

國立交通大學

機械工程學系碩士班

碩士論文

平面三角形殼元素之改善研究

A study of improvement for the triangular plane  
shell element

研究生：林寬政

指導教授：蕭國模 博士

中華民國九十九年九月

平面三角形殼元素之改善研究

A study of improvement for the triangular plane shell element

研究生：林寬政

Student：Kuan-Zheng Lin

指導教授：蕭國模 博士

Advisor：Dr. Kuo-Mo Hsiao

國立交通大學

機械工程學系碩士班

碩士論文



Submitted to Department of Mechanical Engineering

College of Engineering

National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master of Science

in

Mechanical Engineering

August 2010

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十九年九月

# 平面三角形殼元素之改善研究

研究生：林寬政

指導教授：蕭國模博士

國立交通大學機械工程學系碩士班

## 摘要

本文主要目的為改善平面三角形殼元素在薄殼結構之幾何非線性分析的精確性。本文以共旋轉(co-rotational formulation)有限元素法來探討薄殼的幾何非線性行為。本文採用文獻上具旋轉自由度的三角形平面元素與三角形板元素疊加成一個 3 節點的平面三角殼元素，該元素的節點自由度為 3 個位移、3 個旋轉、及 3 個平面應變。本文中提出一個決定三角殼元素之節點變形參數的方法。本文以共旋轉 total Lagrangian 法推導平面三角殼元素幾何剛度矩陣，並以殼結構之切線剛度矩陣的行列式值來偵測平衡路徑上的分歧點及極限點。

本文採用牛頓-拉福森(Newton-Raphson)法和弧長控制(arc-length control)法的增量疊代法來解結構的非線性平衡方程式。本研究以文獻上的數值例題探討本研究採用之平面三角殼元素的性能，來說明本文提出的方法的正確性及功效，同時探討不同的元素幾何剛度矩陣對平衡迭代和偵測平衡路徑上分歧點及挫屈模態的影響。

# A study of improvement for the flat triangular shell element

Student : Kuan-Zheng Lin

Advisor : Dr. Kuo-Mo Hsiao

Department of Mechanical Engineering

National Chiao Tung University

## ABSTRACT

The objective of this paper is to improve the accuracy and efficiency of the flat triangular shell element for the geometric nonlinear analysis. In this paper, the co-rotational finite element formulation is employed. The 3-node triangular shell element employed here is the superposition of the triangular membrane element with drilling degrees of freedom and triangular plate element proposed in the literature. The element has nine degrees of freedom per node: three translations, three rotations, and three membrane strains. A motion process to determine the element deformation nodal rotations is proposed. A co-rotational total Lagrangian formulation is used to derive the geometric stiffness matrix of the triangular shell element. The zero value of the tangent stiffness matrix determinant of the structure is used as the criterion to detect the buckling state.

An incremental-iterative method based on the Newton-Raphson method combined with constant arc length of incremental displacement vector is employed for the solution of nonlinear equilibrium equations. Numerical examples are presented to investigate the accuracy and efficiency of the proposed method. The effect of different geometric stiffness matrices derived using different approximations on the convergence rate of equilibrium iteration

and the value of the buckling load are also investigated through numerical examples.



## 致謝

衷心感謝指導教授 蕭國模博士在這兩年碩士班期間的指導與教誨，使本論文得以順利的完成。老師在研究上嚴謹的態度及日常生活上的關懷，使我受益良多，在此致上最高的謝意與敬意。感謝尹慶中老師及蔡佳霖老師撥冗擔任口試委員並對本論文所提出的指正與建議，使本論文能夠更臻完善。

感謝蔡明旭、周裕淳學長的照顧，同學林運融、蔡秉宏以及學弟盧致群、翁林甫、黃楚璋在學業上的砥礪與成長。

感謝父母親等關心我的朋友對我的支持與鼓勵，僅以此成果與榮耀，獻給我親愛的父母以及所有關心我的人。



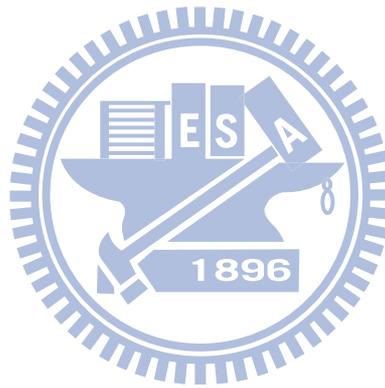
## 目 錄

中文摘要.....	i
英文摘要.....	ii
致謝.....	iv
目錄.....	v
表目錄.....	vii
圖目錄.....	viii
第一章 緒論.....	1
第二章 理論推導.....	9
2.1 基本假設.....	9
2.2 座標系統.....	10
2.3 旋轉向量.....	11
2.4 元素節點變形參數的決定方法.....	11
2.5 殼元素的變形描述.....	14
2.6 QST 平面元素的變形描述.....	14
2.7 DKT 板元素的變形描述.....	18
2.8 元素內力與元素剛度矩陣.....	22
2.9 QST 平面元素之節點內力與剛度矩陣.....	23
2.10 DKT 板元素之節點內力與剛度矩陣.....	24
2.11 元素幾何剛度矩陣.....	25
2.12 座標系統轉換.....	26
2.13 系統平衡方程式與收斂準則.....	29
第三章 數值計算方法與程序.....	30
3.1 增量迭代法.....	30
3.2 弧長控制法.....	32

3.3	二分法 .....	32
3.4	數值程序 .....	33
第四章	數值分析與結果 .....	35
4.1	半圓環受到單點集中力作用 .....	36
4.2	直角構架受到端點剪力作用 .....	37
4.3	圓柱殼片段受到單點集中力作用 .....	38
4.4	Lateral torsional buckling .....	39
4.5	Simply supported compressed plate .....	40
4.6	Transversally loaded T profile .....	40
4.7	Channel section in torsion .....	41
4.8	直角梁受到單點集中力作用 .....	42
4.9	懸臂圓柱殼受到單點集中力作用 .....	43
4.10	半球殼受到單點集中力作用 .....	44
第五章	結論與展望 .....	45
5.1	結論 .....	45
5.2	未來研究方向 .....	46
	參考文獻 .....	48
附錄 A	面積座標 .....	82
附錄 B	不完整三階埃爾米特元素的形狀函數及其微分 .....	85
附錄 C	DKT 元素的形狀函數 .....	87
附錄 D	元素幾何剛度矩陣 .....	93
附錄 E	等效節點外力 .....	100
附錄 F	Battini 所使用的元素座標系統 .....	106

## 表目錄

表 4.1	圓柱殼片段受到單點集中力作用所偵測到的挫屈負荷 (例題 4.3).....	54
表 4.2	Lateral torsional buckling 所偵測到的挫屈負荷(例題 4.4) .....	54
表 4.3	Simply supported compressed plate 所偵測到的挫屈負荷 (例題 4.5).....	55
表 4.4	Transversally loaded T profile 所偵測到的挫屈負荷 (例題 4.6).....	56
表 4.5	Channel section in torsion 所偵測到的極限點(例題 4.7).....	56



## 圖目錄

圖 1.1	文獻[37]實驗所觀察到四種變形轉換(a-d)及 對應於 a-c 圖結構的上視圖(e-g).....	57
圖 2.1	固定總體座標、元素座標與節點基礎座標.....	58
圖 2.2	旋轉向量.....	59
圖 2.3	元素變形示意圖.....	60
圖 2.4	元素節點 $j$ 中心面之 $x_{ij}^B$ 軸受旋轉向量 $-\theta_{nj}$ 作用的示意圖.....	61
圖 2.5	元素節點 $j$ 中心面之 $\theta_{sj}^E \mathbf{e}_3$ 為將 ${}^0x_{1j}^{B'}$ 軸旋轉到 $x_{1j}^{B'}$ 軸旋轉向量 的示意圖.....	62
圖 2.6	三角元素的示意圖及節點自由度.....	63
圖 2.7	DKT 元素的節點及其三邊上的局部座標示意圖.....	64
圖 4.1	半圓環受到單點集中力作用 (a)結構尺寸示意圖 (b)網格 18×1 示意圖 (c)網格 18×2 示意圖.....	65
圖 4.2	半圓環受到單點集中力作用，不同網格下之負荷位移 曲線圖。.....	66
圖 4.3	直角構架受到端點剪力作用 (a)結構尺寸示意圖 (b)網格 M21 與網格 M22 示意圖.....	67
圖 4.4	直角構架受到端點剪力作用，不同網格下之負荷位移曲 線圖。.....	68
圖 4.5	圓柱殼片段受到單點集中力作用 (a)結構尺寸示意圖 (b)力負荷圖 (c)網格 10×10 示意圖.....	69
圖 4.6	圓柱殼片段受到單點集中力作用之負荷位移曲線圖.....	70
圖 4.7	Lateral torsional buckling (a)結構尺寸示意圖 (b)網格(1+2+1)×2 示意圖.....	71
圖 4.8	Simply supported compressed plate (a)結構尺寸示意圖	

	(b)網格 4×6 示意圖.....	72
圖 4.9	Transversally loaded T profile (a)結構尺寸示意圖	
	(b)網格(2+2+3)×4 示意圖.....	73
圖 4.10	Channel section in torsion (a)結構尺寸示意圖	
	(b)網格(1+2+1)×2 示意圖.....	74
圖 4.11	Channel section in torsion，不同網格下之負荷位移	
	曲線圖。.....	75
圖 4.12	懸臂圓柱殼受到單點集中力作用 (a)結構尺寸示意圖	
	(b)網格 16×16 示意圖.....	76
圖 4.13	懸臂圓柱殼受到單點集中力作用之負荷位移曲線圖.....	77
圖 4.14	半球殼受到單點集中力作用 (a)結構尺寸示意圖	
	(b)網格 12×12 示意圖.....	78
圖 4.15	半球殼受到單點集中力作用之負荷位移曲線圖.....	79
圖 4.16	直角梁受到單點集中力作用 (a)結構尺寸示意圖	
	(b)網格(2+2)×2 示意圖.....	80
圖 4.17	直角梁受到單點集中力作用，不同網格下之負荷位移	
	曲線圖。.....	81

## 第一章 緒論

在近代工程設計的發展上，對材料的的要求與結構的表現趨向於高強度與輕量化，舉凡建築結構、航太設備、壓力容器、軍事載體及汽車工業等，設計者要考量以最小成本來達到所需的機能與強度，並且兼顧外型的美觀。由於薄殼在承受彎曲應力與拉伸應力的表現上有良好的表現，又能達到經濟與輕量化的要求，因此薄殼為設計者最常使用的結構之一，而廣泛應用在工程及生活上。常見的薄殼結構包括：建築屋頂、飛機蒙皮、液體儲存槽、人造衛星、火箭、船體結構、水中潛體等。

由於薄殼結構常用來承受大旋轉和大位移，即使在彈性範圍內，其位移與受力的關係通常呈非線性變化，因此必須使用非線性分析來探討由幾何形狀改變所造成的非線性行為。殼的研究從最早的線性分析進入到較實際的材料非線性及大變形問題；後來殼的不穩定性、挫屈及挫屈後行為和幾何非線性等問題則陸續被探討。結構在受到力負荷及位移負荷的分析中，負荷參數對位移曲線圖的平衡路徑有時會出現snap-back與snap-through的情況[1]。結構在挫屈前僅有一平衡路徑，即主要平衡路徑；但如果出現分歧點(bifurcation point)，則在挫屈後的平衡路徑除了主要平衡路徑外，還有次要平衡路徑，主要和次要平衡路徑上的變形型態可能完全不同。

分析殼結構最常用的方法為有限元素法，世界各地的學者在薄板和薄殼的有限元素模擬研究已超過五十年，會花這麼長時間在這方面研究主要

可以用兩個理由來解釋[2]，第一，在工業上固體力學問題的有限元素模擬大約佔百分之七十都當成薄殼結構來處理，第二，一些挑戰性理論和數值問題吸引很多研究者提出了「簡單、有效率、健全、可靠、容易收斂、精確、最好...」的板殼元素互相競爭比較。

殼元素最常使用的形狀為三角形或四邊形，對任何不規則形狀的殼結構，我們都可以輕易地將其切割成有限的三角形組合，但不一定適合將其切割成四邊形的組合，故三角形元素在文獻上被廣泛的探討及使用。文獻中有很多殼元素被提出[3-17]，大致上可分為平面元素、曲面元素和等參數元素這三類。有限元素分析薄殼最常見的做法就是將三角平面元素(membrane element)與三角板元素(plate bending element)疊加成一平面三角殼元素(shell element)，這種殼元素推導簡單，並且數值計算比曲面元素更有效率[14]，已分別應用在殼結構的線性分析[3-5,17]和幾何非線性分析[7-17]上。

結構之幾何非線性分析常用的推導法有全拉格朗日法(total Lagrangian formulation)[9]、更新拉格朗日法(updated Lagrangian formulation)[6,9,17]、及共旋轉法(co-rotational formulation) [7,8,10-16]，全拉格朗日法是以結構初始狀態為參考位置來表示總位移及旋轉；更新拉格朗日法是以結構上一個平衡狀態為參考位置來表示增量位移及旋轉；共旋轉法是利用建立在元素當前變形位置的元素座標將剛體位移及旋轉從總位移及旋轉中扣除，剩下的總變形位移及旋轉仍為小位移及旋轉。所以若使用共旋轉法，則在線性

分析使用的元素可以用在大位移小應變問題之幾何非線性分析。共旋轉法在梁與殼結構的幾何非線性分析已經被廣泛的使用[7,8,10-16]，但在平面應變的問題，則很少見到被使用[18,26]。

CST(constant strain triangle)元素和LST(linear strain triangle)元素都是最簡單的平面元素，它們常常跟合適的板元素疊加在薄殼分析上使用，因為這種平面三角殼元素缺少旋轉自由度(drilling degree of freedom)，所以其元素剛度的面內旋轉剛度(in-plane rotational stiffness)為零，為了避免系統剛度矩陣因奇異性(singularity)造成分析的困難，文獻[6,7,11,12]是加上一人工(Artificial)的面內旋轉剛度。

從1964至1983年期間，許多人在研究如何在3節點的平面三角形元素上加入節點旋轉自由度，希望能得到一個3節點9個自由度的平面三角形元素，節點自由度為2個位移、1個旋轉，但是都沒有得出可用的元素，一直到在1984年Allman[19]才提出第一個成功帶有旋轉自由度、3個節點9個自由度的平面三角形元素。三角平面元素加入旋轉自由度的原因為[24]：改善三角平面元素的性能並避免使用到三角形邊上的節點，因為邊上的節點會影響到網格生成，而且在模擬非線性分析與動態分析時較為困難；當三角平面元素與三角板元素疊加時，能滿足物理上一個節點有3個旋轉自由度的要求；三角形元素與殼元素、板元素或是梁元素同時使用時，能使接合簡單化。

從1984年至今，有許多具旋轉自由度平面三角形元素被提出[19-22]，

其中除了文獻[22]的 DLST 元素是 12 個自由度，三角形頂點自由度為 2 個位移、1 個旋轉並且邊上中點自由度為 1 個位移，其餘的元素都是 3 個節點 9 個自由度的元素。由文獻[22]的結果可以發現當元素網格很密時，所有元素的結果都差不多，但是在使用同樣數目的元素網格時，DLST 元素的結果比具旋轉自由度之 3 節點 9 個自由度之元素的結果好，這應是合理的，因為 DLST 元素有 12 個自由度。1966 年 Felippa[23]提出具 3 節點 18 個自由度的 QST 平面元素(quadratic strain triangle element)，QST 元素中有一種的節點自由度為 2 個位移、1 個旋轉及 3 個應變，在文獻[24]中稱其為 QST-3/18RS 元素。文獻上使用 QST 元素分析例題的結果甚為少見，這可能是因為現在的趨勢是使用低階元素，QST 元素不滿足簡單元素的要求，但由文獻[25]的例題，可以發現 QST 元素有很好的性能，由文獻[26]的例題，可以發現在使用同樣數目的元素網格時，QST 元素的結果比具旋轉自由度之 3 節點 9 個自由度及 12 個自由度之元素的結果好，這應是合理的，因為 QST 元素有 18 個自由度。廣義的來說，應變也是物理上的自由度，所以該 QST 元素應可稱為高階的簡單元素。文獻[26]提出了具旋轉自由度之三角平面元素的共旋轉推導法，將 QST-3/18RS 元素應用於平面應變問題的幾何非線性分析，並提出一個決定元素節點變形參數的方法，由文獻[26]例題的結果，可以發現其方法確實可應用在幾何非線性分析上，並有正確的結果。但文獻[26]在平衡迭代時使用的剛度矩陣並沒有包含幾何剛度矩陣。

從1965年至今，有許多三角板元素被提出[27-36]，在1966年Bazeley[27]

提出了BCIZ元素，其側向位移場  $w$  僅滿足C0連續，BCIZ元素和HCT[28]、DKT (Discrete Kirchoff Triangle) [29]、HSM (Hybrid Stress Model) [30,31] 元素一樣都是3個節點9個自由度，其節點自由度為1個位移、2個旋轉，Batoz[32]研究過幾個克希霍夫板元素BCIZ、DKT、HSM、HCT元素，認為DKT元素是對薄板分析最可靠的元素，但是在1998年Y. K. Cheung[33]指出DKT元素的缺陷，即該元素內部不能滿足  $\frac{\partial \theta_x}{\partial y} = \frac{\partial \theta_y}{\partial x}$  的連續條件且沒有定義側向位移場  $w$ ，因為計算板元素之質量矩陣及幾何剛度矩陣需要該元素的側向位移場  $w$ ，所以其質量矩陣和幾何剛度矩陣皆使用其他元素之側向位移場來推導，在薄板彎曲振動及挫屈分析的準確性不能令人滿意。文獻[6,7,11,12]在計算該元素的幾何剛度矩陣時，假設側向位移場  $w$  為線性位移場，並且只考慮平面元素產生的應力，但文獻[6,7,11,12]中僅有幾何非線性分析，並無挫屈分析。Y. K. Cheung在1998年[33]提出RDKT元素(refined triangular discrete Kirchhoff plate bending element)，其元素定義的側向位移場  $w$  能滿足C1連續，RDKT元素的元素幾何剛度矩陣一部分由BCIZ元素的側向位移場  $w$  提供，另一部分由私下假設  $\frac{\partial w}{\partial x} = \theta_x$ ， $\frac{\partial w}{\partial y} = \theta_y$  提供，並且加入控制參數來分配，由文獻[33]中薄板挫屈分析的結果可以發現RDKT元素比DKT元素有更好的結果，但是無挫屈後分析。在2008年Kasperek[36]提出E30元素，E30元素是利用拉格朗日插值法(Lagrange interpolation)將側向位移場  $w$  假設為三次完整多項式，在線性分析的結果比HCT元素還要準確。在2007年Khosravi

等人在文獻[14]將OPT元素與DKT元素疊加成一平面三角殼元素，並且使用LST-Ret平面元素[24]的位移場 $u$ 、 $v$ 及BCIZ板元素[27]的側向位移場 $w$ 推導該元素的幾何剛度矩陣，該元素在幾何非線性分析跟解析解相當接近。Khosravi等人在文獻[15]用不同的平面元素Allman(3M)[21]、LST-Ret、OPT與DKT元素疊加分析薄殼受均布力的例題，將結構分割成不同網格去測試，文獻[15]從其負荷參數對位移曲線圖發現網格變多之下不同元素得到的分歧點也會比較接近。在2007年Battini[13]將OPT元素與DKT元素疊加成一平面三角殼元素，以共旋轉推導法來推導該元素的幾何剛度矩陣，使用較少的元素在幾何非線性分析、挫屈分析以及挫屈後分析都有不錯的結果。

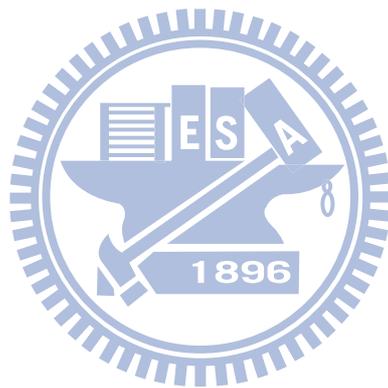
文獻[37]以實驗和數值方法[38]探討一聚酯圓柱薄殼受位移負荷作用後的非線性行為，模擬一矩形薄板在長邊以夾鉗挾持，夾鉗先將薄板彎成一圓柱狀，再施加一集中位移負荷於結構中心的情況，採用兩階段的位移負荷分析。在其實驗中隨著位移負荷的增加，結構連續產生四個特殊的幾何變形，如圖1.1所示。第一個變形是在薄殼中心附近出現兩個對稱X、Y軸的d-cone (developable cone) (圖1.1a)。第二個變形中出現兩個新的d-cone，而四個d-cone圍成一個對薄殼中心轉了一個角度的菱形(圖1.1b)。第三個變形為四個d-cone的連線形成一個梯型(圖1.1c)。第四個變形為梯形底邊兩個d-cone移到薄殼自由端的邊界時，產生一個不連續的變化，使薄殼變成波浪狀的圓柱殼(圖1.1d)。雖然文獻[37]的負荷-位移曲線圖顯示其數值解與實驗的曲線相當接近，但是由其數值結果卻無法觀察到實驗中出現的菱形旋轉

及梯形的變形轉換。文獻[12]將CST元素與DKT元素疊加成一平面三角殼元素來分析，但是與文獻[37]的數值結果一樣，無法觀察實驗中出現的現象。據本人所知，目前還沒有文獻用數值分析模擬出該實驗出現的各種現象，所以該實驗的數值模擬可以用來檢驗殼元素性能優劣之基準問題 (benchmark problem)。

一個好的殼元素應能精確的計算出殼結構之非線性平衡路徑及偵測其上的分歧點及極限點。因一般共旋轉法採用的幾何剛度矩陣僅是近似的幾何剛度矩陣，故本研究擬用精確的方法推導幾何剛度矩陣，並探討採用不同位移場推導幾何剛度矩陣對平衡迭代及挫屈負荷的影響。文獻[12]所使用的元素缺乏旋轉自由度，可能受其影響導致無法觀察實驗中出現的現象。如前所述，QST元素具有旋轉自由度，也比其他的平面元素有更好的精度，但文獻上尚未有人採用QST元素與板元素結合成殼元素，故本研究將採用文獻上具旋轉自由度的QST三角形平面元素[26]與DKT三角板元素[32]疊加成一平面三角殼元素，並使用共旋轉法，將該元素用在具大位移及大旋轉的薄殼結構分析中，推導更精確的元素幾何剛度矩陣，並且用當前變形位置重新計算QST元素的線性剛度矩陣，希望能有效地改善殼結構幾何非線性分析中平衡迭代的收斂速度，並以精確的切線剛度矩陣來偵測平衡路徑上的分歧點及挫屈模態。

本文將在第二章介紹本研究所使用的平面三角殼元素，以及推導元素幾何剛度矩陣。在第三章說明本研究所採用的數值計算方法以及分析時的

數值程序。在第四章中將以非線性例題測試本研究所使用的平面三角殼元素的性能，來說明本文提出的決定元素節點變形參數的方法是可行的。



## 第二章 理論推導

本文使用共旋轉推導法(co-rotational formulation)[7]，本文將文獻[26]上具旋轉自由度的 QST 平面元素(quadratic strain triangle element)與 DKT 板元素(discrete Kirchhoff theory element)[32]疊加成一個 3 節點 27 個自由度的三角殼元素，元素的節點自由度為 3 個位移、3 個旋轉及 3 個平面應變。為了文章的完整性，在本章將簡單描述殼元素變形的假設、內力和剛度矩陣的推導。不同的元素若有相同的節點及節點自由度，在共旋轉推導法中，可以用相同的方法決定其節點變形參數，在本章中將提出一個決定三角殼元素之節點變形參數 (位移、旋轉及應變)的方法。本章中將以較精確的方法推導平面三角殼元素的幾何剛度矩陣。

### 2.1 基本假設

本文中對非線性平面三角殼元素的推導，做以下假設：

- (1) 薄膜變形及彎曲變形之間無耦合作用。
- (2) 元素的變形位移及旋轉為小位移及小旋轉。
- (3) 在元素變形前，垂直於元素中心面的法向線段，在元素變形後，依然保持直線，且沒有伸長或縮短，該線段在元素的三個頂點垂直於變形後的中心面，但其餘的點依不同元素可有不同的假設。

## 2.2 座標系統

為了描述系統的運動及元素的變形，本文定義了三組座標系統：

(a) 固定總體座標系統(global coordinate system)：  $X_i^G (i=1,2,3)$

如圖 2.1 所示，結構體所有節點的座標、系統的邊界條件與其他座標系統的基底，以及結構的平衡方程式，均在此座標系統中定義。在  $X_i^G$  座標系統內之座標值以  $(X, Y, Z)$  表示。

(b) 元素座標系統(element coordinate system)：  $x_i^E (i=1,2,3)$

如圖 2.1 所示，此座標系統是建立在每一個元素變形後的最新位置上，其座標原點為元素節點 1， $x_1^E$  軸為元素節點 1 與元素節點 2 在元素平面上的連線， $x_2^E$  軸是在元素平面上垂直於  $x_1^E$  軸，且朝著元素節點 3 的方向， $x_3^E$  軸則是由  $x_1^E$  軸與  $x_2^E$  軸外積而得。元素的位移、元素變形、元素節點內力與元素剛度矩陣是在此座標系統中定義，然後經由座標轉換，將其轉換至總體座標系統及基礎座標系統。本文中  ${}^0x_i^E$  表示初始未變形時的元素座標， ${}^Ix_i^E$  表示第  $I$  個增量迭代收斂後的元素座標， $x_i^E$  表示當前變形位置的元素座標。在  $x_i^E$  座標系統內之座標值以  $(x, y, z)$  表示。

(c) 節點基礎座標系統(base coordinate system)：  $x_{ij}^B (i=1,2,3)(j=1,2,3)$

如圖 2.1 所示，圖中  $j$  為節點在元素中的編號，此座標系統的原點是剛接在結構離散後的每一個節點，並與對應的節點一起移動及旋轉。本文中節點  $j$  在其初始位置之  $x_{3j}^B$  軸的方向為曲面在該節點的法線方向， $x_{1j}^B$  軸、 $x_{2j}^B$  軸的方向為曲面在該節點互相垂直的切線方向，節點的應變自由度是在此座標

系統中定義。本文中 ${}^0x_{ij}^B$ 表示元素節點 $j$ 在初始未變形時的節點基礎座標， ${}^Ix_{ij}^B$ 表示元素節點 $j$ 在第 $I$ 個增量迭代收斂後的節點基礎座標， $x_{ij}^B$ 表示元素節點 $j$ 在當前變形位置的節點基礎座標。

### 2.3 旋轉向量

本文中使用旋轉向量來表示一個有限旋轉，如圖 2.2 所示，一向量 $\mathbf{R}$ 受到一旋轉向量 $\phi\mathbf{n}$ 的作用而轉到一個新位置 $\mathbf{R}'$ ， $\mathbf{R}$ 與 $\mathbf{R}'$ 之間的關係可表示成[39]

$$\mathbf{R}' = \cos\phi\mathbf{R} + (1 - \cos\phi)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{R})\mathbf{n} + \sin\phi(\mathbf{n} \times \mathbf{R}) \quad (2.1)$$

### 2.4 元素節點變形參數的決定方法

本文中採用增量迭代法解非線性平衡方程式，假設第 $I$ 個位置已知，此處的第 $I$ 個位置，是指第 $I$ 個增量迭代收斂後的平衡位置。 $\mathbf{x}_j$ 為元素節點 $j$  ( $j=1,2,3$ ) 在當前元素座標上的位置向量， ${}^I\mathbf{X}_j$ 、 ${}^Ix_{ij}^B$ 、 $\Delta\mathbf{U}_j$ 、 $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_j^B$ 以及 $\Delta\phi_j$ 分別為元素節點 $j$ 在固定總體座標中第 $I$ 個位置的位置向量、元素節點 $j$ 在第 $I$ 個位置的節點基礎座標、元素節點 $j$ 的增量位移向量、元素節點 $j$ 的增量應變向量以及元素節點 $j$ 的增量旋轉。本文中假設元素節點 $j$ 受 $\Delta\mathbf{U}_j$ 、 $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_j^B$ 以及 $\Delta\phi_j$ 作用後的變形過程如下：

1. 節點 $j$ 受 $\Delta\mathbf{U}_j$ 的作用由第 $I$ 個位置 ${}^I\mathbf{X}_j$ 平移到節點當前變形位置 $\mathbf{X}_j$ ，在移動過程中，節點 $j$ 無剛體旋轉，即元素各邊在節點的切線方向維持不變，剛接在其上的節點基礎座標的方位亦不變。
2. 節點 $j$ 及剛接在其上的節點基礎座標軸 ${}^Ix_{ij}^B$ 受到 $\Delta\phi_j$ 作用，旋轉到當前變

形位置的  $x_{ij}^B$ 。

3. 節點  $j$  在當前變形位置的節點基礎座標上之應變分量增加一增量  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_j^B$ 。

由上述的變形過程可知節點  $j$  當前變形位置的固定總體座標  $\mathbf{X}_j$  可以由  ${}^I\mathbf{X}_j$  加上  $\Delta\mathbf{U}_j$  得到，由  $\mathbf{X}_j$  可以利用元素座標定義求出當前變形位置的元素座標  $x_i^E$ 。如圖 2.3 所示，將元素變形後當前變形位置的元素座標  $x_i^E$  與初始未變形時的元素座標  ${}^0x_i^E$  重疊，則元素節點變形參數可決定如下：

(1) 節點位移  $\mathbf{u}_j$

節點位移  $\mathbf{u}_j$  可由元素節點  $j$  在當前變形位置的元素座標上的位置向量  $\mathbf{x}_j$  與元素節點  $j$  在初始未變形時的元素座標上位置向量的  ${}^0\mathbf{x}_j$  的差得出：

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{x}_j - {}^0\mathbf{x}_j \quad (2.2)$$

$$\mathbf{u}_j = \{u_j \quad v_j \quad w_j\} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{x}_j = \{x_j \quad y_j \quad z_j\} \quad (2.4)$$

$${}^0\mathbf{x}_j = \{{}^0x_j \quad {}^0y_j \quad {}^0z_j\} \quad (2.5)$$

由元素座標定義的方式可知  ${}^0z_j = z_j = w_j = 0$ 。

(2) 節點應變  $\boldsymbol{\varepsilon}_j$

利用第  $I$  個位置在節點基礎座標上的節點應變向量  ${}^I\boldsymbol{\varepsilon}_j^B$  加上增量應變向量  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_j^B$  可以求出當前變形位置的節點基礎座標上的節點應變向量：

$$\boldsymbol{\varepsilon}_j^B = {}^I\boldsymbol{\varepsilon}_j^B + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_j^B \quad (2.6)$$

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_j^B = \left\{ \Delta\varepsilon_{xj}^B \quad \Delta\varepsilon_{yj}^B \quad \Delta\gamma_{xyj}^B \right\} \quad (2.7)$$

其中  $\boldsymbol{\varepsilon}_j^B$  為當前變形位置的基礎節點座標上的節點應變向量。

(3) 節點變形角  $\theta_{ij}$

如圖 2.4 所示，將旋轉向量  $-\theta_{nj}$  作用在  $x_{ij}^B$  軸上，使其旋轉到  $x_{ij}^{B'}$  軸的新位置，

$\theta_{nj}$  可表示為：

$$\theta_{nj} = \sin^{-1} \left( \frac{\| \mathbf{e}_3^E \times \mathbf{e}_{3j}^B \|}{\| \mathbf{e}_3^E \times \mathbf{e}_{3j}^B \|} \right) \frac{\mathbf{e}_3^E \times \mathbf{e}_{3j}^B}{\| \mathbf{e}_3^E \times \mathbf{e}_{3j}^B \|} \quad (2.8)$$

其中  $\mathbf{e}_3^E$  及  $\mathbf{e}_{3j}^B$  分別為當前變形位置的元素座標之  $x_3^E$  軸的單位向量，及當前變形位置的節點基礎座標之  $x_{3j}^B$  軸的單位向量。此時， $x_{3j}^{B'}$  軸與  $x_3^E$  軸重合，且  $x_{1j}^{B'}$  軸和  $x_{2j}^{B'}$  軸與  $x_3^E$  軸垂直，與  $x_1^E$  軸、 $x_2^E$  軸共平面，但不重合。

同理，在初始未變形時將旋轉向量  ${}^0\theta_{nj}$  作用在  ${}^0x_{ij}^B$  軸上，使其旋轉到  ${}^0x_{ij}^{B'}$  軸的新位置， ${}^0\theta_{nj}$  可表示為：

$${}^0\theta_{nj} = \sin^{-1} \left( \frac{\| {}^0\mathbf{e}_3^E \times {}^0\mathbf{e}_{3j}^B \|}{\| {}^0\mathbf{e}_3^E \times {}^0\mathbf{e}_{3j}^B \|} \right) \frac{{}^0\mathbf{e}_3^E \times {}^0\mathbf{e}_{3j}^B}{\| {}^0\mathbf{e}_3^E \times {}^0\mathbf{e}_{3j}^B \|} \quad (2.9)$$

其中  ${}^0\mathbf{e}_3^E$ 、 ${}^0\mathbf{e}_{3j}^B$  分別為初始未變形時元素座標之  ${}^0x_3^E$  軸的單位向量，以及初始未變形時基礎節點座標之  ${}^0x_{3j}^B$  軸的單位向量。若結構初始未變形時為曲面，則  ${}^0x_3^E$  軸和  ${}^0x_{3j}^B$  軸不平行，所以  ${}^0\theta_{nj} \neq 0$ ；若結構初始未變形時為平面，則  ${}^0x_3^E$  軸和  ${}^0x_{3j}^B$  軸平行，所以  ${}^0\theta_{nj} = 0$ 。

如圖 2.5 所示， $\theta_{zj} \mathbf{e}_3^E$  ( $j=1, 2, 3$ ) 為將  ${}^0x_{1j}^{B'}$  軸旋轉到  $x_{1j}^{B'}$  軸的旋轉向量， $\theta_{zj}$  可表示為：

$$\theta_{zj} = \sin^{-1} \left( \frac{\| {}^0\mathbf{e}_{1j}^{B'} \times \mathbf{e}_{1j}^{B'} \|}{\| {}^0\mathbf{e}_{1j}^{B'} \times \mathbf{e}_{1j}^{B'} \|} \right) \frac{{}^0\mathbf{e}_{1j}^{B'} \times \mathbf{e}_{1j}^{B'}}{\| {}^0\mathbf{e}_{1j}^{B'} \times \mathbf{e}_{1j}^{B'} \|} \cdot \mathbf{e}_3^E \quad (2.10)$$

其中  ${}^0\mathbf{e}_{1j}^{B'}$ 、 $\mathbf{e}_{1j}^{B'}$  分別為初始未變形時之  ${}^0x_{1j}^{B'}$  軸的單位向量，以及當前變形位置

之  $x_{1j}^{B'}$  軸的單位向量。

令  ${}^0\theta_{nj}^E$  及  $\theta_{nj}^E$  為將  ${}^0\theta_{nj}$  與  $\theta_{nj}$  分別以初始未變形時的元素座標及當前變形位置的元素座標為基底，節點變形角  $\theta_{ij} (i = x, y; j = 1, 2, 3)$  可表示為：

$$\begin{Bmatrix} \theta_{xj} \\ \theta_{yj} \\ 0 \end{Bmatrix} = \theta_{nj}^E - {}^0\theta_{nj}^E \quad (2.11)$$

## 2.5 殼元素的變形描述

如圖 2.6 所示之殼元素中心面上有三個節點，每個節點的自由度至少分別是  $x_1^E$ 、 $x_2^E$ 、 $x_3^E$  軸方向的位移  $u_j$ 、 $v_j$ 、 $w_j (j=1,2,3)$ ，繞  $x_1^E$ 、 $x_2^E$ 、 $x_3^E$  軸方向的位移轉角  $\theta_{xj}$ 、 $\theta_{yj}$ 、 $\theta_{zj} (j=1,2,3)$ ，以及應變分量  $\varepsilon_{xj}$ 、 $\varepsilon_{yj}$ 、 $\gamma_{xyj}$ 。此殼元素的變形可分為薄膜變形(membrane deformation)與彎曲變形(bending deformation)兩部份，薄膜變形是來自平面元素，彎曲變形則是來自板元素，由基本假設(1)可知此元素的變形可由薄膜變形與彎曲變形疊加而成。

在圖 2.6 中的元素節點位移  $u_j$ 、 $v_j$  及  $\theta_{zj} (j=1,2,3)$  是 QST 平面元素[26]節點位移，而  $\theta_{xj}$ 、 $\theta_{yj}$  及  $w_j (j=1,2,3)$  為 DKT 板元素[32]的節點位移。

因本文使用共旋轉推導法，且假設在元素座標上，元素的變形位移及旋轉為小位移及小旋轉，所以本章中除了推導幾何剛度矩陣外，都僅考慮線性的位移—應變關係。

## 2.6 QST 平面元素的變形描述

本文採用的三角平面元素為文獻[26]中所提出的 QST 元素，其位移場為

三次變化，應變場則為二次變化。此元素有 3 個節點，每個節點有 6 個自由度，此元素可使用彼此間能互相轉換的不同節點參數。本文中採用的節點參數為節點  $j$  在元素座標  $x_1^E$ 、 $x_2^E$  軸的位移分量  $u_j$ 、 $v_j$ ，應變分量  $\varepsilon_{xj}$ 、 $\varepsilon_{yj}$ 、 $\gamma_{xyj}$  及逆時鐘方向的旋轉  $\theta_j$ 。但為了方便推導，本文在元素推導時使用的節點參數是節點  $j$  在  $x_1^E$ 、 $x_2^E$  軸的位移分量  $u_j$ 、 $v_j$  以及  $x_1^E$ 、 $x_2^E$  軸的位移分量分別對面積座標(area coordinates) $\xi$ 、 $\eta$  的微分  $u_{,\xi}$ 、 $u_{,\eta}$ 、 $v_{,\xi}$ 、 $v_{,\eta}$ ，面積座標的介紹詳見附錄 A。

此元素的位移場可表示為[40]：

$$u = \mathbf{N}_u^t \mathbf{q}_\xi \quad (2.12)$$

$$v = \mathbf{N}_v^t \mathbf{q}_\xi \quad (2.13)$$

$$\mathbf{q}_\xi = \{ \mathbf{q}_{\xi 1} \quad \mathbf{q}_{\xi 2} \quad \mathbf{q}_{\xi 3} \} \quad (2.14)$$

$$\mathbf{N}_u = \{ N_1 \quad 0 \quad N_2 \quad N_3 \quad 0 \quad 0 \quad N_4 \quad 0 \quad N_5 \quad N_6 \quad 0 \quad 0 \quad N_7 \quad 0 \quad N_8 \quad N_9 \quad 0 \quad 0 \} \quad (2.15)$$

$$\mathbf{N}_v = \{ 0 \quad N_1 \quad 0 \quad 0 \quad N_2 \quad N_3 \quad 0 \quad N_4 \quad 0 \quad 0 \quad N_5 \quad N_6 \quad 0 \quad N_7 \quad 0 \quad 0 \quad N_8 \quad N_9 \} \quad (2.16)$$

$$\mathbf{q}_{\xi j} = \{ u_j \quad v_j \quad u_{,\xi} \quad u_{,\eta} \quad v_{,\xi} \quad v_{,\eta} \} \quad (2.17)$$

其中  $u = u(\xi, \eta)$ 、 $v = v(\xi, \eta)$  分別為在  $x_1^E$ 、 $x_2^E$  軸的位移分量， $\mathbf{N}_u$  為對應於  $u$  的形狀函數， $\mathbf{N}_v$  為對應於  $v$  的形狀函數， $\mathbf{q}_\xi$  為節點參數向量， $N_i$  ( $i=1,2,3,\dots,9$ ) 為面積座標的三次函數，其表示式詳見附錄 B，另外本文中  $\{ \}$  表行矩陣。

由小變形的假設，元素內任意點的正應變、剪應變及逆時鐘方向的剛體旋轉可表示為[41]：

$$\varepsilon_x = u_{,x} \quad (2.18)$$

$$\varepsilon_y = v_{,y} \quad (2.19)$$

$$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} \quad (2.20)$$

$$\theta = \frac{1}{2}(v_{,x} - u_{,y}) \quad (2.21)$$

因  $u$ 、 $v$  都是  $\xi$ 、 $\eta$  的顯函數，所以  $u_{,x}$ 、 $u_{,y}$  與  $u_{,\xi}$ 、 $u_{,\eta}$  及  $v_{,x}$ 、 $v_{,y}$  與  $v_{,\xi}$ 、 $v_{,\eta}$

的關係可表示成(詳見附錄 A)：

$$\begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \end{Bmatrix} = \mathbf{A}_{\xi x} \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

$$\begin{Bmatrix} v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \end{Bmatrix} = \mathbf{A}_{\xi x} \begin{Bmatrix} v_{,x} \\ v_{,y} \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

$$\mathbf{A}_{\xi x} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{21} & y_{21} \\ x_{31} & y_{31} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$x_{ij} = x_i - x_j \quad (2.25)$$

$$y_{ij} = y_i - y_j \quad (2.26)$$

其中  $x_j$ 、 $y_j$  分別是元素節點  $j$  在元素座標系統的座標值。

令節點參數向量  $\mathbf{q}_x$  與  $\mathbf{q}_\theta$  分別為：

$$\mathbf{q}_x = \{ \mathbf{q}_{x1} \quad \mathbf{q}_{x2} \quad \mathbf{q}_{x3} \} \quad (2.27)$$

$$\mathbf{q}_\theta = \{ \mathbf{q}_{\theta1} \quad \mathbf{q}_{\theta2} \quad \mathbf{q}_{\theta3} \} \quad (2.28)$$

$$\mathbf{q}_{xj} = \{ u_j \quad v_j \quad u_{,xj} \quad u_{,yj} \quad v_{,xj} \quad v_{,yj} \} \quad (2.29)$$

$$\mathbf{q}_\theta = \{u_j \quad v_j \quad \varepsilon_{xj} \quad \varepsilon_{yj} \quad \gamma_{xyj} \quad \theta_j\} \quad (2.30)$$

其中  $u_{,xj}$ 、 $u_{,yj}$ 、 $v_{,xj}$ 、 $v_{,yj}$  分別為  $u_{,x}$ 、 $u_{,y}$ 、 $v_{,x}$ 、 $v_{,y}$  在元素節點  $j$  之值， $\varepsilon_{xj}$ 、 $\varepsilon_{yj}$ 、 $\gamma_{xyj}$ 、 $\theta_j$  分別為  $\varepsilon_x$ 、 $\varepsilon_y$ 、 $\gamma_{xy}$ 、 $\theta$  在元素節點  $j$  之值。由(2.22)式與(2.23)

式，可求得(2.14)式中  $\mathbf{q}_\xi$  與(2.27)式中  $\mathbf{q}_x$  的關係：

$$\mathbf{q}_\xi = \mathbf{T}_{\xi x} \mathbf{q}_x \quad (2.31)$$

$$\mathbf{T}_{\xi x} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\xi x} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{\xi x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_{\xi x} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$$\mathbf{R}_{\xi x} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{\xi x} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{\xi x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{21} & y_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{31} & y_{31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{21} & y_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{31} & y_{31} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

由(2.18)至(2.21)式可求得(2.27)式中  $\mathbf{q}_x$  與(2.28)式中  $\mathbf{q}_\theta$  的關係：

$$\mathbf{q}_x = \mathbf{T}_{x\theta} \mathbf{q}_\theta \quad (2.34)$$

$$\mathbf{T}_{x\theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{x\theta} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{x\theta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_{x\theta} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

$$\mathbf{R}_{x\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

將(2.31)式與(2.34)式代入(2.12)式與(2.13)式可得：

$$u = \mathbf{N}_u^T \mathbf{T}_{\xi\theta} \mathbf{q}_\theta = \mathbf{N}_{u\theta} \mathbf{q}_\theta \quad (2.37)$$

$$v = \mathbf{N}_v^T \mathbf{T}_{\xi\theta} \mathbf{q}_\theta = \mathbf{N}_{v\theta} \mathbf{q}_\theta \quad (2.38)$$

$$\mathbf{T}_{\xi\theta} = \mathbf{T}_{\xi x} \mathbf{T}_{x\theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\xi x} \mathbf{R}_{x\theta} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{\xi x} \mathbf{R}_{x\theta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_{\xi x} \mathbf{R}_{x\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\xi\theta} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{\xi\theta} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_{\xi\theta} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$$\mathbf{R}_{\xi\theta} = \mathbf{R}_{\xi x} \mathbf{R}_{x\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{21} & 0 & y_{21}/2 & -y_{21} \\ 0 & 0 & x_{31} & 0 & y_{31}/2 & -y_{31} \\ 0 & 0 & 0 & y_{21} & x_{21}/2 & x_{21} \\ 0 & 0 & 0 & y_{31} & x_{31}/2 & x_{31} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

## 2.7 DKT 板元素的變形描述

圖 2.7 所示為文獻[32]中所提出的 DKT 板元素，節點 1、2、3 是三角形的三個頂點，節點 4、5、6 為三角形三個邊的中點，這三個中點的自由度僅在元素推導的過程中暫時使用，在最後不會出現在元素的節點自由度。在圖 2.4 中， $x_{3j}^B$  軸的方向為元素節點  $j$  在當前變形位置的法線方向， $x_{3j}^{B'}$  軸的方向為元素中心面在當前變形位置的法線方向， $\theta_{nj}$  為一在  $x_{1j}^B - x_{2j}^B$  平面上的旋轉向量，將  $-\theta_{nj}$  作用在  $x_{ij}^B$  軸可將  $x_{3j}^B$  軸轉到  $x_{3j}^{B'}$  軸，同理， ${}^0x_{3j}^B$  軸的方向為元素節點  $j$  在初始未變形時的法線方向， ${}^0x_{3j}^{B'}$  軸的方向為元素中心面在初始未變形時的法線方向， ${}^0\theta_{nj}$  為一在  ${}^0x_{1j}^B - {}^0x_{2j}^B$  平面上的旋轉向量，將  ${}^0-\theta_{nj}$  作用在  ${}^0x_{ij}^B$  軸可將  ${}^0x_{3j}^B$  軸轉到  ${}^0x_{3j}^{B'}$  軸。由 2.1 的假設(3)可知垂直於變形前的元素中心面法線向量變形後仍為直線且長度不變，所以當旋轉向量

$\|\boldsymbol{\theta}_{nj} - {}^0\boldsymbol{\theta}_{nj}\| \ll 1$  時，DKT 元素的位移場可表示成：

$$u = z\theta_y(x, y) \quad v = -z\theta_x(x, y) \quad w = w(x, y) \quad (2.41)$$

其中  $x$ 、 $y$ 、 $z$  為元素上任一點分別在  $x_1^E$ 、 $x_2^E$ 、 $x_3^E$  軸的座標值， $\theta_y$  是  $(\boldsymbol{\theta}_n - {}^0\boldsymbol{\theta}_n)$  在  $x_1^E$  軸方向的分量， $\theta_x$  是  $(\boldsymbol{\theta}_n - {}^0\boldsymbol{\theta}_n)$  在  $x_2^E$  軸方向的分量， $\boldsymbol{\theta}_n$  為當前變形位置的元素變形角， ${}^0\boldsymbol{\theta}_n$  為初始未變形時的元素變形角， $u$  是在  $x_1^E$  軸方向的位移， $v$  是在  $x_2^E$  軸方向的位移， $w$  是在  $x_3^E$  軸方向位移。

DKT 元素的應變變形包含面內(in plane)正應變  $\varepsilon_x$ 、 $\varepsilon_y$  與剪應變  $\gamma_{xy}$  以及橫向剪應變(transverse shear strain)  $\gamma_{yz}$ 、 $\gamma_{xz}$ 。

因本文假設元素的變形為小變形， $\varepsilon_x$ 、 $\varepsilon_y$  和  $\gamma_{xy}$  可表示成(2.18)至(2.20)式， $\gamma_{yz}$ 、 $\gamma_{xz}$  可表示成：

$$\gamma_{xz} = w_{,x} + u_{,z} \quad \gamma_{yz} = w_{,y} + v_{,z} \quad (2.42)$$

將(2.41)式代入(2.18)至(2.20)式可得：

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b = z\mathbf{K} \quad (2.43)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\} \quad (2.44)$$

$$\mathbf{K} = \{\theta_{y,x}, -\theta_{x,y}, \theta_{y,y} - \theta_{x,x}\} \quad (2.45)$$

將(2.41)式代入(2.42)式可得：

$$\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}\} = \{w_{,x} + \theta_y, w_{,y} - \theta_x\} \quad (2.46)$$

由(2.41)式可知  $w$ 、 $\theta_y$ 、 $\theta_x$  與  $x_3^E$  無關，所以可由(2.45)式知橫向剪應變在厚度方向為常數。

本文中稱圖 2.7 中沿著元素邊緣方向  $s$  為切線方向，而垂直於元素邊緣

方向  $n$  為法線方向。

在文獻[32]中對於其所提出的 DKT 元素做了下列的假設：

(1)  $\theta_y$ 、 $\theta_x$  在元素內為二次變化，也就是：

$$\theta_y = \sum_{i=1}^6 N_i \theta_{yi} \quad ; \quad \theta_x = -\sum_{i=1}^6 N_i \theta_{xi} \quad (2.47)$$

其中  $\theta_{yi}$ 、 $\theta_{xi}$  是  $\theta_y$ 、 $\theta_x$  在圖 2.7 中節點  $i$  的節點值， $N_i (i=1, \dots, 6)$  為形狀函數，其表示式詳見附錄 C。

(2) 元素的三個頂點以及三個邊的中點滿足克希霍夫板理論(Kirchhoff plate theory)的假設，即

(a) 在三個頂點

$$\gamma_{xzi} = w_{,xi} + \theta_{yi} = 0 \quad i=1, 2, 3 \quad (2.48a)$$

$$\gamma_{yzi} = w_{,yi} - \theta_{xi} = 0 \quad i=1, 2, 3 \quad (2.48b)$$

其中  $w_{xi}$ 、 $w_{yi}$ 、 $\theta_{yi}$ 、 $\theta_{xi}$  分別是  $w_x = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)$ 、 $w_y = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)$ 、 $\theta_y$ 、 $\theta_x$  在節點  $i$  的值。

(b) 在三個邊的中點

$$-\theta_{nk} + w_{,sk} = 0 \quad k=4, 5, 6 \quad (2.49a)$$

$$\theta_{sk} + w_{,nk} = 0 \quad k=4, 5, 6 \quad (2.49b)$$

其中  $\theta_{nk}$ 、 $\theta_{sk}$  分別是  $\theta_n$ 、 $\theta_s$  在節點  $k$  的值， $\theta_n$  與  $\theta_s$  分別是  $\theta$  在  $n$  與  $s$  方向的分量， $w_{,sk}$ 、 $w_{,nk}$  分別是  $w_{,s} (= \frac{\partial w}{\partial s})$ 、 $w_{,n} (= \frac{\partial w}{\partial n})$  在節點  $k$  的值。

(3)  $w$  在元素邊緣的方向上是呈現三次變化，也就是：

$$w_{,sk} = -\frac{3}{2l_{ij}}w_i - \frac{1}{4}w_{,si} + \frac{3}{2l_{ij}}w_j - \frac{1}{4}w_{,sj} \quad (2.50)$$

其中  $w_i$ 、 $w_j$  是  $w$  在節點  $i$  及  $j$  的值， $w_{,sk}$  是  $w_{,s}$  在節點  $k$  的值， $k=4,5,6$  分別為邊 23、邊 31、邊 12 的中點， $ij$  邊為節點  $i$  與節點  $j$  之間的邊(見圖 2.7)，其中  $i=1-3$ ， $j=1-3$  且  $i \neq j$ 。

(4)  $\theta_s$  在元素邊緣是呈現線性變化，即：

$$\theta_{sk} = \frac{1}{2}(\theta_{si} + \theta_{sj}) \quad (2.51)$$

其中  $\theta_{sk}$ 、 $\theta_{si}$ 、 $\theta_{sj}$  分別是  $\theta_s$  在節點  $k$ 、 $i$ 、 $j$  之值， $\theta_s$  是  $\theta$  在  $s$  方向的分量，在圖 2.7 中節點  $k=4,5,6$  分別為邊 23、邊 31、邊 12 的中點。

在圖 2.7 中元素三個邊上的  $\theta_y$ 、 $\theta_x$  與  $\theta_s$ 、 $\theta_n$  之幾何轉換關係可表示成：

$$\begin{bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_n \\ \theta_s \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

$w_{,x}$ 、 $w_{,y}$  與  $w_{,s}$ 、 $w_{,n}$  的幾何轉換關係為：

$$\begin{bmatrix} w_{,x} \\ w_{,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{,n} \\ w_{,s} \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

其中  $c = \cos \alpha_{ij}$ 、 $s = \sin \alpha_{ij}$ ， $\alpha_{ij}$  為元素的邊  $ij$  上的法線  $n_{ij}$  與  $x_1^E$  軸的夾角，見圖 2.7。

由(2.48)至(2.53)式可以把(2.47)式表示成[32]：

$$\theta_y = \mathbf{H}_x^T(\xi, \eta)\mathbf{u}_b$$

$$\theta_x = -\mathbf{H}_y^T(\xi, \eta)\mathbf{u}_b \quad (2.54)$$

$$\mathbf{u}_b = [w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ w_3 \ \theta_{x3} \ \theta_{y3}] \quad (2.55)$$

其中  $\mathbf{u}_b$  為 DKT 元素的節點位移， $\mathbf{H}_x$  與  $\mathbf{H}_y$  是對應於元素節點位移的新形狀函數，其表示式詳見附錄 C， $\xi$  與  $\eta$  是元素內任一點在元素自然座標[]的座標值，其中  $-1 \leq \xi \leq 1$ 、 $-1 \leq \eta \leq 1$ 。

將(2.54)式代入(2.45)式可以得到：

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{B}_b \mathbf{u}_b \quad (2.56)$$

其中  $\mathbf{B}_b$  為 DKT 元素的位移-應變轉換矩陣，表示式為：

$$\mathbf{B}_b(\xi, \eta) = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_3 \mathbf{H}_{x,\xi}^T \\ -x_3 \mathbf{H}_{y,\xi}^T + x_2 \mathbf{H}_{y,\eta}^T \\ -x_3 \mathbf{H}_{x,\xi}^T + x_2 \mathbf{H}_{x,\eta}^T + y_3 \mathbf{H}_{y,\xi}^T \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

其中  $A = \frac{x_2 y_3}{2}$  為三角形面積。

## 2.8 元素內力與元素剛度矩陣

本文中殼元素的節點內力是由 QST 平面元素及 DKT 板元素的節點內力組合而成，元素剛度矩陣  $\mathbf{k}$  是由 QST 平面元素剛度矩陣  $\mathbf{k}_\theta$ 、DKT 板元素剛度矩陣  $\mathbf{k}_b$  所疊加而成。本節中將用虛功原理推導 QST 平面元素及 DKT 板元素的節點內力及剛度矩陣。

在平面應力狀態，等向性線彈性材料的應變與應力關係為

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.58)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\} \quad (2.59)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\} \quad (2.60)$$

$$\mathbf{E} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz} \quad (2.62)$$

其中  $E$  是楊氏模數(Young's module)， $\nu$  是蒲松比(Poisson ratio)， $G$  為剪力模數。

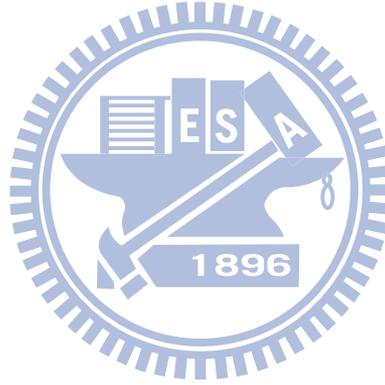
## 2.9 QST 平面元素之節點內力與剛度矩陣

將(2.37)式、(2.38)式代入(2.18)至(2.20)式可得：

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \mathbf{B}\mathbf{T}_{\xi\theta}\mathbf{q}_\theta \quad (2.63)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\} \quad (2.64)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{u,x}^t \\ \mathbf{N}_{v,y}^t \\ \mathbf{N}_{u,y}^t + \mathbf{N}_{v,x}^t \end{bmatrix} \quad (2.65)$$



其中  $\mathbf{N}_{u,x}^t$ 、 $\mathbf{N}_{u,y}^t$ 、 $\mathbf{N}_{v,x}^t$ 、 $\mathbf{N}_{v,y}^t$  的表示式詳見附錄 B。

將(2.63)式代入(2.58)式可得：

$$\boldsymbol{\sigma}_m = \mathbf{E}\mathbf{B}\mathbf{T}_{\xi\theta}\mathbf{q}_\theta \quad (2.66)$$

由虛功原理可得[42]：

$$\delta\mathbf{q}_\theta^t \mathbf{f}_\theta = \int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}_m^t \boldsymbol{\sigma}_m dV \quad (2.67)$$

$$\mathbf{f}_\theta = \{\mathbf{f}_{\theta 1} \quad \mathbf{f}_{\theta 2} \quad \mathbf{f}_{\theta 3}\} \quad (2.68)$$

$$\mathbf{f}_{\theta j} = \{f_{xj} \quad f_{yj} \quad m_{\varepsilon xj} \quad m_{\varepsilon yj} \quad m_{\gamma j} \quad m_{\tau j}\} \quad (2.69)$$

其中  $\mathbf{f}_\theta$  為對應於  $\mathbf{q}_\theta$  的元素節點內力， $f_{xj}$ 、 $f_{yj}$  分別為對應於  $u_j$ 、 $v_j$  的節點

力， $m_{\varepsilon_{xj}}$ 、 $m_{\varepsilon_{yj}}$ 、 $m_{\gamma_{xyj}}$ 分別為對應於 $\varepsilon_{xj}$ 、 $\varepsilon_{yj}$ 、 $\gamma_{xyj}$ 的廣義節點力矩， $m_{\theta_j}$ 為對應於 $\theta_j$ 的節點傳統力矩， $V$ 為元素體積。由於應變的因次(dimension)與旋轉相同，因此應變所對應的節點力 $m_{\varepsilon_{xj}}$ 、 $m_{\varepsilon_{yj}}$ 、 $m_{\gamma_{xyj}}$ 應與力矩有相同的因次為一廣義節點力矩，而非應力。將(2.63)式、(2.66)式代入(2.67)式可得

$$\delta \mathbf{q}_\theta^t \mathbf{f}_\theta = \delta \mathbf{q}_\theta^t \mathbf{T}_{\xi\theta}^T \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \mathbf{T}_{\xi\theta} \mathbf{q}_\theta \quad (2.70)$$

由(2.70)式可得：

$$\mathbf{f}_\theta = \mathbf{k}_\theta \mathbf{q}_\theta \quad (2.71)$$

$$\mathbf{k}_\theta = \mathbf{T}_{\xi\theta}^T \mathbf{k}_\xi \mathbf{T}_{\xi\theta} \quad (2.72)$$

$$\mathbf{k}_\xi = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \quad (2.73)$$

其中 $\mathbf{k}_\xi$ 、 $\mathbf{k}_\theta$ 分別為應於 $\mathbf{q}_\xi$ 、 $\mathbf{q}_\theta$ 的 QST 元素剛度矩陣。

## 2.10 DKT 板元素之節點內力與剛度矩陣

將(2.43)式、(2.56)式代入(2.58)式可得：

$$\boldsymbol{\sigma}_b = z \mathbf{E} \mathbf{B}_b \mathbf{u}_b \quad (2.74)$$

由虛功原理可得：

$$\delta \mathbf{u}_b^t \mathbf{f}_b = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}_b^t \boldsymbol{\sigma}_b dV \quad (2.75)$$

其中 $\mathbf{f}_b$ 是板元素對應於 $\delta \mathbf{u}_b$ 的節點內力， $V$ 為元素的體積。

將(2.43)式、(2.56)式、(2.74)式代入(2.75)式可得：

$$\delta \mathbf{u}_b^t \mathbf{f}_b = \delta \mathbf{u}_b^t \iint_A z \mathbf{B}_b^t z \mathbf{E} \mathbf{B}_b \mathbf{u}_b dz dA = \delta \mathbf{u}_b^t \int_A \mathbf{B}_b^t \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b \mathbf{u}_b dA \quad (2.76)$$

其中

$$\mathbf{D}_b = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{E} z^2 dz = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

其中  $h$  為元素厚度。

由(2.76)式可得：

$$\mathbf{f}_b = \mathbf{k}_b \mathbf{u}_b \quad (2.78)$$

$$\mathbf{k}_b = \int_A \mathbf{B}_b^t \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b dA \quad (2.79)$$

其中  $\mathbf{k}_b$  是 DKT 元素剛度矩陣。

## 2.11 元素幾何剛度矩陣[43]

精確的元素幾何剛度矩陣，必須以非線性的位移—應變關係推導，文獻[43]中以完整的 Green's strain 及 total Lagrangian 推導法推導出一三維元素之切線剛度矩陣的通式，本節中將採用文獻[43]中推導元素幾何剛度矩陣的方法，並加以修改、簡化，使其適用於本研究採用的元素，文獻[43]中的詳細推導及本文之元素幾何剛度矩陣的詳細推導在附錄 D 中。本文的元素幾何剛度矩陣可表示式成

$$\mathbf{k}_\sigma = \int_V \mathbf{G}^t \mathbf{M} \mathbf{G} dV \quad (2.80)$$

$$\mathbf{G} = \{\mathbf{G}_1 \quad \mathbf{G}_2 \quad \mathbf{G}_3\} \quad \mathbf{G}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{u\theta,j,x} & z\mathbf{H}_{xj,x} \\ \mathbf{N}_{v\theta,j,x} & z\mathbf{H}_{yj,x} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_{wj,x} \\ \mathbf{N}_{u\theta,j,y} & z\mathbf{H}_{xj,y} \\ \mathbf{N}_{v\theta,j,y} & z\mathbf{H}_{yj,y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_{wj,y} \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \sigma_x \mathbf{I} & \tau_{xy} \mathbf{I} \\ \tau_{xy} \mathbf{I} & \sigma_y \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \mathbf{I} \text{ 為 } 3 \times 3 \text{ 單位矩陣} \quad (2.82)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_m + \boldsymbol{\sigma}_b \quad \boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\} \quad (2.83)$$

其中  $j = 1, 2, 3$  為第  $j$  個節點， $\mathbf{N}_{u\theta_j}$ 、 $\mathbf{N}_{v\theta_j}$  為 (2.37) 式之  $\mathbf{N}_{u\theta}$ 、(2.38) 式之  $\mathbf{N}_{v\theta}$  對應於節點  $j$  的部份， $\mathbf{H}_{xj}$ 、 $\mathbf{H}_{yj}$  為 (2.54) 式之  $\mathbf{H}_x$ 、 $\mathbf{H}_y$  對應於節點  $j$  的部份， $\mathbf{I}$  為  $3 \times 3$  的單位矩陣、 $\mathbf{0}$  為  $1 \times 6$  的零矩陣， $\boldsymbol{\sigma}_m$ 、 $\boldsymbol{\sigma}_b$  為 (2.66) 式、(2.74) 式之 QST 平面元素及 DKT 板元素的應力場。

因為 DKT 元素的內部沒有定義側向位移場  $w$ ，所以本文假設  $w$  為線性位移場  $w = \mathbf{N}_w \mathbf{u}_b$ ，其中  $\mathbf{N}_w$  與 CST 元素 [12] 的形狀函數相同，本文除了使用 QST 元素本身的位移場  $u = \mathbf{N}_{u\theta, x} \mathbf{q}_\theta$ 、 $v = \mathbf{N}_{v\theta, x} \mathbf{q}_\theta$  外，還用  $u$ 、 $v$  為線性位移場推導 (2.81) 式之元素幾何剛度矩陣，本文推導的兩種元素幾何剛度矩陣都僅是近似的幾何剛度矩陣，但由本文的數值結果發現這兩種元素幾何剛度矩陣在非線性分析的平衡迭代時都能提高收斂速度且性相能近，在挫屈分析時也都能偵測到相當接近的挫屈負荷。

## 2.12 座標系統轉換

為了建立結構的平衡方程式，必須將元素節點參數  $\mathbf{q}$  中的  $u_j$ 、 $v_j$ 、 $w_j$  和  $\theta_{xj}$ 、 $\theta_{yj}$ 、 $\theta_{zj}$  轉換成固定總體座標的分量， $\varepsilon_{xj}$ 、 $\varepsilon_{yj}$ 、 $\gamma_{xyj}$  轉換成對應於節點基礎座標的分量，才能將各元素節點內力組合成結構系統節點內力以及將元素剛度矩陣疊加成結構系統剛度矩陣。在元素座標的節點位移  $u_j$ 、 $v_j$ 、 $w_j$  和節點旋轉  $\theta_{xj}$ 、 $\theta_{yj}$ 、 $\theta_{zj}$  與在固定總體座標的節點位移和節點旋轉之關係式

為：

$$\begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \\ w_j \end{Bmatrix} = \mathbf{A}_{GE}^t \begin{Bmatrix} U_j \\ V_j \\ W_j \end{Bmatrix} \quad (2.84)$$

$$\begin{Bmatrix} \theta_{xj} \\ \theta_{yj} \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} = \mathbf{A}_{GE}^t \begin{Bmatrix} \theta_{Xj}^G \\ \theta_{Yj}^G \\ \theta_{Zj}^G \end{Bmatrix} \quad (2.85)$$

$$\mathbf{A}_{GE} = [\mathbf{e}_1^E \quad \mathbf{e}_2^E \quad \mathbf{e}_3^E] \quad (2.86)$$

其中  $U_j$ 、 $V_j$ 、 $W_j$  分別為在  $X_1^G$ 、 $X_2^G$ 、 $X_3^G$  軸的位移分量， $\theta_{Xj}^G$ 、 $\theta_{Yj}^G$ 、 $\theta_{Zj}^G$  分別為在  $X_1^G$ 、 $X_2^G$ 、 $X_3^G$  軸的旋轉分量， $\mathbf{e}_i^E$  ( $i=1,2,3$ ) 為元素座標  $x_i^E$  ( $i=1,2,3$ ) 方向的單位向量。

其中在元素座標的節點應變  $\varepsilon_{xj}$ 、 $\varepsilon_{yj}$ 、 $\gamma_{xyj}$  與在節點基礎座標的節點應變之關係式為[41]：

$$\boldsymbol{\varepsilon}_j = \mathbf{R}_{EBj} \boldsymbol{\varepsilon}_j^B \quad (2.87)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_j = \{ \varepsilon_{xj} \quad \varepsilon_{yj} \quad \gamma_{xyj} \} \quad (2.88)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_j^B = \{ \varepsilon_{xj}^B \quad \varepsilon_{yj}^B \quad \gamma_{xyj}^B \} \quad (2.89)$$

$$\mathbf{R}_{EBj} = \begin{bmatrix} c_{Bj}^2 & s_{Bj}^2 & -c_{Bj}s_{Bj} \\ s_{Bj}^2 & c_{Bj}^2 & c_{Bj}s_{Bj} \\ 2c_{Bj}s_{Bj} & -2c_{Bj}s_{Bj} & c_{Bj}^2 - s_{Bj}^2 \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

$$\mathbf{A}_{GBj} = [\mathbf{e}_{1j}^B \quad \mathbf{e}_{2j}^B \quad \mathbf{e}_{3j}^B] \quad (2.91)$$

其中  $c_{Bj}$ 、 $s_{Bj}$  分別為  $\mathbf{e}_{1j}^B$  在元素座標  $x_1^E$ 、 $x_2^E$  軸的分量， $\varepsilon_{xj}^B$ 、 $\varepsilon_{yj}^B$ 、 $\gamma_{xyj}^B$  為對應於節點基礎座標  $x_{1j}^B$ 、 $x_{2j}^B$  軸的應變分量， $\mathbf{e}_{ij}^B$  ( $i, j=1,2,3$ ) 為節點基礎座標  $x_{ij}^B$  ( $i, j=1,2,3$ ) 方向的單位向量。

$$\mathbf{q}_{Ej} = \{u_j \ v_j \ w_j \ \theta_{xj} \ \theta_{yj} \ \theta_{zj} \ \varepsilon_{xj} \ \varepsilon_{yj} \ \gamma_{xyj}\} \quad (2.92)$$

將(2.80)式、(2.81)式、(2.86)式代入(2.90)式可得：

$$\mathbf{q}_E = \mathbf{T}_{EB} \mathbf{q}_B \quad (2.93)$$

$$\mathbf{T}_{EB} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{EB1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{EB2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{EB3} \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

$$\mathbf{q}_B = \{\mathbf{q}_{B1} \ \mathbf{q}_{B2} \ \mathbf{q}_{B3}\} \quad (2.95)$$

$$\mathbf{T}_{EBj} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{GE}^t & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{GE}^t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{R}_{EBj} \end{bmatrix} \quad (2.96)$$

$$\mathbf{q}_{Bj} = \{U_j \ V_j \ W_j \ \theta_{Xj}^G \ \theta_{Yj}^G \ \theta_{Zj}^G \ \varepsilon_{xj}^B \ \varepsilon_{yj}^B \ \gamma_{xyj}^B\} \quad (2.97)$$

由(2.71)和(2.78)可得：

$$\mathbf{f}_E = \mathbf{f}_\theta + \mathbf{f}_b \quad (2.98)$$

$$\mathbf{f}_E = \{\mathbf{f}_{E1} \ \mathbf{f}_{E2} \ \mathbf{f}_{E3}\} \quad (2.99)$$

$$\mathbf{f}_{Ej} = \{f_{xj} \ f_{yj} \ f_{zj} \ m_{xj} \ m_{yj} \ m_{zj} \ m_{\varepsilon xj} \ m_{\varepsilon yj} \ m_{\gamma j}\} \quad (2.100)$$

由反梯度法則(contragradient law)[44]及(2.93)式可得：

$$\mathbf{f}_B = \mathbf{T}_{EB}^t \mathbf{f}_E \quad (2.101)$$

$$\mathbf{f}_B = \{\mathbf{f}_{B1} \ \mathbf{f}_{B2} \ \mathbf{f}_{B3}\} \quad (2.102)$$

$$\mathbf{f}_{Bj} = \{F_{Xj} \ F_{Yj} \ F_{Zj} \ m_{Xj}^G \ m_{Yj}^G \ m_{Zj}^G \ m_{\varepsilon xj}^B \ m_{\varepsilon yj}^B \ m_{\gamma j}^B\} \quad (2.103)$$

其中 $\mathbf{f}_B$ 為對應於 $\mathbf{q}_B$ 的元素節點內力， $F_{Xj}$ 、 $F_{Yj}$ 、 $F_{Zj}$ 分別為對應於 $U_j$ 、 $V_j$ 、 $W_j$ 的節點力， $m_{\varepsilon xj}^B$ 、 $m_{\varepsilon yj}^B$ 、 $m_{\gamma j}^B$ 分別為對應於 $\varepsilon_{xj}^B$ 、 $\varepsilon_{yj}^B$ 、 $\gamma_{xyj}^B$ 的廣義節點力矩， $m_{Xj}^G$ 、 $m_{Yj}^G$ 、 $m_{Zj}^G$ 為對應於 $\theta_{Xj}^G$ 、 $\theta_{Yj}^G$ 、 $\theta_{Zj}^G$ 的節點傳統力矩。將(2.93)式、(2.98)

式代入(2.101)式可得：

$$\mathbf{f}_B = \mathbf{k}_B \mathbf{q}_B \quad (2.104)$$

$$\mathbf{k}_B = \mathbf{T}'_{EB} \mathbf{k}_E \mathbf{T}_{EB} \quad (2.105)$$

其中 $\mathbf{k}_B$ 是對應於 $\mathbf{q}_B$ 的元素剛度矩陣。

### 2.13 系統平衡方程式與收斂準則

結構系統受外力負荷時，其平衡方程式可表示為

$$\Psi(\mathbf{Q}, \lambda) = \mathbf{F}(\mathbf{Q}) - \lambda \mathbf{P} = 0 \quad (2.106)$$

其中 $\Psi$ 為系統不平衡力向量，系統節點內力 $\mathbf{F}$ 可由(2.102)式的元素節點內力

$\mathbf{f}_B$ 疊加得出， $\mathbf{Q}$ 為系統位移向量， $\lambda$ 為負荷參數， $\mathbf{P}$ 為參考外力負荷向量。

若外力為與變形位置相關(configuration dependent)的外力，則 $\mathbf{P}$ 在每一個變

形位置都須更新。本文以不平衡力 $\Psi$ 的 weighted Euclidean norm 做為平衡迭

代時的誤差度量，且收斂準則表示為

$$e = \frac{\|\Psi\|}{|\lambda| \sqrt{N} \|\mathbf{P}\|} \leq e_{tol} \quad (2.107)$$

其中 $N$ 代表離散系統的自由度總數， $e_{tol}$ 為一給定的容許誤差值。

### 第三章 數值計算方法與程序

本文解(2.106)式的非線性平衡方程式所使用平衡迭代的數值計算方法是採用文獻[45]中所提出基於牛頓-拉福森(Newton-Raphson)法和弧長控制(arc length control)法的增量迭代法。本文中為了求得分歧點，以系統切線剛度矩陣之行列式值為零來判斷。本文採用二分法決定增量位移向量的長度，以求得系統切線剛度矩陣之行列式值為零的平衡位置。為了求得次要平衡路徑，本文在平衡路徑的第一個挫屈負荷分歧點加入一個與第一挫屈模態向量方向一致的擾動位移。為了本文的完整性，以下將簡單介紹文獻[45]中提出的增量迭代數值計算方法與程序。

#### 3.1 增量迭代法

若第  $I$  個增量的平衡位置為已知，令其位移向量為  $\mathbf{Q}_I$ 、負荷參數為  $\lambda_I$ ，則第  $I+1$  個增量的初始增量位移向量  $\Delta\mathbf{Q}$ ，可以利用尤拉預測值(Euler predictor)求得[46]

$$\Delta\mathbf{Q} = \Delta\lambda \mathbf{r}_T \quad (3.1)$$

$$\mathbf{r}_T = (\mathbf{K}_T^I)^{-1} \mathbf{P} \quad (3.2)$$

其中  $\Delta\lambda$  為初始增量負荷參數， $\mathbf{K}_T^I$  為第  $I$  個平衡位置的系統切線剛度矩陣。(3.1)式中的  $\Delta\lambda$  可利用下式求出[45]

$$\Delta\lambda = \pm \Delta l / (\mathbf{r}_T^t \mathbf{r}_T)^{1/2} \quad (3.3)$$

其中正負符號決定方法為，當第  $I-1$  與  $I$  個增量收斂時，其系統切線剛度矩陣之行列式值同號，則  $\Delta\lambda$  的正負符號和第  $I$  個增量時相同；若異號則符號相反。 $\Delta l$  表示第  $I+1$  個增量的增量弧長，其值可以如下決定[45]

$$\Delta l = \Delta l_I (J_D / J_I)^{1/2} \quad (3.4)$$

其中  $J_D$  為給定的期望迭代次數， $J_I$  為第  $I$  個增量迭代至平衡所使用的迭代次數， $\Delta l_I$  為第  $I$  個增量的增量弧長。本文第一個增量的增量弧長  $\Delta l_1$  是由下

式決定

$$\Delta l_1 = \frac{R_{max} \|\mathbf{R}_0\|}{I_{max} |r_c|} \quad (3.5)$$

上式中  $R_{max}$  為給定的參考自由度之最大位移量， $\|\mathbf{R}_0\|$  為參考外力負荷向量  $\mathbf{P}$  作用下的系統線性解之 Euclidean norm， $I_{max}$  為給定之最大增量次數， $|r_c|$  為  $\mathbf{R}_0$  在參考自由度的分量之絕對值。

在平衡迭代時若第  $I$  個位置的增量位移向量  $\Delta \mathbf{Q}$  及增量位移負荷參數  $\Delta \lambda$  已知時，由  $\mathbf{Q}_{I+1} = \mathbf{Q}_I + \Delta \mathbf{Q}$ ， $\lambda_{I+1} = \lambda_I + \Delta \lambda$ ，及 2.4 節、2.6 節與 2.7 節的方法，則可以求得系統中各元素在當前的元素座標、節點位移、節點變形角。再利用 2.9 節和 2.10 節的方法求得當前元素座標上的節點內力及剛度矩陣，再由 2.12 節中提到的座標轉換轉到固定總體座標與節點基礎座標的節點內力及剛度矩陣。當系統內力及外力求得後，系統不平衡力向量可以由(2.106)式求得：

$$\Psi_{I+1} = \Psi(\mathbf{Q}_{I+1}, \lambda_{I+1}) = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_{I+1}) - \lambda_{I+1} \mathbf{P} \quad (3.6)$$

將(2.106)式在  $\lambda = \lambda_{I+1}$ ， $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{I+1}$  時用泰勒展開式展開為

$$\Psi = \Psi_{I+1} + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{Q}} \delta \mathbf{Q} + \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \delta \lambda + \mathbf{O}^2(\mathbf{Q}_{I+1}, \lambda_{I+1}) = 0 \quad (3.7)$$

其中  $\mathbf{O}^2(\mathbf{Q}_{I+1}, \lambda_{I+1})$  為二次以上的高次項， $\delta \mathbf{Q}$  為增量位移修正量， $\delta \lambda$  為負荷參數修正量。根據(2.106)式，(3.7)式中的  $\partial \Psi / \partial \mathbf{Q}$  與  $\partial \Psi / \partial \lambda$  可表示為

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{Q}} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}} = \mathbf{K}_T \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} = -\mathbf{P} \quad (3.9)$$

依牛頓法，忽略(3.7)式中二次以上的高次項，並將(3.8)式與(3.9)式代入，可以得出

$$\Psi_{I+1} + \mathbf{K}_T \mathbf{r} - \delta \lambda \mathbf{P} = 0 \quad (3.10)$$

其中  $\mathbf{r} = \delta \mathbf{Q}$  為增量位移修正量，整理(3.10)式，可得到位移修正量

$$\mathbf{r} = -\mathbf{K}_T^{-1}(\boldsymbol{\Psi}_{I+1} - \delta\lambda\mathbf{P}) = \mathbf{r}_0 + \delta\lambda\mathbf{r}_T \quad (3.11)$$

其中  $\mathbf{r}_0 = -\mathbf{K}_T^{-1}\boldsymbol{\Psi}_{I+1}$  為標準牛頓法的位移修正量， $\mathbf{r}_T$  在(3.2)式中已定義。

### 3.2 弧長控制法

(3.11)式中的負荷參數修正量  $\delta\lambda$  可利用文獻[45]中所提出的定弧長控制法決定，其方法在每一個增量中固定其增量位移向量的 Euclidean norm 為一定值  $\Delta l$ ，由新的增量位移向量  $(\Delta\mathbf{Q} + \mathbf{r})$  可以得到

$$\Delta l^2 = (\Delta\mathbf{Q} + \mathbf{r})^t (\Delta\mathbf{Q} + \mathbf{r}) \quad (3.12)$$

將(3.11)式代入(3.12)式可以得到

$$\Delta l^2 = (\Delta\mathbf{Q} + \mathbf{r}_0 + \delta\lambda\mathbf{r}_T)^t (\Delta\mathbf{Q} + \mathbf{r}_0 + \delta\lambda\mathbf{r}_T) \quad (3.13)$$

(3.13)式經過整理後可以得到  $\delta\lambda$  的二次方程式

$$a_1\delta\lambda^2 + a_2\delta\lambda + a_3 = 0 \quad (3.14)$$

其中

$$a_1 = \mathbf{r}_T^t \mathbf{r}_T \quad (3.15)$$

$$a_2 = 2(\Delta\mathbf{Q} + \mathbf{r}_0)^t \mathbf{r}_T \quad (3.16)$$

$$a_3 = (\Delta\mathbf{Q} + \mathbf{r}_0)^t (\Delta\mathbf{Q} + \mathbf{r}_0) - \Delta l^2 \quad (3.17)$$

將(3.11)式求得之增量位移修正量  $\mathbf{r}$  以及(3.14)式求得之負荷參數修正量  $\delta\lambda$  加入上次迭代之  $\Delta\mathbf{Q}$  與  $\Delta\lambda$  中，可以得到新的增量位移向量與增量負荷參數，再進行下一次迭代，迭代過程將一直重複至(3.6)式中的系統不平衡力向量滿足(2.107)式的收斂準則為止。

### 3.3 二分法

利用 3.1 節的增量迭代法可以求得結構之主要平衡路徑。在每個增量的迭代收斂時，可以得到該增量在其平衡位置的負荷參數  $\lambda$  及結構剛度矩陣的行列式值  $D(\lambda)$ 。令  $\lambda_I$  及  $D(\lambda_I)$  分別表示第 I 個增量在其平衡位置的  $\lambda$  及  $D(\lambda)$  值。 $\lambda_{I+1}$  及  $D(\lambda_{I+1})$  分別表示第 I+1 個增量在其平衡位置的  $\lambda$  及  $D(\lambda)$

值。 $\Delta l_{I+1}$  表示第  $I+1$  個增量的增量位移向量之弧長。若  $D(\lambda_I)$  大於零且  $D(\lambda_{I+1})$  小於零則可利用以下二分法求得挫屈負荷參數  $\lambda_{cr}$ ：

(1) 令  $\Delta l_L = 0$ ， $\Delta l_R = \Delta l_{I+1}$ ， $\lambda_L = \lambda_I$ ， $\lambda_R = \lambda_{I+1}$ 。其中下標 L 及 R 表示左界及右界。

(2) 取  $\Delta l_{I+1} = \frac{\Delta l_L + \Delta l_R}{2}$ ，重做第  $I+1$  個增量迭代，並求得新的  $\lambda_{I+1}$  及  $D(\lambda_{I+1})$ 。

(3) 若  $D(\lambda_{I+1})$  大於零，則令  $\lambda_L = \lambda_{I+1}$ ， $\Delta l_L = \Delta l_{I+1}$ 。若  $D(\lambda_{I+1})$  小於零，則令  $\lambda_R = \lambda_{I+1}$ ， $\Delta l_R = \Delta l_{I+1}$ 。

(4) 若下列二式挫屈誤差準則同時滿足，則  $\lambda_{I+1}$  即為系統挫屈負荷，否則回到步驟(2)，重新展開下一次二分法迭代。

$$\frac{|D(\lambda_{I+1})|}{|D(0)|} < e_D$$

$$\frac{|\lambda_R - \lambda_L|}{|\lambda_{I+1}|} < e_\lambda$$

其中  $e_D$  及  $e_\lambda$  為給定的容許誤差值，本文例題之計算給定  $e_D = 10^{-8}$  及  $e_\lambda = 10^{-5}$ 。



### 3.4 數值程序

本文使用的增量迭代法之數值程序可以分為三個主要部分：

1. 輸入並計算開始分析所需的資料

(a) 輸入結構資料、邊界條件與負荷參數。

(b) 選擇一個參考自由度，並給定期望此自由度應達到的位移。

(c) 給定最大增量次數、最大迭代次數、期望迭代次數與容許誤差值。

(d) 形成系統剛度矩陣並求得(3.5)式中的  $\mathbf{R}_0$ 。

(e) 利用(3.1)式、(3.3)式與(3.5)式計算初始增量位移向量、初始增量負荷參數與第一次增量弧長。

2. 使用迭代法求增量的收斂解

(a)由 2.4 節的方法，利用已知的增量位移求得當前元素的變形向量 $\mathbf{q}_\theta$ 和 $\mathbf{u}_b$ ，並計算(2.98)式中元素節點內力 $\mathbf{f}_E$ ，接著由 2.12 節座標轉換將 $\mathbf{f}_E$ 利用(2.101)式轉換至 $\mathbf{f}_B$ ，然後將元素節點內力 $\mathbf{f}_B$ 組合成結構系統節點內力 $\mathbf{F}$ 。

(b)計算(2.106)式的不平衡力 $\Psi$ 。

(c)檢查(2.107)式的收斂準則，若滿足則進入第 3 部分；否則檢查迭代數，如果小於給定之最大迭代次數，則進行步驟(d)；否則減少增量弧長並以(3.1)式與(3.3)式計算新的增量位移向量與增量負荷參數，回到步驟(a)重新計算。

(d)利用(3.11)式與(3.14)式計算增量位移修正量與增量負荷參數修正量，回到步驟(a)重新計算。

### 3. 計算下一次增量所需的資料

(a)檢查參考自由度的位移及進行的增量次數是否已達給定值，若已達到給定值則停止分析工作；否則進行步驟(b)。

(b)計算(3.11)式中的切線剛度矩陣 $\mathbf{K}_T$ 。本文中 $\mathbf{K}_T$ 的計算方法是利用當前變形位置的元素座標重新計算元素剛度矩陣 $\mathbf{k}$ ，再加上元素幾何剛度矩陣 $\mathbf{k}_\sigma$ ，本文中忽略元素其他的幾何變形與內部應力對元素剛度矩陣造成的影響，再利用 2.12 節座標轉換將 $\mathbf{k}_E$ 利用(2.105)式轉換至 $\mathbf{k}_B$ ，然後將元素剛度矩陣 $\mathbf{k}_B$ 疊加成結構系統剛度矩陣 $\mathbf{K}_T$ 。

(c)利用(3.1)式、(3.3)式與(3.4)式計算下一次增量的增量位移向量、增量負荷參數與增量弧長。

(d)回到第 2 部分進行迭代工作。

## 第四章 數值分析與結果

為了解本文中採用之數值程序的可行性及三角殼元素在幾何非線性分析的收斂性及準確性，本章中將以第二章中推導的三角殼元素，以及在第三章中提到的數值方法與程序及在 2.4 節中提出的元素節點變形參數之決定方法，用不同的網格分析文獻上具大位移、大旋轉的例題，並與文獻上的結果比較。

本章中外力為分佈力時，都使用附錄 E 的方法，將其轉換成等效節點力。為了解以不同位移場推導之元素幾何剛度對平衡迭代及挫屈負荷的影響，本章中採用了以下三種不同的元素幾何剛度，假設  $u$ 、 $v$  為線性位移場並且不考慮 DKT 元素位移場  $u$ 、 $v$ ，稱為第一型元素幾何剛度(Type (1))，而使用 QST 元素本身的位移場  $u = \mathbf{N}_{u\theta,x} \mathbf{q}_\theta$ 、 $v = \mathbf{N}_{v\theta,x} \mathbf{q}_\theta$  並且考慮 DKT 元素位移場  $u$ 、 $v$ ，稱為第二型元素幾何剛度(Type (2))，而使用  $u$ 、 $v$  為線性位移場  $v = \mathbf{N}_{v\theta,x} \mathbf{q}_\theta$  並且考慮 DKT 元素位移場  $u$ 、 $v$ ，稱為第三型元素幾何剛度(Type (3))，以上  $w$  皆假設為線性位移場。為探討元素座標對分析的影響，本章中採用兩種決定元素座標的方法，元素座標 Case(a) 為元素座標原點在節點 1， $x_1^E$  軸為元素節點 1 與元素節點 2 在元素平面上的連線，元素座標 Case(b) 為元素座標原點在形心，並且將當前元素座標軸順時針轉  $\alpha$  角使得當前變形位置元素各節點跟初始未變形元素各節點的距離平方和為最小 [49]，詳細說明在附錄 F。本章中例題 4.4、4.6、4.7 和 4.8 有兩個法線向量

不同的平面相交在系統的節點上，則該節點有兩組節點基礎座標和平面應變來對應各個平面。本章中提到之文獻上的元素都是三節點的三角形元素或是四節點的四邊形元素。

#### 4.1 半圓環受到單點集中力作用

圖 4.1(a)為半圓環示意圖及其所受到之集中力負荷圖，半圓環兩端為固接，在圓環上端受到一個單點的集中力  $2F$ 。由於結構為左右對稱，因此本文僅考慮一半結構來進行分析。網格  $18 \times 1$  示意圖如圖 4.1(b)所示，網格  $18 \times 2$  示意圖如圖 4.1(c)所示，本例題使用了網格  $20 \times 1$ 、 $30 \times 1$ 、 $40 \times 2$ 、 $80 \times 4$  和  $100 \times 6$ 。本例題假設在結構對稱處( $X_1^G = 0$ )之邊界條件為  $U = \theta_y = \theta_z = 0$ ，固接端( $X_2^G = 0$ )的邊界條件設定為  $U = V = W = \theta_x = \theta_y = \theta_z = \epsilon_x = \gamma_{xy} = 0$ 。本例題之平衡迭代的容許誤差值取  $10^{-4}$ ，圖 4.2 是本文的結果與文獻[18]中 Battini 的結果，其中文獻[18]的結果是使用了 320 個四角平面元素得到的結果。本例題使用了元素幾何剛度 Type(1)，網格  $20 \times 1$  之 Case(a)的分析過程中使用了 13 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 11，網格  $20 \times 1$  之 Case(b)的分析過程中使用了 9 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 9，網格  $30 \times 1$  之 Case(a)的分析過程中使用了 12 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 8，網格  $30 \times 1$  之 Case(b)的分析過程中使用了 17 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 6，網格  $40 \times 2$  之 Case(a)的分析過程中使用了 10 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 6，網格  $40 \times 2$  之 Case(b)的分析過程中使用了 11 個

增量，每個增量的平均迭代次數約為 6，網格 80×4 之 Case(a)的分析過程中使用了 10 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 6，網格 80×4 之 Case(b)的分析過程中使用了 10 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 6，網格 100×6 之 Case(a)的分析過程中使用了 20 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 5，網格 100×6 之 Case(b)的分析過程中使用了 12 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 5。由圖 4.2 可以看出本例題網格 20×1 之 Case(a)和網格 30×1 之 Case(a)的結果與 Battini[18]的結果非常相近。

#### 4.2 直角構架受到端點剪力作用

圖 4.3(a)為直角構架示意圖及其所受到之剪力負荷圖，結構左下端為固接，右上端受一均勻分佈的剪力作用，其等效節點力是用附錄 E 的方法在變形前的位置上決定。本例題考慮兩種不同的網格，分別為圖 4.3(b)的網格 M21 與網格 M22。網格 M21 使用了 38 個三角殼元素，網格 M22 使用了 152 個三角殼元素。本例題假設固定端 ( $X_1^G = 0$ ) 的邊界條件為  $U = V = W = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = \theta = 0$ 。本例題之平衡迭代的容許誤差值取  $10^{-4}$ ，圖 4.4 是本例題在不同網格下的結果與文獻[18]中 Battini 的結果，文獻[18]的結果是使用了 304 個四角平面元素得到的結果，本例題網格 M11 的  $U_A$  是取自由端之兩節點水平位移的平均值。本例題使用了元素幾何剛度 Type(2)，在網格 M21 之 Case(a)的分析過程中使用了 11 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 7，在網格 M21 之 Case(b)的分析過程中使用了 16 個增量，每

個增量的平均迭代次數約為 7；在網格 M22 之 Case(a)的分析過程中使用了 10 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 6，在網格 M22 之 Case(b)的分析過程中使用了 11 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 6。由圖 4.4 可以看出本例題不同網格的結果與文獻[18]的結果相當吻合。

### 4.3 圓柱殼片段受到單點集中力作用

圖 4.5(a)為圓柱殼片段示意圖及圖 4.5(b)其所受到之集中力負荷圖，結構線段  $AD$  及  $BC$  為鉸接，其他兩邊為自由邊，在  $E$  點受到一個向下的集中力  $F$ 。結構劃分成網格  $10 \times 10$  如圖 4.5(c)所示，網格  $10 \times 10$  使用了 200 個三角殼元素。本例題假設鉸接端線段  $AD$  及  $BC$  的邊界條件為  $U = V = W = \theta_x = \theta_z = 0$ 。本例題之平衡迭代的容許誤差值取  $10^{-4}$ ，圖 4.6 是本例題在網格  $10 \times 10$  下的結果與文獻[48]的結果。本例題使用了元素幾何剛度 Type(1)並且元素座標為 Case(a)，網格  $10 \times 10$  的主要路徑分析過程中使用了 13 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 4；網格  $10 \times 10$  的次要路徑分析過程中使用了 13 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 4，挫屈負荷  $F_{cr} = 528.513\text{N}$ ，結構  $E$  點向下位移為  $9.714\text{mm}$ 。本例題使用了元素幾何剛度 Type(2)並且元素座標為 Case(a)，網格  $10 \times 10$  的主要路徑分析過程中使用了 13 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 4；網格  $10 \times 10$  的次要路徑分析過程中使用了 13 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 4，挫屈負荷  $F_{cr} = 528.315\text{N}$ ，結構  $E$  點向下位移為  $9.707\text{mm}$ 。由圖 4.6 可見本文的結果

與文獻[48]的結果相當吻合，元素幾何剛度和元素座標的選擇對結果的影響不大，故本文的數值程序可以準確找出主要平衡路徑、分歧點及次要路徑。

#### 4.4 Lateral torsional buckling

圖 4.7(a)為 **Lateral torsional buckling** 示意圖及其所受到之均勻位移負荷圖，結構線段  $AB$ 、 $BC$  及  $CD$  為固定端，結構線段  $EF$ 、 $FG$  及  $GI$  受到均勻軸向位移負荷  $\lambda$ ，除了軸向位移外，其位移、旋轉都受到拘束。網格  $(1+2+1)\times 2$  示意圖如圖 4.7(b)所示，本例題使用了網格  $(2+2+2)\times 14$  和  $(4+4+4)\times 60$ 。本例題假設在線段  $EF$ 、 $FG$  及  $GI$  之邊界條件為  $V = W = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$ ，固定端線段  $AB$ 、 $BC$  及  $CD$  的邊界條件設定為  $U = V = W = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$ ，沿線段  $AB$ 、 $BC$ 、 $CD$ 、 $EF$ 、 $FG$  及  $GI$  方向的正應變為 0。本例題之平衡迭代的容許誤差值取  $10^{-4}$ ，表 4.2 是本例題在不同網格下的結果與文獻[10]中 Battini 的結果，文獻[10]的結果是使用了網格  $(2+2+2)\times 15$  和  $(4+4+4)\times 60$  得到的結果。本例題使用了元素幾何剛度 Type(2)，在網格  $(2+2+2)\times 14$  之 Case(a)的分析過程中使用了 27 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 2，在網格  $(2+2+2)\times 14$  之 Case(b)的分析過程中使用了 50 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 2；在網格  $(4+4+4)\times 60$  之 Case(a)的分析過程中使用了 13 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 4，在網格  $(4+4+4)\times 60$  之 Case(b)的分析過程中使用了 19 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 4。由表 4.2 可以看出本例題不同網格的結果與文獻[10]

的結果很相近。

#### 4.5 Simply supported compressed plate

圖 4.8(a)為 **Simply supported compressed plate** 示意圖及其所受到之均勻位移負荷圖，結構線段  $AB$ 、 $BC$ 、 $CD$  及  $AD$  為簡支端，結構線段  $AD$  及  $BC$  受到均勻位移負荷  $\lambda$ 。網格  $4 \times 6$  示意圖如圖 4.8(b)所示，本例題使用了網格  $4 \times 6$ 、 $4 \times 10$ 、 $6 \times 12$  和  $8 \times 20$ 。本例題假設在線段  $AB$  及  $CD$  之邊界條件為  $W = \theta_y = \theta_z = 0$ ，在線段  $BC$  及  $AD$  之邊界條件為  $W = \theta_x = \theta_z = 0$ ，在  $A$  點之邊界條件為  $V = 0$ 。本例題之平衡迭代的容許誤差值取  $10^{-4}$ ，表 4.3 是本例題在不同網格下的結果與文獻[10]中 Battini 的結果，文獻[10]的結果是使用了網格  $4 \times 10$  和  $8 \times 20$  得到的結果。本例題使用了元素幾何剛度 Type(2)並且元素座標為 Case(a)，在網格  $4 \times 6$  的分析過程中使用了 25 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 2，在網格  $4 \times 10$  的分析過程中使用了 17 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 2，在網格  $6 \times 12$  的分析過程中使用了 26 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 2，在網格  $8 \times 20$  的分析過程中使用了 20 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 2。由表 4.3 可以看出本例題不同網格的結果與文獻[10]的結果很相近。

#### 4.6 Transversally loaded T profile

圖 4.9(a)為 **Transversally loaded T profile** 示意圖及其所受到之集中力負荷圖，結構線段  $AB$ 、 $CD$  和  $EF$ 、 $GI$  為鉸接，結構  $J$  點受到集中力負荷。

網格  $4 \times 6$  示意圖如圖 4.9(b)所示，本例題使用了網格  $(2+2+4) \times 20$ 、 $(3+3+5) \times 30$  和  $(5+5+8) \times 50$ 。本例題假設在  $C$  點之邊界條件為  $V = 0$ ，在線段  $CD$ 、 $GI$  之邊界條件為  $U = W = 0$ ，在線段  $AB$  及  $EF$  之邊界條件為  $W = \theta_y = 0$ ，沿線段  $CD$  及  $GI$  方向的正應變為 0。本例題之平衡迭代的容許誤差值取  $10^{-4}$ ，表 4.4 是本例題在不同網格下的結果與文獻[10]中 Battini 的結果，文獻[10]的結果是使用了網格  $(2+2+4) \times 20$  和  $(5+5+8) \times 50$  得到的結果。本例題使用了元素幾何剛度 Type(2)並且元素座標為 Case(a)，在網格  $(2+2+4) \times 20$  的分析過程中使用了 21 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 2，在網格  $(3+3+5) \times 30$  的分析過程中使用了 8 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 2，在網格  $(5+5+8) \times 50$  的分析過程中使用了 8 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 2。由表 4.4 可以看出本例題不同網格的結果與文獻[10]的結果很相近。

#### 4.7 Channel section in torsion

圖 4.10(a)為 **Channel section in torsion** 示意圖及其所受到之集中力負荷與均勻力負荷圖，結構線段  $AB$ 、 $BC$ 、 $CD$  和  $EF$ 、 $FG$ 、 $GI$  為鉸接，結構  $J$ 、 $K$  點受到集中力負荷，線段  $AB$ 、 $BC$ 、 $CD$  和  $EF$ 、 $FG$ 、 $GI$  受到均勻力負荷。網格  $(1+2+1) \times 2$  示意圖如圖 4.10(b)所示，本例題使用了網格  $(1+2+1) \times 20$  和  $(2+4+2) \times 40$ 。本例題假設在  $M$  點之邊界條件為  $U = 0$ ，在  $B$ 、 $F$  點之邊界條件為  $V = 0$ ，在線段  $BC$  及  $FG$  之邊界條件為  $W = \theta_x = 0$ 。本例題之平衡迭代的容許誤差值取  $10^{-4}$ ，表 4.5 是本例題在不同網格下的結果與文獻[10]中

Battini 的結果，文獻[10]的結果是使用了網格 $(1+2+1)\times 20$  和 $(3+8+3)\times 56$  得到的結果。圖 4.11 是本例題在不同網格下的結果與文獻[13]中 Battini 的結果，文獻[13]的結果是使用了網格 $(1+2+1)\times 20$  得到的結果。本例題使用了元素幾何剛度 Type(2)並且元素座標為 Case(a)，在網格 $(1+2+1)\times 20$  的分析過程中使用了 211 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 3，在網格 $(2+4+2)\times 40$  的分析過程中使用了 249 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 3。由圖 4.11 可以看出本例題不同網格的結果與文獻[13]的結果接近。

#### 4.8 直角梁受到單點集中力作用

圖 4.12(a)為直角梁示意圖及其所受到之集中力負荷圖，直角梁前端為固定端，末端為自由端，在直角梁末端受到一個單點的集中力  $P$ 。本例題考慮兩種不同的網格，分別為網格 CM 與網格 FM。圖 4.12(b)為結構劃分成網格 $(2+3)\times 2$  示意圖。網格 CM 為結構劃分成網格 $(2+2)\times 25$ ，使用了 200 個三角殼元素；網格 FM 結構劃分成網格 $(4+6)\times 60$ ，使用了 1200 個三角殼元素。本例題假設固定端線段  $BD$  及  $BF$  的邊界條件設定為  $U = V = W = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$ ，沿線段  $BD$  及  $BF$  方向的正應變為 0。本例題之平衡迭代的容許誤差值取  $10^{-4}$ ，圖 4.13 是本例題在不同網格下的結果與文獻[10]中 Battini 的結果，其中 OPT[10]的結果是使用了網格 CM 得到的結果，ALL[10]的結果是使用了網格 FM 得到的結果。本例題使用了元素幾何剛度 Type(2)並且元素座標為 Case(a)，在網格 CM 的分析過程中使用了 13

個增量，每個增量的平均迭代次數約為 6；在網格 FM 的分析過程中使用了 12 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 4。本例題使用了元素幾何剛度 Type(2)並且元素座標為 Case(b)，在網格 CM 的分析過程中使用了 17 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 6；在網格 FM 的分析過程中使用了 13 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 4。在元素座標為 Case(a)之下，由圖 4.13 可以看出本例題網格 CM 在  $U_A < 40$  時，曲線介於 OPT 和 ALL 之間，網格 CM 在  $U_A \geq 40$  時，曲線逐漸偏離 ALL，網格 FM 則是一直保持曲線介於 OPT 和 ALL 之間，所以本例題使用元素由少至多可看出曲線的走勢偏向 OPT。本文所使用文獻上最常見的元素座標系統，而文獻[10]中選取的元素座標系統不同，導致本例題元素座標 Case(a)的結果跟文獻[10]的結果有所差異，則元素座標 Case(b)的結果就跟文獻[10]的結果相當吻合。

#### 4.9 懸臂圓柱殼受到單點集中力作用

圖 4.14(a)為圓柱殼示意圖及其所受到之集中力負荷圖，圓柱殼前端為自由端，末端為固定端，在圓柱殼上下端各受到一個單點的集中力  $2F$ 。由於結構為上下、左右對稱，因此本例題僅考慮四分之一結構來進行分析，網格  $16 \times 16$  的劃分如圖 4.14(b)所示，網格  $16 \times 16$  使用了 512 個三角殼元素。本例題假設在上下結構對稱處線段  $BC$  之邊界條件為  $W = \theta_x = \theta_y = 0$ ，在左右結構對稱處線段  $AD$  之邊界條件為  $V = \theta_x = \theta_z = 0$ ，固定端線段  $CD$  的邊界條件設定為  $U = V = W = \theta_x = \theta_y = \theta_z = 0$ 。本例題之平衡迭代的容許誤差

值取 $10^{-4}$ ，圖 4.15 是本例題在網格  $16 \times 16$  的結果與文獻[13]中 Battini 的結果，其中文獻[13]的結果同樣是使用了 512 個三角殼元素得到的結果。本例題使用了元素幾何剛度 Type(2)並且元素座標為 Case(a)，在網格  $16 \times 16$  的分析過程中使用了 15 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 7。由圖 4.15 可以看出本文的結果與文獻[13]的結果非常相近。

#### 4.10 半球殼受到單點集中力作用

圖 4.16(a)為半球殼示意圖及其所受到之集中力負荷圖，半球殼頂端為固定端，半球殼底端為自由端，在半球殼前後左右端各受到一個單點的集中力  $2F$ 。由於結構為前後、左右對稱，因此本例題僅考慮四分之一結構來進行分析，網格  $12 \times 12$  的劃分如圖 4.16(b)所示，網格  $12 \times 12$  使用了 276 個三角殼元素。本例題假設在半球殼頂端處  $C$  點的邊界條件設定為  $U = V = W = 0$ ，在前後結構對稱處線段  $AC$  之邊界條件為  $U = \theta_y = \theta_z = 0$ ，在左右結構對稱處線段  $BC$  之邊界條件為  $V = \theta_x = \theta_z = 0$ 。本例題之平衡迭代的容許誤差值取 $10^{-4}$ ，圖 4.17 是本例題在網格  $12 \times 12$  的結果與文獻[13]中 Battini 在結構  $A$ 、 $B$  兩點的結果，其中文獻[13]的結果同樣是使用了 276 個三角殼元素得到的結果。本例題使用了元素幾何剛度 Type(2)並且元素座標為 Case(a)，在網格  $12 \times 12$  的分析過程中使用了 17 個增量，每個增量的平均迭代次數約為 3。由圖 4.17 可以看出本例題的結果與文獻[13]的結果在結構  $A$ 、 $B$  兩點都幾乎重合。

## 第五章 結論與展望

### 5.1 結論

本文將文獻上具旋轉自由度的 QST 平面元素[26]與 DKT 板元素[32]疊加成一個 3 節點 27 個自由度的三角殼元素，元素的節點自由度為 3 個位移、3 個旋轉及 3 個平面應變。本文中將節點應變定義於一個剛接在節點上，隨節點一起平移及旋轉的基礎座標上，在本文元素當前的變形位置上建立當前的元素座標，再由當前的元素座標及節點基礎座標的關係求出三角殼元素之節點變形參數(位移、旋轉及應變)，然後再利用不同元素節點參數在小變形時的關係，求出對應於元素節點參數之節點內力還有元素剛度矩陣的關係。本研究在幾何非線性分析時元素節點內力的計算方法是用初始未變形的元素剛度矩陣與元素節點總變形參數向量相乘得出定義在當前元素座標的元素節點內力向量，再將定義在元素座標的元素節點內力中，對應於節點位移的廣義節點力轉換至固定總體座標系統，對應於節點應變的廣義節點力轉換至節點基礎座標系統，然後將各個元素元素節點內力組合成結構系統節點內力。

本文用共旋轉 total Lagrangian 法推導幾何剛度矩陣與在當前變形位置決定元素節點變形參數的方法。因 DKT 板元素在元素內部沒有定義側向位移場  $w$ ，所以本文推導的三種元素幾何剛度矩陣都僅是近似的幾何剛度矩陣，但由本文的數值結果發現這兩種元素幾何剛度矩陣，再加上當前變形

位置重新計算元素線性剛度矩陣，作為本文所使用的元素切線剛度矩陣，在非線性分析的平衡迭代時都能提高收斂速度且性能相近，在挫屈分析時也都能偵測到相當接近的挫屈負荷。

在幾何非線性分析中，本文先以二維例題來測試本文使用三角殼之 QST 平面元素部分的性能及精度，再以挫屈例題來測試本文使用之三角殼元素來是否能準確找出主要平衡路徑、分歧點及次要路徑，最後以三維例題來測試本文使用之三角殼的性能及精度和決定元素節點變形參數之方法的可行性及準確性。由本文分析之數值例題的結果，可得以下結論：

1. 本文中採用三角殼元素之 QST 平面元素部分有 18 個自由度，為高階 (high-order) 的具有旋轉自由度平面元素，而三角殼元素之 DKT 板元素部分有 9 個自由度，為對薄板分析最可靠的元素，所以在使用較少的網格下其數值結果仍然相當精確。
2. 本文使用之三角殼元素配合本文推導的兩種元素幾何剛度矩陣，都可以準確找出主要平衡路徑、分歧點及次要路徑。
3. 本文所使用決定元素變形參數的方法，可以確實應用在幾何非線性分析上，並有正確的結果。

## 5.2 未來研究方向

因本文採用的 DKT 板元素沒有定義元素內部的側向位移  $w$ ，所以本文推導的兩種元素幾何剛度矩陣都僅是近似的幾何剛度矩陣，這也許會影響

平衡迭代的收斂速度和偵測平衡路徑上分歧點及挫屈模態的準確性，因此以後研究可以考慮把 DKT 板元素替換成具有側向位移場  $w$  的三角板元素，或用不同的側向位移場，以本文採用的共旋轉 total Lagrangian 法推導元素幾何剛度矩陣，或以共旋轉推導法來推導元素幾何剛度矩陣，並探討其對平衡迭代和偵測平衡路徑上分歧點及挫屈模態的影響。雖然本文中決定元素座標系統的方法是文獻上最常用的方法，但文獻[49]中提到在共旋轉推導法中，不同的元素座標會影響分析的結果，並提出數種決定元素座標的方法，因此以後的研究可以提出其他決定元素座標的方法，並比較各種方法用在本文之殼元素的結果，選擇對本文之殼元素本身最適合的元素座標系統，應可提高薄殼結構之幾何非線性分析的精度或收斂速率。



## 參考文獻

- [1] M. A. Crisfield, Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures volume 1-essentials, John Wiley and Sons, 1991.
- [2] J. L. Batoz, C. L. Zheng, F. Hammadi, “Formulation and evaluation of new triangular, quadrilateral, pentagonal and hexagonal discrete Kirchhoff plate/shell elements”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 52, 615-630, 2001.
- [3] N. Carpenter, H. Stolarski, T. Belytschko, “A flat triangular shell element with improved membrane interpolation”, Communications in Applied Numerical Methods, 1, 161-168, 1985.
- [4] Y. K. Cheung, W. J. Chen, “Refined non-conforming triangular elements for analysis of shell structures”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 46, 433-455, 1999.
- [5] J. G. Kim, J. K. Lee, Y. K. Park, “A new 3-node triangular flat shell element”, Communications in Numerical Methods in Engineering, 18, 153-159, 2002.
- [6] K. J. Bathe, L. W. Ho, “A simple and effective element for analysis of general shell structure”, Computer & Structure, 13, 673-681, 1981.
- [7] K. M. Hsiao, “Nonlinear analysis of general shell structures by flat triangular shell element”, Computer & Structure, 25, 665-675, 1987.
- [8] R. Levy, E. Gal, “Geometrically nonlinear three-noded flat triangular shell element”, Computer & Structure, 79, 2349-2355, 2001.
- [9] Y. X. Zhang, Y. K. Cheung, “A refined non-linear non-conforming triangular plate/shell element”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 56, 2387-408, 2003.
- [10] J. M. Battini, C. Pacoste, “On the choice of the linear element for

- corotational triangular shells”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 195, 6362-6377, 2006
- [11] 楊禮龍, 薄殼結構在位移負荷作用下之幾何非線性分析, 交通大學機械工程學系碩士論文, 台灣, 新竹, 2006.
- [12] 楊水勝, 拘限彈性薄板受側向位移負荷的行為研究, 交通大學機械工程學系碩士論文, 台灣, 新竹, 2007.
- [13] J. M. Battini, “A modified corotational framework for triangular shell elements”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 196, 1905-1914, 2007.
- [14] P. Khosravi, R. Ganesan, R. Sedaghati, “Corotational non-linear analysis of thin plates and shells using a new shell element”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 69, 859-885, 2007.
- [15] P. Khosravi, R. Ganesan, R. Sedaghati, “An efficient facet shell element for corotational nonlinear analysis of thin and moderately thick laminated composite structures”, Computer & Structure, 86, 850-858, 2007.
- [16] Z. X. Li, L. Vu-Quoc, “An efficient co-rotational formulation for curved triangular shell element”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 72, 1029-1062, 2007.
- [17] L. Kang, Q. Zhang, Z. Wang, “Linear and geometrically nonlinear analysis of novel flat shell elements with rotational degrees of freedom”, Finite Elements in Analysis and Design, 45, 386-392, 2009.
- [18] J. M. Battini, “A non-linear corotational 4-node plane element”, Mechanics Research Communications, 35, 408-413, 2008.

- [19] D. J. Allman, “A Compatible Triangular Element Including Vertex Rotations for Plane Elasticity Analysis”, Computers and Structures, 19, 1-8, 1984.
- [20] P. G. Bergan, C. A. Felippa, “A triangular membrane element with rotational degrees of freedom”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 50, 25-69, 1985.
- [21] D. J. Allman, “Evaluation of the constant strain triangle with drilling rotations”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 26, 2645-2655, 1988.
- [22] L. Damkilde, M. Gronne, “An improved triangular element with drilling rotations”, Proceedings of the 15th Nordic Seminar on Computational Mechanics, 135-138, 2002.
- [23] C. A. Felippa, “Refined finite element analysis of linear and nonlinear two-dimensional structures”, Ph.D. Dissertation, Department of Civil Engineering, University of California at Berkeley, Berkeley, CA, 1966.
- [24] C. A. Felippa, “A study of optimal membrane triangles with drilling freedoms”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 192, 2125–2168, 2003.
- [25] I. Holand and P. G. Bergan, “Higher order finite element for plane stress”, Discussion, Journal of the Engineering Mechanics Division, 2, 698-702, 1968.
- [26] 林育丞, 具旋轉自由度之三角平面元素的共旋轉推導法, 交通大學機械工程學系碩士論文, 台灣, 新竹, 2008.
- [27] G. P. Bazeley, Y. K. Cheung, B. M. Irons, O. C. Zienkiewicz, “Triangular elements in plate bending—conforming and nonconforming solutions”, Proceeding First Conference on Matrix

- in Structural Mechanics, Air Force Institute of Technology, Dayton, Ohio, 66–80, 1966.
- [28] R. W. Clough, J. L. Tocher, “Finite element stiffness matrices for analysis of plate bending”, Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, 515-545, 1965
- [29] J. A. Stricklin, W. E. Haisler, P. R. Tisdale, R. Gunderson, “A rapidly converging triangular plate element”, AIAA J., 7, 180-181, 1969.
- [30] D. J. Allman, “Triangular finite element bending with constant and linearly varying bending elements”, High Speed Comput. Elastic Struct. Tom 1, 105-107, 1971.
- [31] L. M. Tang, W. J. Chen, Y. X. Liu, “The quasi-conforming element for the finite element analysis”, J. Dalian Inst. Technol., 19, 19-35, 1980.
- [32] J. L. Batoz, “An explicit formulation for an efficient triangular plate-bending element”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 18, 1077–1089, 1982.
- [33] Y. K. Cheung, W. J. Chen, “Refined triangular discrete Kirchhoff plate element for thin plate bending, vibration, and buckling analysis”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 41,1507-1525, 1998.
- [34] C. A. Felippa, “Recent advances in finite element templates”, University of Colorado, 2000.
- [35] T. Wenzel, H. Schoop, “A non-linear triangular curved shell element”, Communications in Numerical Methods in Engineering, 20, 251-264, 2004
- [36] E. M. Kasperek, “An efficient triangular plate element with C1-continuity”, International Journal for Numerical Methods in

- Engineering, 73, 1010-1026, 2008.
- [37] A. Boudaoud, P. Patrício, Y. Couder, M. B. Amar, “Dynamics of singularities in a constrained elastic plate”, Nature, 407, 718–720, 2000.
- [38] P. Patrício, W. Krauth, “Numerical solutions of the Von Karman equations for a thin plate”, Journal of Modern Physics, 8, 427–434, 1997.
- [39] H. Goldstein, Classical Mechanics, Addison-Wesley Publishing Company, 1980.
- [40] G. Dhatt, G. Touzot, The Finite Element Method Displayed, John Wiley & Sons, 1984.
- [41] A. P. Boresi, K. P. Chong, Elasticity In Engineering Mechanics, John Wiley & Sons, 1999.
- [42] R. D. Cook, Concepts and Applications of Finite Element Analysis, John Wiley & Sons, 1981
- [43] O. C. Zienkiewicz, The Finite Element Method in Engineering Science, CENTRAL BOOK CO., 1971.
- [44] D. J. Dawe, Matrix and Finite Element Displacement Analysis of Structures, Clarendon Press, 1984.
- [45] M. A. Crisfield, “A fast incremental/iterative solution procedure that handles 'snap-through’”, Computers and Structures, 13, 55-62, 1981.
- [46] M. A. Crisfield, Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, John Wiley & Sons, 1991
- [47] Y. C. Fung, Foundation of Solid Mechanics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1965.

- [48] E. H. Boutyour, H. Zahrouni, M. Potier-Ferry, M. Boudi, Bifurcation points and bifurcated branches by an asymptotic numerical method and Pade approximants, International Journal for Numerical Method in Engineering, 60, 1987–2012, 2004.
- [49] J. M. Battini, C. Pacoste, “On the choice of local element frame for corotational triangular shell elements”, Communications in Numerical Method in Engineering, 20, 819-825, 2004



表 4.1 圓柱殼片段受到單點集中力作用所偵測到的挫屈負荷(例題 4.3)

Element	Mesh	Kg	元素座標	Buckling load(N)
Present	10×10	(1)	(a)	528.513
	10×10	(1)	(b)	528.496
	10×10	(2)	(a)	528.315
	10×10	(2)	(b)	528.296
	10×10	(3)	(a)	528.209
	10×10	(3)	(b)	528.192

表 4.2 Lateral torsional buckling 所偵測到的挫屈負荷(例題 4.4)

Element	Mesh	Kg	元素座標	Buckling load
Present	(2+2+2)×14	(1)	(a)	2889.74
	(2+2+2)×14	(1)	(b)	2888.91
	(2+2+2)×14	(2)	(a)	2906.06
	(2+2+2)×14	(2)	(b)	2905.41
	(2+2+2)×14	(3)	(a)	2887.08
	(2+2+2)×14	(3)	(b)	2886.25
	(4+4+4)×60	(1)	(a)	2746.74
	(4+4+4)×60	(1)	(b)	2750.94
	(4+4+4)×60	(2)	(a)	2889.61
	(4+4+4)×60	(2)	(b)	2752.41
	(4+4+4)×60	(3)	(a)	2738.66
	(4+4+4)×60	(3)	(b)	2751.19
OPT DKT[10]	(2+2+2)×15	-	(b)	2618.26
	(4+4+4)×60	-	(b)	2529.29

表 4.3 Simply supported compressed plate 所偵測到的挫屈負荷(例題 4.5)

Element	Mesh	Kg	元素座標	Buckling load	
Present	4×6	(1)	(a)	58.4289	
	4×6	(1)	(b)	58.4491	
	4×6	(2)	(a)	58.2711	
	4×6	(2)	(b)	58.2915	
	4×6	(3)	(a)	58.2699	
	4×6	(3)	(b)	58.2902	
	4×10	(1)	(a)	56.5610	
	4×10	(1)	(b)	56.5711	
	4×10	(2)	(a)	56.4145	
	4×10	(2)	(b)	56.4253	
	4×10	(3)	(a)	56.4221	
	4×10	(3)	(b)	56.4247	
	6×12	(1)	(a)	57.1913	
	6×12	(1)	(b)	57.1983	
	6×12	(2)	(a)	57.0414	
	6×12	(2)	(b)	57.0489	
	6×12	(3)	(a)	57.0411	
	6×12	(3)	(b)	57.0483	
	8×20	(1)	(a)	57.2675	
	8×20	(1)	(b)	57.2570	
	8×20	(2)	(a)	57.1089	
	8×20	(2)	(b)	57.1201	
	8×20	(3)	(a)	57.1176	
	8×20	(3)	(b)	57.1073	
	OPT DKT[10]	4×10	-	(b)	59.1703
		8×20	-	(b)	58.4762

表 4.4 Transversally loaded T profile 所偵測到的挫屈負荷(例題 4.6)

Element	Mesh	Kg	元素座標	Buckling load
Prsent	(2+2+4)×20	(1)	(a)	2799.01
	(2+2+4)×20	(1)	(b)	2798.68
	(2+2+4)×20	(2)	(a)	2797.21
	(2+2+4)×20	(2)	(b)	2796.70
	(2+2+4)×20	(3)	(a)	2797.16
	(2+2+4)×20	(3)	(b)	2796.65
	(3+3+5)×30	(1)	(a)	2848.46
	(3+3+5)×30	(1)	(b)	2847.75
	(3+3+5)×30	(2)	(a)	2846.41
	(3+3+5)×30	(2)	(b)	2845.71
	(3+3+5)×30	(3)	(a)	2846.32
	(3+3+5)×30	(3)	(b)	2845.61
	(5+5+8)×50	(1)	(a)	2829.86
	(5+5+8)×50	(1)	(b)	2829.02
	(5+5+8)×50	(2)	(a)	2827.77
	(5+5+8)×50	(2)	(b)	2826.93
OPT DKT[10]	(2+2+4)×20	(3)	(a)	2827.67
	(5+5+8)×50	(3)	(b)	2826.83
OPT DKT[10]	(2+2+4)×20	-	(b)	3103.86
	(5+5+8)×50	-	(b)	2890

表 4.5 Channel section in torsion 所偵測到的極限點(例題 4.7)

Element	Mesh	Kg	元素座標	J 點側向位移(-W)	Limit point
Present	(1+2+1)×20	(2)	(a)	18.8209	1097.65
	(1+2+1)×20	(2)	(b)	18.9037	1104.65
	(2+4+2)×40	(2)	(a)	20.5250	1104.07
	(2+4+2)×40	(2)	(b)	20.0766	1106.21
OPT DKT[10]	(1+2+1)×20	-	(b)	-	1011.92
	(3+8+3)×56	-	(b)	-	1080.86

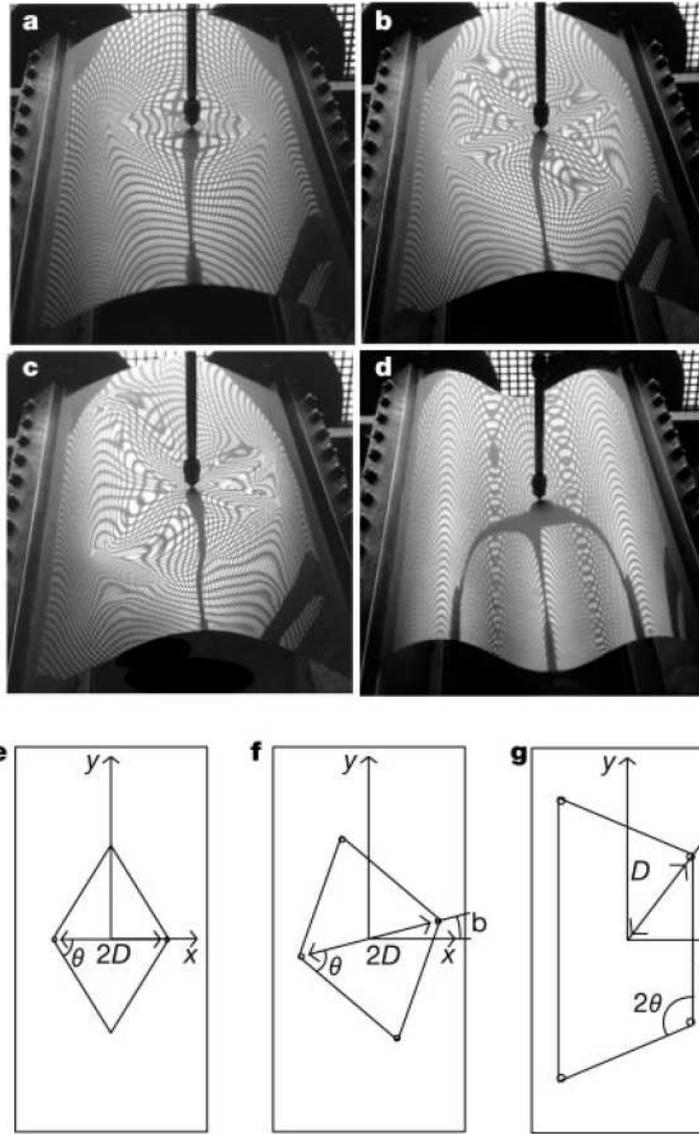


圖 1.1 文獻[37]實驗所觀察到四種變形轉換(a-d)及對應於 a-c 圖結構的上視圖(e-g)

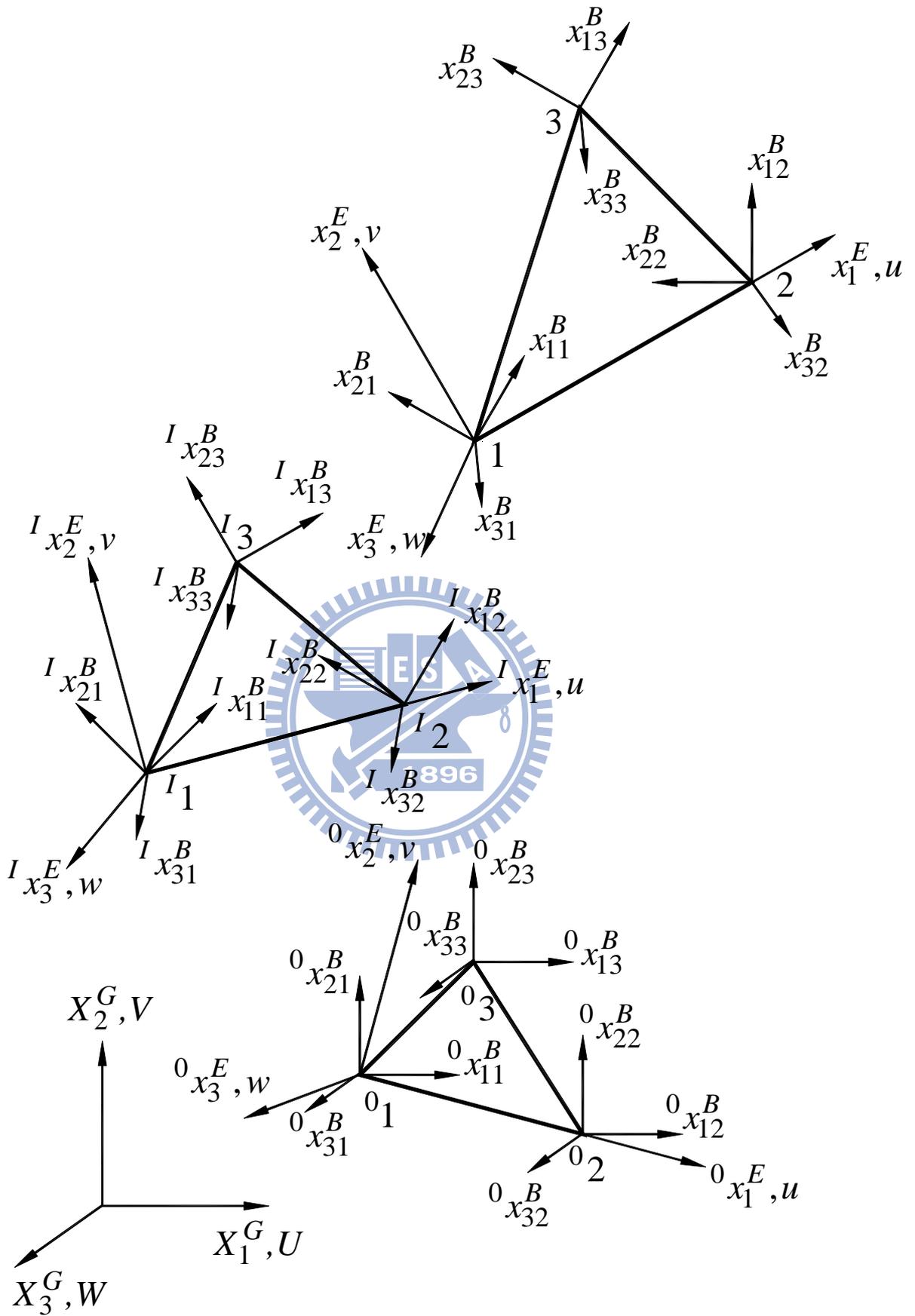


圖 2.1 固定總體座標、元素座標與節點基礎座標

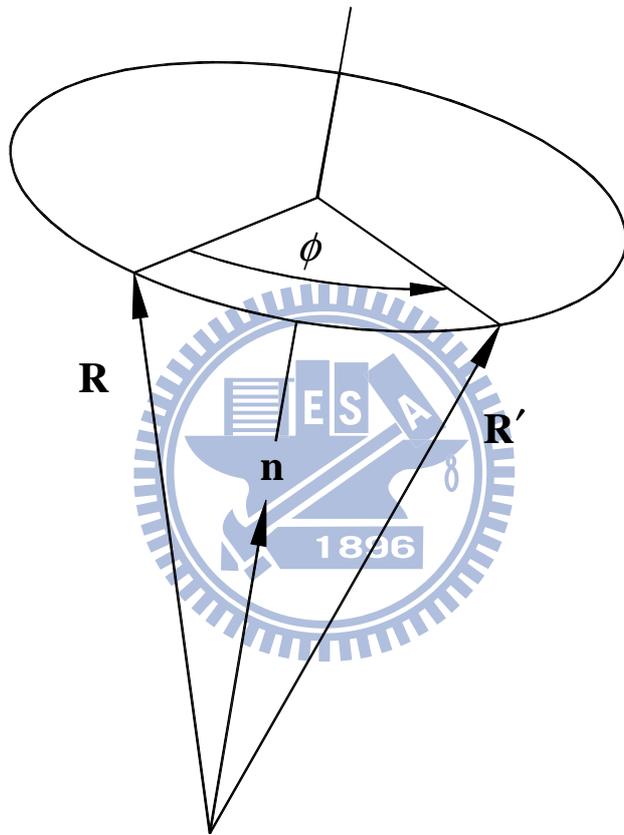


圖 2.2 旋轉向量

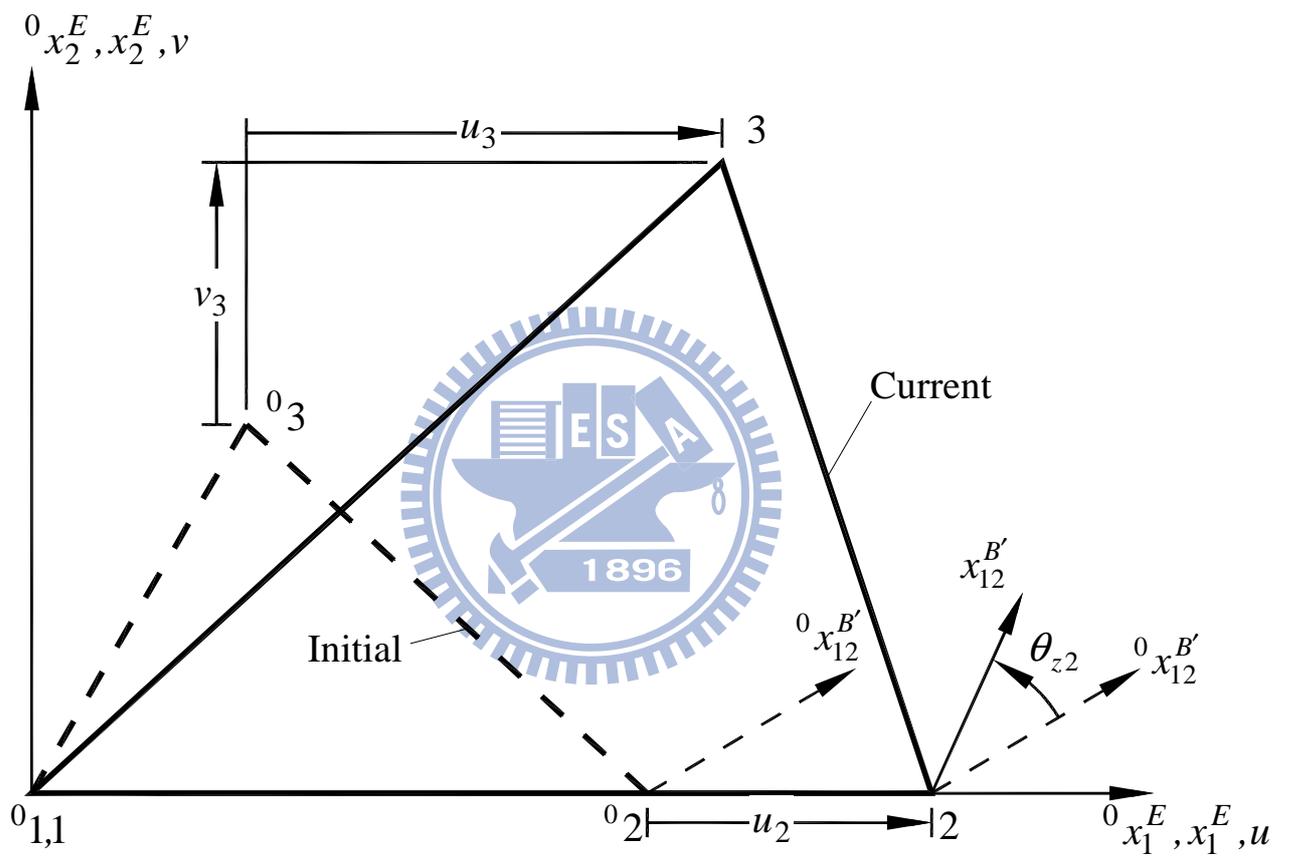


圖 2.3 元素變形示意圖

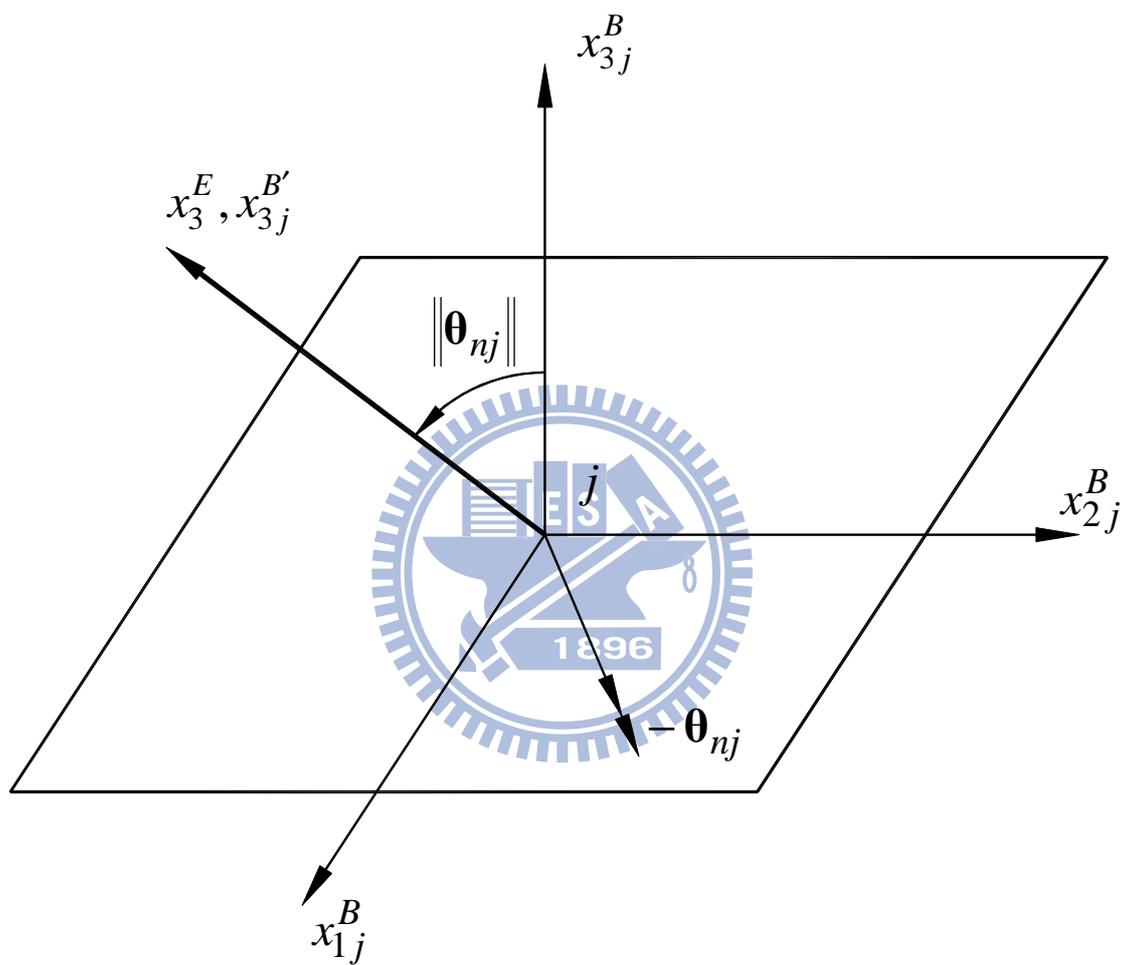


圖 2.4 元素節點  $j$  中心面之  $x_{ij}^B$  軸受旋轉向量  $-\theta_{nj}$  作用的示意圖

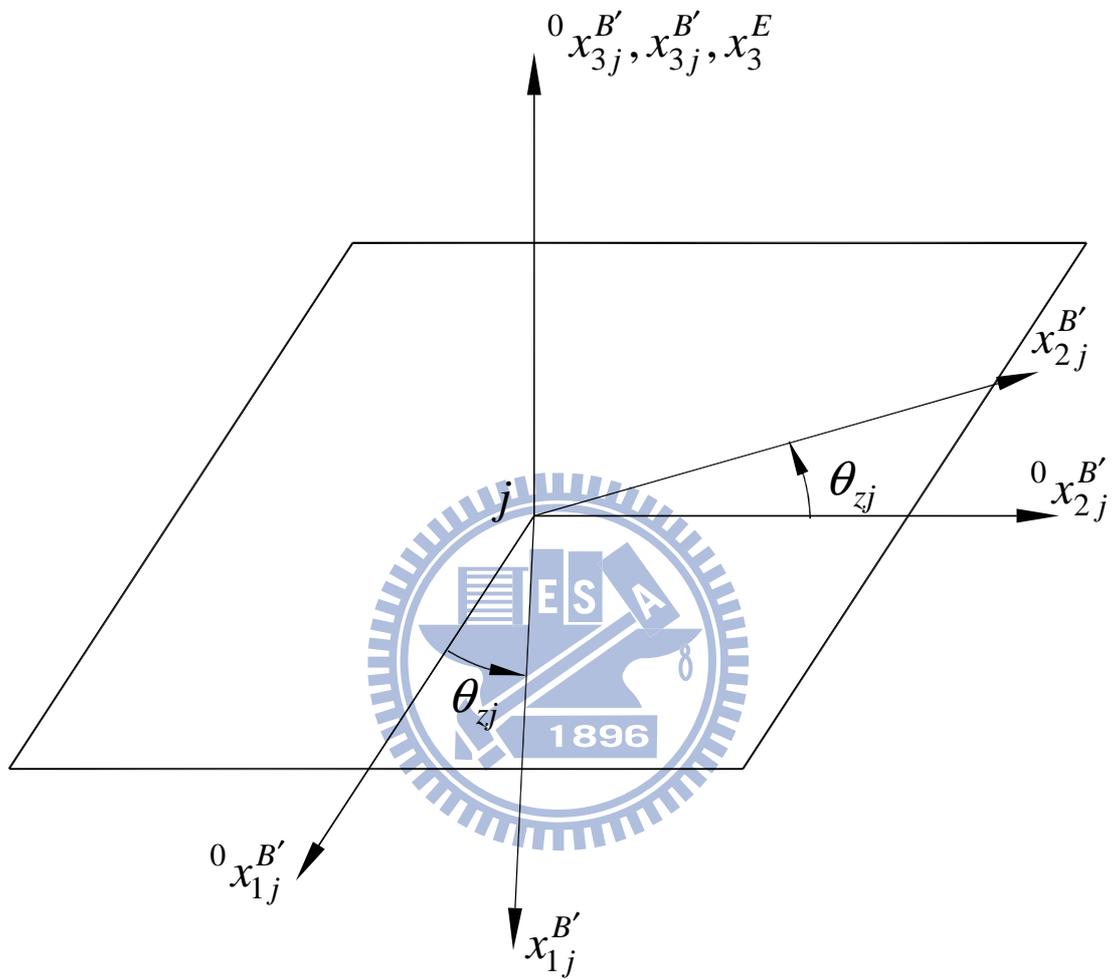


圖 2.5 元素節點  $j$  中心面之  $\theta_{zj} \mathbf{e}_3^E$  為將  $^0x_{1j}^{B'}$  軸旋轉到  $x_{1j}^{B'}$  軸旋轉向量的示意圖

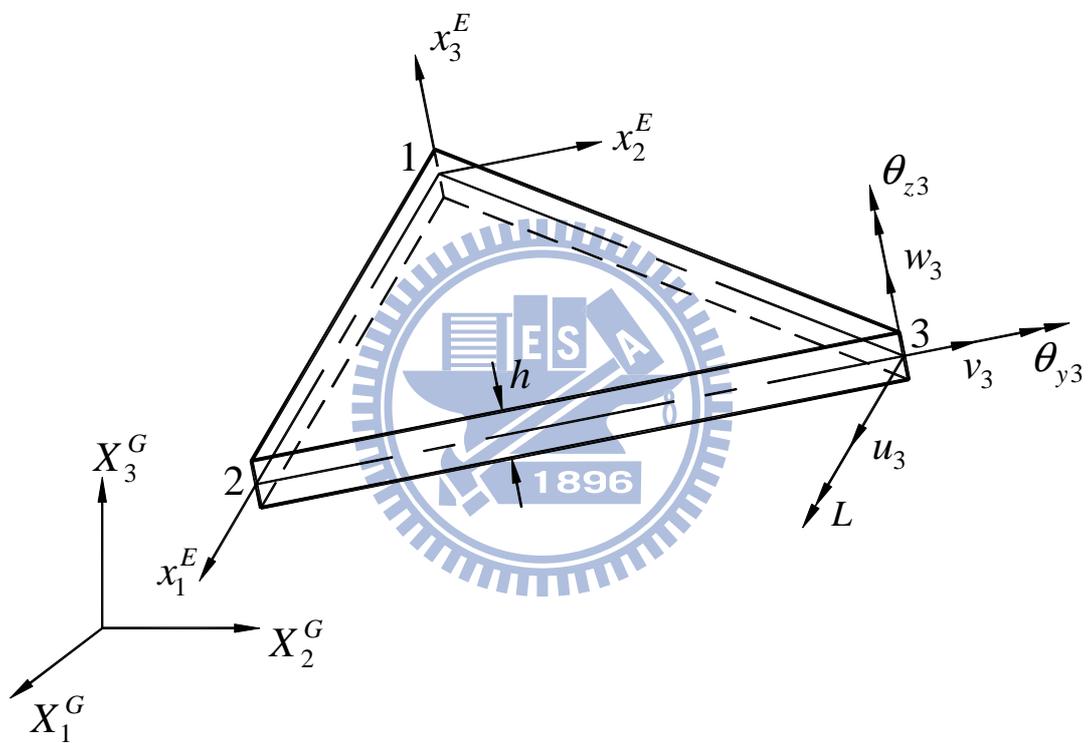


圖 2.6 三角元素的示意圖及節點自由度

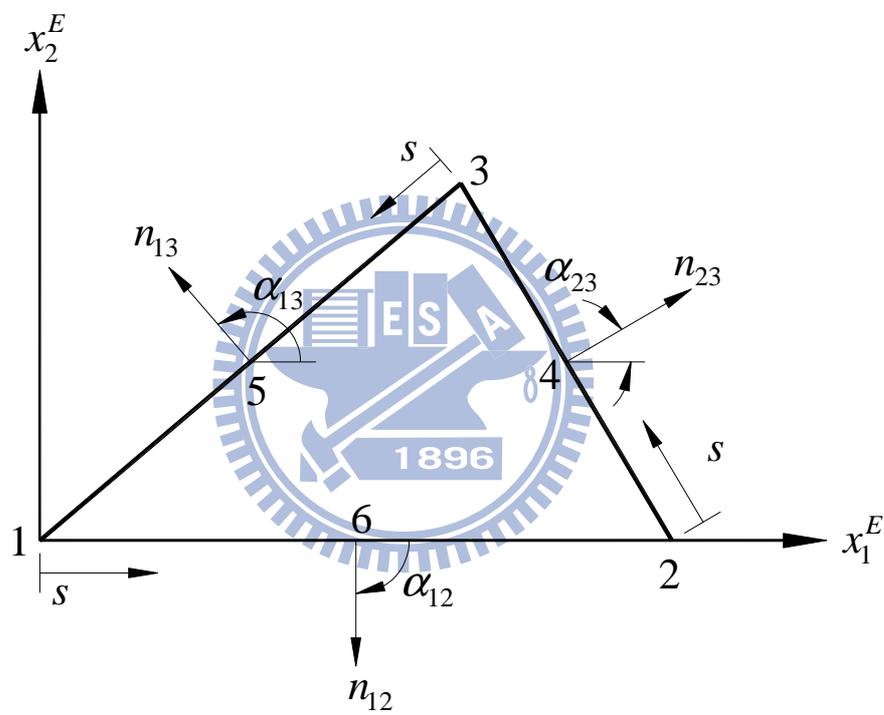
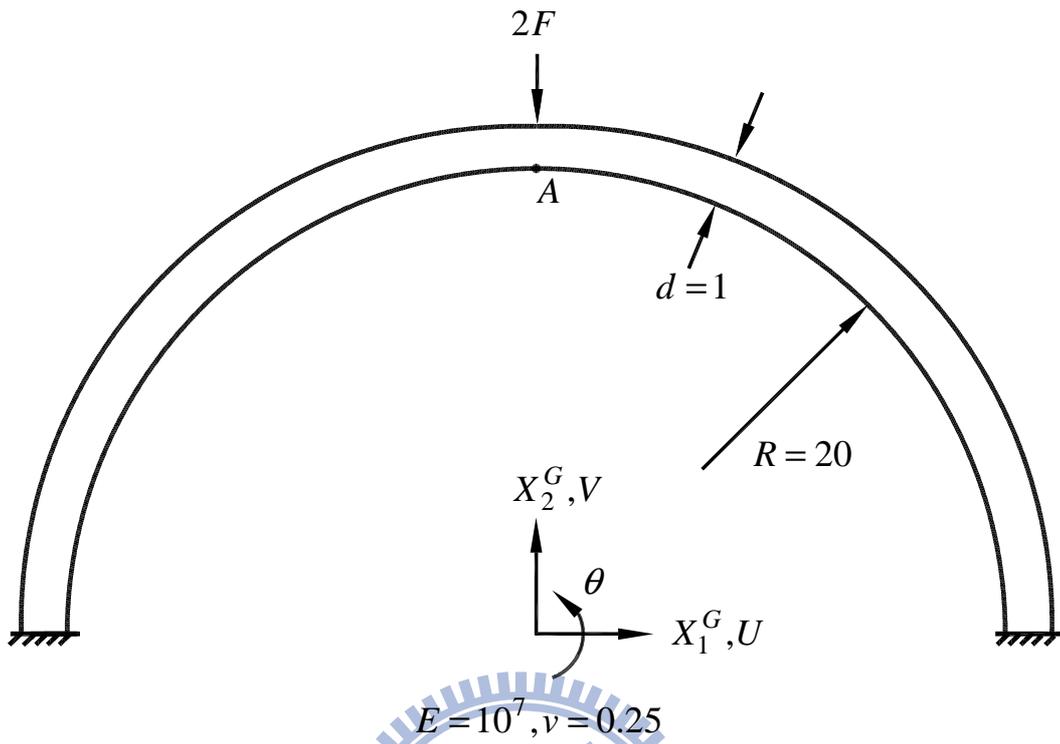
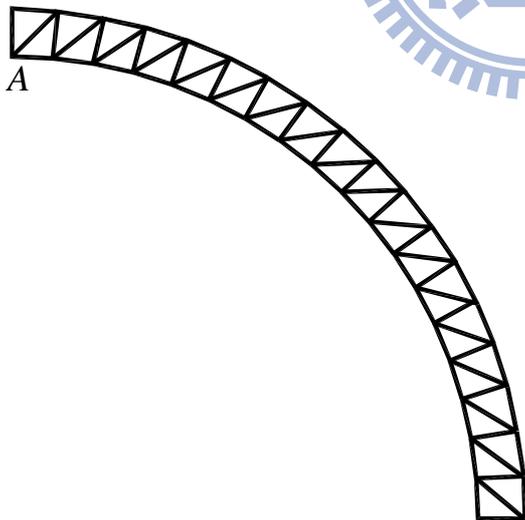


圖 2.7 DKT 元素的節點及其三邊上的局部座標示意圖

(a)



(b)



(c)

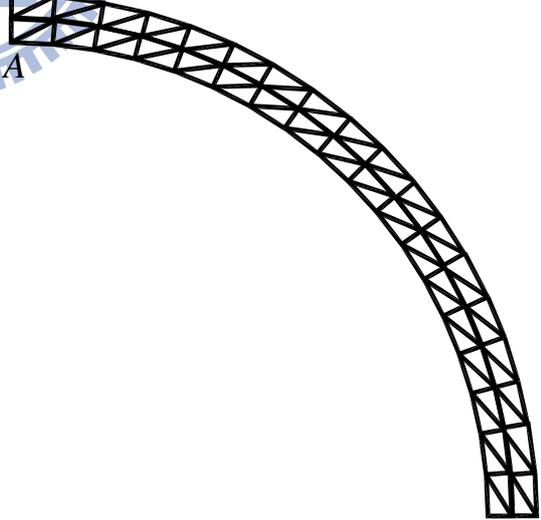


圖 4.1 半圓環受到單點集中力作用 (a)結構尺寸示意圖 (b)網格  $18 \times 1$  示意圖 (c)網格  $18 \times 2$  示意圖

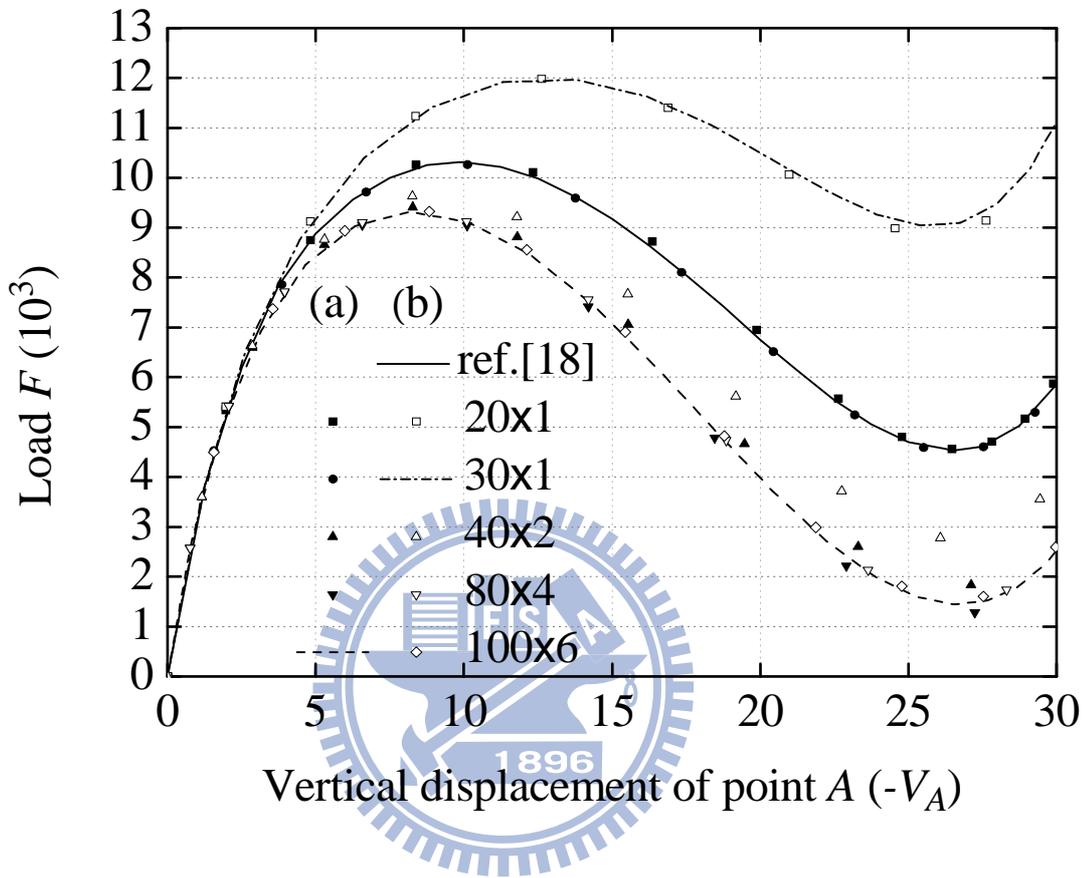
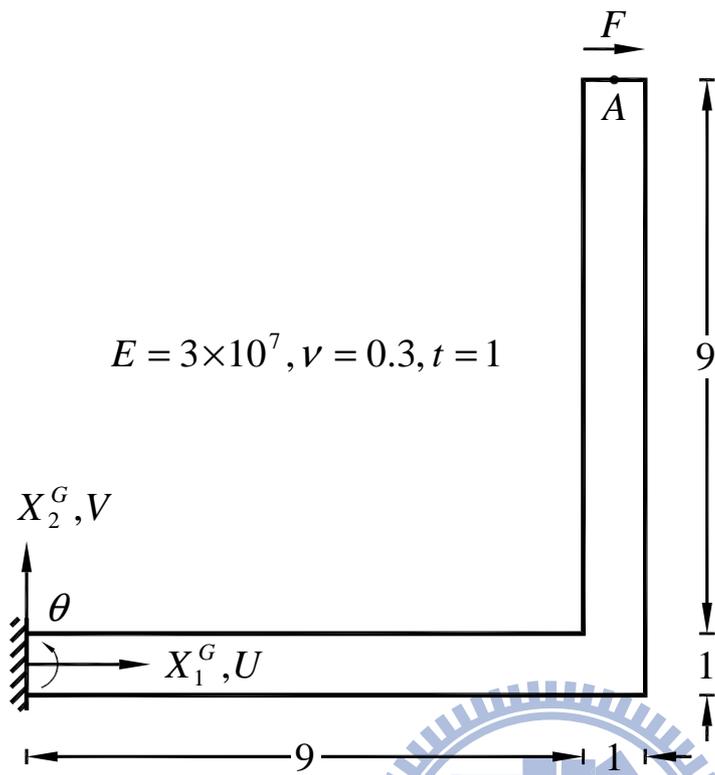


圖 4.2 半圓環受到單點集中力作用，不同網格下之負荷位移曲線圖。

(a)



(b)

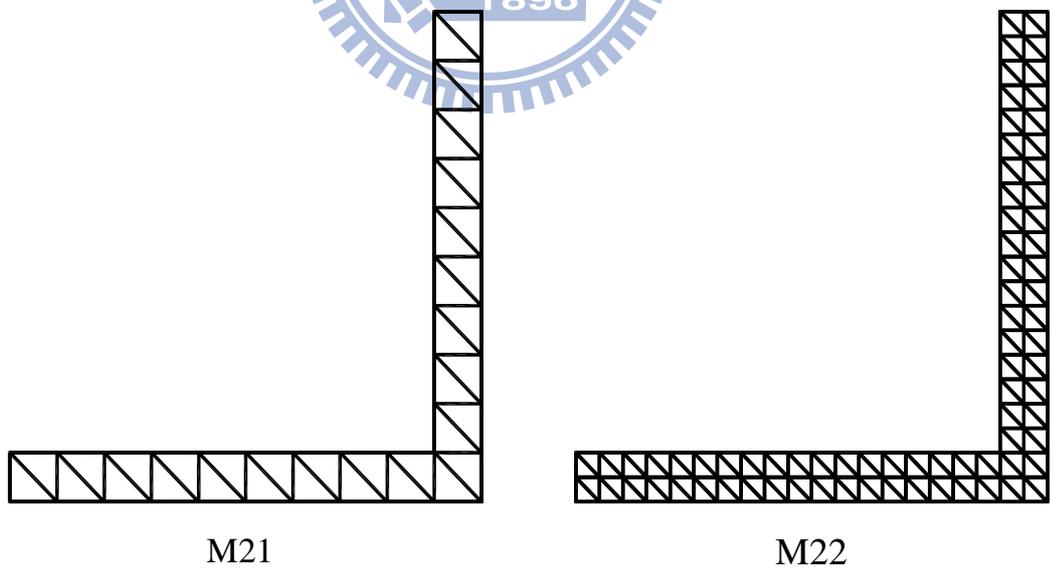


圖 4.3 直角構架受到端點剪力作用 (a)結構尺寸示意圖  
(b)網格 M21 與網格 M22 示意圖

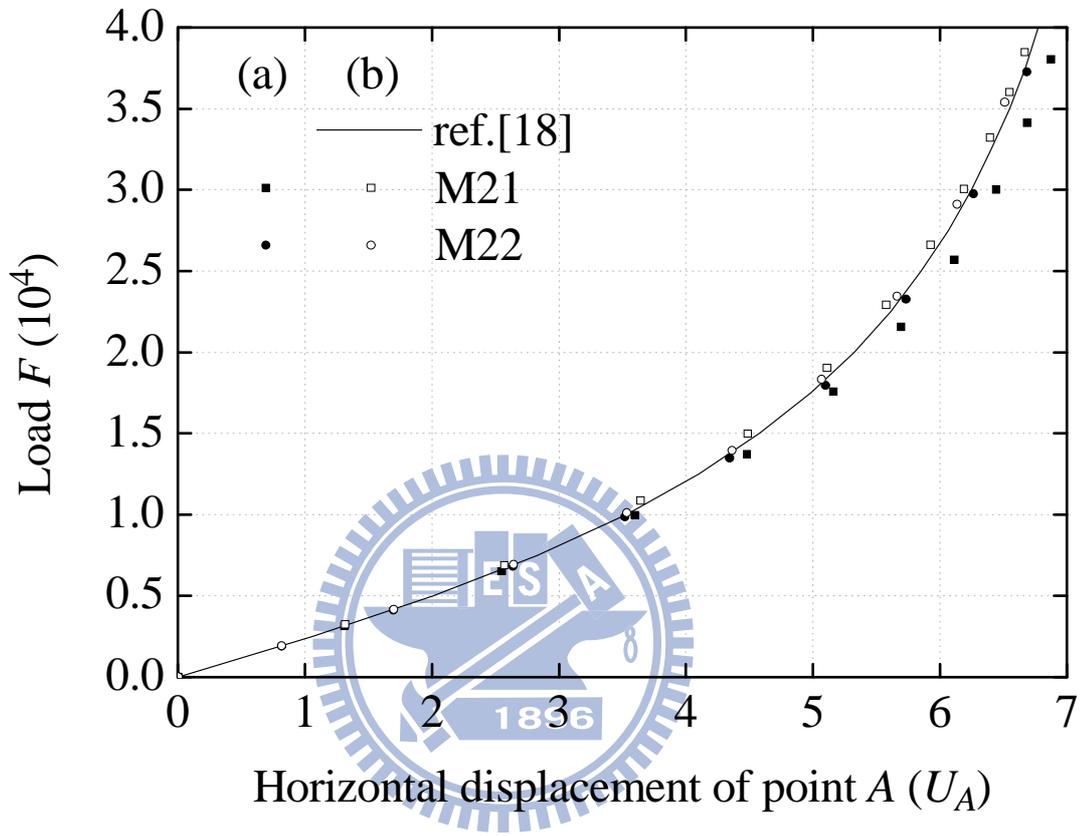
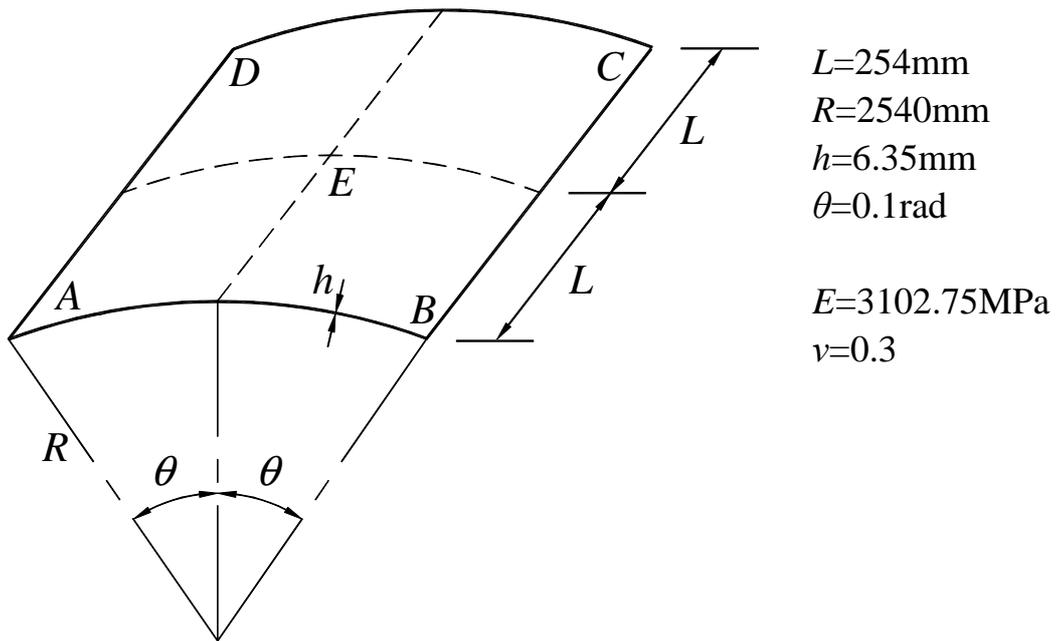
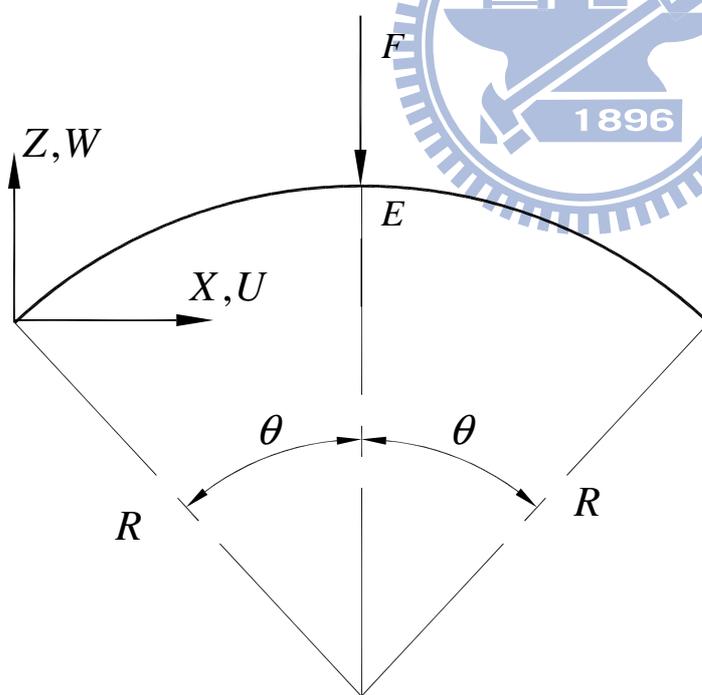


圖 4.4 直角構架受到端點剪力作用，不同網格下之負荷位移曲線圖。

(a)



(b)



(c)

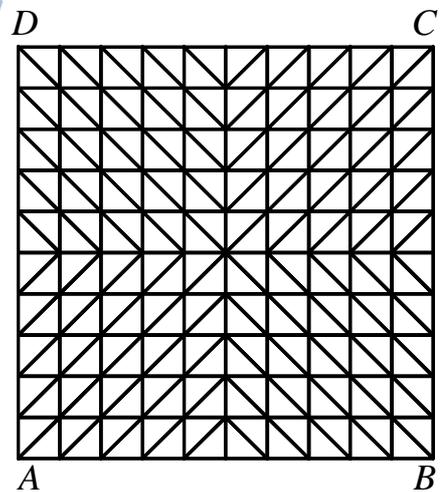


圖 4.5 圓柱殼片段受到單點集中力作用 (a)結構尺寸示意圖  
(b)力負荷圖 (c)網格 10×10 示意圖

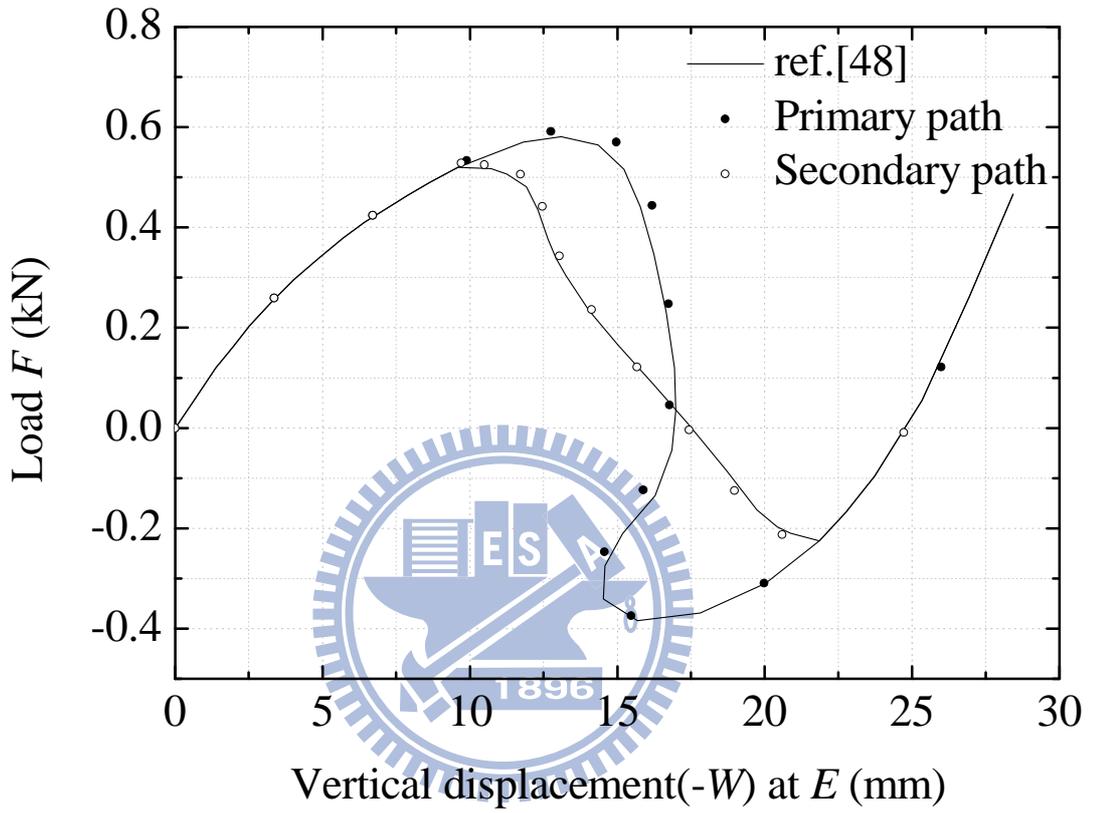
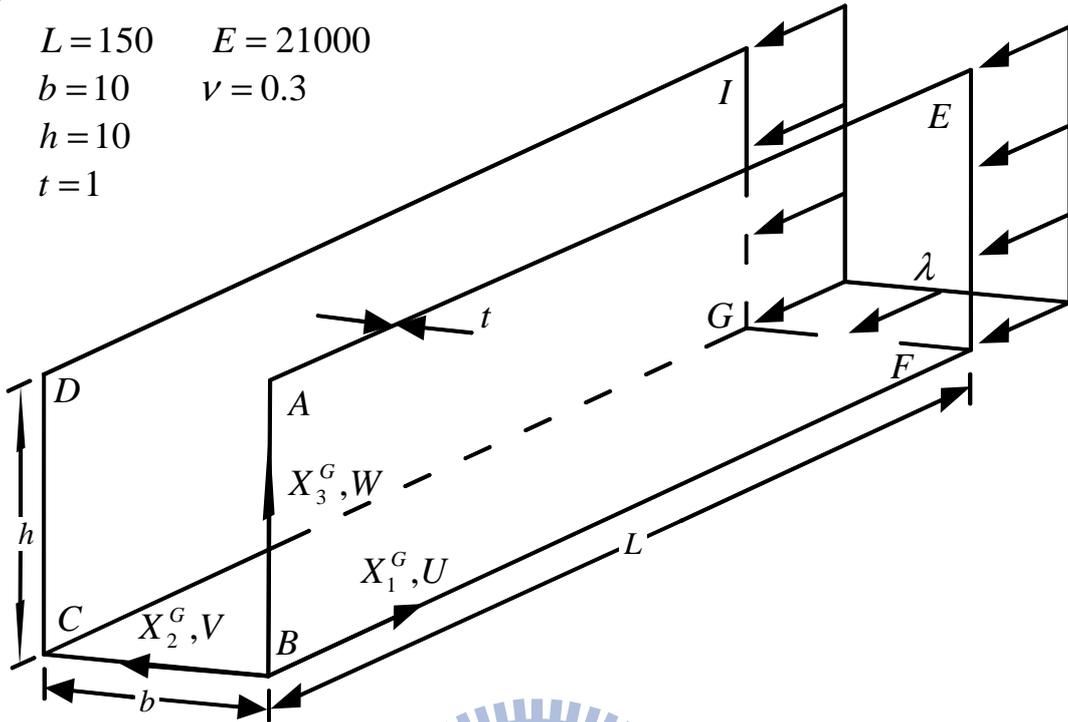


圖 4.6 圓柱殼片段受到單點集中力作用之負荷位移曲線圖

(a)

$L = 150$      $E = 21000$   
 $b = 10$      $\nu = 0.3$   
 $h = 10$   
 $t = 1$



(b)

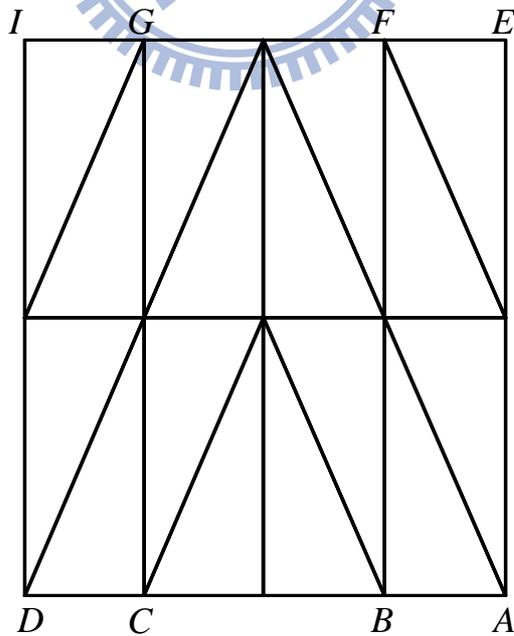
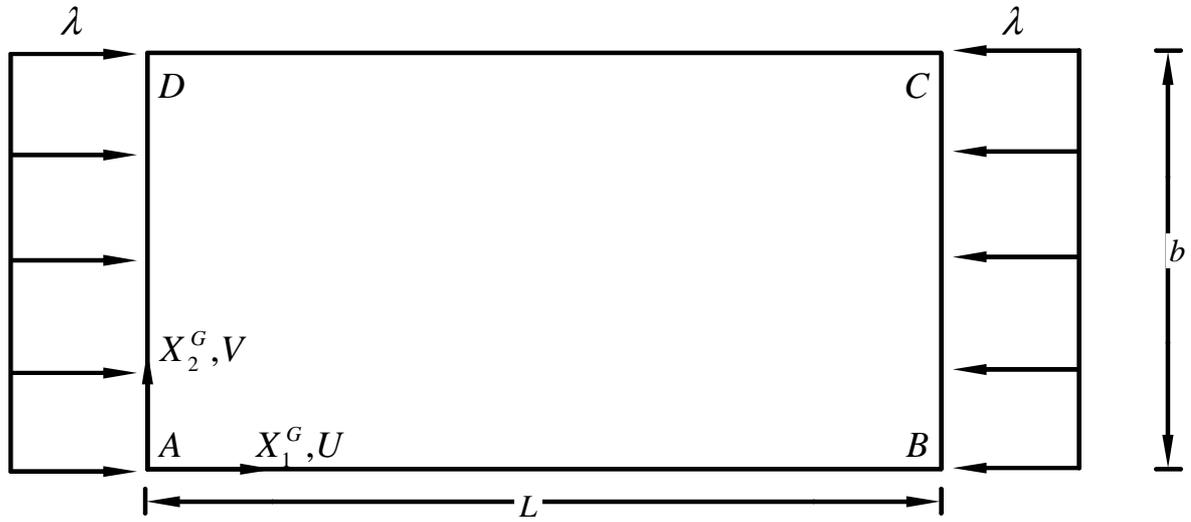


圖 4.7 Lateral torsional buckling (a)結構尺寸示意圖  
(b)網格(1+2+1) $\times$ 2 示意圖

(a)

$$L=100, b=50, t=2, E=100, \nu=0.3$$



(b)

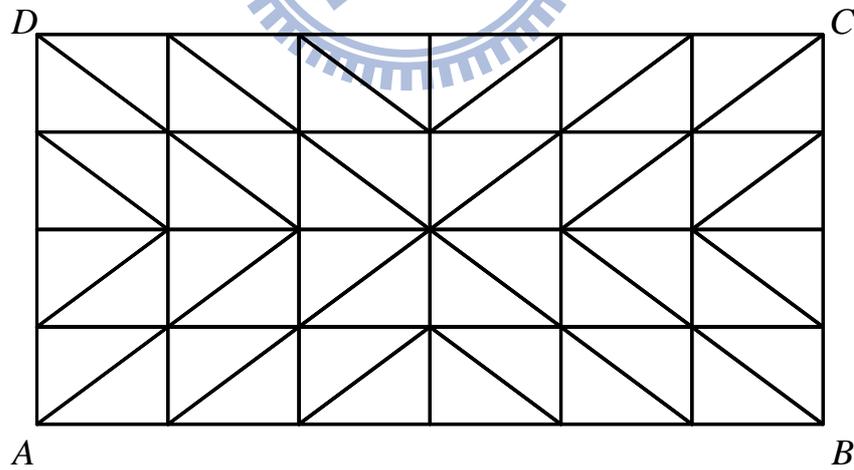


圖 4.8 Simply supported compressed plate (a)結構尺寸示意圖  
(b)網格 4x6 示意圖

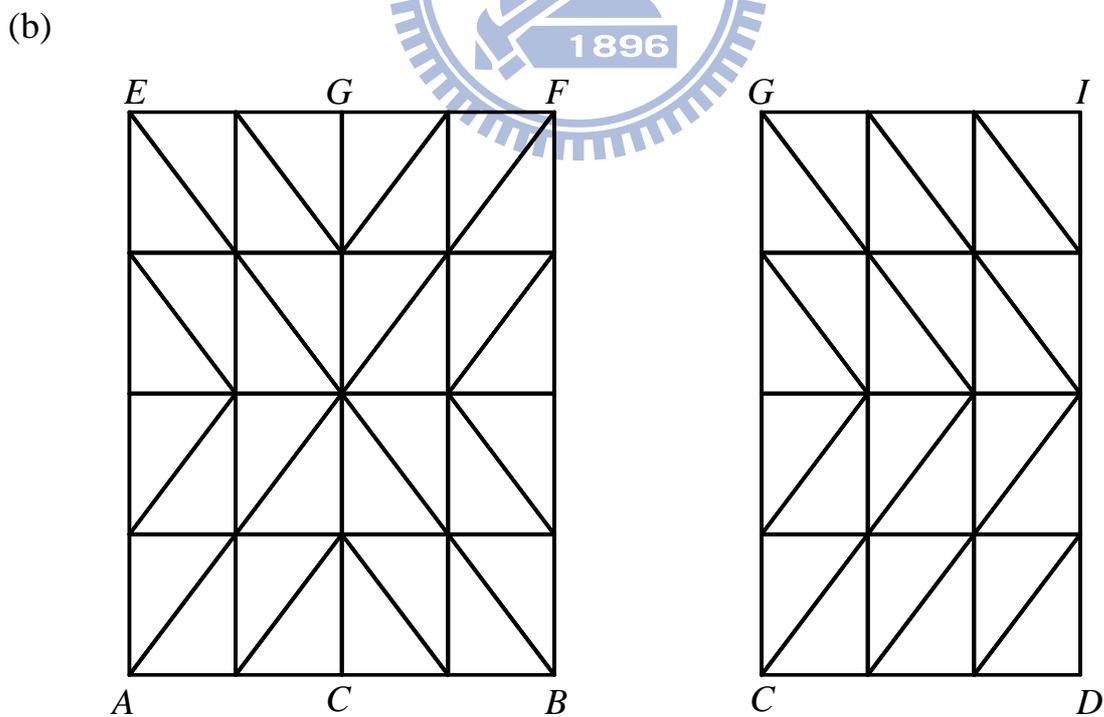
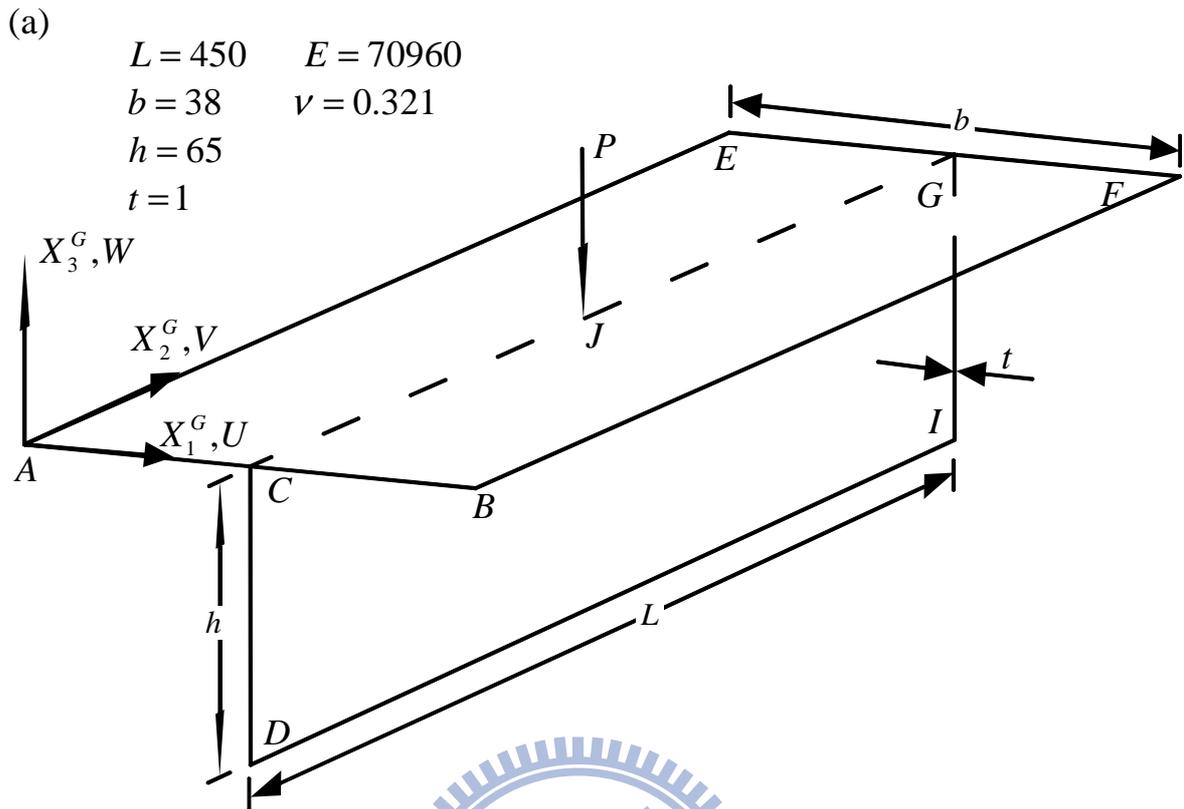
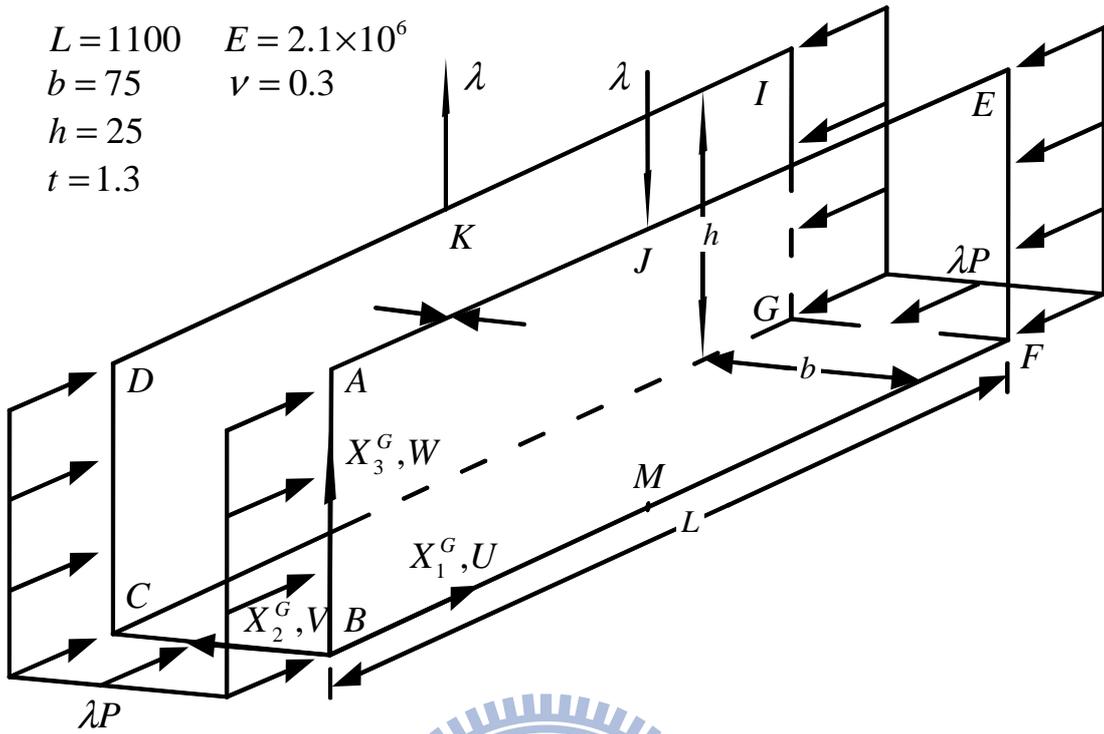


圖 4.9 Transversally loaded T profile (a)結構尺寸示意圖  
 (b)網格(2+2+3)×4 示意圖

(a)

$$\begin{aligned} L &= 1100 & E &= 2.1 \times 10^6 \\ b &= 75 & \nu &= 0.3 \\ h &= 25 \\ t &= 1.3 \end{aligned}$$



(b)

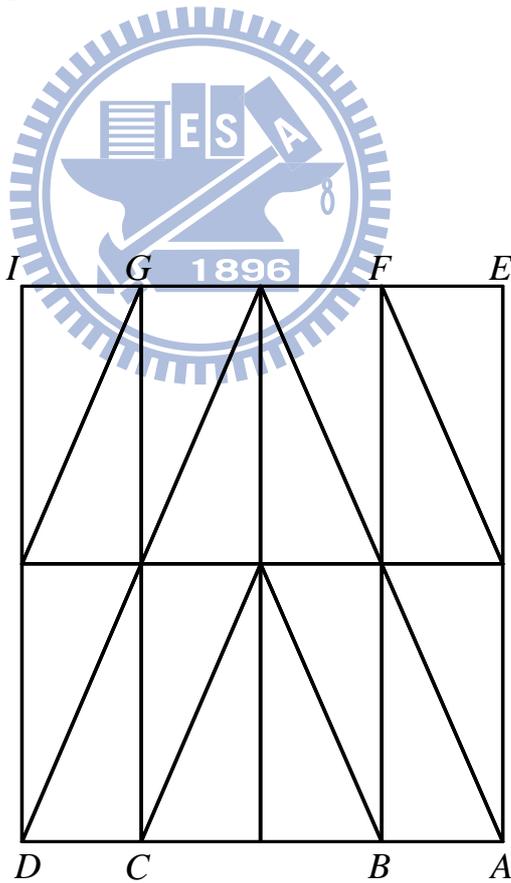


圖 4.10 Channel section in torsion (a)結構尺寸示意圖  
(b)網格(1+2+1) $\times$ 2 示意圖

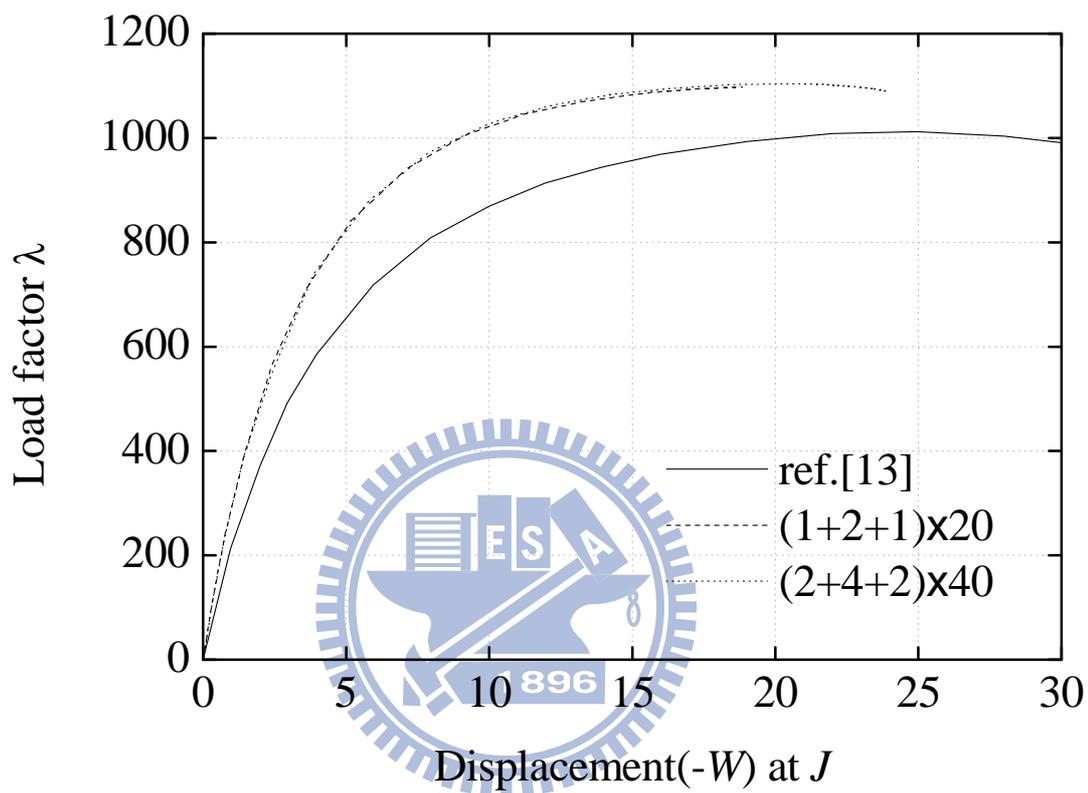
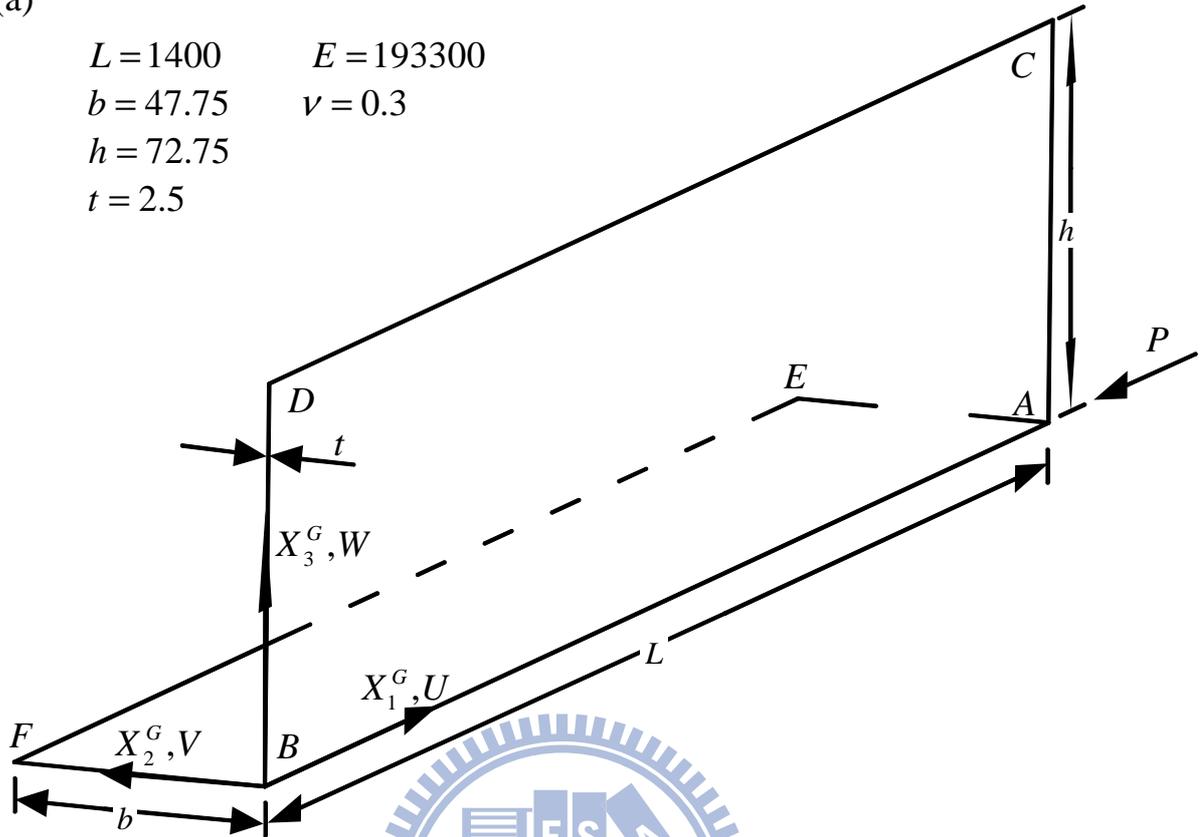


圖 4.11 Channel section in torsion，不同網格下之負荷位移曲線圖。

(a)

$L = 1400$        $E = 193300$   
 $b = 47.75$       $\nu = 0.3$   
 $h = 72.75$   
 $t = 2.5$



(b)

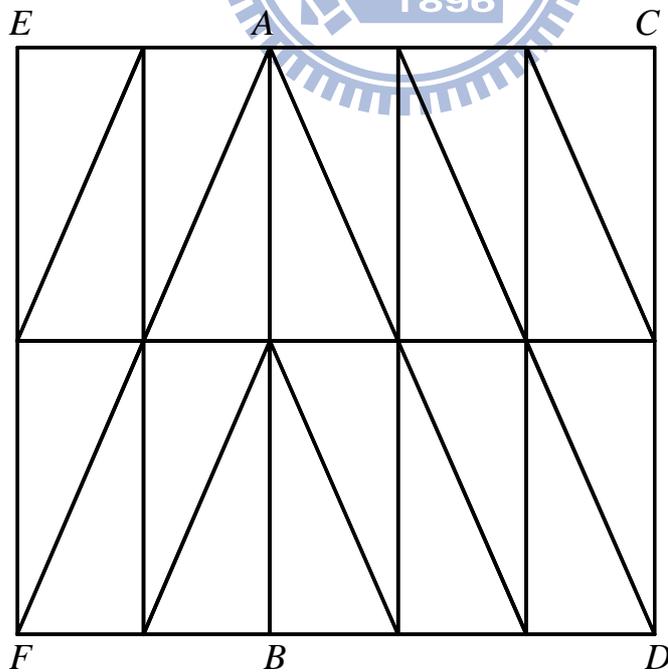


圖 4.12 直角梁受到單點集中力作用 (a)結構尺寸示意圖  
(b)網格(2+3)×2 示意圖

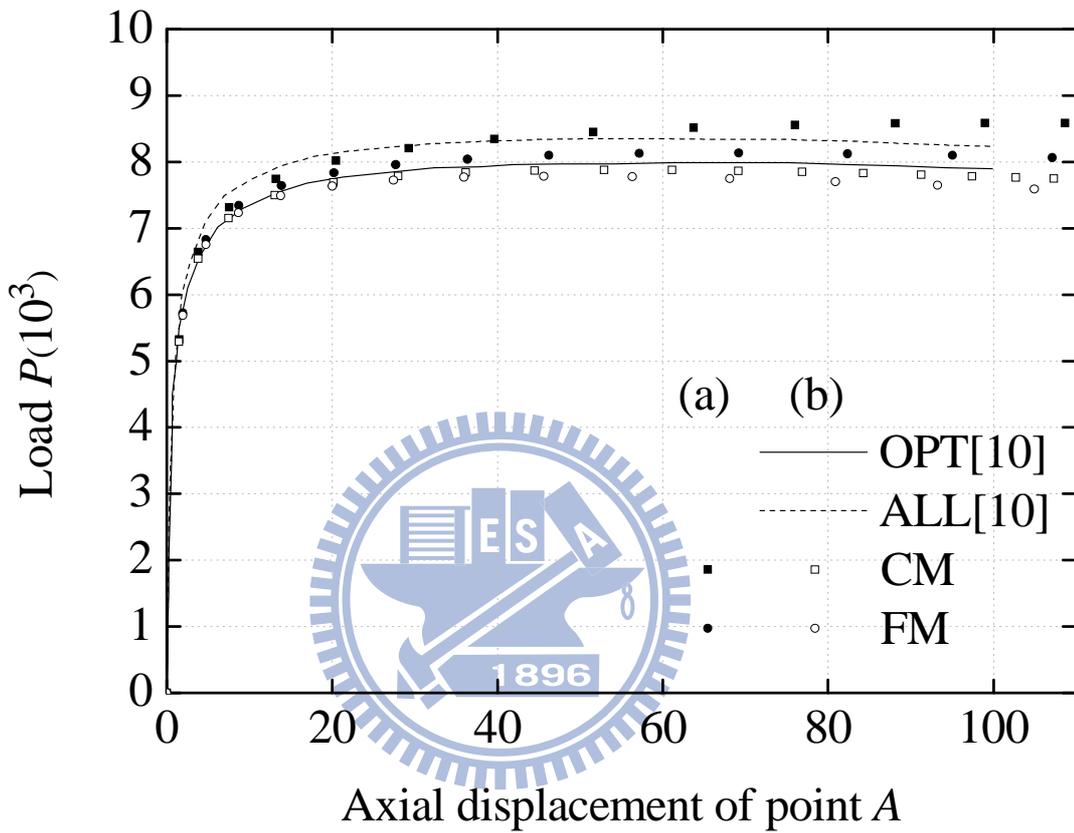


圖 4.13 直角梁受到單點集中力作用，不同網格下之負荷位移曲線圖。

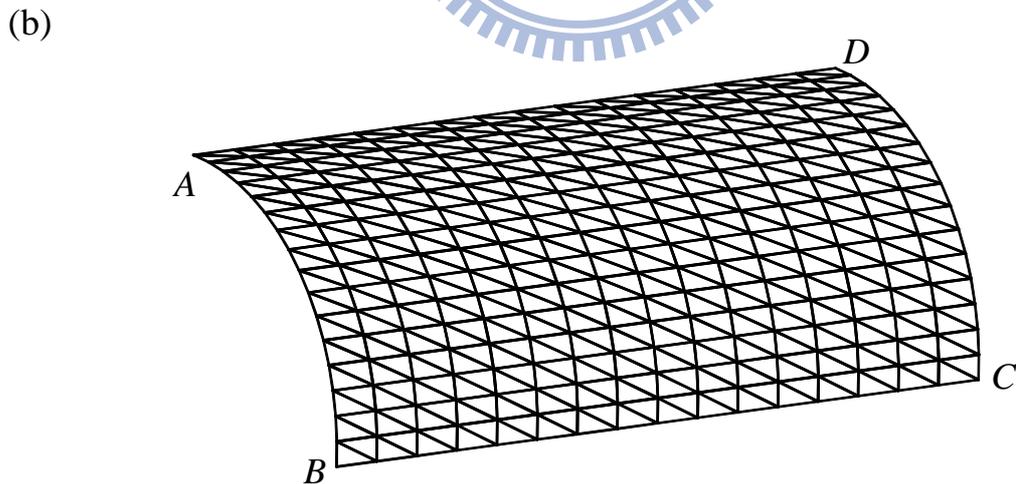
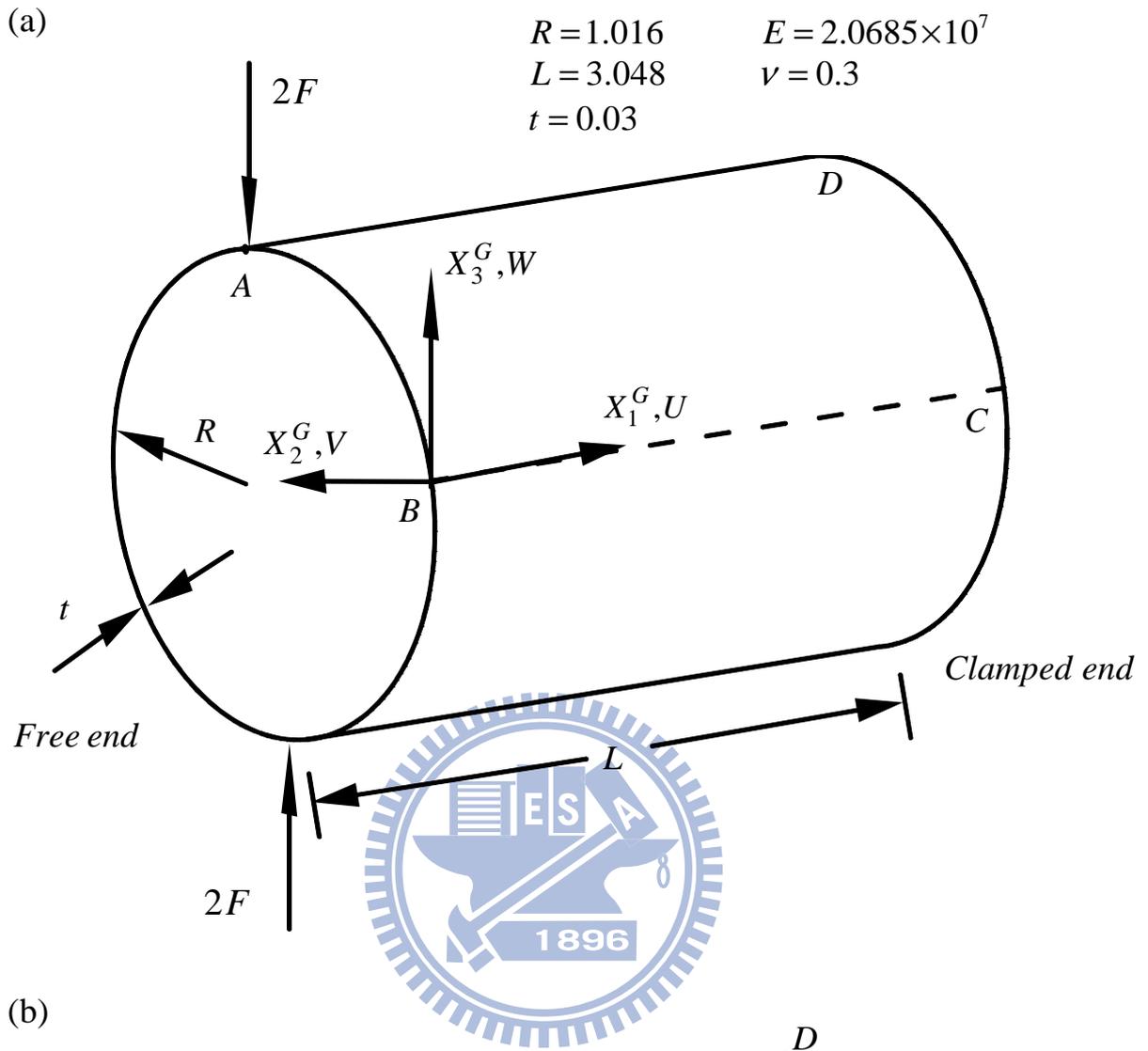


圖 4.14 懸臂圓柱殼受到單點集中力作用 (a)結構尺寸示意圖  
(b)網格 16×16 示意圖

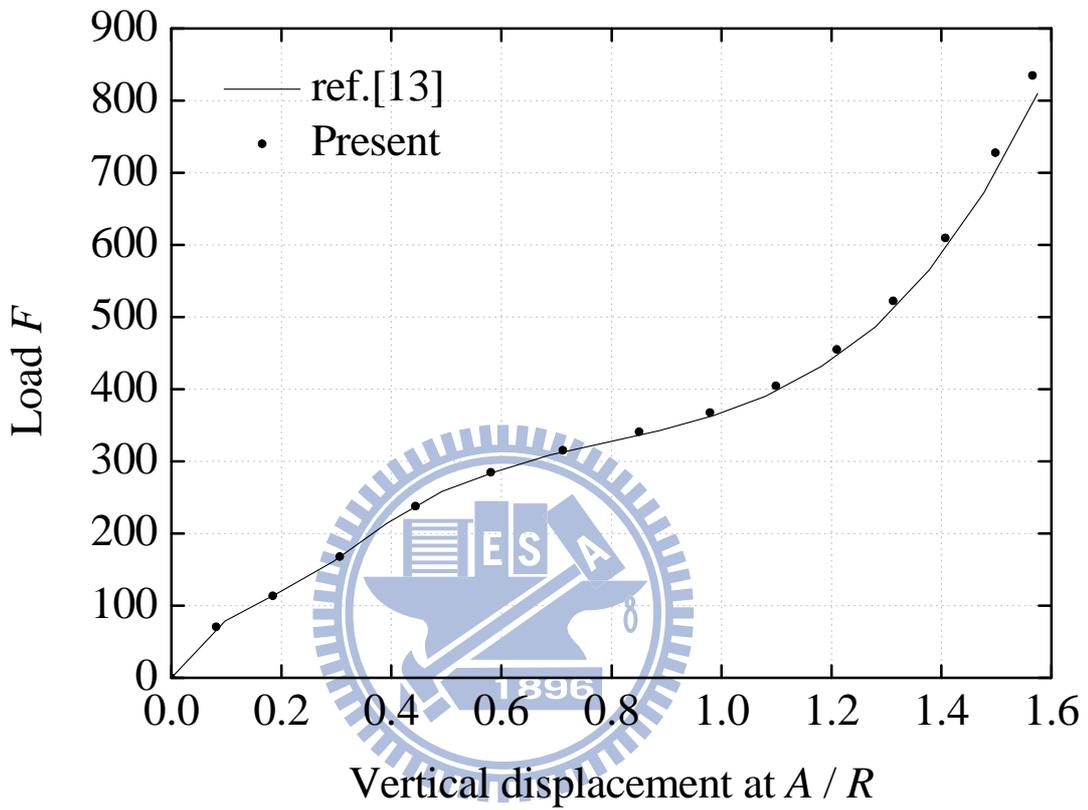
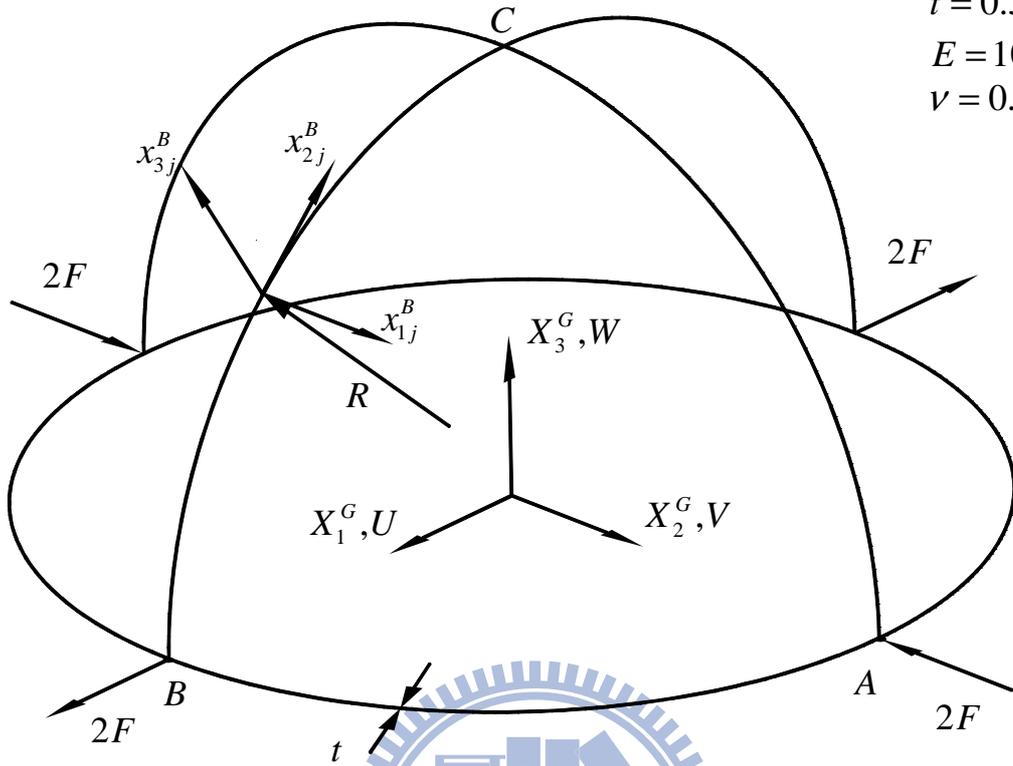


圖 4.15 懸臂圓柱殼受到單點集中力作用之負荷位移曲線圖

(a)



$R = 10$   
 $t = 0.5$   
 $E = 10^4$   
 $\nu = 0.2$

(b)

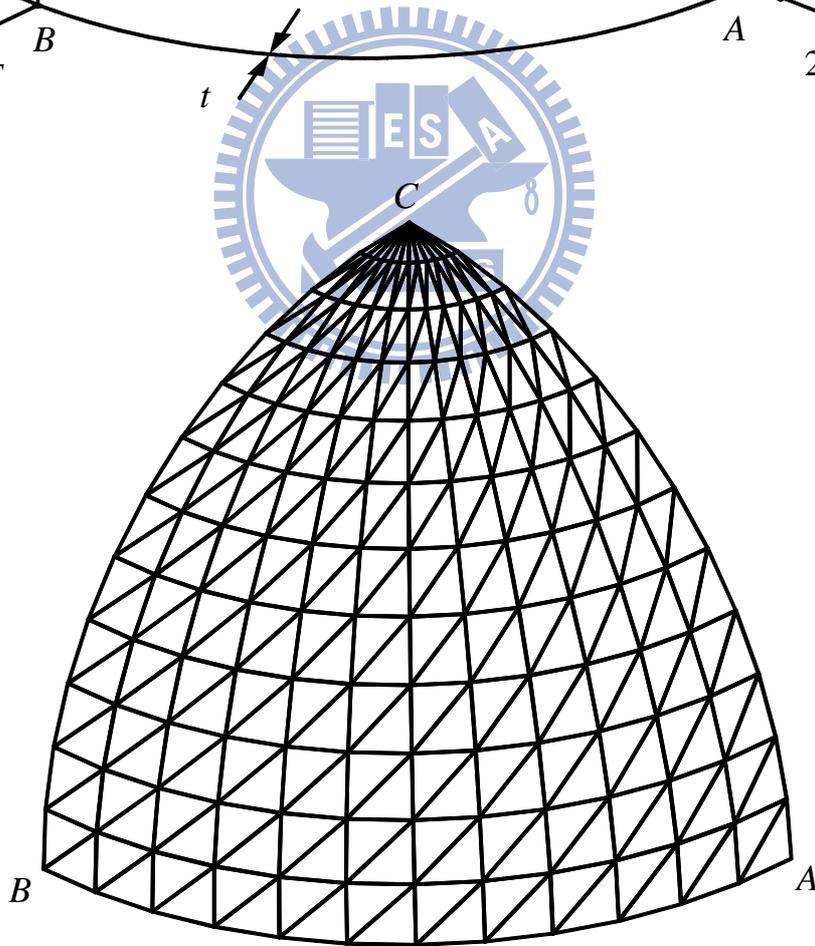


圖 4.16 半球殼受到單點集中力作用 (a)結構尺寸示意圖  
(b)網格 12×12 示意圖

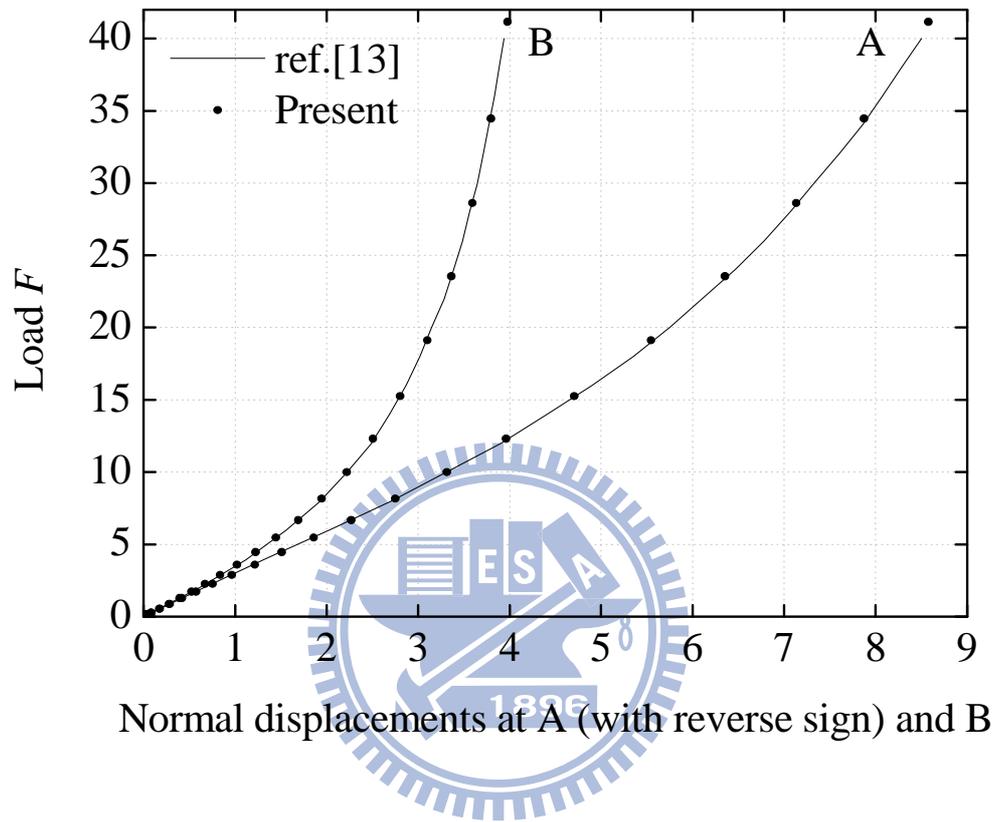


圖 4.17 半球殼受到單點集中力作用之負荷位移曲線圖

## 附錄 A 面積座標(area coordinates)

### A.1 面積座標的定義

如圖 A.1 所示， $x$ 、 $y$  為三角形中任一點  $P$  在直角座標中的座標值，將  $P$  點與三角形的三個頂點作連線，就形成了三個小三角形，三個頂點 1、2、3 相對應的三個小三角形的面積分別為  $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$ ，令面積座標

$$\lambda = \frac{A_1}{A} \quad (\text{A.1})$$

$$\xi = \frac{A_2}{A} \quad (\text{A.2})$$

$$\eta = \frac{A_3}{A} \quad (\text{A.3})$$

$$A = \frac{1}{2}(x_{21}y_{31} - x_{31}y_{21}) \quad (\text{A.4})$$

$$x_{ij} = x_i - x_j \quad (\text{A.5})$$

$$y_{ij} = y_i - y_j \quad (\text{A.6})$$

其中  $A$  為三角形 123 的面積， $x_i$ 、 $y_i$  代表三角形頂點  $i$  的  $x$  和  $y$  座標。 $\lambda$ 、 $\xi$ 、 $\eta$  稱為三角形中  $P$  點的面積座標，固

$$A_1 + A_2 + A_3 = A \quad (\text{A.7})$$

由(A.1)式至(A.3)式與(A.7)式可以得出

$$\lambda + \xi + \eta = 1 \quad (\text{A.8})$$

因  $\lambda$ 、 $\xi$ 、 $\eta$  之間不是互相獨立的，因此在本文中僅用  $\xi$ 、 $\eta$  表示三角形中任意點的面積座標，如圖 A.2。

### A.2 面積座標與直角座標的關係

$P$  點之面積座標與直角座標之間的關係可表示成[42]

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda \\ \xi \\ \eta \end{Bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

與

$$\begin{Bmatrix} \lambda \\ \xi \\ \eta \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & y_{23} & x_{32} \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 & y_{31} & x_{13} \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 & y_{12} & x_{21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

若任意函數  $\phi = \phi(\xi, \eta)$  為面積座標函數，則其對  $x$  或  $y$  的微分可表示成

$$\begin{Bmatrix} \phi, x \\ \phi, y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi, x & \eta, x \\ \xi, y & \eta, y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi, \xi \\ \phi, \eta \end{Bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

在(A.11)式中的  $\xi, x$ 、 $\eta, x$ 、 $\xi, y$ 、 $\eta, y$  可以利用(A.10)式微分得出

$$\begin{bmatrix} \xi, x & \eta, x \\ \xi, y & \eta, y \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{31} & y_{12} \\ x_{13} & x_{21} \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

反之，若任意函數  $\phi = \phi(x, y)$  為直角座標函數，其對  $\xi$  或  $\eta$  的微分可表示成

$$\begin{Bmatrix} \phi, \xi \\ \phi, \eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x, \xi & y, \xi \\ x, \eta & y, \eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi, x \\ \phi, y \end{Bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

在(A.13)式中的  $x, \xi$ 、 $y, \xi$ 、 $x, \eta$ 、 $y, \eta$  可以利用(A.9)式微分得出

$$\begin{bmatrix} x, \xi & y, \xi \\ x, \eta & y, \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{21} & y_{21} \\ x_{31} & y_{31} \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

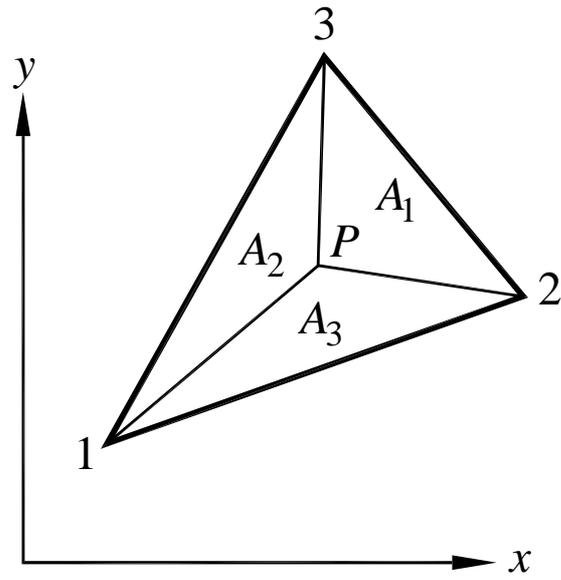


圖 A.1 面積座標表示方法

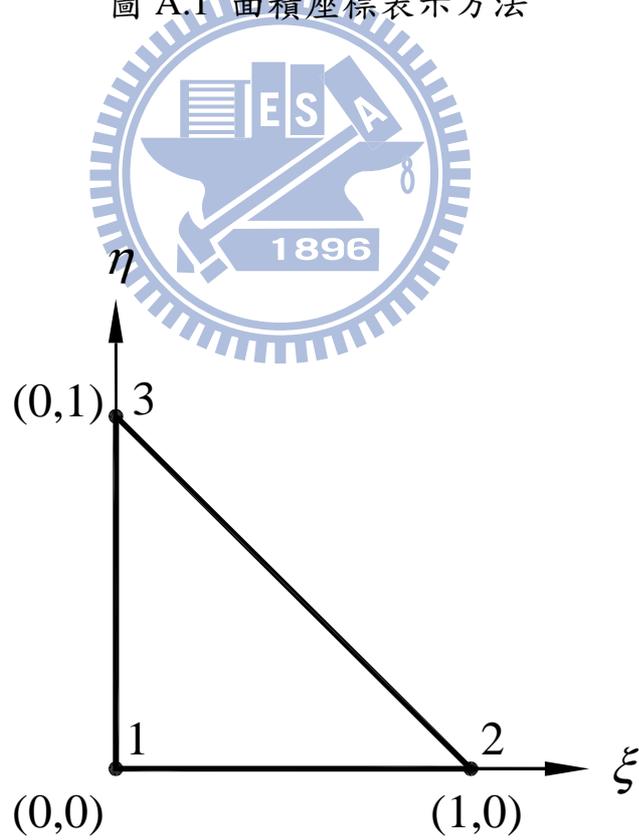


圖 A.2 面積座標示意圖

附錄 B 不完整三階埃爾米特元素的形狀函數及其微分

在(2.15)式與(2.16)式中  $N_i$  ( $i=1, \dots, 9$ ) 及其對  $\xi$ 、 $\eta$  的偏微分，可表示為[40]：

$i$	$N_i$	$N_{i,\xi}$	$N_{i,\eta}$
1	$\lambda^2(3-2\lambda)+2a$	$6\lambda(-1+\lambda)+2b$	$6\lambda(-1+\lambda)+2c$
2	$\xi\lambda^2+a/2$	$\lambda(\lambda-2\xi)+b/2$	$-2\xi\lambda+c/2$
3	$\eta\lambda^2+a/2$	$-2\lambda\eta+b/2$	$\lambda(\lambda-2\eta)+c/2$
4	$\xi^2(3-2\xi)+2a$	$6\xi(1-\xi)+2b$	$2c$
5	$\xi^2(-1+\xi)-a$	$\xi(-2+3\xi)-b$	$-c$
6	$\xi^2\eta+a/2$	$2\xi\eta+b/2$	$\xi^2+c/2$
7	$\eta^2(3-2\eta)+2a$	$6\eta(1-\eta)+2b$	$6\eta(1-\eta)+2c$
8	$\xi\eta^2+a/2$	$\eta^2+b/2$	$2\xi\eta+c/2$
9	$\eta^2(-1+\eta)-a$	$-b$	$\eta(-2+3\eta)-c$

其中

$$\lambda = 1 - \xi - \eta \quad (\text{B.1})$$

$$a = \xi\eta\lambda \quad (\text{B.2})$$

$$b = \eta(\lambda - \xi) \quad (\text{B.3})$$

$$c = \xi(\lambda - \eta) \quad (\text{B.4})$$

在(2.65)式中的  $\mathbf{N}_{u,x}$ 、 $\mathbf{N}_{u,y}$ 、 $\mathbf{N}_{v,x}$ 、 $\mathbf{N}_{v,y}$  為：

$$\mathbf{N}_{u,x} = \xi_{,x} \mathbf{N}_{u,\xi} + \eta_{,x} \mathbf{N}_{u,\eta} \quad (\text{B.5})$$

$$\mathbf{N}_{u,y} = \xi_{,y} \mathbf{N}_{u,\xi} + \eta_{,y} \mathbf{N}_{u,\eta} \quad (\text{B.6})$$

$$\mathbf{N}_{v,x} = \xi_{,x} \mathbf{N}_{v,\xi} + \eta_{,x} \mathbf{N}_{v,\eta} \quad (\text{B.7})$$

$$\mathbf{N}_{v,y} = \xi_{,y} \mathbf{N}_{v,\xi} + \eta_{,y} \mathbf{N}_{v,\eta} \quad (\text{B.8})$$

$$\mathbf{N}_{u,\xi} = \begin{Bmatrix} N_{1,\xi} \\ 0 \\ N_{2,\xi} \\ N_{3,\xi} \\ 0 \\ 0 \\ N_{4,\xi} \\ 0 \\ N_{5,\xi} \\ N_{6,\xi} \\ 0 \\ 0 \\ N_{7,\xi} \\ 0 \\ N_{8,\xi} \\ N_{9,\xi} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{N}_{u,\eta} = \begin{Bmatrix} N_{1,\eta} \\ 0 \\ N_{2,\eta} \\ N_{3,\eta} \\ 0 \\ 0 \\ N_{4,\eta} \\ 0 \\ N_{5,\eta} \\ N_{6,\eta} \\ 0 \\ 0 \\ N_{7,\eta} \\ 0 \\ N_{8,\eta} \\ N_{9,\eta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{N}_{v,\xi} = \begin{Bmatrix} 0 \\ N_{1,\xi} \\ 0 \\ 0 \\ N_{2,\xi} \\ N_{3,\xi} \\ 0 \\ N_{4,\xi} \\ 0 \\ 0 \\ N_{5,\xi} \\ N_{6,\xi} \\ 0 \\ N_{7,\xi} \\ 0 \\ 0 \\ N_{8,\xi} \\ N_{9,\xi} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{N}_{v,\eta} = \begin{Bmatrix} 0 \\ N_{1,\eta} \\ 0 \\ 0 \\ N_{2,\eta} \\ N_{3,\eta} \\ 0 \\ N_{4,\eta} \\ 0 \\ 0 \\ N_{5,\eta} \\ N_{6,\eta} \\ 0 \\ N_{7,\eta} \\ 0 \\ 0 \\ N_{8,\eta} \\ N_{9,\eta} \end{Bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

其中  $\xi_{,x}$ 、 $\eta_{,x}$ 、 $\xi_{,y}$ 、 $\eta_{,y}$  已在附錄 A 中之(A.12)式定義。

## 附錄 C DKT 元素的形狀函數

在(2.54)式裡面的 $\mathbf{H}_x$ 與 $\mathbf{H}_y$ 分別有 9 個分量，其表示式為[32]

$$H_{x1} = 1.5(a_6N_6 - a_5N_5)$$

$$H_{x2} = b_5N_5 + b_6N_6$$

$$H_{x3} = N_1 - c_5N_5 - c_6N_6$$

$$H_{x4} = 1.5(a_4N_4 - a_6N_6)$$

$$H_{x5} = b_6N_6 + b_4N_4$$

$$H_{x6} = N_2 - c_6N_6 - c_4N_4$$

$$H_{x7} = 1.5(a_5N_5 - a_4N_4)$$

$$H_{x8} = b_4N_4 + b_5N_5$$

$$H_{x9} = N_3 - c_4N_4 - c_5N_5$$

$$H_{y1} = 1.5(d_6N_6 - d_5N_5)$$

$$H_{y2} = -N_1 + e_5N_5 + e_6N_6$$

$$H_{y3} = -H_{x2}$$

$$H_{y4} = 1.5(d_4N_4 - d_6N_6)$$

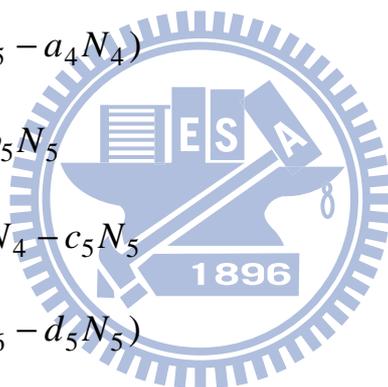
$$H_{y5} = -N_2 + e_6N_6 + e_4N_4$$

$$H_{y6} = -H_{x5}$$

$$H_{y7} = 1.5(d_5N_5 - d_4N_4)$$

$$H_{y8} = -N_3 + e_4N_4 + e_5N_5$$

$$H_{y9} = -H_{x8}$$



其中

$$a_k = \frac{-x_{ij}}{l_{ij}^2}$$

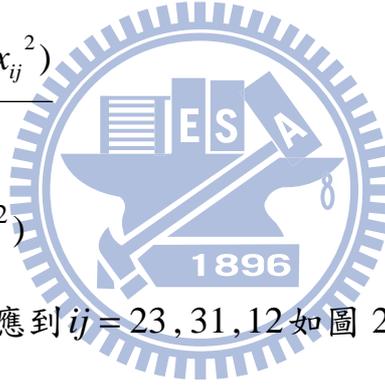
$$b_k = \frac{\frac{3}{4}x_{ij}y_{ij}}{l_{ij}^2}$$

$$c_k = \frac{(\frac{1}{4}x_{ij}^2 - \frac{1}{2}y_{ij}^2)}{l_{ij}^2}$$

$$d_k = \frac{-y_{ij}}{l_{ij}^2}$$

$$e_k = \frac{(\frac{1}{4}y_{ij}^2 - \frac{1}{2}x_{ij}^2)}{l_{ij}^2}$$

$$l_{ij}^2 = (x_{ij}^2 + y_{ij}^2)$$



其中  $k = 4, 5, 6$  分別對應到  $ij = 23, 31, 12$  如圖 2.7 所示， $x_{ij} = x_i - x_j$ ，

$y_{ij} = y_i - y_j$ 。

在  $\mathbf{H}_x$ 、 $\mathbf{H}_y$  的表示式中以及在(2.47)式中的  $N_i (i = 1-6)$  為[32]

$$N_1 = 2(1 - \xi - \eta)\left(\frac{1}{2} - \xi - \eta\right)$$

$$N_2 = \xi(2\xi - 1)$$

$$N_3 = \eta(2\eta - 1)$$

$$N_4 = 4\xi\eta$$

$$N_5 = 4\eta(1 - \xi - \eta)$$

$$N_6 = 4\xi(1 - \xi - \eta)$$

其中 $\xi$ 、 $\eta$ 是元素面積座標裡的 $L_2$ 與 $L_3$ [43]，如圖 C.1 所示。

在文獻[43]中元素面積座標的 $L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_3$ 分別為

$$L_1 = \frac{1}{2A}(x_2y_3 - x_3y_2 + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y)$$

$$L_2 = \frac{1}{2A}(x_3y_1 - x_1y_3 + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y)$$

$$L_3 = \frac{1}{2A}(x_1y_2 - x_2y_1 + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y)$$

$$2A = (x_2y_3 + x_3y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3)$$

其中 $x_1$ 、 $x_2$ 、 $x_3$ 、 $y_1$ 、 $y_2$ 、 $y_3$ 分別是元素三個端點在元素座標的座標值。

$L_1$ 、 $L_2$ 、 $L_3$ 對 $x$ 、 $y$ 的偏微分別為

$$\frac{\partial L_1}{\partial x} = y_2 - y_3$$

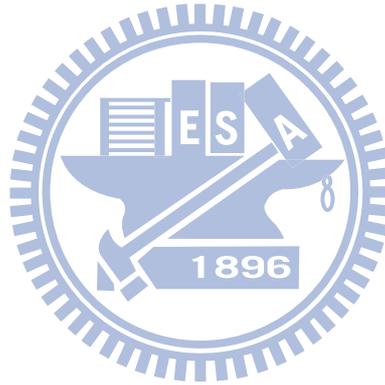
$$\frac{\partial L_2}{\partial x} = y_3 - y_1$$

$$\frac{\partial L_3}{\partial x} = y_1 - y_2$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial y} = x_3 - x_2$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial y} = x_1 - x_3$$

$$\frac{\partial L_3}{\partial y} = x_2 - x_1$$



因為 $\xi = L_2$ 、 $\eta = L_3$ 故

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = y_3 - y_1$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = x_1 - x_3$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = y_1 - y_2$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = x_2 - x_1$$

依照本文元素座標的定義， $x_1 = y_1 = y_2 = 0$

則  $\xi$ 、 $\eta$  對  $x$ 、 $y$  的偏微分別為

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = y_3 - y_1 = y_3$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = x_1 - x_3 = -x_3$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = y_1 - y_2 = 0$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = x_2 - x_1 = x_2$$

$\mathbf{H}_x$  與  $\mathbf{H}_y$  對  $\xi$  與  $\eta$  偏微的表示式如下

$$\mathbf{H}_{x,\xi} = \begin{bmatrix} P_6(1-2\xi) + (P_5 - P_6)\eta \\ q_6(1-2\xi) - (q_5 + q_6)\eta \\ -4 + 6(\xi + \eta) + r_6(1-2\xi) - \eta(r_5 + r_6) \\ -P_6(1-2\xi) + \eta(P_4 + P_6) \\ q_6(1-2\xi) - \eta(q_6 - q_4) \\ -2 + 6\xi + r_6(1-2\xi) + \eta(r_4 - r_6) \\ -\eta(P_5 + P_4) \\ \eta(q_4 - q_5) \\ -\eta(r_5 - r_4) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{y,\xi} = \begin{bmatrix} t_6(1-2\xi) + \eta(t_5 - t_6) \\ 1 + r_6(1-2\xi) - \eta(r_5 + r_6) \\ -q_6(1-2\xi) + \eta(q_5 + q_6) \\ -t_6(1-2\xi) + \eta(t_4 + t_6) \\ -1 + r_6(1-2\xi) + \eta(r_4 - r_6) \\ -q_6(1-2\xi) - \eta(q_4 - q_6) \\ -\eta(t_4 + t_5) \\ \eta(r_4 - r_5) \\ -\eta(q_4 - q_5) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{x,\eta} = \begin{bmatrix} -P_5(1-2\eta) - \xi(P_6 - P_5) \\ q_5(1-2\eta) - \xi(q_5 + q_6) \\ -4 + 6(\xi + \eta) + r_5(1-2\eta) - \xi(r_5 + r_6) \\ \xi(P_4 + P_6) \\ \xi(q_4 + q_6) \\ -\xi(r_6 - r_4) \\ P_5(1-2\eta) - \xi(P_4 + P_5) \\ q_5(1-2\eta) + \xi(q_4 - q_5) \\ -2 + 6\eta + r_5(1-2\eta) + \xi(r_4 - r_5) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{y,\eta} = \begin{bmatrix} -t_5(1-2\eta) - \xi(t_6 - t_5) \\ 1 + r_5(1-2\eta) - \xi(r_5 + r_6) \\ -q_5(1-2\eta) + \xi(q_5 + q_6) \\ \xi(t_4 + t_6) \\ \xi(r_4 - r_6) \\ -\xi(q_4 - q_6) \\ t_5(1-2\eta) - \xi(t_4 + t_5) \\ -1 + r_5(1-2\eta) + \xi(r_4 - r_5) \\ -q_5(1-2\eta) - \xi(q_4 - q_5) \end{bmatrix}$$

其中

$$P_k = \frac{-6x_{ij}}{l_{ij}^2} = 6a_k; \quad t_k = \frac{-6y_{ij}}{l_{ij}^2} = 6d_k; \quad q_k = \frac{3x_{ij}y_{ij}}{l_{ij}^2} = 4b_k; \quad r_k = \frac{3y_{ij}^2}{l_{ij}^2}$$

$k = 4, 5, 6$  分別對應到  $ij = 23, 31, 12$

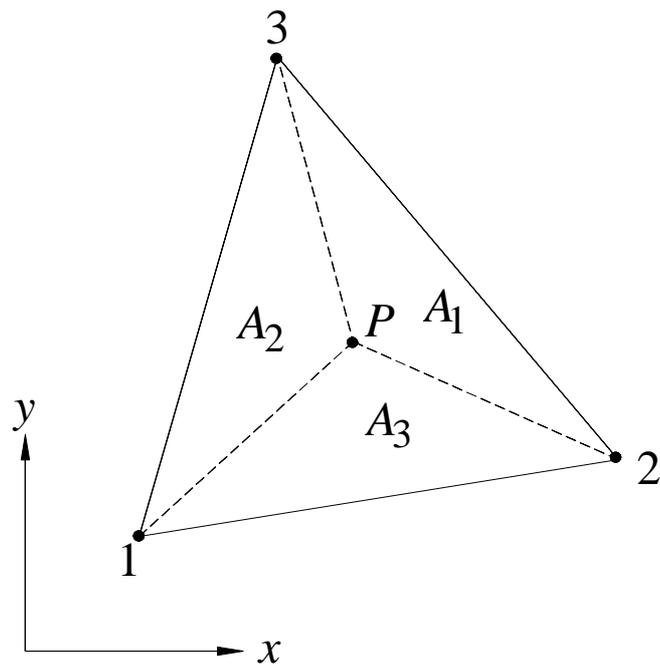


圖 C.1 元素面積座標的示意圖

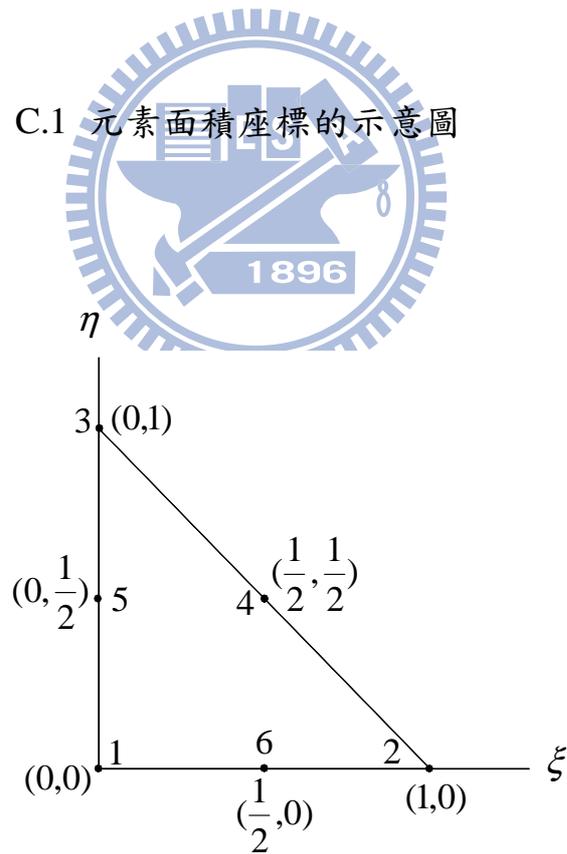


圖 C.2 殼元素節點的自然座標示意圖

## 附錄 D 元素幾何剛度矩陣

為了要推導精確的幾何剛度矩陣，必須考慮非線性的位移-應變關係，文獻[43]中以完整的 Green's strain 及 total Lagrangian 推導法推導出一三維元素之切線剛度矩陣的通式，本附錄將重複文獻[43]中的推導，並加以修改、簡化，使其適用於本研究採用的元素。

### D.1 元素非線性位移-應變轉換矩陣的推導

本附錄在座標系統  $x_i (i = 1, 2, 3)$  推導，令  $x$ 、 $y$ 、 $z$  為 Lagrange 座標，

$$\mathbf{u} = \{u \quad v \quad w\} \quad (\text{D.1})$$

為位移向量，其中  $u$ 、 $v$ 、 $w$  為  $x_i (i = 1, 2, 3)$  方向的位移分量。

由 Green's strain 的定義可得[47]：

$$\varepsilon_i = u_{,i} + \frac{1}{2}(u_{,i}^2 + v_{,i}^2 + w_{,i}^2) \quad i = x, y, z \quad (\text{D.2})$$

$$\gamma_{ij} = u_{,j} + v_{,i} + (u_{,i}u_{,j} + v_{,i}v_{,j} + w_{,i}w_{,j}) \quad i, j = x, y, z \quad i \neq j \quad (\text{D.3})$$

(D.1)和(D.2)式可寫成以下的向量式

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_L \quad (\text{D.4})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ w_{,z} \\ v_{,z} + w_{,y} \\ w_{,x} + u_{,z} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{Bmatrix} \quad (\text{D.5})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_L = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_x^t & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\theta}_y^t & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\theta}_z^t \\ 0 & \boldsymbol{\theta}_z^t & \boldsymbol{\theta}_y^t \\ \boldsymbol{\theta}_z^t & 0 & \boldsymbol{\theta}_x^t \\ \boldsymbol{\theta}_y^t & \boldsymbol{\theta}_x^t & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\theta}_x \\ \boldsymbol{\theta}_y \\ \boldsymbol{\theta}_z \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{A} \boldsymbol{\theta} \quad (\text{D.6})$$

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\theta}_x \\ \boldsymbol{\theta}_y \\ \boldsymbol{\theta}_z \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\theta}_x = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,x} \\ w_{,x} \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\theta}_y = \begin{Bmatrix} u_{,y} \\ v_{,y} \\ w_{,y} \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\theta}_z = \begin{Bmatrix} u_{,z} \\ v_{,z} \\ w_{,z} \end{Bmatrix} \quad (\text{D.7})$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_x^t & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\theta}_y^t & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\theta}_z^t \\ 0 & \boldsymbol{\theta}_z^t & \boldsymbol{\theta}_y^t \\ \boldsymbol{\theta}_z^t & 0 & \boldsymbol{\theta}_x^t \\ \boldsymbol{\theta}_y^t & \boldsymbol{\theta}_x^t & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D.8})$$

在有限元素法中，元素的位移  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{q})$ ，其中  $\mathbf{q}$  為元素的節點自由度向量

由(D.4)式可得：

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}_0 + d\boldsymbol{\varepsilon}_L = \mathbf{B}d\mathbf{q} \quad (\text{D.9})$$

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \mathbf{B}_0 d\mathbf{q} \quad (\text{D.10})$$

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_L = \mathbf{B}_L d\mathbf{q} \quad (\text{D.11})$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_L(\mathbf{q}) \quad (\text{D.12})$$

其中  $\mathbf{B}$  為元素的位移-應變關係矩陣， $\mathbf{B}_0$  為線性的位移-應變關係矩陣， $\mathbf{B}_L$

為非線性的位移-應變關係矩陣。

由(D.6)式可得：

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_L = \frac{1}{2} d\mathbf{A}\boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2} \mathbf{A}d\boldsymbol{\theta} = \mathbf{A}d\boldsymbol{\theta} \quad (\text{D.13})$$

將(2.37)式、(2.38)式、(2.41)式代入(D.7)式可得：

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{G}\mathbf{q} \quad (\text{D.14})$$

其中  $\mathbf{G}$  為  $\mathbf{u}-\boldsymbol{\theta}$  關係矩陣， $\mathbf{q}$  為元素節點自由度向量。

將(D.14)式代入(D.13)式可得：

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_L = \mathbf{A}\mathbf{G}d\mathbf{q} \quad (\text{D.15})$$

$$\mathbf{B}_L = \mathbf{A}\mathbf{G} \quad (\text{D.16})$$

## D.2 元素幾何剛度矩陣的推導

由虛功原理可得：

$$\delta \mathbf{q}^t \mathbf{f} = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^t \boldsymbol{\sigma} dV \quad (\text{D.17})$$

其中  $\mathbf{f}$  是元素對應於  $\delta \mathbf{q}$  的節點內力， $V$  是元素的體積。

將(D.9)式代入(D.17)式可得：

$$\mathbf{f} = \int_V \mathbf{B}^t \boldsymbol{\sigma} dV \quad (\text{D.18})$$

由(D.18)式可得：

$$d\mathbf{f} = \int_V d\mathbf{B}^t \boldsymbol{\sigma} dV + \int_V \mathbf{B}^t d\boldsymbol{\sigma} dV \quad (\text{D.19})$$

將(D.9)式代入(2.58)式可得：

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{E} \mathbf{B} d\mathbf{q} \quad (\text{D.20})$$

由(D.12)式可得：

$$d\mathbf{B} = d\mathbf{B}_L \quad (\text{D.21})$$

將(D.20)式、(D.21)式代入(D.19)式可得：

$$d\mathbf{f} = \int_V d\mathbf{B}_L^t \boldsymbol{\sigma} dV + \int_V \mathbf{B}^t \mathbf{E} \mathbf{B} d\mathbf{q} dV \quad (\text{D.22})$$

由(D.22)式可得：

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \mathbf{k}_L = \int_V \mathbf{B}^t \mathbf{E} \mathbf{B} dV = \int_V \mathbf{B}_0^t \mathbf{E} \mathbf{B}_0 dV + \int_V (\mathbf{B}_L^t \mathbf{E} \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_0^t \mathbf{E} \mathbf{B}_L) dV \quad (\text{D.23})$$

$$\mathbf{k}_\sigma d\mathbf{q} \equiv \int_V d\mathbf{B}_L^t \boldsymbol{\sigma} dV \quad (\text{D.24})$$

其中  $\mathbf{k}$  為切線剛度矩陣， $\mathbf{k}_0$  為小位移剛度矩陣 (small displacement stiffness matrix)， $\mathbf{k}_L$  為初始位移矩陣或大位移矩陣 (initial displacement matrix or large displacement matrix)， $\mathbf{k}_\sigma$  為元素幾何剛度矩陣。

將(D.16)式代入(D.24)式可得：

$$\mathbf{k}_\sigma d\mathbf{u} = \int_V d\mathbf{B}_L^t \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \mathbf{G}^t d\mathbf{A}^t \boldsymbol{\sigma} dV \quad (\text{D.25})$$

將(D.8)式、(D.14)式代入(D.25)式可得：

$$d\mathbf{A}'\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} d\boldsymbol{\theta}_x & 0 & 0 & 0 & d\boldsymbol{\theta}_z & d\boldsymbol{\theta}_y \\ 0 & d\boldsymbol{\theta}_y & 0 & d\boldsymbol{\theta}_z & 0 & d\boldsymbol{\theta}_x \\ 0 & 0 & d\boldsymbol{\theta}_z & d\boldsymbol{\theta}_y & d\boldsymbol{\theta}_x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \sigma_x d\boldsymbol{\theta}_x + \tau_{xy} d\boldsymbol{\theta}_y + \tau_{zx} d\boldsymbol{\theta}_z \\ \tau_{xy} d\boldsymbol{\theta}_x + \sigma_y d\boldsymbol{\theta}_y + \tau_{yz} d\boldsymbol{\theta}_z \\ \tau_{zx} d\boldsymbol{\theta}_x + \tau_{yz} d\boldsymbol{\theta}_y + \sigma_z d\boldsymbol{\theta}_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x \mathbf{I} & \tau_{xy} \mathbf{I} & \tau_{zx} \mathbf{I} \\ \tau_{xy} \mathbf{I} & \sigma_y \mathbf{I} & \tau_{yz} \mathbf{I} \\ \tau_{zx} \mathbf{I} & \tau_{yz} \mathbf{I} & \sigma_z \mathbf{I} \end{bmatrix} d\boldsymbol{\theta} = \mathbf{M} \mathbf{G} d\mathbf{q} \quad (\text{D.26})$$

$$\text{其中 } \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \sigma_x \mathbf{I} & \tau_{xy} \mathbf{I} & \tau_{zx} \mathbf{I} \\ \tau_{xy} \mathbf{I} & \sigma_y \mathbf{I} & \tau_{yz} \mathbf{I} \\ \tau_{zx} \mathbf{I} & \tau_{yz} \mathbf{I} & \sigma_z \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \mathbf{I} \text{ 為 } 3 \times 3 \text{ 單位矩陣} \quad (\text{D.27})$$

將(D.26)式代入(D.25)可得：

$$\mathbf{k}_\sigma = \int_V \mathbf{G}' \mathbf{M} \mathbf{G} dV \quad (\text{D.28})$$

以本研究使用的 QST 元素與 DKT 元素疊加成一殼元素當作例子，假如僅考慮殼元素面內應力  $\sigma_x$ 、 $\sigma_y$  及  $\tau_{xy}$ ，則(D.7)、(D.27)退化成：

$$\boldsymbol{\theta} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\theta}_x \\ \boldsymbol{\theta}_y \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\theta}_x = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,x} \\ w_{,x} \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\theta}_y = \begin{Bmatrix} u_{,y} \\ v_{,y} \\ w_{,y} \end{Bmatrix} \quad (\text{D.29})$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \sigma_x \mathbf{I} & \tau_{xy} \mathbf{I} \\ \tau_{xy} \mathbf{I} & \sigma_y \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \mathbf{I} \text{ 為 } 3 \times 3 \text{ 單位矩陣} \quad (\text{D.30})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\} = \boldsymbol{\sigma}_m + \boldsymbol{\sigma}_b \quad (\text{D.31})$$

$$\boldsymbol{\sigma}_m = \{\sigma_x^m \quad \sigma_y^m \quad \tau_{xy}^m\} \quad \boldsymbol{\sigma}_b = \{\sigma_x^b \quad \sigma_y^b \quad \tau_{xy}^b\} \quad (\text{D.32})$$

其中  $\boldsymbol{\sigma}_m$ 、 $\boldsymbol{\sigma}_b$  為(2.66)式、(2.74)式之 QST 平面元素及 DKT 板元素的應力場。

### D.3 元素幾何剛度矩陣的使用

因為 DKT 板元素缺少側向位移場  $w$ ，所以假設為線性位移場  $w = \mathbf{N}_w \mathbf{u}_b$ ：

$$w_{,x} = \mathbf{N}_{w,x} \mathbf{u}_b \quad \text{其中 } \mathbf{N}_{w,x} = \{-y_3 \ y_3 \ 0\} \quad (\text{D.33})$$

$$w_{,y} = \mathbf{N}_{w,y} \mathbf{u}_b \quad \text{其中 } \mathbf{N}_{w,y} = \{-x_2 + x_3 \ -x_3 \ x_2\} \quad (\text{D.34})$$

將(D.33)式、(D.34)式、(2.37)式、(2.38)式、(2.41)式代入(D.29)可得：

$$u_{,x} = u_{m,x} + u_{b,x} = \mathbf{N}_{u\theta,x} \mathbf{q}_\theta + z \mathbf{H}_{x,x} \mathbf{u}_b \quad (\text{D.35})$$

$$v_{,x} = v_{m,x} + v_{b,x} = \mathbf{N}_{v\theta,x} \mathbf{q}_\theta + z \mathbf{H}_{y,x} \mathbf{u}_b \quad (\text{D.36})$$

$$w_{,x} = \mathbf{N}_{w,x} \mathbf{u}_b \quad (\text{D.37})$$

$$u_{,y} = u_{m,y} + u_{b,y} = \mathbf{N}_{u\theta,y} \mathbf{q}_\theta + z \mathbf{H}_{x,y} \mathbf{u}_b \quad (\text{D.38})$$

$$v_{,y} = v_{m,y} + v_{b,y} = \mathbf{N}_{v\theta,y} \mathbf{q}_\theta + z \mathbf{H}_{y,y} \mathbf{u}_b \quad (\text{D.39})$$

$$w_{,y} = \mathbf{N}_{w,y} \mathbf{u}_b \quad (\text{D.40})$$

將(D.35)式至(D.40)式代入(D.14)可得：

$$\mathbf{G} = \{\mathbf{G}_1 \ \mathbf{G}_2 \ \mathbf{G}_3\} \quad \text{其中 } \mathbf{G}_j = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{u\theta_j,x} & z \mathbf{H}_{xj,x} \\ \mathbf{N}_{v\theta_j,x} & z \mathbf{H}_{yj,x} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_{wj,x} \\ \mathbf{N}_{u\theta_j,y} & z \mathbf{H}_{xj,y} \\ \mathbf{N}_{v\theta_j,y} & z \mathbf{H}_{yj,y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_{wj,y} \end{bmatrix} \quad (\text{D.41})$$

$$\mathbf{q} = \{\mathbf{q}_1 \ \mathbf{q}_2 \ \mathbf{q}_3\} \quad \text{其中 } \mathbf{q}_j = \{\mathbf{q}_{\theta_j} \ \mathbf{u}_{bj}\} \quad (\text{D.42})$$

將(D.41)式代入(D.28)式可得：

$$\mathbf{k}_\sigma = \int_V \begin{bmatrix} \mathbf{G}'_1 \mathbf{M} \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}'_1 \mathbf{M} \mathbf{G}_2 & \mathbf{G}'_1 \mathbf{M} \mathbf{G}_3 \\ \mathbf{G}'_2 \mathbf{M} \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}'_2 \mathbf{M} \mathbf{G}_2 & \mathbf{G}'_2 \mathbf{M} \mathbf{G}_3 \\ \mathbf{G}'_3 \mathbf{M} \mathbf{G}_1 & \mathbf{G}'_3 \mathbf{M} \mathbf{G}_2 & \mathbf{G}'_3 \mathbf{M} \mathbf{G}_3 \end{bmatrix} dV$$

$$[\mathbf{k}_{\sigma ij}] = \int_V [\mathbf{G}'_i \mathbf{M} \mathbf{G}_j] dV \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{D.43})$$

將(D.41)式改寫成：

$$\mathbf{G}_j = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{j11} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} z\mathbf{G}_{j12} \\ \mathbf{G}_{j22} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{j31} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} z\mathbf{G}_{j32} \\ \mathbf{G}_{j42} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (\text{D.44})$$

將(D.31)式、(D.44)式代入(D.43)可得：

$$\mathbf{k}_{\sigma j} = \int_V \mathbf{G}_i^t \mathbf{M} \mathbf{G}_j dV = \int_A \int_z \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} dz dA \quad (\text{D.45})$$

$$\text{其中 } \mathbf{G}_i^t = \begin{bmatrix} [\mathbf{G}_{i11}^t \ \mathbf{0}] & [\mathbf{G}_{i31}^t \ \mathbf{0}] \\ [z\mathbf{G}_{i12}^t \ \mathbf{G}_{i22}^t] & [z\mathbf{G}_{i32}^t \ \mathbf{G}_{i42}^t] \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} \mathbf{G}_j = \begin{bmatrix} \sigma_x \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{j11} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \tau_{xy} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{j31} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \sigma_x \begin{bmatrix} z\mathbf{G}_{j12} \\ \mathbf{G}_{j22} \end{bmatrix} + \tau_{xy} \begin{bmatrix} z\mathbf{G}_{j32} \\ \mathbf{G}_{j42} \end{bmatrix} \\ \tau_{xy} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{j11} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \sigma_y \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{j31} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \tau_{xy} \begin{bmatrix} z\mathbf{G}_{j12} \\ \mathbf{G}_{j22} \end{bmatrix} + \sigma_y \begin{bmatrix} z\mathbf{G}_{j32} \\ \mathbf{G}_{j42} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

由(D.45)式利用  $\int_{-h/2}^{h/2} dz = h$ 、 $\int_{-h/2}^{h/2} z dz = 0$ 、 $\int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{h^3}{12}$ 、 $\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_b dz = 0$  可得：

$$\int_z \mathbf{A} dz = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x [\mathbf{G}_{i11}^t \ \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{j11} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \tau_{xy} [\mathbf{G}_{i11}^t \ \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{j31} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \tau_{xy} [\mathbf{G}_{i31}^t \ \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{j11} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \sigma_y [\mathbf{G}_{i31}^t \ \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{j31} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}) dz$$

$$= h[\sigma_x^m \mathbf{G}_{i11}^t \mathbf{G}_{j11} + \sigma_y^m \mathbf{G}_{i31}^t \mathbf{G}_{j31} + \tau_{xy}^m (\mathbf{G}_{i11}^t \mathbf{G}_{j31} + \mathbf{G}_{i31}^t \mathbf{G}_{j11})] \quad (\text{D.46})$$

$$\begin{aligned} \int_z \mathbf{B} dz &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x [\mathbf{G}_{i11}^t \ \mathbf{0}] \begin{bmatrix} z\mathbf{G}_{j12} \\ \mathbf{G}_{j22} \end{bmatrix} + \tau_{xy} [\mathbf{G}_{i11}^t \ \mathbf{0}] \begin{bmatrix} z\mathbf{G}_{j32} \\ \mathbf{G}_{j42} \end{bmatrix} \\ &\quad + \tau_{xy} [\mathbf{G}_{i31}^t \ \mathbf{0}] \begin{bmatrix} z\mathbf{G}_{j12} \\ \mathbf{G}_{j22} \end{bmatrix} + \sigma_y [\mathbf{G}_{i31}^t \ \mathbf{0}] \begin{bmatrix} z\mathbf{G}_{j32} \\ \mathbf{G}_{j42} \end{bmatrix}) dz \\ &= (\int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x^b dz) \mathbf{G}_{i11}^t \mathbf{G}_{j12} + (\int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_y^b dz) \mathbf{G}_{i31}^t \mathbf{G}_{j32} \\ &\quad + (\int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{xy}^b dz) (\mathbf{G}_{i11}^t \mathbf{G}_{j32} + \mathbf{G}_{i31}^t \mathbf{G}_{j12}) \end{aligned} \quad (\text{D.47})$$

$$\begin{aligned}
\int_z \mathbf{C} dz &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x [z \mathbf{G}_{i12}^t \quad \mathbf{G}_{i22}^t] \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{j11} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \tau_{xy} [z \mathbf{G}_{i12}^t \quad \mathbf{G}_{i22}^t] \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{j31} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
&+ \tau_{xy} [z \mathbf{G}_{i32}^t \quad \mathbf{G}_{i42}^t] \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{j11} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \sigma_y [z \mathbf{G}_{i32}^t \quad \mathbf{G}_{i42}^t] \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{j31} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}) dz \\
&= (\int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x^b dz) \mathbf{G}_{i12}^t \mathbf{G}_{j11} + (\int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_y^b dz) \mathbf{G}_{i32}^t \mathbf{G}_{j31} \\
&+ (\int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{xy}^b dz) (\mathbf{G}_{i12}^t \mathbf{G}_{j31} + \mathbf{G}_{i32}^t \mathbf{G}_{j11}) \tag{D.48}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_z \mathbf{D} dz &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x [z \mathbf{G}_{i12}^t \quad \mathbf{G}_{i22}^t] \begin{bmatrix} z \mathbf{G}_{j12} \\ \mathbf{G}_{j22} \end{bmatrix} + \tau_{xy} [z \mathbf{G}_{i12}^t \quad \mathbf{G}_{i22}^t] \begin{bmatrix} z \mathbf{G}_{j32} \\ \mathbf{G}_{j42} \end{bmatrix} \\
&+ \tau_{xy} [z \mathbf{G}_{i32}^t \quad \mathbf{G}_{i42}^t] \begin{bmatrix} z \mathbf{G}_{j12} \\ \mathbf{G}_{j22} \end{bmatrix} + \sigma_y [z \mathbf{G}_{i32}^t \quad \mathbf{G}_{i42}^t] \begin{bmatrix} z \mathbf{G}_{j32} \\ \mathbf{G}_{j42} \end{bmatrix}) dz \\
&= h [\sigma_x^m \mathbf{G}_{i22}^t \mathbf{G}_{j22} + \sigma_y^m \mathbf{G}_{i42}^t \mathbf{G}_{j42} + \tau_{xy}^m (\mathbf{G}_{i22}^t \mathbf{G}_{j42} + \mathbf{G}_{i42}^t \mathbf{G}_{j22})] \\
&+ \frac{h^3}{12} [\sigma_x^m \mathbf{G}_{i12}^t \mathbf{G}_{j12} + \sigma_y^m \mathbf{G}_{i32}^t \mathbf{G}_{j32} + \tau_{xy}^m (\mathbf{G}_{i12}^t \mathbf{G}_{j32} + \mathbf{G}_{i32}^t \mathbf{G}_{j12})] \tag{D.49}
\end{aligned}$$

由(2.74)式、(2.77)式可得(D.47)、(D.48)中的積分式，並可表示如下：

$$\int z \sigma_b dz = \int z^2 \mathbf{E} \mathbf{B}_b \mathbf{u}_b dz = (\int_{-h/2}^{h/2} z^2 \mathbf{E} dz) \mathbf{B}_b \mathbf{u}_b = \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b \mathbf{u}_b \tag{D.50}$$

## 附錄 E 等效節點外力(equivalent external nodal force)

### E.1 元素等效節點外力

考慮元素邊 12 受到在元素平面上平行於邊 12 的分佈力  $t_t$  與垂直於邊 12 的分佈力  $t_n$ ，如圖 E.1(a)與圖 E.1(b)所示。其中  $t_t$  的方向以元素節點 1 與元素節點 2 的連線方向為正， $t_n$  的方向以朝元素外的方向為正。則邊 12 上所受到的分佈力，可以寫成  $x_1^E$ 、 $x_2^E$  方向的分量

$$t_x = t_t \quad (\text{E.1})$$

$$t_y = -t_n \quad (\text{E.2})$$

邊 12 上的位移場可以將面積座標  $\eta = 0$  代入(2.26)式與(2.27)式得出

$$\bar{u} = \bar{\mathbf{N}}_u^t \mathbf{T}_{\xi\theta} \mathbf{q}_\theta \quad (\text{E.3})$$

$$\bar{v} = \bar{\mathbf{N}}_v^t \mathbf{T}_{\xi\theta} \mathbf{q}_\theta \quad (\text{E.4})$$

$$\bar{\mathbf{N}}_u = \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} \bar{N}_1 & 0 & \bar{N}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{N}_4 & 0 & \bar{N}_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\} \quad (\text{E.5})$$

$$\bar{\mathbf{N}}_v = \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} 0 & \bar{N}_1 & 0 & 0 & \bar{N}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{N}_4 & 0 & 0 & \bar{N}_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\} \quad (\text{E.6})$$

$$\bar{N}_1 = (1 + 2\xi)(1 - \xi)^2 \quad (\text{E.7})$$

$$\bar{N}_2 = \xi(1 - \xi)^2 \quad (\text{E.8})$$

$$\bar{N}_3 = (3 - 2\xi)\xi^2 \quad (\text{E.9})$$

$$\bar{N}_4 = (\xi - 1)\xi^2 \quad (\text{E.10})$$

其中  $0 \leq \xi \leq 1$ ，另外(E.3)式與(E.4)式中的  $\mathbf{T}_{\xi\theta}$  在(2.28)式已有定義，該矩陣有些項的值雖與元素節點 3 的座標值有關，但是與這些項對應的形狀函數皆為 0，所以  $\bar{u}$ 、 $\bar{v}$  不受元素節點 3 的位置影響。由虛功原理可得[42]

$$\delta \mathbf{q}_\theta^t \mathbf{f}_P = \int_A (\delta \bar{u}^t t_x + \delta \bar{v}^t t_y) dA \quad (\text{E.11})$$

將(E.1)至(E.4)式代入(E.11)式可得

$$\delta \mathbf{q}_\theta^t \mathbf{f}_p = \delta \mathbf{q}_\theta^t \mathbf{T}_{\xi\theta}^t \int_A (t_t \bar{\mathbf{N}}_u - t_n \bar{\mathbf{N}}_v) dA \quad (\text{E.12})$$

由(E.12)式可得

$$\mathbf{f}_p = \mathbf{T}_{\xi\theta}^t \int_A (t_t \bar{\mathbf{N}}_u - t_n \bar{\mathbf{N}}_v) dA \quad (\text{E.13})$$

在(E.13)式中的受力面積  $dA$  為

$$dA = tL_{12} d\xi \quad (\text{E.14})$$

其中  $L_{12}$  為邊 12 的長度。將(E.14)式代入(E.13)式可得

$$\mathbf{f}_p = tL_{12} \mathbf{T}_{\xi\theta}^t \int_0^1 (t_t \bar{\mathbf{N}}_u - t_n \bar{\mathbf{N}}_v) d\xi \quad (\text{E.15})$$

## E.2 結構分佈力之等效節點外力

如圖 E.2、圖 E.3 與圖 E.4 所示，考慮邊 AB 被  $m+1$  個節點由節點 A 向節點 B 離散成等長的  $m$  段，則邊 AB 的長度與(E.15)式中的  $L_{12}$  之關係為

$$L_{AB} = mL_{12} \quad (\text{E.16})$$

將(E.16)式代入(E.15)式中，並將  $t_t$  與  $t_n$  分開寫成

$$\mathbf{f}_t = \frac{tL_{AB}}{m} \mathbf{T}_{\xi\theta}^t \int_0^1 t_t \bar{\mathbf{N}}_u d\xi \quad (\text{E.17})$$

$$\mathbf{f}_n = -\frac{tL_{AB}}{m} \mathbf{T}_{\xi\theta}^t \int_0^1 t_n \bar{\mathbf{N}}_v d\xi \quad (\text{E.18})$$

在本文例題中負荷分佈情形最高為二次變化，因此以下將就不同負荷分佈作分類：

### 1. 均勻分佈力(uniform distributed surface traction)

(1) 邊 AB 受到平行於邊的均勻分佈力，如圖 E.2(a)所示，其合力大小為  $f_{ut}$ ，

則第  $k$  段所受分佈力可表示成：

$${}^k t_t = \frac{f_{ut}}{tL_{AB}} \quad (\text{E.19})$$

將(E.19)式代入(E.17)式並積分可得

$${}^k \mathbf{f}_t = \frac{f_{ut}}{m} \mathbf{T}_{\xi\theta}^t \mathbf{F}_1 \quad (\text{E.20})$$

$$\mathbf{F}_1 = \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} 1/2 & 0 & 1/12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\} \quad (\text{E.21})$$

$${}^k \mathbf{f}_t = \frac{f_{ut}}{m} \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} 1/2 & 0 & x_{21}/12 & 0 & y_{21}/24 & -y_{21}/12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -x_{21}/12 & 0 & -y_{21}/24 & y_{21}/12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\} \quad (\text{E.22})$$

(2)邊 AB 受到垂直於邊的均勻分佈力，如圖 E.2(b)所示，其合力大小為  $f_{un}$ ，則第  $k$  段所受分佈力可表示成：

$${}^k t_n = \frac{f_{un}}{tL_{AB}} \quad (\text{E.23})$$

將(E.23)式代入(E.18)式並積分可得

$${}^k \mathbf{f}_n = -\frac{f_{un}}{m} \mathbf{T}_{\xi\theta}^t \mathbf{F}_2 \quad (\text{E.24})$$

$$\mathbf{F}_2 = \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & -1/12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\} \quad (\text{E.25})$$

$${}^k \mathbf{f}_n = -\frac{f_{un}}{m} \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 1/2 & 0 & y_{21}/12 & x_{21}/24 & x_{21}/12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & -y_{21}/12 & -x_{21}/24 & -x_{21}/12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\} \quad (\text{E.26})$$

## 2.二次分佈力(quadratic distributed surface traction)

(1)邊 AB 受到平行於邊的二次分佈力，如圖 E.3(a)所示，其合力大小為  $f_{qt}$ ，且在 A 點與 B 點的分佈力大小為 0，則第  $k$  段所受分佈力可用面積座標  $\xi$  表示成：

$${}^k t_t = \frac{6f_{qt}}{tm^2 L_{AB}} (k + \xi - 1)(m - k - \xi + 1) \quad (\text{E.27})$$

將(E.27)式代入(E.17)式並積分可得

$${}^k \mathbf{f}_t = \frac{f_{qt}}{m^3} \mathbf{T}_{\xi\theta}^t \mathbf{F}_3 \quad (\text{E.28})$$

$$\mathbf{F}_3 = \frac{1}{10} \{ a_1 \quad 0 \quad a_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ a_3 \quad 0 \quad a_4 \quad 0 \} \quad (\text{E.29})$$

$${}^k \mathbf{f}_t = \frac{f_{qt}}{10m^3} \{ a_1 \quad 0 \quad a_2 x_{21} \quad 0 \quad a_2 y_{21}/2 \quad -a_2 y_{21} \\ a_3 \quad 0 \quad a_4 x_{21} \quad 0 \quad a_4 y_{21}/2 \quad -a_4 y_{21} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \} \quad (\text{E.30})$$

$$a_1 = -30k^2 + 30km + 42k - 21m - 16 \quad (\text{E.31})$$

$$a_2 = -5k^2 + 5km + 6k - 3m - 2 \quad (\text{E.32})$$

$$a_3 = -30k^2 + 30km + 18k - 9m - 4 \quad (\text{E.33})$$

$$a_4 = 5k^2 - 5km - 4k + 2m + 1 \quad (\text{E.34})$$

(2) 邊 AB 受到垂直於邊的二次分佈力，如圖 E.3(b) 所示，其合力大小為  $f_{qn}$ ，且在 A 點與 B 點的分佈力大小為 0，則第  $k$  段所受分佈力可用面積座標  $\xi$  表示成：

$${}^k t_n = \frac{6f_{qn}}{tm^2 L_{AB}} (k + \xi - 1)(m - k - \xi + 1) \quad (\text{E.35})$$

將(E.35)式代入(E.18)式並積分可得

$${}^k \mathbf{f}_n = -\frac{f_{qn}}{m^3} \mathbf{T}_{\xi\theta}^t \mathbf{F}_4 \quad (\text{E.36})$$

$$\mathbf{F}_4 = \frac{1}{10} \{ 0 \quad a_1 \quad 0 \quad 0 \quad a_2 \quad 0 \\ 0 \quad a_3 \quad 0 \quad 0 \quad a_4 \quad 0 \} \quad (\text{E.37})$$

$${}^k \mathbf{f}_n = -\frac{f_{qn}}{10m^3} \{ 0 \quad a_1 \quad 0 \quad a_2 y_{21} \quad a_2 x_{21}/2 \quad a_2 x_{21} \\ 0 \quad a_3 \quad 0 \quad a_4 y_{21} \quad a_4 x_{21}/2 \quad a_4 x_{21} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \} \quad (\text{E.38})$$



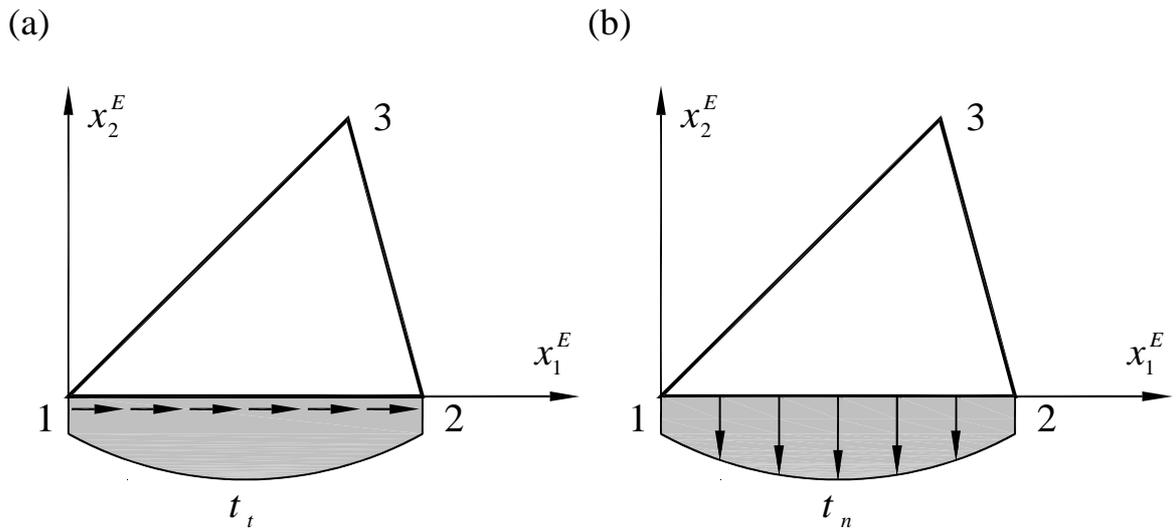


圖 E.1 元素受力示意圖 (a)  $\sigma_t$  (b)  $\sigma_n$

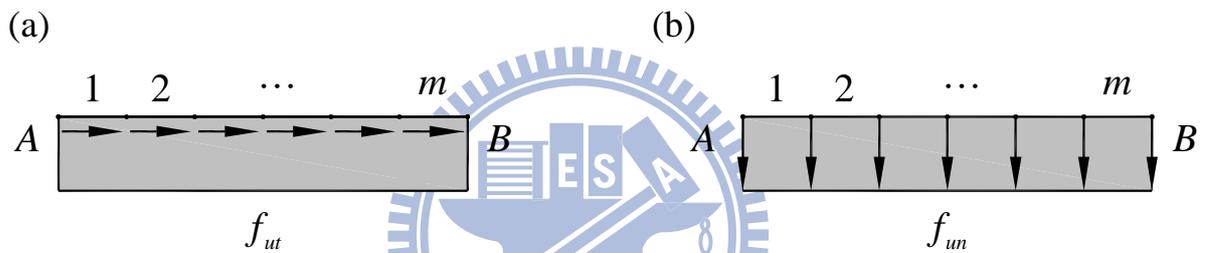


圖 E.2 均勻分佈力示意圖 (a)  $f_{ut}$  (b)  $f_{un}$

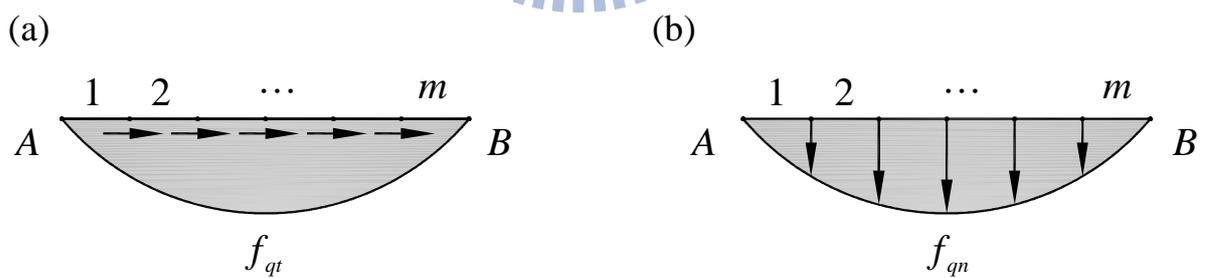


圖 E.3 二次分佈力示意圖 (a)  $f_{qt}$  (b)  $f_{qn}$

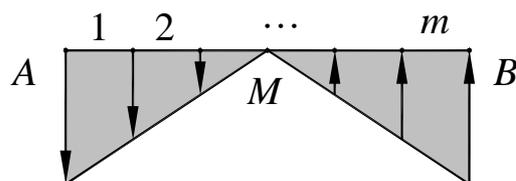


圖 E.4 純彎分佈力示意圖

## 附錄 F Battini 所使用的元素座標系統[49]

元素座標系統為原點在形心  $O$ ，並且當前變形位置元素座標軸轉  $\alpha$  角使得當前變形位置的元素各節點對應初始未變形時的元素各節點的距離平方和為最小，如圖 F.1 所示。

當前變形位置元素座標軸轉  $\alpha$  角後， $\alpha$  角逆時鐘方向為正，元素各節點  $j$  座標值的關係式：

$$\bar{x}_j = \cos \alpha x_j + \sin \alpha y_j \quad (\text{F.1})$$

$$\bar{y}_j = -\sin \alpha x_j + \cos \alpha y_j \quad (\text{F.2})$$

當前變形位置元素各節點  $j$  座標值表示為  $(x_j, y_j)$ ，當前變形位置元素座標軸轉  $\alpha$  角後元素各節點  $j$  座標值表示為  $(\bar{x}_j, \bar{y}_j)$ 。

當前變形位置元素座標軸轉  $\alpha$  角後的當前變形位置的元素各節點對應初始未變形時的元素各節點的距離平方和：

$$\sum_{j=1}^3 [(\bar{x}_j - {}^0x_j)^2 + (\bar{y}_j - {}^0y_j)^2] \quad (\text{F.3})$$

初始未變形時的元素各節點  $j$  座標值表示為  $({}^0x_j, {}^0y_j)$ 。

(F.1)和(F.2)代入(F.3)可得：

$$\sum_{j=1}^3 [(\cos \alpha x_j + \sin \alpha y_j - {}^0x_j)^2 + (-\sin \alpha x_j + \cos \alpha y_j - {}^0y_j)^2] \quad (\text{F.4})$$

(F.4)對  $\alpha$  微分可得：

$$\sum_{j=1}^3 [(\sin \alpha x_j - \cos \alpha y_j) {}^0x_j + (\cos \alpha x_j + \sin \alpha y_j) {}^0y_j] \quad (\text{F.5})$$

令(F.5)為 0 可得：

$$\tan \alpha = \frac{\sum_{j=1}^3 (x_j^0 y_j - y_j^0 x_j)}{\sum_{j=1}^3 (x_j^0 y_j + y_j^0 x_j)} \quad (\text{F.6})$$

此時當前變形位置元素座標軸轉 $\alpha$ 角使得當前變形位置的元素各節點對應初始未變形時的元素各節點的距離平方和為最小。

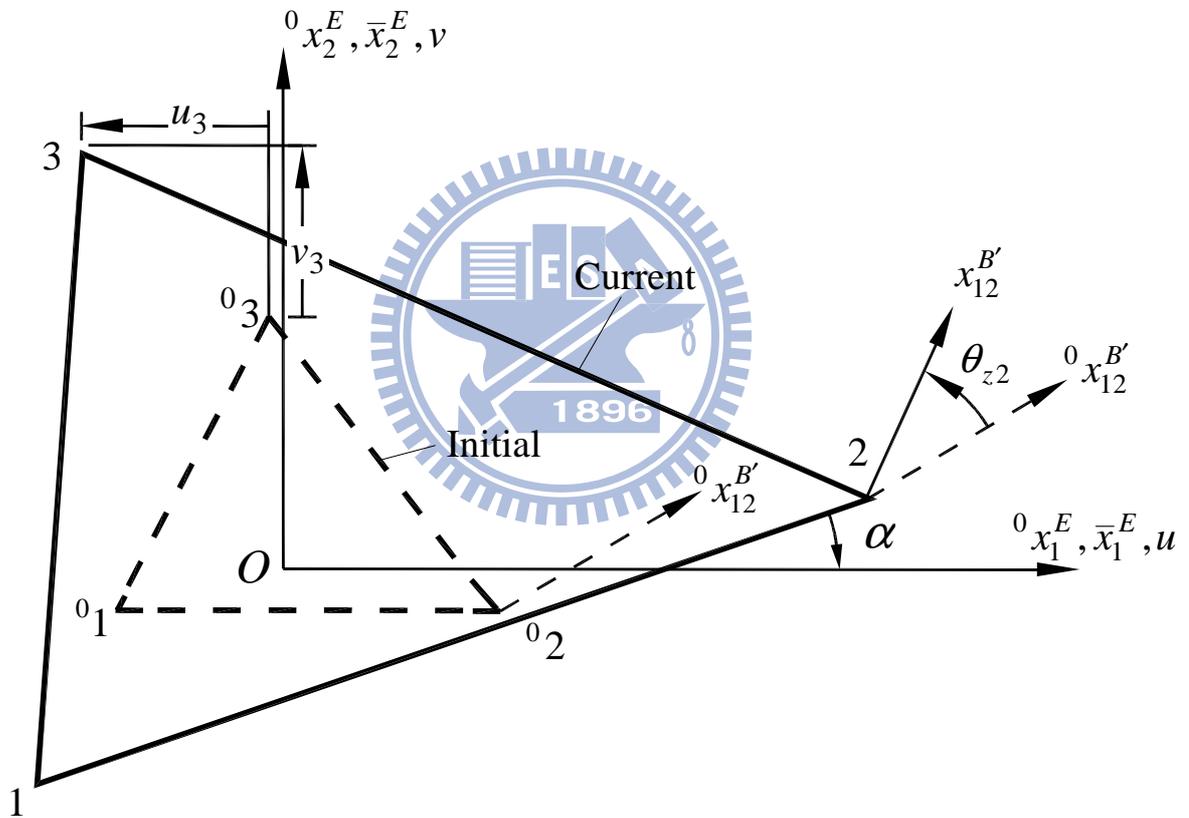


圖 F.1 元素變形示意圖