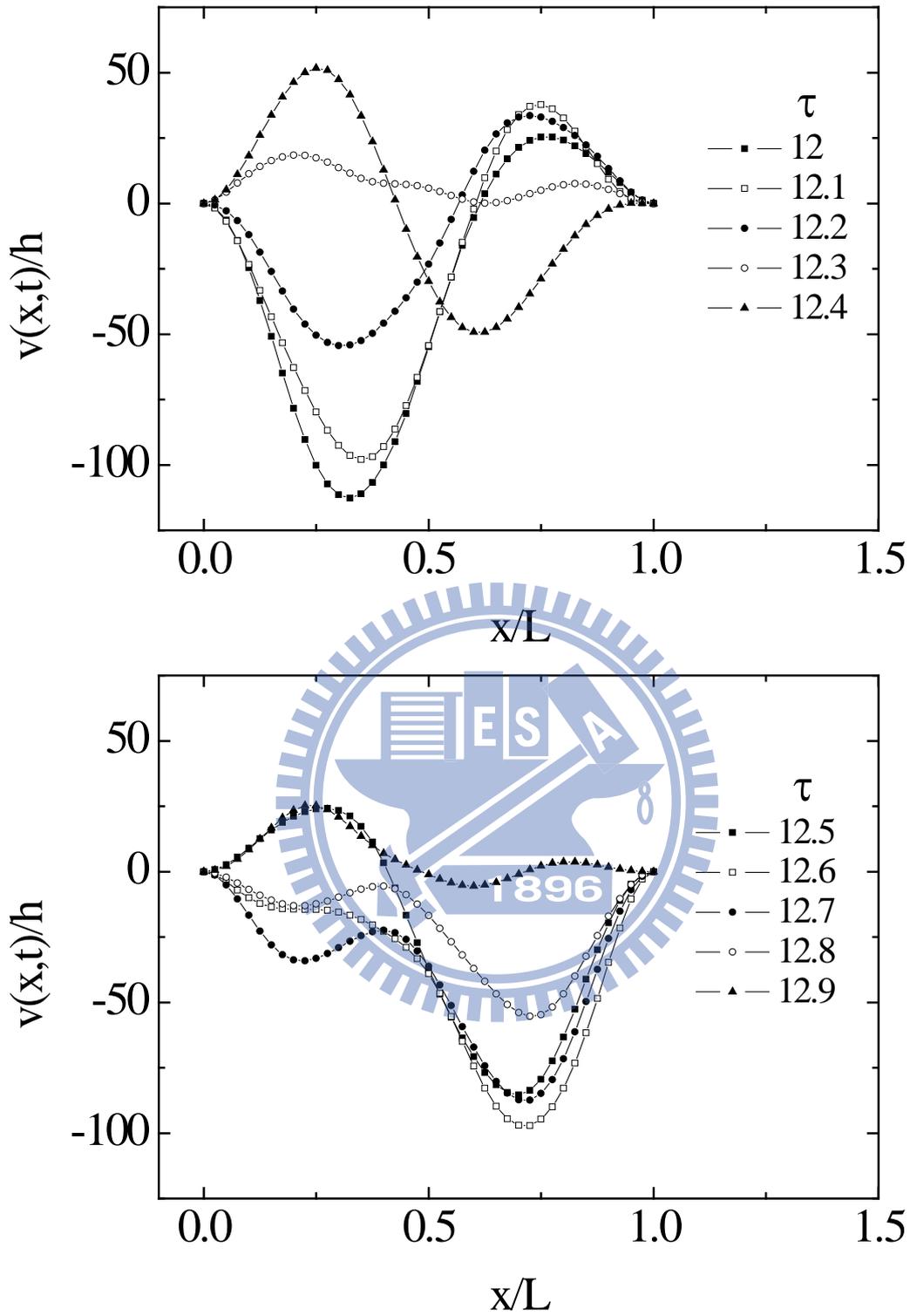
圖四十四 挫屈梁之超頻共振的側向位移頻率響應圖 $\omega_b \approx \frac{1}{2}\omega_2$





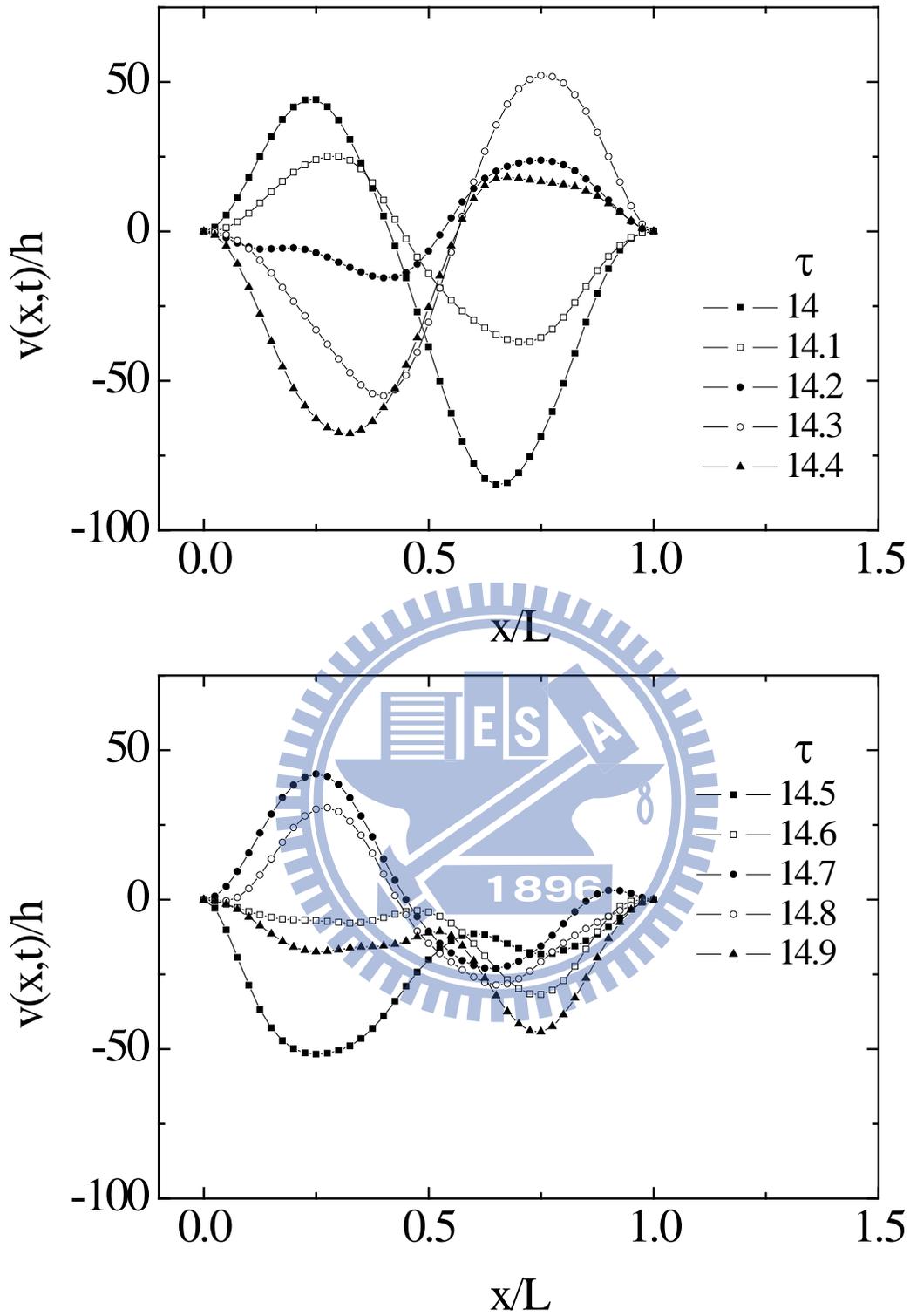
圖四十五 挫屈梁中點位移的歷時分析圖

$$(p_{eff} = 1.7 \times 10^{-3} N/m, \omega_b = 21.2 kHz)$$



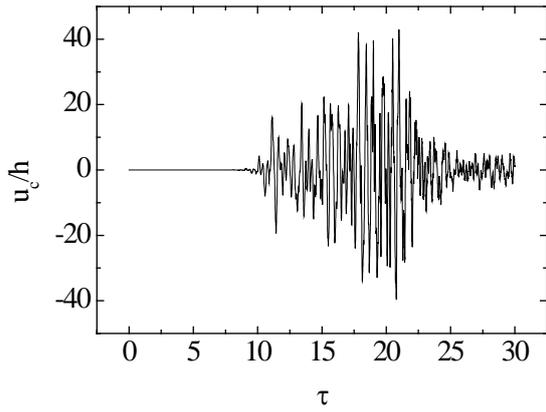
圖四十六 挫屈梁在第十三個外力周期之側向位移分佈圖

$$(p_{eff} = 1.7 \times 10^{-3} N/m, \omega_b = 21.2 kHz)$$

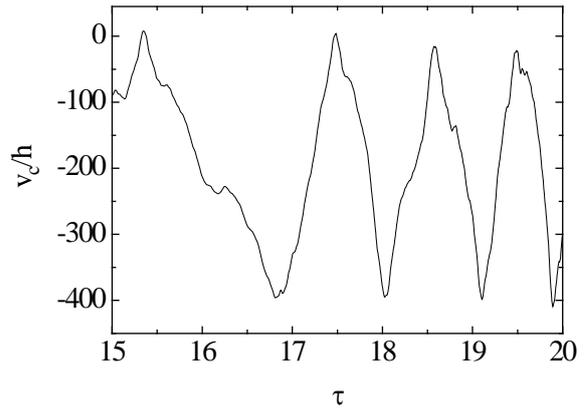


圖四十七 挫屈梁在第十五個外力周期之側向位移分佈圖

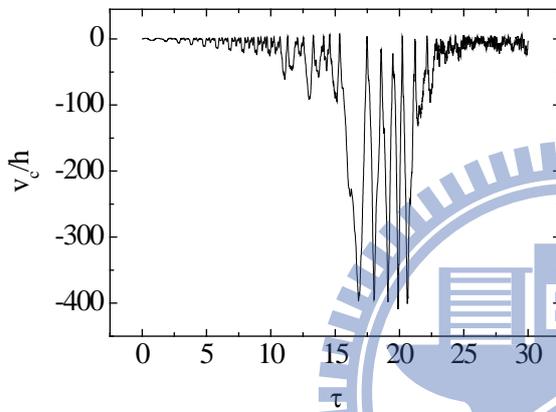
$$(p_{eff} = 1.7 \times 10^{-3} N/m, \omega_b = 21.2 kHz)$$



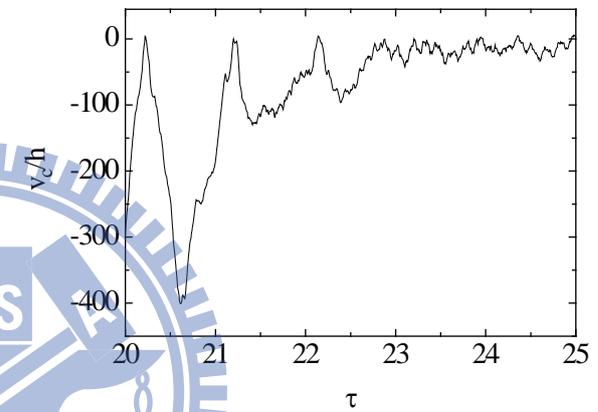
(a)



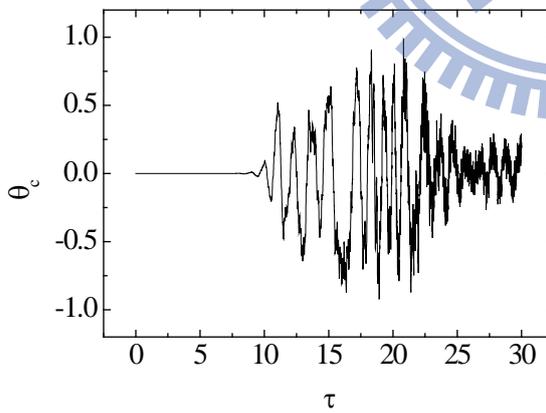
(d)



(b)



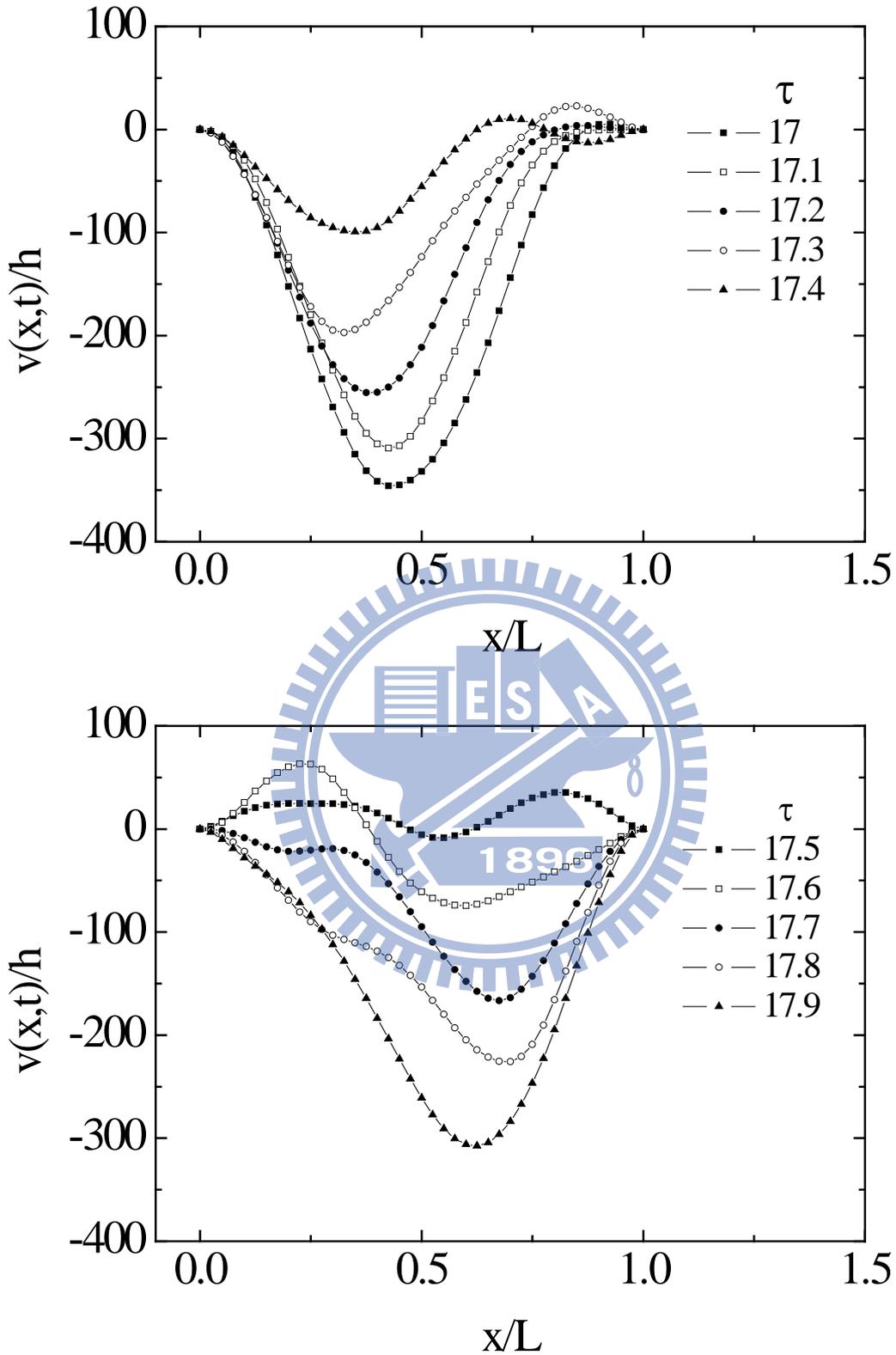
(e)



(c)

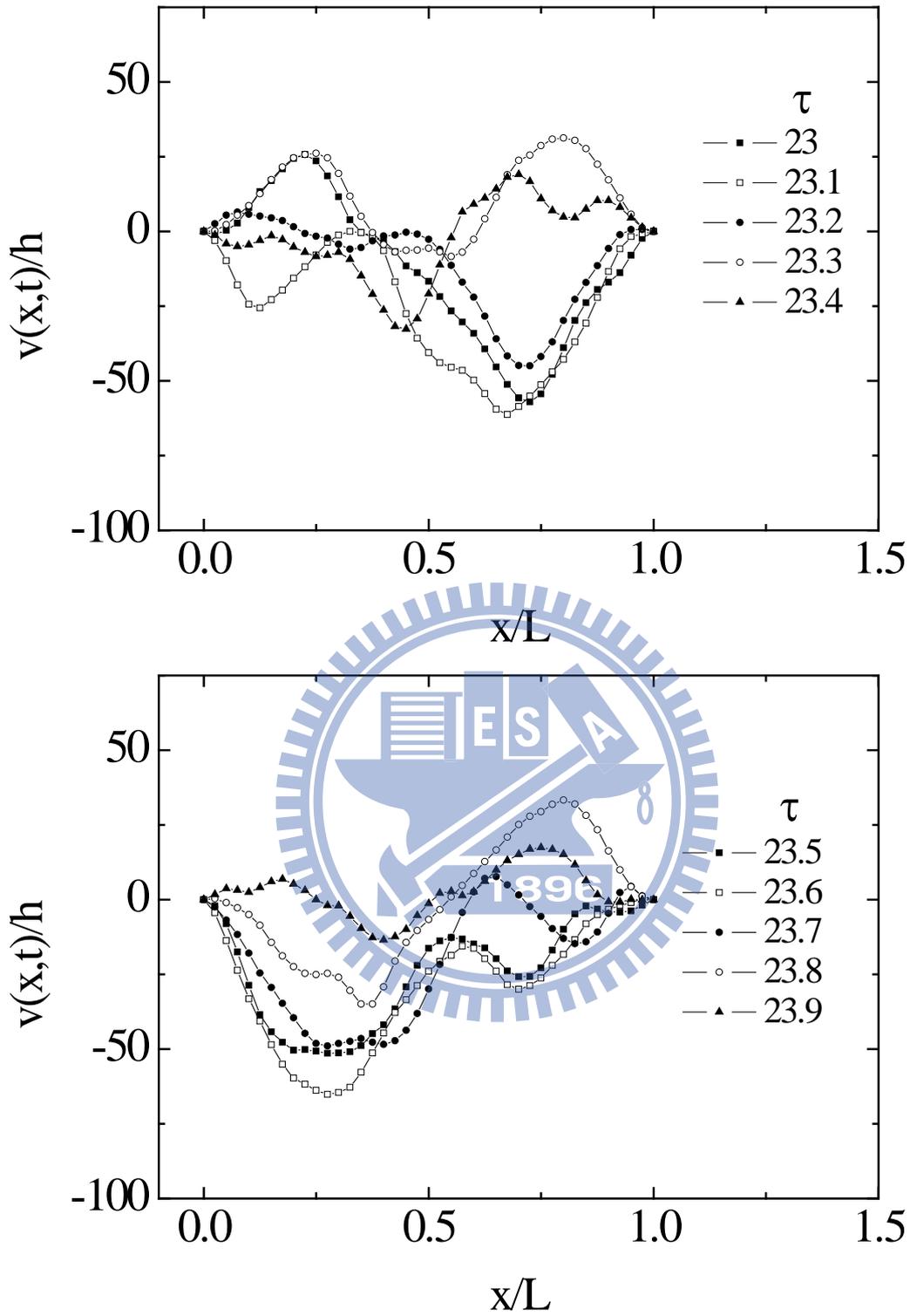
圖四十八 挫屈梁中點位移之歷時分析圖

$$(p_{eff} = 1.8 \times 10^{-3} N/m, \omega_b = 21.2 kHz)$$



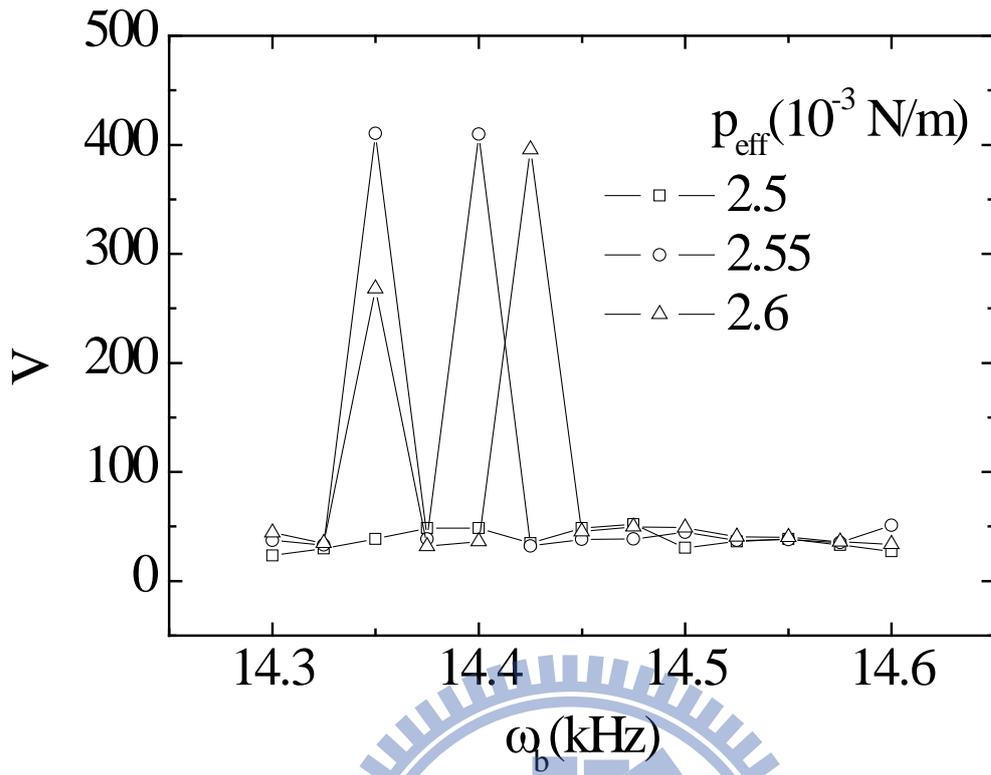
圖四十九 挫屈梁在第十八個外力周期之側向位移分佈圖

$$(p_{eff} = 1.8 \times 10^{-3} N/m, \omega_b = 21.2 kHz)$$

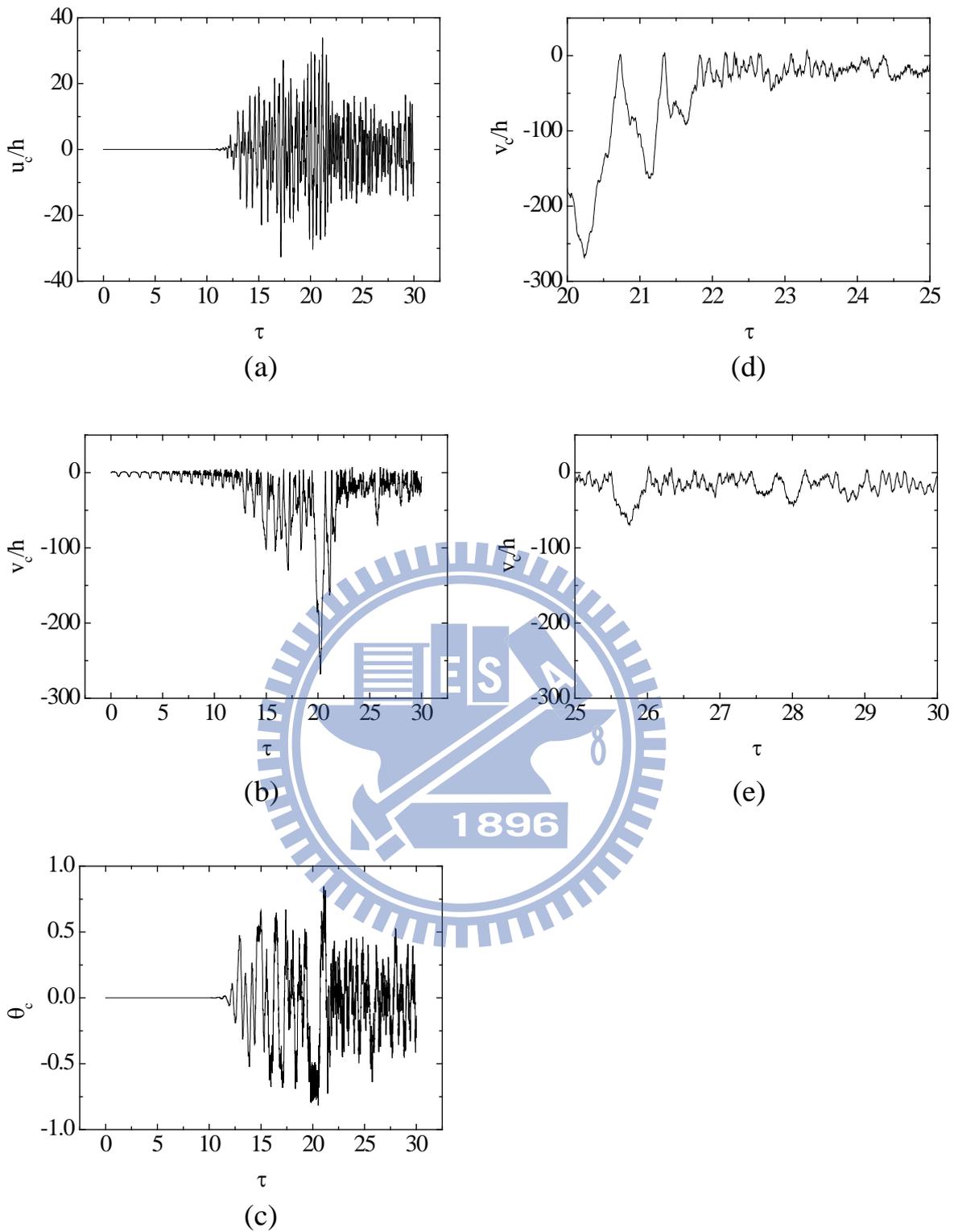


圖五十 挫屈梁在第二十四個外力周期之側向位移分佈圖

$$(p_{eff} = 1.8 \times 10^{-3} N/m, \omega_b = 21.2 kHz)$$

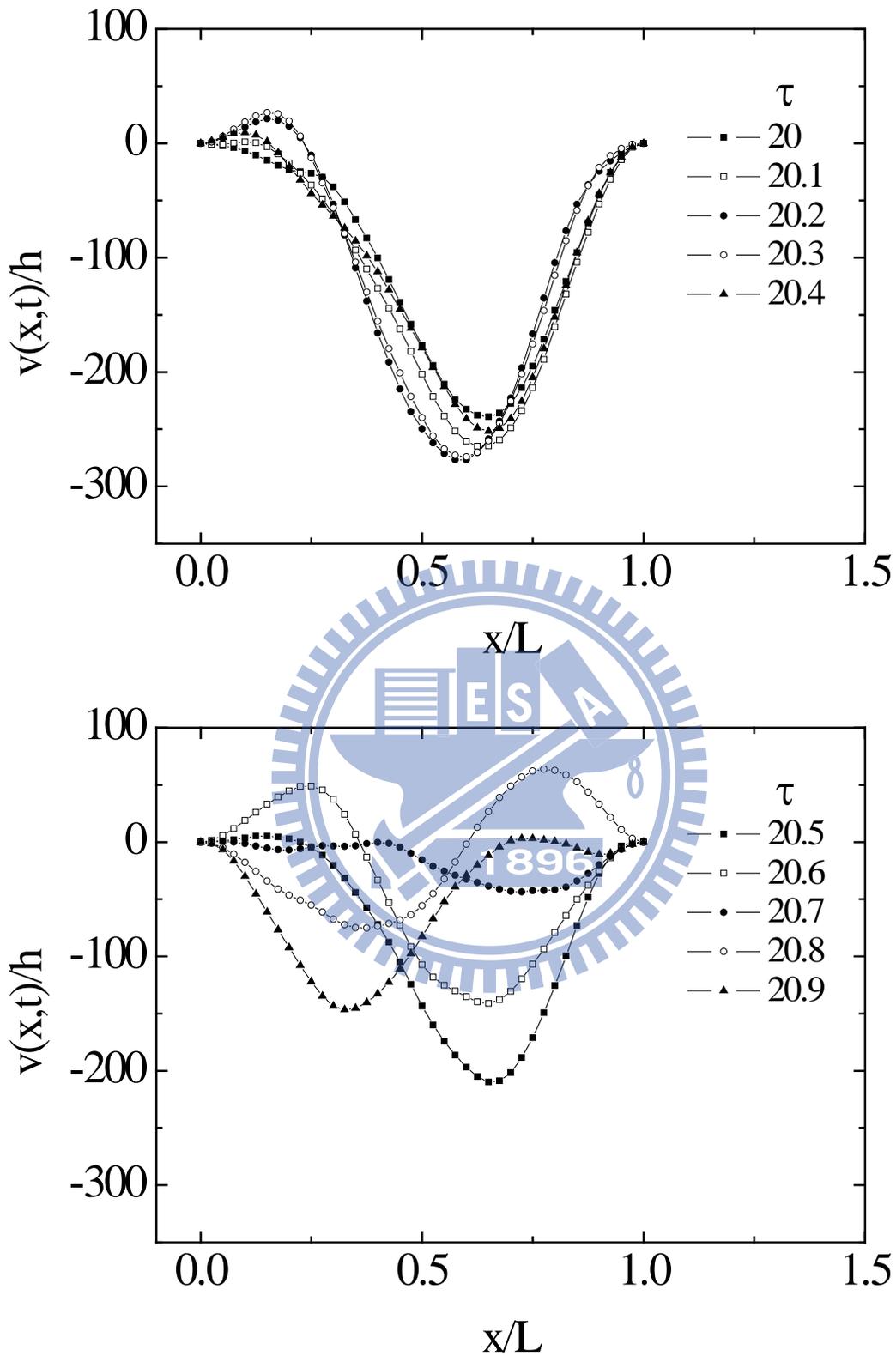


圖五十一 挫屈梁之超頻共振的側向位移頻率響應圖 $\omega_b \approx \frac{1}{3} \omega_2$



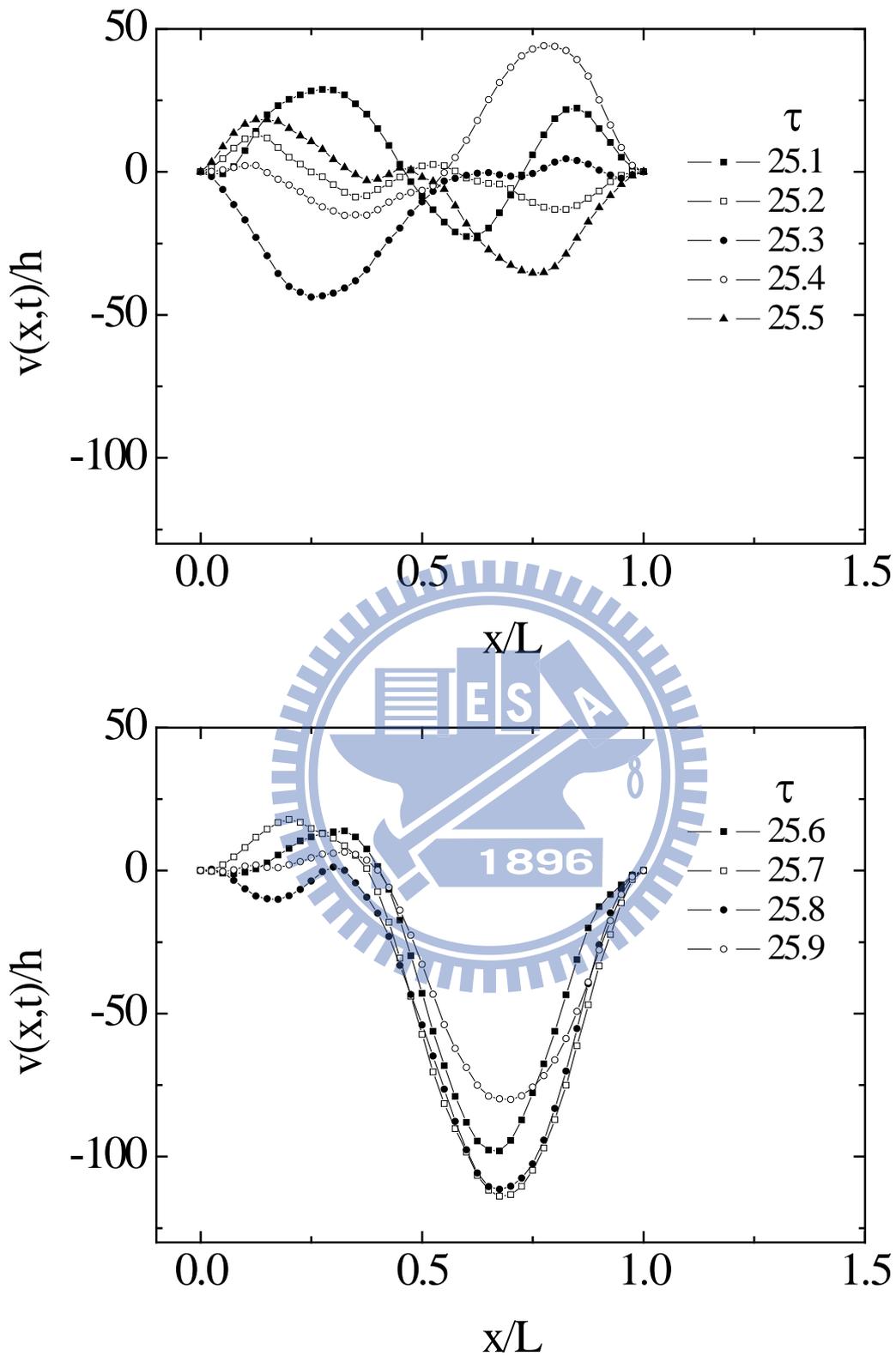
圖五十二 挫屈梁中點位移之歷時分析

($p_{eff} = 2.6 \times 10^{-3} N/m$, $\omega_b = 14.35 kHz$)



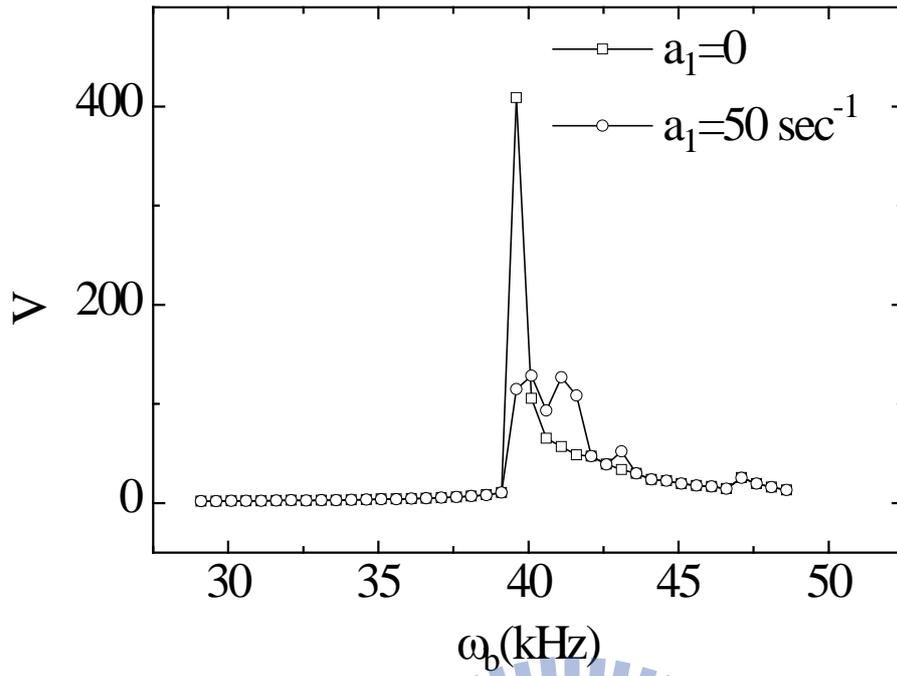
圖五十三 挫屈梁在第二十一個外力周期之側向位移分佈圖

$$(p_{eff} = 2.6 \times 10^{-3} N/m, \omega_b = 14.35 kHz)$$



圖五十四 挫屈梁在第二十六個外力周期之側向位移分佈圖

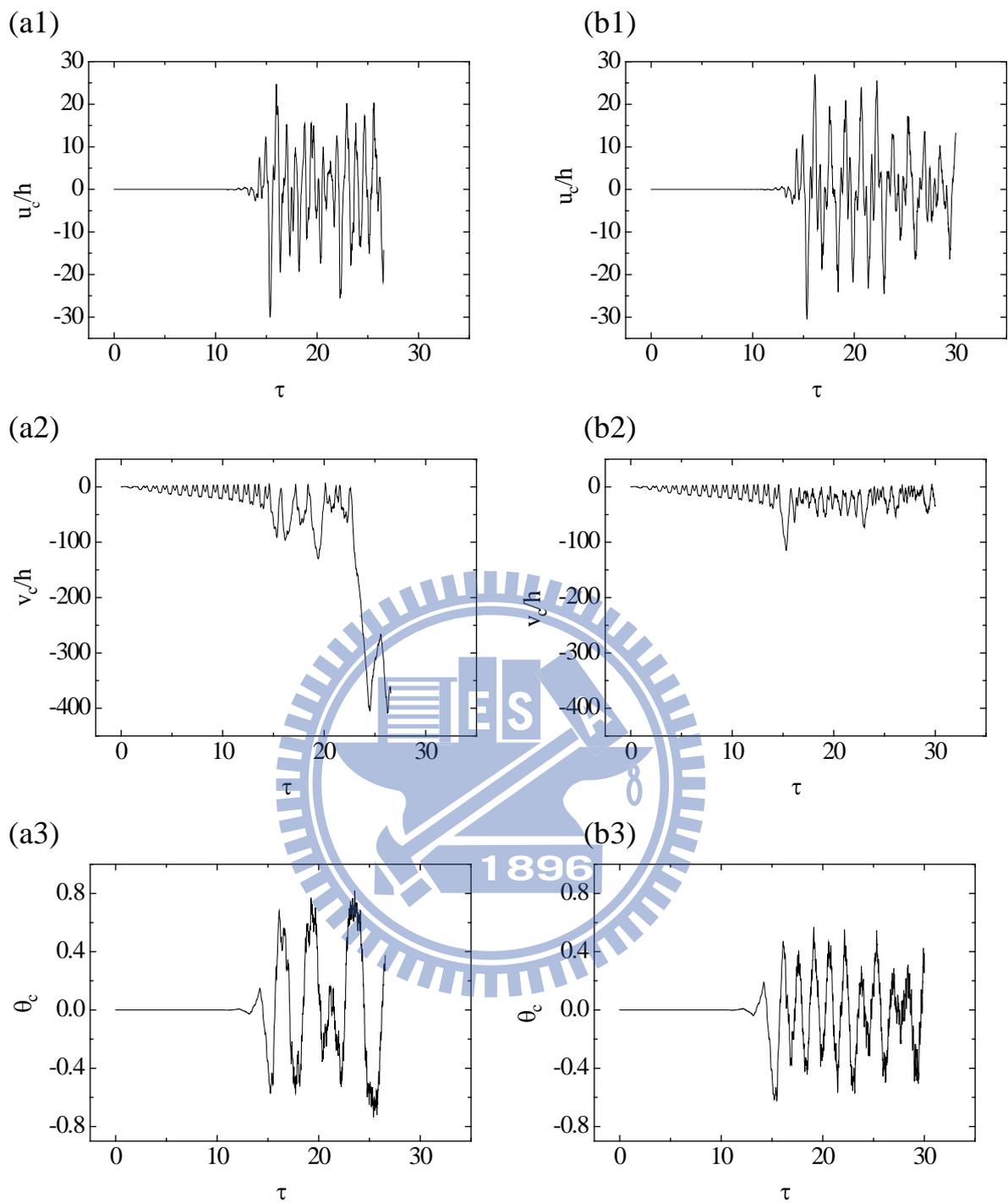
$$(p_{eff} = 2.6 \times 10^{-3} N/m, \omega_b = 14.35 kHz)$$



圖五十五 有阻尼與無阻尼之挫屈梁的側向位移頻率響應圖

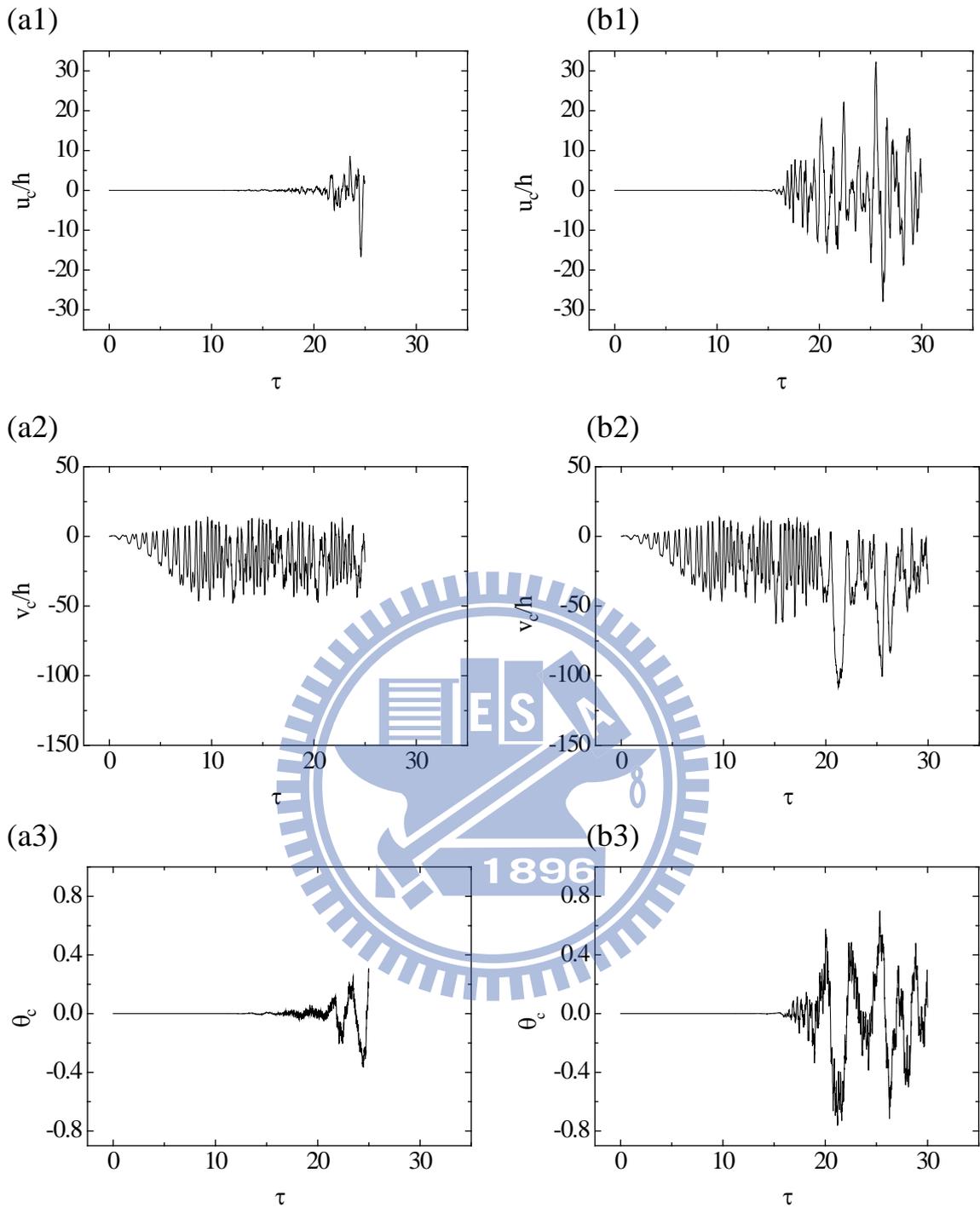
($p_{eff} = 7.5 \times 10^{-4} \text{ N/m}$, $\omega_b \approx \omega_2$)





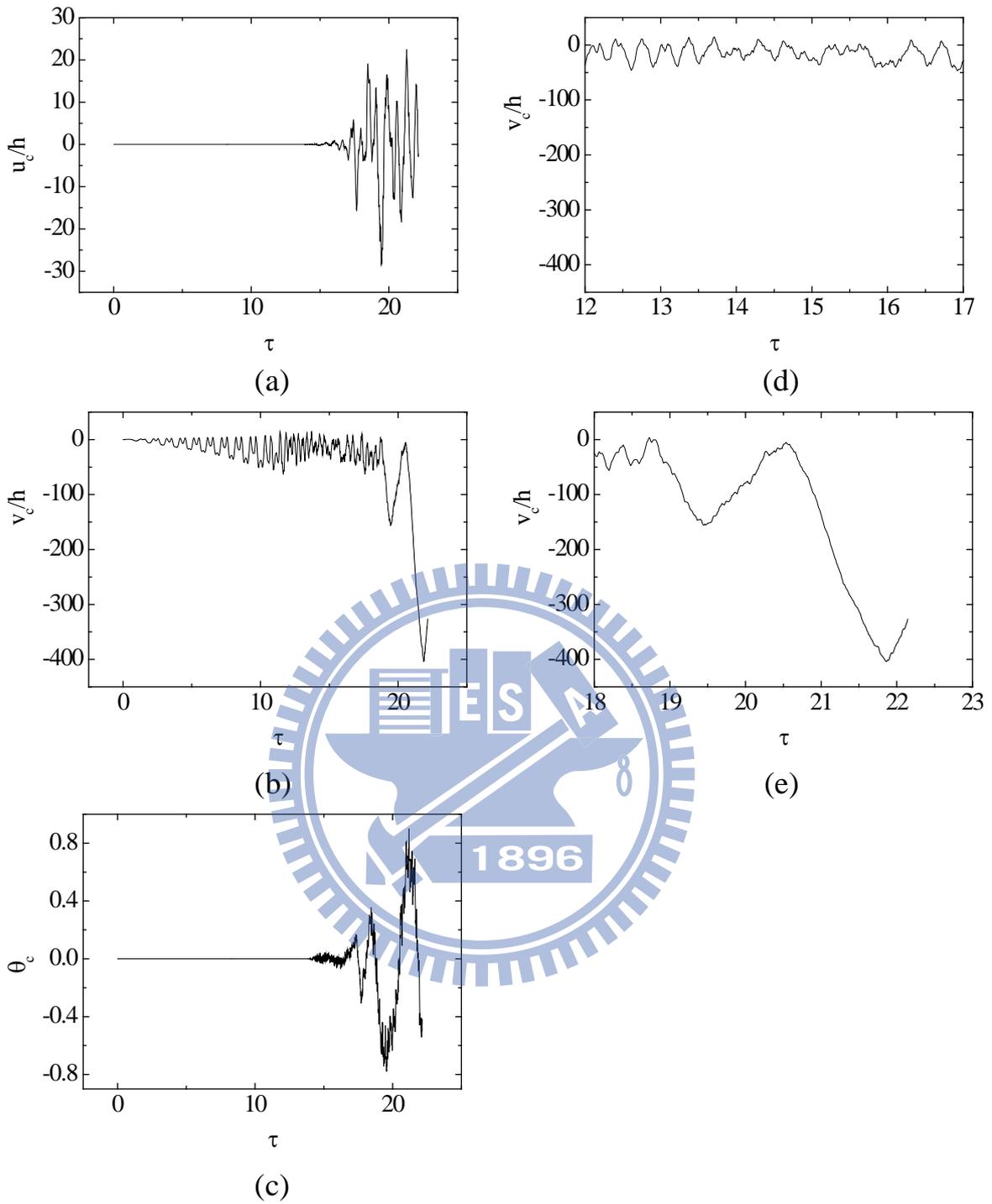
圖五十六 (a)無阻尼與(b)有阻尼之挫屈梁中點位移之歷時分析圖

$$(p_{eff} = 7.5 \times 10^{-4} N/m, \omega_b = 39.6kHz)$$



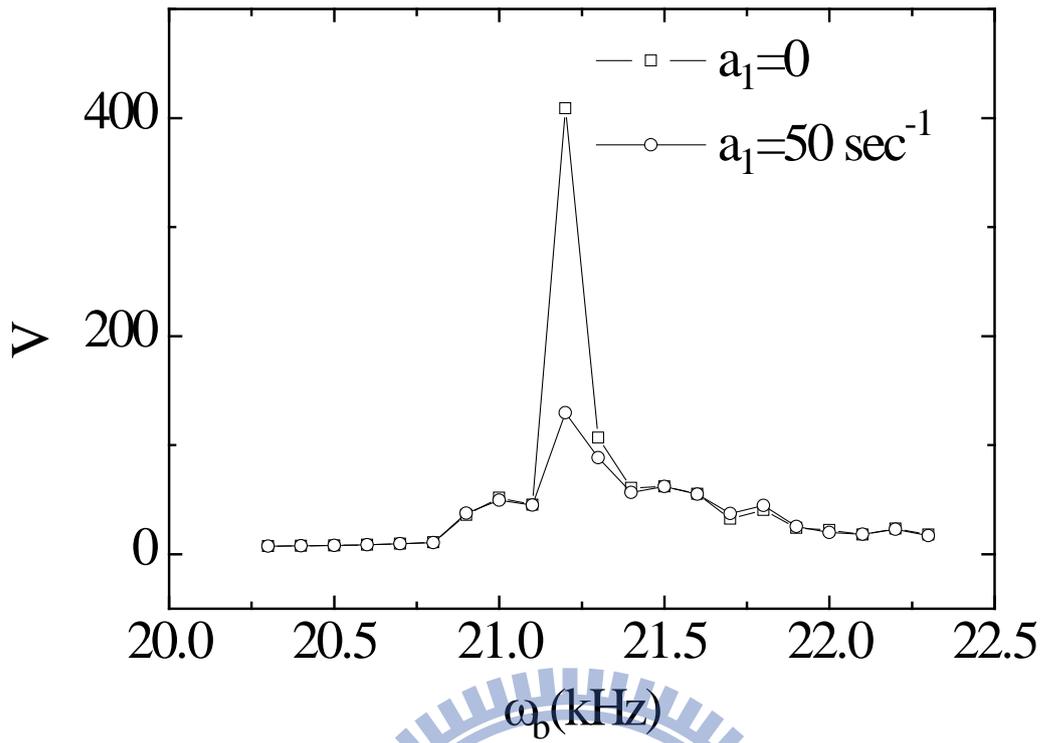
圖五十七 (a)無阻尼與(b)有阻尼之挫屈梁中點位移之歷時分析圖

$$(p_{eff} = 7.5 \times 10^{-4} N/m, \omega_b = 41.6 kHz)$$



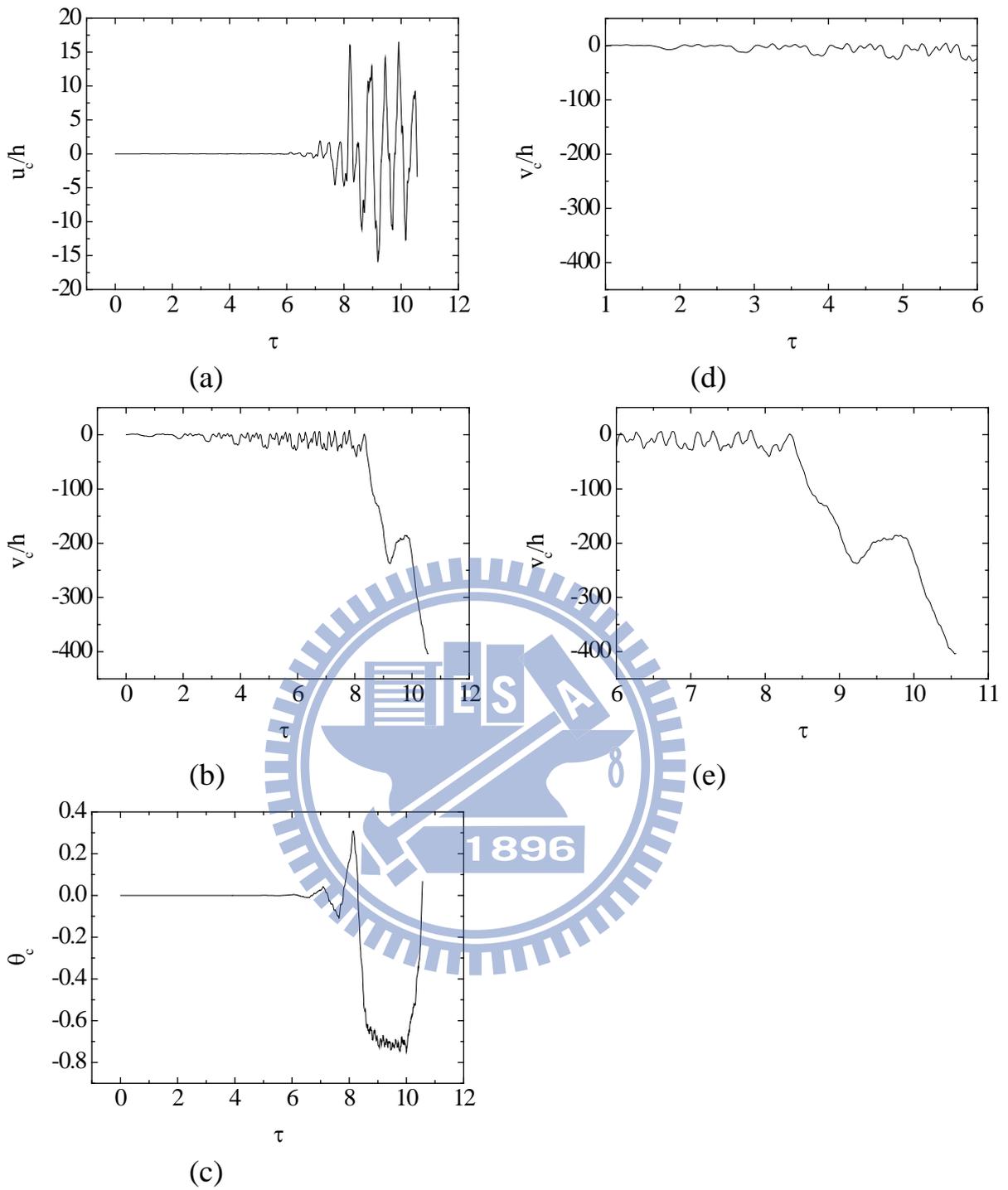
圖五十八 有阻尼之挫屈梁中點位移之歷時分析圖

$$(p_{eff} = 8.593 \times 10^{-4} N/m, \omega_b = 39.6 kHz)$$



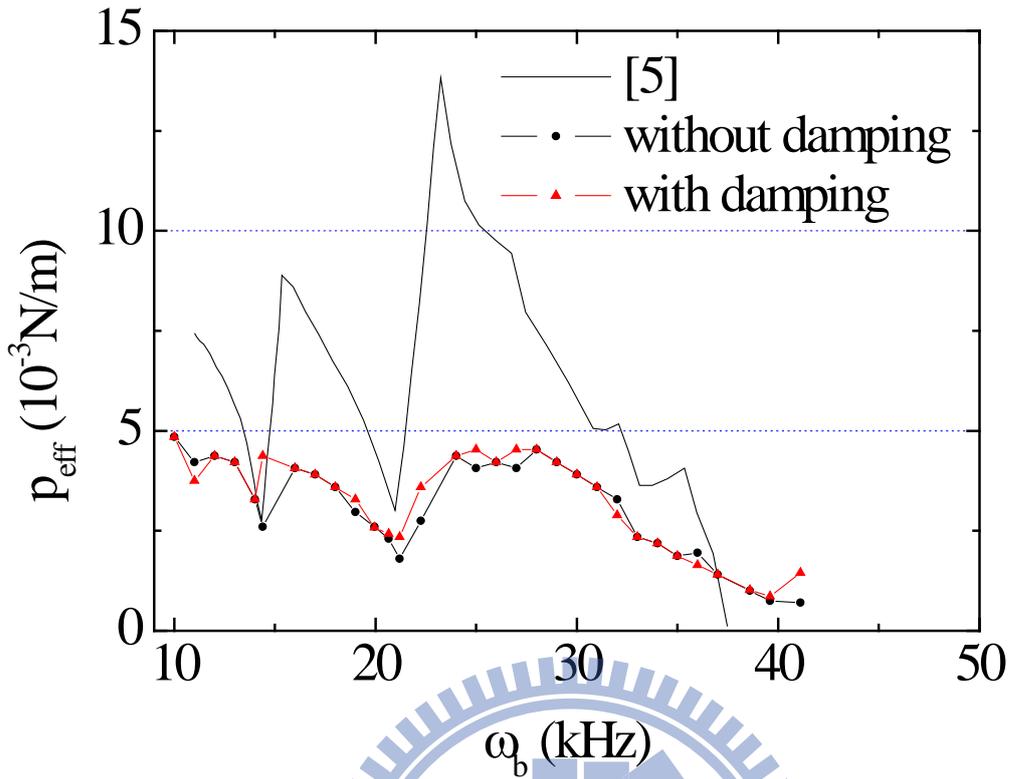
圖五十九 有阻尼與無阻尼之挫屈梁的側向位移頻率響應圖

($p_{eff} = 1.8 \times 10^{-3} \text{ N/m}$, $\omega_b \approx \frac{1}{2} \omega_2$)

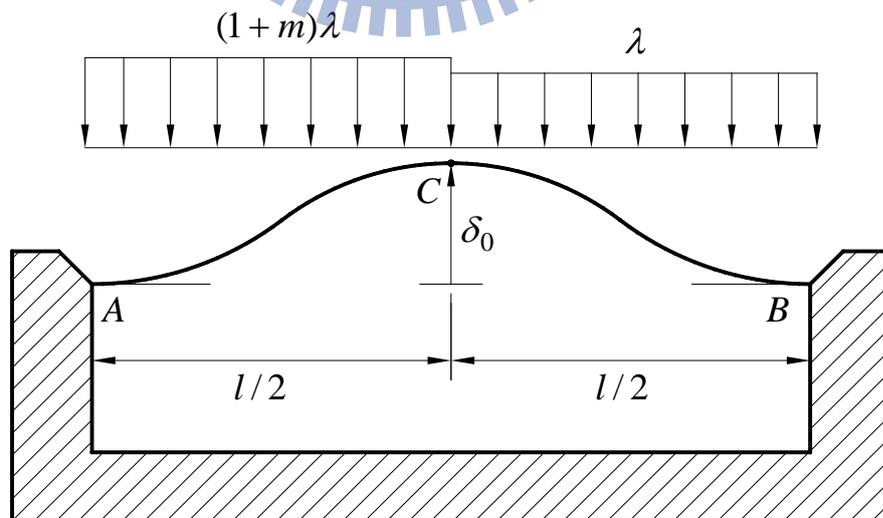


圖六十 有阻尼之挫屈梁中點位移之歷時分析圖

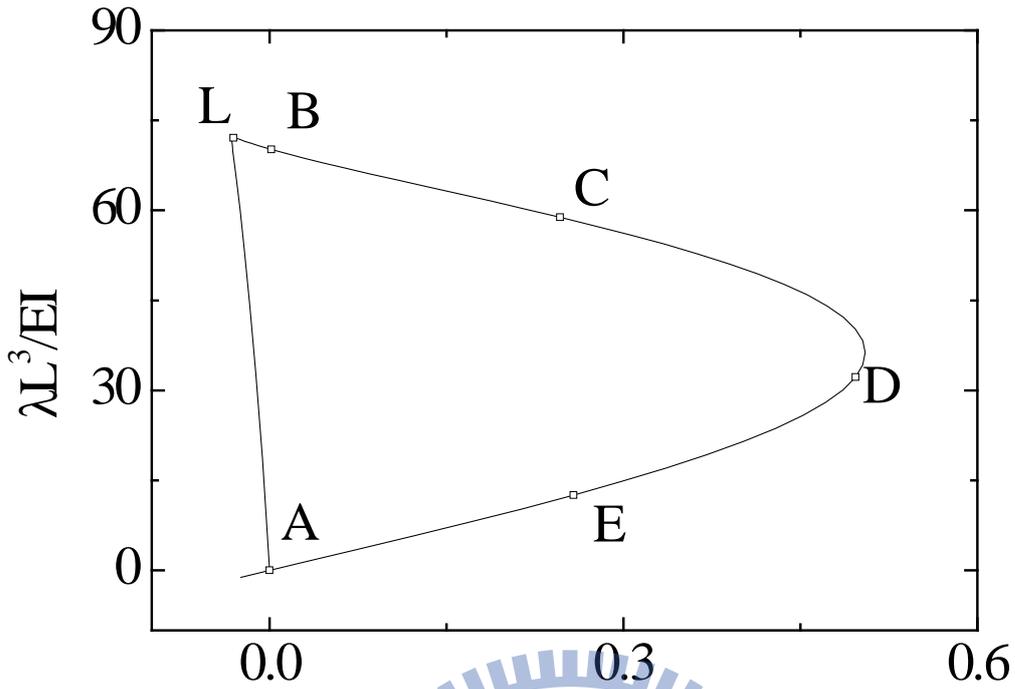
$$(p_{eff} = 2.343 \times 10^{-3} N/m, \omega_b = 21.2 kHz)$$



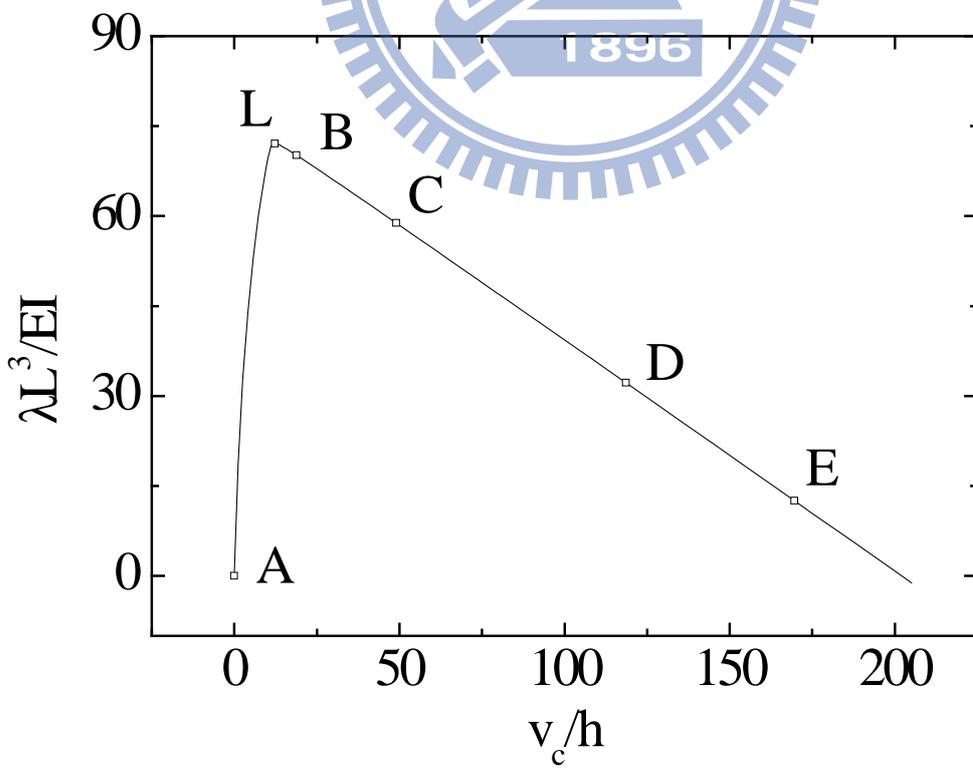
圖六十一 挫屈梁發生跳躍現象所需的最小等效力



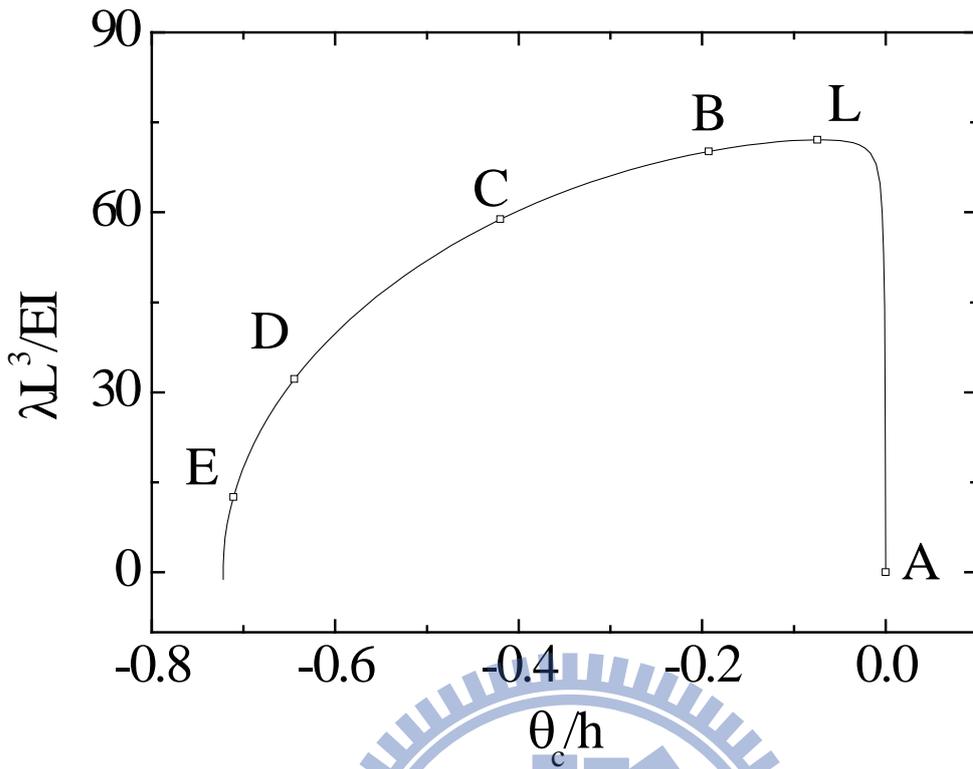
圖六十二 挫屈梁受不對稱分佈力示意圖



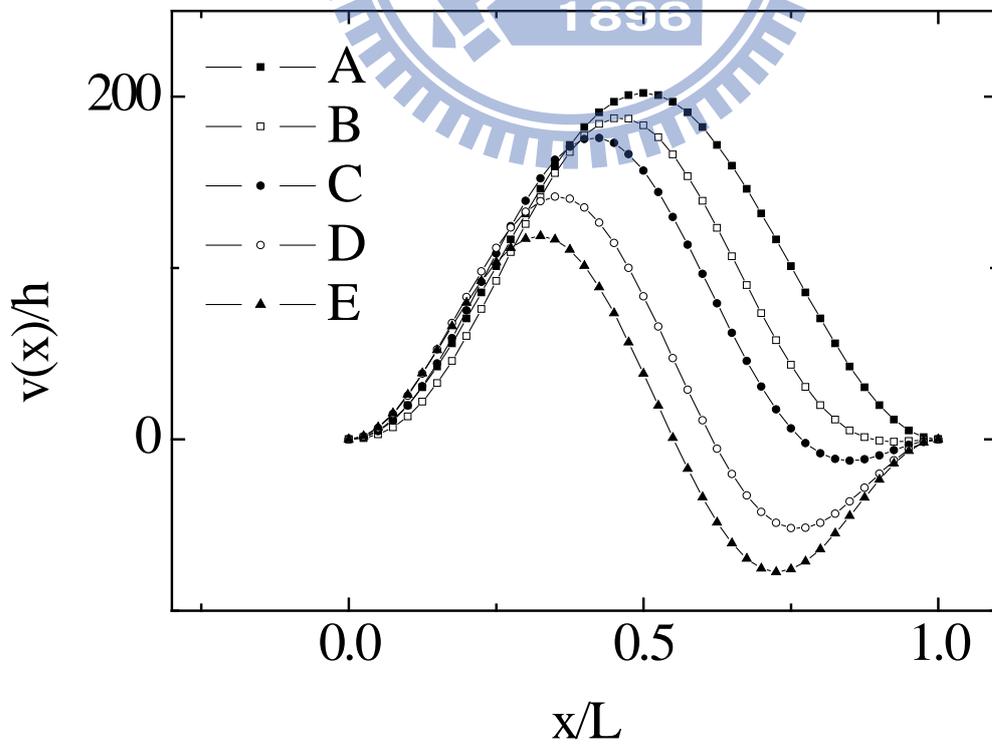
圖六十三 挫屈梁受不對稱分佈力之負荷-位移 u_c 圖



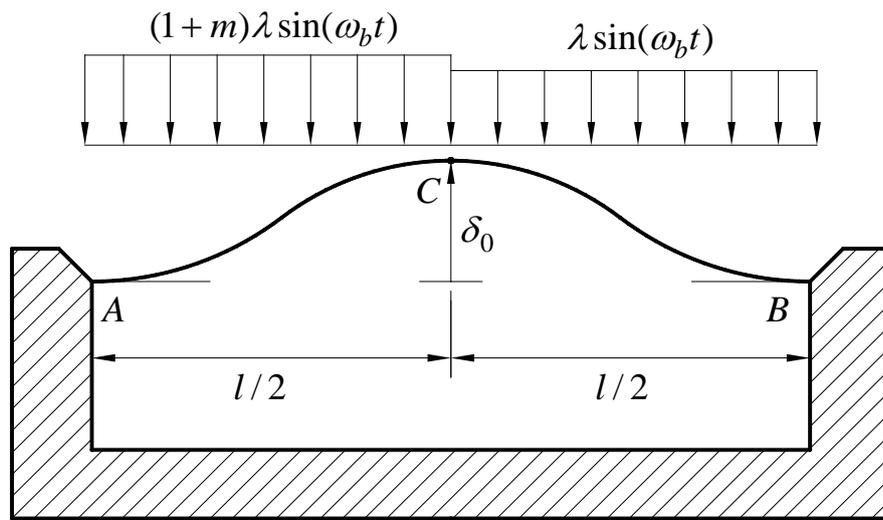
圖六十四 挫屈梁受不對稱分佈力之負荷-位移 v_c 圖



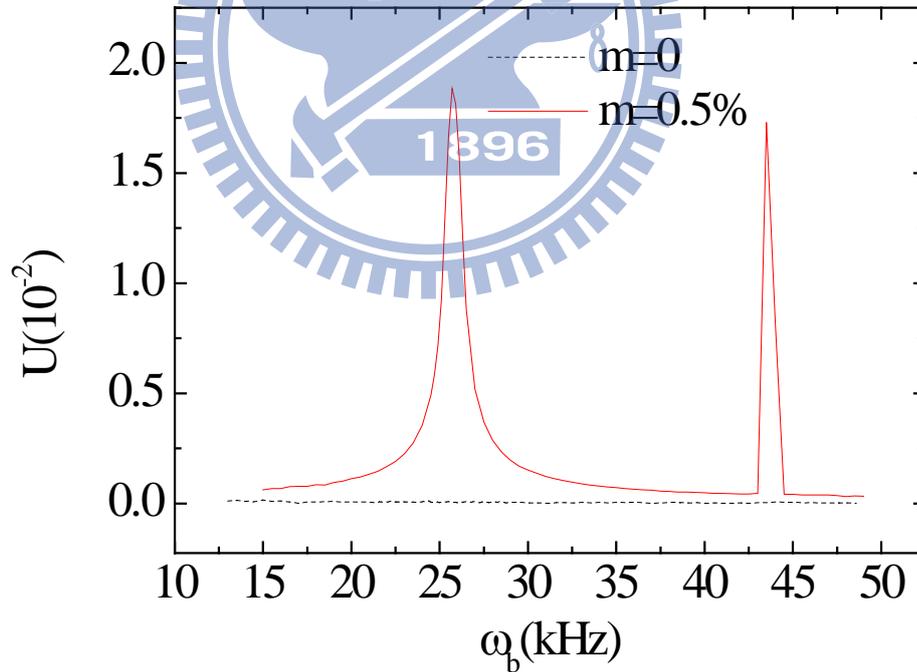
圖六十五 挫屈梁受不對稱分佈力之負荷-位移 θ_c 圖



圖六十六 受不對稱均佈載重之挫屈梁的無因次側向位移分佈圖

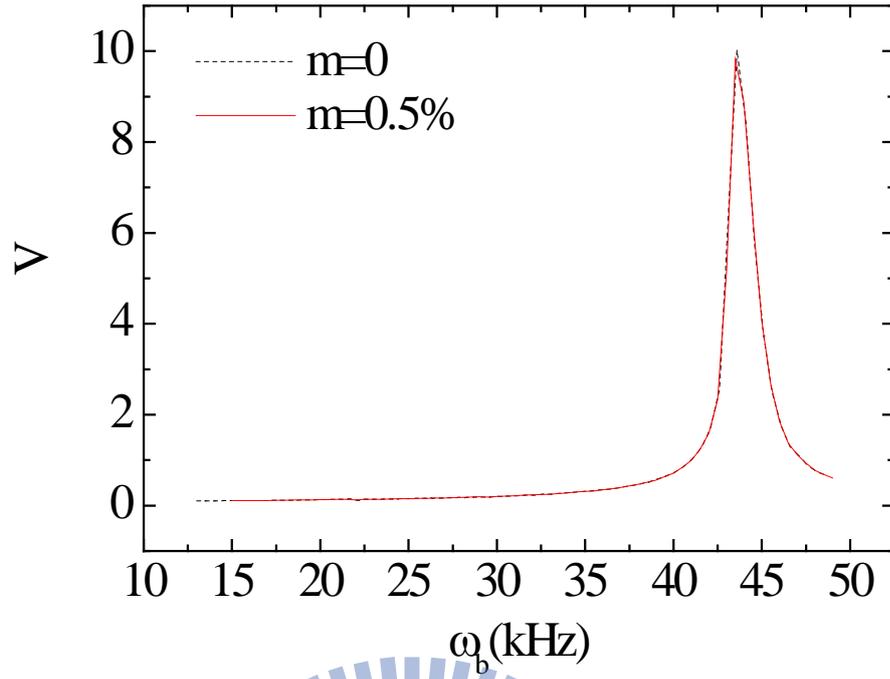


圖六十七 挫屈梁受不對稱動態分佈力示意圖

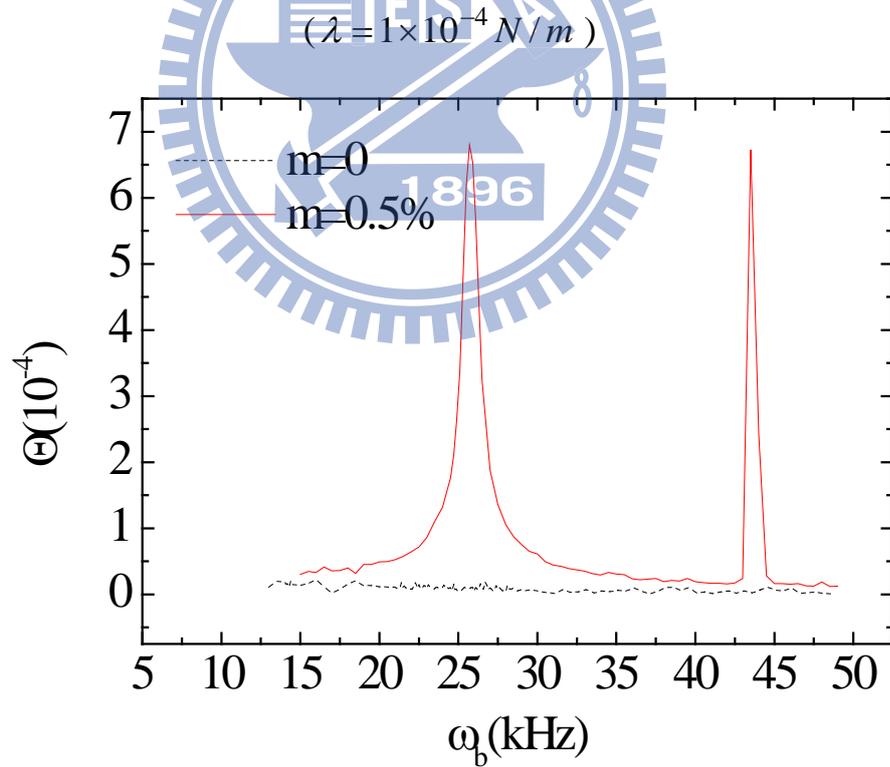


圖六十八 挫屈梁受非對稱均佈力之小振幅的頻率軸向位移響應圖

$$(\lambda = 1 \times 10^{-4} N/m)$$

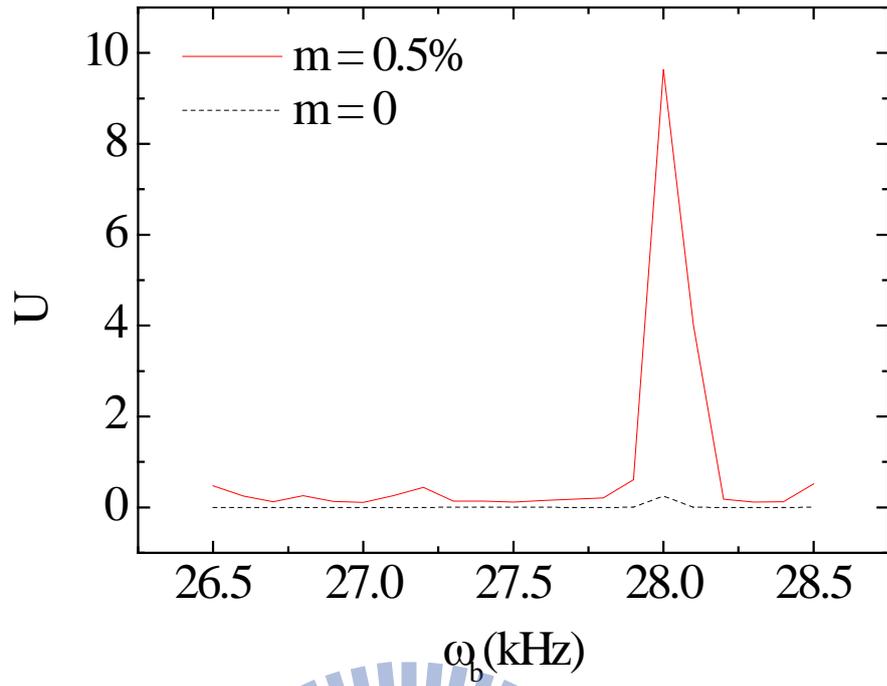


圖六十九 挫屈梁受非對稱均佈力之小振幅的頻率側向位移響應圖

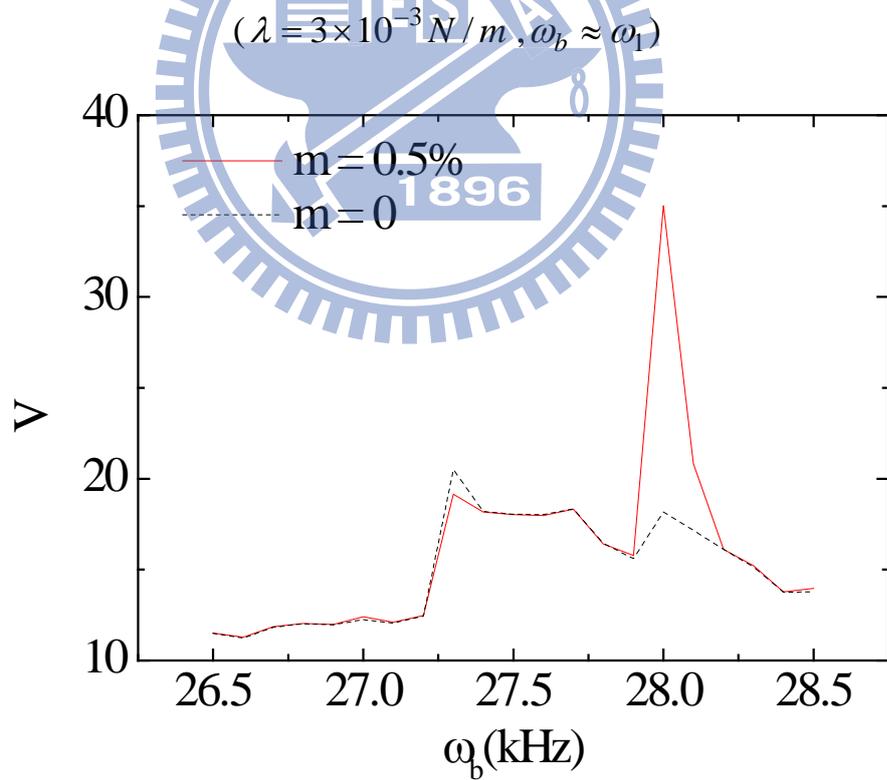


圖七十 挫屈梁受非對稱均佈力之小振幅的頻率轉角位移響應圖

$$(\lambda = 1 \times 10^{-4} N/m)$$

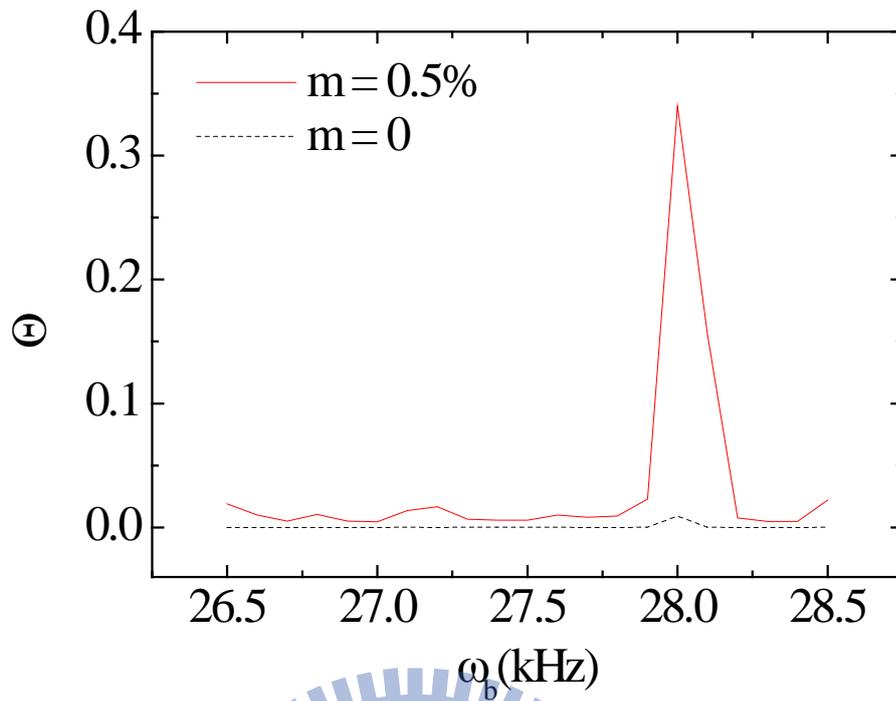


圖七十一 挫屈梁受非對稱均佈力之大振幅的頻率軸向位移響應圖



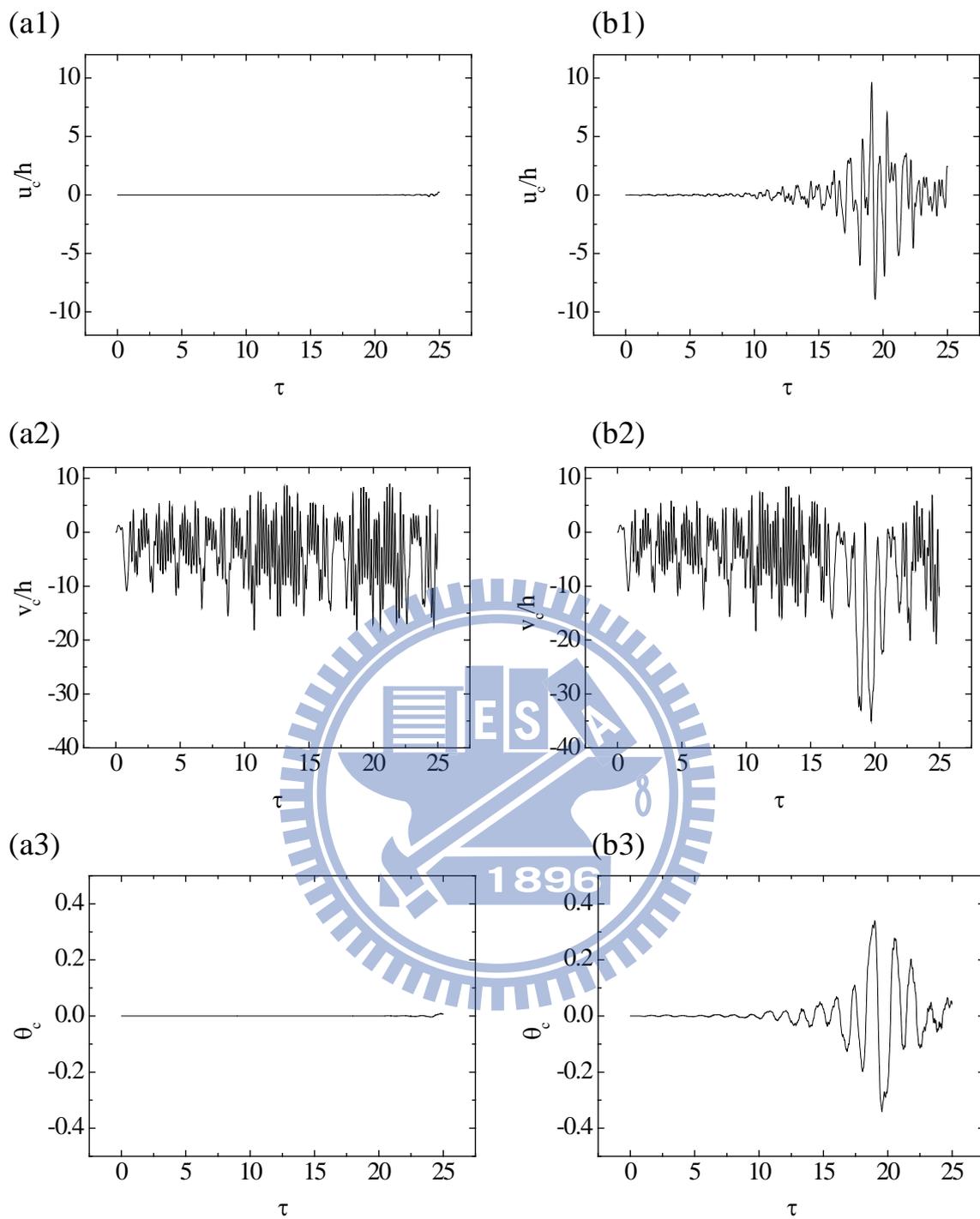
圖七十二 挫屈梁受非對稱均佈力之大振幅的頻率側向位移響應圖

$$(\lambda = 3 \times 10^{-3} \text{ N/m}, \omega_b \approx \omega_1)$$



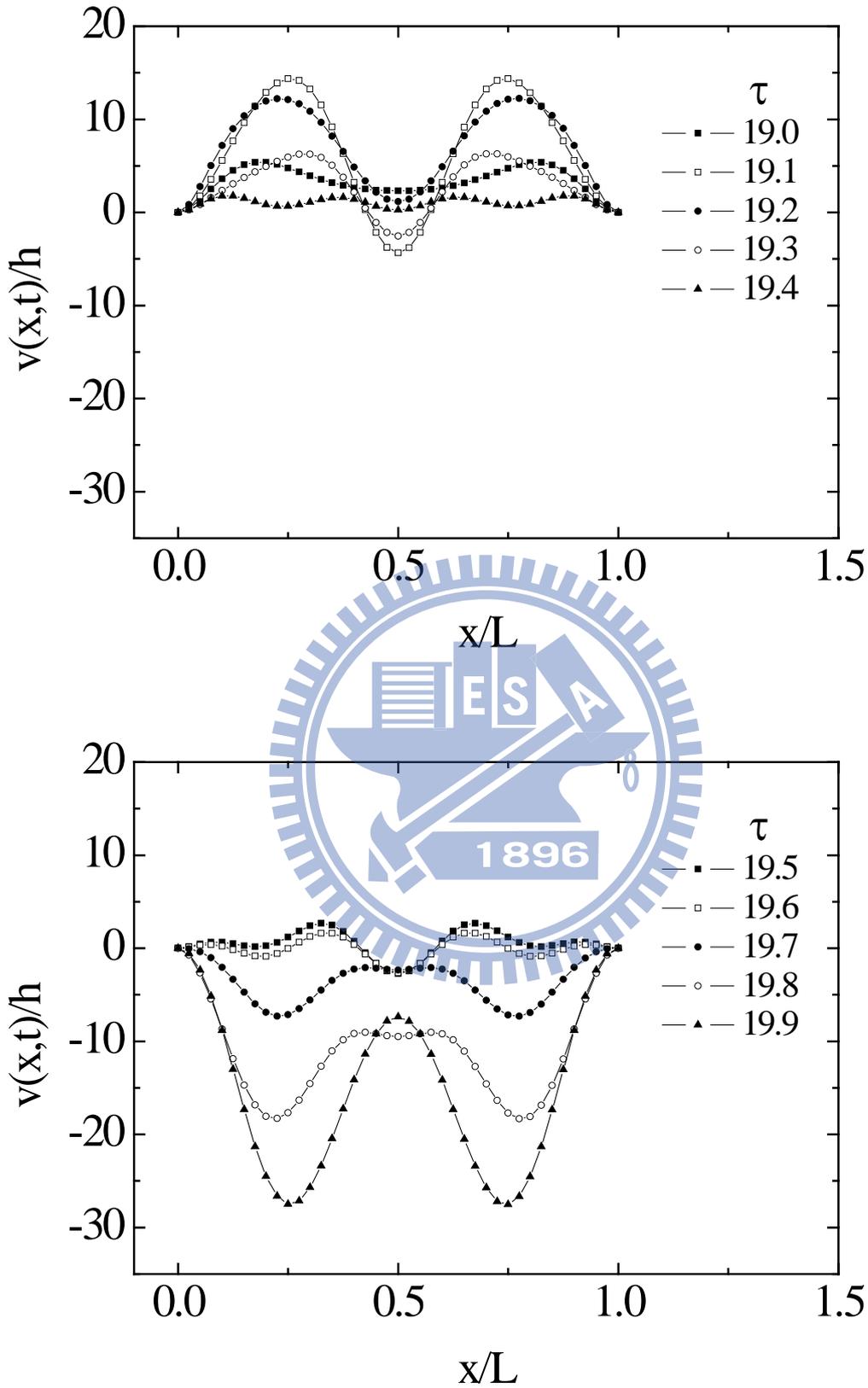
圖七十三 挫屈梁受非對稱均佈力之大振幅的頻率轉角位移響應圖





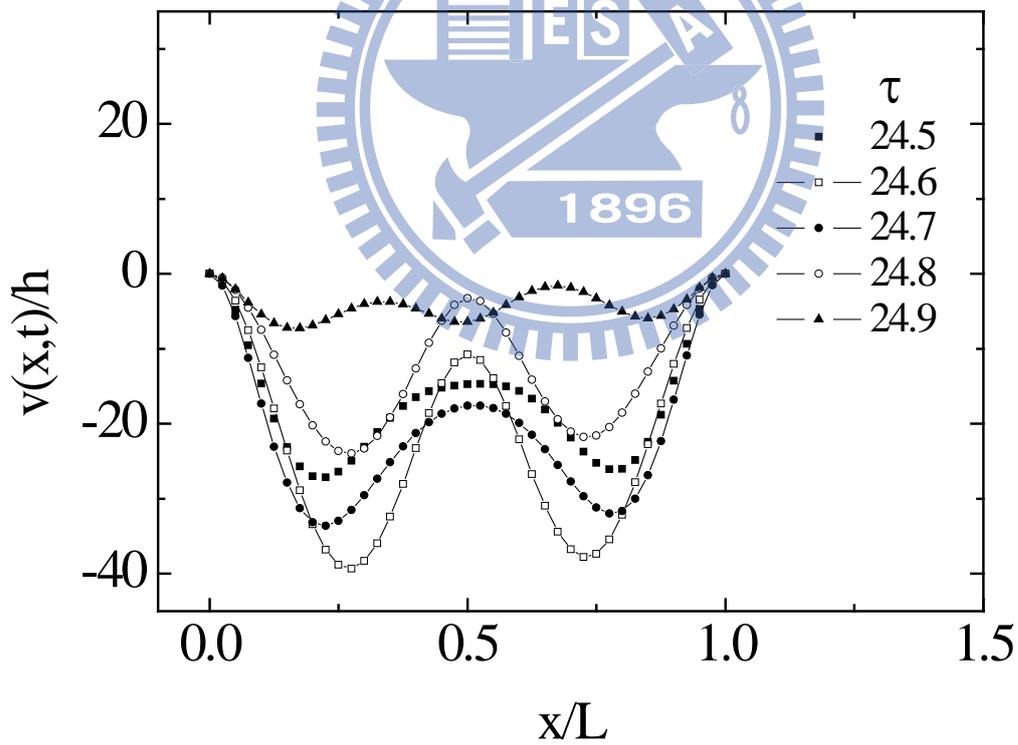
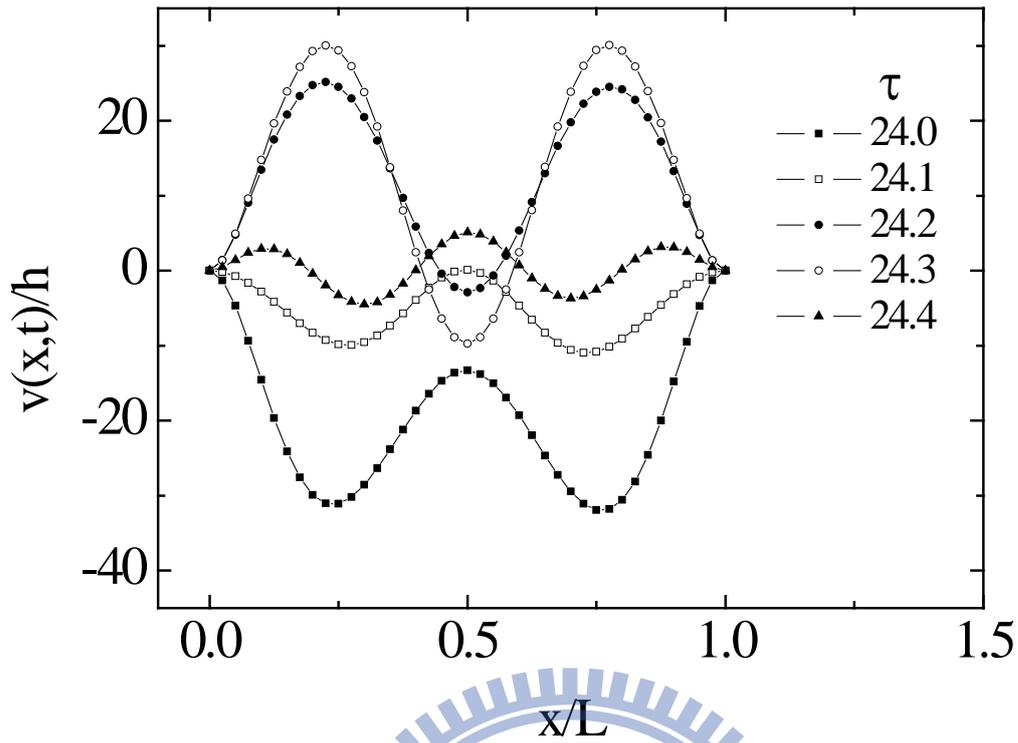
圖七十四 (a) $m = 0$ 與 (b) $m = 0.5\%$ 之挫屈梁中點位移之歷時分析圖

$$(\lambda = 3 \times 10^{-3} N/m, \omega_b = 28.0 kHz)$$



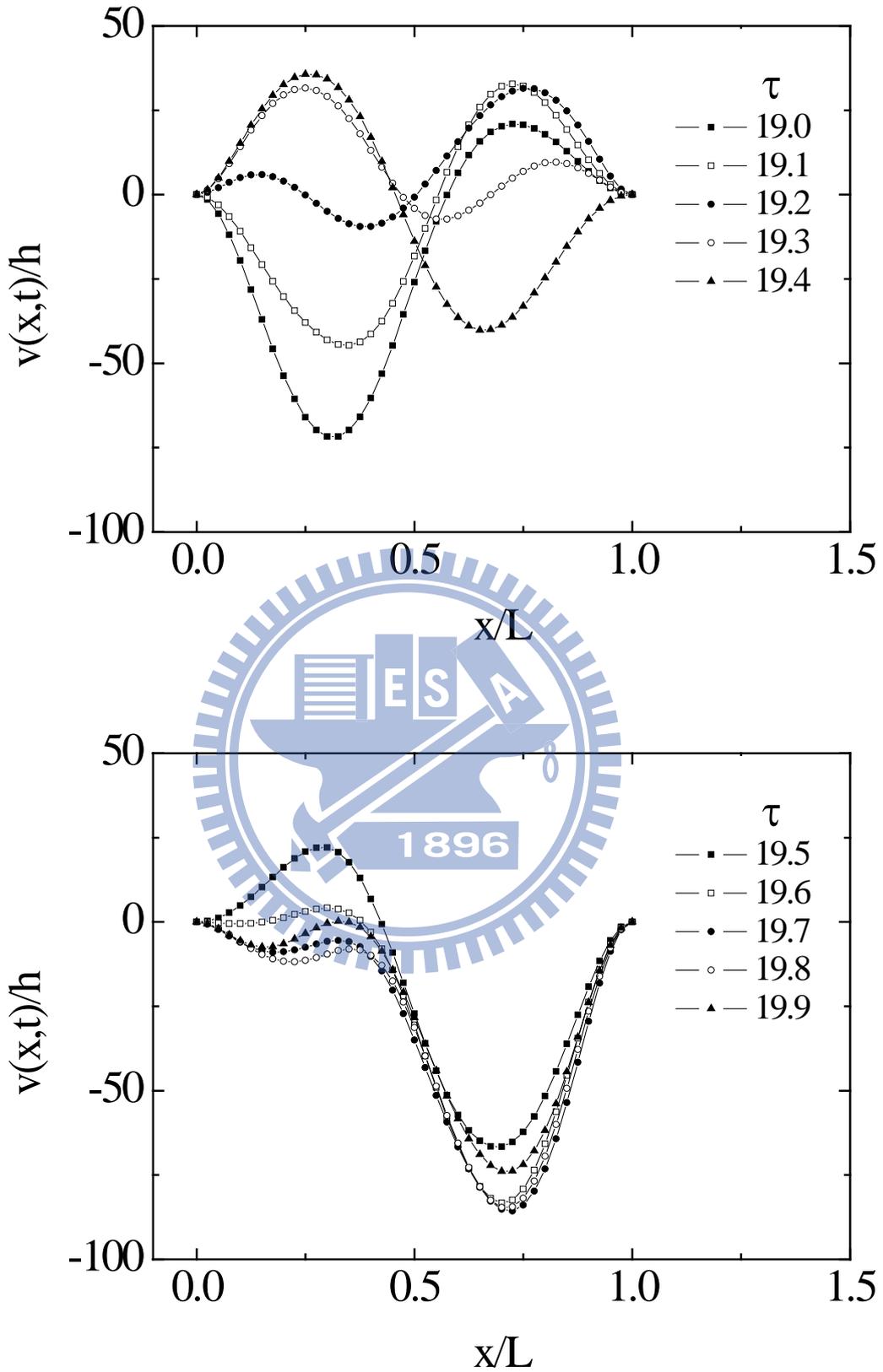
圖七十五 挫屈梁在第二十個外力周期之側向位移分佈圖

$$(\lambda = 3.0 \times 10^{-3} N/m, \omega_b = 28.0 kHz, m = 0)$$



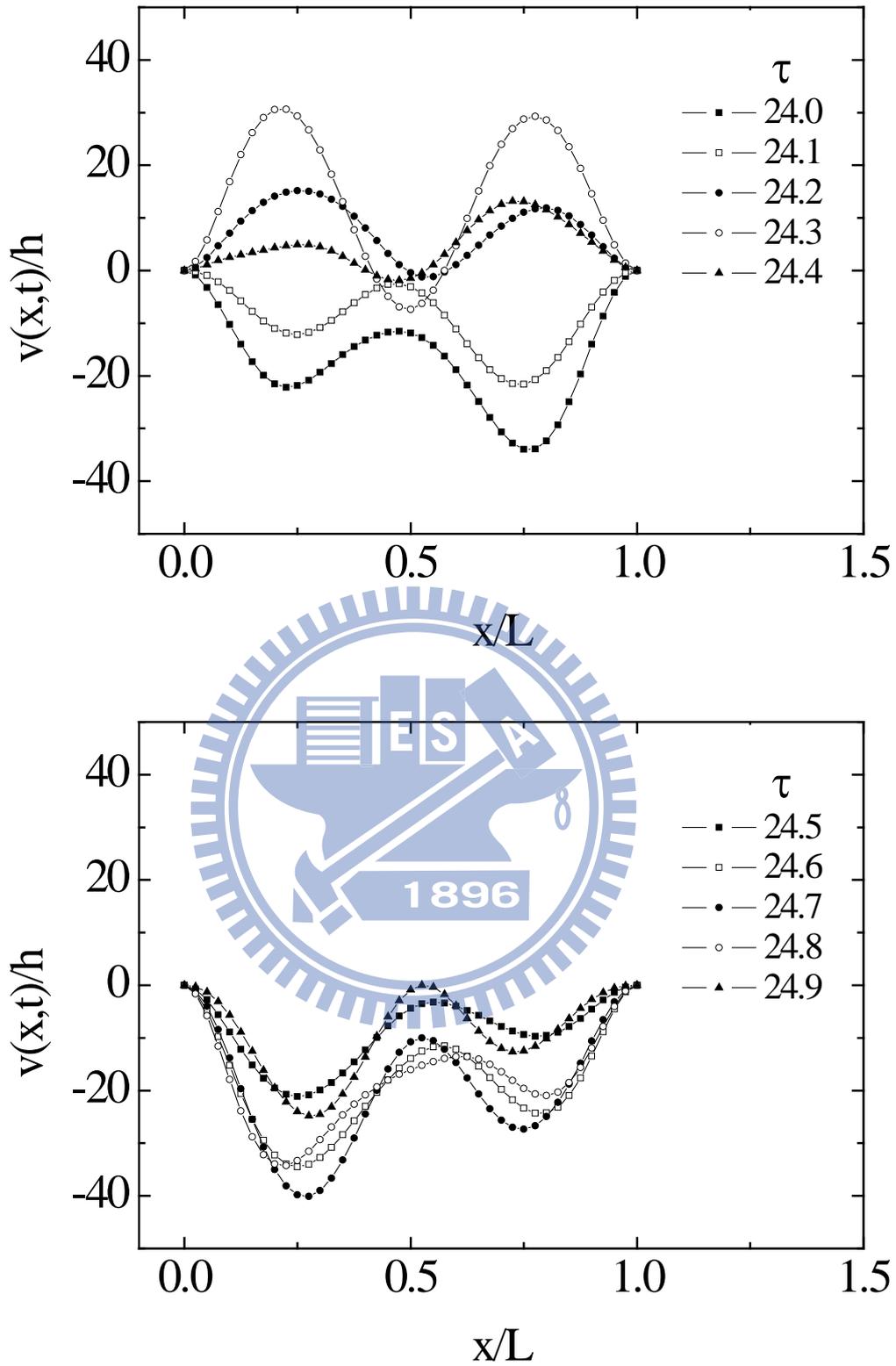
圖七十六 挫屈梁在第二十五個外力周期之側向位移分佈圖

$$(\lambda = 3.0 \times 10^{-3} N/m, \omega_b = 28.0 kHz, m = 0)$$



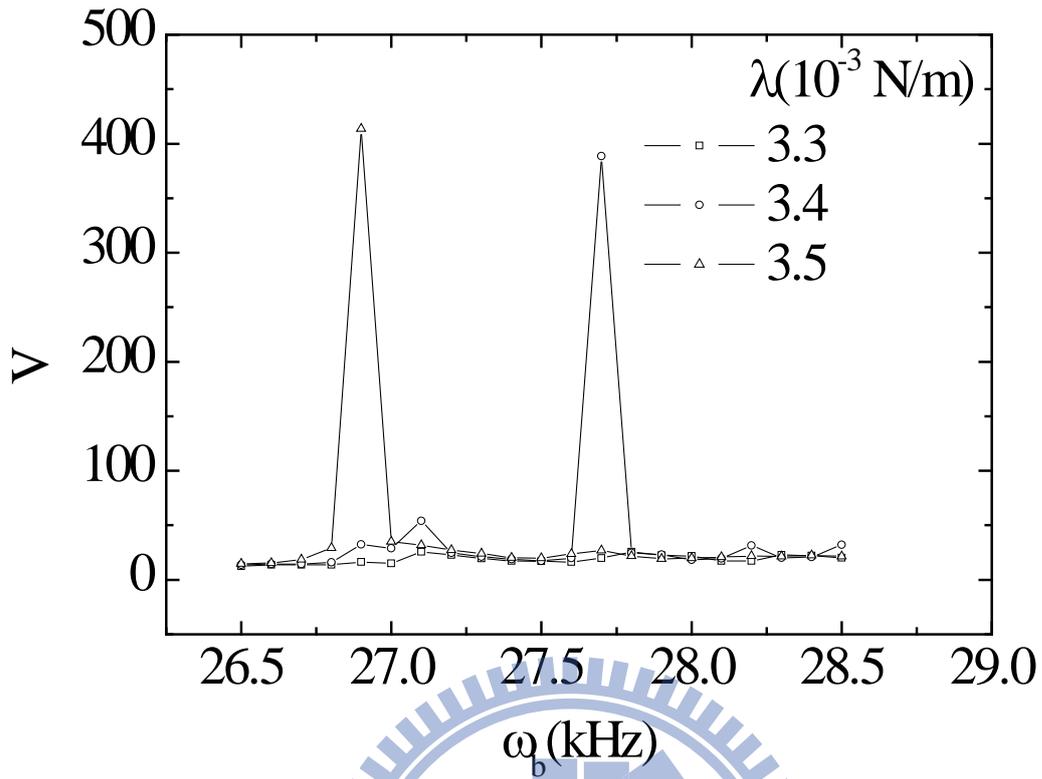
圖七十七 挫屈梁在第二十個外力周期之側向位移分佈圖

$$(\lambda = 3.0 \times 10^{-3} N/m, \omega_b = 28.0 kHz, m = 0.5\%)$$



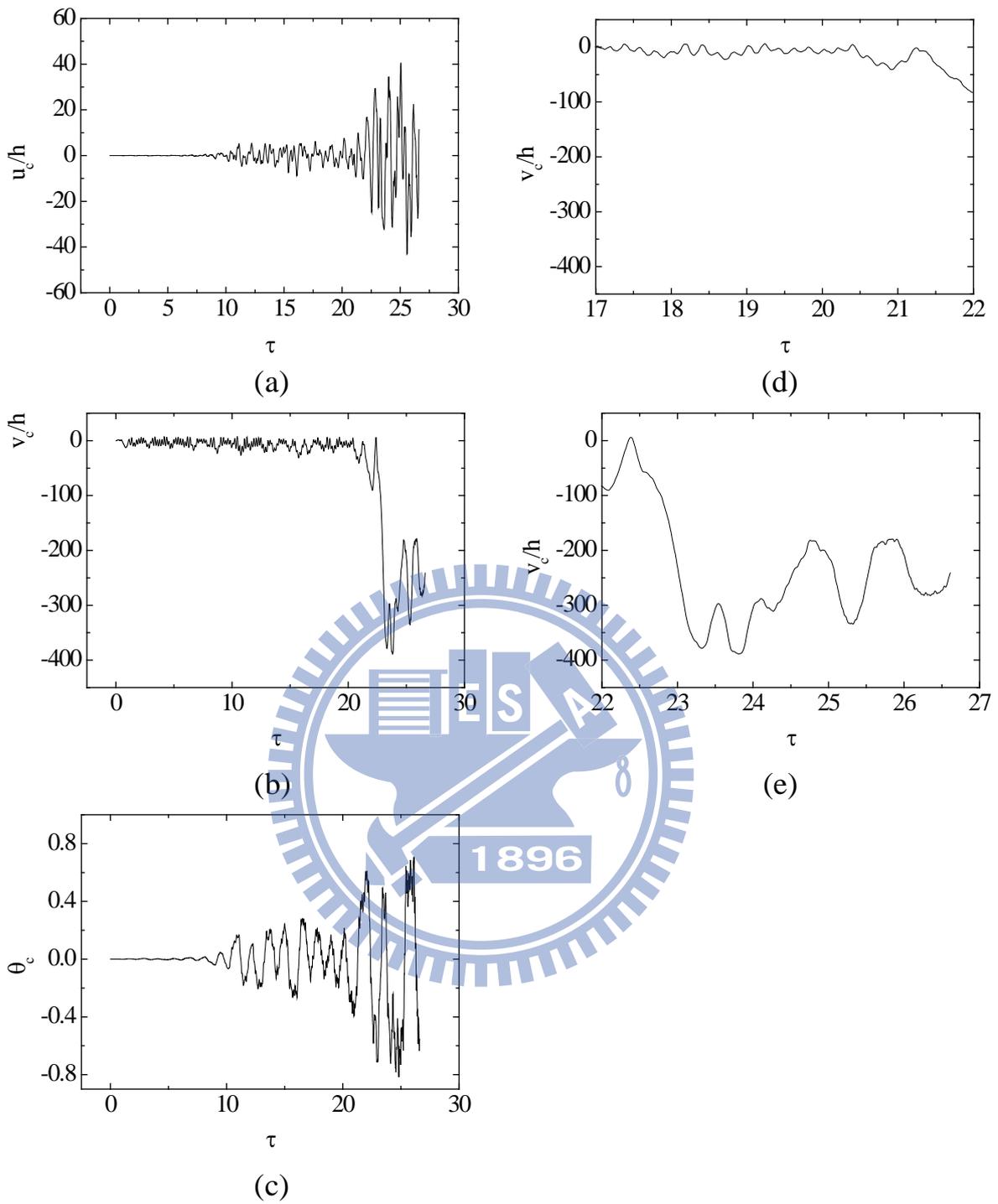
圖七十八 挫屈梁在第二十五個外力周期之側向位移分佈圖

$$(\lambda = 3.0 \times 10^{-3} N/m, \omega_b = 28.0 kHz, m = 0.5\%)$$



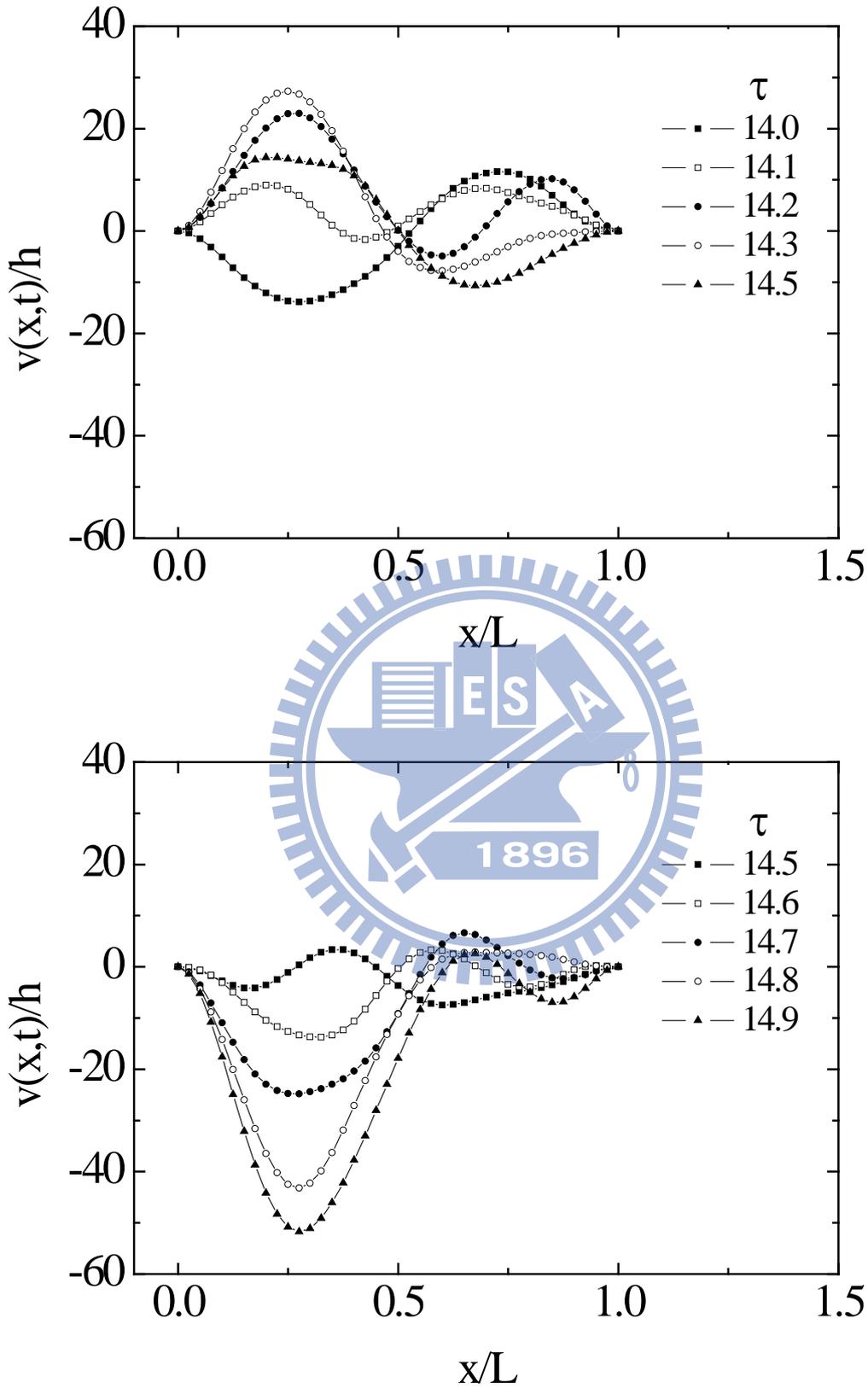
圖七十九 挫屈梁受非對稱均佈力之主共振的側向位移頻率響應圖





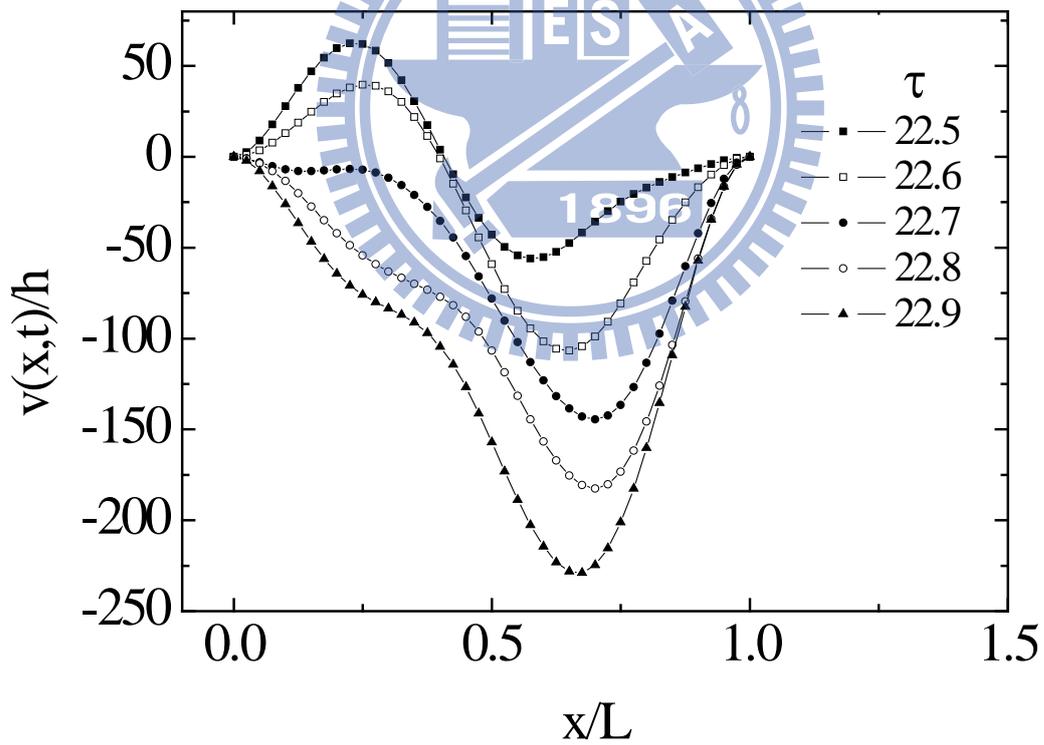
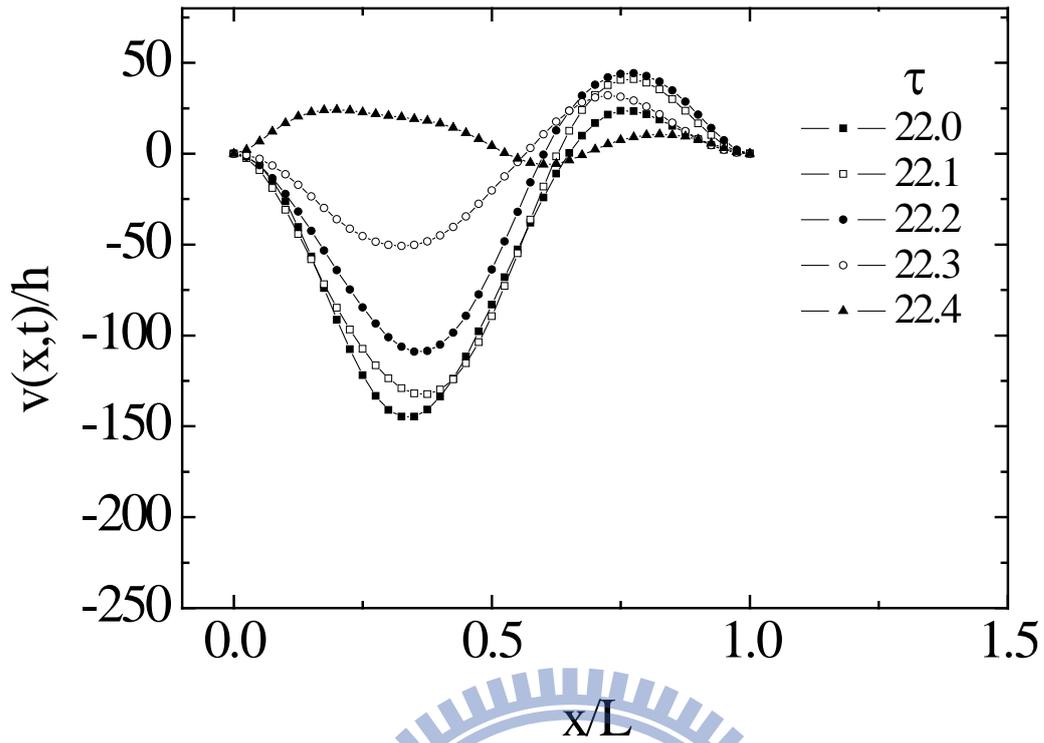
圖八十 挫屈梁受非對稱均佈力中點位移之歷時分析圖

$$(\lambda = 3.4 \times 10^{-3} N/m, \omega_b = 27.7 kHz, m = 0.5\%)$$



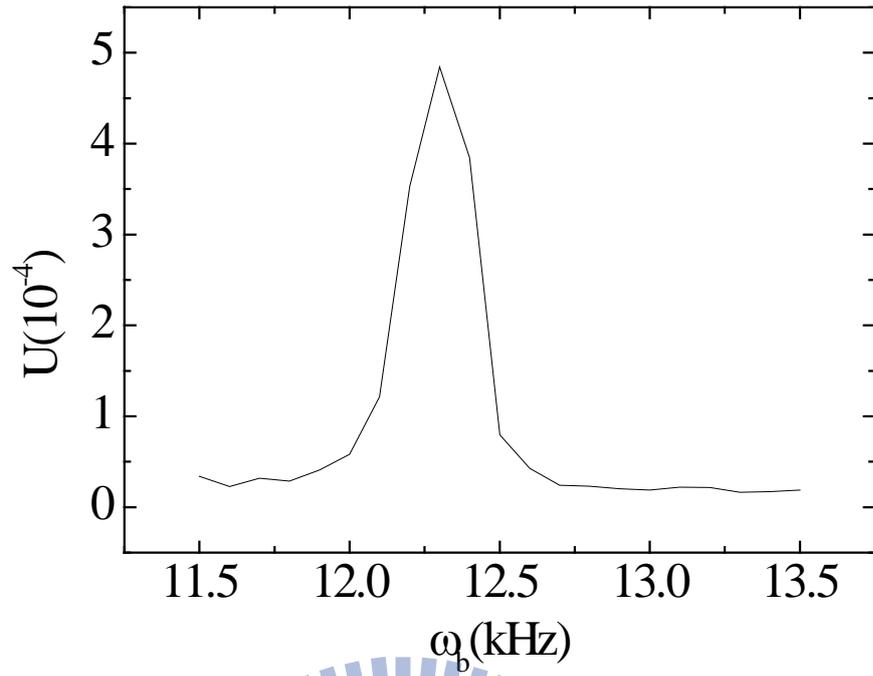
圖八十一 挫屈梁在第十五個外力周期之側向位移分佈圖

$$(\lambda = 3.4 \times 10^{-3} N/m, \omega_b = 27.7 kHz, m = 0.5\%)$$

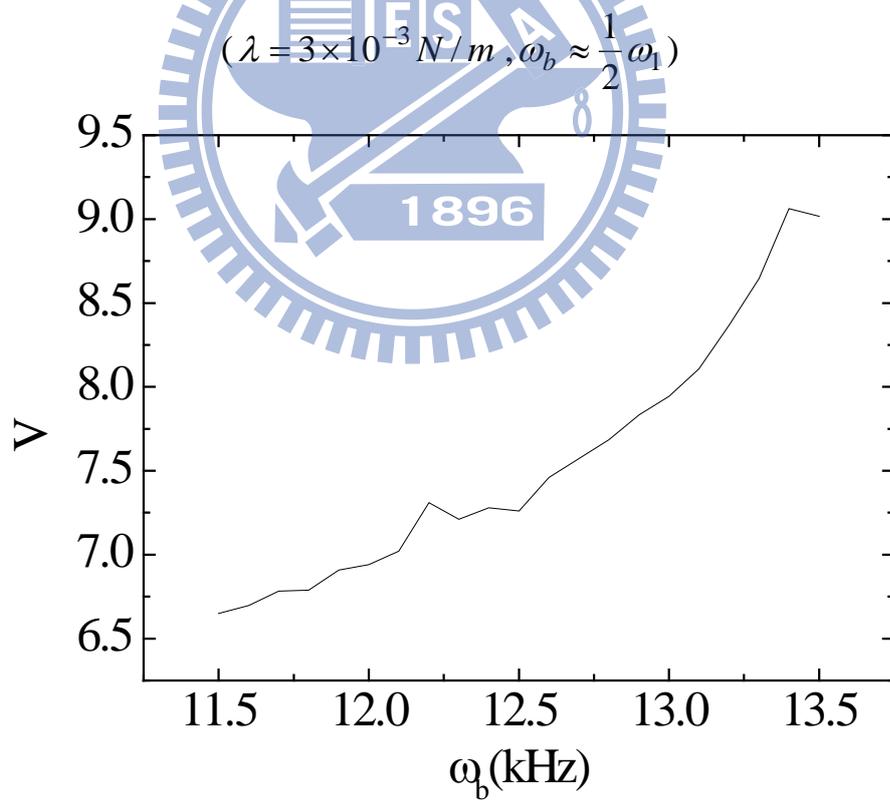


圖八十二 挫屈梁在第二十三個外力周期之側向位移分佈圖

$$(\lambda = 3.4 \times 10^{-3} N/m, \omega_b = 27.7 kHz, m = 0.5\%)$$

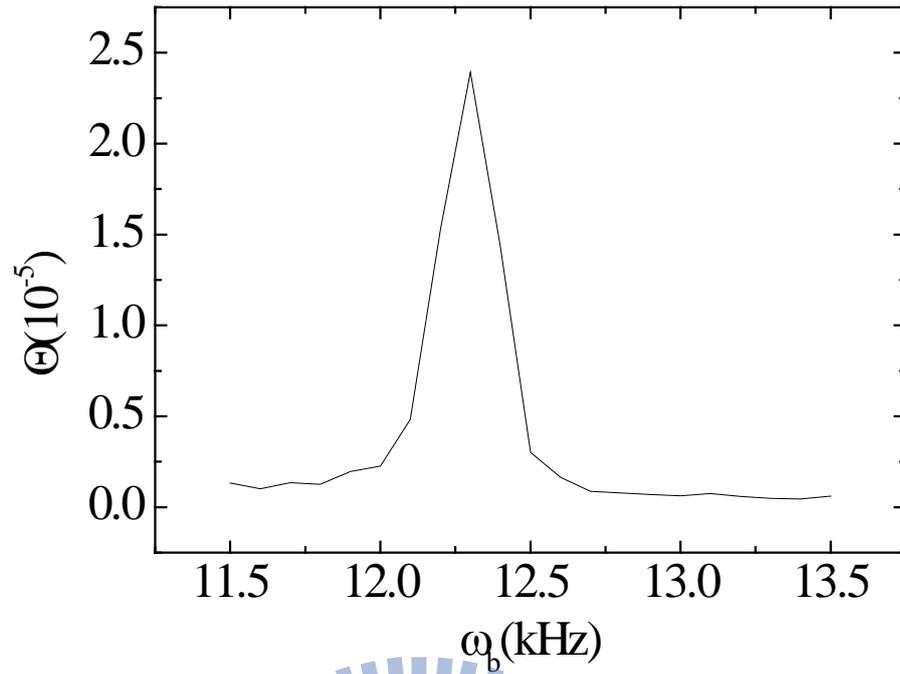


圖八十三 挫屈梁受非對稱均佈力之大振幅的頻率軸向位移響應圖

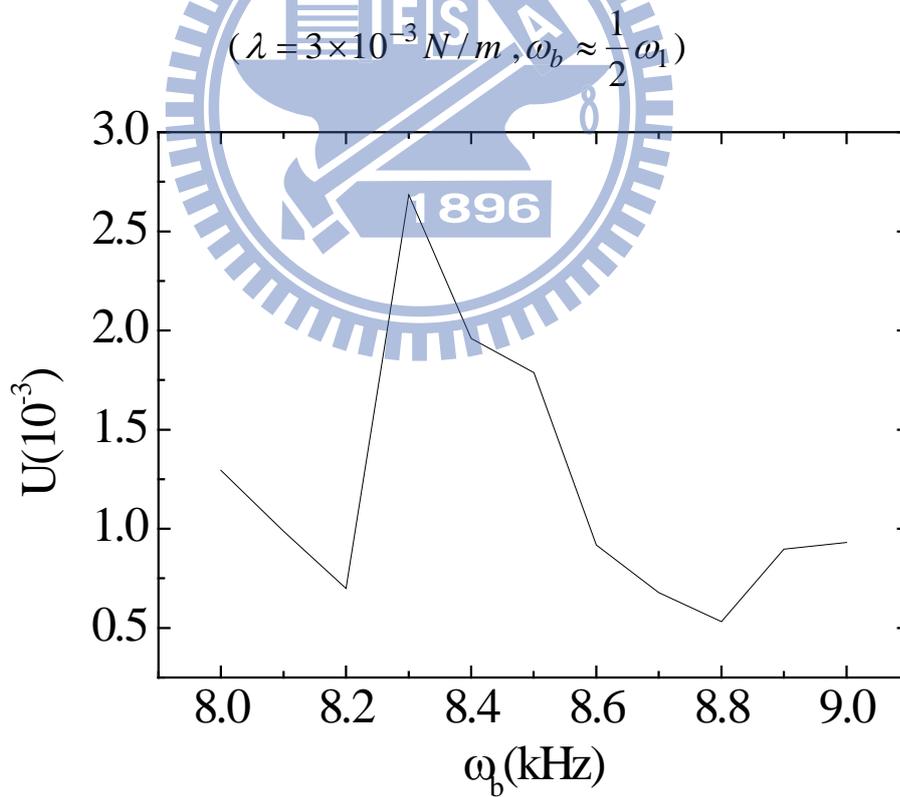


圖八十四 挫屈梁受非對稱均佈力之大振幅的頻率側向位移響應圖

$$(\lambda = 3 \times 10^{-3} \text{ N/m}, \omega_b \approx \frac{1}{2} \omega_1)$$

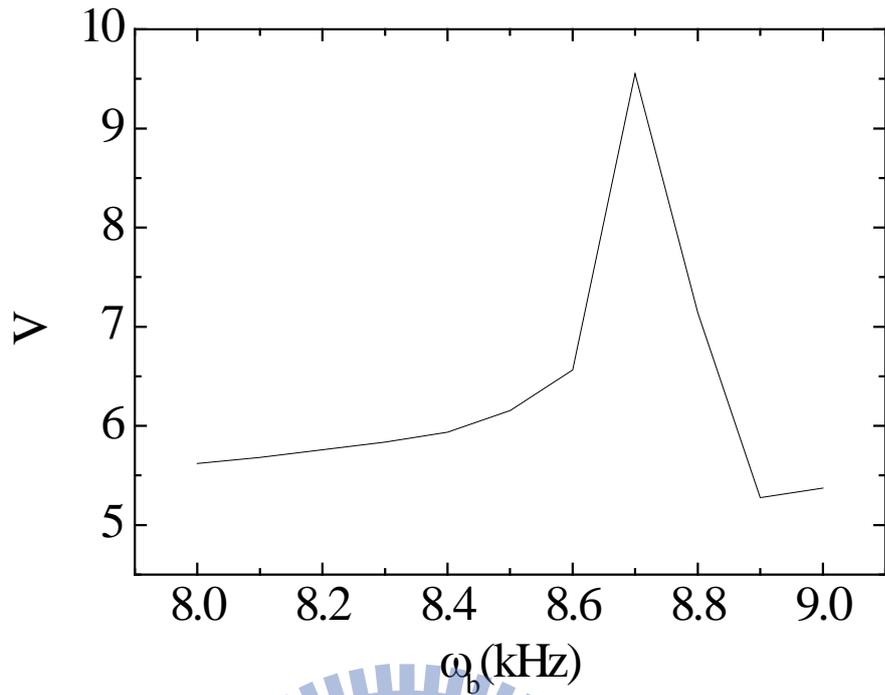


圖八十五 挫屈梁受非對稱均佈力之大振幅的頻率轉角位移響應圖

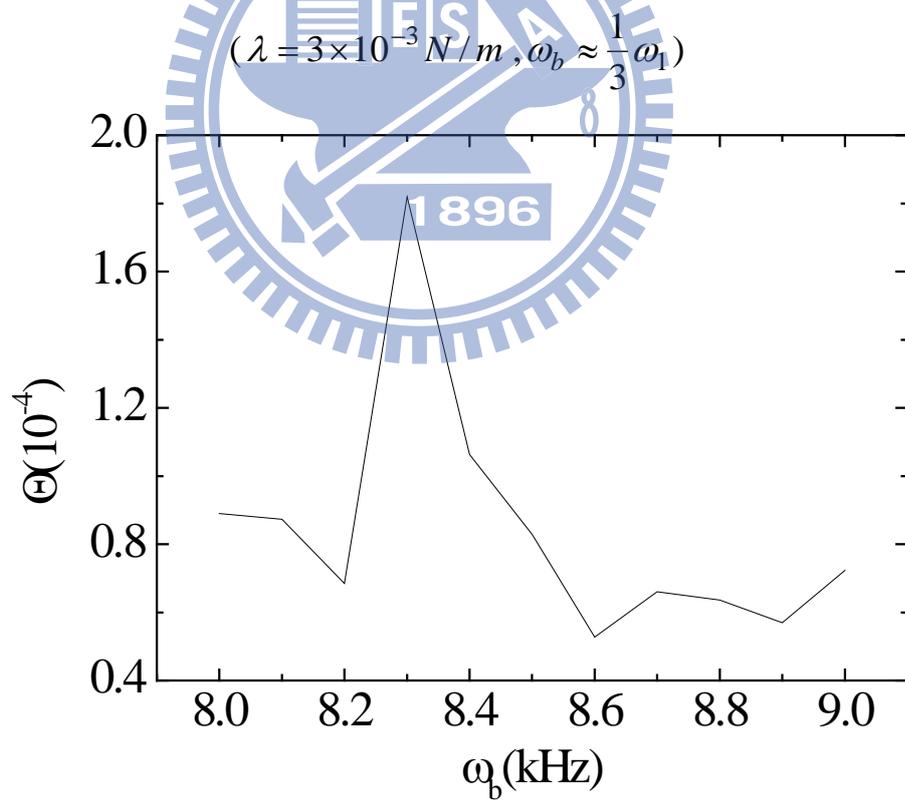


圖八十六 挫屈梁受非對稱均佈力之大振幅的頻率軸向位移響應圖

$$(\lambda = 3 \times 10^{-3} N/m, \omega_b \approx \frac{1}{3} \omega_1)$$



圖八十七 挫屈梁受非對稱均佈力之大振幅的頻率側向位移響應圖



圖八十八 挫屈梁受非對稱均佈力之大振幅的頻率轉角位移響應圖

$$(\lambda = 3 \times 10^{-3} N/m, \omega_b \approx \frac{1}{3} \omega_1)$$