

國立交通大學

機械工程學系碩士班

碩士論文

以有限元素法分析三維旋轉傾斜尤拉梁的穩態變形



Steady State and Free Vibration Analysis of a Three Dimensional
Rotating Inclined Euler Beam by Finite Element Method

研究生：蔡秉宏

指導教授：蕭國模 博士

中華民國九十九年九月

以有限元素法分析三維旋轉傾斜尤拉梁的穩態變形與自由振動
Steady State and Free Vibration Analysis of a Three Dimensional
Rotating Inclined Euler Beam by Finite Element Method

研究生：蔡秉宏

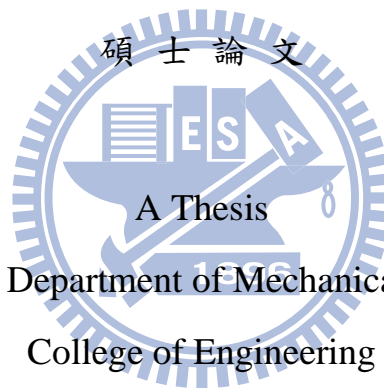
Student： Ping-Hong Tsai

指導教授：蕭國模 博士

Advisor： Dr. Kuo-Mo Hsiao

國立交通大學

機械工程學系碩士班



Submitted to Department of Mechanical Engineering
College of Engineering

National Chiao Tung University

in Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master of Science

in

Mechanical Engineering

September 2010

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十九年九月

以有限元素法分析三維旋轉傾斜尤拉梁的穩態變形與

自由振動

Steady State and Free Vibration Analysis of a Three Dimensional

Rotating Inclined Euler Beam by Finite Element Method

研究生：蔡秉宏

指導教授：蕭國模博士

國立交通大學機械工程學系碩士班



本研究主要利用共旋轉有限元素法結合浮動框架法（floating frame method）推導旋轉傾斜尤拉梁的運動方程式，探討具任意傾斜角與設定角之等速旋轉傾斜尤拉梁的穩態變形及以該穩態變形為平衡點的自然振動頻率。

本文將旋轉梁的運動方程式建立在一個剛接在其轉軸的總體座標上，本文在梁元素當前的變形位置上建立元素座標，當前的元素座標與總體座標有相同的速度、加速度、角速度、角加速度。本文利用非線性梁理論的一致線性化、d'Alembert 原理和虛功原理在當前的元素座標上推導梁元素的節點變形力、節點慣性力。元素的剛度矩陣是由元素的節點變形力對節點參數的微分求得，元素的向心力剛度矩陣(centripetal stiffness matrix)、質量

矩陣(mass matrix)、陀螺矩陣(gyroscopic matrix) 是由元素的節點慣性力分別對節點參數的微分、節點參數對時間之二次微分的微分、節點參數對時間之一次微分的微分求得。為考慮軸向、扭轉及兩個撓曲變形間的耦合，元素的節點變形力中保留節點參數和其微分到二次項以及扭轉率的三次項，因本穩考慮之振動為微小的振動，元素的節點慣性力中僅保留節點參數和其對時間之微分到一次項。

將系統的非線性運動方程式中對時間的微分項去掉即為系統的穩態平衡方程式，將系統的運動方程式用泰勒級數在穩態變形的位置展開，取到一次項，即為旋轉梁微小振動的運動方程式。

本文利用基於牛頓法的增量迭代法求出軸向、扭轉及兩個側向位移的穩態解。旋轉傾斜梁的頻率方程式為一組代數齊次方程式，該組齊次方程式為一個二次特徵值問題，其係數形成之矩陣的行列式為零時的根，即為自然振動頻率，因該組方程式中存在陀螺矩陣，故其自然振動頻率所對應的振動模態為複變數。本文以二分法來求行列式為零時的根。

本研究以無因次化的數值例題，探討不同梁斷面、設定角、傾斜角、無因次旋轉速度以及無因次轉軸半徑對旋轉 Euler 梁之穩態變形、自然頻率及振態的影響。

Steady State and Free Vibration Analysis of a Three Dimensional Rotating
Inclined Euler Beam by Finite Element Method

Student : Ping-Hong Tsai

Advisor : Dr. Kuo-Mo Hsiao

Department of Mechanical Engineering

National Chiao Tung University

Abstract

In this paper a co-rotational finite element formulation combined with the floating frame method is proposed to derive the equations of motion for a rotating inclined Euler beam at constant angular velocity. The steady state deformation and natural frequency of the infinitesimal free vibration measured from the position of the corresponding steady state deformation are investigated for rotating inclined Euler beams with arbitrary setting angle and inclination angle.

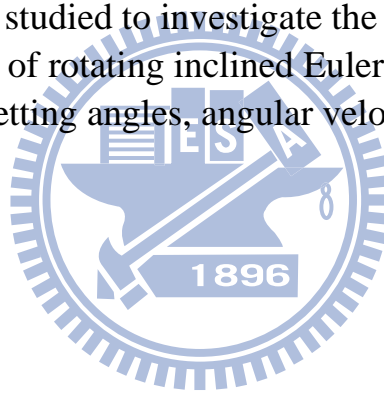
The equations of motion of the rotating beam are defined in a global moving coordinates rigidly tied to the hub of the rotating beam. The element coordinates are constructed at the current configuration of the beam element. The velocity, acceleration, angular velocity, and angular acceleration of the current element coordinates are set to be the same as those of the global coordinates of the rotating beam. The element deformation nodal forces and inertia nodal forces are systematically derived by consistent linearization of the fully geometrically non-linear beam theory using the d'Alembert principle and the virtual work principle in the current element coordinates. The element stiffness matrix may be obtained by differentiating the element deformation nodal forces with respect to the element nodal parameters. The element centripetal stiffness matrix, mass matrix, and gyroscopic matrix may be obtained by differentiating the element inertia nodal forces with respect to the element nodal parameters, the second time derivative of the element nodal parameters and the first time derivative of the element nodal parameters, respectively. In order to include the nonlinear coupling among the bending, torsional, and stretching deformations, the terms up to the second order of deformation

parameters and their spatial derivatives, and the third order term of twist rate are retained in element deformation nodal forces. However, only infinitesimal free vibration is considered here; thus only the terms up to the first order of deformation parameters, and their spatial derivatives and time derivatives are retained in element inertia nodal forces.

The steady state equilibrium equations may be obtained by dropping the terms of the time derivatives in the equation of motion. The governing equations for linear vibration may be obtained by the first order power series expansion of the equation of motion at the position of the corresponding steady state deformation. The frequency equation for free vibration of rotating inclined beam is a quadratic eigenvalue problem.

An incremental-iterative method based on the Newton-Raphson method is employed for the solution of nonlinear steady state equilibrium equations. The natural frequencies are determined by solving the quadratic eigenvalue problem using the bisection method.

Numerical examples are studied to investigate the steady state deformations and the natural frequencies of rotating inclined Euler beams with different cross sections, inclined angles, setting angles, angular velocities, radiuses of the hub, and slenderness ratios.



誌謝

衷心感謝指導教授 蕭國模博士在這兩年期間的指導與教誨，使本論文得以順利完成，蕭老師在研究上嚴謹的態度以及對我日常生活上的正確作息督促，使我受益良多，在此致上最高的敬意及謝意。也感謝蔡佳霖老師及尹慶中老師撥冗擔任口試委員並對本論文所提出的指正與建議，使本論文能夠更臻完善。

感謝蔡明旭、周裕淳學長們在研究上的協助與照顧，以及生活上的互相照應。感謝同學林運融過人的能力、自信及拳擊上的優異表現和對高價咖啡的品味，林寬政作人處世的沉著穩重及每天打棒球的毅力，都是非常值得我效法和學習的榜樣。最後再感謝學弟盧致群、黃楚璋、翁林甫在學業以及各方面的砥礪與成長。

感謝父母親、外婆以及所有關心我的親人、朋友對我的支持與鼓勵，僅以此成果與榮耀，獻給所有關心我的人。



目錄

中文摘要.....	I
英文摘要.....	II
誌謝.....	V
目錄.....	VI
表目錄.....	VIII
圖目錄.....	XV
第一章 緒論.....	1
第二章 理論推導.....	6
2.1 問題描述.....	6
2.2 基本假設.....	6
2.3 座標系統描述.....	6
2.4 旋轉向量.....	8
2.5 Euler 梁的變形描述.....	9
2.6 Euler 梁的應變、速度、加速度.....	14
2.7 元素節點內力之推導.....	21
2.8 元素剛度矩陣及慣性矩陣之推導.....	27
2.9 系統的運動方程式.....	33
2.10 無因次化.....	35



第三章 數值方法及程序.....	42
3.1 穩態解.....	43
3.2 振動分析.....	45
第四章 數值例題.....	49
4.1 收斂分析.....	50
4.2 個案分析.....	51
第五章 結論與展望.....	57
參考文獻	59
附表.....	63
附圖.....	119
附錄 A.....	170
附錄 B.....	174
附錄 C.....	179



表目錄

表一 不同橢圓斷面的收斂分析	
($k=0.1$ 、 $\alpha=0^\circ$ 、 $\beta=45^\circ$ 、 $r=1$).....	63
表二 不同橢圓斷面的收斂分析	
($k=0.03$ 、 $\alpha=5^\circ$ 、 $\beta=45^\circ$ 、 $r=1$).....	64
表三 不同橢圓斷面的收斂分析	
($k=0.01$ 、 $\alpha=30^\circ$ 、 $\beta=45^\circ$ 、 $r=1$).....	65
表四 不同橢圓斷面的收斂分析	
($k=0.01$ 、 $\alpha=45^\circ$ 、 $\beta=45^\circ$ 、 $r=1$).....	66
表五 不同橢圓斷面的收斂分析	
($k=0.01$ 、 $\alpha=60^\circ$ 、 $\beta=45^\circ$ 、 $r=1$).....	67
表六 不同 I 型斷面的收斂分析	
($k=0.01$ 、 $\alpha=45^\circ$ 、 $\beta=45^\circ$ 、 $r=1$).....	68
表七 不同十字斷面的收斂分析	
($k=0.01$ 、 $\alpha=45^\circ$ 、 $\beta=45^\circ$ 、 $r=1$).....	69
表八 旋轉傾斜梁在不同橢圓斷面的振動頻率	
(轉速 $k=0$).....	70
表九 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率	
(橢圓斷面 $a/b=5$ ， $L_T/a=20$ ， $r=0$ ， $\alpha=0^\circ$).....	71

表十 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率	
(橢圓斷面 $a/b=5$, $L_T/a=20$, $r=0$, $\alpha=0^\circ$).....	72
表十一 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率	
(橢圓斷面 $a/b=5$, $L_T/a=20$, $r=1$, $\alpha=0^\circ$).....	73
表十二 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率	
(橢圓斷面 $a/b=5$, $L_T/a=20$, $r=1$, $\alpha=0^\circ$).....	74
表十三 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率	
(橢圓斷面 $a/b=5$, $L_T/a=20$, $r=1$, $\alpha=30^\circ$).....	75
表十四 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率	
(橢圓斷面 $a/b=5$, $L_T/a=20$, $r=1$, $\alpha=30^\circ$).....	76
表十五 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率	
(橢圓斷面 $a/b=5$, $L_T/a=20$, $r=1$, $\alpha=45^\circ$).....	77
表十六 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率	
(橢圓斷面 $a/b=5$, $L_T/a=20$, $r=1$, $\alpha=45^\circ$).....	78
表十七 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率	
(橢圓斷面 $a/b=5$, $L_T/a=50$, $r=0$, $\alpha=0^\circ$).....	79
表十八 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率	
(橢圓斷面 $a/b=5$, $L_T/a=50$, $r=0$, $\alpha=0^\circ$).....	80
表十九 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率	

	(橢圓斷面 $a/b=5$, $L_T/a=50$, $r=1$, $\alpha=0^\circ$).....	81
表二十	旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率	
	(橢圓斷面 $a/b=5$, $L_T/a=50$, $r=1$, $\alpha=0^\circ$).....	82
表二十一	旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率	
	(橢圓斷面 $a/b=5$, $L_T/a=50$, $r=1$, $\alpha=30^\circ$).....	83
表二十二	旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率	
	(橢圓斷面 $a/b=5$, $L_T/a=50$, $r=1$, $\alpha=30^\circ$).....	84
表二十三	旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率	
	(橢圓斷面 $a/b=5$, $L_T/a=50$, $r=1$, $\alpha=45^\circ$).....	85
表二十四	旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率	
	(橢圓斷面 $a/b=5$, $L_T/a=50$, $r=1$, $\alpha=45^\circ$).....	86
表二十五	旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率	
	(橢圓斷面 $a/b=10$, $L_T/a=20$, $r=0$, $\alpha=0^\circ$).....	87
表二十六	旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率	
	(橢圓斷面 $a/b=10$, $L_T/a=20$, $r=0$, $\alpha=0^\circ$).....	88
表二十七	旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率	
	(橢圓斷面 $a/b=10$, $L_T/a=20$, $r=1$, $\alpha=0^\circ$).....	89
表二十八	旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率	
	(橢圓斷面 $a/b=10$, $L_T/a=20$, $r=1$, $\alpha=0^\circ$).....	90

表二十九	旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率	
	(橢圓斷面 $a/b = 10$, $L_T/a = 20$, $r = 1$, $\alpha = 30^\circ$).....	91
表三十	旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率	
	(橢圓斷面 $a/b = 10$, $L_T/a = 20$, $r = 1$, $\alpha = 30^\circ$).....	92
表三十一	旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率	
	(橢圓斷面 $a/b = 10$, $L_T/a = 20$, $r = 1$, $\alpha = 45^\circ$).....	93
表三十二	旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率	
	(橢圓斷面 $a/b = 10$, $L_T/a = 20$, $r = 1$, $\alpha = 45^\circ$).....	94
表三十三	旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率	
	(橢圓斷面 $a/b = 10$, $L_T/a = 50$, $r = 0$, $\alpha = 0^\circ$).....	95
表三十四	旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率	
	(橢圓斷面 $a/b = 10$, $L_T/a = 50$, $r = 0$, $\alpha = 0^\circ$).....	96
表三十五	旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率	
	(橢圓斷面 $a/b = 10$, $L_T/a = 50$, $r = 1$, $\alpha = 0^\circ$).....	97
表三十六	旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率	
	(橢圓斷面 $a/b = 10$, $L_T/a = 50$, $r = 1$, $\alpha = 0^\circ$).....	98
表三十七	旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率	
	(橢圓斷面 $a/b = 10$, $L_T/a = 50$, $r = 1$, $\alpha = 30^\circ$).....	99
表三十八	旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率	

	(橢圓斷面 $a/b = 10$, $L_T/a = 50$, $r = 1$, $\alpha = 30^\circ$).....	100
表三十九	旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率	
	(橢圓斷面 $a/b = 10$, $L_T/a = 50$, $r = 1$, $\alpha = 45^\circ$).....	101
表四十	旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率	
	(橢圓斷面 $a/b = 10$, $L_T/a = 50$, $r = 1$, $\alpha = 45^\circ$).....	102
表四十一	旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率	
	(I 型斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 0$, $\alpha = 0^\circ$).....	103
表四十二	旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率	
	(I 型斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 0$, $\alpha = 0^\circ$).....	104
表四十三	旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率	
	(I 型斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\alpha = 0^\circ$).....	105
表四十四	旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率	
	(I 型斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\alpha = 0^\circ$).....	106
表四十五	旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率	
	(I 型斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\alpha = 30^\circ$).....	107
表四十六	旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率	
	(I 型斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\alpha = 30^\circ$).....	108
表四十七	旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率	
	(I 型斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\alpha = 45^\circ$).....	109

表四十八 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率

(I 型斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\alpha = 45^\circ$)..... 110

表四十九 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 20$, $r = 0$, $\alpha = 0^\circ$)

..... 111

表五十 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 20$, $r = 0$, $\alpha = 0^\circ$)

..... 112

表五十一 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 20$, $r = 1$, $\alpha = 0^\circ$)

..... 113

表五十二 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 20$, $r = 1$, $\alpha = 0^\circ$)

..... 114

表五十三 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 20$, $r = 1$, $\alpha = 30^\circ$)

..... 115

表五十四 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 20$, $r = 1$, $\alpha = 30^\circ$)

..... 116

表五十五 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率

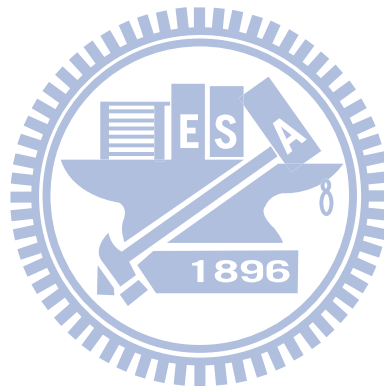
(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 20$, $r = 1$, $\alpha = 45^\circ$)

..... 117

表五十六 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 20$, $r = 1$, $\alpha = 45^\circ$)

..... 118



圖目錄

圖一 無傾斜角的旋轉梁結構.....	119
圖二 具傾斜角的旋轉梁結構.....	120
圖三 旋轉傾斜梁的上視圖.....	120
圖四 旋轉傾斜梁的側視圖.....	121
圖五 旋轉向量圖.....	121
圖六 梁之位移以及座標系統關係圖.....	122
圖七 梁的斷面圖.....	123.
圖八 轉速 - (B1、B2)自然頻率圖 (橢圓斷面 $a/b = 10$, $L_T/a = 50$, $r = 1$, $\alpha = 45^\circ$, $N = 50$)	124
圖九 轉速 - $\det \mathbf{K}_T$ 圖 (橢圓斷面 $a/b = 10$, $L_T/a = 50$, $r = 1$, $\alpha = 45^\circ$ 、 $\beta = 90^\circ$, $N = 50$)	124
圖十 位移分佈圖 (橢圓斷面 $a/b = 5$, $L_T/a = 50$, $r = 0$, $\beta = 45^\circ$, $\alpha = 0^\circ$, $N = 20$)	125
圖十一 位移分佈圖 (橢圓斷面 $a/b = 10$, $L_T/a = 20$, $r = 1$, $\beta = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$, $N = 35^*$)	126
圖十二 位移分佈圖	

	(橢圓斷面 $a/b = 10$, $L_T/a = 50$, $r = 1$, $\beta = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$, $N = 35^*$)	127
圖十三	轉速 - 自然頻率圖	
	(橢圓斷面 $a/b = 5$, $L_T/a = 50$, $r = 0$, $\alpha = 0^\circ$, $N = 20$)	128
圖十四	轉速 - 自然頻率圖	
	(橢圓斷面 $a/b = 5$, $L_T/a = 50$, $r = 1$, $\alpha = 0^\circ$, $N = 35^*$)	129
圖十五	轉速 - 自然頻率圖	
	(橢圓斷面 $a/b = 5$, $L_T/a = 50$, $r = 1$, $\alpha = 30^\circ$, $N = 35^*$)	130
圖十六	轉速 - 自然頻率圖	
	(橢圓斷面 $a/b = 10$, $L_T/a = 20$, $r = 1$, $\alpha = 30^\circ$, $N = 35^*$)	131
圖十七	轉速 - 自然頻率圖	
	(橢圓斷面 $a/b = 10$, $L_T/a = 50$, $r = 1$, $\alpha = 30^\circ$, $N = 35^*$)	132
圖十八	轉速 - 自然頻率圖	
	(橢圓斷面 $a/b = 10$, $L_T/a = 50$, $r = 1$, $\alpha = 45^\circ$, $N = 50$)	133
圖十九	傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第一、第二振動模態	
	(橢圓斷面 $a/b = 10$, $r = 1$, $L_T/a = 20$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 0^\circ$, $N = 35^*$)	134

圖二十 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第三、第四振動模態
 (橢圓斷面 $a/b = 10$, $r = 1$, $L_T/a = 20$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 0^\circ$, $N = 35^*$)
 135

圖二十一 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第五、第六振動模態
 (橢圓斷面 $a/b = 10$, $r = 1$, $L_T/a = 20$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 0^\circ$, $N = 35^*$)
 136

圖二十二 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第一、第二振動模態
 (橢圓斷面 $a/b = 10$, $r = 1$, $L_T/a = 20$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $N = 35^*$)
 137

圖二十三 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第三、第四振動模態
 (橢圓斷面 $a/b = 10$, $r = 1$, $L_T/a = 20$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $N = 35^*$)
 138

圖二十四 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第五、第六振動模態
 (橢圓斷面 $a/b = 10$, $r = 1$, $L_T/a = 20$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $N = 35^*$)
 139

圖二十五 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第一、第二振動模態
 (橢圓斷面 $a/b = 10$, $r = 1$, $L_T/a = 20$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $N = 35^*$)
 140

圖二十六 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第三、第四振動模態
 (橢圓斷面 $a/b = 10$, $r = 1$, $L_T/a = 20$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $N = 35^*$)
 141

圖二十七 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第五、第六振動模態

(橢圓斷面 $a/b = 10$, $r = 1$, $L_T/a = 20$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $N = 35^*$)
 142

圖二十八 位移分佈圖

(I 型斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\beta = 45^\circ$, $\alpha = 5^\circ$, $N = 50$)
 143

圖二十九 位移分佈圖

(I 型斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\beta = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$, $N = 50$)
 144

圖三十 轉速 - 自然頻率圖

(I 型斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 0$, $\alpha = 0^\circ$, $N = 50$)
 145

圖三十一 轉速 - 自然頻率圖

(I 型斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\alpha = 5^\circ$, $N = 50$)
 146

圖三十二 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第一、第二振動模態

(I 型斷面 $W10 \times 30$, $r = 1$, $L_T/d_{nom} = 25$, $\alpha = 5^\circ$, $\beta = 0^\circ$, $N = 50$)
 147

圖三十三 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第三、第四振動模態

(I 型斷面 $W10 \times 30$, $r = 1$, $L_T/d_{nom} = 25$, $\alpha = 5^\circ$, $\beta = 0^\circ$, $N = 50$)
 148

圖三十四 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第五、第六振動模態

(I 型斷面 $W10 \times 30$, $r = 1$, $L_T/d_{nom} = 25$, $\alpha = 5^\circ$, $\beta = 0^\circ$, $N = 50$)

.....	149
圖三十五 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第一、第二振動模態	
(I 型斷面 $W10 \times 30$, $r = 1$, $L_T/d_{nom} = 25$, $\alpha = 5^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $N = 50$)	
.....	150
圖三十六 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第三、第四振動模態	
(I 型斷面 $W10 \times 30$, $r = 1$, $L_T/d_{nom} = 25$, $\alpha = 5^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $N = 50$)	
.....	151
圖三十七 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第五、第六振動模態	
(I 型斷面 $W10 \times 30$, $r = 1$, $L_T/d_{nom} = 25$, $\alpha = 5^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $N = 50$)	
.....	152
圖三十八 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第一、第二振動模態	
(I 型斷面 $W10 \times 30$, $r = 1$, $L_T/d_{nom} = 25$, $\alpha = 5^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $N = 50$)	
.....	153
圖三十九 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第三、第四振動模態	
(I 型斷面 $W10 \times 30$, $r = 1$, $L_T/d_{nom} = 25$, $\alpha = 5^\circ$, $\beta = 0^\circ$, $N = 50$)	
.....	154
圖四十 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第五、第六振動模態	
(I 型斷面 $W10 \times 30$, $r = 1$, $L_T/d_{nom} = 25$, $\alpha = 5^\circ$, $\beta = 0^\circ$, $N = 50$)	
.....	155
圖四十一 位移分佈圖	
(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 20$, $r = 1$, $\beta = 45^\circ$, $\alpha = 5^\circ$, $N = 50$)	

.....	156
圖四十二 位移分佈圖	
(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 20$, $r = 1$, $\beta = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$, $N = 50$)	
.....	157
圖四十三 轉速 - 自然頻率圖	
(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 20$, $r = 0$, $\alpha = 0^\circ$, $N = 50$)	
.....	158
圖四十四 轉速 - 自然頻率圖	
(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 20$, $r = 1$, $\alpha = 0^\circ$, $N = 50$)	
.....	159
圖四十五 轉速 - 自然頻率圖	
(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 20$, $r = 1$, $\alpha = 5^\circ$, $N = 50$)	
.....	160
圖四十六 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第一、第二振動模態	
(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $r = 0$, $L_T/d = 20$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 0^\circ$, $N = 50$)	
.....	161
圖四十七 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第三、第四振動模態	
(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $r = 0$, $L_T/d = 20$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 0^\circ$, $N = 50$)	
.....	162
圖四十八 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第五、第六振動模態	
(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $r = 0$, $L_T/d = 20$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 0^\circ$, $N = 50$)	
.....	163

圖四十九 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第一、第二振動模態

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $r = 0$, $L_T/d = 20$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $N = 50$)
..... 164

圖五十 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第三、第四振動模態

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $r = 0$, $L_T/d = 20$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $N = 50$)
..... 165

圖五十一 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第五、第六振動模態

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $r = 0$, $L_T/d = 20$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $N = 50$)
..... 166

圖五十二 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第一、第二振動模態

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $r = 0$, $L_T/d = 20$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $N = 50$)
..... 167

圖五十三 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第三、第四振動模態

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $r = 0$, $L_T/d = 20$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $N = 50$)
..... 168

圖五十四 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第五、第六振動模態

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $r = 0$, $L_T/d = 20$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $N = 50$)
..... 169

第一章 緒論

旋轉梁結構在日常生活中有很多實際上的應用，像是吊扇、渦輪的葉片、直升機的旋轉翼、風力發電機的葉片、衛星的支臂、飛機的螺旋槳和機械手臂。振動分析在旋轉梁的設計與分析上扮演著很重要的角色，文獻上在這方面已經有很多的研究。

關於旋轉梁結構的振動分析可從文獻[1,2]有詳細的探討與回顧，Schilhansl [3]在考慮離心力，但忽略科氏力的情況下，導出了如圖一所示之等速旋轉梁振動的微分方程式，Lee 與 Kuo[4]探討了圖一之旋轉 Euler 梁，對其旋轉軸的中心半徑、設定角及轉速對旋轉梁彎矩振動自然頻率的影響。Yokoyama[5]將旋轉慣量及剪變形、旋轉軸的中心半徑和設定角合併到有限元素的模式中，探討其對自然頻率的影響。Lee and Lin[6]用線性梁理論去推導旋轉 Timoshenko 梁之運動方程式，並探討了旋轉速度和質量慣性矩(mass moment of inertia)的耦合效應、設定角和旋轉速度對彎矩自然頻率的影響。Eick and Mignolet [7]探討旋轉梁在不同旋轉軸中心半徑與旋轉梁長度之比值下，其受軸向壓應力挫屈時之臨界轉速。

文獻[3-7]均用線性梁理論推導旋轉梁的運動方程式，且在作其振動分析時都不考慮科氏力，但均無討論其適當性或影響，在文獻[8]Simo and Vu-Quoc 提到在分析旋轉結構需要用幾何非線性梁理論(至少取到二次項)才能適當的計算離心力對彎矩剛度的影響，若用線性梁理論(只取到一次項)將會產生虛假的彎矩剛度流失，所以文獻[3-7]中推導的旋轉梁之運動方程式及所求得之振動的自然頻率應是不正確的。

文獻[9,10]利用非線性梁理論的一致線性化、虛功原理和 d'Alembert 原理在旋轉座標上推導旋轉 Timoshenko 梁正確的線性運動方程式，文獻[9,10]在分析時考慮了軸向變形及科氏力。旋轉梁的自然振動是指以其穩態解為

平衡點的微小振動，故須先求出其穩態解，除了設定角為 0° 或 90° 外，旋轉梁之穩態變形是三維的變形，且其自然振動是軸向、側向與扭轉耦合的三維振動，文獻[9,10]僅分析設定角為 0° 或 90° 之旋轉梁，並僅考慮軸向變形及一個側方向的位移與旋轉的二維振動，文獻[9]提出一套旋轉梁之自然頻率的級數解法及計算其自然頻率的數值計算程序，並探討科氏力對旋轉梁之自然頻率的影響。文獻[10]以文獻[9]提出的方法及細長比很大的 Timoshenko 梁模擬旋轉 Euler 梁，文獻[10]發現在低轉速時，科氏力對細長比很大的旋轉梁的自然頻率影響不大，但文獻[9,10]中並無高轉速的結果，因在高轉速時，文獻[9,10]的數值方法對細長比很大的旋轉梁無法收斂。

文獻[11]分析如圖一所示之設定角為 0° 或 90° 的旋轉 Euler 梁，利用虛功原理與 d'Alembert 原理，配合非線性梁理論的一致線性化，在旋轉座標上推導旋轉 Euler 梁正確的線性運動方程式，並僅考慮軸向變形及一個側方向的位移與旋轉的二維振動，文獻[11]將旋轉梁分成數段，每段稱為一個元素，每個元素用一個級數解來表示其自由振動，文獻[11]發現當細長比很大時，在高轉速下僅用一個元素無法求得正確的自然頻率，需將旋轉梁分成兩個以上的元素，才能求得精確的自然頻率，但文獻[11]並未探討其原因。文獻[12]考慮一具軸對稱之三維旋轉 Timoshenko 梁，利用共旋轉有限元素法(Co-rotational finite element formulation)和虛功原理配合非線性梁理論的一致線性化，推導梁元素節點慣性力與節點變形力。具雙軸對稱之三維旋轉 Timoshenko 梁的穩態解包含軸向和扭轉變形，文獻[12]保留軸向和扭轉變形的穩態解到二次項及扭轉率的三次項，文獻[12]將旋轉 Timoshenko 梁的運動方程式中的時間函數去掉求得系統穩態平衡式，再用牛頓法的增量迭代法求得穩態解，文獻[12]用泰勒級數在穩態平衡點將運動方程式一致線性化，求得旋轉 Timoshenko 梁的振動方程式，文獻[12]探討旋轉速度和設

定角對三維旋轉 Timoshenko 梁之穩態變形及自然頻率的影響。文獻[13]採用 Euler 梁取代文獻[12]Timoshenko 梁，以有限元素法推導出三維旋轉 Euler 梁運動方程式，其穩態解包含軸向和扭轉變形，探討旋轉速度和設定角對三維旋轉 Euler 梁之穩態變形及自然頻率的影響。

當傾斜角不為 0° 、設定角不為 0° 或 90° 時，旋轉梁之軸向、兩個側向位移與扭轉的穩態解都不為零。文獻[14-15]探討如圖二所示之具有設定角與傾斜角之旋轉梁自由振動。文獻[14-15]僅考慮軸向位移的穩態解對自然頻率的影響，忽略了兩個側向位移及扭轉影響，故其旋轉梁的自然頻率可能不準確。

當傾斜角不為零、設定角為 0° 或 90° 時，旋轉傾斜尤拉梁為二維自然振動。文獻[16]用虛功、d'Alembert 原理及幾何非線性梁理論的一致線性化，推導設定角為 0° 或 90° 之旋轉 Euler 梁的二維運動方程式。當設定角為 90° 時，旋轉傾斜尤拉梁的側向穩態解為零；當設定角為 0° 時，旋轉傾斜尤拉梁之側向穩態變形不為零。文獻[16]以旋轉梁變形前所受的離心力求其軸向及側向穩態變形，但旋轉梁所受離心力為與結構變形位置相關的外力(configuration dependent load)。文獻[16]在設定角 0° 或 90° ，有考慮側向位移的穩態解，但無解出 0° 時的自然頻率。

文獻[17]以共旋轉有限元素法探討設定角為 0° 之旋轉傾斜梁的穩態變形及自然振動頻率，考慮梁的軸向位移及單一側向位移和旋轉二維運動，旋轉梁所受的離心力為與結構變形位置相關的外力(configuration dependent load)，文獻[17]採用 d'Alembert 原理、虛功原理、幾何非線性梁理論的一致線性化，推導出節點慣性力和節點變形力，組合成系統的非線性運動方程式，將旋轉梁的運動方程式的時間函數去掉求得系統穩態平衡方程式，再用牛頓法的增量迭代法求出軸向位移及一個側向位移的穩態解，將運動方程式在穩態平衡位置用泰勒級數展開，取到一次項，求得旋轉傾斜梁的振

動方程式，再求出旋轉梁以穩態解為平衡點的自然振動及對應的振態。

文獻[18] 探討傾斜角為零，有預錐角(Precone)的旋轉梁的自由振動，僅考慮軸向的穩態變形對自然頻率的影響，忽略了扭轉與側向位移之穩態解，故此旋轉梁之自然頻率可能不正確。文獻[19]探討傾斜角為零，具有預扭(Pretwisted)和預錐角(Precone)之旋轉梁自由振動，利用非線性梁理論求得軸向、扭轉與兩個側向位移穩態解，並且去探討柯氏力對具有預扭(Pretwisted)和預錐角(Precone)旋轉梁的振動頻率影響。文獻[20]、[21]在傾斜角與預錐角(Precone)為零的時候，分析預扭(Pretwisted)旋轉梁的自由振動。文獻[22] 探討將預錐角(Precone)稱作錐形角(taper angle)，忽略傾斜角之預扭(Pretwisted)旋轉梁自由振動分析。文獻[20-22]皆僅討論自然頻率與沿著旋轉樑上預扭角(Pretwisted angle)的關係，並沒有考慮穩態解造成的影響。

在工程上，一般的旋轉結構體或是葉片(Blade)，往往因為製造上的誤差或是本身設計上的考量，傾斜角以及設定角並不為 0° 或 90° ，具預錐角、預扭角、及設定角不為 0° 或 90° 的傾斜旋轉梁之穩態變形是三維的變形，其自然振動是軸向、側向與扭轉耦合的三維振動，但由上面的文獻回顧可發現，文獻上仍缺乏考慮軸向、側向及扭轉穩態變形之傾斜旋轉梁的三維振動分析。所以本研究擬探討具有任意設定角與傾斜角的旋轉 Euler 梁之穩態變形及自由振動，但為了簡化問題，本研究並不考慮預錐角以及預扭角。

本研究擬採用共旋轉有限元素法求在一剛接在轉軸之旋轉總體座標上描述旋轉梁的位移、速度及加速度，本文利用文獻[23]之三維 Euler 梁的變形機制推導梁元素，在梁元素當前的變形位置建立一個元素座標，該元素座標原點的速度及加速度與該原點重合且固定在旋轉總體座標之點的剛體速度與加速度，該元素座標與轉軸有相同的角速度。本文以 d'Alembert 原理、虛功原理、幾何非線性梁理論的一致線性化，推導出元素之節點慣性

力、節點變形力、剛度矩陣、向心力剛度矩陣(centripetal stiffness matrix)，質量矩陣(mass matrix)，陀螺矩陣(gyroscopic matrix)。將系統的非線性運動方程式中對時間的微分的項去掉即為系統的穩態平衡方程式，將系統運動方程式用泰勒級數在穩態變形的位置展開，取到一次項，即為旋轉梁微小振動的運動方程式。在推導過程中保留穩態變形的節點參數和其微分到二次項以及扭轉率的三次項，而振動部分保留節點參數和其微分到一次項。本文利用基於牛頓法的增量迭代法求出軸向、扭轉及兩個側向位移的穩態解。旋轉傾斜梁的振動方程式中存在陀螺矩陣，所以其自然振動頻率對應的振動模態為複變數，其頻率方程式(frequency equations)為一組代數齊次方程式，該組齊次方程式為一個二次特徵值問題，其係數形成之矩陣的行列式值為零時的根，即為自然振動頻率。本文以二分法來求行列式值為零時的根。本研究擬探討設定角、傾斜角、轉速、轉軸半徑及細長比對旋轉傾斜梁自然頻率的影響。



第二章 理論推導

2.1 問題描述

如圖二所示，本文考慮一長度為 L_T 具均勻斷面且雙軸對稱之尤拉梁，其支承端以設定角(setting angle) β 與傾斜角(inclination angle) α 剛接在一半徑為 R 剛性圓柱上，該圓柱以等角速率 Ω 繞其軸心旋轉。本文中所有梁的位移、變形和振動指的是在一個以等角速率 Ω 繞圓柱中心軸旋轉的旋轉座標上描述的位移、變形和振動。本文中考慮梁的軸向、扭轉位移、兩個側向位移及旋轉。設定角不為 0° 或 90° 且傾斜角不為 0° 時，等角速率的旋轉梁存在一包含軸向位移、扭轉，兩個側向位移的穩態變形。本文中所有的振動都是指以該穩態變形為平衡點的振動。本文中考慮的振動是線性振動，所以由振動造成的位移、速度和加速度都視為是一微小量(infinitesimal quantity)。



2.2 基本假設

本文對梁元素的推導，做如下的假設：

- (1)梁為細長的等斷面、雙對稱梁，且Euler-Bernoulli 假說成立。
- (2)梁元素的形心軸之單位長度伸長量(unit extension)為均勻的伸長。
- (3)梁元素的變形與應變皆為小變形與小應變。
- (4)梁元素斷面的翹曲為梁元素的軸向扭轉率與該梁的聖維南(Saint Venant)翹曲函數的乘積。

2.3 座標系統描述

本研究是使用共旋轉有限元素法(co-rotational finite element formulation)，將梁分割成若干個兩個節點的梁元素。為了描述旋轉梁系統

的運動，本文中使用的三個座標系統：

(1) 總體座標系統 $X_i^G, (i=1,2,3)$

總體座標系統是以等角速率 Ω 繞圓柱中心軸旋轉，如圖三與圖四所示，總體座標系統的原點是取在旋轉梁斷面的形心軸與旋轉圓柱的交點（即O點）上，其 X_1^G 軸和梁變形前的斷面形心軸一致，其 X_2^G 和 X_3^G 軸是取旋轉梁變形前的斷面主軸方向，將圓柱的轉軸方向繞 X_1^G 軸逆時鐘方向轉 β 角即為和 X_3^G 軸的方向。本文中旋轉梁的節點座標、節點位移、節點速度、角速度、節點加速度、角加速度及整個系統的運動方程式均在此座標系統中定義。

(2) 梁斷面座標系統 $x_i^S, (i=1,2,3)$

該座標系統的原點是剛接在梁斷面的形心上，其 x_1^S 軸取在未翹曲斷面的法線方向， x_2^S 、 x_3^S 軸取在未翹曲斷面的主軸方向。

(3) 元素座標系統 $x_i, (i=1,2,3)$

元素座標系統是建立在每個元素當前的位置上，且以一個等角速率 Ω 繞圓柱中心軸旋轉，如圖六所示，元素座標系統的原點是定義在元素節點 1（即 o 點）上，令 o 點當前的總體座標為 $(X_0, Y_0, 0)$ ， x_1 軸的方向為梁元素兩節點連線的方向， x_2 與 x_3 軸在元素變形前與斷面的主軸方向一致，而元素變形後的 x_2 與 x_3 軸，可以由該元素未翹曲的兩端斷面的方位來決定[23]，本文是分別將位於節點 1、2 後的斷面繞一個與該斷面之法線及與 x_1 軸垂直的旋轉軸旋轉一角度使斷面之法線方向與 x_1 軸方向一致（此時不考慮斷面之翹曲變形，否則斷面的法線方向將無法定義），然後再以兩斷面的主軸方向的角平分線作為 x_2 軸與 x_3 軸的方向。本文中梁元素的位移、變形、速度、加速度及運動方程式，均在此座標系統定義。

本文中以符號 $\{ \}$ 代表行矩陣。總體座標系統 $\mathbf{X}^G = \{ X_1^G, X_2^G, X_3^G \}$ 與

元素座標 $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$ ，元素斷面座標 $\mathbf{x}^S = \{x_1^S, x_2^S, x_3^S\}$ 的關係可表示如下：

$$\mathbf{X}^G = \mathbf{A}_{GE} \mathbf{x}$$

$$\mathbf{X}^G = \mathbf{A}_{GS} \mathbf{x}^S \quad (2.3.1)$$

其中 \mathbf{A}_{GE} 、 \mathbf{A}_{GS} 分別代表元素座標、元素斷面座標對於固定總體座標系統的方向餘弦矩陣。

令 $\boldsymbol{\Omega}_G$ 為旋轉梁的角速度向量在總體座標上的表示式，其分量可表示如下：

$$\boldsymbol{\Omega}_G = \Omega \{0, \sin \beta, \cos \beta\} \quad (2.3.2)$$

其中 Ω 為角速率， β 為梁的設定角

令 $\boldsymbol{\Omega}$ 為旋轉梁的角速度向量在元素座標上的表示式，由(2.3.1)、(2.3.2)式可得：

$$\boldsymbol{\Omega} = \{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3\} = \mathbf{A}_{GE}^t \boldsymbol{\Omega}_G = \Omega \mathbf{n} \quad (2.3.3)$$

$$\mathbf{n} = \{n_1, n_2, n_3\} \quad (2.3.4)$$

其中 \mathbf{n} 為旋轉軸的單位向量， n_i ($i=1, 2, 3$) 為其在元素座標軸 x_i 的分量。

2.4 旋轉向量

本文中使用旋轉向量來表示一個有限旋轉，如圖六所示，一向量 \mathbf{b} 受到一旋轉向量 $\phi \mathbf{a}$ 的作用而轉到一個新的位置 \mathbf{b}' ，向量 \mathbf{b}' 與 \mathbf{b} 之間的關係可表示成：

$$\mathbf{b}' = \cos \phi \mathbf{b} + (1 - \cos \phi)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} + \sin \phi (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (2.4.1)$$

其中符號 \cdot 與 \times 分別代表向量的內積與外積， ϕ 表逆時鐘方向旋轉角， \mathbf{a} 表旋轉軸的單位向量。

2.5 Euler 梁的變形描述

本文在旋轉座標上描述梁元素的變形，由(2.2)節中的基本假設可知 Euler 梁元素的變形可以由其形心軸的位移、截面的翹曲(warping)及其截面的旋轉來描述。

本研究採用[8]與[24]中之梁的變型機制，如圖六中 Q 點為梁元素中的任意點，P 點為 Q 點在同一斷面之形心軸上的對應點。在旋轉座標上 Q 點的變形前後位置可以表示如下[8]:

$$\mathbf{r}_0 = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 \quad (2.5.1)$$

$$\mathbf{r} = x_p\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + w\mathbf{e}_3 + \theta_{1,s}\omega\mathbf{e}_1^S + y\mathbf{e}_2^S + z\mathbf{e}_3^S \quad (2.5.2)$$

其中 x 、 y 、 z 為變形前 Q 點在元素座標 x_i ($i=1,2,3$) 上的座標， x 亦為 P 點變形前 x_1 軸的座標， y 、 z 亦同時是 Q 點在 x_2^S 與 x_3^S 軸的座標。 $x_p(x, t)$ 、 $v(x, t)$ 以及 $w(x, t)$ 分別是變形後 P 點在元素座標 x_i ($i=1,2,3$) 上的座標， $v(x, t)$ 、 $w(x, t)$ 亦為 P 點在 x_2 及 x_3 軸方向的位移， $\theta_{1,s} = \frac{\partial\theta_1}{\partial s}$ 是梁斷面沿變形後形心軸的軸向扭轉率， $\theta_1(x, t)$ 為形心軸的扭轉角， s 為變形後形心軸的弧長， $\omega = \omega(y, z)$ 代表等斷面梁的聖維南翹曲函數， \mathbf{e}_i 及 \mathbf{e}_i^S ($i=1,2,3$) 分別為 x_i 與 x_i^S 軸的單位向量，梁變形後形心軸的單位切線向量可表示為

$$\mathbf{t} = \{\cos\theta_n, \theta_3, -\theta_2\} \quad (2.5.3)$$

其中

$$\theta_2 = -\frac{\partial w}{\partial s} = -\frac{w'}{1 + \epsilon_o} \quad (2.5.4)$$

$$\theta_3 = \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{v'}{1 + \epsilon_o} \quad (2.5.5)$$

$$\cos\theta_n = \frac{\partial x_p}{\partial s} = (1 - \theta_2^2 - \theta_3^2)^{1/2} \quad (2.5.6)$$

$$w' = \frac{\partial w}{\partial x} = w_{,x}, \quad v' = \frac{\partial v}{\partial x} = v_{,x}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\partial s}{\partial x} - 1 \quad (2.5.7)$$

ε_0 為形心軸的單位伸長量。

忽略扭轉翹曲的情況下，由方程式(2.5.4)至(2.5.7)式可得

$$x_p(x, t) = u_1(t) + \int_0^x [(1 + \varepsilon_0)^2 - v_{,x}^2 - w_{,x}^2]^{1/2} dx \quad (2.5.8)$$

其中 $u_1(t)$ 為節點1在 x_1 方向上的位移，由元素座標系統的定義，其值為零。

由梁元素的變形為小變形的假設，利用近似式 $[(1 + \varepsilon_0)^2 - v_{,x}^2 - w_{,x}^2]^{1/2} \approx (1 + \varepsilon_0 - \frac{1}{2}v_{,x}^2 - \frac{1}{2}w_{,x}^2)$ ，(2.5.8)式可表示成

$$x_p(x, t) = u_1 + \int_0^x (1 + \varepsilon_0 - \frac{1}{2}v_{,x}^2 - \frac{1}{2}w_{,x}^2) dx \quad (2.5.9)$$

由座標系統的定義可知，在變形前 x_i 軸與 x_i^S ($i=1,2,3$) 軸的方向是一致的，即 \mathbf{e}_i 與 \mathbf{e}_i^S ($i=1,2,3$) 的方向是一致的，而且變形後 \mathbf{e}_i^S 與(2.5.3)式的 \mathbf{t} 方向一樣。在本文中假設變形後的單位向量 \mathbf{e}_i^S ($i=1,2,3$) 的方向是由以下兩個旋轉向量連續作用於單位向量 \mathbf{e}_i ($i=1,2,3$) 來決定[23]、[24]：

$$\boldsymbol{\theta}_n = \theta_n \mathbf{n}_\theta \quad (2.5.10)$$

$$\boldsymbol{\theta}_t = \theta_t \mathbf{t} \quad (2.5.11)$$

$$\mathbf{n}_\theta = \{0, \theta_2 / (\theta_2^2 + \theta_3^2)^{1/2}, \theta_3 / (\theta_2^2 + \theta_3^2)^{1/2}\} = \{0, n_2, n_3\} \quad (2.5.12)$$

其中 \mathbf{n}_θ 為垂直於 \mathbf{e}_1 與 \mathbf{t} 之單位向量， θ_n 為 \mathbf{e}_1 和 \mathbf{t} 的夾角， θ_t 為斷面繞 \mathbf{t} 的轉角。

將旋轉向量 $\boldsymbol{\theta}_n$ 作用在 \mathbf{e}_i 上，使其轉至一中繼位置 \mathbf{e}'_i ，如圖六所示，此時 \mathbf{e}'_1 與 \mathbf{t} 重合，再將 $\boldsymbol{\theta}_t$ 作用在 \mathbf{e}'_i ，將其轉到 \mathbf{e}_i^S 。若 \mathbf{e}_i 、 $\boldsymbol{\theta}_n$ 、以及 $\boldsymbol{\theta}_t$ 已知，則元素斷面座標 \mathbf{e}_i^S 就唯一決定；反之，若 \mathbf{e}_i 與 \mathbf{e}_i^S 已知，則旋轉向量 $\boldsymbol{\theta}_n$ 與 $\boldsymbol{\theta}_t$ 亦唯一決定。

\mathbf{e}_i^S 與 \mathbf{e}_i 之關係可表示如下[23]、[24]

$$\mathbf{e}_i^S = [\mathbf{t}, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2] \mathbf{e}_i = \mathbf{R} \mathbf{e}_i, \quad (2.5.13)$$

$$\mathbf{R}_1 = \cos \theta_1 \mathbf{r}_1 + \sin \theta_1 \mathbf{r}_2$$

$$\mathbf{R}_2 = -\sin \theta_1 \mathbf{r}_1 + \cos \theta_1 \mathbf{r}_2$$

$$\mathbf{r}_1 = \{-\theta_3, \cos \theta_n + (1 - \cos \theta_n) n_2^2, (1 - \cos \theta_n) n_2 n_3\}$$

$$\mathbf{r}_2 = \{\theta_2, (1 - \cos \theta_n) n_2 n_3, \cos \theta_n + (1 - \cos \theta_n) n_3^2\}$$

其中 \mathbf{R} 稱為旋轉矩陣。因 \mathbf{R} 為 $\theta_i (i=1, 2, 3)$ 的函數，所以本文中稱 θ_i 為旋轉參數。

當 $\theta_i (i=1, 2, 3)$ 分別有一微小變化 $\delta \theta_i$ 時，斷面座標會旋轉到一個新的位置，此一新的位置可由元素座標繞 $x_i (i=1, 2, 3)$ 軸分別作微小旋轉 $\delta \phi_i (i=1, 2, 3)$ 而得。

$\delta \theta = \{\delta \theta_1, \delta \theta_2, \delta \theta_3\}$ 與 $\delta \phi = \{\delta \phi_1, \delta \phi_2, \delta \phi_3\}$ 之關係可表示如下[23]、[24]：

$$\delta \phi = [\mathbf{t}, \mathbf{t}_1 + a\mathbf{t}, \mathbf{t}_2 + b\mathbf{t}] \delta \theta = \mathbf{T} \delta \theta \quad (2.5.14)$$

$$\mathbf{t}_1 = \left\{ -\theta_3, \frac{1 - \theta_3^2}{\cos \theta_n}, \frac{\theta_2 \theta_3}{\cos \theta_n} \right\}$$

$$\mathbf{t}_2 = \left\{ \theta_2, \frac{\theta_2 \theta_3}{\cos \theta_n}, \frac{1 - \theta_2^2}{\cos \theta_n} \right\}$$

$$a = \frac{\theta_3(1 - \cos \theta_n)}{\theta_2^2 + \theta_3^2}$$

$$b = \frac{-\theta_2(1 - \cos \theta_n)}{\theta_2^2 + \theta_3^2}$$

(2.5.14)式之反函數可表示如下：

$$\delta\mathbf{\theta} = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ -\theta_3 & \cos\theta_n & 0 \\ \theta_2 & 0 & \cos\theta_n \end{bmatrix} \delta\boldsymbol{\phi} = \mathbf{T}^{-1} \delta\boldsymbol{\phi} \quad (2.5.15)$$

當旋轉參數 θ_2 與 θ_3 很小時， \mathbf{T}^{-1} 矩陣可近似如下式

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}\theta_3 & -\frac{1}{2}\theta_2 \\ -\theta_3 & 1 & 0 \\ \theta_2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5.16)$$

將(2.5.14)式代入(2.5.2)式，利用近似式 $\cos\theta_n \approx 1 - \frac{1}{2}\theta_2^2 - \frac{1}{2}\theta_3^2$ 、

$\sin\theta \approx \theta$ 、 $\cos\theta \approx 1 - \frac{1}{2}\theta^2$ 並保留變形參數至二次項，則位置向量 \mathbf{r} 可以化簡成

$$\mathbf{r} = r_1\mathbf{e}_1 + r_2\mathbf{e}_2 + r_3\mathbf{e}_3 \quad (2.5.17)$$

$$r_1 = x_p + y(\theta_2\theta_1 - \theta_3) + z(\theta_2 + \theta_3\theta_1) + \theta_{1,x}\omega$$

$$r_2 = v + y[1 - \frac{1}{2}(\theta_3^2 + \theta_1^2)] + z(\frac{1}{2}\theta_2\theta_3 - \theta_1) + \theta_{1,x}\theta_3\omega$$

$$r_3 = w + y(\frac{1}{2}\theta_2\theta_3 + \theta_1) + z[1 - \frac{1}{2}(\theta_2^2 + \theta_1^2)] - \theta_{1,x}\theta_2\omega$$

由梁之形心軸單位長度的伸長量為均勻的伸長量之假設及(2.5.9)式，可以得到形心軸單位長度伸長量 ε_0 可表示如下

$$\varepsilon_0 = \frac{l-L}{L} + \frac{1}{2L} \int_0^L (v_{,x}^2 + w_{,x}^2) dx \quad (2.5.18)$$

$$l = L + u_2 - u_1 \quad (2.5.19)$$

其中 L 為梁元素變形前的長度， l 為梁元素變形後之形心軸的弦長， u_1 、 u_2 分別為節點1與2在 x_1 方向的位移。

本文中假設梁元素形心軸的位移 v 、 w 與軸向扭轉角 θ_1 皆為 x 的三次Hermitian多項式，因此 v 、 w 、 θ_1 可表示成：

$$v(x, t) = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}^t \{v_1, v'_1, v_2, v'_2\} = \mathbf{N}_b^t \mathbf{u}_b \quad (2.5.20)$$

$$w(x, t) = \{N_1, -N_2, N_3, -N_4\}^t \{w_1, -w'_1, w_2, -w'_2\} = \mathbf{N}_c^t \mathbf{u}_c \quad (2.5.21)$$

$$\theta_1(x, t) = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}^t \{\theta_{11}, \beta_1, \theta_{12}, \beta_2\} = \mathbf{N}_d^t \mathbf{u}_d \quad (2.5.22)$$

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi), \quad N_2 = \frac{L}{8}(1-\xi^2)(1-\xi), \quad (2.5.23)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi), \quad N_4 = \frac{L}{8}(-1+\xi^2)(1+\xi),$$

$$\xi = -1 + \frac{2x}{L} \quad (2.5.24)$$

其中 v_j 與 w_j ($j=1, 2$) 分別是 v 與 w 在節點 j 的節點值， v'_j 與 w'_j ($j=1, 2$) 則分別是 $v' = \frac{\partial v}{\partial x}$ 與 $w' = \frac{\partial w}{\partial x}$ 在節點 j 之節點值。 θ_{1j} ($j=1, 2$) 是 θ_1 在節點 j 的節點值， β_j ($j=1, 2$) 則是 $\theta_{1,x} = \frac{\partial \theta_1}{\partial x}$ 在節點 j 的節點值。 N_i ($i=1-4$) 為形狀函數 (shape function)， \mathbf{u}_b 、 \mathbf{u}_c 、 \mathbf{u}_d 皆為時間的函數。

將(2.5.19)至(2.5.21)式代入(2.5.18)式整理可得

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{L} (\mathbf{G}_a^t \mathbf{u}_a + \frac{1}{2} \mathbf{G}_b^t \mathbf{u}_b + \frac{1}{2} \mathbf{G}_c^t \mathbf{u}_c) \quad (2.5.25)$$

$$\mathbf{G}_a = \{-1, 1\} \quad (2.5.26)$$

$$\mathbf{G}_b = \{G_{b1}, G_{b2}, G_{b3}, G_{b4}\} = \int \mathbf{N}'_b v_{,x} dx \quad (2.5.27)$$

$$\mathbf{G}_c = \{G_{c1}, G_{c2}, G_{c3}, G_{c4}\} = \int \mathbf{N}'_c w_{,x} dx \quad (2.5.28)$$

$$\mathbf{u}_a = \{u_1, u_2\} \quad (2.5.29)$$

將(2.5.25)代入(2.5.9)整理可得

$$x_p = \mathbf{N}_a^t \mathbf{u}_a + x + \frac{x}{2L} (\mathbf{G}_b^t \mathbf{u}_b + \mathbf{G}_c^t \mathbf{u}_c) - \frac{1}{2} \int_0^x (v_{,x}^2 + w_{,x}^2) dx \quad (2.5.30)$$

$$\mathbf{N}_a = \left\{ \frac{1-\xi}{2}, \frac{1+\xi}{2} \right\} \quad (2.5.31)$$

2.6 Euler 梁的應變、速度、加速度

為了推導上的方便，本節中我們將先推導出梁的應變、速度與加速度以及梁的位置向量變分、應變的變分。

2.6.1 梁的應變

假如將(2.5.1)式中的 x 、 y 、 z 視為拉格蘭日座標(Lagrange coordinates)，則 Green strains ϵ_{11} 、 ϵ_{12} 、 ϵ_{13} 可以表示成[24]:

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_1^t \mathbf{g}_1 - 1), \quad \epsilon_{12} = \frac{1}{2} \mathbf{g}_1^t \mathbf{g}_2, \quad \epsilon_{13} = \frac{1}{2} \mathbf{g}_1^t \mathbf{g}_3 \quad (2.6.1)$$

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}, \quad \mathbf{g}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}, \quad \mathbf{g}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \quad (2.6.2)$$

將(2.5.9)、(2.5.17)帶回(2.6.2)，可得 \mathbf{g}_i 的分量 g_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) 如下

$$g_{11} = 1 + \epsilon_o - \frac{1}{2}(v_{,x}^2 + w_{,x}^2) + y(\theta_1 \theta_{2,x} + \theta_2 \theta_{1,x} - \theta_{3,x}) + z(\theta_1 \theta_{3,x} + \theta_3 \theta_{1,x} + \theta_{2,x}) + \theta_{1,xx} \omega \quad (2.6.3)$$

$$g_{12} = (1 + \epsilon_o) \theta_3 - y(\theta_1 \theta_{1,x} + \theta_3 \theta_{3,x}) + z\left(\frac{1}{2} \theta_2 \theta_{3,x} + \frac{1}{2} \theta_3 \theta_{2,x} - \theta_{1,x}\right) + \theta_{1,xx} \theta_3 \omega + \theta_{1,x} \theta_{3,x} \omega$$

$$g_{13} = -(1 + \epsilon_o) \theta_2 + y\left(\frac{1}{2} \theta_2 \theta_{3,x} + \frac{1}{2} \theta_3 \theta_{2,x} + \theta_{1,x}\right) - z(\theta_1 \theta_{1,x} + \theta_2 \theta_{2,x}) - \theta_{1,xx} \theta_2 \omega - \theta_{1,x} \theta_{2,x} \omega$$

$$g_{21} = \theta_1 \theta_2 - \theta_3 + \theta_{1,x} \omega_{,y}$$

$$g_{22} = 1 - \frac{1}{2}(\theta_1^2 + \theta_3^2) + \theta_{1,x} \theta_3 \omega_{,y}$$

$$g_{23} = \theta_1 + \frac{1}{2} \theta_2 \theta_3 - \theta_{1,x} \theta_2 \omega_{,y}$$

$$g_{31} = \theta_1 \theta_3 + \theta_2 + \theta_{1,x} \omega_{,z}$$

$$g_{32} = -\theta_1 + \frac{1}{2} \theta_2 \theta_3 + \theta_{1,x} \theta_3 \omega_{,z}$$

$$g_{33} = 1 - \frac{1}{2} (\theta_1^2 + \theta_2^2) - \theta_{1,x} \theta_2 \omega_{,z}$$

將(2.6.2)式及(2.6.3)式代回(2.6.1)式，保留變形參數及其微分到二次項

可得：

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^1 + \varepsilon_{11}^2 \quad (2.6.4-a)$$

$$\varepsilon_{11}^1 = \varepsilon_o - yv_{,xx} - zw_{,xx} + \omega\theta_{1,xx}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^2 = & \frac{1}{2} \varepsilon_o^2 + \varepsilon_{o,x} (yv_{,x} + zw_{,x}) + \frac{1}{2} (y^2 + z^2) \theta_{1,x}^2 - y\theta_1 w_{,xx} + z\theta_1 v_{,xx} + \frac{1}{2} y^2 v_{,xx}^2 \\ & + yzv_{,xx} w_{,xx} + \frac{1}{2} z^2 w_{,xx}^2 + \omega \varepsilon_o \theta_{1,xx} - \theta_{1,xx} \omega (yv_{,xx} + zw_{,xx}) + \frac{1}{2} \omega^2 \theta_{1,xx}^2 \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^1 + \varepsilon_{12}^2 \quad (2.6.4-b)$$

$$\varepsilon_{12}^1 = \frac{1}{2} (\omega_{,y} - z) \theta_{1,x}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12}^2 = & \frac{1}{2} [\omega_{,y} \varepsilon_o \theta_{1,x} + (\omega - y\omega_{,y}) \theta_{1,x} v_{,xx} - z\omega_{,y} \theta_{1,x} w_{,xx} + \omega \omega_{,y} \theta_{1,x} \theta_{1,xx}] \\ & + \frac{1}{4} z (v_{,x} w_{,xx} - w_{,x} v_{,xx}) \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{13}^1 + \varepsilon_{13}^2 \quad (2.6.4-c)$$

$$\varepsilon_{13}^1 = \frac{1}{2} (\omega_{,z} + y) \theta_{1,x}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{13}^2 = & \frac{1}{2} [\omega_{,z} \varepsilon_o \theta_{1,x} + (\omega - z\omega_{,z}) \theta_{1,x} w_{,xx} - y\omega_{,z} \theta_{1,x} v_{,xx} + \omega \omega_{,z} \theta_{1,x} \theta_{1,xx}] \\ & + \frac{1}{4} y (w_{,x} v_{,xx} - v_{,x} w_{,xx}) \end{aligned}$$

其中 ε_{1j}^k ($j=1,2,3, k=1,2$) 代表 ε_{1j}^k 中之 k 次項。

2.6.2 梁的速度與加速度：

因梁的位置向量是在旋轉元素座標上描述，所以Q點的絕對速度在當前元素座標的分量可表示成

$$\mathbf{v} = \{v_1, v_2, v_3\} = \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}} \quad (2.6.5)$$

$$\mathbf{v}_o = \boldsymbol{\Omega} \{v_{o1}, v_{o2}, v_{o3}\} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_o \quad (2.6.6)$$

$$\mathbf{r}_o = \{r_{o1}, r_{o2}, r_{o3}\} = \mathbf{A}_{GE}^t \mathbf{r}_{oG} \quad (2.6.7)$$

$$\mathbf{r}_{oG} = \{R \cos \alpha + X_o, -R \sin \alpha \cos \beta + Y_o, R \sin \alpha \sin \beta + Z_o\} \quad (2.6.8)$$

其中 \mathbf{v}_o 為 o 點的絕對速度， $\dot{\mathbf{r}}$ 為 Q 點對元素座標原點 o 的速度， \mathbf{r}_{oG} 及 \mathbf{r}_o 為元素座標原點 o 在總體座標的位置向量分別以總體座標及當前元素座標的分量表示式。

將(2.3.3)、(2.6.7)式代入(2.6.6)式可得：

$$\mathbf{v}_o = \boldsymbol{\Omega} \{v_{o1}, v_{o2}, v_{o3}\} \quad (2.6.9)$$

$$v_{o1} = n_2 r_{o3} - n_3 r_{o2}$$

$$v_{o2} = n_3 r_{o1} - n_1 r_{o3}$$

$$v_{o3} = n_1 r_{o2} - n_2 r_{o1}$$

將(2.5.19)式對時間 t 微分，Q 點對元素座標原點 o 的速度可表示成

$$\dot{\mathbf{r}} = \{\dot{r}_1, \dot{r}_2, \dot{r}_3\} \quad (2.6.10)$$

$$\dot{r}_1 = \dot{x}_p + y(\dot{\theta}_2 \theta_1 + \theta_2 \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_3) + z(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 \theta_1 + \theta_3 \dot{\theta}_1) + \dot{\theta}_{1,x} \omega$$

$$\dot{r}_2 = \dot{v} + y(-\theta_1 \dot{\theta}_1 - \theta_3 \dot{\theta}_3) + z\left(\frac{1}{2} \dot{\theta}_2 \theta_3 + \frac{1}{2} \theta_2 \dot{\theta}_3 - \dot{\theta}_1\right) + \dot{\theta}_{1,x} \theta_3 \omega + \theta_{1,x} \dot{\theta}_3 \omega$$

$$\dot{r}_3 = \dot{w} + y\left(\frac{1}{2} \dot{\theta}_2 \theta_3 + \frac{1}{2} \theta_2 \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1\right) + z(-\theta_1 \dot{\theta}_1 - \theta_2 \dot{\theta}_2) - \dot{\theta}_{1,x} \theta_2 \omega - \theta_{1,x} \dot{\theta}_2 \omega$$

由(2.3.3)、(2.5.17)式，(2.6.5)式中之 $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ 可得

$$\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{\Omega} \{v_{p1}, v_{p2}, v_{p3}\} \quad (2.6.11)$$

$$v_{p1} = n_2 r_3 - n_3 r_1$$

$$v_{p2} = n_3 r_1 - n_1 r_3$$

$$v_{p3} = n_1 r_2 - n_2 r_1$$

將(2.6.9)至(2.6.11)式代入(2.6.5)式，Q點的絕對速度分量可表示成

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_o + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} + \dot{\mathbf{r}} = \{v_1, v_2, v_3\} \quad (2.6.12)$$

$$v_1 = \mathbf{\Omega}(n_2 r_{o3} - n_3 r_{o2}) + \mathbf{\Omega}(n_2 r_3 - n_3 r_1) + \dot{r}_1$$

$$v_2 = \mathbf{\Omega}(n_3 r_{o1} - n_1 r_{o3}) + \mathbf{\Omega}(n_3 r_1 - n_1 r_3) + \dot{r}_2$$

$$v_3 = \mathbf{\Omega}(n_1 r_{o2} - n_2 r_{o1}) + \mathbf{\Omega}(n_1 r_2 - n_2 r_1) + \dot{r}_3$$

因梁的位置向量是在旋轉元素座標上描述，所以Q點的絕對加速度在元素座標的分量可表示成

$$\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\} = \mathbf{a}_o + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) + 2\mathbf{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{r}} \quad (2.6.13)$$

$$\mathbf{a}_o = \mathbf{\Omega}^2 \{a_{o1}, a_{o2}, a_{o3}\} = \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_o) \quad (2.6.14)$$

其中 \mathbf{a}_o 為o點的絕對加速度， $\ddot{\mathbf{r}}$ 為P點對元素座標原點o的加速度，因為本研究僅考慮等角速度的旋轉，所以 $\dot{\mathbf{\Omega}}$ 為零。

將(2.3.3)、(2.6.7)式代入(2.6.13)式之 $\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_o)$ 可得

$$\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_o) = \mathbf{\Omega}^2 \{a_{o1}, a_{o2}, a_{o3}\} \quad (2.6.15)$$

$$a_{o1} = n_1 n_2 r_{o2} - (n_2^2 + n_3^2) r_{o1} + n_1 n_3 r_{o3}$$

$$a_{o2} = n_2 n_3 r_{o3} - (n_1^2 + n_3^2) r_{o2} + n_1 n_2 r_{o1}$$

$$a_{o3} = n_1 n_3 r_{o1} - (n_1^2 + n_2^2) r_{o3} + n_2 n_3 r_{o2}$$

將(2.3.3)、(2.5.17)式代入(2.6.13)式之 $\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$ 可得

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\Omega}^2 \{a_{p1}, a_{p2}, a_{p3}\} \quad (2.6.16)$$

$$a_{p1} = n_1 n_2 r_2 - (n_2^2 + n_3^2) r_1 + n_1 n_3 r_3$$

$$a_{p2} = n_2 n_3 r_3 - (n_1^2 + n_3^2) r_2 + n_1 n_2 r_1$$

$$a_{p3} = n_1 n_3 r_1 - (n_1^2 + n_2^2) r_3 + n_2 n_3 r_2$$

將(2.3.3)、(2.6.10)式代入(2.6.13)式之 $\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}$ 可得

$$\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\Omega} \{n_2 \dot{r}_3 - n_3 \dot{r}_2, n_3 \dot{r}_1 - n_1 \dot{r}_2, n_1 \dot{r}_2 - n_2 \dot{r}_1\} \quad (2.6.17)$$

將(2.6.10)式對時間 t 微分，Q點對元素座標原點o的加速度可表示成

$$\ddot{\mathbf{r}} = \{\ddot{r}_1, \ddot{r}_2, \ddot{r}_3\} \quad (2.6.18)$$

$$\ddot{r}_1 = \ddot{x}_p + y(\ddot{\theta}_2 \theta_1 + 2\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_1 + \theta_2 \ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_3) + z(\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_3 \theta_1 + 2\dot{\theta}_3 \dot{\theta}_1 + \theta_3 \ddot{\theta}_1) + \dot{\theta}_{1,x} \omega$$

$$\ddot{r}_2 = \ddot{v} + y(-\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_1 - \theta_1 \ddot{\theta}_1 - \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_3 - \theta_3 \ddot{\theta}_3) + z(\frac{1}{2} \ddot{\theta}_2 \theta_3 + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + \frac{1}{2} \theta_2 \ddot{\theta}_3 - \ddot{\theta}_1) + \dot{\theta}_{1,x} \theta_3 \omega + 2\dot{\theta}_{1,x} \dot{\theta}_3 \omega + \theta_{1,x} \ddot{\theta}_3 \omega$$

$$\ddot{r}_3 = \ddot{w} + y(\frac{1}{2} \ddot{\theta}_2 \theta_3 + \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + \frac{1}{2} \theta_2 \ddot{\theta}_3 + \ddot{\theta}_1) + z(-\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_1 - \theta_1 \ddot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_2 - \theta_2 \ddot{\theta}_2) - \dot{\theta}_{1,x} \theta_2 \omega - 2\dot{\theta}_{1,x} \dot{\theta}_2 \omega + \theta_{1,x} \ddot{\theta}_2 \omega$$

將(2.6.14)至(2.6.18)式代入(2.6.13)式，Q點的絕對加速度分量可表示成

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_o + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \ddot{\mathbf{r}} = \{a_1, a_2, a_3\} \quad (2.6.19)$$

$$a_1 = \boldsymbol{\Omega}^2 [n_1 n_2 r_{o2} - (n_2^2 + n_3^2) r_{o1} + n_1 n_3 r_{o3}] + \boldsymbol{\Omega}^2 [n_1 n_2 r_2 - (n_2^2 + n_3^2) r_1 + n_1 n_3 r_3] + 2\boldsymbol{\Omega} (n_2 \dot{r}_3 - n_3 \dot{r}_2) + \ddot{r}_1$$

$$a_2 = \boldsymbol{\Omega}^2 [n_2 n_3 r_{o3} - (n_1^2 + n_3^2) r_{o2} + n_1 n_2 r_{o1}] + \boldsymbol{\Omega}^2 [n_2 n_3 r_3 - (n_1^2 + n_3^2) r_2 + n_1 n_2 r_1]$$

$$\begin{aligned}
& + 2\Omega(n_3\dot{r}_1 - n_1\dot{r}_3) + \ddot{r}_2 \\
a_3 = & \Omega^2[n_1n_3r_{o1} - (n_1^2 + n_2^2)r_{o3} + n_2n_3r_{o2}] + \Omega^2[n_1n_3r_1 - (n_1^2 + n_2^2)r_3 + n_2n_3r_2] \\
& + 2\Omega(n_1\dot{r}_2 - n_2\dot{r}_1) + \ddot{r}_3
\end{aligned}$$

2.6.3 梁的位置向量與應變的變分:

本文利用虛功原理及d'Alembert原理推導運動方程式，所以需要位置向量及應變的變分。由(2.5.17)及(2.5.30)式可得

$$\delta\mathbf{r} = \{\delta r_1, \delta r_2, \delta r_3\} \quad (2.6.20)$$

$$\begin{aligned}
\delta r_1 = & \delta x_p + \delta\theta_1(z\theta_3 + y\theta_2) + \delta\theta_2(z + y\theta_1) + \delta\theta_3(-y + z\theta_1) \\
& + \delta\theta_{1,x}(1 - \frac{1}{2}\theta_2^2 - \frac{1}{2}\theta_3^2)\omega \\
\delta r_2 = & \delta v + \delta\theta_1(-z - y\theta_1) + \delta\theta_2(\frac{1}{2}z\theta_3) + \delta\theta_3(-y\theta_3 + \frac{1}{2}z\theta_2 + \omega\theta_{1,x}) \\
& + \delta\theta_{1,x}(\omega\theta_3) \\
\delta r_3 = & \delta w + \delta\theta_1(y - z\theta_1) + \delta\theta_2(\frac{1}{2}y\theta_3 - z\theta_2 - \omega\theta_{1,x}) + \delta\theta_3(\frac{1}{2}y\theta_2) \\
& + \delta\theta_{1,x}(\omega\theta_2)
\end{aligned}$$

其中

$$\delta x_p = \delta\mathbf{u}_a^t \mathbf{N}_a + \frac{x}{L}(\delta\mathbf{u}_b^t \mathbf{G}_b + \delta\mathbf{u}_c^t \mathbf{G}_c) - \int_0^x (v_{,x} \delta v_{,x} + w_{,x} \delta w_{,x}) dx \quad (2.6.21)$$

由(2.6.4)及(2.5.25)式可以得到應變的變分

$$\delta\varepsilon_{11} = \delta\varepsilon_{11}^0 + \delta\varepsilon_{11}^1 \quad (2.6.22-a)$$

$$\delta\varepsilon_{11}^0 = \delta\varepsilon_o - y\delta v_{,xx} - z\delta w_{,xx} + \delta\theta_{1,xx}\omega$$

$$\begin{aligned}
\delta\varepsilon_{11}^1 &= \delta\varepsilon_o(\varepsilon_o + \omega\theta_{1,xx}) + \delta v_{,x}(y\varepsilon_{o,x}) \\
&+ \delta v_{,xx}(y^2v_{,xx} + yzw_{,xx} + z\theta_1 - y\omega\theta_{1,xx}) + \delta w_{,x}(z\varepsilon_{o,x}) \\
&+ \delta w_{,xx}(yzv_{,xx} + z^2w_{,xx} - y\theta_1 - z\omega\theta_{1,xx}) \\
&+ \delta\theta_1(zv_{,xx} - yw_{,xx}) + \delta\theta_{1,x}(y^2 + z^2)\theta_{1,x} \\
&+ \delta\theta_{1,xx}(\omega\varepsilon_o - y\omega v_{,xx} - z\omega w_{,xx} + \omega^2\theta_{1,xx})
\end{aligned}$$

$$\delta\varepsilon_{12} = \delta\varepsilon_{12}^0 + \delta\varepsilon_{12}^1 \quad (2.6.22-b)$$

$$\delta\varepsilon_{12}^0 = \frac{1}{2}\delta\theta_{1,x}(\omega_{,y} - z)$$

$$\begin{aligned}
\delta\varepsilon_{12}^1 &= \delta\varepsilon_o\left(\frac{1}{2}\omega_{,y}\theta_{1,x}\right) + \delta w_{,x}\left(-\frac{1}{4}zv_{,xx}\right) \\
&+ \delta w_{,xx}\left[\frac{1}{4}zv_{,x} - \frac{1}{2}\omega_{,y}z\theta_{1,x}\right] + \delta v_{,x}\left(\frac{1}{4}zw_{,xx}\right) \\
&+ \delta v_{,xx}\left[\frac{1}{2}(\omega - y\omega_{,y})\theta_{1,x} - \frac{1}{4}zw_{,x}\right] \\
&+ \delta\theta_{1,x}\left[\frac{1}{2}\omega_{,y}\varepsilon_o + \frac{1}{2}(\omega - y\omega_{,y})v_{,xx} - \frac{1}{2}z\omega_{,y}w_{,xx} + \frac{1}{2}\omega\omega_{,y}\theta_{1,x}\right] \\
&+ \delta\theta_{1,xx}\left(\frac{1}{2}\omega\omega_{,y}\theta_{1,x}\right)
\end{aligned}$$

$$\delta\varepsilon_{13} = \delta\varepsilon_{13}^0 + \delta\varepsilon_{13}^1 \quad (2.6.22-c)$$

$$\delta\varepsilon_{13}^0 = \frac{1}{2}\delta\theta_{1,x}(\omega_{,z} + y)$$

$$\begin{aligned}
\delta\varepsilon_{13}^1 &= \delta\varepsilon_o\left(\frac{1}{2}\omega_{,z}\theta_{1,x}\right) + \delta w_{,x}\left(\frac{1}{4}yv_{,xx}\right) \\
&+ \delta w_{,xx}\left[-\frac{1}{4}yv_{,x} + \frac{1}{2}(\omega - z\omega_{,z})\theta_{1,x}\right] \\
&+ \delta v_{,x}\left(-\frac{1}{4}yw_{,xx}\right) + \delta v_{,xx}\left(-\frac{1}{2}y\omega_{,z}\theta_{1,x} + \frac{1}{4}yw_{,x}\right) \\
&+ \delta\theta_{1,x}\left[\frac{1}{2}\omega_{,z}\varepsilon_o + \frac{1}{2}(\omega - z\omega_{,z})w_{,xx} - \frac{1}{2}y\omega_{,z}v_{,xx} + \frac{1}{2}\omega\omega_{,z}\theta_{1,x}\right] \\
&+ \delta\theta_{1,xx}\left(\frac{1}{2}\omega\omega_{,z}\theta_{1,x}\right) + \delta v_{,x}\left(-\frac{1}{4}yw_{,xx}\right)
\end{aligned}$$

$$\delta\varepsilon_0 = \frac{1}{L}(\delta\mathbf{u}_a^t \mathbf{G}_a + \delta\mathbf{u}_b^t \mathbf{G}_b + \delta\mathbf{u}_c^t \mathbf{G}_c) \quad (2.6.23)$$

2.7 元素節點內力之推導

本文將元素的節點內力 \mathbf{f} 視為作用元素節點的外力。本文利用虛功原理及 d'Alembert 原理在旋轉元素座標上推導元素節點內力。若在元素當前的變形位置給元素節點 j ($j=1,2$) 一個虛位移 $\delta\boldsymbol{\phi}_j = \{\delta\phi_{1j}, \delta\phi_{2j}, \delta\phi_{3j}\}$ ，

$\delta\mathbf{u}_j = \{\delta u_j, \delta v_j, \delta w_j\}$ ， $\delta\boldsymbol{\beta} = \{\delta\beta_1, \delta\beta_2\}$ ，則由虛功原理可知

$$\begin{aligned} \delta W_{ext} &= \delta\mathbf{q}^t \mathbf{f} \\ &= \delta W_{int} = \int_V (\sigma_{11} \delta\varepsilon_{11} + 2\sigma_{12} \delta\varepsilon_{12} + 2\sigma_{13} \delta\varepsilon_{13}) dV + \int_V \rho \delta \mathbf{r}^t \mathbf{a} dV \\ &= \delta\mathbf{q}_\theta^t \mathbf{f}_\theta \end{aligned} \quad (2.7.1)$$

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11}, \sigma_{12} = 2G\varepsilon_{12}, \sigma_{13} = 2G\varepsilon_{13} \quad (2.7.2)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^D + \mathbf{f}^I = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{m}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{m}_2, \mathbf{B}\} \quad (2.7.3)$$

$$\mathbf{f}_\theta = \mathbf{f}_\theta^D + \mathbf{f}_\theta^I = \{\mathbf{f}_1^\theta, \mathbf{m}_1^\theta, \mathbf{f}_2^\theta, \mathbf{m}_2^\theta, \mathbf{B}\} \quad (2.7.4)$$

$$\delta\mathbf{q} = \{\delta\mathbf{u}_1, \delta\boldsymbol{\phi}_1, \delta\mathbf{u}_2, \delta\boldsymbol{\phi}_2, \delta\boldsymbol{\beta}\} \quad (2.7.5)$$

$$\delta\mathbf{q}_\theta = \{\delta\mathbf{u}_1, \delta\boldsymbol{\theta}_1^*, \delta\mathbf{u}_2, \delta\boldsymbol{\theta}_2^*, \delta\boldsymbol{\beta}\} \quad (2.7.6)$$

其中 δW_{ext} 為外力所作的虛功， δW_{int} 為內力所作的虛功，

$\delta_j^* = \{\delta\theta_{1j}, -\delta w'_j, \delta v'_j\}$ ， $\delta\mathbf{q}_\theta$ 為元素節點變形參數 \mathbf{q}_θ 受虛位移 $\delta\mathbf{q}$ 作用引起的變量， $\mathbf{f}_j = \{f_{1j}, f_{2j}, f_{3j}\}$ 、 $\mathbf{f}_j^\theta = \{f_{1j}^\theta, f_{2j}^\theta, f_{3j}^\theta\}$ 、 $\mathbf{m}_j = \{m_{1j}, m_{2j}, m_{3j}\}$ 、 $\mathbf{m}_j^\theta = \{m_{1j}^\theta, m_{2j}^\theta, m_{3j}^\theta\}$ ($j=1,2$)、 $\mathbf{B} = \{B_1, B_2\}$ ， f_{ij} 、 f_{1j}^θ 為作用在元素節點 j ， x_i 方向的內力， m_{ij} 為作用在元素節點 j ，繞 x_i 軸的力矩、 m_{ij}^θ 為作用在元素節點 j 的廣義力矩之 x_i 分量， B_j 為作用在元素節點 j 的雙力矩(Bimoment)。

\mathbf{f} 、 \mathbf{f}_θ 為梁元素對應於虛位移 $\delta\mathbf{q}$ 、 $\delta\mathbf{q}_\theta$ 的廣義元素節點內力， \mathbf{f}^D 、 \mathbf{f}^I 為對應於 \mathbf{f} 的元素節點變形內力及元素節點慣性力， \mathbf{f}_θ^D 、 \mathbf{f}_θ^I 為對應於 \mathbf{f}_θ 的

元素節點變形內力及元素節點慣性力， $\int_V (\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} + 2\sigma_{12} \delta \varepsilon_{12} + 2\sigma_{13} \delta \varepsilon_{13}) dV$ 為應力所作的虛功， $\int_V \rho \delta \mathbf{r}^t \mathbf{a} dV$ 為慣性力所作的虛功， $\delta \varepsilon_{1j} (j=1, 2, 3)$ 為梁元素對應於虛位移 $\delta \mathbf{q}_\theta$ 的虛應變， E 為楊氏係數， G 為剪力模數， ρ 為梁的密度， V 為梁元素未變形前的體積， \mathbf{a} 為梁元素的絕對加速度。本文中梁元素的應變、位置向量、速度、加速度都表示成節點變形參數 \mathbf{q}_θ 的函數，為了推導上的方便，本文中將內力所作的虛功先表示成等效節點力 \mathbf{f}_θ 對 $\delta \mathbf{q}_\theta$ 所作的虛功，再由 $\delta \mathbf{q}$ 與 $\delta \mathbf{q}_\theta$ 的關係求得元素的節點內力 \mathbf{f} 與 \mathbf{f}_θ 的關係。

$\delta \mathbf{q}$ 與 $\delta \mathbf{q}_\theta$ 的關係可以表示如下

$$\delta \mathbf{q}_\theta = \mathbf{T}_{\theta\phi} \delta \mathbf{q} \quad (2.7.7)$$

$$\mathbf{T}_{\theta\phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{0}} \\ \mathbf{T}_{b1} & \mathbf{T}_{a1} & -\mathbf{T}_{b1} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{0}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{0}} \\ \mathbf{T}_{b2} & \mathbf{0} & -\mathbf{T}_{b2} & \mathbf{T}_{a2} & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{0}}^t & \bar{\mathbf{0}}^t & \bar{\mathbf{0}}^t & \bar{\mathbf{0}}^t & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \quad (2.7.8)$$

$$\mathbf{T}_{bj} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\theta_{2j}/L & 0 & 0 \\ -\theta_{3j}/L & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{aj} = \begin{bmatrix} 1 & \underline{\theta_{3j}/2} & \underline{-\theta_{2j}/2} \\ -\underline{\theta_{3j}} & 1 + \varepsilon_0 & 0 \\ \underline{\theta_{2j}} & 0 & 1 + \varepsilon_0 \end{bmatrix}, \quad (j = 1, 2) \quad (2.7.9)$$

當元素較多時，(2.7.9)式中加底線的項會趨近於零，故可以忽略不計。

將(2.7.1)式代入(2.7.7)式可得

$$\mathbf{f} = \mathbf{T}_{\theta\phi}^t \mathbf{f}_\theta \quad (2.7.10)$$

由(2.7.1)及(2.7.2)式可以求得 \mathbf{f}_θ ，為了推導上的方便，本文將在下兩節中分別用應力所作的虛功 $\int_V (\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} + 2\sigma_{12} \delta \varepsilon_{12} + 2\sigma_{13} \delta \varepsilon_{13}) dV$ 及慣性力所作

的虛功 $\int_V \rho \delta \mathbf{r}^t \mathbf{a} dV$ 推導 \mathbf{f}_θ 中等效元素節點變形內力 \mathbf{f}_θ^D 及等效元素節點慣性 \mathbf{f}_θ^I 。

2.7.1 等效節點變形內力 \mathbf{f}_θ^D 的推導

由(2.7.1)、(2.7.2)、(2.7.6)、(2.5.20)–(2.5.23)式及(2.5.29)式可得

$$\delta \mathbf{q}_\theta^t \mathbf{f}_\theta^D = \delta \mathbf{u}_a^t \mathbf{f}_a^D + \delta \mathbf{u}_b^t \mathbf{f}_b^D + \delta \mathbf{u}_c^t \mathbf{f}_c^D + \delta \mathbf{u}_d^t \mathbf{f}_d^D = \int_V (E \varepsilon_{11} \delta \varepsilon_{11} + 4G \varepsilon_{12} \delta \varepsilon_{12} + 4G \varepsilon_{13} \delta \varepsilon_{13}) dV \quad (2.7.11)$$

$$\mathbf{f}_a^D = \{f_{11}^{\theta D}, f_{12}^{\theta D}\}, \mathbf{f}_b^D = \{f_{21}^{\theta D}, m_{31}^{\theta D}, f_{22}^{\theta D}, m_{32}^{\theta D}\} \quad (2.7.12)$$

$$\mathbf{f}_c^D = \{f_{31}^{\theta D}, m_{21}^{\theta D}, f_{32}^{\theta D}, m_{22}^{\theta D}\}, \mathbf{f}_d^D = \{m_{11}^{\theta D}, B_1, m_{12}^{\theta D}, B_2\}$$

其中 \mathbf{f}_i^D ($i = a, b, c, d$) 為對應於 $\delta \mathbf{u}_i$ ($i = a, b, c, d$) 的廣義節點變形力向量，

$\delta \mathbf{u}_i$ 為(2.5.20)–(2.5.23)式及(2.5.29)式定義之 \mathbf{u}_i 的變分。 \mathbf{f}_θ^D 可以由 \mathbf{f}_i^D

($i = a, b, c, d$) 組合而成。

將(2.6.4-a)式之 ε_{1j} 及(2.6.22-a)式之 $\delta \varepsilon_{1j}$ ($j = 1, 2, 3$) 代入(2.7.12)式，即可以求得 \mathbf{f}_i^D ($i = a, b, c, d$)。因本文中 ε_{1j} 僅保留到變形參數到的二次項，所以 \mathbf{f}_i^D 亦僅保留到變形參數到的二次項，但文獻[23]提到 $\theta_{1,x}$ 的三次項不能忽略，所以本文中亦將其保留。因本文採用共旋轉有限元素法，所以隨著元素數目的增加， θ_i ($i = 1, 2, 3$) 都會趨近於零、 $\theta_{i,x}$ ($i = 1, 2, 3$) 都會趨近於一個常數，文獻[25]中由數值例題發現當元素數目較多時可以將含 θ_i ($i = 1, 2, 3$) 的項忽略，因此本文中將 \mathbf{f}_i^D 中含 θ_i ($i = 1, 2, 3$) 的項忽略。

廣義節點變形力向量 \mathbf{f}_i^D ($i = a, b, c, d$) 可表示如下

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_a^D &= \frac{1}{L} \mathbf{G}_a [AEL\varepsilon_o + \frac{3}{2} AEL\varepsilon_o^2 + \frac{1}{2} EI_p \int \theta_{1,x}^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2} EI_y \int w_{,xx}^2 dx + \frac{1}{2} EI_z \int v_{,xx}^2 dx + \frac{3}{2} EI_\omega \int \theta_{1,xx}^2 dx] \end{aligned} \quad (2.7.13)$$

$$\mathbf{f}_b^D = EI_z (1 + \varepsilon_o) \int \mathbf{N}_b'' v_{,xx} dx + f_{12}^D \mathbf{G}_b + 3E\alpha_{\omega yz} \int \mathbf{N}_b'' \theta_{1,xx} w_{,xx} dx$$

$$\mathbf{f}_c^D = EI_y (1 + \varepsilon_o) \int \mathbf{N}_c'' w_{,xx} dx + f_{12}^D \mathbf{G}_c + 3E\alpha_{\omega yz} \int \mathbf{N}_c'' \theta_{1,xx} v_{,xx} dx$$

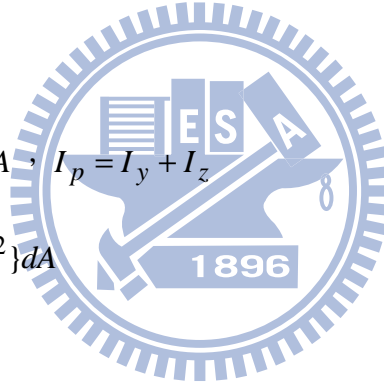
$$\begin{aligned} \mathbf{f}_d^D &= (GJ + EI_p \varepsilon_o) \int \mathbf{N}_d' \theta_{1,x} dx + EI_\omega (1 + 3\varepsilon_o) \int \mathbf{N}_b'' \theta_{1,xx} dx \\ &\quad + 3E\alpha_{\omega yz} \int \mathbf{N}_d'' v_{,xx} w_{,xx} dx + \frac{1}{2} EK_I \int \mathbf{N}_d' \theta_{1,x}^3 dx \end{aligned}$$

$$I_y = \int z^2 dA, \quad I_z = \int y^2 dA \quad (2.7.14)$$

$$I_\omega = \int \omega^2 dA, \quad \alpha_{\omega yz} = \int \omega yz dA, \quad I_p = I_y + I_z$$

$$J = \int \{(-z + \omega_y)^2 + (y + \omega_z)^2\} dA$$

$$K_I = \int (y^2 + z^2)^2 dA$$



2.7.2 等效節點慣性力 \mathbf{f}_θ^I 的推導

由(2.7.1)、(2.7.4)、(2.7.6)、(2.5.20)–(2.5.23)式及(2.5.29)式可得

$$\delta \mathbf{q}_\theta^t \mathbf{f}_\theta^I = \delta \mathbf{u}_a^t \mathbf{f}_a^I + \delta \mathbf{u}_b^t \mathbf{f}_b^I + \delta \mathbf{u}_c^t \mathbf{f}_c^I + \delta \mathbf{u}_d^t \mathbf{f}_d^I = \int_1^2 \rho \delta \mathbf{r}^t \mathbf{a} dV \quad (2.7.15)$$

$$\mathbf{f}_a^I = \{f_{11}^\theta, f_{12}^\theta\}, \quad \mathbf{f}_b^I = \{f_{21}^\theta, m_{31}^\theta, f_{22}^\theta, m_{32}^\theta\} \quad (2.7.16)$$

$$\mathbf{f}_c^I = \{f_{31}^\theta, m_{21}^\theta, f_{32}^\theta, m_{22}^\theta\}, \quad \mathbf{f}_d^I = \{m_{11}^\theta, B_1^I, m_{12}^\theta, B_2^I\}$$

其中 \mathbf{f}_i^I ($i = a, b, c, d$) 為對應於 $\delta \mathbf{u}_i$ ($i = a, b, c, d$) 的廣義節點慣性力向量，

$\delta \mathbf{u}_i$ 為(2.5.20)–(2.5.23)式及(2.5.29)式定義之 \mathbf{u}_i 的變分。 \mathbf{f}_θ^I 可以由 \mathbf{f}_i^I ($i = a, b, c, d$) 組合而成。

將(2.6.19)及(2.6.20)式，代入(2.7.15)式，即可以求得 \mathbf{f}_i^I ($i = a, b, c, d$)。

因本文中 $\delta \mathbf{r}$ 僅保留到變形參數到的一次項，絕對加速度 \mathbf{a} 中保留變形參數對時間的微分到二次項，所以 \mathbf{f}_i^I 中亦僅保留變形參數到的一次項、變形參數對時間的微分到二次項。因本文採用共旋轉有限元素法，所以隨著元素數目的增加， θ_i ($i = 1, 2, 3$) 都會趨近於零， $\theta_{i,x}$ ($i = 1, 2, 3$) 都會趨近於一個常數，本文中曾嘗試忽略 \mathbf{f}_i^I 中含 θ_i ($i = 1, 2, 3$)的項，但發現會減慢旋轉梁之穩態解精度的收斂速率，因此本文中將 \mathbf{f}_i^I 中含 θ_i ($i = 1, 2, 3$)的項保留。

廣義節點慣性力向量 \mathbf{f}_i^I ($i = a, b, c, d$)可表示如下



(2.7.17)

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_a^I = & \Omega^2 \rho A \int \mathbf{N}_a a_{A01} dx + \Omega^2 \rho A \int \mathbf{N}_a [-(n_2^2 + n_3^2)(\mathbf{N}_a^t \mathbf{u}_a + x) + n_1 n_2 v + n_1 n_3 w] dx \\ & + \Omega^2 \rho \int \mathbf{G}_a (n_1 n_2 \frac{1}{L} I_z v_{,x} + \frac{1}{L} n_1 n_3 I_y w_{,x}) dx + 2\Omega \rho A \int (n_2 \mathbf{N}_a \dot{w} - n_3 \mathbf{N}_a \dot{v}) dx \\ & + \rho A \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_a^t \ddot{\mathbf{u}}_a dx + \rho A \int \mathbf{N}_a \left[\frac{x}{L} (\dot{\mathbf{G}}_b^t \dot{\mathbf{u}}_b + \dot{\mathbf{G}}_c^t \dot{\mathbf{u}}_c) - \int_0^x \dot{v}_{,x}^2 dx - \int_0^x \dot{w}_{,x}^2 dx \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_b^I = & \Omega^2 \rho A a_{A02} \int \mathbf{N}_b dx \\ & + \Omega^2 \rho \int \{ \mathbf{N}_b A [n_1 n_2 (\mathbf{N}_a^t \mathbf{u}_a + x) - (n_3^2 + n_1^2) v + n_3 n_2 w] \\ & + \mathbf{N}_b' [-n_1 n_2 I_z (1 - \varepsilon_o) + (n_1^2 - n_2^2) I_z (1 - \varepsilon_o)^2 v_{,x} + n_1 n_3 (I_y - I_z) (1 - \varepsilon_o) \theta_1 \\ & - \frac{1}{2} n_3 n_2 I_p (1 - \varepsilon_o)^2 w_{,x}] \} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\Omega\rho\int [\mathbf{N}_b A(n_3\mathbf{N}_a^t \dot{\mathbf{u}}_a - n_1\dot{w}) + \mathbf{N}'_b(1-\varepsilon_o)(-n_2I_z\dot{\theta}_1 + \underline{\underline{n_3I_\omega\theta_{1,x}\dot{\theta}_{1,x}}})]dx \\
& + \rho\int \{\mathbf{N}_b A\ddot{v} + \mathbf{N}'_b[(1-\varepsilon_o)^2I_z(2\underline{\dot{w}_{,x}\dot{\theta}_1} + \ddot{v}_{,x}) - 2(1-\varepsilon_o)\underline{I_z\dot{\varepsilon}_o\dot{v}_{,x}}]\}dx
\end{aligned}$$

$$\mathbf{f}_c^I = \Omega^2\rho Aa_{A03}\int \mathbf{N}_c dx$$

$$\begin{aligned}
& + \Omega^2\rho\int \{\mathbf{N}_c A[n_1n_3 \cdot (\mathbf{N}_a^t \mathbf{u}_a + x) + n_2n_3v - (n_1^2 + n_2^2)w] \\
& + \mathbf{N}'_c[-n_1n_3I_y(1-\varepsilon_o) + (n_1^2 - n_3^2)I_y(1-\varepsilon_o)^2w_{,x} + n_1n_2(I_y - I_z)(1-\varepsilon_o)\theta_1 \\
& - \frac{1}{2}n_2n_3I_p(1-\varepsilon_o)^2v_{,x}]\}dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\Omega\rho\int [\mathbf{N}_c A(n_1\dot{v} - n_2\mathbf{N}_a^t \dot{\mathbf{u}}_a) - \mathbf{N}'_c(1-\varepsilon_o)(n_3I_y\dot{\theta}_1 + \underline{\underline{n_2I_\omega\theta_{1,x}\dot{\theta}_{1,x}}})]dx \\
& + \rho\int \{\mathbf{N}_c A\ddot{w} - \mathbf{N}'_c[(1-\varepsilon_o)^2I_y(2\underline{\dot{v}_{,x}\dot{\theta}_1} - \ddot{w}_{,x}) + 2(1-\varepsilon_o)\underline{I_y\dot{\varepsilon}_o\dot{w}_{,x}}]\}dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_d^I = \Omega^2\rho\int \{ & n_2n_3(I_z - I_y) + \mathbf{N}_d\{[n_1n_3(I_y - I_z)(1-\varepsilon_o)v_{,x} + n_1n_2(I_y - I_z)(1-\varepsilon_o)w_{,x} \\
& + (n_3^2 - n_2^2)(I_z - I_y)\theta_1]\} - \mathbf{N}'_d I_\omega(n_2^2 + n_3^2)\theta_{1,x}\}dx \\
& + 2\Omega\int \{\mathbf{N}_d[n_2I_z(1-\varepsilon_o)\dot{v}_{,x} + n_3I_y(1-\varepsilon_o)\dot{w}_{,x}] \\
& - \mathbf{N}'_d(1-\varepsilon_o)(-I_\omega n_2\theta_{1,x}\dot{w}_{,x} + I_\omega n_3\theta_{1,x}\dot{v}_{,x})\}dx \\
& + \rho\int \{\mathbf{N}_d[I_p\ddot{\theta}_1 + \underline{(1-\varepsilon_o)^2(I_y - I_z)\dot{w}_{,x}\dot{v}_{,x}}] \\
& + \mathbf{N}'_d[I_\omega\ddot{\theta}_{1,x} - \underline{(1-\varepsilon_o)^2\theta_{1,x}I_\omega(\dot{w}_{,x}^2 + \dot{v}_{,x}^2)}]\}dx
\end{aligned}$$

(2.7.17)式中加單底線的項為速度的耦合項，加雙底線的項為速度與變形的耦合項因本研究僅探討以旋轉傾斜梁之穩態變形為平衡點的線性振動，故速度的耦合項可以忽略不計，所以本研究在 \mathbf{f}_i^I 、 \mathbf{f}_θ^I 、 \mathbf{f}^I 中都僅保留變形參數及其對時間的微分到一次項，由(2.7.4)式、(2.7.8)-(2.7.10)式可以知道

$$\mathbf{f}^I \approx \mathbf{f}_\theta^I \quad (2.7.18)$$

本研究在以後的推導中都採用(2.7.18)式的近似式計算元素的慣性力。

2.8 元素剛度矩陣及慣性矩陣之推導

用基於牛頓法之增量迭代法求穩態解時，在平衡迭代過程中需要先求得梁元素切線剛度矩陣。

在求以穩態為平衡點的線性振動的自然頻率時，需先求得元素的慣性矩陣，在本節中將推導之元素的剛度矩陣及各種慣性矩陣。

依元素切線剛度矩陣的定義及(2.7.13)式，元素切線剛度矩陣 \mathbf{k} 可以表示成[23, 24]

$$\mathbf{k} = \frac{\partial \mathbf{f}^D}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{f}^D}{\partial \mathbf{q}_\theta} \frac{\partial \mathbf{q}_\theta}{\partial \mathbf{q}} = [\mathbf{k}_\theta + (\mathbf{T}_{\theta\phi}^t - \mathbf{I}_{14}) \mathbf{k}_\theta^0 + \mathbf{H}_D] \mathbf{T}_{\theta\phi} \quad (2.8.1)$$

$$\mathbf{k}_\theta = \frac{\partial \mathbf{f}_\theta^D}{\partial \mathbf{q}_\theta} \quad (2.8.2)$$

$$\mathbf{H}_D = \left. \frac{\partial (\mathbf{T}_{\theta\phi}^t \mathbf{f}_\theta^D)}{\partial \mathbf{q}_\theta} \right|_{\mathbf{f}_\theta^D} \quad (2.8.3)$$

其中 \mathbf{k}_θ^0 為 \mathbf{k}_θ 的零次項， \mathbf{H}_D 為一非對稱矩陣，並可表示成

$$\mathbf{H}_D = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{h}_{b1} & \mathbf{0} & \mathbf{h}_{b2} & \bar{\mathbf{0}} \\ \mathbf{h}_{b1}^t & \mathbf{h}_{a1} & -\mathbf{h}_{b1}^t & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{0}} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{h}_{b1} & \mathbf{0} & -\mathbf{h}_{b2} & \bar{\mathbf{0}} \\ \mathbf{h}_{b2}^t & \mathbf{0} & -\mathbf{h}_{b2}^t & \mathbf{h}_{a2} & \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{0}}^t & \bar{\mathbf{0}}^t & \bar{\mathbf{0}}^t & \bar{\mathbf{0}}^t & \mathbf{0}_2 \end{bmatrix} \quad (2.8.4)$$

$$\mathbf{h}_{bj} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} m_{2j}^{D\theta} & -\frac{1}{L} m_{3j}^{D\theta} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}_{aj} = \begin{bmatrix} 0 & m_{3j}^{D\theta} & -m_{2j}^{D\theta} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} m_{1j}^{D\theta} \\ 0 & -\frac{1}{2} m_{1j}^{D\theta} & 0 \end{bmatrix}, \quad (j=1, 2)$$

(2.8.5)

其中 $\mathbf{0}_2$ 、 $\mathbf{0}$ 和 $\bar{\mathbf{0}}$ 為 2×2 、 3×3 及 3×2 的矩陣。

由(2.8.1)-(2.8.5)式可知元素切線剛度矩陣 \mathbf{k} 為一非對稱矩陣，文獻[26]提到在平衡位置時， \mathbf{k} 為一對稱矩陣，但本研究由數值結果發現在平衡位置時，數值上， \mathbf{k} 仍稍微不對稱，本研究由數值結果發現這會影響其自然頻率的收斂，所以本文中取 $(\mathbf{k} + \mathbf{k}^t)/2$ 使其成為對稱矩陣。

剛度矩陣 \mathbf{k}_θ 可以由以下的子矩陣 \mathbf{k}_{ij} ($i = a, b, c, d, j = a, b, c, d$) 用直接剛度法組合而成

$$\mathbf{k}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{u}_j} \quad (2.8.6)$$

其中 \mathbf{f}_i ($i = a, b, c, d$) 已在(2.7.13)式定義， \mathbf{u}_j ($j = a, b, c, d$) 已在(2.5.20)–(2.5.23)式及(2.5.29)式定義。

\mathbf{k}_{ij} 為一對稱矩陣，並可表示成

$$\mathbf{k}_{aa} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^D}{\partial \mathbf{u}_a} = \frac{AE}{L} \mathbf{G}_a \mathbf{G}_a^t (1 + 3\varepsilon_o) \quad (2.8.7)$$

$$\mathbf{k}_{ab} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^D}{\partial \mathbf{u}_b} = \frac{1}{L} \mathbf{G}_a [\underline{AE(1 + 3\varepsilon_o)} \mathbf{G}_b^t + EI_z \int \mathbf{N}_b''^t v_{,xx} dx]$$

$$\mathbf{k}_{ac} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^D}{\partial \mathbf{u}_c} = \frac{1}{L} \mathbf{G}_a [\underline{AE(1 + 3\varepsilon_o)} \mathbf{G}_c^t + EI_y \int \mathbf{N}_c''^t w_{,xx} dx]$$

$$\mathbf{k}_{ad} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^D}{\partial \mathbf{u}_d} = \frac{1}{L} \mathbf{G}_a [EI_p \int \mathbf{N}_d''^t \theta_{1,x} dx + 3EI_\omega \int \mathbf{N}_d''^t \theta_{1,xx} dx]$$

$$\mathbf{k}_{bb} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^D}{\partial \mathbf{u}_b} = f_{12}^D \int \mathbf{N}_b' \mathbf{N}_b'^t dx + EI_z (1 + \varepsilon_o) \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_b''^t dx$$

$$\mathbf{k}_{bc} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^D}{\partial \mathbf{u}_c} = 3E\alpha_{\omega yz} \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_c''^t \theta_{1,xx} dx$$

$$\mathbf{k}_{bd} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^D}{\partial \mathbf{u}_d} = 3E\alpha_{\omega yz} \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_d''^t w_{,xx} dx$$

$$\mathbf{k}_{cc} = \frac{\partial \mathbf{f}_c^D}{\partial \mathbf{u}_c} = f_{12}^D \int \mathbf{N}_c' \mathbf{N}_c'^t dx + EI_y (1 + \varepsilon_o) \int \mathbf{N}_c'' \mathbf{N}_c''^t dx$$

$$\mathbf{k}_{cd} = \frac{\partial \mathbf{f}_c^D}{\partial \mathbf{u}_d} = 3E\alpha_{\omega yz} \int \mathbf{N}_c'' \mathbf{N}_d''^t v_{,xx} dx$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{dd} = \frac{\partial \mathbf{f}_d^D}{\partial \mathbf{u}_d} &= (GJ + EI_p \varepsilon_o) \int \mathbf{N}_d' \mathbf{N}_d'^t dx + EI_\omega (1 + 3\varepsilon_o) \int \mathbf{N}_b'' \mathbf{N}_b''^t dx \\ &+ \frac{3}{2} EK_I \int \mathbf{N}_d' \mathbf{N}_d'^t \theta_{1,x}^2 dx \end{aligned}$$

$$\mathbf{k}_{ij} = \mathbf{k}_{ji}^t$$

其中加底線之項在元素較多時，會趨近於零，故可忽略， $\theta_{1,x}$ 、 $\theta_{1,xx}$ 、 $v_{,xx}$ 、 $w_{,xx}$ 在元素較多時會趨近於一個常數，所以本文中將其保留。

由(2.7.17)式可以知道元素慣性力 $\mathbf{f}^I \approx \mathbf{f}_\theta^I$ 與元素節點位移、速度及加速度有關，對應於 $\delta \mathbf{q}$ 、 $\delta \dot{\mathbf{q}}$ 及 $\delta \ddot{\mathbf{q}}$ 之慣性力的改變量 $\delta \mathbf{f}^I$ 可以表示成

$$\delta \mathbf{f}^I = \Omega^2 \mathbf{k}_\Omega \delta \mathbf{q} + \Omega \mathbf{c} \delta \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{m} \delta \ddot{\mathbf{q}} \quad (2.8.8)$$

其中 \mathbf{k}_Ω 為元素向心力剛度矩陣(centripetal stiffness matrix)， \mathbf{m} 為元素質量矩陣(mass matrix)， \mathbf{c} 為元素陀螺矩陣(gyroscopic matrix)。

因本文中慣性力中僅保留到變形參數及其對時間微分的一次項，所以 \mathbf{k}_Ω 、 \mathbf{c} 、 \mathbf{m} 都僅保留到變形參數的零次項，故本文採用以下的近似式

$$\mathbf{k}_\Omega = \frac{\partial \mathbf{f}^I}{\Omega^2 \partial \mathbf{q}} \approx \frac{\partial \mathbf{f}_\theta^I}{\Omega^2 \partial \mathbf{q}_\theta} \quad (2.8.9)$$

$$\mathbf{c} = \frac{\partial \mathbf{f}^I}{\Omega \partial \dot{\mathbf{q}}} \approx \frac{\partial \mathbf{f}_\theta^I}{\Omega \partial \dot{\mathbf{q}}_\theta} \quad (2.8.10)$$

$$\mathbf{m} = \frac{\partial \mathbf{f}^I}{\partial \ddot{\mathbf{q}}} \approx \frac{\partial \mathbf{f}_\theta^I}{\partial \ddot{\mathbf{q}}_\theta} \quad (2.8.11)$$

元素向心力剛度矩陣 \mathbf{k}_Ω 可以由子矩陣 $\mathbf{k}_{\Omega ij} = \frac{\partial \mathbf{f}_i^I}{\Omega^2 \partial \mathbf{u}_j}$ ($i, j = a, b, c, d$) 組

合而成， $\mathbf{k}_{\Omega ij}$ 的顯式可表示如下

$$\mathbf{k}_{\Omega aa} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\Omega^2 \partial \mathbf{u}_a} = -(n_2^2 + n_3^2) \rho A \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_a^t dx \quad (2.8.12)$$

$$\mathbf{k}_{\Omega ab} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\Omega^2 \partial \mathbf{u}_b} = n_1 n_2 \rho A \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_b^t dx + n_1 n_2 \frac{1}{L} \rho I_z \int \mathbf{G}_a \mathbf{N}_b^t dx$$

$$\mathbf{k}_{\Omega ac} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\Omega^2 \partial \mathbf{u}_c} = n_1 n_3 \rho A \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_c^t dx + n_1 n_3 \frac{1}{L} \rho I_y \int \mathbf{G}_a \mathbf{N}_c^t dx$$

$$\mathbf{k}_{\Omega ad} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\Omega^2 \partial \mathbf{u}_d} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{k}_{\Omega bb} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^I}{\Omega^2 \partial \mathbf{u}_b} = -(n_3^2 + n_1^2) \rho A \int \mathbf{N}_b \mathbf{N}_b^t dx + (n_1^2 - n_2^2) \rho I_z (1 - \varepsilon_o)^2 \int \mathbf{N}'_b \mathbf{N}'_b{}^t dx$$

$$\mathbf{k}_{\Omega bc} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^I}{\Omega^2 \partial \mathbf{u}_c} = n_3 n_2 \rho A \int \mathbf{N}_b \mathbf{N}_c^t dx - \frac{1}{2} n_3 n_2 \rho I_p (1 - \varepsilon_o)^2 \int \mathbf{N}'_b \mathbf{N}'_c{}^t dx$$

$$\mathbf{k}_{\Omega bd} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^I}{\Omega^2 \partial \mathbf{u}_d} = n_1 n_3 \rho (I_y - I_z) (1 - \varepsilon_o) \int \mathbf{N}'_b \mathbf{N}'_d{}^t dx$$

$$\mathbf{k}_{\Omega cc} = \frac{\partial \mathbf{f}_c^I}{\Omega^2 \partial \mathbf{u}_c} = -(n_1^2 + n_2^2) \rho A \int \mathbf{N}_c \mathbf{N}_c^t dx + (n_1^2 - n_3^2) \rho I_y (1 - \varepsilon_o)^2 \int \mathbf{N}'_c \mathbf{N}'_c{}^t dx$$

$$\mathbf{k}_{\Omega cd} = \frac{\partial \mathbf{f}_c^I}{\Omega^2 \partial \mathbf{u}_d} = n_1 n_2 \rho (I_y - I_z) (1 - \varepsilon_o) \int \mathbf{N}'_c \mathbf{N}_d^t dx$$

$$\mathbf{k}_{\Omega dd} = \frac{\partial \mathbf{f}_c^I}{\Omega^2 \partial \mathbf{u}_d} = (n_3^2 - n_2^2) \rho (I_z - I_y) \int \mathbf{N}_d \mathbf{N}_d^t dx - (n_2^2 + n_3^2) \rho I_\omega \int \mathbf{N}'_d \mathbf{N}_d^t dx$$

$$\mathbf{k}_{\Omega ij} = \mathbf{k}_{\Omega ji}^t$$

元素陀螺矩陣 \mathbf{c} 可以由子矩陣 $\mathbf{c}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{f}_i^I}{\Omega \partial \dot{\mathbf{u}}_j}$ ($i, j = a, b, c, d$) 組合而成， \mathbf{c}_{ij}

的顯式可表示如下

$$\mathbf{c}_{aa} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\Omega \partial \dot{\mathbf{u}}_a} = \mathbf{0} \quad (2.8.13)$$

$$\mathbf{c}_{ab} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\Omega \partial \dot{\mathbf{u}}_b} = -2n_3 \rho A \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_b^t dx$$

$$\mathbf{c}_{ac} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\Omega \partial \dot{\mathbf{u}}_c} = 2n_2 \rho A \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_c^t dx$$

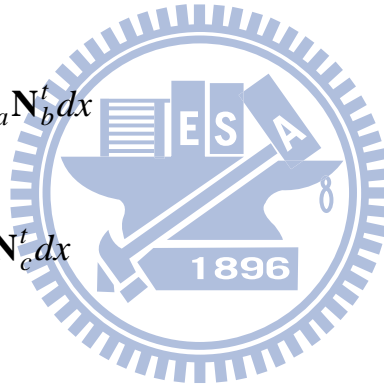
$$\mathbf{c}_{ad} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\Omega \partial \dot{\mathbf{u}}_d} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{c}_{bb} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^I}{\Omega \partial \dot{\mathbf{u}}_b} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{c}_{bc} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^I}{\Omega \partial \dot{\mathbf{u}}_c} = -2n_1 \rho A \int \mathbf{N}_b \mathbf{N}_c^t dx$$

$$\mathbf{c}_{bd} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^I}{\Omega \partial \dot{\mathbf{u}}_d} = -2n_2 \rho I_z (1 - \varepsilon_o) \int \mathbf{N}'_b \mathbf{N}_d^t dx + \underline{2n_3 \rho I_\omega (1 - \varepsilon_o) \int \mathbf{N}'_b \mathbf{N}_d^t \theta_{1,x} dx}$$

$$\mathbf{c}_{cc} = \frac{\partial \mathbf{f}_c^I}{\Omega \partial \dot{\mathbf{u}}_c} = \mathbf{0}$$



$$\mathbf{c}_{cd} = \frac{\partial \mathbf{f}_c^I}{\Omega \partial \dot{\mathbf{u}}_d} = -2n_3 \rho I_y (1 - \varepsilon_o) \int \mathbf{N}'_c \mathbf{N}_d^t dx - \underline{2n_2 \rho I_\omega (1 - \varepsilon_o) \int \mathbf{N}'_c \mathbf{N}_d^t \theta_{1,x} dx}$$

$$\mathbf{c}_{dd} = \frac{\partial \mathbf{f}_d^I}{\Omega \partial \dot{\mathbf{u}}_d} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{c}_{ij} = -\mathbf{c}_{ji}^t$$

(2.8.13)式中加單底線的項為變形的一次項，本文在計算時將其忽略不計。

元素質量矩陣 \mathbf{m} 可以由子矩陣 $\mathbf{m}_{ij} = \frac{\partial \mathbf{f}_i^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_j}$ ($i, j = a, b, c, d$) 組合而成， \mathbf{m}_{ij}

的顯式可表示如下

$$\mathbf{m}_{aa} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_a} = \rho A \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_a^t dx \quad (2.8.14)$$

$$\mathbf{m}_{ab} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_b} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{m}_{ac} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_c} = \mathbf{0}$$

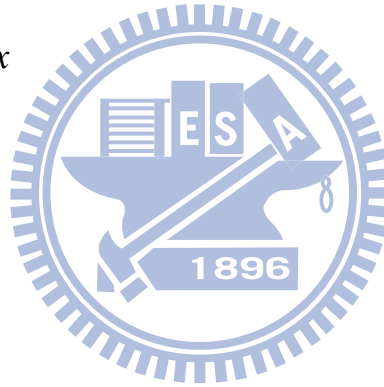
$$\mathbf{m}_{ad} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_d} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{m}_{bb} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_b} = \rho A \int \mathbf{N}_b \mathbf{N}_b^t dx + \rho I_z (1 - \varepsilon_o)^2 \int \mathbf{N}'_b \mathbf{N}_b^t dx$$

$$\mathbf{m}_{bc} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_c} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{m}_{bd} = \frac{\partial \mathbf{f}_b^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_d} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{m}_{cc} = \frac{\partial \mathbf{f}_c^I}{\partial \dot{\mathbf{u}}_c} = \rho A \int \mathbf{N}_c \mathbf{N}_c^t dx + \rho I_y (1 - \varepsilon_o)^2 \int \mathbf{N}'_c \mathbf{N}_c^t dx$$



$$\mathbf{m}_{cd} = \frac{\partial \mathbf{f}_c^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_d} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{m}_{dd} = \frac{\partial \mathbf{f}_d^I}{\partial \ddot{\mathbf{u}}_d} = \rho I_p \int \mathbf{N}_d \mathbf{N}_d^t dx + \rho I_\omega \int \mathbf{N}'_d \mathbf{N}'_d{}^t dx$$

$$\mathbf{m}_{ij} = \mathbf{m}_{ji}^t$$

其中 \mathbf{f}_i^I ($i = a - d$) 已在(2.7.17)式中定義。

2.9 系統的運動方程式

旋轉梁系統的運動方程式可表示成

$$\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{F}^D(\bar{\mathbf{Q}}) + \mathbf{F}^I(\Omega, \bar{\mathbf{Q}}, \dot{\bar{\mathbf{Q}}}, \ddot{\bar{\mathbf{Q}}}) = \mathbf{0} \quad (2.9.1)$$

其中 $\boldsymbol{\Psi}$ 為系統不平衡力(unbalanced force)， \mathbf{F}^D 和 \mathbf{F}^I 為系統節點變形力及慣性力， Ω 為旋轉梁的轉速， $\bar{\mathbf{Q}}$ 、 $\dot{\bar{\mathbf{Q}}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{Q}}}{\partial t}$ 和 $\ddot{\bar{\mathbf{Q}}} = \frac{\partial \dot{\bar{\mathbf{Q}}}}{\partial t}$ 為在時間為 t 時系統的節點位移、速度和加速度。 \mathbf{F}^D 和 \mathbf{F}^I 可以由(2.7.10)、(2.7.13)及(2.7.17)式求得元素的節點變形力 \mathbf{f}^D 及慣性力 \mathbf{f}^I ，再將其從當前的元素座標轉換到總體座標後組合而成。

令 \mathbf{Q}_s 表示旋轉梁在轉速為 Ω 時的穩態節點位移，因 $\dot{\mathbf{Q}}_s = \ddot{\mathbf{Q}}_s = 0$ ，所以由(2.9.1)式，旋轉梁系統的穩態平衡方程式可表示成

$$\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{Q}_s) = \mathbf{F}_s^D + \Omega^2 \mathbf{F}_{sref}^I = \mathbf{0} \quad (2.9.2)$$

其中 $\mathbf{F}_s^D = \mathbf{F}^D(\mathbf{Q}_s)$ 為對應於穩態變形 \mathbf{Q}_s 的系統節點變形力，可以由(2.7.13)式之元素節點變形力從元素座標轉換到總體座標後組合而成， $\Omega^2 \mathbf{F}_{sref}^I = \mathbf{F}^I(\Omega, \mathbf{Q}_s, \dot{\mathbf{Q}}_s, \ddot{\mathbf{Q}}_s)$ 為對應於穩態變形 \mathbf{Q}_s 的系統節點慣性力，由(2.7.17)式去

掉速度及加速度項可以求得對應於穩態變形 \mathbf{Q}_s 的元素節點慣性力 \mathbf{f}^I ，再將其從元素座標轉換到總體座標後組合而成。(2.9.2)式為一非線性方程式，本文以基於牛頓法的增量迭代法求出在不同轉速 Ω 下的穩態解，詳細的數值方法及程序將在第三章中說明。

令 $\mathbf{Q}_d = \mathbf{Q}_d(t)$ 表示以 \mathbf{Q}_s 為平衡點的微小振動，將 $\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}_d + \mathbf{Q}_s$ 代入(2.9.2)式，用泰勒級數在 $\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}_s$ 展開，取到一次項，則旋轉梁微小振動的運動方程式可表示成

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Q}}_d + \Omega\mathbf{C}\dot{\mathbf{Q}}_d + (\mathbf{K} + \Omega^2\mathbf{K}_\Omega)\mathbf{Q}_d = 0 \quad (2.9.3)$$

其中 \mathbf{M} 為系統的質量矩陣， \mathbf{C} 為系統的陀螺矩陣 (gyroscopic matrix)， \mathbf{K} 和 \mathbf{K}_Ω 為系統的切線剛度矩陣及向心力剛度矩陣 (centripetal stiffness matrix)。 \mathbf{K} 、 \mathbf{K}_Ω 、 \mathbf{C} 、及 \mathbf{M} 可以由(2.8.1)、(2.8.10)-(2.8.12)之 \mathbf{k} 、 \mathbf{k}_Ω 、 \mathbf{c} 、 \mathbf{m} 從元素座標轉換到總體座標後組合而成。

若振動方程式(2.9.3)式存在自然振動頻率，則其解的形式可以表示如下

$$\mathbf{Q}_d = (\mathbf{Q}_R + i\mathbf{Q}_I)e^{i\lambda t} \quad (2.9.4)$$

其中 i 為虛數 $\sqrt{-1}$ ， λ 為自然頻率， \mathbf{Q}_R 與 \mathbf{Q}_I 為對應於 λ 振態的實部與虛部。

將(2.9.4)式代入(2.9.3)式，並由實部和虛部分別為零，可得一個 λ 的二次特徵值問題

$$\mathbf{H}\Theta = \mathbf{0} \quad (2.9.5)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(\lambda, \Omega) = \begin{bmatrix} \mathbf{K} + \Omega^2\mathbf{K}_\Omega - \lambda^2\mathbf{M} & \lambda\Omega\mathbf{C}^t \\ \lambda\Omega\mathbf{C} & \mathbf{K} + \Omega^2\mathbf{K}_\Omega - \lambda^2\mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (2.9.6)$$

$$\Theta = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_R \\ \mathbf{Q}_I \end{Bmatrix} \quad (2.9.7)$$

其中 \mathbf{H} 為一對稱矩陣。

因(2.9.5)式為一齊次方程式 (homogeneous equation)，所以僅有當 \mathbf{H} 的行

列式值 $\det|\mathbf{H}|=0$ ，才有非零解，在固定轉速 $\Omega \neq 0$ 時，本文採用二分法解出滿足 $\det|\mathbf{H}|=0$ 的 λ ，當轉速 $\Omega=0$ 時，(2.9.5)式將退化成一廣義特徵值問題，本文採用子空間法(subspace method)求其特徵值 λ 及特徵向量 Θ ，詳細的數值方法及程序將在第三章中說明。

2.10 無因次化

為了計算及討論上的方便，我們將2.7節至2.9節中的元素節點內力、剛度矩陣、慣性矩陣、統御方程式及相關的方程式無因次化。

本文中採用以下的無因次變數：

$$X = x/L_T, \tau = \frac{1}{L_T} \sqrt{\frac{E}{\rho}} t, k^2 = \frac{\rho \Omega^2 L_T^2}{E}, K^2 = \frac{\rho \lambda^2 L_T^2}{E} \quad (2.10.1)$$

$$r = R/L_T, \bar{L} = \frac{L}{L_T}, U = u/L_T, U' = \frac{dU}{dX} = \frac{du}{dx} = u',$$

$$U'' = \frac{d^2U}{dX^2} = L_T \frac{d^2u}{dx^2} = L_T u'', V = v/L_T, V' = \frac{dV}{dX} = \frac{dv}{dx} = v',$$

$$V'' = \frac{d^2V}{dX^2} = L_T \frac{d^2v}{dx^2} = L_T v'', W = w/L_T, W' = \frac{dW}{dX} = \frac{dw}{dx} = w',$$

$$W'' = \frac{d^2W}{dX^2} = L_T \frac{d^2w}{dx^2} = L_T w'', \Theta_1 = \theta_1, \Theta_1' = \frac{d\Theta_1}{dX} = L_T \frac{d\theta_1}{dx} = L_T \theta_1',$$

$$\dot{U} = \frac{dU}{d\tau} = \sqrt{\frac{\rho}{E}} \frac{du}{dt} = \sqrt{\frac{\rho}{E}} \dot{u}, \ddot{U} = \frac{d^2U}{d\tau^2} = L_T \frac{\rho}{E} \frac{d^2u}{dt^2} = L_T \frac{\rho}{E} \ddot{u}$$

$$\dot{V} = \frac{dV}{d\tau} = \sqrt{\frac{\rho}{E}} \frac{dv}{dt} = \sqrt{\frac{\rho}{E}} \dot{v}, \ddot{V} = \frac{d^2V}{d\tau^2} = L_T \frac{\rho}{E} \frac{d^2v}{dt^2} = L_T \frac{\rho}{E} \ddot{v}$$

$$\dot{W} = \frac{dW}{d\tau} = \sqrt{\frac{\rho}{E}} \frac{dw}{dt} = \sqrt{\frac{\rho}{E}} \dot{w}, \ddot{W} = \frac{d^2W}{d\tau^2} = L_T \frac{\rho}{E} \frac{d^2w}{dt^2} = L_T \frac{\rho}{E} \ddot{w}$$

$$\dot{\Theta}_1 = \frac{d\Theta}{d\tau} = L_T \sqrt{\frac{\rho}{E}} \frac{d\theta_1}{dt} = \sqrt{\frac{\rho}{E}} \dot{\theta}_1, \quad \ddot{\Theta}_1 = \frac{d^2\Theta}{d\tau^2} = L_T^2 \frac{\rho}{E} \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = L_T^2 \frac{\rho}{E} \ddot{\theta}_1$$

$$U_j = u_j / L_T, \quad V_j = v_j / L_T, \quad W_j = w_j / L_T, \quad \Theta_{1j} = \theta_{1j}$$

$$U'_j = u'_j, \quad V'_j = v'_j, \quad W'_j = w'_j, \quad \Theta'_{1j} = L_T \theta'_{1j}$$

$$U''_j = L_T u''_j, \quad V''_j = L_T v''_j, \quad W''_j = L_T w''_j, \quad \Theta''_{1j} = L_T^2 \theta''_{1j}$$

$$\bar{f}_{ij} = \frac{f_{ij}}{AE}, \quad \bar{f}_{ij}^D = \frac{f_{ij}^D}{AE}, \quad \bar{f}_{ij}^I = \frac{f_{ij}^I}{AE}, \quad \bar{m}_{ij} = \frac{m_{ij}}{AEL_T}, \quad \bar{m}_{ij}^D = \frac{m_{ij}^D}{AEL_T}, \quad \bar{m}_{ij}^I = \frac{m_{ij}^I}{AEL_T},$$

$$\bar{G} = \frac{G}{E}, \quad \bar{B}_j = \frac{B_j}{AEL_T^2}, \quad \bar{B}_j^D = \frac{B_j^D}{AEL_T^2}, \quad \bar{B}_j^I = \frac{B_j^I}{AEL_T^2}$$

$$\bar{I}_y = \frac{I_y}{AL_T^2}, \quad \bar{I}_z = \frac{I_z}{AL_T^2}, \quad \bar{I}_p = \frac{I_p}{AL_T^2} = \frac{I_y}{AL_T^2} + \frac{I_z}{AL_T^2}, \quad \bar{J} = \frac{J}{AL_T^2}, \quad \bar{I}_\omega = \frac{I_\omega}{AL_T^4}$$

$$\bar{\alpha}_{\omega yz} = \frac{\alpha_{\omega yz}}{AL_T^4}, \quad \bar{K}_I = \frac{K_I}{AL_T^4}, \quad n_z^2 = \frac{1}{\bar{I}_y}, \quad n_y^2 = \frac{1}{\bar{I}_z}$$

其中 k 為無因次轉速， K 為無因次自然頻率， n_y 為梁在 x_1x_2 平面的細長比， n_z 為梁在 x_1x_3 平面的細長比。 $i=1,2,3$ 代表元素座標軸 x_i 的三個方向， $j=1,2$ 代表梁元素兩端的節點 j ， L_T 為梁的總長度。

若 $(\bar{\quad})$ 為對應於變數 (\quad) 之無因次化變數，本文採用 $(\quad)' = \frac{d}{dx}(\quad)$ 、

$$(\bar{\quad})' = \frac{d}{dx}(\bar{\quad}) = (\bar{\quad})_{,x}, \quad (\dot{\quad}) = \frac{d}{dt}(\quad), \quad (\ddot{\quad}) = \frac{d}{dt}(\dot{\quad})$$

將(2.10.1)式代入(2.7.13)、(2.7.17)式，去掉慣性力之非線性項後，可得元素無因次節點力

$$\bar{\mathbf{f}}_a = \bar{\mathbf{f}}_a^D + \bar{\mathbf{f}}_a^I \quad (2.10.2)$$

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{f}}_a^D &= \begin{Bmatrix} \bar{f}_{11}^D \\ \bar{f}_{12}^D \end{Bmatrix} = \varepsilon_o \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{3}{2} \varepsilon_o^2 \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2L} \bar{I}_p \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \int \Theta_{1,X}^2 dX \\
&\quad + \frac{1}{2L} \bar{I}_y \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \int W_{1,XX}^2 dX + \frac{1}{2L} \bar{I}_z \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \int V_{1,XX}^2 dX + \frac{3}{2L} \bar{I}_\omega \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \int \Theta_{1,XX}^2 dX \\
\bar{\mathbf{f}}_a^I &= \frac{k^2}{L_T} a_{Ao1} \int \mathbf{N}_a dX + k^2 \int \mathbf{N}_a [-(n_2^2 + n_3^2)(\mathbf{N}_a^t \mathbf{U}_a + X) + n_1 n_2 V + n_1 n_3 W] dX \\
&\quad + n_1 n_2 \frac{1}{L} k^2 \bar{I}_z \mathbf{G}_a \int V_{,X} dX + n_1 n_3 \frac{1}{L} k^2 \bar{I}_y \mathbf{G}_a \int W_{,X} dX \\
&\quad + 2k \int (n_2 \mathbf{N}_a \dot{W} - n_3 \mathbf{N}_a \dot{V}) dX + \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_a^t \ddot{U}_a dX
\end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{f}}_b = \bar{\mathbf{f}}_b^D + \bar{\mathbf{f}}_b^I$$

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{f}}_b^D &= \bar{I}_z (1 + \varepsilon_o) \int \bar{\mathbf{N}}_{b,XX} V_{,XX} dX + \bar{f}_{12}^D \int \bar{\mathbf{N}}_{b,X} V_{,X} dX + 3\bar{\alpha}_{\omega yz} \int \bar{\mathbf{N}}_{b,XX} W_{,XX} \Theta_{1,XX} dX \\
\bar{\mathbf{f}}_b^I &= \frac{k^2}{L_T} a_{Ao2} \int \bar{\mathbf{N}}_b dX + k^2 \int \bar{\mathbf{N}}_b [n_1 n_2 (\mathbf{N}_a^t \mathbf{U}_a + X) - (n_3^2 + n_1^2) V + n_3 n_2 W] dX \\
&\quad + k^2 \int \bar{\mathbf{N}}_{b,X} [-n_1 n_2 \bar{I}_z (1 - \varepsilon_o) + (n_1^2 - n_2^2) \bar{I}_z (1 - \varepsilon_o)^2 V_{,X} \\
&\quad + n_1 n_3 (\bar{I}_y - \bar{I}_z) (1 - \varepsilon_o) \Theta_1 - \frac{1}{2} n_2 n_3 \bar{I}_p (1 - \varepsilon_o)^2 W_{,X}] dX \\
&\quad + 2k \int \bar{\mathbf{N}}_b (n_3 \mathbf{N}_a^t \dot{U}_a - n_1 \dot{W}) dx - 2k \bar{I}_z (1 - \varepsilon_o) n_2 \int \bar{\mathbf{N}}_{b,X} \dot{\Theta}_1 dX \\
&\quad + \int \bar{\mathbf{N}}_b \ddot{V} dX + \bar{I}_z (1 - \varepsilon_o)^2 \int \bar{\mathbf{N}}_{b,X} \ddot{V}_{,X} dX
\end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{f}}_c = \bar{\mathbf{f}}_c^D + \bar{\mathbf{f}}_c^I$$

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{f}}_c^D &= \bar{I}_y (1 + \varepsilon_o) \int \bar{\mathbf{N}}_{c,XX} W_{,XX} dX + \bar{f}_{12}^D \int \bar{\mathbf{N}}_{c,X} W_{,X} dX + 3\bar{\alpha}_{\omega yz} \int \bar{\mathbf{N}}_{c,XX} V_{,XX} \Theta_{1,XX} dX \\
\bar{\mathbf{f}}_c^I &= \frac{k^2}{L} a_{Ao3} \int \bar{\mathbf{N}}_c dX + k^2 \int \bar{\mathbf{N}}_c [n_1 n_3 (\mathbf{N}_a^t \mathbf{U}_a + X) + n_2 n_3 V - (n_1^2 + n_2^2) W] dX \\
&\quad + k^2 \int \bar{\mathbf{N}}_{c,X} [-n_1 n_3 \bar{I}_y (1 - \varepsilon_o) + (n_1^2 - n_3^2) \bar{I}_y (1 - \varepsilon_o)^2 W_{,X} \\
&\quad + n_1 n_2 (\bar{I}_y - \bar{I}_z) (1 - \varepsilon_o) \Theta_1 - \frac{1}{2} n_2 n_3 \bar{I}_p (1 - \varepsilon_o)^2 V_{,X}] dX \\
&\quad + 2k \int \bar{\mathbf{N}}_c (n_1 \dot{V} - n_2 \mathbf{N}_a^t \dot{U}_a) dx - 2k \bar{I}_y (1 - \varepsilon_o) n_3 \int \bar{\mathbf{N}}_{c,X} \dot{\Theta}_1 dX \\
&\quad + \int \bar{\mathbf{N}}_c \ddot{W} dX - \bar{I}_y (1 - \varepsilon_o)^2 \int \bar{\mathbf{N}}_{c,X} \ddot{W}_{,X} dX
\end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{f}}_d = \bar{\mathbf{f}}_d^D + \bar{\mathbf{f}}_d^I$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{f}}_d^D &= (\bar{G}\bar{J} + \varepsilon_o \bar{I}_p) \int \bar{\mathbf{N}}_{d,X} \Theta_{1,X} dX + \bar{I}_\omega (1 + 3\varepsilon_o) \int \bar{\mathbf{N}}_{d,XX} \Theta_{1,XX} dX \\ &\quad + 3\bar{\alpha}_{\omega yz} \int \bar{\mathbf{N}}_{d,XX} V_{,XX} W_{,XX} dX + \frac{1}{2} \bar{K}_I \int \bar{\mathbf{N}}_{d,X} \Theta_{1,X}^3 dX \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{f}}_d^I &= k^2 \int \bar{\mathbf{N}}_d [n_1 n_3 (\bar{I}_y - \bar{I}_z) (1 - \varepsilon_o) V_{,X} + n_1 n_2 (\bar{I}_y - \bar{I}_z) (1 - \varepsilon_o) W_{,X} \\ &\quad + (n_3^2 - n_2^2) (\bar{I}_z - \bar{I}_y) \theta_1 + n_2 n_3 (\bar{I}_z - \bar{I}_y)] dX \\ &\quad - k^2 (n_2^2 + n_3^2) \bar{I}_\omega \int \bar{\mathbf{N}}_{d,X} \Theta_{1,X} dX \\ &\quad + 2k\bar{I}_z (1 - \varepsilon_o) n_2 \int \bar{\mathbf{N}}_d \dot{V}_{,X} dX + 2k\bar{I}_y (1 - \varepsilon_o) n_3 \int \bar{\mathbf{N}}_d \dot{W}_{,X} dX \\ &\quad + 2k\bar{I}_\omega (1 - \varepsilon_o) n_2 \int \bar{\mathbf{N}}'_{d,X} \Theta_{1,X} \dot{W}_{,X} dX - 2k\bar{I}_\omega (1 - \varepsilon_o) n_3 \int \bar{\mathbf{N}}'_{d,X} \Theta_{1,X} \dot{V}_{,X} dX \\ &\quad + \bar{I}_p \int \bar{\mathbf{N}}_d \ddot{\Theta}_1 dX + \bar{I}_\omega \int \bar{\mathbf{N}}_{d,X} \ddot{\Theta}_{1,X} dX \end{aligned}$$

其中 $\bar{\mathbf{N}}_i$ ($i = b, c, d$) 為無因次形狀函數，將(2.5.23)式之 \mathbf{N}_i 中的 L 用 \bar{L} 取代，即可得到 $\bar{\mathbf{N}}_i$ 。

將(2.10.1)式代入(2.8.7)、(2.8.12)至(2.8.14)式，即可得以下之元素無因次化剛度矩陣 $\bar{\mathbf{k}}_{ij}$ 、向心力矩陣 $\bar{\mathbf{k}}_{\Omega ij}$ 、陀螺矩陣 $\bar{\mathbf{c}}_{ij}$ 以及質量矩陣 $\bar{\mathbf{m}}_{ij}$ 。

元素無因次化剛度矩陣 $\bar{\mathbf{k}}_{ij}$ ($i, j = a, b, c, d$):

$$\bar{\mathbf{k}}_{aa} = \frac{1}{\bar{L}} \mathbf{G}_a \mathbf{G}_a^t (1 + 3\varepsilon_o) \quad (2.10.3)$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{ab} = \frac{1}{\bar{L}} \mathbf{G}_a [(1 + 3\varepsilon_o) \mathbf{G}_b^t + \bar{I}_z \int \bar{\mathbf{N}}_{b,XX}^t V_{,XX} dX]$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{ac} = \frac{1}{\bar{L}} \mathbf{G}_a [(1 + 3\varepsilon_o) \mathbf{G}_c^t + \bar{I}_y \int \bar{\mathbf{N}}_{c,XX}^t W_{,XX} dX]$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{ad} = \frac{1}{\bar{L}} \mathbf{G}_a [\bar{I}_p \int \bar{\mathbf{N}}_{d,XX}^t \Theta_{1,X} dX + 3\bar{I}_\omega \int \bar{\mathbf{N}}_{d,XX}^t \Theta_{1,XX} dX]$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{bb} = \bar{f}_{12}^D \int \bar{\mathbf{N}}_{b,X} \bar{\mathbf{N}}_{b,X}^t dX + \bar{I}_z (1 + \varepsilon_o) \int \bar{\mathbf{N}}_{b,XX} \bar{\mathbf{N}}_{b,XX}^t dX$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{bc} = 3\bar{\alpha}_{\omega yz} \int \Theta_{1,XX} \bar{\mathbf{N}}_{b,XX} \bar{\mathbf{N}}_{c,XX} dX$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{bd} = 3\bar{\alpha}_{\omega yz} \int W_{,XX} \bar{\mathbf{N}}_{b,XX} \bar{\mathbf{N}}_{d,XX} dX$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{cc} = \bar{I}_y (1 + \varepsilon_o) \int \bar{\mathbf{N}}_{c,XX} \bar{\mathbf{N}}_{c,XX}^t dX + \bar{f}_{12}^D \int \bar{\mathbf{N}}_{c,X} \bar{\mathbf{N}}_{c,X}^t dX$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{cd} = 3\bar{\alpha}_{\omega yz} \int V_{,XX} \bar{\mathbf{N}}_{c,XX} \bar{\mathbf{N}}_{d,XX}^t dX$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{k}}_{dd} &= (\bar{G}\bar{J} + \varepsilon_o \bar{I}_p) \int \bar{\mathbf{N}}_{d,X} \bar{\mathbf{N}}_{d,X}^t dX + \bar{I}_\omega (1 + 3\varepsilon_o) \int \bar{\mathbf{N}}_{b,XX} \bar{\mathbf{N}}_{d,XX}^t dX \\ &\quad + \frac{3}{2} \bar{K}_I \int \bar{\mathbf{N}}_{d,X} \bar{\mathbf{N}}_{d,X}^t \Theta_{1,x}^2 dx \end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{ij} = \bar{\mathbf{k}}_{ji}^t$$

元素無因次化向心力矩陣 $\bar{\mathbf{k}}_{\Omega ij}$ ($i, j = a, b, c, d$):

$$\bar{\mathbf{k}}_{\Omega aa} = -(n_2^2 + n_3^2) \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_a^t dX \quad (2.10.4)$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{\Omega ab} = n_1 n_2 \int \mathbf{N}_a \bar{\mathbf{N}}_b^t dX + n_1 n_2 \frac{1}{L} \bar{I}_z \int \mathbf{G}_a \bar{\mathbf{N}}_{b,X}^t dX$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{\Omega ac} = n_1 n_3 \int \mathbf{N}_a \bar{\mathbf{N}}_c^t dX + n_1 n_3 \frac{1}{L} \bar{I}_y \int \mathbf{G}_a \bar{\mathbf{N}}_{c,X}^t dX$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{\Omega ad} = \mathbf{0}$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{\Omega bb} = -(n_3^2 + n_1^2) \int \bar{\mathbf{N}}_b \bar{\mathbf{N}}_b^t dX + (n_1^2 - n_2^2) \bar{I}_z (1 - \varepsilon_o)^2 \int \bar{\mathbf{N}}_{b,X} \bar{\mathbf{N}}_{b,X}^t dX$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{\Omega bc} = n_3 n_2 \int \bar{\mathbf{N}}_b \bar{\mathbf{N}}_c^t dX - \frac{1}{2} n_3 n_2 \bar{I}_p (1 - \varepsilon_o)^2 \int \bar{\mathbf{N}}_{b,X} \bar{\mathbf{N}}_{c,X}^t dX$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{\Omega bd} = n_1 n_3 (\bar{I}_y - \bar{I}_z) (1 - \varepsilon_o) \int \bar{\mathbf{N}}_{b,X} \bar{\mathbf{N}}_d^t dX$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{\Omega cc} = -(n_1^2 + n_2^2) \int \bar{\mathbf{N}}_c \bar{\mathbf{N}}_c^t dX + (n_1^2 - n_3^2) \bar{I}_y (1 - \varepsilon_o)^2 \int \bar{\mathbf{N}}_{c,X} \bar{\mathbf{N}}_{c,X}^t dX$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{\Omega cd} = n_1 n_2 (\bar{I}_y - \bar{I}_z) (1 - \varepsilon_o) \int \bar{\mathbf{N}}_{c,X} \bar{\mathbf{N}}_d^t dX$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{\Omega dd} = (n_3^2 - n_2^2) (\bar{I}_z - \bar{I}_y) \int \bar{\mathbf{N}}_d \bar{\mathbf{N}}_d^t dX - (n_2^2 + n_3^2) \bar{I}_\omega \int \bar{\mathbf{N}}_{d,X} \bar{\mathbf{N}}_{d,X}^t dX$$

$$\bar{\mathbf{k}}_{\Omega ij} = \bar{\mathbf{k}}_{\Omega ji}^t$$

元素無因次化陀螺矩陣 $\bar{\mathbf{c}}_{ij}$ ($i, j = a, b, c, d$):

$$\bar{\mathbf{c}}_{aa} = \mathbf{0} \quad (2.10.5)$$

$$\bar{\mathbf{c}}_{ab} = -2n_3 \int \mathbf{N}_a \bar{\mathbf{N}}_b^t dX$$

$$\bar{\mathbf{c}}_{ac} = 2n_2 \int \mathbf{N}_a \bar{\mathbf{N}}_c^t dX$$

$$\bar{\mathbf{c}}_{ad} = \mathbf{0}$$

$$\bar{\mathbf{c}}_{bb} = \mathbf{0}$$

$$\bar{\mathbf{c}}_{bc} = -2n_1 \int \bar{\mathbf{N}}_b \bar{\mathbf{N}}_c^t dX$$

$$\bar{\mathbf{c}}_{bd} = -2n_2 \bar{I}_z (1 - \varepsilon_o) \int \bar{\mathbf{N}}_{b,X} \bar{\mathbf{N}}_d^t dX + 2n_3 \bar{I}_\omega (1 - \varepsilon_o) \int \bar{\mathbf{N}}_{b,X} \bar{\mathbf{N}}_{d,X}^t \Theta_{1,x} dX$$

$$\bar{\mathbf{c}}_{cc} = \mathbf{0}$$

$$\bar{\mathbf{c}}_{cd} = -2n_3 \bar{I}_y (1 - \varepsilon_o) \int \bar{\mathbf{N}}_{c,X} \bar{\mathbf{N}}_d^t dX - 2n_2 \bar{I}_\omega (1 - \varepsilon_o) \int \bar{\mathbf{N}}_{c,X} \bar{\mathbf{N}}_{d,X}^t \Theta_{1,x} dX$$

$$\bar{\mathbf{c}}_{dd} = \mathbf{0}$$

$$\bar{\mathbf{c}}_{ij} = -\bar{\mathbf{c}}_{ji}^t$$

元素無因次化質量矩陣 $\bar{\mathbf{m}}_{ij}$ ($i, j = a, b, c, d$):

$$\bar{\mathbf{m}}_{aa} = \int \mathbf{N}_a \mathbf{N}_a^t dX \quad (2.10.6)$$

$$\bar{\mathbf{m}}_{ab} = \mathbf{0}$$

$$\bar{\mathbf{m}}_{ac} = \mathbf{0}$$

$$\bar{\mathbf{m}}_{ad} = \mathbf{0}$$

$$\bar{\mathbf{m}}_{bb} = \int \bar{\mathbf{N}}_b \bar{\mathbf{N}}_b^t dX + \bar{I}_z (1 - \varepsilon_o)^2 \int \bar{\mathbf{N}}_{b,X} \bar{\mathbf{N}}_{b,X}^t dX$$

$$\bar{\mathbf{m}}_{bc} = \mathbf{0}$$

$$\bar{\mathbf{m}}_{bd} = \mathbf{0}$$

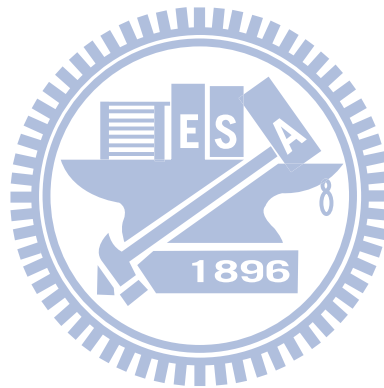
$$\bar{\mathbf{m}}_{cc} = \int \bar{\mathbf{N}}_c \bar{\mathbf{N}}_c^t dX + \bar{I}_y (1 - \varepsilon_o)^2 \int \bar{\mathbf{N}}_{c,X} \bar{\mathbf{N}}_{c,X}^t dX$$

$$\bar{\mathbf{m}}_{cd} = \mathbf{0}$$

$$\bar{\mathbf{m}}_{dd} = \bar{I}_p \int \bar{\mathbf{N}}_d \bar{\mathbf{N}}_d^t dX + \bar{I}_\omega \int \bar{\mathbf{N}}_{d,X} \bar{\mathbf{N}}_{d,X}^t dX$$

$$\bar{\mathbf{m}}_{ij} = \bar{\mathbf{m}}_{ji}^t$$

將無因次變數、元素節點內力、剛度矩陣、慣性矩陣帶入 2.9 節中的統御方程式及相關的方程式中即可將其無因次化。



第三章 數值方法及程序

本章將數值計算的方法及程序分作穩態解及振動頻率分析兩個部份，本章中考慮具有任意設定角 β 與傾斜角 α 之旋轉傾斜 Euler 梁。

旋轉梁一般在彈性範圍內使用，大部分的工程材料的降伏應變 $\varepsilon_y \ll 1$ 。因為當傾斜角 α 不為零時，旋轉梁會產生側向的穩態位移，本文將限制旋轉梁的最大轉速，使其最大應變儘量不超過0.01。若不考慮側向變形對慣性力的影響，旋轉傾斜梁之穩態解造成的最大膜應變(membrane strain)及撓曲應變(flexural strain)都發生在旋轉梁的根部，並可表示成(詳細推導在附錄 B)

$$\varepsilon_{o \max} = k^2 \left(r \cos \alpha + \frac{1}{2} \right) \quad (3.1)$$

$$\varepsilon_{b \max} = \frac{n_y^2 k^2 r}{2} \frac{c_2}{L_T} \sin \alpha \cos \beta \quad (3.2)$$

$$\varepsilon_{c \max} = \frac{n_z^2 k^2 r}{2} \frac{c_3}{L_T} \sin \alpha \cos \beta \quad (3.3)$$

其中 c_2 、 c_3 為斷面上的點和 x_3^S 、 x_2^S 軸的最大距離，其它(3.1)至(3.3)中的無因次化的變數，均已在(2.10)節中定義。

旋轉傾斜梁之穩態解造成的最大應變為(3.1)、(3.2)與(3.3)式的和，故其最大應變與 k^2 成正比，由(3.1)至(3.3)式可以估算旋轉梁運轉時的最大允許轉速，但因(3.1)至(3.3)式為線性解，故分析時仍需要檢查非線性解的最大應變。

3.1 穩態解

為了簡潔，在不造成混淆的情況下，本節中將(2.9.2)式之下標 s 及上標 D 省略，再令 $\mathbf{P} = \Omega^2 \mathbf{F}_{sref}^I$ ，則旋轉梁系統的穩態平衡方程式可改寫成

$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{F} + k^2 \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (3.4)$$

其中 \mathbf{P} 稱為參考負荷， k 稱為負荷參數。

本文以基於牛頓法的增量迭代法解非線性代數方程式(3.1)式，求得在不同無因次轉速 k 下，旋轉梁的節點位移向量 \mathbf{Q} 。

3.1.1 增量迭代數值計算方法

本文中將選定之最大負荷參數，即最大無因次轉速 k_{max} 等分成數個增量負荷參數 Δk ，若第 I 個增量的平衡位置為已知，即其位移向量為 \mathbf{Q}_I 、負荷參數為 k_I 為已知，則對應於第 $I+1$ 個增量之負荷參數 $k = k_I + \Delta k$ 的初始增量位移向量 $\Delta \mathbf{Q}$ ，可利用尤拉預測值(Euler predictor)[26]求得

$$\Delta \mathbf{Q} = -(2k_I + \Delta k) \Delta k \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{P} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{K}_T = \left. \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \mathbf{Q}} \right|_{\mathbf{Q}=\mathbf{Q}_I} \quad (3.6)$$

其中 $\mathbf{K}_T = \mathbf{K} + \Omega^2 \mathbf{K}_\Omega$ 為第 I 個增量的平衡位置之系統切線剛度矩陣， \mathbf{K} 和 \mathbf{K}_Ω 為系統的剛度矩陣及向心力剛度矩陣。

由 $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_I + \Delta \mathbf{Q}$ 可求得每個元素當前的元素座標及節點變形位移，將其代入(2.7.13)及(2.7.17)式，可算出元素的節點變形力及慣性力，將元素的節點力轉換到

總體座標，可組合得到(3.4)式之不平衡力 $\boldsymbol{\phi}$ ，再依牛頓法，可得位移修正量如下：

$$\delta\mathbf{Q} = -\mathbf{K}_T^{-1}\boldsymbol{\phi} \quad (3.7)$$

其中 $\boldsymbol{\phi}$ 為不平衡力， \mathbf{K}_T 為當前的系統切線剛度矩陣。

將求得的位移修正量 $\delta\mathbf{Q}$ ，加入上次迭代之 \mathbf{Q} 中，可得新的節點位移向量，再進行下一次迭代，此過程一直重複至(3.4)式中的不平衡力滿足斂準則為止。本文以不平衡力 $\boldsymbol{\phi}$ 的 weighted Euclidean norm 做為平衡迭代時的誤差度量，所使用的收斂準則為

$$e_{\boldsymbol{\phi}} = \frac{\|\boldsymbol{\phi}\|}{k^2 \sqrt{N}\|\mathbf{P}\|} \quad (3.8)$$

其中 $\|\bullet\|$ 為 \bullet 的歐幾里德範數(Euclidean norm)， N 為方程式的數目， e_{tol} 為一設定的容許誤差，本文中取 $e_{\boldsymbol{\phi}} = 10^{-7}$ 。



3.1.2 數值程序

本文所使用的增量迭代法之數值之數值程序可以分成三個部分：

1. 輸入與計算開始分析所需要的資料
 - (a) 輸入結構資料及給定外力負荷參數的最大值。
 - (b) 給定增量數、最大迭代數及收斂時的容許誤差。
 - (c) 計算增量負荷參數、負荷參數、
 - (d) 用(3.6)式計算系統切線剛度 $\mathbf{K}_T = \mathbf{K} + \Omega^2 \mathbf{K}_{\Omega}$ 、參考負荷 \mathbf{P} 。
2. 使用迭代法求在已知負荷參數的收斂解
 - (a) 利用(3.8)式求初始增量位移向量 $\Delta\mathbf{Q}$ 。

- (b) 將前一個平衡位置的節點位移向量 \mathbf{Q}_I 加上 $\Delta\mathbf{Q}$ 得到 \mathbf{Q} 。
- (c) 由 \mathbf{Q} 中萃取元素之節點位移，計算出當前的元素座標及元素的節點力，再計算(3.7)式之不平衡力 $\boldsymbol{\phi}$ 。
- (d) 檢查(3.11)式的收斂準則，若滿足則進行(e)；若不滿足，檢查迭代次數，若迭代次數小於給定之最大迭代次數，則利用(3.10)式求得位移修正向量 $\delta\mathbf{Q}$ ，將當前的節點位移向量 \mathbf{Q} 加上 $\delta\mathbf{Q}$ 得到一個新的 \mathbf{Q} ，再回 2(c)進行迭代；若迭代次數大於最大迭代次數則停止迭代並印出迭代相關資料。
- (e) 檢查增量次數是否大於最大增量次數，若滿足，則完成增量迭代步驟；若不滿足，則進行步驟 3。

3.計算下一次增量所需要的資料

- (a) 計算(3.9)式中的切線剛度及參考負荷。
- (b) 計算下一次增量的負荷參數。
- (c) 回到 2 執行迭代工作。



3.2 振動分析

本節將說明求旋轉梁自然頻率及振動模態的計算程序。本文先用本文採用子空間法(subspace method)[27]，求出當無因次轉速 $k=0$ 時的無因次自然頻率 K 及特徵向量 \mathbf{Q} ，將由 3.1 節之增量迭代法求得對應於無因次轉速 k 的穩態解代入(2.9.6)式中，再以二分法(bisection method)[28]解(2.9.5)式。

(2.9.5)式之 $\mathbf{H}(K)$ 可分解成 $\mathbf{H}(K)=\mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^t$ ，其中 \mathbf{L} 為下三角矩陣， \mathbf{D} 為對角線矩陣。

令

$$D(K) = \det|\mathbf{H}(K)| = 0 \quad (3.9)$$

其中 $D(K)$ 為 $\mathbf{H}(K)$ 的行列式值，其值為 \mathbf{D} 矩陣之對角線元素的乘積。

若 K_B 滿足 $D(K_B) = 0$ ，則 K_B 為旋轉梁之一無因次自然頻率。由於 \mathbf{H} 的維數隨著元素數目的增加而變大，為了避免其行列式的數值過大，所以本文中將 $D(K)$ 做以下的標準化(normalization)處理：

$$\bar{D}(K) = \frac{D(K)}{D(K_0)} \quad (3.10)$$

其中 K_0 為一參考值。

若 $K_L < K_B < K_R$ ，其中 K_B 為一無因次自然振動頻率，則 $N_L < N_R$ ，其中 N_L 、 N_R 分別為 $\mathbf{D}(K_L)$ 、 $\mathbf{D}(K_R)$ 中負的對角線元素的個數。如已知 K_R 及 K_L ，則可由二分法求得 K_B 。

本文解(3.9)式所採用的計算程序如下：

設定需要的自然頻率的數目，先用子空間法(subspace method)求出當無因次轉速 $k = 0$ 時的無因次自然頻率 K 及特徵向量 \mathbf{Q} 。若第 I 個增量的穩態平衡位置已求出，即其位移向量為 \mathbf{Q}_I 、負荷參數 k_I 為已知，先以前一個無因次轉速 k_{I-1} 得到之無因次自然頻率為參考值，設定無因次自然頻率的起始值 K_0 及增量 ΔK ，計算 $\mathbf{D}(K_0)$ 中負的對角線元素的數目 N_0 。

(A)

(1) 令 $K_n = K_0 + (n-1)\Delta K$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)，由 K_n 、 k_I 、 K 及 \mathbf{Q}_I 計算 $\mathbf{D}(K_n)$ ，

一直到相鄰兩個 $\mathbf{D}(K_n)$ 中，負的對角線元素的數目不一樣。

(2)令 $K_L = K_{n-1}$ ， $K_R = K_n$ ，其中下標 L 及 R 分別代表根的左邊極限及右邊極限。

(3)以二分法取 $K_B = \frac{K_L + K_R}{2}$ ，並重新計算 $\mathbf{D}(K_B)$ ，及其負的對角線元素的數目 N_B 。

(4)若 $N_B = N_0$ ，取 $K_L = K_B$ ；若 $N_B > N_0$ ，取 $K_R = K_B$ 。

(5)若 $\frac{K_R - K_L}{K_B} < e_{tol}$ ，且 $\bar{D}(K_B) < e_{tol2}$ ，則取 K_B 為(3.12)式之解，繼續進行

步驟(B)求振態，否則回到步驟(3)。

其中 e_{tol} 、 e_{tol2} 為設定之容許誤差，本文中取 $e_{tol} = 10^{-9}$ ， $e_{tol2} = 10^{-9}$ 。

(B)

(1)將 $\mathbf{H}(K_B)$ 分解成 $\mathbf{H}(K_B) = \mathbf{LDL}^t$ 。

(2)找出對角線矩陣 \mathbf{D} 中元素之絕對值有最小值的行，令該行為第 k 行。

(3)令振態之第 k 個分量的值為1，再將(2.8.5)式改寫成

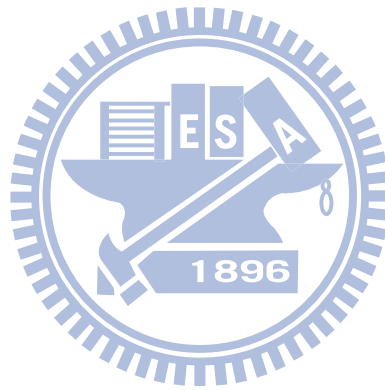
$$\begin{bmatrix} H_{1,1} & \cdots & H_{1,k-1} & 0 & H_{1,k+1} & \cdots & H_{1,2N} \\ \vdots & & & \vdots & & & \\ H_{k-1,1} & & & 0 & & & H_{k-1,2N} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ H_{k+1,1} & & & 0 & & & H_{k+1,2N} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ H_{2N,1} & & & 0 & & & H_{2N,2N} \end{bmatrix}_{2N \times 2N} \begin{Bmatrix} \Theta_1 \\ \vdots \\ \Theta_{k-1} \\ \Theta_k \\ \Theta_{k+1} \\ \vdots \\ \Theta_{2N} \end{Bmatrix}_{2N \times 1} = \begin{Bmatrix} -H_{1,k} \\ \vdots \\ -H_{k-1,k} \\ 1 \\ -H_{k+1,k} \\ \vdots \\ -H_{N,k} \end{Bmatrix}_{2N \times 1} \quad (3.11)$$

(4)利用高斯消去法求解(3.11)式得到振態 Θ 。

(5)將 Θ 除以其分量中絕對值最大的分量 Θ_{\max} ，即

$$\bar{\Theta} = \frac{\Theta}{\Theta_{\max}} \quad (3.12)$$

(6)以步驟(A)求得之 K_B 及前一個無因次轉速 k_{l-1} 得到之無因次自然頻率為參值，設定無因次自然頻率的起始值 K_0 及增量 ΔK ，回到步驟(A)繼續求下一個自然頻率及振動模態。



第四章 數值例題之結果與討論

本章將分析不同斷面、長度、無因次轉軸半徑 r 、傾斜角 α 及設定角 β 的三維 Euler 梁在不同的無因次轉速 k 下之穩態解、無因次自然頻率 K 及振態。本章所考慮如圖七所式之橢圓斷面、I 型斷面與十字斷面，其各種斷面常數列於附錄 A 中。梁的長度 L_T 與斷面高度比，橢圓斷面指的是 L_T/a ；I 型斷面上指的是 L_T/d_{nom} ，其中 d_{nom} 為 I 型斷面的名義上的(nominal)高度，如 W10×100 的 d_{nom} 為 10 in；十字斷面 $d \times b \times t$ 中指的是 L_T/d ，其中 d 為真正的高度 d 。

本章的參數中， $n_y = \sqrt{AL^2/I_z}$ 為附錄 A 中斷面主軸 y 方向的細長比， $n_z = \sqrt{AL^2/I_y}$ 為 z 方向的細長比，因本文中總體座標系統 X_i^G 、梁斷面座標系統 x_i^S 及元素座標系統 x_i ($i=1,2,3$) 的座標軸方向，在梁未變形時，都是相同的， y 方向為 X_2^G 的座標軸方向， z 方向為 X_3^G 的座標軸方向，所以 n_y 及 n_z 分別為梁在 $X_1^G - X_2^G$ 及 $X_1^G - X_3^G$ 平面的細長比。 N 為該例題所使用的元素數目， K_i ($i=1,2,3\dots$) 為第 i 個無因次自然頻率((2.10.1)式)。當無因次轉速 $k=0$ 時，無因次振動頻率 K 僅與梁斷面以及細長比有關且其軸向和側向及扭轉的振態不互相耦合；由(2.3.2)-(2.3.4)、(2.6.7)、(2.6.8)、(2.6.15)、(2.7.17)式可知、當 $k \neq 0$ 、 $\alpha=0$ 、 $\beta=0$ 時，梁未變形時慣性力僅有軸向分量，故穩態解僅有軸向變形，但因陀螺矩陣中軸向和側向間的耦合項不為零，故其振態的軸向和側向變形會互相耦合；當 $r=0$ 、 $k \neq 0$ 、 $\beta \neq 0$ 時在梁未變形時慣性力僅有軸向和扭轉分量且與 α 無關；當 $r \neq 0$ 、 $k \neq 0$ 、 $\alpha=0$ 、 $\beta \neq 0$ 時，在梁未變形時慣性力僅有軸向和扭轉分量，故穩態解有軸向和扭轉變形，但因陀螺矩陣中軸向和側向、扭轉和側向間的耦合項不為零，其振態中軸向和側向、扭轉和側向變形會互相耦合；當 $r \neq 0$ 、 $k \neq 0$ 、 $\alpha \neq 0$ 、 $\beta=0$ 或 90° 時，在梁未變形時慣性力有軸向和單一側向分量，故旋轉梁的穩態解有軸

向和單一側向變形，但因陀螺矩陣中軸向和側向、扭轉和側向間的耦合項不為零，其振態中軸向和側向、扭轉和側向變形會互相耦合；當 $r \neq 0$ 、 $k \neq 0$ 、 $\alpha \neq 0$ 、 $\beta \neq 0$ 時，未變形時慣性力有軸向、扭轉以及兩個側方向分量，故旋轉梁的穩態解有軸向、扭轉及兩個側向變形，其振態中軸向和側向、扭轉和側向變形會互相耦合。本章中將旋轉梁的自然頻率依其在轉速為零時的振態分為 AI、BI、CI、DI ($I = 1, 2, 3, \dots$) 四類：

AI- 轉速為零時，第 I 個軸向振動

BI- 轉速為零時，第 I 個在斷面主軸 $y(X_2^G)$ 方向的側向振動

CI- 轉速為零時，第 I 個在斷面主軸 $z(X_3^G)$ 方向的側向振動

DI- 轉速為零時，第 I 個扭轉振動

當轉速不為零時，各種振動會耦合在一起， X ($X = A, B, C, D$) 代表該振動在轉速為零時是 X 類的振動。所以本文中需比較不同轉速下各自然頻率的振態，才能將振動頻率歸類。

本文中假設穩態解的應變 $\varepsilon \ll 1$ ，為確保梁的應變在合理範圍內，本文中將穩態解的允許最大應變定為 10^{-2} 。本文將限制旋轉梁的最大無因次轉速 k ，使其最大膜應變(membrane strain) $\varepsilon_{0\max}$ 及兩個側方向的最大撓曲應變(flexural strain) $\varepsilon_{b\max}$ 、 $\varepsilon_{c\max}$ 的和儘量不超過 10^{-2} 。由附錄 B 可知旋轉梁的最大膜應變和最大撓曲應變為 k 、 r 、 \bar{I}_y 、 \bar{I}_z 、 α 、 β 的函數，所以具不同 α 、 β 、 r 以及斷面的旋轉梁有不同的最大無因次轉速 k ，為了方便，本文中取 k 的最大值為 0.01；但當傾斜角 ($\alpha = 0^\circ$) 時，旋轉梁的穩態解無側向變形， $\varepsilon_{b\max}$ 、 $\varepsilon_{c\max}$ 皆為零，因此 k 的最大值取為 0.1，當傾斜角 ($\alpha = 5^\circ$) 時，旋轉梁的穩態解側向變形不大，因此 k 的最大值取為 0.03。

4.1 收斂分析

本節在探討使用不同的元素數目 N 時，旋轉傾斜 Euler 梁之穩態解及自然頻率的收斂情形。本節中考慮了無因次轉軸半徑 $r=1$ 、設定角 $\beta=45^\circ$ ，橢圓斷面 $a/b=5$ 、 $a/b=10$ 、長度與斷面高度比 $L_T/a=50$ 、傾斜角 $\alpha=0^\circ$ 、 5° 、 30° 、 45° 、 60° ；I 型斷面 $W10\times30$ 、 $W10\times100$ 、長度與斷面高度比 $L_T/d_{nom}=25$ 、傾斜角 $\alpha=45^\circ$ ；十字斷面 $d\times b\times t=14\times7\times0.35$ 、長度與斷面高度比分別為 $L_T/d=10$ 、 $L_T/d=20$ 、傾斜角 $\alpha=45^\circ$ 之情況。

表一至表七為旋轉梁之穩態解及自然頻率的收斂分析的結果，表中 ε_0 為穩態解之最大膜應變 ε_0 ， ε_b 及 ε_c 為 y 及 z 兩方向之最大撓曲應變、 V_{tip} 、 W_{tip} 為在 X_2^G 及 X_3^G 方向之無因次端點側向位移、 $\Theta_1(1)$ 為梁自由端上的扭轉角、 $\Theta'_1(0.1)$ 為梁在 0.1 個長度位置的扭轉率、 $K_i (i=1\sim8)$ 為前八個無因次自然頻率。由表五可發現，橢圓斷面 $a/b=10$ 、 $L_T/a=50$ 在傾斜角 $\alpha=60^\circ$ 時，元素數目 $N=20$ 無法收斂，而且由表一至七觀察可知，隨著元素數目的增加，相同斷面及傾斜角所對應的無因次振動頻率 K_i 變化幅度愈小，當元素數目為 $N=50$ 時，振動頻率變化幅度大約小於 10^{-4} ，已足夠精確，因此在本章中，除非另有說明，否則皆使用 50 個元素。由表一至七亦可發現在本節考慮的轉速下，穩態解的最大應變大都在預定的範圍內，僅有少數稍微超出，所以本章以後的分析都是採用本節的轉速當最大轉速。

4.2 個案分析

本節中將探討具不同無因次轉軸半徑 r 、傾斜角 α 、設定角 β 之三維旋轉傾斜 Euler 梁在不同斷面、不同無因次轉速 k 之下的穩態解、無因次振動頻率 K 及振態。

首先考慮無因次轉速 $k=0$ 、橢圓斷面 $a/b=5$ 及 10、梁的長度與斷面高度

比 $L_T/a = 20$ 及 50 的自然頻率。橢圓斷面 $a/b = 5$ ， $L_T/a = 20$ 時， $X_1^G - X_2^G$ 平面的細長比 $n_y = 200$ 、 $X_1^G - X_3^G$ 平面的細長比 $n_z = 40$ ； $L_T/a = 50$ 時， $n_y = 500$ 、 $n_z = 100$ 。橢圓斷面 $a/b = 10$ 時， $L_T/a = 20$ ， $n_y = 400$ 、 $n_z = 40$ ； $L_T/a = 50$ 時， $n_y = 1000$ 、 $n_z = 100$ 。由表八可發現，相同的細長比對應相同的自然頻率。

4.2.1 橢圓斷面

表九至表二十四與表二十五至表四十分別為橢圓斷面 $a/b = 5$ 、 $a/b = 10$ ，總長與斷面比分別為 $L_T/a = 20$ 、 $L_T/a = 50$ 在不同設定角、不同傾斜角、不同轉速下的穩態解及振動頻率。如前所述，當無因次轉軸半徑 $r = 0$ 時，在梁未變形時慣性力僅有軸向和扭轉分量且與 α 無關，所以 $r = 0$ 時，本節中僅考慮 $\alpha = 0^\circ$ ，其結果列於表九、表十、表十七、表十八、表二十五、表二十六以及表三十三、表三十四，由表中可以發現設定角對自然頻率的影響隨著轉速的長度的增加而增加，而且只對低頻的自然頻率影響較大，對較高頻時影響不大，其中 BI 和 DI 的自然頻率隨著設定角增加而上升，CI 的自然頻率隨著設定角增加而下降，還有穩態解中僅有軸向位移和扭轉角。當無因次轉軸半徑 $r = 1$ ， $\alpha = 0^\circ$ 時，在梁未變形時慣性力亦僅有軸向和扭轉分量，其結果列於表十一、表十二、表十九、表二十、表二十七、表二十八以及三十五、表三十六，由表中亦可以發現其結果的趨勢與 $r = 0$ 時相似，但其振動頻率較大，且不同種振態的頻率間會在較低的轉速時發生彼此互換次序的情況。

從表十三至表十六、表二十一至表二十四、表二十九至表三十二以及表三十七至表四十可發現傾斜角 $\alpha \neq 0$ ，設定角 $\beta \neq 0^\circ$ 或 90° 時，穩態解中有軸向位移、兩個側向位移和扭轉角，設定角 $\beta = 0^\circ$ 或 90° 時，穩態解中僅有一個軸向與一個側向的變形。表中自然頻率對應的振態含有各種變形的分量，其種類須由其振態圖及轉速-頻率曲線決定。

表四十中可以發現橢圓斷面 $a/b=10$ ， $L_T/a=50$ ， $r=1$ 之梁在當設定角 $\beta=90^\circ$ 、傾斜角 $\alpha=45^\circ$ ， $k=0.01$ 時，無法找到第一個自然振動頻率，由圖八可以發現在 $\beta=90^\circ$ 時， k 在 0.075 附近，第一個自然頻率的值急速下降，其原因可以說明如下，由圖九轉速與切線剛度的行列式值 $\det \mathbf{K}_T$ 關係圖可以發現，當轉速 k 約為 0.008 時，其切線剛度之行列式值由正變負，其原因為傾斜旋轉梁在受到轉速約為 0.008 時，所受的側向慣性力負荷，已經到達了撓曲—扭轉挫屈的臨界負荷，在 $k=0.01$ 時，旋轉梁已經挫屈，故沒有第一個自然振動頻率。

圖十至圖十二為在不同轉速之下，不同橢圓斷面旋轉梁的穩態位移分佈圖，圖十中因 $r=0$ 、 $\alpha=0^\circ$ ，所以無側向變形，圖十一、圖十二中因 $r=1$ 、 $\alpha=30^\circ$ ，所以有各方向的變形，由圖中可以發現在旋轉梁的根部附近扭轉率有最大值，然後急劇的變小，並趨近於零。

圖十三至圖十八為各種斷面在不同轉速下的自然頻率曲線圖，其中之 XI ($X=A, B, C, D; I=1, 2, 3, \dots$) 指的是該曲線的自然頻率對應的振態在轉速 $k=0$ 時為第 I 個 X 類的振態，而 $\beta=0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ 之 XI 曲線在 $k=0$ 時有共同的起點。由圖中可以得知，當轉速 $k=0$ 時，各組的振動是互相獨立的，但是當轉速增加時，耦合的現象會越來越明顯。傾斜角 $\alpha=0^\circ$ 時，從圖十三與圖十四可以發現出 $I \geq 2$ 時，BI 的頻率隨轉速增加而明顯的增加，CI 的頻率增加較少，扭轉振動 DI 的頻率則隨轉速變動不大，且 BI、DI 的頻率會隨著設定角 β 增加而增加，CI 的頻率會隨著設定角 β 增加而下降。因為各類頻率增加的速度不同，所以產生了不同類振動頻率的大小關係隨轉速增加而改變的情形。如圖十三所示，可以判斷設定角為 45° 時 B3 頻率的值在 k 等於 0.05 和 0.06 之間超越了 C2 頻率的值，另外隨著長度增加，側向振動較扭轉振動的自然頻率隨轉速增加的速度快。在圓柱半徑 $r=1$ 的情況下，轉速所造成頻率變化會隨之增加，彼此振動耦合會在較低的轉速

下產生；在圖十七，細長比較高的情況下，頻率 C2 會先急速增加後再緩慢的下降，其原因是可能是因為扭轉方向的頻率 D1 所造成的耦合現象所致。從圖十七與十八的比較中可知，在隨著傾斜角 α 的增加，頻率 C2 隨著轉速的變化更為劇烈，且在設定角 $\beta = 90^\circ$ ，頻率 BI 會有明顯的下降。頻率 B2 與頻率 C1 在圖十六、圖十七以及圖十八中，也會發生了彼此交叉的情況，其原因為 C1 隨著轉速而下降所造成。

圖十九至圖二十七則為對應於圖十六情況下的自然頻率對應的模態圖，設定角 $\beta = 0^\circ$ 時， X_2^G 軸方向的振態 B 會產生軸向方向的分量 AI， X_3^G 軸方向的振態 CI 則有扭轉方向的分量 DI； $\beta = 45^\circ$ 時，任何方向的振態裡面皆有所有方向的分量，其中扭轉分量 DI 造成的影響最為明顯，軸向振態 AI 與 X_2^G 軸的振態 BI、 X_3^G 軸的振態 CI 彼此之間的影响反而不明顯； $\beta = 90^\circ$ ， X_2^G 軸方向的振態 BI 會產生扭轉方向的分量 DI，而 X_3^G 軸的振態 CI 與扭轉的振態 DI 上其他方向的分量並不明顯，而且振態與轉速 $k = 0$ 時的振態相近。

4.2.2 I 型斷面

表四十一至表四十八為 I 型斷面 $W10 \times 30$ ，總長與斷面比為 $L_T/d_{nom} = 25$ 在不同設定角、不同傾斜角、不同轉速下的穩態解及振動頻率。在傾斜角 $\alpha = 0^\circ$ 的情況之下，從表四十一至表四十四可以發現其結果的趨勢與橢圓斷面相似，而當 $r = 1$ 時，表四十三、四十四可以發現其振動頻率較大，且會在較低的轉速之下產生不同振態的頻率之間彼此互換的情況。

表四十五至表四十八為 $r = 1$ 、傾斜角 $\alpha = 30^\circ$ 、 $\alpha = 45^\circ$ 的情形，表中可以發現，當設定角 $\beta = 0^\circ$ 、 90° 時，穩態解僅有一個軸向與一個側向的變形； $\beta = 30^\circ$ 、 45° 時，穩態解中有軸向位移、兩個側向位移以及扭轉角。表中自然頻率對應的振態種類亦必須由其振態圖及轉速-頻率曲線決定。

圖二十八、二十九為在不同轉速之下，I 型斷面 $W10 \times 30$ ，總長與斷面

比為 $L_T/d_{nom} = 25$ ， $r = 1$ ，設定角 $\beta = 45^\circ$ ，傾斜角分別為 $\alpha = 5^\circ$ 、 $\alpha = 30^\circ$ 之穩態位移分佈圖，從圖的比較中得知，隨著 α 的增加，扭轉率有很大的變化，在根部附近之最大值會明顯的上升， X_2^G 、 X_3^G 方向上的側向位移亦會隨著 α 的增加而增加且在細長比較大之方向更為明顯。

圖三十為 I 型斷面 $W10 \times 30$ ，總長與斷面比為 $L_T/d_{nom} = 25$ ， $r = 0$ ，傾斜角 $\alpha = 0^\circ$ 之轉速 - 自然頻率圖，其中曲線上自然頻率 XI ($X = A, B, C, D; I = 1, 2, 3, \dots$) 對應的振態在不同轉速 k 時的變化趨勢與橢圓斷面(圖十三至圖十八)相同，從圖上發現當 $\beta = 0^\circ$ 之 B3、C2 以及 $\beta = 90^\circ$ 之 B1、C1 與 B3、C2 皆產生了彼此頻率交叉的情況；頻率 C1 與 D1 則是有了交錯的情況且隨著設定角 β 增加而逐漸不明顯，其原因為 C1 之振態 D1 分量因 β 增加而減小且當 $\beta = 90^\circ$ 時並無 D1 分量。圖三十一為傾斜角 $\alpha = 5^\circ$ 的情況，從圖中可以發現彼此振態對應的頻率之間隨著設定角 β 的改變所造成的影響不大，且並無發生頻率之間交錯或是交叉的行為。

圖三十二至圖四十則為對應於圖三十一情況下的自然頻率對應的模態圖，設定角 $\beta = 0^\circ$ 時，扭轉方向的分量 DI 產生會在 X_3^G 方向的振態 CI， X_2^G 方向的振態 BI 則會出現軸向方向的分量 A； $\beta = 45^\circ$ 時，任何方向的振態裡面皆有所有方向的分量，其中扭轉分量 DI 造成的影響最為明顯，而軸向振態 AI 與兩個側向方向的振態 BI、CI 彼此之間的影响反而不明顯。

4.2.3 十字斷面

表四十九至五十六為十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$ ， $L_T/d = 20$ 在不同設定角、不同傾斜角、不同轉速下的穩態解及振動頻率。其結果可以發現其趨勢與橢圓斷面和 I 型斷面相似。而在傾斜角 $\alpha = 0^\circ$ 時，頻率 B3 與 C2 會產生頻率位置互換的情況，且隨著設定角 β 增加而在較高的轉速產生，當 $\beta = 90^\circ$ 時並無位置互換的行為。

圖四十一、四十二為在不同轉速之下，十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$ 、 $L_T/d = 20$ ， $r = 1$ ，設定角 $\beta = 45^\circ$ ，傾斜角分別為 $\alpha = 5^\circ$ 、 $\alpha = 30^\circ$ 之穩態位移分佈圖，隨著 α 的增加，扭轉率在根部附近之最大值會明顯的上升，再急速下降以後趨近於零， X_2^G 、 X_3^G 方向上的側向位移亦會隨著 α 的增加而增加且在細長比較大之方向更為明顯。

圖四十三、四十四為十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$ ， $L_T/d = 20$ 、傾斜角 $\alpha = 0^\circ$ 分別在 $r = 0$ 、 $r = 1$ 之轉速—自然頻率圖，其中曲線上自然頻率 XI ($X = A, B, C, D; I = 1, 2, 3, \dots$) 對應的振態在不同轉速 k 時的變化趨勢與橢圓斷面(圖十三至圖十八)和 I 型斷面(圖三十至圖三十一)相同，圖四十三可以發現，當 $\beta = 0^\circ$ 、 45° 時，B3、C2 以及 $\beta = 90^\circ$ 時，B1、C1 皆有頻率彼此交叉； $\beta = 0^\circ$ 時，C1 與 D1 頻率之間產生了交錯的情況。由圖四十四可以發現轉軸半徑 $r = 1$ 之結果的趨勢與 $r = 0$ 時相似，但其振動頻率較大，且不同種振態的頻率間會在較低的轉速時發生彼此互換次序(交叉或是交錯)的情況。當傾斜角 $\alpha = 5^\circ$ 時，從圖四十五中可以發現彼此振態對應的頻率之間隨著設定角 β 的改變所造成的影響不大，但在 B3、C2 有頻率彼此交叉的情況。

圖四十六至五十四為對應於圖四十三情況下的自然頻率對應的模態圖，因轉軸半徑 $r = 0$ 、傾斜角 $\alpha = 0^\circ$ ，故不會產生側向位移，設定角 $\beta = 0^\circ$ 與 $\beta = 90^\circ$ 時之模態情形與橢圓斷面、I 型斷面相同； $\beta = 45^\circ$ ，各組的振態裡面皆有所有方向的分量，且 BI、CI 與 DI 的振態之間有明顯的耦合現象。

第五章 結論與展望

5.1 結論

本研究採用共旋轉有限元素法探討不同設定角、傾斜角之等速旋轉的三維傾斜尤拉梁的穩態變形及以該穩態變形為平衡點的微小振動之自然振動頻率。本文中考慮梁的軸向、兩個側向位移及扭轉之三維運動，本研究採用 d'Alembert 原理、虛功原理、幾何非線性梁理論的一致線性化，在梁元素當前之元素座標上推導節點慣性力和節點變形力，再將元素的節點力轉到總體座標後組合成系統的非線性運動方程式。本研究將旋轉梁的運動方程式中函時間函數的項去掉，求得系統穩態平衡方程式，再用基於牛頓法的增量迭代法求出所有位移以及扭轉的穩態解，將運動方程式在穩態平衡位置用泰勒級數展開，取到一次項，求得旋轉傾斜梁的振動方程式，再假設自然振動頻率存在，可求得一組代數齊次方程式，該組齊次方程式係數形成之矩陣的行列式為零時，即可求得旋轉梁以穩態解為平衡點的自然振動的頻率及其對應的振態。

由本研究的數值例題可以得到以下的結論：

1. 當設定角不為 0° 或 90° ，若傾斜角不為 0° 時，三維旋轉梁結構的穩態解包含著軸向、扭轉以及兩個側方向位移，此時以穩態解為平衡點的振動是軸向、扭轉及兩個側向耦合的振動，且耦合的程度隨著傾斜角 α 、無因次轉速 k 和梁的細長比的增加而增加。
2. 當傾斜角 $\alpha \neq 0^\circ$ ，設定角 $\beta = 0^\circ$ 或 90° 時，旋轉梁的穩態解僅有軸向及一個側方向的位移。
3. 傾斜角 $\alpha = 0^\circ$ 且設定角 $\beta \neq 0^\circ$ 或 90° 時，穩態解僅有軸向、扭轉的變形，且這個扭轉變形會與軸向變形產耦合作用。當 I_y 和 I_z 的值差距越大，穩態解的扭轉變形也越大。因科式力的關係，其側向與扭轉變形的振動是耦合的。

4. 具有任意設定角和傾斜角的旋轉梁結構之最大無因次轉速可以由穩態解時之最大膜應變分別和兩個側向最大撓曲應變知何來決定，當傾斜角為零度時，因無側向變形，故不會產生撓曲應變，所以當無因次轉速半徑 $r=0$ 時之最大無因次轉速 k 可設為0.1；在傾斜角不為零度時，因須考慮最大撓曲應變，最大無因次轉速 k 約為0.01。
5. 當設定角為 0° 時，因無因次振動頻率 K 隨著轉速增加的速度不同，使不同振態的頻率隨著轉速增加而接近，產生了頻率曲線交錯或是交叉的現象，而細長比較小的側向振動會有很大的扭轉振動分量，造成徵值曲線轉向 (Eigenvalue curve veering) 及振態交換的現象。因頻率的增加率會隨著細長比與轉速增加而變大，故細長比不同之兩軸側向振動所對應的頻率會有彼此交叉的情況。



5.2 未來展望

1. 本研究僅探討設定角、傾斜角對旋轉梁的所造成影響，但旋轉梁另外還有預扭角 (Pretwisted angle) 和預錐角 (Precone angle)，這些都會影響旋轉梁的穩態解及自然振動頻率，在將來亦非常值得探討。
2. 因旋轉梁的自由端常加掛配重，藉此來改善旋轉梁結構之機能性。例如增加渦輪風扇的氣流，增加撓性旋轉葉片的撓度，或是改善旋轉梁結構之自然振動頻率等，故將來擬推導旋轉梁的運動方程式時應將配重考慮進去。

參考文獻

- [1] Leissa, A., 1981, “Vibrational Aspects of Rotating Turbomachinery Blades”, *ASME Applied Mechanics Reviews*, Vol. 34, pp. 629-635.
- [2] Ramamurti, V., Balasubramanian, P., 1984, “Analysis of Turbomachinery Blades - A Review,” *The Shock, Vibration Digest*, Vol. 16, pp. 13-28.
- [3] Schilhansl, M. J., 1958, “Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam”, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 25, pp. 28-30.
- [4] Lee, S. Y., Kuo, Y. H., 1991, “Bending Frequency of a Rotating Beam with an Elastically Restrained Root”, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 58, pp. 209-214.
- [5] Yokoyama, T., 1988, “Free Vibration Characteristics of Rotating Timoshenko Beam”, *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 30, No. 10, pp. 743-755.
- [6] Lee, S. Y., Lin, S. M., 1994, “Bending Vibration of Rotating Nonuniform Timoshenko Beams with an Elastically Restrained Root”, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 61, pp. 949-955.
- [7] Eick, C. D., Mignolet, M. P., 1995, “Vibration and Buckling of Flexible Rotating Beams”, *AIAA Journal*, Vol. 33, No. 3, pp. 526-538.
- [8] Simo, J. C., Quoc, L. V., 1987, “The Role of Non-Linear Theories in Transient Dynamic Analysis of Flexible Structures”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 119, pp. 487-508.
- [9] Lin, S. C., Hsiao, K. M., 2001, “Vibration Analysis of a Rotating Timoshenko Beam”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 240(2), pp. 303-322.

- [10] 洪船島, 1997, 旋轉梁結構之振動分析, 國立交通大學機械工程研究所碩士論文, 臺灣, 新竹.
- [11] 周志芳, 1998, 旋轉梁之自由振動的級數解法, 國立交通大學機械工程研究所碩士論文, 臺灣, 新竹.
- [12] 黃志傑, 2001, 旋轉三維 Timoshenko 梁之振動分析, 國立交通大學機械工程研究所碩士論文, 臺灣, 新竹.
- [13] 何其昌, 2002, 旋轉三維 Euler 梁之振動分析, 國立交通大學機械工程研究所碩士論文, 臺灣, 新竹.
- [14] Lee, S. Y., Sheu, J. J., 2007, “Free Vibrations of a Rotating Inclined Beam”, *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 74, pp. 406-414.
- [15] Lin, S. M., Lee, S. Y., and Lin, Y. S., 2008, “Modeling and Bending Modeling and Bending Vibration of the Blade of a Horizontal-Axis Power Turbine”, *Chinese Mechanical Engineering Society*, Vol. 23, pp.175-186.
- [16] 顏宏儒, 2008, 旋轉傾斜梁之穩態及自由振動分析, 國立交通大學機械工程研究所碩士論文, 臺灣, 新竹.
- [17] 周裕淳, 2009, 以有限元素法分析旋轉傾斜尤拉梁的穩態變形與自由振動, 國立交通大學機械工程研究所碩士論文, 臺灣, 新竹.
- [18] Lee, S. Y., Lin, S. M., and Lin, Y. S., 2009, “Instability and Vibration of a Rotating Timoshenko Beam with Precone”, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 51, pp. 114-121.
- [19] Subrahmanyam, K. B., Kaza, K. R. V., 1987, “Non-Linear Flap-Lag-Extensional Vibrations of Rotating, Pretwisted Preconed Beams Including Coriolis Effects”, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 29, pp. 29-43.

- [20] Surace, G., Anghel, V., and Mares, C., 1997, "Coupled Bending-Bending-Torsion Vibration Analysis of Rotating Pretwisted Blades: An Integral Formulation and Numerical Examples", *Journal of Sound Vibration*, Vol. 206, pp. 473-486.
- [21] Yoo, H. H., Park, J.H., and Park, J., 2001, "Vibration Analysis of Rotating Pretwisted Blades", *Computers and Structures*, Vol. 79, pp. 1811-1819.
- [22] Yoo, H. H., Kwak, J. Y., and Chung, J., 2001, "Vibration Analysis of Rotating Pretwisted Blades with a Concentrated Mass", *Journal of Sound Vibration*, Vol. 99, pp. 891-908.
- [23] Hsiao K. M., Lin J. Y., 2001, "Co-Rotational Formulation for Geometric Nonlinear Analysis of Doubly Symmetric Thin-Walled Beams", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 190, pp. 6023-6052.
- [24] 遊敬義, 2001, 雙對稱開口薄壁梁元素之一致性共旋轉推導法及其在挫屈分析的應用, 國立交通大學機械工程研究所碩士論文, 臺灣, 新竹
- [25] Hsiao K. M., Chen H. H., Lin W. Y., 2006, "Co-Rotational Finite Element Formulation for Thin-Walled Beams with Emeric Open Section", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 195, pp. 2334-2370.
- [26] Crisfield M. A., 1990, "A Constant Co-Rotational Formulation for Non-Linear Three-Dimensional Beam Elements", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 81, pp. 131-150.
- [27] Sommese A. J., Wampler C. W., 2005, "The Numerical Solution of Systems of Polynomials Arising in Engineering and Science", World Scientific Pub Co Inc, Singapore.
- [28] Bathe K. J., 1996, "Finite Element Procedure, Prentice-Hall", John Wiley & Sons Inc, New Jersey.

[29] Rao S. S., 2000, “Engineering Optimization: Theory and Practice”, 3th Edition, John Wiley & Sons Inc, New Jersey.



表一 不同橢圓斷面的收斂分析

($k=0.1$ 、 $\alpha=0^\circ$ 、 $\beta=45^\circ$ 、 $r=1$)

元素數目	$a/b=5$, $L_T/a=50$				$a/b=10$, $L_T/a=50$			
	10	20	40	50	20	30	40	50
ε_0	1.42324E-2	1.44842E-2	1.46072E-2	1.46315E-2	1.44835E-2	1.45656E-2	1.46064E-2	1.46309E-2
ε_b	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
ε_c	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
V_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
W_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta_1(1)$	3.33458E-2	3.36640E-2	3.37781E-2	3.37922E-2	9.44427E-2	9.46527E-2	9.47467E-2	9.48000E-2
$\Theta'_1(0.1)$	4.93207E-2	5.81485E-2	5.87462E-2	5.87461E-2	1.49635E-1	1.51590E-1	1.51659E-1	1.51673E-1
K_1	1.26477E-1	1.26137E-1	1.26058E-1	1.26050E-1	1.25628E-1	1.25517E-1	1.25478E-1	1.25416E-1
K_2	1.62721E-1	1.62511E-1	1.62464E-1	1.62459E-1	1.62211E-1	1.62163E-1	1.62148E-1	1.62090E-1
K_3	3.73547E-1	3.70702E-1	3.69838E-1	3.69733E-1	2.57620E-1	2.57326E-1	2.57209E-1	2.57154E-1
K_4	4.14920E-1	4.12991E-1	4.12307E-1	4.12222E-1	3.67405E-1	3.66632E-1	3.66333E-1	3.66160E-1
K_5	4.39860E-1	4.38333E-1	4.37948E-1	4.37902E-1	4.37458E-1	4.37167E-1	4.37065E-1	4.36487E-1
K_6	6.20781E-1	6.13537E-1	6.11323E-1	6.11052E-1	5.95181E-1	5.92856E-1	5.91937E-1	5.91431E-1
K_7	8.87731E-1	8.83230E-1	8.81246E-1	8.80981E-1	7.21760E-1	7.20875E-1	7.20521E-1	7.20354E-1
K_8	8.98613E-1	8.90328E-1	8.88710E-1	8.88545E-1	8.35416E-1	8.31632E-1	8.30149E-1	8.29282E-1

表二 不同橢圓斷面的收斂分析

($k=0.03$ 、 $\alpha=5^\circ$ 、 $\beta=45^\circ$ 、 $r=1$)

元素數目	$a/b=5$, $L_T/a=50$				$a/b=10$, $L_T/a=50$			
	10	20	40	50	20	30	40	50
ε_0	1.29432E-3	1.31545E-3	1.32489E-3	1.32665E-3	1.31574E-3	1.32160E-3	1.32425E-3	1.32580E-3
ε_b	-3.30661E-3	-3.68072E-3	-3.81227E-3	-3.82957E-3	-3.38148E-3	-3.62400E-3	-3.72389E-3	-3.77186E-3
ε_c	3.54103E-3	3.57432E-3	3.58288E-3	3.58383E-3	3.61204E-3	3.61795E-3	3.61984E-3	3.62060E-3
V_{tip}	-4.93470E-2	-4.93995E-2	-4.94086E-2	-4.94094E-2	-5.15768E-2	-5.15975E-2	-5.16021E-2	-5.16032E-2
W_{tip}	3.34203E-2	3.34543E-2	3.34616E-2	3.34623E-2	3.39254E-2	3.39358E-2	3.39379E-2	3.39380E-2
$\Theta_1(1)$	-2.10380E-3	-2.46365E-3	-2.65599E-3	-2.68060E-3	2.84228E-3	2.63256E-3	2.37216E-3	2.30312E-3
$\Theta'_1(0.1)$	8.34102E-3	-6.07496E-3	-6.87900E-3	-6.87171E-3	2.12194E-2	1.78888E-2	1.79272E-2	1.79739E-2
K_1	4.22616E-2	4.22362E-2	4.22282E-2	4.22273E-2	4.11694E-2	4.11765E-2	4.11811E-2	4.11841E-2
K_2	5.82322E-2	5.81987E-2	5.81908E-2	5.81899E-2	5.80876E-2	5.80957E-2	5.80992E-2	5.81010E-2
K_3	1.21500E-1	1.20999E-1	1.20863E-1	1.20846E-1	1.12776E-1	1.12624E-1	1.12568E-1	1.12542E-1
K_4	2.26669E-1	2.25832E-1	2.25611E-1	2.25584E-1	1.89034E-1	1.88571E-1	1.88393E-1	1.88306E-1
K_5	2.48002E-1	2.47901E-1	2.47883E-1	2.47881E-1	2.03335E-1	2.03242E-1	2.03214E-1	2.03205E-1
K_6	3.65120E-1	3.63839E-1	3.63505E-1	3.63461E-1	2.47699E-1	2.47714E-1	2.47728E-1	2.47738E-1
K_7	3.83321E-1	3.81477E-1	3.80873E-1	3.80803E-1	2.88773E-1	2.88355E-1	2.88207E-1	2.88136E-1
K_8	5.38561E-1	5.36707E-1	5.36383E-1	5.36346E-1	3.98665E-1	3.98063E-1	3.97844E-1	3.97739E-1

表三 不同橢圓斷面的收斂分析

($k=0.01$ 、 $\alpha=30^\circ$ 、 $\beta=45^\circ$ 、 $r=1$)

元素數目	$a/b=5$, $L_T/a=50$				$a/b=10$, $L_T/a=50$			
	10	20	40	50	20	30	40	50
ε_0	1.14396E-4	1.10341E-4	1.09169E-4	1.09502E-4	-8.89930E-5	-1.00579E-4	-8.96666E-5	-7.20208E-5
ε_b	-6.36862E-3	-6.37139E-3	-6.31583E-3	-6.29968E-3	-5.73327E-3	-5.26737E-3	-4.98644E-3	-4.80546E-3
ε_c	3.60710E-3	3.60855E-3	3.60532E-3	3.60411E-3	3.36886E-3	3.35036E-3	3.34148E-3	3.33641E-3
V_{tip}	-2.23005E-1	-2.23567E-1	-2.23751E-1	-2.23772E-1	-2.98552E-1	-2.99439E-1	-2.99756E-1	-2.99895E-1
W_{tip}	5.09794E-2	5.13255E-2	5.14510E-2	5.14649E-2	8.83667E-2	8.99064E-2	9.05163E-2	9.08061E-2
$\Theta_1(1)$	-6.42035E-2	-6.72246E-2	-6.82736E-2	-6.83990E-2	-2.87797E-1	-2.95026E-1	-2.97762E-1	-2.98966E-1
$\Theta'_1(0.1)$	-1.68979E-1	-2.44817E-1	-2.49441E-1	-2.49484E-1	-1.23601E+0	-1.26494E+0	-1.26869E+0	-1.27047E+0
K_1	1.51128E-2	1.53558E-2	1.53645E-2	1.53643E-2	1.21773E-2	1.22106E-2	1.22173E-2	1.22197E-2
K_2	3.57412E-2	3.57667E-2	3.57501E-2	3.57478E-2	2.31811E-2	2.31290E-2	2.30488E-2	2.30000E-2
K_3	5.57016E-2	5.67042E-2	5.67524E-2	5.67525E-2	4.12232E-2	4.12832E-2	4.12795E-2	4.12725E-2
K_4	1.34163E-1	1.36271E-1	1.36388E-1	1.36389E-1	8.59769E-2	8.64412E-2	8.65383E-2	8.65717E-2
K_5	2.20596E-1	2.20251E-1	2.20127E-1	2.20111E-1	1.41663E-1	1.42655E-1	1.42829E-1	1.42881E-1
K_6	2.51863E-1	2.54757E-1	2.54979E-1	2.54984E-1	1.92582E-1	1.91327E-1	1.90592E-1	1.90181E-1
K_7	3.92998E-1	3.90513E-1	3.89770E-1	3.89679E-1	2.20557E-1	2.20588E-1	2.20597E-1	2.20600E-1
K_8	4.08788E-1	4.11482E-1	4.11735E-1	4.11736E-1	2.38958E-1	2.40129E-1	2.40444E-1	2.40566E-1

表四 不同橢圓斷面的收斂分析

($k = 0.01$ 、 $\alpha = 45^\circ$ 、 $\beta = 45^\circ$ 、 $r = 1$)

元素數目	$a/b = 5$, $L_T/a = 50$				$a/b = 10$, $L_T/a = 50$			
	10	20	40	50	20	30	40	50
ε_0	5.94371E-5	4.18359E-5	3.97925E-5	4.24494E-5	-6.81821E-4	-6.94612E-4	-6.47886E-4	-5.84347E-4
ε_b	-9.59982E-3	-9.37689E-3	-9.13876E-3	-9.08062E-3	-8.59202E-3	-7.62946E-3	-7.06680E-3	-6.70674E-3
ε_c	4.95201E-3	4.93693E-3	4.92146E-3	4.91702E-3	3.64653E-3	3.60388E-3	3.58334E-3	3.57148E-3
V_{tip}	-3.52077E-1	-3.53694E-1	-3.54233E-1	-3.54294E-1	-4.86462E-1	-4.86349E-1	-4.86263E-1	-4.86204E-1
W_{tip}	8.74405E-2	8.89836E-2	8.95496E-2	8.96162E-2	2.28017E-1	2.30867E-1	2.31988E-1	2.32526E-1
$\Theta_1(1)$	-1.50962E-1	-1.58394E-1	-1.60951E-1	-1.61260E-1	-6.19329E-1	-6.24650E-1	-6.26237E-1	-6.27223E-1
$\Theta'_1(0.1)$	-4.20038E-1	-5.89371E-1	-6.00259E-1	-6.00452E-1	-2.70549E+0	-2.72196E+0	-2.71114E+0	-2.70566E+0
K_1	1.34791E-2	1.41519E-2	1.41799E-2	1.41805E-2	1.13431E-2	1.15795E-2	1.16384E-2	1.16619E-2
K_2	3.16461E-2	3.19796E-2	3.19136E-2	3.19015E-2	1.88459E-2	1.90696E-2	1.90641E-2	1.90486E-2
K_3	5.28884E-2	5.56465E-2	5.58042E-2	5.58113E-2	4.11164E-2	4.13957E-2	4.14257E-2	4.14259E-2
K_4	1.26556E-1	1.32888E-1	1.33276E-1	1.33291E-1	8.40425E-2	8.55675E-2	8.58873E-2	8.60007E-2
K_5	2.13723E-1	2.12911E-1	2.12396E-1	2.12318E-1	1.19399E-1	1.22408E-1	1.22724E-1	1.22754E-1
K_6	2.42744E-1	2.51125E-1	2.51875E-1	2.51924E-1	1.70282E-1	1.70114E-1	1.69511E-1	1.69124E-1
K_7	3.94486E-1	4.04159E-1	4.05028E-1	4.05059E-1	2.35608E-1	2.38485E-1	2.39145E-1	2.39371E-1
K_8	4.15722E-1	4.13383E-1	4.12783E-1	4.12710E-1	2.60690E-1	2.59601E-1	2.59044E-1	2.58753E-1

表五 不同橢圓斷面的收斂分析

($k=0.01$ 、 $\alpha=60^\circ$ 、 $\beta=45^\circ$ 、 $r=1$)

元素數目	$a/b=5$, $L_T/a=50$				$a/b=10$, $L_T/a=50$			
	10	20	40	50	20	30	40	50
ε_0	-4.66626E-5	-8.92356E-5	-8.79676E-5	-7.86585E-5	****	-1.31990E-3	-1.24867E-3	-1.14706E-3
ε_b	-1.30061E-2	-1.24137E-2	-1.19052E-2	-1.17863E-2	****	-1.17529E-2	-1.10693E-2	-1.06278E-2
ε_c	5.70746E-3	5.65437E-3	5.61565E-3	5.60551E-3	****	3.35953E-3	3.32613E-3	3.30495E-3
V_{tip}	-4.94695E-1	-4.97178E-1	-4.97970E-1	-4.98059E-1	****	-6.25463E-1	-6.24988E-1	-6.24745E-1
W_{tip}	1.41818E-1	1.46033E-1	1.47550E-1	1.47734E-1	****	3.63422E-1	3.64520E-1	3.65056E-1
$\Theta_1(1)$	-2.70518E-1	-2.82834E-1	-2.87126E-1	-2.87642E-1	****	-7.89124E-1	-7.88171E-1	-7.90388E-1
$\Theta'_1(0.1)$	-7.92369E-1	-1.07591E+0	-1.09307E+0	-1.09325E+0	****	-3.49052E+0	-3.46473E+0	-3.45147E+0
K_1	1.06813E-2	1.28358E-2	1.29179E-2	1.29222E-2	****	1.15761E-2	1.17199E-2	1.17693E-2
K_2	2.49054E-2	2.76103E-2	2.75456E-2	2.75274E-2	****	1.82926E-2	1.83417E-2	1.83379E-2
K_3	4.83946E-2	5.47966E-2	5.51124E-2	5.51293E-2	****	4.12044E-2	4.13701E-2	4.14195E-2
K_4	1.09865E-1	1.27663E-1	1.28530E-1	1.28570E-1	****	7.98808E-2	8.09813E-2	8.13623E-2
K_5	1.95386E-1	1.97973E-1	1.96943E-1	1.96771E-1	****	1.09138E-1	1.10009E-1	1.10113E-1
K_6	2.29543E-1	2.47451E-1	2.49008E-1	2.49128E-1	****	1.61702E-1	1.61450E-1	1.61173E-1
K_7	3.67799E-1	3.94977E-1	3.97057E-1	3.97159E-1	****	2.26731E-1	2.28386E-1	2.28984E-1
K_8	4.55637E-1	4.53952E-1	4.53575E-1	4.53529E-1	****	2.70943E-1	2.70586E-1	2.70264E-1

表六 不同 I 型斷面的收斂分析

($k=0.01$ 、 $\alpha=45^\circ$ 、 $\beta=45^\circ$ 、 $r=1$)

元素數目	W10×30， $L_T/d_{nom} = 25$				W10×100， $L_T/d_{nom} = 25$			
	10	20	40	50	20	30	40	50
ε_0	2.81096E-5	7.02953E-5	8.78214E-5	9.03004E-5	1.09264E-4	1.10177E-4	1.10526E-4	1.10583E-4
ε_b	-7.36936E-3	-7.21231E-3	-7.15961E-3	-7.15255E-3	-4.21324E-3	-4.21641E-3	-4.21687E-3	-4.21690E-3
ε_c	1.65922E-3	1.68729E-3	1.69561E-3	1.69665E-3	1.62242E-3	1.62653E-3	1.62766E-3	1.62779E-3
V_{tip}	-1.53768E-1	-1.53404E-1	-1.53307E-1	-1.53295E-1	-4.95208E-2	-4.95209E-2	-4.95209E-2	-4.95208E-2
W_{tip}	4.19340E-2	4.15379E-2	4.14349E-2	4.14226E-2	1.84691E-2	1.84634E-2	1.84619E-2	1.84617E-2
$\Theta_1(1)$	-4.10995E-1	-4.10875E-1	-4.10831E-1	-4.10827E-1	-2.17394E-2	-2.16642E-2	-2.16443E-2	-2.16419E-2
$\Theta'_1(0.1)$	-9.46509E-1	-9.47643E-1	-9.47882E-1	-9.47913E-1	-5.63754E-2	-5.62460E-2	-5.62098E-2	-5.62052E-2
K_1	2.22833E-2	2.24595E-2	2.24975E-2	2.25019E-2	3.96679E-2	3.96674E-2	3.96670E-2	3.96670E-2
K_2	4.02783E-2	4.04500E-2	4.04911E-2	4.04958E-2	6.55261E-2	6.55669E-2	6.55770E-2	6.55782E-2
K_3	9.31399E-2	9.21334E-2	9.18804E-2	9.18500E-2	1.32938E-1	1.32811E-1	1.32780E-1	1.32776E-1
K_4	1.31111E-1	1.31855E-1	1.32037E-1	1.32058E-1	2.36747E-1	2.36731E-1	2.36727E-1	2.36726E-1
K_5	2.66490E-1	2.62834E-1	2.61905E-1	2.61793E-1	4.04107E-1	4.03715E-1	4.03608E-1	4.03595E-1
K_6	3.25313E-1	3.26140E-1	3.26330E-1	3.26352E-1	4.41798E-1	4.42107E-1	4.42202E-1	4.42214E-1
K_7	4.21570E-1	4.24288E-1	4.24943E-1	4.25021E-1	6.56184E-1	6.56022E-1	6.56007E-1	6.56006E-1
K_8	5.13923E-1	5.11642E-1	5.11128E-1	5.11068E-1	8.70369E-1	8.69909E-1	8.69824E-1	8.69814E-1

表七 不同十字斷面的收斂分析

($k=0.01$ 、 $\alpha=45^\circ$ 、 $\beta=45^\circ$ 、 $r=1$)

元素數目	$d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 10$				$d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 20$			
	10	20	40	50	20	30	40	50
ε_0	-7.12403E-5	-5.39364E-5	1.11874E-5	3.24890E-5	-8.33015E-4	-9.61091E-4	-9.03068E-4	-8.33954E-4
ε_b	-7.96751E-3	-7.82462E-3	-7.73796E-3	-7.72169E-3	-1.37044E-2	-1.27842E-2	-1.21692E-2	-1.20289E-2
ε_c	2.16671E-3	2.20574E-3	2.22581E-3	2.22935E-3	3.39632E-3	3.62848E-3	3.75236E-3	3.77792E-3
V_{tip}	-7.91020E-2	-7.91978E-2	-7.92189E-2	-7.92198E-2	-2.26582E-1	-2.25725E-1	-2.25492E-1	-2.25467E-1
W_{tip}	1.83816E-2	1.85565E-2	1.86024E-2	1.86056E-2	1.35541E-1	1.38075E-1	1.39525E-1	1.39776E-1
$\Theta_1(1)$	-1.80755E-1	-1.84507E-1	-1.85494E-1	-1.85581E-1	-7.94639E-1	-7.98489E-1	-7.99910E-1	-8.00126E-1
$\Theta'_1(0.1)$	-6.48384E-1	-7.32280E-1	-7.34450E-1	-7.34458E-1	-2.34018E+0	-3.02738E+0	-3.05823E+0	-3.04865E+0
K_1	3.12002E-2	3.12283E-2	3.12314E-2	3.12321E-2	1.89056E-2	1.93094E-2	1.93673E-2	1.93711E-2
K_2	5.49738E-2	5.47178E-2	5.46219E-2	5.46120E-2	2.72479E-2	2.69202E-2	2.67556E-2	2.67276E-2
K_3	8.64376E-2	8.58571E-2	8.56907E-2	8.56706E-2	8.71187E-2	8.55960E-2	8.51330E-2	8.50706E-2
K_4	1.89150E-1	1.89298E-1	1.89341E-1	1.89347E-1	1.01572E-1	1.02809E-1	1.02865E-1	1.02844E-1
K_5	2.04699E-1	2.03750E-1	2.03506E-1	2.03477E-1	1.87791E-1	1.82264E-1	1.80578E-1	1.80351E-1
K_6	3.20803E-1	3.19499E-1	3.19098E-1	3.19054E-1	2.67415E-1	2.70595E-1	2.71009E-1	2.71014E-1
K_7	4.36022E-1	4.33501E-1	4.32621E-1	4.32524E-1	3.18909E-1	3.15832E-1	3.14472E-1	3.14249E-1
K_8	5.03344E-1	5.01865E-1	5.01387E-1	5.01325E-1	4.07388E-1	4.09744E-1	4.10122E-1	4.10144E-1

表八 旋轉傾斜梁在不同橢圓斷面的振動頻率(轉速 $k=0$)

	$a/b = 5$		$a/b = 10$	
	$L_T/a = 20$	$L_T/a = 50$	$L_T/a = 20$	$L_T/a = 50$
n_y	2.00000E+2	5.00000E+2	4.00000E+2	1.00000E+3
n_z	4.00000E+1	1.00000E+2	4.00000E+1	1.00000E+2
K_1	1.75790E-2(2)	7.03196E-3(2)	8.78991E-3(2)	3.51601E-3(2)
K_2	8.77730E-2(3)	3.51520E-2(3)	5.50807E-2(2)	2.20341E-2(2)
K_3	1.10128E-1(2)	4.40661E-2(2)	8.77730E-2(3)	3.51520E-2(3)
K_4	3.08188E-1(2)	1.23375E-1(2)	1.54206E-1(2)	6.16949E-2(2)
K_5	3.80688E-1(4)	2.19989E-1(3)	1.96149E-1(4)	1.20893E-1(2)
K_6	5.45362E-1(3)	2.41735E-1(2)	3.02120E-1(2)	1.94214E-1(4)
K_7	6.03433E-1(2)	3.77117E-1(4)	4.99295E-1(2)	1.99838E-1(2)
K_8	9.96464E-1(2)	3.99538E-1(2)	5.45362E-1(3)	2.19989E-1(3)

表九 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率 (橢圓斷面 $a/b=5$, $L_T/a=20$, $r=0$, $\alpha=0^\circ$)

	$\beta = 0^\circ$				$\beta = 30^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1
ε_0	0.00000E+0	4.99916E-5	1.24880E-3	4.98287E-3	4.99916E-5	1.24877E-3	4.98245E-3
ε_b	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
ε_c	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
U_{tip}	0.00000E+0	3.33326E-5	8.32918E-4	3.32673E-3	3.33326E-5	8.32888E-4	3.32628E-3
V_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
W_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	3.40395E-4	8.43072E-3	3.27386E-2
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	6.30781E-4	1.55520E-2	5.96020E-2
K_1	1.75790E-2(B1)	1.81074E-2(B1)	2.52127E-2(B1)	3.36926E-2(B1)	1.87787E-2(B1)	3.36467E-2(B1)	4.86535E-2(B1)
K_2	8.77730E-2(C1)	8.84493E-2(C1)	1.03309E-1(C1)	1.39492E-1(C1)	8.83085E-2(C1)	1.00862E-1(3 C1)	1.34957E-1(C1)
K_3	1.10128E-1(B2)	1.12588E-1(B2)	1.60565E-1(B2)	2.56707E-1(B2)	1.12699E-1(B2)	1.62529E-1(B2)	2.61795E-1(B2)
K_4	3.08188E-1(B3)	3.10910E-1(B3)	3.69635E-1(B3)	3.82522E-1(D1)	3.10951E-1(B3)	3.70494E-1(B3)	3.89135E-1(D1)
K_5	3.80688E-1(D1)	3.80706E-1(D1)	3.81140E-1(D1)	5.07252E-1(B3)	3.80767E-1(D1)	3.82706E-1(D1)	5.09711E-1(B3)
K_6	5.45362E-1(C2)	5.45960E-1(C2)	5.60134E-1(C2)	6.02264E-1(C2)	5.45935E-1(C2)	5.59518E-1(C2)	6.00133E-1(C2)
K_7	6.03433E-1(B4)	6.06330E-1(B4)	6.71598E-1(B4)	8.39250E-1(B4)	6.06351E-1(B4)	6.72080E-1(B4)	8.40872E-1(B4)
K_8	9.96464E-1(B5)	9.99459E-1(B5)	1.06850E+0(B5)	1.17327E+0(D2)	9.99472E-1(B5)	1.06879E+0(B5)	1.17544E+0(D2)

表十 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率 (橢圓斷面 $a/b=5$, $L_T/a=20$, $r=0$, $\alpha=0^\circ$)

	$\beta = 45^\circ$				$\beta = 90^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1
ε_0	0.00000E+0	4.99915E-5	1.24876E-3	4.98234E-3	4.99916E-5	1.24880E-3	4.98287E-3
ε_b	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
ε_c	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
U_{tip}	0.00000E+0	3.33326E-5	8.32878E-4	3.32616E-3	3.33326E-5	8.32918E-4	3.32673E-3
V_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
W_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	3.92926E-4	9.65654E-3	3.66375E-2	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	7.28157E-4	1.78328E-2	6.69863E-2	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
K_1	1.75790E-2(B1)	1.94310E-2(B1)	4.10871E-2(B1)	6.17458E-2(B1)	2.06859E-2(B1)	5.60149E-2(B1)	9.68849E-2(C1)
K_2	8.77730E-2(C1)	8.81666E-2(C1)	9.80516E-2(C1)	1.29439E-1(C1)	8.78792E-2(C1)	9.03238E-2(C1)	1.05599E-1(B1)
K_3	1.10128E-1(B2)	1.12810E-1(B2)	1.64455E-1(B2)	2.66634E-1(B2)	1.13032E-1(B2)	1.68199E-1(B2)	2.75699E-1(B2)
K_4	3.08188E-1(B3)	3.10991E-1(B3)	3.71345E-1(B3)	3.95221E-1(D1)	3.11072E-1(B3)	3.73024E-1(B3)	4.06117E-1(D1)
K_5	3.80688E-1(D1)	3.80829E-1(D1)	3.84239E-1(D1)	5.12166E-1(B3)	3.80951E-1(D1)	3.87216E-1(D1)	5.17165E-1(B3)
K_6	5.45362E-1(C2)	5.45910E-1(C2)	5.58902E-1(C2)	5.97895E-1(C2)	5.45859E-1(C2)	5.57669E-1(C2)	5.93048E-1(C2)
K_7	6.03433E-1(B4)	6.06372E-1(B4)	6.72553E-1(B4)	8.42415E-1(B4)	6.06413E-1(B4)	6.73476E-1(B4)	8.45304E-1(B4)
K_8	9.96464E-1(B5)	9.99485E-1(B5)	1.06909E+0(B5)	1.17749E+0(D2)	9.99510E-1(B5)	1.06968E+0(B5)	1.18128E+0(D2)

表十一 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率(橢圓斷面 $a/b=5$, $L_T/a=20$, $r=1$, $\alpha=0^\circ$)

	$\beta = 0^\circ$				$\beta = 30^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1
ε_0	0.00000E+0	1.48965E-4	3.70759E-3	1.46317E-2	1.48965E-4	3.70757E-3	1.46313E-2
ε_b	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
ε_c	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
U_{tip}	0.00000E+0	8.33234E-5	2.07724E-3	8.23802E-3	8.33233E-5	2.07721E-3	8.23766E-3
V_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
W_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	3.40011E-4	8.20333E-3	2.96440E-2
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	6.29790E-4	1.49751E-2	5.20756E-2
K_1	1.75790E-2(B1)	2.20016E-2(B1)	6.61208E-2(B1)	1.25028E-1(B1)	2.25575E-2(B1)	6.98042E-2(B1)	1.30086E-1(B1)
K_2	8.77730E-2(C1)	8.93364E-2(C1)	1.20774E-1(C1)	1.86628E-1(C1)	8.91969E-2(C1)	1.18671E-1(C1)	1.83113E-1(C1)
K_3	1.10128E-1(B2)	1.16361E-1(B2)	2.16046E-1(B2)	3.82269E-1(B2)	1.16469E-1(B2)	2.17517E-1(B2)	3.85745E-1(B2)
K_4	3.08188E-1(B3)	3.14890E-1(B3)	3.86723E-1(D1)	4.03787E-1(D1)	3.14930E-1(B3)	3.88263E-1(D1)	4.09992E-1(D1)
K_5	3.80688E-1(D1)	3.80933E-1(D1)	4.42653E-1(B3)	6.69713E-1(C2)	3.80994E-1(D1)	4.43371E-1(B3)	6.66850E-1(C2)
K_6	5.45362E-1(C2)	5.46756E-1(C2)	5.79153E-1(C2)	6.90659E-1(B3)	5.46731E-1(C2)	5.78561E-1(C2)	6.93383E-1(B3)
K_7	6.03433E-1(B4)	6.10554E-1(B4)	7.58255E-1(B4)	1.07846E+0(B4)	6.10575E-1(B4)	7.58681E-1(B4)	1.07971E+0(B4)
K_8	9.96464E-1(B5)	1.00384E+0(B5)	1.16409E+0(D2)	1.21910E+0(D2)	1.00385E+0(B5)	1.16453E+0(D2)	1.22117E+0(D2)

表十二 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率(橢圓斷面 $a/b=5$, $L_T/a=20$, $r=1$, $\alpha=0^\circ$)

	$\beta = 45^\circ$				$\beta = 90^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1
ε_0	0.00000E+0	1.48965E-4	3.70756E-3	1.46312E-2	1.48965E-4	3.70759E-3	1.46317E-2
ε_b	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
ε_c	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
U_{tip}	0.00000E+0	8.33233E-5	2.07720E-3	8.23757E-3	8.33234E-5	2.07724E-3	8.23802E-3
V_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
W_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	3.92482E-4	9.39812E-3	3.32757E-2	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	7.27014E-4	1.71746E-2	5.86918E-2	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
K_1	1.75790E-2(B1)	2.31034E-2(B1)	7.37088E-2(B1)	1.35802E-1(B1)	2.41686E-2(B1)	8.29961E-2(B1)	1.56664E-1(C1)
K_2	8.77730E-2(C1)	8.90564E-2(C1)	1.16273E-1(C1)	1.78882E-1(C1)	8.87719E-2(C1)	1.09809E-1(C1)	1.60840E-1(B1)
K_3	1.10128E-1(B2)	1.16576E-1(B2)	2.18966E-1(B2)	3.89094E-1(B2)	1.16791E-1(B2)	2.21804E-1(B2)	3.95471E-1(B2)
K_4	3.08188E-1(B3)	3.14969E-1(B3)	3.89773E-1(D1)	4.15751E-1(D1))	3.15049E-1(B3)	3.92705E-1(D1)	4.26168E-1(D1)
K_5	3.80688E-1(D1)	3.81055E-1(D1))	4.44084E-1(B3)	6.64668E-1 C2)	3.81178E-1(D1)	4.45501E-1(B3)	6.61325E-1(C2))
K_6	5.45362E-1(C2)	5.46706E-1(C2)	5.77965E-1(C2)	6.95356E-1(B3)	5.46655E-1(C2)	5.76763E-1(C2))	6.98096E-1 (B3)
K_7	6.03433E-1(B4)	6.10595E-1 (B4)	7.59102E-1(B4)	1.08092E+0(B4)	6.10637E-1(B4)	7.59927E-1(B4)	1.08326E+0(B4)
K_8	9.96464E-1(B5)	1.00386E+0(B5)	1.16483E+0(D2)	1.22314E+0(D2)	1.00389E+0(B5)	1.16538E+0(D2)	1.22681E+0(D2)

表十三 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率(橢圓斷面 $a/b=5$, $L_T/a=20$, $r=1$, $\alpha=30^\circ$)

	$\beta=0^\circ$				$\beta=30^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2
ε_0	0.00000E+0	1.35377E-6	3.20420E-5	1.15218E-4	1.35462E-6	3.25309E-5	1.20975E-4
ε_b	0.00000E+0	-9.96483E-5	-2.30394E-3	-7.58866E-3	-8.62386E-5	-1.96618E-3	-6.31707E-3
ε_c	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	1.00186E-5	2.60022E-4	1.09899E-3
U_{tip}	0.00000E+0	-2.76858E-6	-1.72345E-3	-1.49246E-2	-1.88212E-6	-1.24596E-3	-1.02717E-2
V_{tip}	0.00000E+0	-2.48731E-3	-5.53072E-2	-1.62563E-1	-2.15239E-3	-4.71186E-2	-1.35106E-1
W_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	5.01055E-5	1.31674E-3	5.93775E-3
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	2.55361E-6	-3.99785E-4	-5.43601E-3
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	2.99927E-6	-1.71382E-3	-2.15568E-2
K_1	1.75790E-2(B1)	1.76232E-2(B1)	1.86809E-2(B1)	2.17995E-2(B1)	1.76303E-2(B1)	1.88364E-2(B1)	2.22310E-2(B1)
K_2	8.77730E-2(C1)	8.77865E-2(C1)	8.76270E-2(C1)	8.54339E-2(C1)	8.77853E-2(C1)	8.77307E-2(C1)	8.64040E-2(C1)
K_3	1.10128E-1(B2)	1.10187E-1(B2)	1.11562E-1(B2)	1.15708E-1(B2)	1.10188E-1(B2)	1.11595E-1(B2)	1.15827E-1(B2)
K_4	3.08188E-1(B3)	3.08250E-1(B3)	3.09508E-1(B3)	3.12485E-1(B3)	3.08251E-1(B3)	3.09578E-1(B3)	3.13035E-1(B3)
K_5	3.80688E-1(D1)	3.80692E-1(D1)	3.81584E-1(D1)	3.87563E-1(D1)	3.80692E-1(D1)	3.81374E-1(D1)	3.85782E-1(D1)
K_6	5.45362E-1(C2)	5.45376E-1(C2)	5.46297E-1(C2)	5.50333E-1(C2)	5.45375E-1(C2)	5.46117E-1(C2)	5.49012E-1(C2)
K_7	6.03433E-1(B4)	6.03498E-1(B4)	6.04733E-1(B4)	6.06968E-1(B4)	6.03499E-1(B4)	6.04830E-1(B4)	6.07858E-1(B4)
K_8	9.96464E-1(B5)	9.96531E-1(B5)	9.97599E-1(B5)	9.98173E-1(B5)	9.96531E-1(B5)	9.97752E-1(B5)	9.99618E-1(B5)

表十四 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率(橢圓斷面 $a/b=5$, $L_T/a=20$, $r=1$, $\alpha=30^\circ$)

	$\beta = 45^\circ$				$\beta = 90^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2
ε_0	0.00000E+0	1.35546E-6	3.29929E-5	1.26027E-4	1.35715E-6	3.38428E-5	1.34325E-4
ε_b	0.00000E+0	-7.03651E-5	-1.58235E-3	-4.96363E-3	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
ε_c	0.00000E+0	1.41587E-5	3.62431E-4	1.49796E-3	1.99959E-5	4.98220E-4	1.97227E-3
U_{tip}	0.00000E+0	-9.98432E-7	-7.98233E-4	-6.28402E-3	7.60623E-7	1.56177E-5	2.17177E-5
V_{tip}	0.00000E+0	-1.75605E-3	-3.78545E-2	-1.05887E-1	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
W_{tip}	0.00000E+0	7.08052E-5	1.82623E-3	7.84248E-3	9.99794E-5	2.48719E-3	9.79759E-3
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	2.95027E-6	-4.42438E-4	-5.70206E-3	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	3.46939E-6	-1.90693E-3	-2.27383E-2	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
K_1	1.75790E-2(B1)	1.76374E-2 B1	1.89920E-2(B1)	2.26926E-2(B1)	1.76515E-2(B1)	1.93034E-2(B1)	2.36770E-2(B1)
K_2	8.77730E-2(C1)	8.77841E-2(C1)	8.78261E-2(C1)	8.72641E-2(C1)	8.77818E-2(C1)	8.79942E-2(C1)	8.86576E-2(C1)
K_3	1.10128E-1(B2)	1.10189E-1(B2)	1.11627E-1(B2)	1.15934E-1(B2)	1.10191E-1(B2)	1.11691E-1(B2)	1.16130E-1(B2)
K_4	3.08188E-1(B3)	3.08251E-1(B3)	3.09645E-1(B3)	3.13506E-1(B3)	3.08252E-1(B3)	3.09768E-1(B3)	3.14250E-1(B3)
K_5	3.80688E-1(D1)	3.80692E-1(D1)	3.81174E-1(D1)	3.84119E-1(D1)	3.80692E-1(D1)	3.80807E-1(D1)	3.81220E-1(D1)
K_6	5.45362E-1(C2)	5.45375E-1(C2)	5.45951E-1(C2)	5.47969E-1(C2)	5.45374E-1(C2)	5.45658E-1(C2)	5.46543E-1(C2)
K_7	6.03433E-1(B4)	6.03499E-1(B4)	6.04921E-1(B4)	6.08631E-1(B4)	6.03500E-1(B4)	6.05089E-1(B4)	6.09886E-1(B4)
K_8	9.96464E-1(B5)	9.96532E-1(B5)	9.97897E-1(B5)	1.00091E+0(B5)	9.96532E-1(B5)	9.98165E-1(B5)	1.00308E+0(B5)

表十五 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率(橢圓斷面 $a/b=5$, $L_T/a=20$, $r=1$, $\alpha=45^\circ$)

	$\beta = 0^\circ$				$\beta = 30^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2
ε_0	0.00000E+0	1.19290E-6	2.61192E-5	7.63258E-5	1.19460E-6	2.71223E-5	8.83053E-5
ε_b	0.00000E+0	-1.41013E-4	-3.30020E-3	-1.10637E-2	-1.22037E-4	-2.81657E-3	-9.22070E-3
ε_c	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	1.41688E-5	3.67753E-4	1.54466E-3
U_{tip}	0.00000E+0	-6.39456E-6	-3.58478E-3	-3.23073E-2	-4.61872E-6	-2.60007E-3	-2.25360E-2
V_{tip}	0.00000E+0	-3.52044E-3	-7.94579E-2	-2.37516E-1	-3.04641E-3	-6.77321E-2	-1.98835E-1
W_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	7.08636E-5	1.88169E-3	9.05387E-3
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	1.70054E-6	-9.02483E-4	-1.17678E-2
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	-3.18745E-7	-3.65668E-3	-4.59744E-2
K_1	1.75790E-2(B1)	1.76162E-2(B1)	1.85471E-2(B1)	2.15400E-2(B1)	1.76233E-2(B1)	1.86923E-2(B1)	2.18337E-2(B1)
K_2	8.77730E-2(C1)	8.77840E-2(C1)	8.70568E-2(C1)	8.15341E-2(C1)	8.77831E-2(C1)	8.73032E-2(C1)	8.33765E-2(C1)
K_3	1.10128E-1(B2)	1.10180E-1(B2)	1.11376E-1(B2)	1.14923E-1(B2)	1.10181E-1(B2)	1.11415E-1(B2)	1.15088E-1(B2)
K_4	3.08188E-1(B3)	3.08243E-1(B3)	3.09095E-1(B3)	3.09726E-1(B3)	3.08244E-1(B3)	3.09230E-1(B3)	3.10844E-1(B3)
K_5	3.80688E-1(D1)	3.80693E-1(D1)	3.82438E-1(D1)	3.93099E-1(D1)	3.80693E-1(D1)	3.82003E-1(D1)	3.90302E-1(D1)
K_6	5.45362E-1(C2)	5.45376E-1(C2)	5.46940E-1(C2)	5.55173E-1(C2)	5.45375E-1(C1)	5.46569E-1(C1)	5.52174E-1(C1)
K_7	6.03433E-1(B4)	6.03491E-1(B4)	6.04198E-1(B4)	6.03024E-1(B4)	6.03491E-1(B4)	6.04390E-1(B4)	6.04824E-1(B4)
K_8	9.96464E-1(B5)	9.96523E-1(B5)	9.96831E-1(B5)	9.92334E-1(B5)	9.96523E-1(B5)	9.97139E-1(B5)	9.95047E-1(B5)

表十六 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率(橢圓斷面 $a/b=5$, $L_T/a=20$, $r=1$, $\alpha=45^\circ$)

	$\beta = 45^\circ$				$\beta = 90^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2
ε_0	0.00000E+0	1.19630E-6	2.80717E-5	9.90937E-5	1.19968E-6	2.98215E-5	1.17201E-4
ε_b	0.00000E+0	-9.95740E-5	-2.26677E-3	-7.24628E-3	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
ε_c	0.00000E+0	2.00239E-5	5.12711E-4	2.11408E-3	2.82791E-5	7.05037E-4	2.79612E-3
U_{tip}	0.00000E+0	-2.84845E-6	-1.67498E-3	-1.39399E-2	6.75441E-7	1.00792E-5	-4.18430E-5
V_{tip}	0.00000E+0	-2.48544E-3	-5.44415E-2	-1.56666E-1	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
W_{tip}	0.00000E+0	1.00138E-4	2.60107E-3	1.16687E-2	1.41397E-4	3.52028E-3	1.38997E-2
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	1.96687E-6	-1.00350E-3	-1.24797E-2	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	-3.55770E-7	-4.07742E-3	-4.89149E-2	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
K_1	1.75790E-2(B1)	1.76303E-2(B1)	1.88391E-2(B1)	2.21979E-2(B1)	1.76444E-2(B1)	1.91366E-2(B1)	2.30887E-2(B1)
K_2	8.77730E-2(C1)	8.77822E-2(C1)	8.75353E-2(C1)	8.51801E-2(C1)	8.77804E-2(C1)	8.79588E-2(C1)	8.85211E-2(C1)
K_3	1.10128E-1(B2)	1.10183E-1(B2)	1.11453E-1(B2)	1.15214E-1(B2)	1.10185E-1(B2)	1.11526E-1(B2)	1.15369E-1(B2)
K_4	3.08188E-1(B3)	3.08245E-1(B3)	3.09357E-1(B3)	3.11821E-1(B3)	3.08246E-1(B3)	3.09590E-1(B3)	3.13348E-1(B3)
K_5	3.80688E-1(D1)	3.80693E-1(D1)	3.81586E-1(D1)	3.87310E-1(D1)	3.80692E-1(D1)	3.80802E-1(D1)	3.81255E-1(D1)
K_6	5.45362E-1(C1)	5.45374E-1(C1)	5.46228E-1(C1)	5.49745E-1(C1)	5.45372E-1(C1)	5.45626E-1(C1)	5.46410E-1(C1)
K_7	6.03433E-1(B4)	6.03492E-1(B4)	6.04572E-1(B4)	6.06409E-1(B4)	6.03493E-1(B4)	6.04908E-1(B4)	6.09026E-1(B4)
K_8	9.96464E-1(B5)	9.96524E-1(B5)	9.97432E-1(B5)	9.97605E-1(B5)	9.96525E-1(B5)	9.97976E-1(B5)	1.00216E+0(B5)

表十七 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率(橢圓斷面 $a/b=5$, $L_T/a=50$, $r=0$, $\alpha=0^\circ$)

	$\beta = 0^\circ$				$\beta = 30^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1
ε_0	0.00000E+0	4.99917E-5	1.24880E-3	4.98287E-3	4.99917E-5	1.24879E-3	4.98274E-3
ε_b	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
ε_c	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
U_{tip}	0.00000E+0	3.33327E-5	8.32918E-4	3.32673E-3	3.33327E-5	8.32913E-4	3.32666E-3
V_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
W_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	3.46642E-4	8.58448E-3	3.33250E-2
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	6.31907E-4	1.55805E-2	5.97221E-2
K_1	7.03196E-3(B1)	8.14778E-3(B1)	1.49966E-2(B1)	2.07795E-2(B1)	9.48067E-3(B1)	2.16995E-2(B1)	2.98642E-2(B1)
K_2	3.51520E-2(C1)	3.68086E-2(C1)	6.44927E-2(C1)	1.12037E-1(C1)	3.64877E-2(C1)	6.25437E-2(C1)	1.09926E-1(C1)
K_3	4.40661E-2(B2)	4.98992E-2(B2)	1.23658E-1(B2)	2.32394E-1(B2)	5.01490E-2(B2)	1.26114E-1(B2)	2.37341E-1(B2)
K_4	1.23375E-1(B3)	1.30010E-1(B3)	2.35107E-1(B3)	3.35925E-1(C2)	1.30106E-1(B3)	2.36441E-1(B3)	3.32541E-1(C2)
K_5	2.19989E-1(C2)	2.21456E-1(C2)	2.54139E-1(C2)	3.79481E-1(D1)	2.21399E-1(C2)	2.52948E-1(C2)	3.85969E-1(D1)
K_6	2.41735E-1(B4)	2.48867E-1(B4)	3.77378E-1(B4)	4.09463E-1(B3)	2.48918E-1(B4)	3.78221E-1(B4)	4.12787E-1(B3)
K_7	3.77117E-1(D1)	3.77139E-1(D1)	3.77660E-1(D1)	6.12049E-1(B4)	3.77200E-1(D1)	3.79216E-1(D1)	6.14193E-1(B4)
K_8	3.99538E-1(B5)	4.06946E-1(B5)	5.52088E-1(B5)	7.44543E-1(C3)	4.06977E-1(B5)	5.52665E-1(B5)	7.42787E-1(C3)

表十八 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率(橢圓斷面 $a/b=5$, $L_T/a=50$, $r=0$, $\alpha=0^\circ$)

	$\beta = 45^\circ$				$\beta = 90^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1
ε_0	0.00000E+0	4.99917E-5	1.24878E-3	4.98270E-3	4.99917E-5	1.24880E-3	4.98287E-3
ε_b	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
ε_c	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
U_{tip}	0.00000E+0	3.33327E-5	8.32911E-4	3.32664E-3	3.33327E-5	8.32918E-4	3.32673E-3
V_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
W_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	4.00135E-4	9.83108E-3	3.72720E-2	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	7.29453E-4	1.78620E-2	6.70744E-2	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
K_1	7.03196E-3(B1)	1.06911E-2(B1)	2.74882E-2(B1)	3.72163E-2(B1)	1.28993E-2(B1)	4.06850E-2(C1)	5.02236E-2(C1)
K_2	3.51520E-2(C1)	3.61513E-2(C1)	6.02160E-2(C1)	1.07629E-1(C1)	3.54229E-2(C1)	5.22084E-2(B1)	1.02168E-1(B1)
K_3	4.40661E-2(B2)	5.03976E-2(B2)	1.28554E-1(B2)	2.42386E-1(B2)	5.08917E-2(B2)	1.33409E-1(B2)	2.53185E-1(B2)
K_4	1.23375E-1(B3)	1.30202E-1(B3)	2.37760E-1(B3)	3.28950E-1(C2)	1.30394E-1(B3)	2.40383E-1(B3)	3.20819E-1(C2)
K_5	2.19989E-1(C2)	2.21342E-1(C2)	2.51725E-1(C2)	3.91964E-1(D1)	2.21229E-1(C2)	2.49154E-1(C2)	4.02701E-1(D1)
K_6	2.41735E-1(B4)	2.48968E-1(B4)	3.79055E-1(B4)	4.15901E-1(B3)	2.49068E-1(B4)	3.80689E-1(B4)	4.21634E-1(B3)
K_7	3.77117E-1(D1)	3.77261E-1(D1)	3.80738E-1(D1)	6.16269E-1(B4)	3.77382E-1(D1)	3.83688E-1(D1)	6.20270E-1(B4)
K_8	3.99538E-1(B5)	4.07008E-1(B5)	5.53235E-1(B5)	7.41062E-1(C3)	4.07069E-1(B5)	5.54359E-1(B5)	7.37661E-1(C3)

表十九 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率(橢圓斷面 $a/b=5$, $L_T/a=50$, $r=1$, $\alpha=0^\circ$)

	$\beta = 0^\circ$				$\beta = 30^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1
ε_0	0.00000E+0	1.48966E-4	3.70759E-3	1.46316E-2	1.48966E-4	3.70758E-3	1.46315E-2
ε_b	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
ε_c	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
U_{tip}	0.00000E+0	8.33235E-5	2.07724E-3	8.23801E-3	8.33235E-5	2.07723E-3	8.23795E-3
V_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
W_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	3.46241E-4	8.34820E-3	3.01183E-2
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	6.30908E-4	1.50000E-2	5.21531E-2
K_1	7.03196E-3(B1)	1.48226E-2(B1)	6.24807E-2(B1)	1.21737E-1(B1)	1.55954E-2(B1)	6.45234E-2(B1)	1.23819E-1(B1)
K_2	3.51520E-2(C1)	3.88823E-2(C1)	8.93792E-2(C1)	1.65751E-1(C1)	3.85786E-2(C1)	8.79103E-2(C1)	1.64184E-1(C1)
K_3	4.40661E-2(B2)	5.78497E-2(B2)	1.87755E-1(B2)	3.63111E-1(B2)	5.80653E-2(B2)	1.89389E-1(B2)	3.66376E-1(B2)
K_4	1.23375E-1(B3)	1.39150E-1(B3)	2.93219E-1(C2)	4.00138E-1(C2)	1.39240E-1(B3)	2.92162E-1(C2)	4.06406E-1(D1)
K_5	2.19989E-1(C2)	2.23401E-1(C2)	3.30263E-1(B3)	4.43566E-1(D1)	2.23345E-1(C2)	3.31239E-1(B3)	4.40794E-1(C2)
K_6	2.41735E-1(B4)	2.58908E-1(B4)	3.83312E-1(D1)	6.06635E-1(B3)	2.58956E-1(B4)	3.84838E-1(D1)	6.08905E-1(B3)
K_7	3.77117E-1(D1)	3.77368E-1(D1)	5.04091E-1(B4)	8.80545E-1(B4)	3.77429E-1(D1)	5.04724E-1(B4)	8.80614E-1(B4)
K_8	3.99538E-1(B5)	4.17534E-1(B5)	6.95459E-1(C3)	8.88939E-1(C3)	4.17564E-1(B5)	6.94979E-1(C3)	8.88903E-1(B5)

表二十 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率(橢圓斷面 $a/b=5$, $L_T/a=50$, $r=1$, $\alpha=0^\circ$)

	$\beta = 45^\circ$				$\beta = 90^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1
ε_0	0.00000E+0	1.48966E-4	3.70758E-3	1.46315E-2	1.48966E-4	3.70759E-3	1.46316E-2
ε_b	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
ε_c	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
U_{tip}	0.00000E+0	8.33235E-5	2.07723E-3	8.23794E-3	8.33235E-5	2.07724E-3	8.23801E-3
V_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
W_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	3.99672E-4	9.56270E-3	3.37922E-2	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	7.28299E-4	1.72003E-2	5.87462E-2	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
K_1	7.03196E-3(B1)	1.63597E-2(B1)	6.68286E-2(B1)	1.26050E-1(B1)	1.78813E-2(B1)	7.39603E-2(C1)	1.31233E-1(C1)
K_2	3.51520E-2(C1)	3.82604E-2(C1)	8.61658E-2(C1)	1.62459E-1(C1)	3.75728E-2(C1)	8.01186E-2(B1)	1.58266E-1(B1)
K_3	4.40661E-2(B2)	5.82802E-2(B2)	1.91030E-1(B2)	3.69733E-1(B2)	5.87081E-2(B2)	1.94342E-1(B2)	3.76956E-1(B2)
K_4	1.23375E-1(B3)	1.39330E-1(B3)	2.91092E-1(C2)	4.12223E-1(C2)	1.39509E-1(B3)	2.88906E-1(C2)	4.22930E-1(D1)
K_5	2.19989E-1(C2)	2.23289E-1(C2)	3.32195E-1(B3)	4.37902E-1(D1)	2.23176E-1(C2)	3.34055E-1(B3)	4.31344E-1(C2)
K_6	2.41735E-1(B4)	2.59005E-1(B4)	3.86334E-1(D1)	6.11052E-1(B3)	2.59101E-1(B4)	3.89237E-1(D1)	6.15040E-1(B3)
K_7	3.77117E-1(D1)	3.77490E-1(D1)	5.05351E-1(B4)	8.80982E-1(B4)	3.77612E-1(D1)	5.06586E-1(B4)	8.83118E-1(C3)
K_8	3.99538E-1(B5)	4.17594E-1(B5)	6.94515E-1(C3)	8.88546E-1(B5)	4.17654E-1(B5)	6.93627E-1(C3)	8.86370E-1(B4)

表二十一 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率(橢圓斷面 $a/b=5$, $L_T/a=50$, $r=1$, $\alpha=30^\circ$)

	$\beta = 0^\circ$				$\beta = 30^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2
ε_0	0.00000E+0	1.33600E-6	2.75260E-5	9.80188E-5	1.34123E-6	2.92328E-5	1.01767E-4
ε_b	0.00000E+0	-2.44706E-4	-4.24689E-3	-1.04761E-2	-2.11044E-4	-3.50077E-3	-8.36830E-3
ε_c	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	2.52875E-5	6.98179E-4	2.65744E-3
U_{tip}	0.00000E+0	-1.30091E-4	-2.52333E-2	-6.81571E-2	-9.65084E-5	-1.71579E-2	-4.73763E-2
V_{tip}	0.00000E+0	-1.51400E-2	-2.11052E-1	-3.48922E-1	-1.30503E-2	-1.74226E-1	-2.89261E-1
W_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	3.16749E-4	9.91402E-3	4.18888E-2
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	-3.10196E-5	-1.22743E-2	-6.57466E-2
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	-1.20096E-4	-4.42347E-2	-2.37723E-1
K_1	7.03196E-3(B1)	7.14250E-3(B1)	9.56371E-3(B1)	1.47557E-2(B1)	7.15968E-3(B1)	9.77384E-3(B1)	1.49293E-2(B1)
K_2	3.51520E-2(C1)	3.51713E-2(C1)	3.35470E-2(C1)	3.44561E-2(C1)	3.51722E-2(C1)	3.41820E-2(C1)	3.50145E-2(C1)
K_3	4.40661E-2(B2)	4.42121E-2(B2)	4.75376E-2(B2)	5.73517E-2(B2)	4.42151E-2(B2)	4.75926E-2(B2)	5.70529E-2(B2)
K_4	1.23375E-1(B3)	1.23524E-1(B3)	1.26058E-1(B3)	1.36212E-1(B3)	1.23527E-1(B3)	1.26399E-1(B3)	1.36328E-1(B3)
K_5	2.19989E-1(C2)	2.19966E-1(C2)	2.15239E-1(C2)	2.17484E-1(C2)	2.19979E-1(C2)	2.16937E-1(C2)	2.18626E-1(C2)
K_6	2.41735E-1(B4)	2.41890E-1(B4)	2.44000E-1(B4)	2.52989E-1(B4)	2.41893E-1(B4)	2.44539E-1(B4)	2.54218E-1(B4)
K_7	3.77117E-1(D1)	3.77314E-1(D1)	4.01253E-1(D1)	4.06084E-1(D1)	3.77264E-1(D1)	3.93756E-1(D1)	3.98077E-1(D1)
K_8	3.99538E-1(B5)	3.99697E-1(B5)	4.01351E-1(B5)	4.08776E-1(B5)	3.99700E-1(B5)	4.02054E-1(B5)	4.10298E-1(B5)

表二十二 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率(橢圓斷面 $a/b=5$, $L_T/a=50$, $r=1$, $\alpha=30^\circ$)

	$\beta = 45^\circ$				$\beta = 90^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2
ε_0	0.00000E+0	1.34637E-6	3.07908E-5	1.09500E-4	1.35641E-6	3.33988E-5	1.28155E-4
ε_b	0.00000E+0	-1.71608E-4	-2.72439E-3	-6.29968E-3	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
ε_c	0.00000E+0	3.56141E-5	9.44307E-4	3.60411E-3	4.99533E-5	1.22349E-3	4.60742E-3
U_{tip}	0.00000E+0	-6.35511E-5	-1.03780E-2	-2.89780E-2	5.43647E-7	-1.11719E-4	-1.66580E-3
V_{tip}	0.00000E+0	-1.06059E-2	-1.35474E-1	-2.23772E-1	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
W_{tip}	0.00000E+0	4.45738E-4	1.27284E-2	5.14649E-2	6.24203E-4	1.51393E-2	5.53005E-2
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	-3.54274E-5	-1.27417E-2	-6.85497E-2	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	-1.37272E-4	-4.59872E-2	-2.49484E-1	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
K_1	7.03196E-3(B1)	7.17684E-3(B1)	1.00174E-2(B1)	1.53643E-2(B1)	7.21108E-3(B1)	1.05717E-2(B1)	1.69385E-2(B1)
K_2	3.51520E-2(C1)	3.51729E-2(C1)	3.47598E-2(C1)	3.57478E-2(C1)	3.51741E-2(C1)	3.57047E-2(C1)	3.73553E-2(C1)
K_3	4.40661E-2(B2)	4.42181E-2(B2)	4.76390E-2(B2)	5.67525E-2(B2)	4.42241E-2(B2)	4.77195E-2(B2)	5.62321E-2(B2)
K_4	1.23375E-1(B3)	1.23530E-1(B3)	1.26688E-1(B3)	1.36389E-1(B3)	1.23535E-1(B3)	1.27133E-1(B3)	1.36280E-1(B3)
K_5	2.19989E-1(C2)	2.19993E-1(C2)	2.18428E-1(C2)	2.20111E-1(C2)	2.20018E-1(C2)	2.20720E-1(C2)	2.22858E-1(C2)
K_6	2.41735E-1(B4)	2.41896E-1(B4)	2.44990E-1(B4)	2.54984E-1(B4)	2.41901E-1(B4)	2.45682E-1(B4)	2.55470E-1(B4)
K_7	3.77117E-1(D1)	3.77216E-1(D1)	3.87218E-1(D1)	3.89679E-1(D1)	3.77122E-1(D1)	3.77067E-1(D1)	3.75546E-1(D1)
K_8	3.99538E-1(B5)	3.99703E-1(B5)	4.02661E-1(B5)	4.11736E-1(B5)	3.99709E-1(B5)	4.03640E-1(B5)	4.14233E-1(B5)

表二十三 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率(橢圓斷面 $a/b=5$, $L_T/a=50$, $r=1$, $\alpha=45^\circ$)

	$\beta = 0^\circ$				$\beta = 30^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2
ε_0	0.00000E+0	1.15705E-6	1.62012E-5	3.72887E-5	1.16759E-6	1.94607E-5	3.06731E-5
ε_b	0.00000E+0	-3.47369E-4	-6.22357E-3	-1.54730E-2	-2.99585E-4	-5.14133E-3	-1.23155E-2
ε_c	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	3.57671E-5	9.76901E-4	3.49768E-3
U_{tip}	0.00000E+0	-2.63589E-4	-5.50951E-2	-1.50473E-1	-1.95776E-4	-3.84054E-2	-1.14872E-1
V_{tip}	0.00000E+0	-2.15137E-2	-3.08943E-1	-5.05796E-1	-1.85449E-2	-2.58676E-1	-4.38825E-1
W_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	4.48404E-4	1.58849E-2	7.42017E-2
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	-6.58457E-5	-2.60002E-2	-1.39902E-1
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	-2.47877E-4	-9.40535E-2	-5.16324E-1
K_1	7.03196E-3(B1)	7.12598E-3(B1)	9.45741E-3(B1)	1.46710E-2(B1)	7.14291E-3(B1)	9.55317E-3(B1)	1.42799E-2(B1)
K_2	3.51520E-2(C1)	3.51505E-2(C1)	3.11764E-2(C1)	3.11993E-2(C1)	3.51558E-2(C1)	3.22197E-2(C1)	3.12878E-2(C1)
K_3	4.40661E-2(B2)	4.41956E-2(B2)	4.70933E-2(B2)	5.67247E-2(B2)	4.41988E-2(B2)	4.71709E-2(B2)	5.63080E-2(B2)
K_4	1.23375E-1(B3)	1.23501E-1(B3)	1.24353E-1(B3)	1.32727E-1(B3)	1.23505E-1(B3)	1.25023E-1(B3)	1.32932E-1(B3)
K_5	2.19989E-1(C2)	2.19907E-1(C2)	2.09623E-1(C2)	2.10622E-1(C2)	2.19935E-1(C2)	2.12462E-1(C2)	2.10397E-1(C2)
K_6	2.41735E-1(B4)	2.41864E-1(B4)	2.41619E-1(B4)	2.46678E-1(B4)	2.41869E-1(B4)	2.42702E-1(B4)	2.49725E-1(B4)
K_7	3.77117E-1(D1)	3.77512E-1(D1)	3.98403E-1(B5)	4.00392E-1(B5)	3.77411E-1(D1)	3.99684E-1(B5)	4.02550E-1(B5)
K_8	3.99538E-1(B5)	3.99668E-1(B5)	4.25157E-1(D1)	4.30621E-1(D1)	3.99674E-1(B5)	4.12408E-1(D1)	4.24360E-1(D1)

表二十四 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率(橢圓斷面 $a/b=5$, $L_T/a=50$, $r=1$, $\alpha=45^\circ$)

	$\beta = 45^\circ$				$\beta = 90^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2
ε_0	0.00000E+0	1.17796E-6	2.27934E-5	4.24443E-5	1.19819E-6	2.89254E-5	1.04470E-4
ε_b	0.00000E+0	-2.43602E-4	-4.00064E-3	-9.08062E-3	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
ε_c	0.00000E+0	5.03735E-5	1.33102E-3	4.91702E-3	7.06559E-5	1.73678E-3	6.59985E-3
U_{tip}	0.00000E+0	-1.29217E-4	-2.36237E-2	-7.62299E-2	2.41305E-7	-2.47147E-4	-3.53304E-3
V_{tip}	0.00000E+0	-1.50718E-2	-2.03203E-1	-3.54294E-1	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
W_{tip}	0.00000E+0	6.30834E-4	1.96444E-2	8.96161E-2	8.82937E-4	2.15128E-2	7.94495E-2
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	-7.52481E-5	-2.74577E-2	-1.61437E-1	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	-2.83410E-4	-9.93998E-2	-6.00452E-1	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
K_1	7.03196E-3(B1)	7.15983E-3(B1)	9.71932E-3(B1)	1.41805E-2(B1)	7.19362E-3(B1)	1.02199E-2(B1)	1.57010E-2(B1)
K_2	3.51520E-2(C1)	3.51608E-2(C1)	3.33375E-2(C1)	3.19015E-2(C1)	3.51705E-2(C1)	3.56220E-2(C1)	3.70871E-2(C1)
K_3	4.40661E-2(B2)	4.42019E-2(B2)	4.72176E-2(B2)	5.58113E-2(B2)	4.42083E-2(B2)	4.72111E-2(B2)	5.31819E-2(B2)
K_4	1.23375E-1(B3)	1.23510E-1(B3)	1.25626E-1(B3)	1.33291E-1(B3)	1.23519E-1(B3)	1.26569E-1(B3)	1.32462E-1(B3)
K_5	2.19989E-1(C2)	2.19962E-1(C2)	2.15342E-1(C2)	2.12318E-1(C2)	2.20015E-1(C2)	2.20637E-1(C2)	2.22485E-1(C2)
K_6	2.41735E-1(B4)	2.41874E-1(B4)	2.43635E-1(B4)	2.51924E-1(B4)	2.41884E-1(B4)	2.45080E-1(B4)	2.51289E-1(B4)
K_7	3.77117E-1(D1)	3.77312E-1(D1)	3.99484E-1(B5)	4.05059E-1(B5)	3.77121E-1(D1)	3.76888E-1(D1)	3.73261E-1(D1)
K_8	3.99538E-1(B5)	3.99680E-1(B5)	4.01155E-1(D1)	4.12710E-1(D1)	3.99692E-1(B5)	4.03052E-1(B5)	4.10369E-1(B5)

表二十五 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率 (橢圓斷面 $a/b=10$, $L_T/a=20$, $r=0$, $\alpha=0^\circ$)

	$\beta = 0^\circ$				$\beta = 30^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1
ε_0	0.00000E+0	4.99917E-5	1.24880E-3	4.98287E-3	4.99911E-5	1.24846E-3	4.97847E-3
ε_b	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
ε_c	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
U_{tip}	0.00000E+0	3.33327E-5	8.32918E-4	3.32673E-3	3.33319E-5	8.32473E-4	3.32124E-3
V_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
W_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	1.36033E-3	3.28706E-2	1.17467E-1
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	2.52159E-3	5.99277E-2	2.05749E-1
K_1	8.78991E-3(B1)	9.74415E-3(B1)	1.69165E-2(B1)	2.33216E-2(B1)	1.09424E-2(B1)	2.81364E-2(B1)	4.28833E-2(B1)
K_2	5.50807E-2(B2)	5.98499E-2(B2)	1.03268E-1(C1)	1.39183E-1(C1)	6.00589E-2(B2)	1.00747E-1(C1)	1.34544E-1(C1)
K_3	8.77730E-2(C1)	8.84480E-2(C1)	1.28396E-1(B2)	1.98792E-1(D1)	8.83076E-2(C1)	1.31044E-1(B2)	2.14911E-1(D1)
K_4	1.54206E-1(B3)	1.59569E-1(B3)	1.96830E-1(D1)	2.35577E-1(B2)	1.59648E-1(B3)	2.00217E-1(D1)	2.42418E-1(B2)
K_5	1.96149E-1(D1)	1.96176E-1(D1)	2.53723E-1(B3)	4.22739E-1(B3)	1.96301E-1(D1)	2.55021E-1(B3)	4.25438E-1(B3)
K_6	3.02120E-1(B4)	3.07861E-1(B4)	4.19952E-1(B4)	6.00159E-1(C2)	3.07902E-1(B4)	4.20675E-1(B4)	5.97568E-1(C2)
K_7	4.99295E-1(B5)	5.05245E-1(B5)	5.59590E-1(C2)	6.43780E-1(B4)	5.05270E-1(B5)	5.59230E-1(C2)	6.46703E-1(B4)
K_8	5.45362E-1(C2)	5.45938E-1(C2)	6.04313E-1(D2)	6.44727E-1(D2)	5.45919E-1(C2)	6.05270E-1(D2)	6.50904E-1(D2)

表二十六 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率 (橢圓斷面 $a/b=10$, $L_T/a=20$, $r=0$, $\alpha=0^\circ$)

	$\beta = 45^\circ$				$\beta = 90^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1
ε_0	0.00000E+0	4.99909E-5	1.24837E-3	4.97795E-3	4.99917E-5	1.24880E-3	4.98287E-3
ε_b	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
ε_c	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
U_{tip}	0.00000E+0	3.33317E-5	8.32360E-4	3.32080E-3	3.33327E-5	8.32918E-4	3.32673E-3
V_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
W_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	1.56874E-3	3.67802E-2	1.21640E-1	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	2.90842E-3	6.73444E-2	2.16355E-1	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
K_1	8.78991E-3(B1)	1.20277E-2(B1)	3.67843E-2(B1)	5.78545E-2(B1)	1.39627E-2(B1)	5.27938E-2(B1)	9.68849E-2(C1)
K_2	5.50807E-2(B2)	6.02669E-2(B2)	9.79128E-2(C1)	1.28832E-1(C1)	6.06800E-2(B2)	9.03238E-2(C1)	1.02723E-1(B1)
K_3	8.77730E-2(C1)	8.81660E-2(C1)	1.33469E-1(B2)	2.26473E-1(D1)	8.78792E-2(C1)	1.37813E-1(B2)	2.42829E-1(D1)
K_4	1.54206E-1(B3)	1.59727E-1(B3)	2.03322E-1(D1)	2.47757E-1(B2)	1.59883E-1(B3)	2.08851E-1(D1)	2.56115E-1(B2)
K_5	1.96149E-1(D1)	1.96426E-1(D1)	2.56265E-1(B3)	4.28350E-1(B3)	1.96673E-1(D1)	2.58621E-1(B3)	4.34544E-1(B3)
K_6	3.02120E-1(B4)	3.07942E-1(B4)	4.21414E-1(B4)	5.95845E-1(C2)	3.08024E-1(B4)	4.22933E-1(B4)	5.93048E-1(C2)
K_7	4.99295E-1(B5)	5.05294E-1(B5)	5.58781E-1(C2)	6.49794E-1(B4)	5.05344E-1(B5)	5.57669E-1(C2)	6.51607E-1(B4)
K_8	5.45362E-1(C2)	5.45899E-1(C2)	6.06172E-1(D2)	6.53336E-1(D2)	5.45859E-1(C2)	6.07834E-1(D2)	6.57734E-1(D2)

表二十七 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率(橢圓斷面 $a/b=10$, $L_T/a=20$, $r=1$, $\alpha=0^\circ$)

	$\beta = 0^\circ$				$\beta = 30^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1
ε_0	0.00000E+0	1.48966E-4	3.70759E-3	1.46317E-2	1.48965E-4	3.70732E-3	1.46293E-2
ε_b	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
ε_c	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
U_{tip}	0.00000E+0	8.33236E-5	2.07724E-3	8.23802E-3	8.33228E-5	2.07688E-3	8.23513E-3
V_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
W_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	1.35461E-3	2.98855E-2	8.81010E-2
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	2.50681E-3	5.26105E-2	1.40678E-1
K_1	8.78991E-3(B1)	1.57866E-2(B1)	6.30411E-2(B1)	1.22265E-1(B1)	1.65533E-2(B1)	6.69659E-2(B1)	1.27694E-1(B1)
K_2	5.50807E-2(B2)	6.66460E-2(B2)	1.20727E-1(C1)	1.86247E-1(C1)	6.68337E-2(B2)	1.18588E-1(C1)	1.82760E-1(C1)
K_3	8.77730E-2(C1)	8.93351E-2(C1)	1.91437E-1(B2)	2.36062E-1(D1)	8.91961E-2(C1)	1.93203E-1(B2)	2.48733E-1(D1)
K_4	1.54206E-1(B3)	1.67137E-1(B3)	2.07287E-1(D1)	3.65671E-1(B2)	1.67213E-1(B3)	2.10473E-1(D1)	3.69867E-1(B2)
K_5	1.96149E-1(D1)	1.96615E-1(D1)	3.45849E-1(B3)	6.18589E-1(B3)	1.96739E-1(D1)	3.46777E-1(B3)	6.18358E-1(B3)
K_6	3.02120E-1(B4)	3.16060E-1(B4)	5.40172E-1(B4)	6.68124E-1(C2)	3.16100E-1(B4)	5.40550E-1(B4)	6.69138E-1(C2)
K_7	4.99295E-1(B5)	5.13830E-1(B5)	5.78669E-1(C2)	7.19769E-1(D2)	5.13854E-1(B5)	5.78505E-1(C2)	7.23400E-1(D2)
K_8	5.45362E-1(C2)	5.46734E-1(C2)	6.26752E-1(D2)	9.09832E-1(B4)	5.46715E-1(C3)	6.27678E-1(D2)	9.11598E-1(B4)

表二十八 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率(橢圓斷面 $a/b=10$, $L_T/a=20$, $r=1$, $\alpha=0^\circ$)

	$\beta = 45^\circ$				$\beta = 90^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1
ε_0	0.00000E+0	1.48965E-4	3.70724E-3	1.46289E-2	1.48966E-4	3.70759E-3	1.46317E-2
ε_b	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
ε_c	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
U_{tip}	0.00000E+0	8.33225E-5	2.07679E-3	8.23474E-3	8.33236E-5	2.07724E-3	8.23802E-3
V_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
W_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	1.56214E-3	3.35389E-2	9.37336E-2	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	2.89138E-3	5.92825E-2	1.51620E-1	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
K_1	8.78991E-3(B1)	1.72900E-2(B1)	7.10672E-2(B1)	1.33769E-1(B1)	1.86882E-2(B1)	8.05577E-2(B1)	1.56664E-1(C1)
K_2	5.50807E-2(B2)	6.70207E-2(B2)	1.16174E-1(C1)	1.78417E-1(C1)	6.73925E-2(B2)	1.09809E-1(C1)	1.58677E-1(B1)
K_3	8.77730E-2(C1)	8.90559E-2(C1)	1.94860E-1(B2)	2.58760E-1(D1)	8.87719E-2(C1)	1.97902E-1(B2)	2.74087E-1(D1)
K_4	1.54206E-1(B3)	1.67287E-1(B3)	2.13422E-1(D1)	3.73440E-1(B2)	1.67437E-1(B3)	2.18729E-1(D1)	3.79428E-1(B2)
K_5	1.96149E-1(D1)	1.96864E-1(D1)	3.47689E-1(B3)	6.19847E-1(B3)	1.97111E-1(D1)	3.49474E-1(B3)	6.26841E-1(B3)
K_6	3.02120E-1(B4)	3.16140E-1(B4)	5.41069E-1(B4)	6.68077E-1(C2)	3.16219E-1(B4)	5.42503E-1(B4)	6.61325E-1(C1)
K_7	4.99295E-1(B5)	5.13878E-1(B5)	5.78122E-1(C2)	7.26504E-1(D2)	5.13927E-1(B5)	5.76763E-1(C1)	7.31721E-1(D2)
K_8	5.45362E-1(C2)	5.46695E-1(C2)	6.28555E-1(D2)	9.13075E-1(B4)	5.46655E-1(C1)	6.30185E-1(D2)	9.15479E-1(B4)

表二十九 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率(橢圓斷面 $a/b=10$, $L_T/a=20$, $r=1$, $\alpha=30^\circ$)

	$\beta = 0^\circ$				$\beta = 30^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2
ε_0	0.00000E+0	1.34346E-6	2.88072E-5	1.00973E-4	1.34694E-6	3.02793E-5	1.06909E-4
ε_b	0.00000E+0	-1.97260E-4	-3.79455E-3	-9.97337E-3	-1.70357E-4	-3.15161E-3	-7.96887E-3
ε_c	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	1.00814E-5	2.79307E-4	1.16565E-3
U_{tip}	0.00000E+0	-5.40739E-5	-1.49846E-2	-5.42850E-2	-4.01043E-5	-1.02640E-2	-3.60056E-2
V_{tip}	0.00000E+0	-9.79949E-3	-1.62575E-1	-3.10600E-1	-8.45988E-3	-1.34802E-1	-2.54002E-1
W_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	5.04906E-5	1.82044E-3	1.09978E-2
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	1.80284E-7	-5.39678E-3	-3.84467E-2
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	-2.72221E-5	-2.20842E-2	-1.61890E-1
K_1	8.78991E-3(B1)	8.87834E-3(B1)	1.09005E-2(B1)	1.56982E-2(B1)	8.89226E-3(B1)	1.11165E-2(B1)	1.59861E-2(B1)
K_2	5.50807E-2(B2)	5.51978E-2(B2)	5.78707E-2(B2)	6.07794E-2(C1)	5.52001E-2(B2)	5.78922E-2(B2)	6.22687E-2(B2)
K_3	8.77730E-2(C1)	8.77058E-2(C1)	7.34463E-2(C1)	6.60065E-2(B2)	8.77252E-2(C1)	7.71257E-2(C1)	6.94926E-2(C1)
K_4	1.54206E-1(B3)	1.54327E-1(B3)	1.56378E-1(B3)	1.63814E-1(B3)	1.54329E-1(B3)	1.56668E-1(B3)	1.64650E-1(B3)
K_5	1.96149E-1(D1)	1.96265E-1(D1)	2.15896E-1(D1)	2.29610E-1(D1)	1.96237E-1(D1)	2.11010E-1(D1)	2.23781E-1(D1)
K_6	3.02120E-1(B4)	3.02247E-1(B4)	3.04036E-1(B4)	3.10128E-1(B4)	3.02249E-1(B4)	3.04430E-1(B4)	3.11358E-1(B4)
K_7	4.99295E-1(B5)	4.99425E-1(B5)	5.00883E-1(B5)	5.05419E-1(B5)	4.99427E-1(B5)	5.01361E-1(B5)	5.04379E-1(B5)
K_8	5.45362E-1(C2)	5.45309E-1(C2)	5.35137E-1(C2)	5.21627E-1(C2)	5.45325E-1(C2)	5.38184E-1(C2)	5.31994E-1(C2)

表三十 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率(橢圓斷面 $a/b=10$, $L_T/a=20$, $r=1$, $\alpha=30^\circ$)

	$\beta = 45^\circ$				$\beta = 90^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2
ε_0	0.00000E+0	1.35038E-6	3.16077E-5	1.15967E-4	1.35715E-6	3.38428E-5	1.34325E-4
ε_b	0.00000E+0	-1.38710E-4	-2.47122E-3	-6.01926E-3	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
ε_c	0.00000E+0	1.42177E-5	3.79888E-4	1.56412E-3	1.99959E-5	4.98220E-4	1.97227E-3
U_{tip}	0.00000E+0	-2.63103E-5	-6.25160E-3	-2.08933E-2	7.60623E-7	1.56177E-5	2.17180E-5
V_{tip}	0.00000E+0	-6.88577E-3	-1.05410E-1	-1.94290E-1	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
W_{tip}	0.00000E+0	7.11665E-5	2.24679E-3	1.17842E-2	9.99794E-5	2.48719E-3	9.79756E-3
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	3.11731E-7	-5.62620E-3	-3.83482E-2	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	-3.10413E-5	-2.31779E-2	-1.62919E-1	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
K_1	8.78991E-3(B1)	8.90616E-3(B1)	1.13468E-2(B1)	1.64753E-2(B1)	8.93391E-3(B1)	1.18344E-2(B1)	1.78410E-2(B1)
K_2	5.50807E-2(B2)	5.52025E-2(B2)	5.79394E-2(B2)	6.35789E-2(B2)	5.52072E-2(B2)	5.80641E-2(B2)	6.51735E-2(B2)
K_3	8.77730E-2(C1)	8.77443E-2(C1)	8.07937E-2(C1)	7.44041E-2(C1)	8.77818E-2(C1)	8.79942E-2(C1)	8.86576E-2(C1)
K_4	1.54206E-1(B3)	1.54330E-1(B3)	1.56904E-1(B3)	1.65165E-1(B3)	1.54334E-1(B3)	1.57220E-1(B3)	1.64118E-1(B3)
K_5	1.96149E-1(D1)	1.96210E-1(D1)	2.06075E-1(D1)	2.16205E-1(D1)	1.96158E-1(D1)	1.96437E-1(D1)	1.98146E-1(D1)
K_6	3.02120E-1(B4)	3.02251E-1(B4)	3.04773E-1(B4)	3.12299E-1(B4)	3.02254E-1(B4)	3.05326E-1(B4)	3.13488E-1(B4)
K_7	4.99295E-1(B5)	4.99429E-1(B5)	5.01810E-1(B5)	5.06155E-1(B5)	4.99432E-1(B5)	5.02582E-1(B5)	5.10856E-1(B5)
K_8	5.45362E-1(C2)	5.45342E-1(C2)	5.40926E-1(C2)	5.38618E-1(C2)	5.45374E-1(C2)	5.45658E-1(C2)	5.46543E-1(C2)

表三十一 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率(橢圓斷面 $a/b=10$, $L_T/a=20$, $r=1$, $\alpha=45^\circ$)

	$\beta = 0^\circ$				$\beta = 30^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2
ε_0	0.00000E+0	1.17216E-6	1.90826E-5	4.40434E-5	1.17915E-6	2.19883E-5	4.28298E-5
ε_b	0.00000E+0	-2.79653E-4	-5.53197E-3	-1.47105E-2	-2.41513E-4	-4.60030E-3	-1.17425E-2
ε_c	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	1.42575E-5	3.91800E-4	1.55047E-3
U_{tip}	0.00000E+0	-1.09694E-4	-3.23625E-2	-1.19806E-1	-8.15781E-5	-2.24609E-2	-8.57650E-2
V_{tip}	0.00000E+0	-1.39020E-2	-2.37527E-1	-4.52288E-1	-1.20018E-2	-1.98464E-1	-3.84874E-1
W_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	7.14974E-5	3.26622E-3	2.50662E-2
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	-1.33531E-5	-1.16956E-2	-8.45017E-2
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	-8.00687E-5	-4.69958E-2	-3.52668E-1
K_1	8.78991E-3(B1)	8.86478E-3(B1)	1.07708E-2(B1)	1.55854E-2(B1)	8.87857E-3(B1)	1.09162E-2(B1)	1.53785E-2(B1)
K_2	5.50807E-2(B2)	5.51848E-2(B2)	5.74785E-2(B2)	4.87412E-2(C1)	5.51873E-2(B2)	5.73844E-2(B2)	5.03044E-2(B2)
K_3	8.77730E-2(C1)	8.76218E-2(C1)	6.35926E-2(C1)	6.52094E-2(B2)	8.76621E-2(C1)	6.86431E-2(C1)	6.69054E-2(C1)
K_4	1.54206E-1(B3)	1.54310E-1(B3)	1.55026E-1(B3)	1.59938E-1(B3)	1.54313E-1(B3)	1.55626E-1(B3)	1.61415E-1(B3)
K_5	1.96149E-1(D1)	1.96377E-1(D1)	2.28178E-1(D1)	2.38675E-1(D1)	1.96321E-1(D1)	2.22140E-1(D1)	2.36187E-1(D1)
K_6	3.02120E-1(B4)	3.02229E-1(B4)	3.02213E-1(B4)	3.03831E-1(B4)	3.02232E-1(B4)	3.03006E-1(B4)	3.06301E-1(B4)
K_7	4.99295E-1(B5)	4.99405E-1(B5)	4.98617E-1(B5)	4.97250E-1(C2)	4.99408E-1(B5)	4.99445E-1(B5)	4.88142E-1(B5)
K_8	5.45362E-1(C2)	5.45241E-1(C2)	5.25397E-1(C2)	4.98955E-1(B5)	5.45274E-1(C2)	5.30870E-1(C2)	5.21437E-1(C2)

表三十二 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率(橢圓斷面 $a/b=10$, $L_T/a=20$, $r=1$, $\alpha=45^\circ$)

	$\beta = 45^\circ$				$\beta = 90^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2
ε_0	0.00000E+0	1.18607E-6	2.47965E-5	6.02549E-5	1.19968E-6	2.98215E-5	1.17201E-4
ε_b	0.00000E+0	-1.96648E-4	-3.60768E-3	-8.77735E-3	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
ε_c	0.00000E+0	2.01072E-5	5.35142E-4	2.14609E-3	2.82791E-5	7.05037E-4	2.79612E-3
U_{tip}	0.00000E+0	-5.38145E-5	-1.38116E-2	-5.26324E-2	6.75442E-7	1.00792E-5	-4.18425E-5
V_{tip}	0.00000E+0	-9.76877E-3	-1.56058E-1	-3.03584E-1	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
W_{tip}	0.00000E+0	1.00733E-4	3.76203E-3	2.54285E-2	1.41397E-4	3.52028E-3	1.38996E-2
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	-1.52111E-5	-1.23341E-2	-9.04580E-2	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	-9.16693E-5	-4.97593E-2	-3.77837E-1	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
K_1	8.78991E-3(B1)	8.89235E-3(B1)	1.10969E-2(B1)	1.55017E-2(B1)	8.91986E-3(B1)	1.15360E-2(B1)	1.67982E-2(B1)
K_2	5.50807E-2(B2)	5.51897E-2(B2)	5.74487E-2(B2)	5.37005E-2(B2)	5.51945E-2(B2)	5.76679E-2(B2)	6.26660E-2(B2)
K_3	8.77730E-2(C1)	8.77020E-2(C1)	7.42280E-2(C1)	6.91571E-2(C1)	8.77804E-2(C1)	8.79588E-2(C1)	8.85211E-2(C1)
K_4	1.54206E-1(B3)	1.54315E-1(B3)	1.56135E-1(B3)	1.62990E-1(B3)	1.54320E-1(B3)	1.56757E-1(B3)	1.60694E-1(B3)
K_5	1.96149E-1(D1)	1.96266E-1(D1)	2.14867E-1(D1)	2.30712E-1(D1)	1.96157E-1(D1)	1.96480E-1(D1)	1.99011E-1(D1)
K_6	3.02120E-1(B4)	3.02234E-1(B4)	3.03712E-1(B4)	3.08352E-1(B4)	3.02240E-1(B4)	3.04881E-1(B4)	3.10497E-1(B4)
K_7	4.99295E-1(B5)	4.99411E-1(B5)	5.00364E-1(B5)	4.91636E-1(B5)	4.99418E-1(B5)	5.02108E-1(B5)	5.07536E-1(B5)
K_8	5.45362E-1(C2)	5.45307E-1(C2)	5.35967E-1(C2)	5.32896E-1(C2)	5.45372E-1(C2)	5.45626E-1(C2)	5.46410E-1(C2)

表三十三 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率 (橢圓斷面 $a/b=10$, $L_T/a=50$, $r=0$, $\alpha=0^\circ$)

	$\beta = 0^\circ$				$\beta = 30^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1
ε_0	0.00000E+0	4.99917E-5	1.24880E-3	4.98287E-3	4.99915E-5	1.24867E-3	4.98134E-3
ε_b	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
ε_c	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
U_{tip}	0.00000E+0	3.33327E-5	8.32918E-4	3.32673E-3	3.33326E-5	8.32844E-4	3.32582E-3
V_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
W_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	1.38656E-3	3.34895E-2	1.19501E-1
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	2.52770E-3	6.00833E-2	2.06372E-1
K_1	3.51601E-3(B1)	5.04912E-3(B1)	1.04341E-2(B1)	1.46017E-2(B1)	7.00421E-3(B1)	1.92255E-2(B1)	2.67990E-2(B1)
K_2	2.20341E-2(B2)	3.21228E-2(B2)	6.44898E-2(C1)	1.12013E-1(C1)	3.25102E-2(B2)	6.24219E-2(C1)	1.09706E-1(C1)
K_3	3.51520E-2(C1)	3.68086E-2(C1)	1.16218E-1(B2)	1.96337E-1(D1)	3.64868E-2(C1)	1.18966E-1(B2)	2.12822E-1(D1)
K_4	6.16949E-2(B3)	7.39788E-2(B3)	1.94766E-1(D1)	2.27180E-1(B2)	7.41481E-2(B3)	1.98212E-1(D1)	2.33180E-1(B2)
K_5	1.20893E-1(B4)	1.34510E-1(B4)	2.04723E-1(B3)	3.36395E-1(C2)	1.34603E-1(B4)	2.06299E-1(B3)	3.31543E-1(D1)
K_6	1.94214E-1(D1)	1.94234E-1(D1)	2.54232E-1(C2)	3.87453E-1(B3)	1.94361E-1(D1)	2.53000E-1(D1)	3.92529E-1(B3)
K_7	1.99838E-1(B5)	2.14212E-1(B5)	3.06021E-1(B4)	5.57131E-1(B4)	2.14270E-1(B5)	3.07143E-1(B4)	5.59689E-1(B4)
K_8	2.19989E-1(C2)	2.21462E-1(C2)	4.21041E-1(B5)	6.35978E-1(D2)	2.21404E-1(C2)	4.21824E-1(B5)	6.41061E-1(D2)

表三十四 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率 (橢圓斷面 $a/b=10$, $L_T/a=50$, $r=0$, $\alpha=0^\circ$)

	$\beta = 45^\circ$				$\beta = 90^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1
ε_0	0.00000E+0	4.99914E-5	1.24864E-3	4.98116E-3	4.99917E-5	1.24880E-3	4.98287E-3
ε_b	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
ε_c	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
U_{tip}	0.00000E+0	3.33325E-5	8.32825E-4	3.32575E-3	3.33327E-5	8.32918E-4	3.32673E-3
V_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
W_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	1.59893E-3	3.74511E-2	1.23522E-1	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	2.91529E-3	6.74725E-2	2.16542E-1	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
K_1	3.51601E-3(B1)	8.57346E-3(B1)	2.59141E-2(B1)	3.54931E-2(B1)	1.12025E-2(B1)	4.06850E-2(C1)	5.02236E-2(C1)
K_2	2.20341E-2(B2)	3.28927E-2(B2)	5.99460E-2(C1)	1.07179E-1(C1)	3.36436E-2(B2)	5.10812E-2(B1)	1.01077E-1(B1)
K_3	3.51520E-2(C1)	3.61499E-2(C1)	1.21590E-1(B2)	2.24566E-1(D1)	3.54229E-2(C1)	1.26541E-1(B2)	2.41182E-1(D1)
K_4	6.16949E-2(B3)	7.43167E-2(B3)	2.01373E-1(D1)	2.38497E-1(B2)	7.46518E-2(B3)	2.07010E-1(D1)	2.48400E-1(B2)
K_5	1.20893E-1(B4)	1.34696E-1(B4)	2.07819E-1(B3)	3.27706E-1(C2)	1.34881E-1(B4)	2.10758E-1(B3)	3.20819E-1(C1)
K_6	1.94214E-1(D1)	1.94489E-1(D1)	2.51751E-1(C2)	3.95865E-1(B3)	1.94742E-1(D1)	2.49154E-1(C1)	4.00279E-1(B3)
K_7	1.99838E-1(B5)	2.14329E-1(B5)	3.08187E-1(B4)	5.61985E-1(B4)	2.14445E-1(B5)	3.10092E-1(B4)	5.66135E-1(B4)
K_8	2.19989E-1(C2)	2.21346E-1(C2)	4.22577E-1(B5)	6.45082E-1(D2)	2.21229E-1(C1)	4.24010E-1(B5)	6.51408E-1(D2)

表三十五 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率(橢圓斷面 $a/b=10$, $L_T/a=50$, $r=1$, $\alpha=0^\circ$)

	$\beta = 0^\circ$				$\beta = 30^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1
ε_0	0.00000E+0	1.48966E-4	3.70759E-3	1.46317E-2	1.48965E-4	3.70749E-3	1.46309E-2
ε_b	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
ε_c	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
U_{tip}	0.00000E+0	8.33236E-5	2.07724E-3	8.23802E-3	8.33235E-5	2.07718E-3	8.23754E-3
V_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
W_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	1.38057E-3	3.03835E-2	8.91799E-2
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	2.51273E-3	5.27059E-2	1.40874E-1
K_1	3.51601E-3(B1)	1.32574E-2(B1)	6.14098E-2(B1)	1.20715E-1(B1)	1.41186E-2(B1)	6.36059E-2(B1)	1.23005E-1(B1)
K_2	2.20341E-2(B2)	3.88823E-2(C1)	8.93752E-2(C1)	1.65717E-1(C1)	3.85776E-2(C1)	8.78209E-2(C1)	1.64024E-1(C1)
K_3	3.51520E-2(C1)	4.32335E-2(B2)	1.81837E-1(B2)	2.33970E-1(D1)	4.35222E-2(B2)	1.83611E-1(B2)	2.46960E-1(D1)
K_4	6.16949E-2(B3)	8.86013E-2(B3)	2.05370E-1(D1)	3.58928E-1(B2)	8.87427E-2(B3)	2.08610E-1(D1)	3.62692E-1(B2)
K_5	1.20893E-1(B4)	1.51857E-1(B4)	2.93304E-1(C2)	4.43232E-1(C2)	1.51939E-1(B4)	2.91939E-1(C2)	4.39984E-1(C2)
K_6	1.94214E-1(D1)	1.94679E-1(D1)	3.03685E-1(B3)	5.86287E-1(B3)	1.94806E-1(D1)	3.05044E-1(B3)	5.89208E-1(B3)
K_7	1.99838E-1(B5)	2.23407E-1(C2)	4.40838E-1(B4)	7.12545E-1(B4)	2.23349E-1(C2)	4.41598E-1(B4)	7.16774E-1(D2)
K_8	2.19989E-1(C2)	2.33380E-1(B5)	5.93001E-1(B5)	8.27083E-1(B5)	2.33434E-1(B5)	5.93522E-1(B5)	8.28026E-1(B4)

表三十六 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率(橢圓斷面 $a/b=10$, $L_T/a=50$, $r=1$, $\alpha=0^\circ$)

	$\beta = 45^\circ$				$\beta = 90^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1
ε_0	0.00000E+0	1.48965E-4	3.70747E-3	1.46308E-2	1.48966E-4	3.70759E-3	1.46317E-2
ε_b	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
ε_c	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
U_{tip}	0.00000E+0	8.33234E-5	2.07716E-3	8.23748E-3	8.33236E-5	2.07724E-3	8.23802E-3
V_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
W_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	1.59205E-3	3.40811E-2	9.47869E-2	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	2.89813E-3	5.93556E-2	1.51650E-1	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
K_1	3.51601E-3(B1)	1.49596E-2(B1)	6.60785E-2(B1)	1.25460E-1(B1)	1.66068E-2(B1)	7.39604E-2(C1)	1.31233E-1(C1)
K_2	2.20341E-2(B2)	3.82591E-2(C1)	8.59711E-2(C1)	1.62141E-1(C1)	3.75728E-2(C1)	7.92837E-2(B1)	1.57470E-1(B1)
K_3	3.51520E-2(C1)	4.38087E-2(B2)	1.85328E-1(B2)	2.57153E-1(D1)	4.43753E-2(B2)	1.88627E-1(B2)	2.72673E-1(D1)
K_4	6.16949E-2(B3)	8.88836E-2(B3)	2.11607E-1(D1)	3.66192E-1(B2)	8.91641E-2(B3)	2.17001E-1(D1)	3.72920E-1(B2)
K_5	1.20893E-1(B4)	1.52022E-1(B4)	2.90812E-1(C2)	4.37018E-1(C2)	1.52186E-1(B4)	2.88906E-1(C2)	4.31344E-1(C2)
K_6	1.94214E-1(D1)	1.94933E-1(D1)	3.06119E-1(B3)	5.91496E-1(B3)	1.95186E-1(D1)	3.07801E-1(B3)	5.94963E-1(B3)
K_7	1.99838E-1(B5)	2.23292E-1(C2)	4.42323E-1(B4)	7.20354E-1(D2)	2.23176E-1(C2)	4.43686E-1(B4)	7.26286E-1(D2)
K_8	2.19989E-1(C2)	2.33488E-1(B5)	5.94050E-1(B5)	8.29439E-1(B4)	2.33595E-1(B5)	5.95122E-1(B5)	8.33265E-1(B4)

表三十七 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率(橢圓斷面 $a/b=10$, $L_T/a=50$, $r=1$, $\alpha=30^\circ$)

	$\beta = 0^\circ$				$\beta = 30^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2
ε_0	0.00000E+0	1.28172E-6	2.45092E-5	9.51563E-5	1.30184E-6	1.97118E-5	-3.71419E-5
ε_b	0.00000E+0	-4.60802E-4	-5.23800E-3	-1.14857E-2	-3.93032E-4	-4.10599E-3	-8.03909E-3
ε_c	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	2.61169E-5	7.25555E-4	2.41616E-3
U_{tip}	0.00000E+0	-1.74189E-3	-6.82181E-2	-9.92978E-2	-1.26196E-3	-4.62429E-2	-7.71822E-2
V_{tip}	0.00000E+0	-5.53093E-2	-3.48918E-1	-4.25277E-1	-4.70926E-2	-2.87977E-1	-3.67897E-1
W_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	3.41861E-4	1.96608E-2	7.14272E-2
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	-4.96080E-4	-6.91289E-2	-2.21352E-1
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	-1.85739E-3	-2.70188E-1	-8.81548E-1
K_1	3.51601E-3(B1)	3.73635E-3(B1)	7.37623E-3(B1)	1.32137E-2(B1)	3.76743E-3(B1)	7.43341E-3(B1)	1.26995E-2(B1)
K_2	2.20341E-2(B2)	2.23207E-2(B2)	2.35479E-2(C1)	2.80445E-2(C1)	2.23271E-2(B2)	2.42930E-2(B2)	2.52469E-2(B2)
K_3	3.51520E-2(C1)	3.42313E-2(C1)	2.86687E-2(B2)	4.30789E-2(B2)	3.44837E-2(C1)	2.93646E-2(C1)	4.19193E-2(C1)
K_4	6.16949E-2(B3)	6.19598E-2(B3)	6.80978E-2(B3)	8.75335E-2(B3)	6.19738E-2(B3)	6.84189E-2(B3)	8.66233E-2(B3)
K_5	1.20893E-1(B4)	1.21161E-1(B4)	1.26525E-1(B4)	1.48482E-1(B4)	1.21178E-1(B4)	1.26787E-1(B4)	1.45347E-1(B4)
K_6	1.94214E-1(D1)	1.93115E-1(D1)	1.90042E-1(D1)	2.04763E-1(D1)	1.93430E-1(D1)	1.93185E-1(D1)	1.95992E-1(D1)
K_7	1.99838E-1(B5)	2.00102E-1(B5)	2.04560E-1(B5)	2.13549E-1(C2)	2.00123E-1(B5)	2.07724E-1(B5)	2.17044E-1(B5)
K_8	2.19989E-1(C2)	2.24459E-1(C2)	2.48453E-1(C2)	2.26737E-1(B5)	2.23242E-1(C2)	2.39933E-1(C2)	2.34668E-1(C2)

表三十八 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率(橢圓斷面 $a/b=10$, $L_T/a=50$, $r=1$, $\alpha=30^\circ$)

	$\beta = 45^\circ$				$\beta = 90^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2
ε_0	0.00000E+0	1.32097E-6	2.18764E-5	-7.19948E-5	1.35641E-6	3.33988E-5	1.28155E-4
ε_b	0.00000E+0	-3.16137E-4	-3.03778E-3	-4.80546E-3	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
ε_c	0.00000E+0	3.63807E-5	9.75781E-4	3.33641E-3	4.99533E-5	1.22348E-3	4.60740E-3
U_{tip}	0.00000E+0	-8.12945E-4	-2.70778E-2	-5.43232E-2	5.43647E-7	-1.11718E-4	-1.66579E-3
V_{tip}	0.00000E+0	-3.78117E-2	-2.20970E-1	-2.99895E-1	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
W_{tip}	0.00000E+0	4.68535E-4	2.05650E-2	9.08061E-2	6.24203E-4	1.51392E-2	5.53003E-2
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	-5.52042E-4	-7.08012E-2	-2.98952E-1	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	-2.06978E-3	-2.78750E-1	-1.27047E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
K_1	3.51601E-3(B1)	3.79851E-3(B1)	7.63848E-3(B1)	1.22197E-2(B1)	3.86062E-3(B1)	8.40076E-3(B1)	1.26341E-2(B1)
K_2	2.20341E-2(B2)	2.23336E-2(B2)	2.55641E-2(B2)	2.30000E-2(B2)	2.23464E-2(B2)	2.77333E-2(B2)	2.89172E-2(C1)
K_3	3.51520E-2(C1)	3.47248E-2(C1)	3.03690E-2(C1)	4.12725E-2(C1)	3.51741E-2(C1)	3.57047E-2(C1)	3.73553E-2(B2)
K_4	6.16949E-2(B3)	6.19870E-2(B3)	6.85597E-2(B3)	8.65717E-2(B3)	6.20111E-2(B3)	6.77171E-2(B3)	6.93085E-2(B3)
K_5	1.20893E-1(B4)	1.21194E-1(B4)	1.27179E-1(B4)	1.42881E-1(B4)	1.21224E-1(B4)	1.27316E-1(B4)	1.29765E-1(B4)
K_6	1.94214E-1(D1)	1.93719E-1(D1)	1.97393E-1(D1)	1.90181E-1(D1)	1.94222E-1(D1)	1.94163E-1(D1)	1.93076E-1(D1)
K_7	1.99838E-1(B5)	2.00142E-1(B5)	2.09012E-1(B5)	2.20600E-1(B5)	2.00178E-1(B5)	2.06819E-1(B5)	2.12857E-1(B5)
K_8	2.19989E-1(C2)	2.22097E-1(C2)	2.29663E-1(C2)	2.40566E-1(C2)	2.20018E-1(C2)	2.20720E-1(C2)	2.22858E-1(C2)

表三十九 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率(橢圓斷面 $a/b=10$, $L_T/a=50$, $r=1$, $\alpha=45^\circ$)

	$\beta = 0^\circ$				$\beta = 30^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2
ε_0	0.00000E+0	1.04479E-6	9.32842E-6	3.03888E-5	1.08557E-6	-1.82846E-5	-3.87333E-4
ε_b	0.00000E+0	-6.60054E-4	-7.73609E-3	-1.69917E-2	-5.63024E-4	-6.02066E-3	-1.18004E-2
ε_c	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	3.69269E-5	9.39054E-4	2.57646E-3
U_{tip}	0.00000E+0	-3.60131E-3	-1.50528E-1	-2.18568E-1	-2.61180E-3	-1.14322E-1	-1.99322E-1
V_{tip}	0.00000E+0	-7.94603E-2	-5.05783E-1	-6.09499E-1	-6.76969E-2	-4.41048E-1	-5.57751E-1
W_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	5.04325E-4	4.75797E-2	1.56612E-1
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	-1.02476E-3	-1.48447E-1	-4.08634E-1
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	-3.80937E-3	-5.84689E-1	-1.69078E+0
K_1	3.51601E-3(B1)	3.70954E-3(B1)	7.33126E-3(B1)	1.31589E-2(B1)	3.73853E-3(B1)	7.07299E-3(B1)	1.23238E-2(B1)
K_2	2.20341E-2(B2)	2.22835E-2(B2)	1.88374E-2(C1)	2.40428E-2(C1)	2.22909E-2(B2)	1.85715E-2(B2)	2.09105E-2(B2)
K_3	3.51520E-2(C1)	3.32889E-2(C1)	2.83444E-2(B2)	4.28804E-2(B2)	3.37749E-2(C1)	2.87893E-2(C1)	4.17330E-2(C1)
K_4	6.16949E-2(B3)	6.18787E-2(B3)	6.63327E-2(B3)	8.61240E-2(B3)	6.19056E-2(B3)	6.69048E-2(B3)	8.56783E-2(B3)
K_5	1.20893E-1(B4)	1.21062E-1(B4)	1.23355E-1(B4)	1.44251E-1(B4)	1.21096E-1(B4)	1.22807E-1(B4)	1.35704E-1(B4)
K_6	1.94214E-1(D1)	1.91979E-1(D1)	1.72119E-1(D1)	1.93201E-1(D1)	1.92593E-1(D1)	1.73672E-1(D1)	1.76233E-1(D1)
K_7	1.99838E-1(B5)	1.99989E-1(B5)	2.00390E-1(B5)	2.19417E-1(B5)	2.00029E-1(B5)	2.05312E-1(B5)	2.31054E-1(B5)
K_8	2.19989E-1(C2)	2.28930E-1(C2)	2.72263E-1(C2)	2.23423E-1(C2)	2.26564E-1(C2)	2.70310E-1(C2)	2.40421E-1(C2)

表四十 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率(橢圓斷面 $a/b=10$, $L_T/a=50$, $r=1$, $\alpha=45^\circ$)

	$\beta = 45^\circ$				$\beta = 90^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2
ε_0	0.00000E+0	1.12472E-6	-2.02031E-5	-5.84272E-4	1.19819E-6	2.89254E-5	1.04471E-4
ε_b	0.00000E+0	-4.52884E-4	-4.31500E-3	-6.70674E-3	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
ε_c	0.00000E+0	5.14477E-5	1.31461E-3	3.57148E-3	7.06559E-5	1.73678E-3	6.59985E-3
U_{tip}	0.00000E+0	-1.68416E-3	-7.42735E-2	-1.75671E-1	2.41305E-7	-2.47147E-4	-3.53304E-3
V_{tip}	0.00000E+0	-5.43835E-2	-3.56719E-1	-4.86204E-1	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
W_{tip}	0.00000E+0	6.81377E-4	5.06232E-2	2.32526E-1	8.82937E-4	2.15128E-2	7.94496E-2
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	-1.14160E-3	-1.72348E-1	-6.27280E-1	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	-4.24807E-3	-6.79913E-1	-2.70566E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
K_1	3.51601E-3(B1)	3.76780E-3(B1)	6.96556E-3(B1)	1.16619E-2(B1)	3.82705E-3(B1)	7.69318E-3(B1)	****
K_2	2.20341E-2(B2)	2.22982E-2(B2)	1.90931E-2(B2)	1.90486E-2(B2)	2.23132E-2(B2)	2.58104E-2(B2)	1.32059E-2(B2)
K_3	3.51520E-2(C1)	3.42509E-2(C1)	2.93213E-2(C1)	4.14259E-2(C1)	3.51705E-2(C1)	3.56220E-2(C1)	3.46933E-2(C1)
K_4	6.16949E-2(B3)	6.19308E-2(B3)	6.76296E-2(B3)	8.60007E-2(B3)	6.19764E-2(B3)	6.54145E-2(B3)	3.70871E-2(B3)
K_5	1.20893E-1(B4)	1.21128E-1(B4)	1.23336E-1(B4)	1.22754E-1(B4)	1.21187E-1(B4)	1.24832E-1(B4)	9.72304E-2(B4)
K_6	1.94214E-1(D1)	1.93172E-1(D1)	1.78450E-1(D1)	1.69124E-1(D1)	1.94220E-1(D1)	1.93755E-1(D1)	1.75639E-1(D1)
K_7	1.99838E-1(B5)	2.00068E-1(B5)	2.09558E-1(B5)	2.39371E-1(B5)	2.00141E-1(B5)	2.04636E-1(B5)	1.98523E-1(B5)
K_8	2.19989E-1(C2)	2.24287E-1(C2)	2.62081E-1(C2)	2.58753E-1(C2)	2.20015E-1(C2)	2.20637E-1(C2)	2.22485E-1(C2)

表四十一 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率 (I 型斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 0$, $\alpha = 0^\circ$)

	$\beta = 0^\circ$				$\beta = 30^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1
ε_0	0.00000E+0	4.99917E-5	1.24880E-3	4.98287E-3	4.99910E-5	1.24850E-3	4.98081E-3
ε_b	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
ε_c	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
U_{tip}	0.00000E+0	3.33327E-5	8.32918E-4	3.32673E-3	3.33133E-5	8.26850E-4	3.30372E-3
V_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
W_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	1.00157E-2	1.79396E-1	3.54795E-1
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	9.70138E-3	1.84407E-1	4.11350E-1
K_1	1.94103E-2(B1)	1.98919E-2(B1)	2.68274E-2(B1)	3.55766E-2(B1)	2.05015E-2(B1)	3.37227E-2(B1)	4.56895E-2(B1)
K_2	6.15796E-2(C1)	6.25198E-2(C1)	7.24914E-2(C1)	8.42532E-2(C1)	6.23275E-2(C1)	7.90719E-2(C1)	1.20153E-1(C1)
K_3	6.79899E-2(D1)	6.82173E-2(D1)	8.24975E-2(D1)	1.24550E-1(D1)	6.85190E-2(D1)	8.34524E-2(D1)	1.26470E-1(D1)
K_4	1.21591E-1(B2)	1.23823E-1(B2)	1.68670E-1(B2)	2.62135E-1(B2)	1.23929E-1(B2)	1.71637E-1(B2)	2.70949E-1(B2)
K_5	2.33196E-1(D2)	2.34498E-1(D2)	2.63488E-1(D2)	3.36180E-1(D2)	2.34588E-1(D2)	2.66437E-1(D2)	3.48155E-1(D2)
K_6	3.40225E-1(B3)	3.42693E-1(B3)	3.96841E-1(B3)	4.61393E-1(C2)	3.42704E-1(B3)	3.82485E-1(B3)	4.44601E-1(C2)
K_7	3.84279E-1(C2)	3.85125E-1(C2)	4.04913E-1(C2)	5.28116E-1(B3)	3.85119E-1(C2)	4.20170E-1(C2)	5.47516E-1(B3)
K_8	4.80846E-1(D3)	4.82686E-1(D3)	5.24537E-1(D3)	6.34876E-1(D3)	4.82730E-1(D3)	5.26141E-1(D3)	6.41514E-1(D3)

表四十二 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率 (I 型斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 0$, $\alpha = 0^\circ$)

	$\beta = 45^\circ$				$\beta = 90^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1
ε_0	0.00000E+0	4.99908E-5	1.24849E-3	4.98107E-3	4.99917E-5	1.24880E-3	4.98287E-3
ε_b	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
ε_c	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
U_{tip}	0.00000E+0	3.33073E-5	8.26924E-4	3.30855E-3	3.33327E-5	8.32918E-4	3.32673E-3
V_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
W_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	1.14614E-2	1.77821E-1	3.13634E-1	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	1.11171E-2	1.87596E-1	3.82199E-1	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
K_1	1.94103E-2(B1)	2.10993E-2(B1)	4.01032E-2(B1)	5.45816E-2(B1)	2.22648E-2(B1)	5.67613E-2(B1)	7.33371E-2(C1)
K_2	6.15796E-2(C1)	6.21323E-2(C1)	7.63679E-2(C1)	1.16926E-1(C1)	6.17335E-2(C1)	6.51434E-2(C1)	1.06222E-1(B1)
K_3	6.79899E-2(D1)	6.88143E-2(D1)	8.92494E-2(D1)	1.39356E-1(D1)	6.93863E-2(D1)	9.69279E-2(D1)	1.53395E-1(D1)
K_4	1.21591E-1(B2)	1.24031E-1(B2)	1.73506E-1(B2)	2.75157E-1(B2)	1.24227E-1(B2)	1.75957E-1(B2)	2.80770E-1(B2)
K_5	2.33196E-1(D2)	2.34677E-1(D2)	2.68414E-1(D2)	3.53404E-1(D2)	2.34849E-1(D2)	2.71191E-1(D2)	3.59919E-1(D2)
K_6	3.40225E-1(B3)	3.42733E-1(B3)	3.82637E-1(B3)	4.44374E-1(B3)	3.42839E-1(B3)	4.00005E-1(B3)	4.49676E-1(C2)
K_7	3.84279E-1(C2)	3.85094E-1(C2)	4.19966E-1(C2)	5.46471E-1(C2)	3.84989E-1(C2)	4.01638E-1(C2)	5.37660E-1(B3)
K_8	4.80846E-1(D3)	4.82773E-1(D3)	5.27130E-1(D3)	6.44261E-1(D3)	4.82855E-1(D3)	5.28414E-1(D3)	6.47635E-1(D3)

表四十三 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率 (I 型斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\alpha = 0^\circ$)

	$\beta = 0^\circ$				$\beta = 30^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1
ε_0	0.00000E+0	1.48966E-4	3.70759E-3	1.46316E-2	1.48965E-4	3.70744E-3	1.46310E-2
ε_b	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
ε_c	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
U_{tip}	0.00000E+0	8.33235E-5	2.07724E-3	8.23801E-3	8.33055E-5	2.07481E-3	8.23244E-3
V_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
W_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	9.69277E-3	1.15457E-1	1.79688E-1
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	9.40173E-3	1.19860E-1	2.01016E-1
K_1	1.94103E-2(B1)	2.34955E-2(B1)	6.68272E-2(B1)	1.25630E-1(B1)	2.40137E-2(B1)	6.98552E-2(B1)	1.29014E-1(B1)
K_2	6.15796E-2(C1)	6.37650E-2(C1)	9.55046E-2(C1)	1.48282E-1(C1)	6.35769E-2(C1)	1.00386E-1(C1)	1.67521E-1(C1)
K_3	6.79899E-2(D1)	6.93852E-2(D1)	1.03537E-1(D1)	1.75422E-1(D1)	6.96814E-2(D1)	1.03541E-1(D1)	1.73532E-1(D1)
K_4	1.21591E-1(B2)	1.27265E-1(B2)	2.22348E-1(B2)	3.86444E-1(B2)	1.27367E-1(B2)	2.24190E-1(B2)	3.90847E-1(B2)
K_5	2.33196E-1(D2)	2.36522E-1(D2)	3.03660E-1(D2)	4.44960E-1(D2)	2.36611E-1(D2)	3.05873E-1(D2)	4.51728E-1(D2)
K_6	3.40225E-1(B3)	3.46309E-1(B3)	4.30745E-1(C2)	5.45943E-1(C2)	3.46320E-1(B3)	4.26701E-1(C2)	5.41397E-1(C2)
K_7	3.84279E-1(C2)	3.86250E-1(C2)	4.66072E-1(B3)	7.07933E-1(B3)	3.86243E-1(C2)	4.70367E-1(B3)	7.12476E-1(B3)
K_8	4.80846E-1(D3)	4.85374E-1(D3)	5.81227E-1(D3)	7.97206E-1(D3)	4.85418E-1(D3)	5.82416E-1(D3)	8.00975E-1(D3)

表四十四 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率 (I 型斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\alpha = 0^\circ$)

	$\beta = 45^\circ$				$\beta = 90^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1
ε_0	0.00000E+0	1.48965E-4	3.70742E-3	1.46309E-2	1.48966E-4	3.70759E-3	1.46316E-2
ε_b	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
ε_c	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
U_{tip}	0.00000E+0	8.32999E-5	2.07458E-3	8.23249E-3	8.33235E-5	2.07724E-3	8.23801E-3
V_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
W_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	1.10953E-2	1.20539E-1	1.78426E-1	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	1.07767E-2	1.27649E-1	2.06474E-1	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
K_1	1.94103E-2(B1)	2.45261E-2(B1)	7.31816E-2(B1)	1.32720E-1(B1)	2.55361E-2(B1)	8.35606E-2(B1)	1.42645E-1(C1)
K_2	6.15796E-2(C1)	6.33858E-2(C1)	9.85971E-2(C1)	1.69410E-1(C1)	6.29948E-2(C1)	9.00878E-2(C1)	1.61312E-1(B1)
K_3	6.79899E-2(D1)	6.99715E-2(D1)	1.08036E-1(D1)	1.80889E-1(D1)	7.05343E-2(D1)	1.15282E-1(D1)	1.96214E-1(D1)
K_4	1.21591E-1(B2)	1.27467E-1(B2)	2.25653E-1(B2)	3.94195E-1(B2)	1.27658E-1(B2)	2.27950E-1(B2)	3.99522E-1(B2)
K_5	2.33196E-1(D2)	2.36699E-1(D2)	3.07629E-1(D2)	4.56440E-1(D2)	2.36870E-1(D2)	3.10378E-1(D2)	4.63255E-1(D2)
K_6	3.40225E-1(B3)	3.46348E-1(B3)	4.25732E-1(C2)	5.38838E-1(C2)	3.46454E-1(B3)	4.27646E-1(C2)	5.35831E-1(C2)
K_7	3.84279E-1(C2)	3.86218E-1(C2)	4.71268E-1(B3)	7.14315E-1(B3)	3.86113E-1(C2)	4.68782E-1(B3)	7.15203E-1(B3)
K_8	4.80846E-1(D3)	4.85460E-1(D3)	5.83333E-1(D3)	8.03600E-1(D3)	4.85542E-1(D3)	5.84732E-1(D3)	8.07426E-1(D3)

表四十五 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率 (I 型斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\alpha = 30^\circ$)

	$\beta = 0^\circ$				$\beta = 30^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2
ε_0	0.00000E+0	1.35440E-6	3.23381E-5	1.17467E-4	1.35505E-6	3.27038E-5	1.20428E-4
ε_b	0.00000E+0	-9.50303E-5	-2.22663E-3	-7.53389E-3	-8.22550E-5	-1.90605E-3	-6.29422E-3
ε_c	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	8.53165E-6	2.18437E-4	8.80206E-4
U_{tip}	0.00000E+0	-1.61612E-6	-1.20445E-3	-1.14604E-2	-1.02425E-6	-8.84581E-4	-8.69421E-3
V_{tip}	0.00000E+0	-2.04194E-3	-4.63348E-2	-1.42525E-1	-1.76730E-3	-3.97202E-2	-1.22857E-1
W_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	1.01857E-4	2.79323E-3	1.67988E-2
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	7.19711E-5	-1.39029E-2	-1.64752E-1
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	3.39133E-5	-3.35855E-2	-3.88867E-1
K_1	1.94103E-2(B1)	1.94503E-2(B1)	2.04094E-2(B1)	2.32806E-2(B1)	1.94567E-2(B1)	2.05186E-2(B1)	2.32611E-2(B1)
K_2	6.15796E-2(C1)	6.15765E-2(C1)	5.63103E-2(C1)	4.63547E-2(C1)	6.15805E-2(C1)	5.72816E-2(C1)	4.68945E-2(C1)
K_3	6.79899E-2(D1)	6.80266E-2(D1)	7.43309E-2(D1)	8.79299E-2(D1)	6.80233E-2(D1)	7.32198E-2(D1)	8.64024E-2(D1)
K_4	1.21591E-1(B2)	1.21644E-1(B2)	1.22894E-1(B2)	1.26660E-1(B2)	1.21645E-1(B2)	1.22961E-1(B2)	1.28009E-1(B2)
K_5	2.33196E-1(D2)	2.33234E-1(D2)	2.37282E-1(D2)	2.58652E-1(D2)	2.33233E-1(D2)	2.36392E-1(D2)	2.54728E-1(D2)
K_6	3.40225E-1(B3)	3.40281E-1(B3)	3.41449E-1(B3)	3.44188E-1(B3)	3.40281E-1(B3)	3.41438E-1(B3)	3.38967E-1(B3)
K_7	3.84279E-1(C2)	3.84299E-1(C2)	3.85704E-1(C2)	3.95076E-1(C2)	3.84299E-1(C2)	3.85495E-1(C2)	3.99172E-1(C2)
K_8	4.80846E-1(D3)	4.80893E-1(D3)	4.84055E-1(D3)	5.04670E-1(D3)	4.80892E-1(D3)	4.83478E-1(D3)	5.00062E-1(D3)

表四十六 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率 (I 型斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\alpha = 30^\circ$)

	$\beta = 45^\circ$				$\beta = 90^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2
ε_0	0.00000E+0	1.35571E-6	3.30617E-5	1.23961E-4	1.35701E-6	3.37528E-5	1.32971E-4
ε_b	0.00000E+0	-6.71253E-5	-1.53836E-3	-4.94065E-3	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
ε_c	0.00000E+0	1.20592E-5	3.05616E-4	1.22215E-3	1.70362E-5	4.23028E-4	1.65735E-3
U_{tip}	0.00000E+0	-4.33832E-7	-5.76513E-4	-5.88731E-3	7.42689E-7	4.66992E-6	-1.41152E-4
V_{tip}	0.00000E+0	-1.44212E-3	-3.20994E-2	-9.98665E-2	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
W_{tip}	0.00000E+0	1.43969E-4	3.81434E-3	2.08090E-2	2.03379E-4	5.03405E-3	1.95266E-2
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	8.31436E-5	-1.56721E-2	-1.97144E-1	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	3.92487E-5	-3.79728E-2	-4.58869E-1	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
K_1	1.94103E-2(B1)	1.94630E-2(B1)	2.06325E-2(B1)	2.32776E-2(B1)	1.94757E-2(B1)	2.08744E-2(B1)	2.35508E-2(B1)
K_2	6.15796E-2(C1)	6.15844E-2(C1)	5.84212E-2(C1)	4.81392E-2(C1)	6.15922E-2(C1)	6.18950E-2(C1)	6.28410E-2(C1)
K_3	6.79899E-2(D1)	6.80201E-2(D1)	7.19431E-2(D1)	8.39745E-2(D1)	6.80136E-2(D1)	6.82043E-2(D1)	6.50950E-2(D1)
K_4	1.21591E-1(B2)	1.21646E-1(B2)	1.23021E-1(B2)	1.28895E-1(B2)	1.21648E-1(B2)	1.23122E-1(B2)	1.28393E-1(B2)
K_5	2.33196E-1(D2)	2.33232E-1(D2)	2.35515E-1(D2)	2.49587E-1(D2)	2.33230E-1(D2)	2.33804E-1(D2)	2.33015E-1(D2)
K_6	3.40225E-1(B3)	3.40282E-1(B3)	3.41468E-1(B3)	3.36383E-1(B3)	3.40283E-1(B3)	3.41640E-1(B3)	3.45442E-1(B3)
K_7	3.84279E-1(C2)	3.84298E-1(C2)	3.85255E-1(C2)	3.99934E-1(C2)	3.84296E-1(C2)	3.84700E-1(C2)	3.85948E-1(C2)
K_8	4.80846E-1(D3)	4.80891E-1(D3)	4.82922E-1(D3)	4.95076E-1(D3)	4.80890E-1(D3)	4.81868E-1(D3)	4.84189E-1(D3)

表四十七 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率 (I 型斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\alpha = 45^\circ$)

	$\beta = 0^\circ$				$\beta = 30^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2
ε_0	0.00000E+0	1.19416E-6	2.67401E-5	8.13308E-5	1.19547E-6	2.74613E-5	8.48984E-5
ε_b	0.00000E+0	-1.34463E-4	-3.18341E-3	-1.09552E-2	-1.16386E-4	-2.72501E-3	-9.15539E-3
ε_c	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	1.20662E-5	3.08698E-4	1.21097E-3
U_{tip}	0.00000E+0	-4.08446E-6	-2.49978E-3	-2.46805E-2	-2.89916E-6	-1.85578E-3	-1.98795E-2
V_{tip}	0.00000E+0	-2.88966E-3	-6.64191E-2	-2.07868E-1	-2.50102E-3	-5.71237E-2	-1.83002E-1
W_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	1.44080E-4	4.24859E-3	3.28457E-2
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	4.23293E-5	-3.06142E-2	-3.12277E-1
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	-3.04093E-5	-7.03074E-2	-7.42180E-1
K_1	1.94103E-2(B1)	1.94439E-2(B1)	2.02820E-2(B1)	2.30059E-2(B1)	1.94502E-2(B1)	2.03514E-2(B1)	2.27930E-2(B1)
K_2	6.15796E-2(C1)	6.15510E-2(C1)	5.31033E-2(C1)	4.08746E-2(C1)	6.15608E-2(C1)	5.43504E-2(C1)	4.04931E-2(C1)
K_3	6.79899E-2(D1)	6.80488E-2(D1)	7.76661E-2(D1)	9.38004E-2(D1)	6.80394E-2(D1)	7.61490E-2(D1)	9.30702E-2(D1)
K_4	1.21591E-1(B2)	1.21638E-1(B2)	1.22730E-1(B2)	1.25936E-1(B2)	1.21639E-1(B2)	1.22858E-1(B2)	1.29243E-1(B2)
K_5	2.33196E-1(D2)	2.33237E-1(D2)	2.40481E-1(D2)	2.70380E-1(D2)	2.33235E-1(D2)	2.38803E-1(D2)	2.66228E-1(D2)
K_6	3.40225E-1(B3)	3.40275E-1(B3)	3.41108E-1(B3)	3.41766E-1(B3)	3.40275E-1(B3)	3.40921E-1(B3)	3.33581E-1(B3)
K_7	3.84279E-1(C2)	3.84300E-1(C2)	3.86790E-1(C2)	4.09048E-1(C2)	3.84298E-1(C2)	3.86510E-1(C2)	4.19303E-1(C2)
K_8	4.80846E-1(D3)	4.80893E-1(D3)	4.86222E-1(D3)	5.26110E-1(D3)	4.80891E-1(D3)	4.85060E-1(D3)	5.19582E-1(D3)

表四十八 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率 (I 型斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\alpha = 45^\circ$)

	$\beta = 45^\circ$				$\beta = 90^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2
ε_0	0.00000E+0	1.19678E-6	2.81864E-5	9.03004E-5	1.19939E-6	2.96407E-5	1.14452E-4
ε_b	0.00000E+0	-9.49787E-5	-2.19896E-3	-7.15255E-3	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
ε_c	0.00000E+0	1.70551E-5	4.32248E-4	1.69665E-3	2.40940E-5	5.99016E-4	2.35520E-3
U_{tip}	0.00000E+0	-1.71673E-6	-1.22599E-3	-1.46244E-2	6.39568E-7	-1.19008E-5	-3.72364E-4
V_{tip}	0.00000E+0	-2.04085E-3	-4.63098E-2	-1.53295E-1	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
W_{tip}	0.00000E+0	2.03638E-4	5.67995E-3	4.14226E-2	2.87641E-4	7.13085E-3	2.77844E-2
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	4.89641E-5	-3.50172E-2	-4.10827E-1	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	-3.49292E-5	-8.03456E-2	-9.47913E-1	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
K_1	1.94103E-2(B1)	1.94565E-2(B1)	2.04280E-2(B1)	2.25019E-2(B1)	1.94691E-2(B1)	2.06045E-2(B1)	2.04634E-2(B1)
K_2	6.15796E-2(C1)	6.15706E-2(C1)	5.59159E-2(C1)	4.04958E-2(C1)	6.15902E-2(C1)	6.18454E-2(C1)	5.93081E-2(D1)
K_3	6.79899E-2(D1)	6.80299E-2(D1)	7.43005E-2(D1)	9.18500E-2(D1)	6.80111E-2(D1)	6.77603E-2(D1)	6.26558E-2(C1)
K_4	1.21591E-1(B2)	1.21640E-1(B2)	1.22960E-1(B2)	1.32058E-1(B2)	1.21643E-1(B2)	1.23087E-1(B2)	1.28953E-1(B2)
K_5	2.33196E-1(D2)	2.33232E-1(D2)	2.37073E-1(D2)	2.61793E-1(D2)	2.33226E-1(D2)	2.33471E-1(D2)	2.28934E-1(D2)
K_6	3.40225E-1(B3)	3.40276E-1(B3)	3.40916E-1(B3)	3.26352E-1(B3)	3.40277E-1(B3)	3.41462E-1(B3)	3.44319E-1(B3)
K_7	3.84279E-1(C2)	3.84297E-1(C2)	3.86062E-1(C2)	4.25021E-1(C2)	3.84294E-1(C2)	3.84654E-1(C2)	3.85754E-1(C2)
K_8	4.80846E-1(D3)	4.80889E-1(D3)	4.83917E-1(D3)	5.11068E-1(D3)	4.80886E-1(D3)	4.81694E-1(D3)	4.82723E-1(D3)

表四十九 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率 (十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 20$, $r = 0$, $\alpha = 0^\circ$)

	$\beta = 0^\circ$				$\beta = 30^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1
ε_0	0.00000E+0	4.99917E-5	1.24880E-3	4.98287E-3	4.99717E-5	1.24339E-3	4.96404E-3
ε_b	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
ε_c	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
U_{tip}	0.00000E+0	3.33327E-5	8.32918E-4	3.32673E-3	3.33154E-5	8.28797E-4	3.31449E-3
V_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
W_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	1.28247E-2	2.06304E-1	3.68389E-1
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	2.33695E-2	3.37062E-1	5.51809E-1
K_1	1.48090E-2(B1)	1.54271E-2(B1)	2.27288E-2(B1)	3.07058E-2(B1)	1.61904E-2(B1)	2.85269E-2(B1)	3.81977E-2(B1)
K_2	4.17796E-2(C1)	4.31793E-2(C1)	6.20044E-2(C1)	7.55019E-2(C1)	4.28984E-2(C1)	6.60944E-2(C1)	1.12277E-1(C1)
K_3	5.63311E-2(D1)	5.66008E-2(D1)	6.86566E-2(D1)	1.14928E-1(D1)	5.69569E-2(D1)	7.44531E-2(D1)	1.19951E-1(D1)
K_4	9.27837E-2(B2)	9.56912E-2(B2)	1.49101E-1(B2)	2.49147E-1(B2)	9.58285E-2(B2)	1.52431E-1(B2)	2.57833E-1(B2)
K_5	1.69162E-1(D2)	1.71175E-1(D2)	2.11616E-1(D2)	2.97648E-1(D2)	1.71296E-1(D2)	2.15781E-1(D2)	3.11672E-1(D2)
K_6	2.59694E-1(B3)	2.62556E-1(C2)	2.90763E-1(C2)	3.65107E-1(C2)	2.61788E-1(B3)	2.85154E-1(C2)	3.55694E-1(C2)
K_7	2.61316E-1(C2)	2.62918E-1(B3)	3.30025E-1(B3)	4.77649E-1(B3)	2.63688E-1(C2)	3.36158E-1(B3)	4.88217E-1(B3)
K_8	2.82499E-1(D2)	2.86011E-1(D2)	3.55995E-1(D2)	5.02328E-1(D2)	2.86087E-1(D2)	3.59124E-1(D2)	5.11889E-1(D2)

表五十 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率 (十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 20$, $r = 0$, $\alpha = 0^\circ$)

	$\beta = 45^\circ$				$\beta = 90^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1
ε_0	0.00000E+0	4.99655E-5	1.24338E-3	4.96662E-3	4.99917E-5	1.24880E-3	4.98287E-3
ε_b	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
ε_c	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
U_{tip}	0.00000E+0	3.33102E-5	8.29035E-4	3.31721E-3	3.33327E-5	8.32918E-4	3.32673E-3
V_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
W_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	1.46273E-2	1.98940E-1	3.21494E-1	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	2.66975E-2	3.33725E-1	5.03722E-1	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
K_1	1.48090E-2(B1)	1.69352E-2(B1)	3.37336E-2(B1)	4.44769E-2(B1)	1.83851E-2(B1)	4.66801E-2(C1)	5.60331E-2(C1)
K_2	4.17796E-2(C1)	4.26101E-2(C1)	6.36524E-2(C1)	1.10082E-1(C1)	4.20076E-2(C1)	5.49385E-2(B1)	1.04672E-1(B1)
K_3	5.63311E-2(D1)	5.73004E-2(D1)	8.06928E-2(D1)	1.32644E-1(D1)	5.79527E-2(D1)	8.80579E-2(D1)	1.45795E-1(D1)
K_4	9.27837E-2(B2)	9.59610E-2(B2)	1.54488E-1(B2)	2.62236E-1(B2)	9.62130E-2(B2)	1.57290E-1(B2)	2.68665E-1(B2)
K_5	1.69162E-1(D2)	1.71413E-1(D2)	2.18029E-1(D2)	3.16901E-1(D2)	1.71630E-1(D2)	2.20655E-1(D2)	3.22920E-1(D2)
K_6	2.59694E-1(B3)	2.61650E-1(B3)	2.84394E-1(C2)	3.53145E-1(C2)	2.62361E-1(C2)	2.86290E-1(C2)	3.50528E-1(C2)
K_7	2.61316E-1(C2)	2.63826E-1(C2)	3.36681E-1(B3)	4.89229E-1(B3)	2.63108E-1(B3)	3.33809E-1(B3)	4.88145E-1(B3)
K_8	2.82499E-1(D2)	2.86158E-1(D2)	3.60430E-1(D2)	5.14774E-1(D2)	2.86282E-1(D2)	3.61421E-1(D2)	5.17618E-1(D2)

表五十一 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率 (十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 20$, $r = 1$, $\alpha = 0^\circ$)

	$\beta = 0^\circ$				$\beta = 30^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1
ε_0	0.00000E+0	1.48966E-4	3.70759E-3	1.46316E-2	1.48948E-4	3.70598E-3	1.46285E-2
ε_b	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
ε_c	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
U_{tip}	0.00000E+0	8.33235E-5	2.07724E-3	8.23801E-3	8.33081E-5	2.07590E-3	8.23541E-3
V_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
W_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	1.22145E-2	1.22014E-1	1.77771E-1
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	2.18572E-2	1.72179E-1	2.21635E-1
K_1	1.48090E-2(B1)	1.98458E-2(B1)	6.50967E-2(B1)	1.24134E-1(B1)	2.04444E-2(B1)	6.73118E-2(B1)	1.26303E-1(B1)
K_2	4.17796E-2(C1)	4.49612E-2(C1)	8.80689E-2(C1)	1.43382E-1(C1)	4.46920E-2(C1)	9.06198E-2(C1)	1.62585E-1(C1)
K_3	5.63311E-2(D1)	5.80943E-2(D1)	9.26771E-2(D1)	1.68046E-1(D1)	5.84404E-2(D1)	9.58419E-2(D1)	1.66803E-1(D1)
K_4	9.27837E-2(B2)	1.00100E-1(B2)	2.07242E-1(B2)	3.76404E-1(B2)	1.00231E-1(B2)	2.09173E-1(B2)	3.80647E-1(B2)
K_5	1.69162E-1(D2)	1.74450E-1(D2)	2.61907E-1(D2)	4.15747E-1(D2)	1.74569E-1(D2)	2.64495E-1(D2)	4.22780E-1(D2)
K_6	2.59694E-1(B3)	2.64200E-1(C2)	3.25606E-1(C2)	4.66197E-1(C2)	2.63944E-1(C2)	3.23729E-1(C2)	4.62262E-1(C2)
K_7	2.61316E-1(C2)	2.67607E-1(B3)	4.09116E-1(B3)	6.65943E-1(B3)	2.67864E-1(B3)	4.10986E-1(B3)	6.69497E-1(B3)
K_8	2.82499E-1(D2)	2.91298E-1(D2)	4.35603E-1(D2)	6.85468E-1(D2)	2.91373E-1(D2)	4.37311E-1(D2)	6.89931E-1(D2)

表五十二 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率 (十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 20$, $r = 1$, $\alpha = 0^\circ$)

	$\beta = 45^\circ$				$\beta = 90^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1	1.00000E-2	5.00000E-2	1.00000E-1
ε_0	0.00000E+0	1.48942E-4	3.70577E-3	1.46283E-2	1.48966E-4	3.70759E-3	1.46316E-2
ε_b	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
ε_c	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
U_{tip}	0.00000E+0	8.33034E-5	2.07580E-3	8.23544E-3	8.33235E-5	2.07724E-3	8.23801E-3
V_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
W_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	1.39400E-2	1.26208E-1	1.76257E-1	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	2.49843E-2	1.81618E-1	2.26716E-1	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
K_1	1.48090E-2(B1)	2.10390E-2(B1)	6.97541E-2(B1)	1.28589E-1(B1)	2.22239E-2(B1)	7.75469E-2(C1)	1.33844E-1(C1)
K_2	4.17796E-2(C1)	4.44155E-2(C1)	8.88606E-2(C1)	1.64329E-1(C1)	4.38371E-2(C1)	8.21800E-2(B1)	1.60137E-1(B1)
K_3	5.63311E-2(D1)	5.87749E-2(D1)	1.00914E-1(D1)	1.75125E-1(D1)	5.94120E-2(D1)	1.08135E-1(D1)	1.90148E-1(D1)
K_4	9.27837E-2(B2)	1.00358E-1(B2)	2.10729E-1(B2)	3.84031E-1(B2)	1.00599E-1(B2)	2.13235E-1(B2)	3.89800E-1(B2)
K_5	1.69162E-1(D2)	1.74683E-1(D2)	2.66428E-1(D2)	4.27545E-1(D2)	1.74897E-1(D2)	2.69281E-1(D2)	4.34314E-1(D2)
K_6	2.59694E-1(B3)	2.63843E-1(C2)	3.22655E-1(C2)	4.59351E-1(C2)	2.64006E-1(C2)	3.21588E-1(C2)	4.54582E-1(C2)
K_7	2.61316E-1(C2)	2.67963E-1(B3)	4.11836E-1(B3)	6.71466E-1(B3)	2.67794E-1(B3)	4.12190E-1(B3)	6.73633E-1(B3)
K_8	2.82499E-1(D3)	2.91442E-1(D3)	4.38485E-1(D3)	6.92823E-1(D3)	2.91565E-1(D3)	4.40050E-1(D3)	6.96770E-1(D3)

表五十三 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率 (十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 20$, $r = 1$, $\alpha = 30^\circ$)

	$\beta = 0^\circ$				$\beta = 30^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2
ε_0	0.00000E+0	1.35234E-6	3.14265E-5	1.11271E-4	1.35340E-6	2.14842E-5	-1.93321E-4
ε_b	0.00000E+0	-1.75275E-4	-3.93587E-3	-1.23067E-2	-1.51659E-4	-3.35204E-3	-1.02901E-2
ε_c	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	2.21607E-5	5.63737E-4	1.95171E-3
U_{tip}	0.00000E+0	-6.22310E-6	-3.12800E-3	-2.25083E-2	-4.49377E-6	-2.42982E-3	-2.04420E-2
V_{tip}	0.00000E+0	-3.49768E-3	-7.43572E-2	-1.99564E-1	-3.02618E-3	-6.48962E-2	-1.79076E-1
W_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	2.21844E-4	8.80488E-3	6.07220E-2
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	-7.66452E-5	-9.50212E-2	-4.50481E-1
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	-5.42240E-4	-3.66327E-1	-1.74330E+0
K_1	1.48090E-2(B1)	1.48615E-2(B1)	1.61121E-2(B1)	1.96718E-2(B1)	1.48694E-2(B1)	1.60303E-2(B1)	1.94857E-2(B1)
K_2	4.17796E-2(C1)	4.17424E-2(C1)	3.16498E-2(C1)	2.68475E-2(C1)	4.17564E-2(C1)	3.28302E-2(C1)	2.83831E-2(C1)
K_3	5.63311E-2(D1)	5.64218E-2(D1)	6.93781E-2(D1)	7.97805E-2(D1)	5.64056E-2(D1)	6.79486E-2(D1)	8.07173E-2(D1)
K_4	9.27837E-2(B2)	9.28535E-2(B2)	9.44736E-2(B2)	9.93842E-2(B2)	9.28551E-2(B2)	9.46624E-2(B2)	1.00819E-1(C1)
K_5	1.69162E-1(D2)	1.69266E-1(D2)	1.88013E-1(D2)	1.95446E-1(D2)	1.69253E-1(D2)	1.85430E-1(D2)	1.95555E-1(D2)
K_6	2.59694E-1(B3)	2.59767E-1(B3)	2.57578E-1(C2)	2.64741E-1(B3)	2.59767E-1(B3)	2.53766E-1(B3)	2.64146E-1(B3)
K_7	2.61316E-1(C2)	2.61305E-1(C2)	2.61186E-1(B3)	2.87858E-1(C2)	2.61314E-1(C2)	2.65241E-1(C2)	2.96008E-1(C2)
K_8	2.82499E-1(D3)	2.82642E-1(D3)	3.00878E-1(D3)	3.51452E-1(D3)	2.82628E-1(D3)	2.98592E-1(D3)	3.57082E-1(D3)

表五十四 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率 (十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 20$, $r = 1$, $\alpha = 30^\circ$)

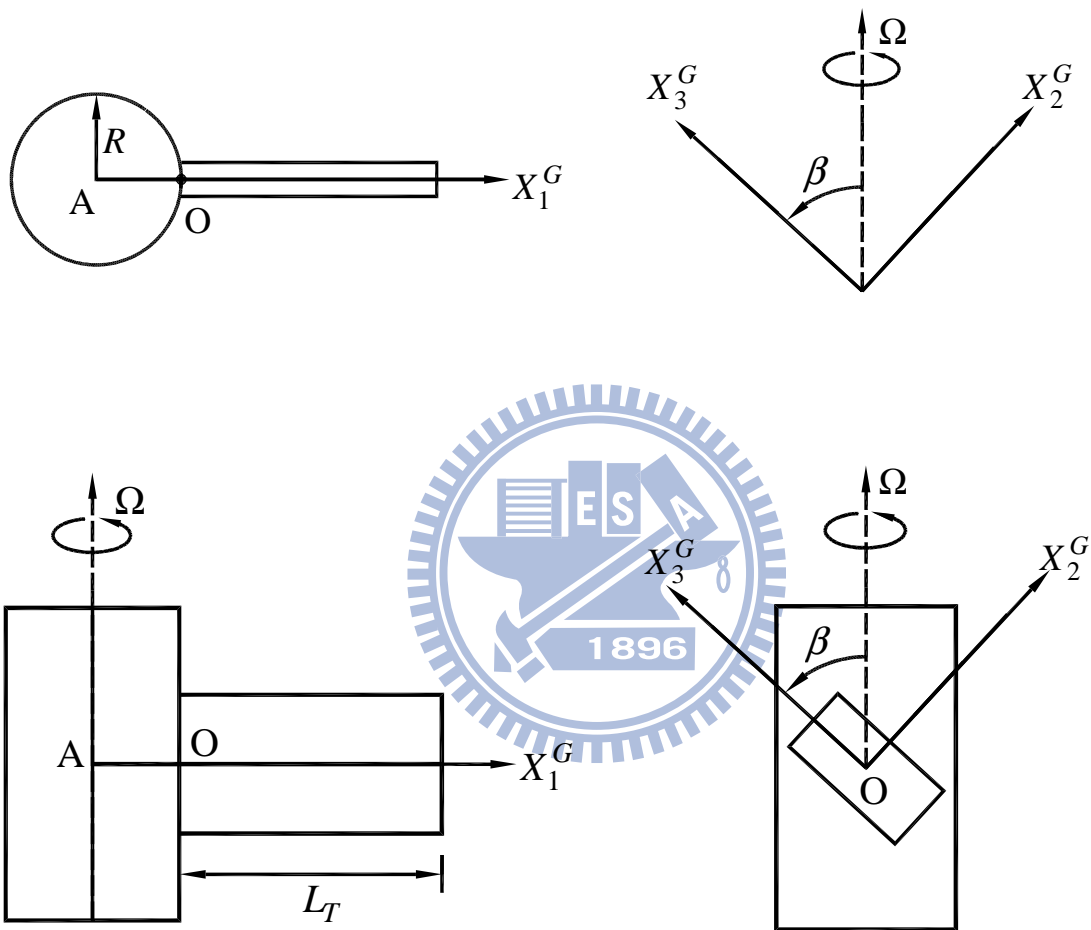
	$\beta = 45^\circ$				$\beta = 90^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2
ε_0	0.00000E+0	1.35447E-6	1.79450E-5	-3.58430E-4	1.35667E-6	3.35497E-5	1.30114E-4
ε_b	0.00000E+0	-1.23721E-4	-2.68622E-3	-7.91955E-3	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
ε_c	0.00000E+0	3.13125E-5	7.89048E-4	2.78269E-3	4.42051E-5	1.08912E-3	4.17021E-3
U_{tip}	0.00000E+0	-2.77104E-6	-1.68836E-3	-1.75580E-2	6.54692E-7	-4.76378E-5	-8.59565E-4
V_{tip}	0.00000E+0	-2.46850E-3	-5.34672E-2	-1.54522E-1	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
W_{tip}	0.00000E+0	3.13324E-4	1.10422E-2	7.99162E-2	4.41953E-4	1.08135E-2	4.05185E-2
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	-8.80087E-5	-1.14318E-1	-6.30666E-1	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	-6.24344E-4	-4.39965E-1	-2.35848E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
K_1	1.48090E-2(B1)	1.48773E-2(B1)	1.59586E-2(B1)	1.93135E-2(B1)	1.48932E-2(B1)	1.58039E-2(B1)	1.48090E-2(B1)
K_2	4.17796E-2(C1)	4.17703E-2(C1)	3.43608E-2(C1)	2.87459E-2(C1)	4.17982E-2(C1)	4.22446E-2(C1)	3.69445E-2(D1)
K_3	5.63311E-2(D1)	5.63895E-2(D1)	6.58578E-2(D1)	8.11750E-2(D1)	5.63573E-2(D1)	5.50966E-2(D1)	4.36368E-2(C1)
K_4	9.27837E-2(B2)	9.28566E-2(B2)	9.48370E-2(B2)	1.02892E-1(B2)	9.28598E-2(B2)	9.50493E-2(B2)	1.01980E-1(B2)
K_5	1.69162E-1(D2)	1.69239E-1(D2)	1.81760E-1(D2)	1.93489E-1(D2)	1.69213E-1(D2)	1.68492E-1(D2)	1.45392E-1(D2)
K_6	2.59694E-1(B3)	2.59767E-1(B3)	2.52484E-1(B3)	2.64267E-1(B3)	2.59768E-1(B3)	2.60247E-1(B3)	2.53033E-1(B3)
K_7	2.61316E-1(C2)	2.61323E-1(C2)	2.66900E-1(C2)	3.02492E-1(C2)	2.61341E-1(C2)	2.61933E-1(C2)	2.63746E-1(C2)
K_8	2.82499E-1(D3)	2.82614E-1(D3)	2.95466E-1(D3)	3.60884E-1(D3)	2.82585E-1(D3)	2.84808E-1(D3)	2.86639E-1(D3)

表五十五 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率 (十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 20$, $r = 1$, $\alpha = 45^\circ$)

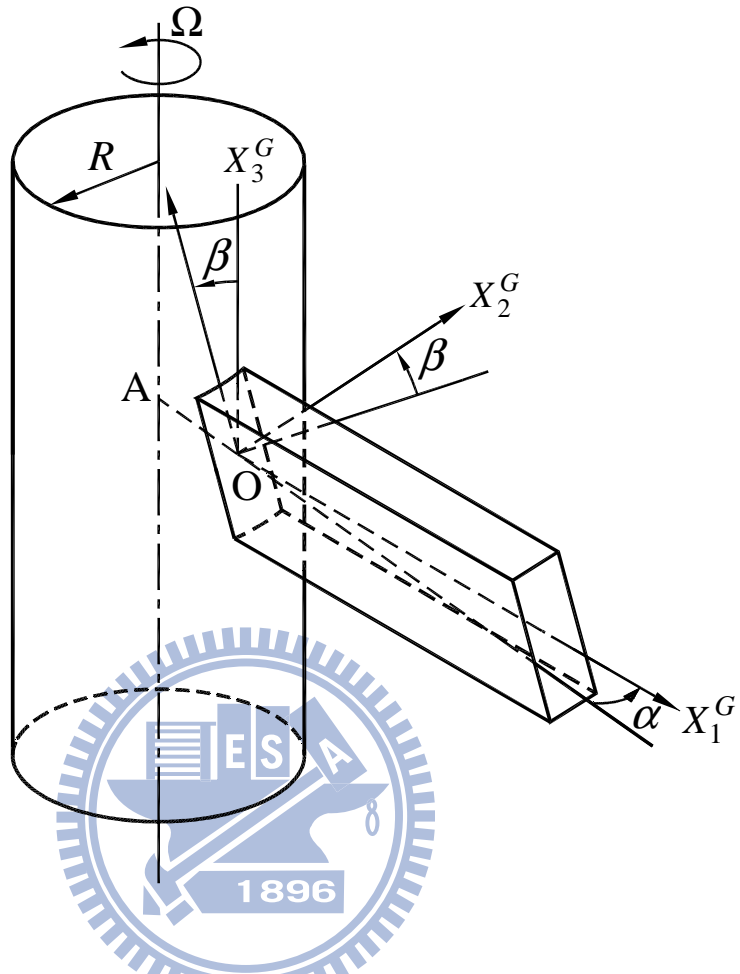
	$\beta = 0^\circ$				$\beta = 30^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2
ε_0	0.00000E+0	1.19003E-6	2.48147E-5	6.74592E-5	1.19207E-6	-1.08329E-5	-5.13613E-4
ε_b	0.00000E+0	-2.48096E-4	-5.65930E-3	-1.80158E-2	-2.14669E-4	-4.82954E-3	-1.53191E-2
ε_c	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	3.13431E-5	7.88746E-4	2.62571E-3
U_{tip}	0.00000E+0	-1.33242E-5	-6.55099E-3	-4.91136E-2	-9.85896E-6	-5.35234E-3	-4.60192E-2
V_{tip}	0.00000E+0	-4.95208E-3	-1.07288E-1	-2.92086E-1	-4.28479E-3	-9.53117E-2	-2.61308E-1
W_{tip}	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	3.14229E-4	1.66234E-2	1.04156E-1
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	-2.84575E-4	-1.76605E-1	-5.54107E-1
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	-1.32663E-3	-6.76169E-1	-2.19708E+0
K_1	1.48090E-2(B1)	1.48532E-2(B1)	1.59698E-2(B1)	1.94475E-2(B1)	1.48606E-2(B1)	1.57747E-2(B1)	1.94052E-2(B1)
K_2	4.17796E-2(C1)	4.16722E-2(C1)	2.76706E-2(C1)	2.47127E-2(C1)	4.17028E-2(C1)	2.88750E-2(C1)	2.63691E-2(C1)
K_3	5.63311E-2(D1)	5.64936E-2(D1)	7.39329E-2(D1)	8.29481E-2(D1)	5.64581E-2(D1)	7.30259E-2(D1)	8.44362E-2(D1)
K_4	9.27837E-2(B2)	9.28460E-2(B2)	9.42458E-2(B2)	9.85134E-2(B2)	9.28478E-2(2)	9.46285E-2(B2)	1.00199E-1(B2)
K_5	1.69162E-1(D2)	1.69315E-1(D2)	1.95627E-1(D2)	1.81860E-1(D2)	1.69287E-1(D2)	1.94429E-1(D2)	1.83770E-1(D2)
K_6	2.59694E-1(B3)	2.59759E-1(B3)	2.60614E-1(B3)	2.61434E-1(B3)	2.59758E-1(B3)	2.53583E-1(B3)	2.65484E-1(B3)
K_7	2.61316E-1(C2)	2.61265E-1(C2)	2.63658E-1(C2)	3.04493E-1(C2)	2.61284E-1(C2)	2.70267E-1(C2)	3.10184E-1(C2)
K_8	2.82499E-1(D3)	2.82694E-1(D3)	3.11852E-1(D3)	3.94052E-1(D3)	2.82665E-1(D3)	3.09885E-1(D3)	4.01545E-1(D3)

表五十六 旋轉傾斜梁不同設定角不同轉速的振動頻率 (十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 20$, $r = 1$, $\alpha = 45^\circ$)

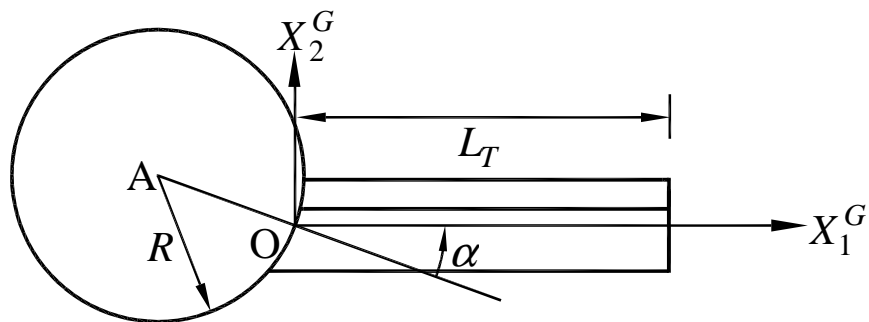
	$\beta = 45^\circ$				$\beta = 90^\circ$		
k	0.00000E+0	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2	1.00000E-3	5.00000E-3	1.00000E-2
ε_0	0.00000E+0	1.19420E-6	-2.79383E-5	-8.33954E-4	1.19871E-6	2.92312E-5	1.08569E-4
ε_b	0.00000E+0	-1.75124E-4	-3.87096E-3	-1.20289E-2	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
ε_c	0.00000E+0	4.42872E-5	1.10905E-3	3.77792E-3	6.25225E-5	1.54442E-3	5.95473E-3
U_{tip}	0.00000E+0	-6.40596E-6	-3.96518E-3	-4.14863E-2	4.63514E-7	-1.17362E-4	-1.85093E-3
V_{tip}	0.00000E+0	-3.49538E-3	-8.04627E-2	-2.25467E-1	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
W_{tip}	0.00000E+0	4.43594E-4	2.06315E-2	1.39776E-1	6.25106E-4	1.53455E-2	5.79951E-2
$\Theta_1(1)$	0.00000E+0	-3.27680E-4	-2.25667E-1	-8.00126E-1	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
$\Theta'_1(0.1)$	0.00000E+0	-1.52858E-3	-8.57245E-1	-3.04865E+0	0.00000E+0	0.00000E+0	0.00000E+0
K_1	1.48090E-2(B1)	1.48681E-2(B1)	1.55564E-2(B1)	1.93711E-2(B1)	1.48830E-2(B1)	1.43215E-2(B1)	1.48090E-2(B1)
K_2	4.17796E-2(C1)	4.17336E-2(C1)	3.02060E-2(C1)	2.67276E-2(C1)	4.17952E-2(C1)	4.21735E-2(C1)	2.27026E-2(C1)
K_3	5.63311E-2(D1)	5.64226E-2(D1)	7.14143E-2(D1)	8.50706E-2(D1)	5.63514E-2(D1)	5.30062E-2(D1)	4.33921E-2(D1)
K_4	9.27837E-2(B2)	9.28496E-2(B2)	9.50300E-2(B2)	1.02844E-1(B2)	9.28532E-2(B2)	9.52441E-2(B2)	9.46765E-2(B2)
K_5	1.69162E-1(D2)	1.69259E-1(D2)	1.91941E-1(D2)	1.80351E-1(D2)	1.69204E-1(D2)	1.66257E-1(D2)	1.09384E-1(D2)
K_6	2.59694E-1(B3)	2.59758E-1(B3)	2.49313E-1(B3)	2.71014E-1(B3)	2.59758E-1(B3)	2.58774E-1(B3)	2.39497E-1(B3)
K_7	2.61316E-1(C2)	2.61302E-1(C2)	2.73036E-1(C2)	3.14249E-1(C2)	2.61338E-1(C2)	2.61864E-1(C2)	2.63443E-1(C2)
K_8	2.82499E-1(D3)	2.82635E-1(D3)	3.06267E-1(D3)	4.10144E-1(D3)	2.82577E-1(D3)	2.84658E-1(D3)	2.70942E-1(D3)



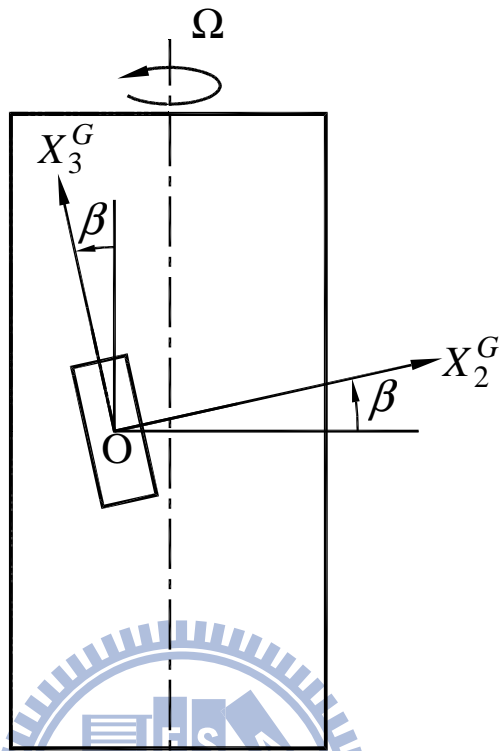
圖一 無傾斜角的旋轉梁結構



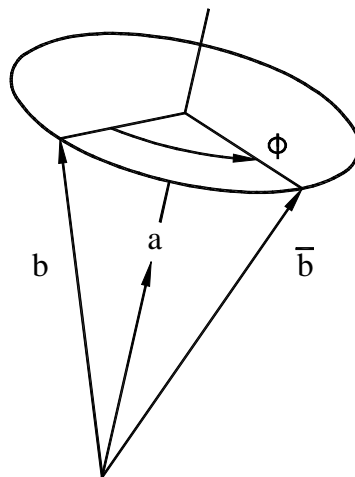
圖二 具傾斜角的旋轉梁結構



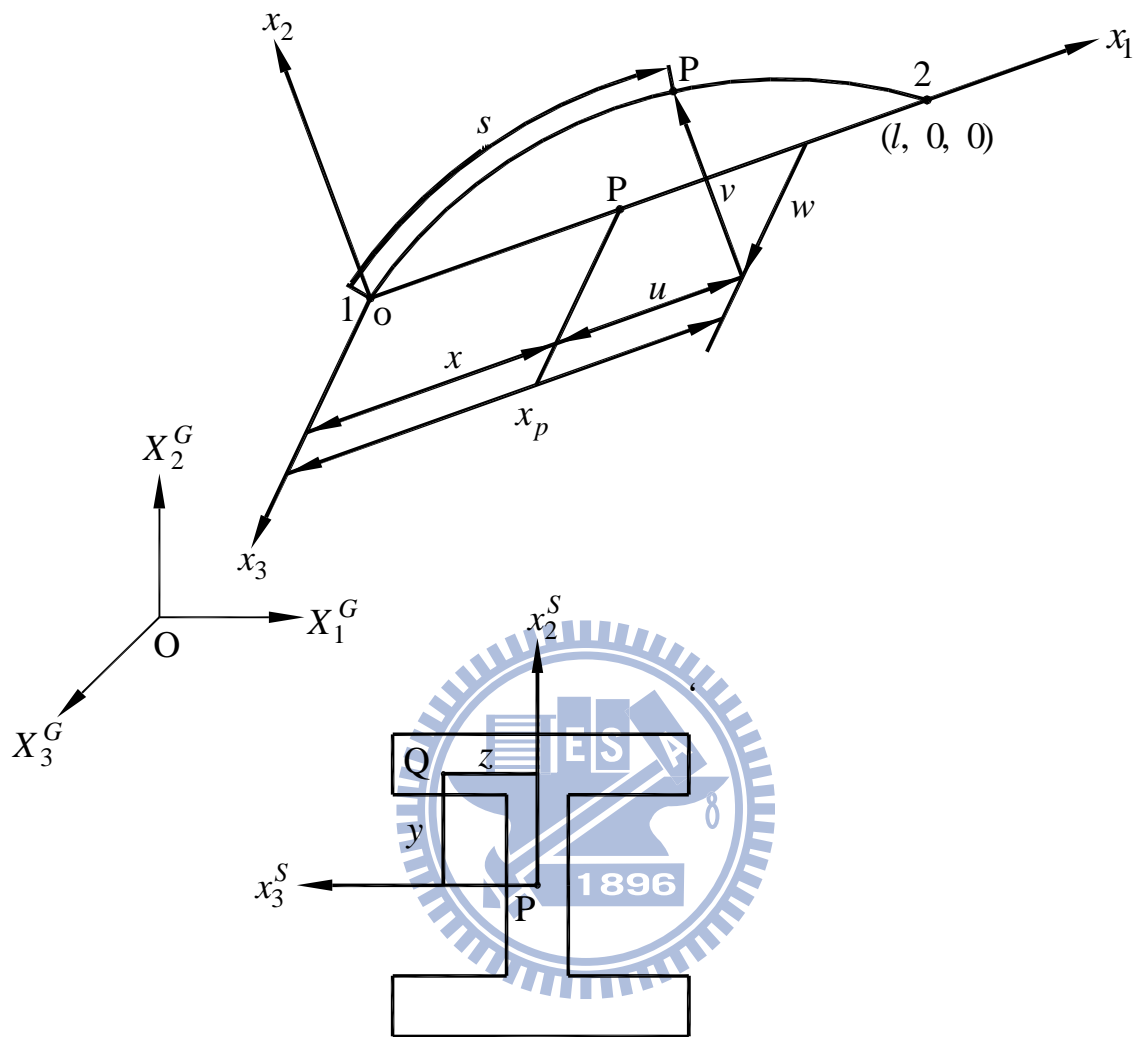
圖三 旋轉傾斜梁的上視圖



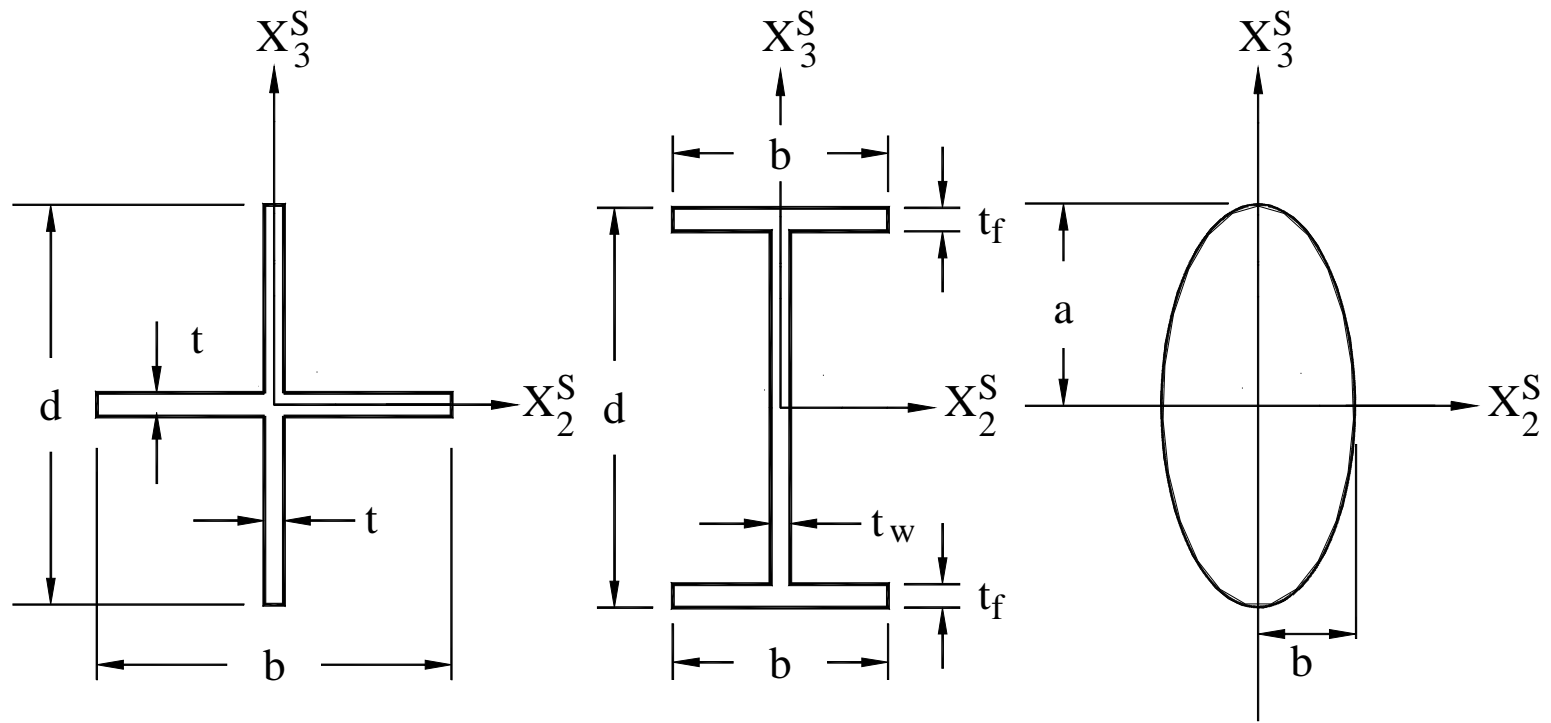
圖四 旋轉傾斜梁的側視圖



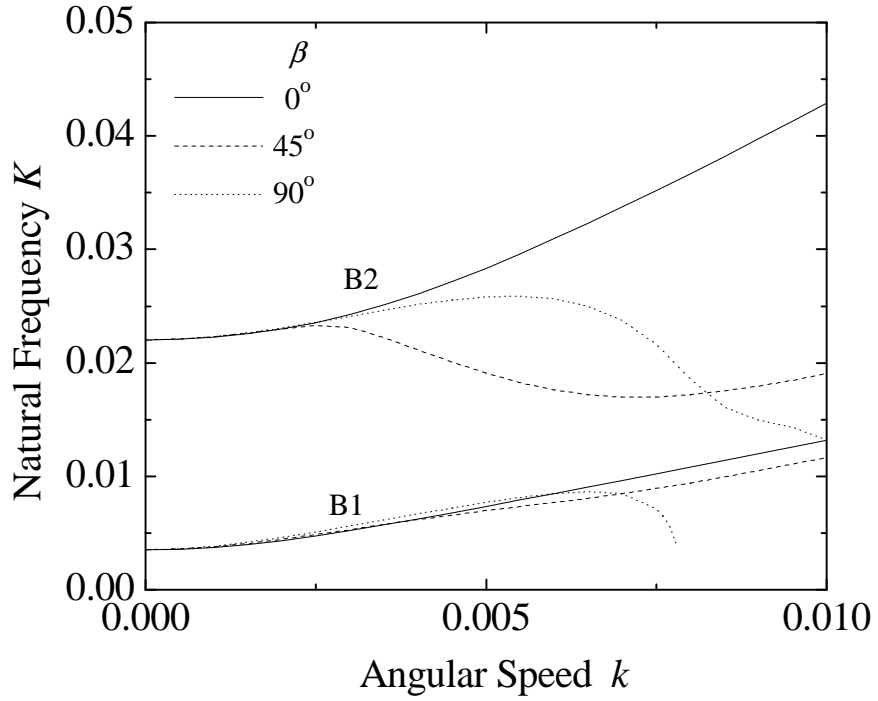
圖五 旋轉向量圖



圖六 梁之位移以及座標系統關係圖

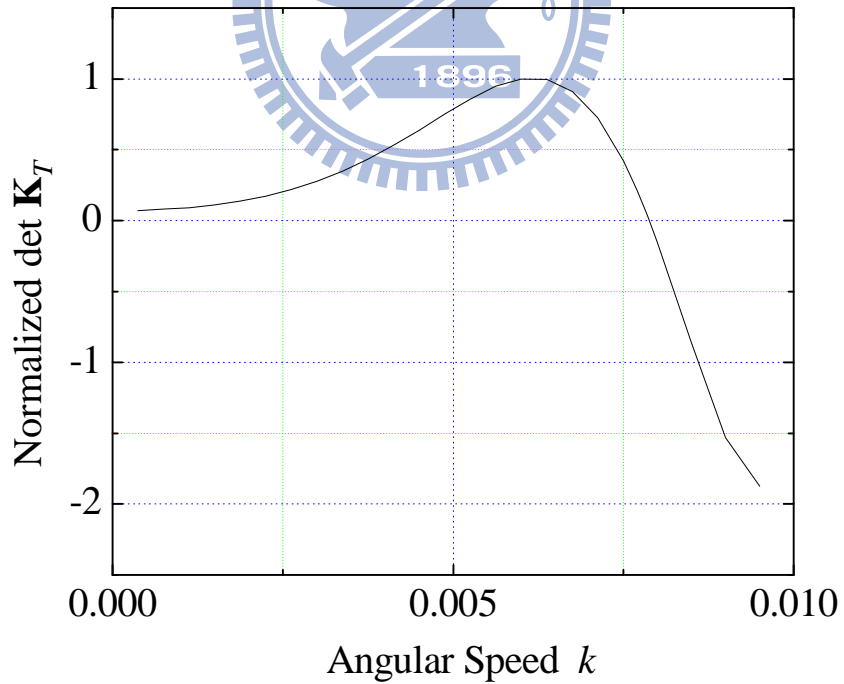


圖七 梁的斷面圖



圖八 轉速 - (B1、B2)自然頻率圖

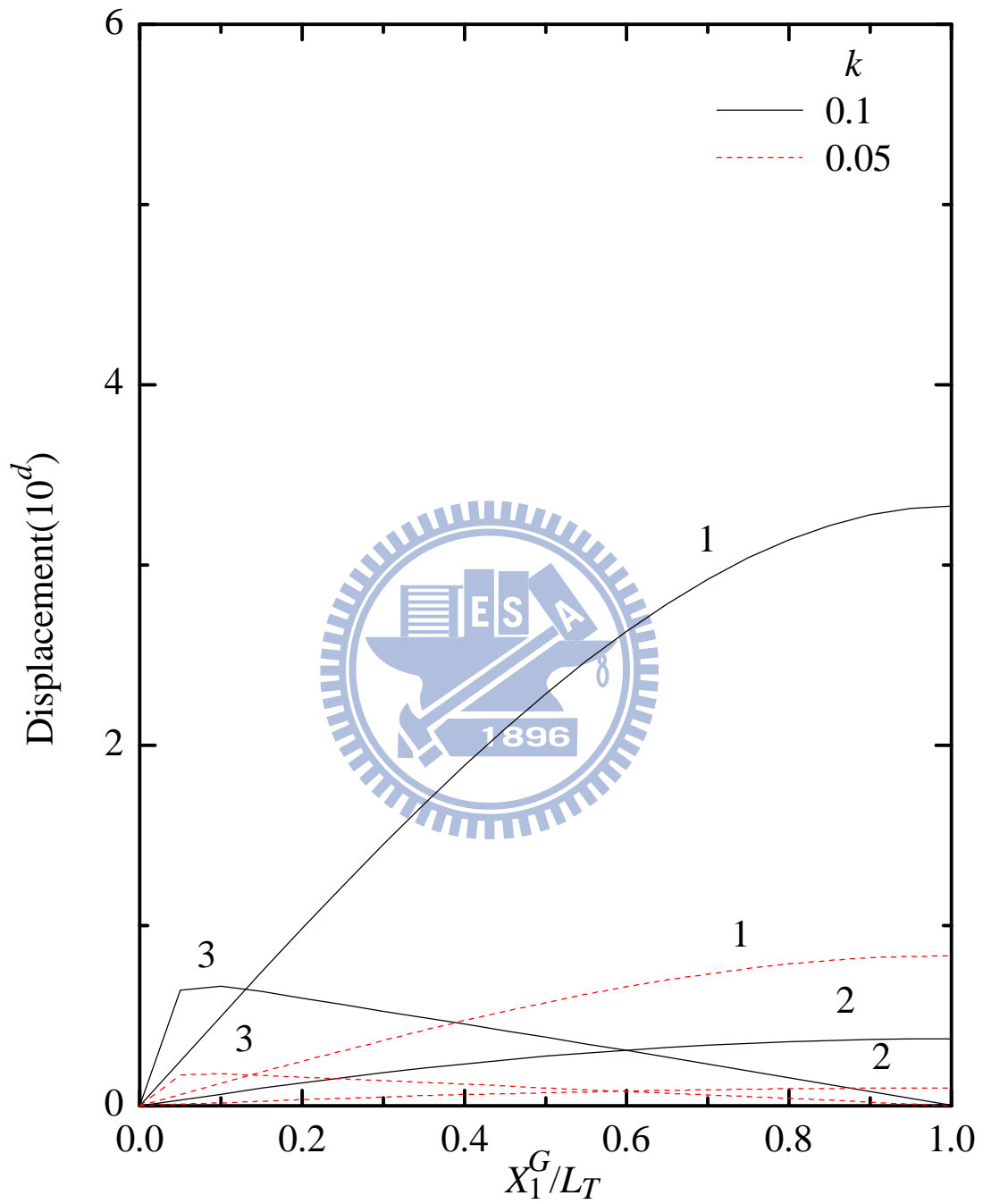
(橢圓斷面 $a/b = 10$, $L_T/a = 50$, $r = 1$, $\alpha = 45^\circ$, $N = 50$)



圖九 轉速 - $\det \mathbf{K}_T$ 圖

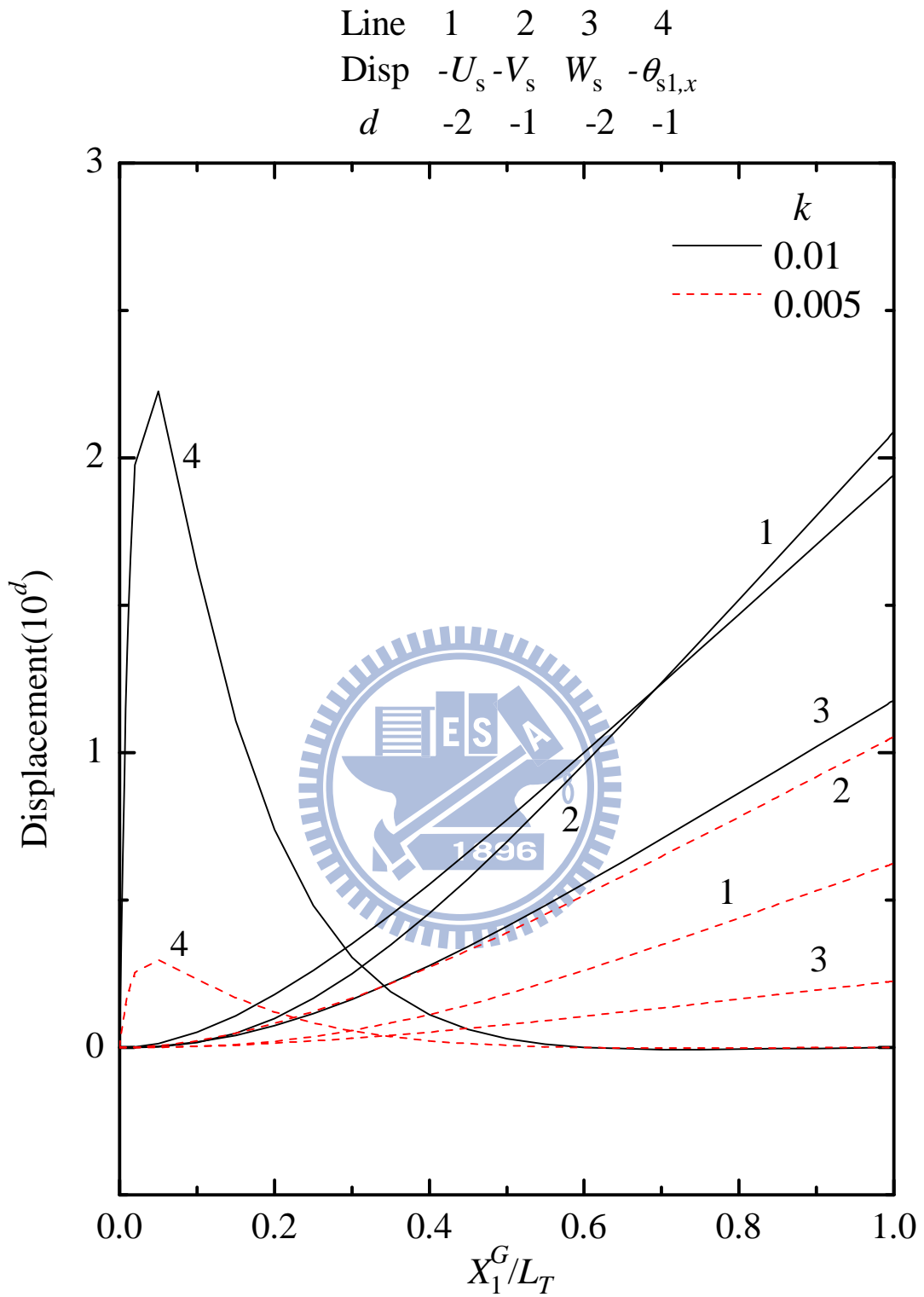
(橢圓斷面 $a/b = 10$, $L_T/a = 50$, $r = 1$, $\alpha = 45^\circ$ 、 $\beta = 90^\circ$, $N = 50$)

Line	1	2	3
Disp	U_s	θ_{s1}	$\theta_{s1,x}$
d	-3	-1	-1



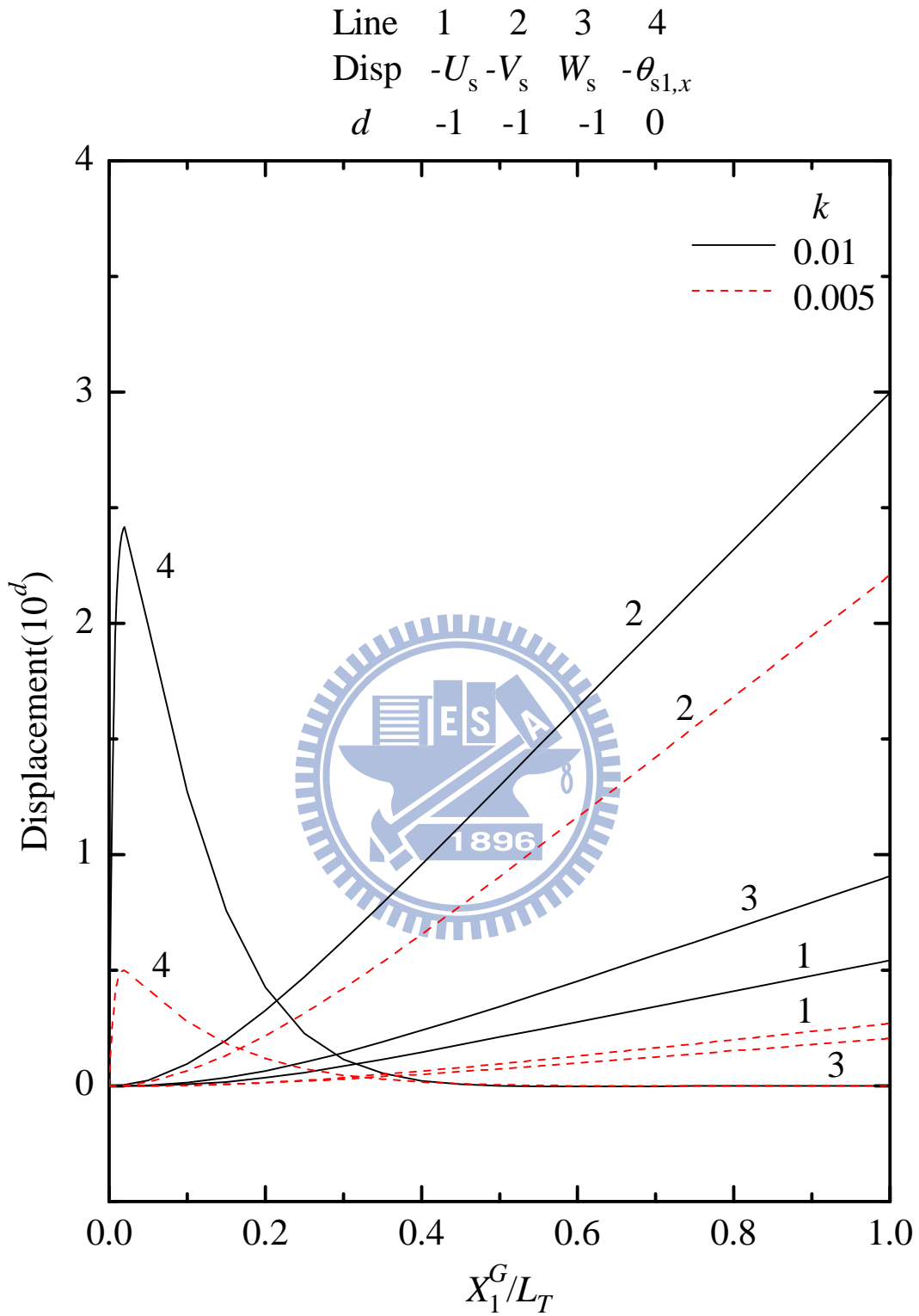
圖十 位移分佈圖

(橢圓斷面 $a/b=5$, $L_T/a=50$, $r=0$, $\beta=45^\circ$, $\alpha=0^\circ$, $N=20$)



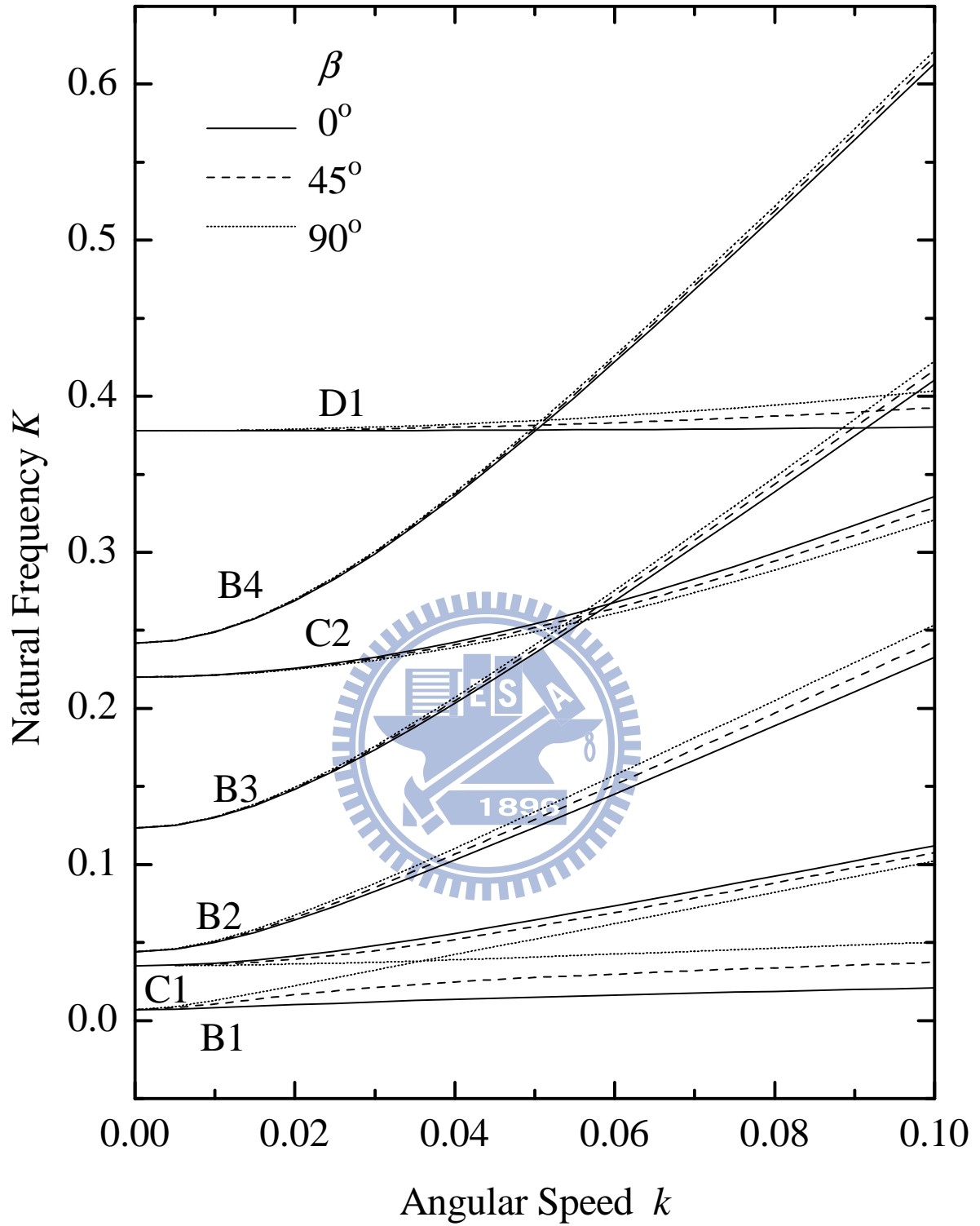
圖十一 位移分佈圖

(橢圓斷面 $a/b=10$, $L_T/a=20$, $r=1$, $\beta=45^\circ$, $\alpha=30^\circ$, $N=35^*$)



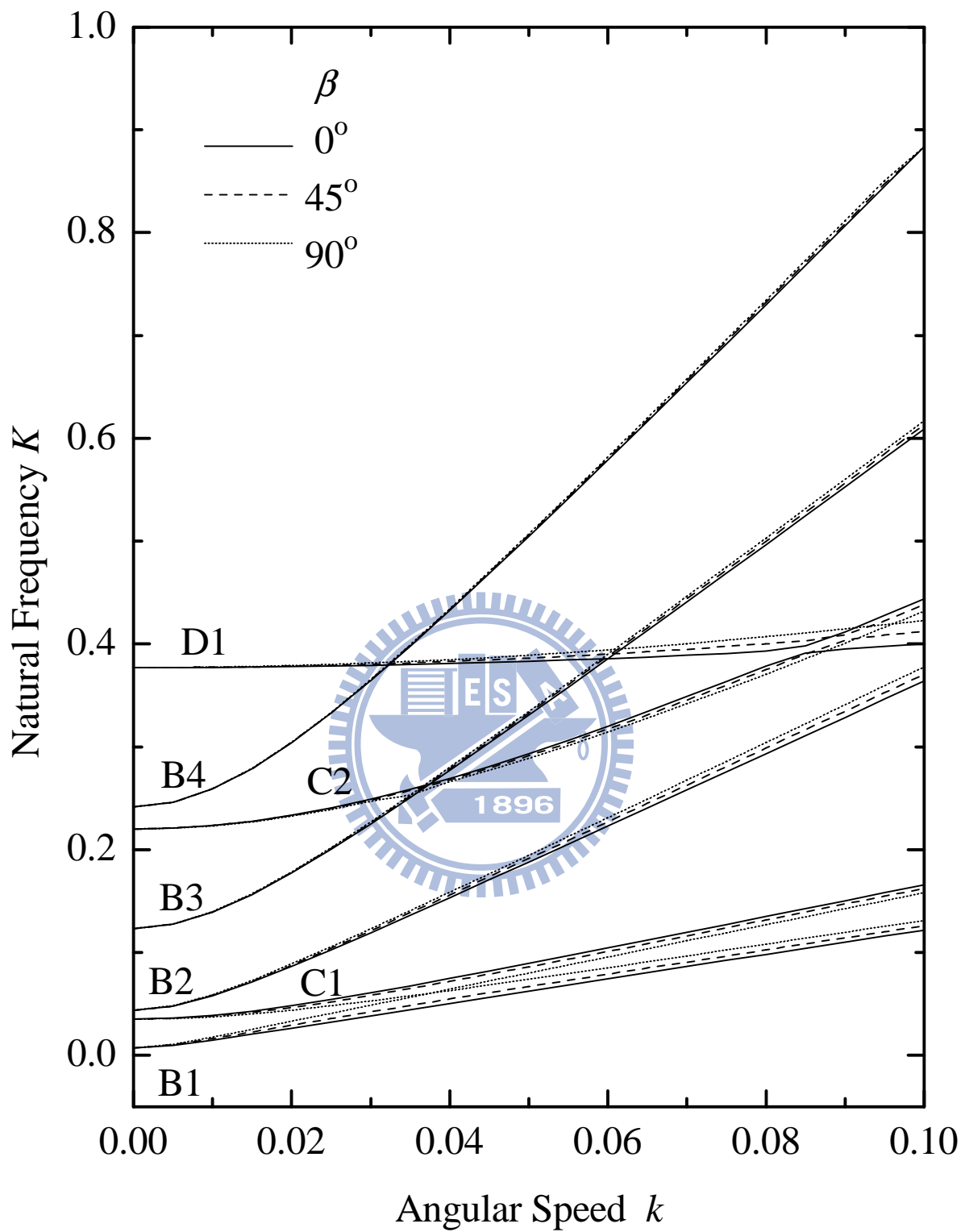
圖十二 位移分佈圖

(橢圓斷面 $a/b=10$, $L_T/a=50$, $r=1$, $\beta=45^\circ$, $\alpha=30^\circ$, $N=35^*$)



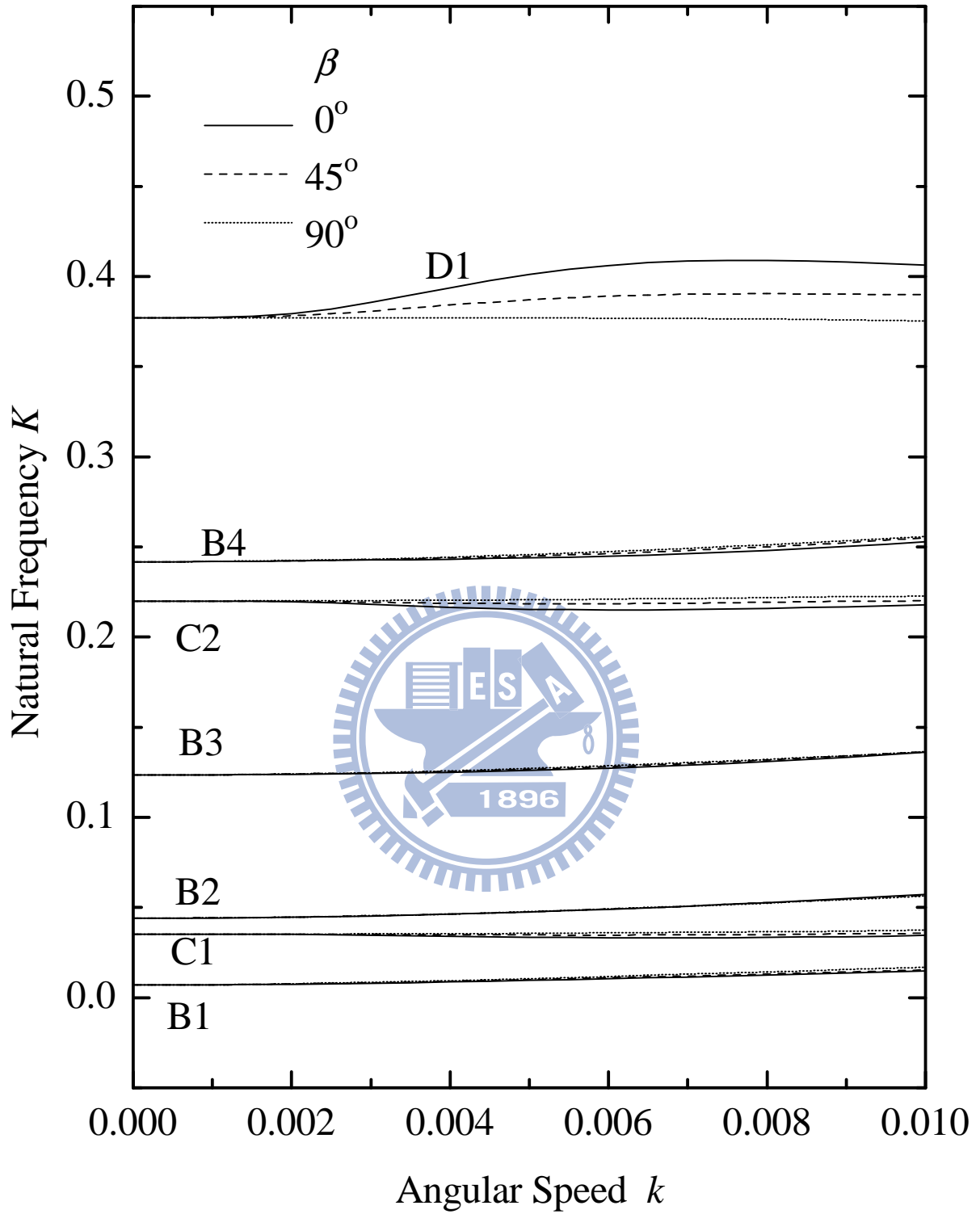
圖十三 轉速 - 自然頻率圖

(橢圓斷面 $a/b = 5$, $L_T/a = 50$, $r = 0$, $\alpha = 0^\circ$, $N = 20$)



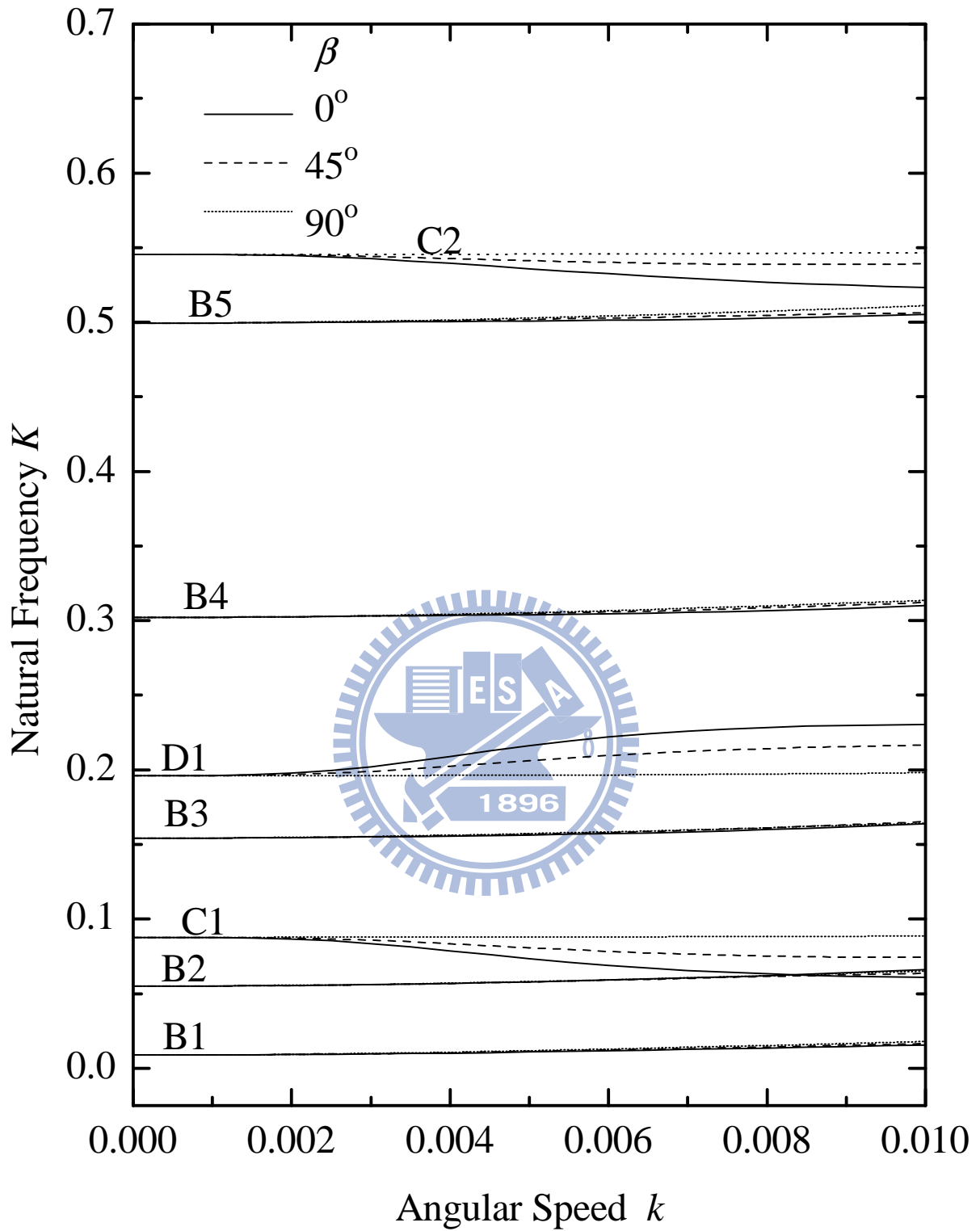
圖十四 轉速 - 自然頻率圖

(橢圓斷面 $a/b = 5$, $L_T/a = 50$, $r = 1$, $\alpha = 0^\circ$, $N = 35^*$)



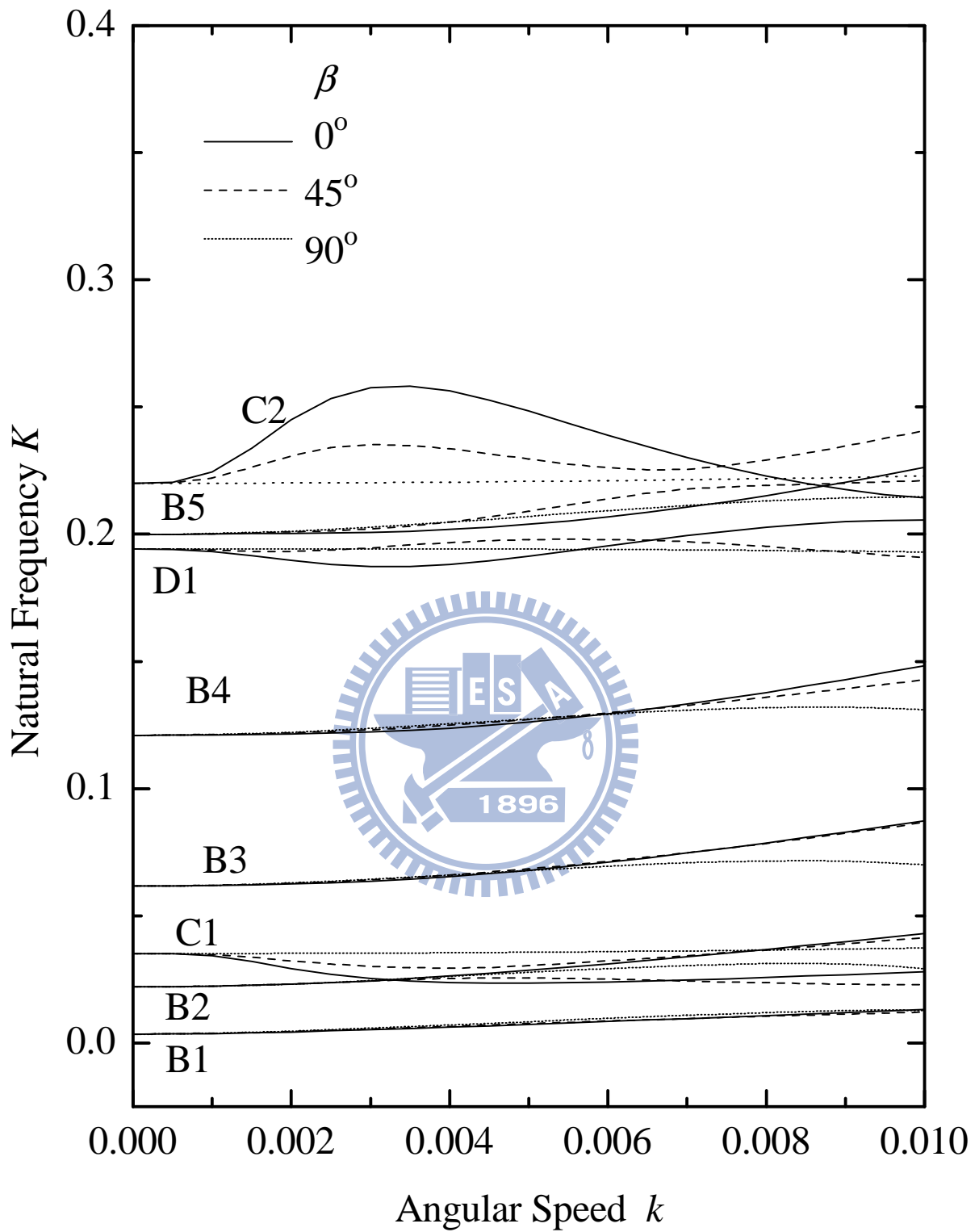
圖十五 轉速 - 自然頻率圖

(橢圓斷面 $a/b=5$, $L_T/a=50$, $r=1$, $\alpha=30^\circ$, $N=35^*$)



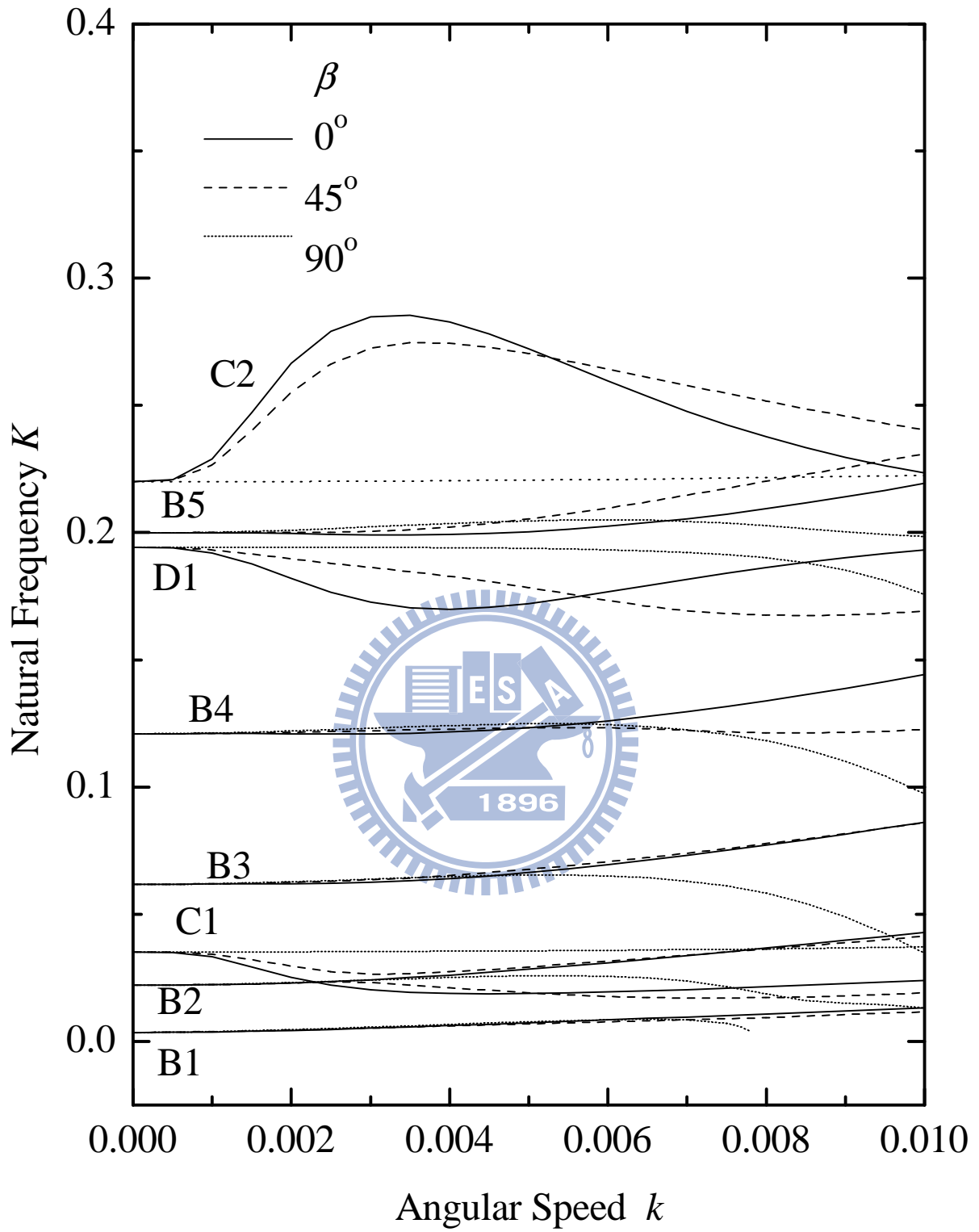
圖十六 轉速 - 自然頻率圖

(橢圓斷面 $a/b = 10$, $L_T/a = 20$, $r = 1$, $\alpha = 30^\circ$, $N = 35^*$)



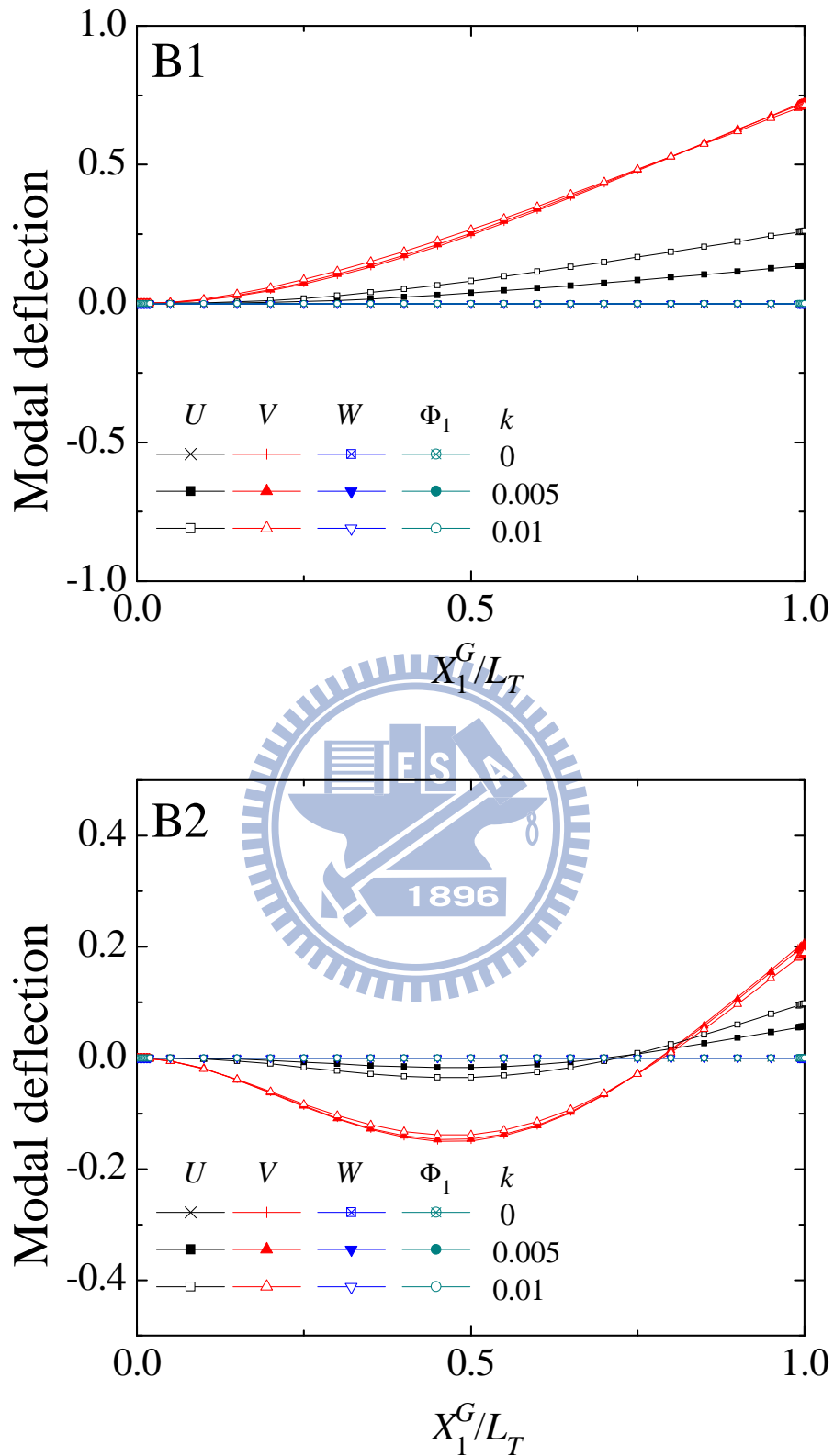
圖十七 轉速 - 自然頻率圖

(橢圓斷面 $a/b = 10$, $L_T/a = 50$, $r = 1$, $\alpha = 30^\circ$, $N = 35^*$)

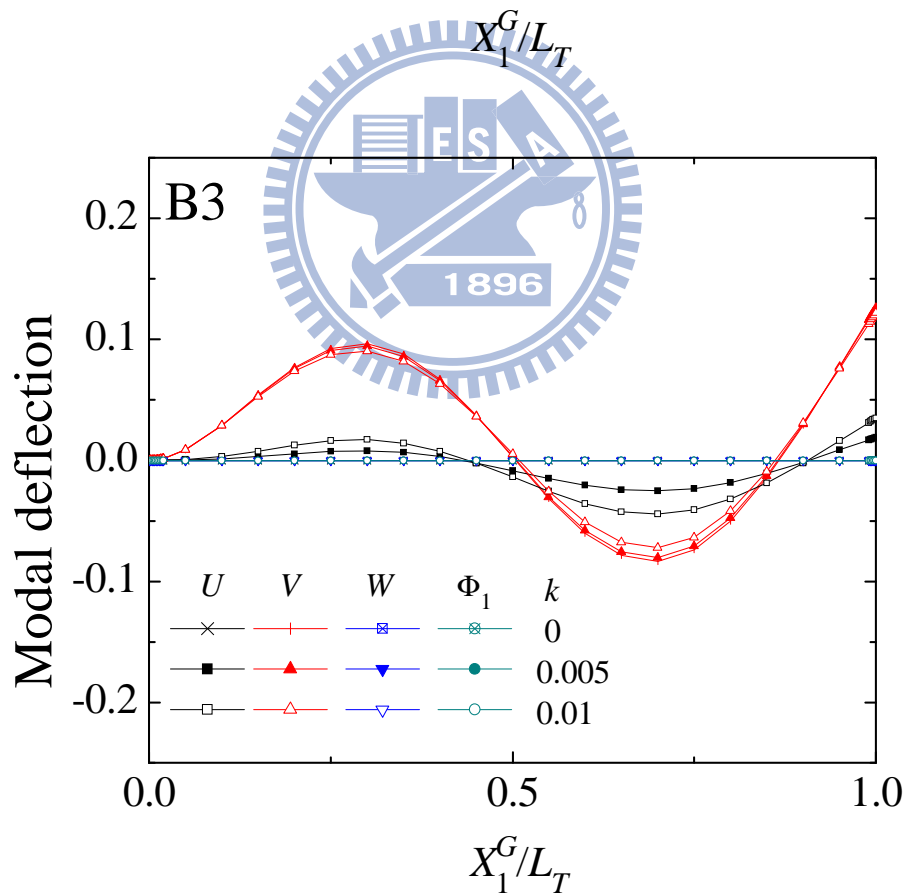
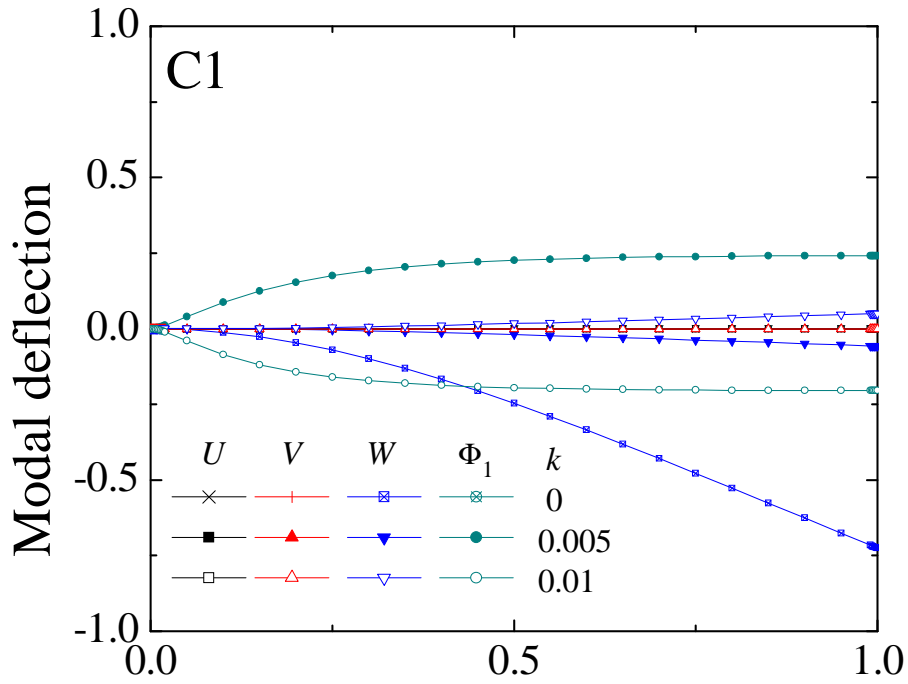


圖十八 轉速 - 自然頻率圖

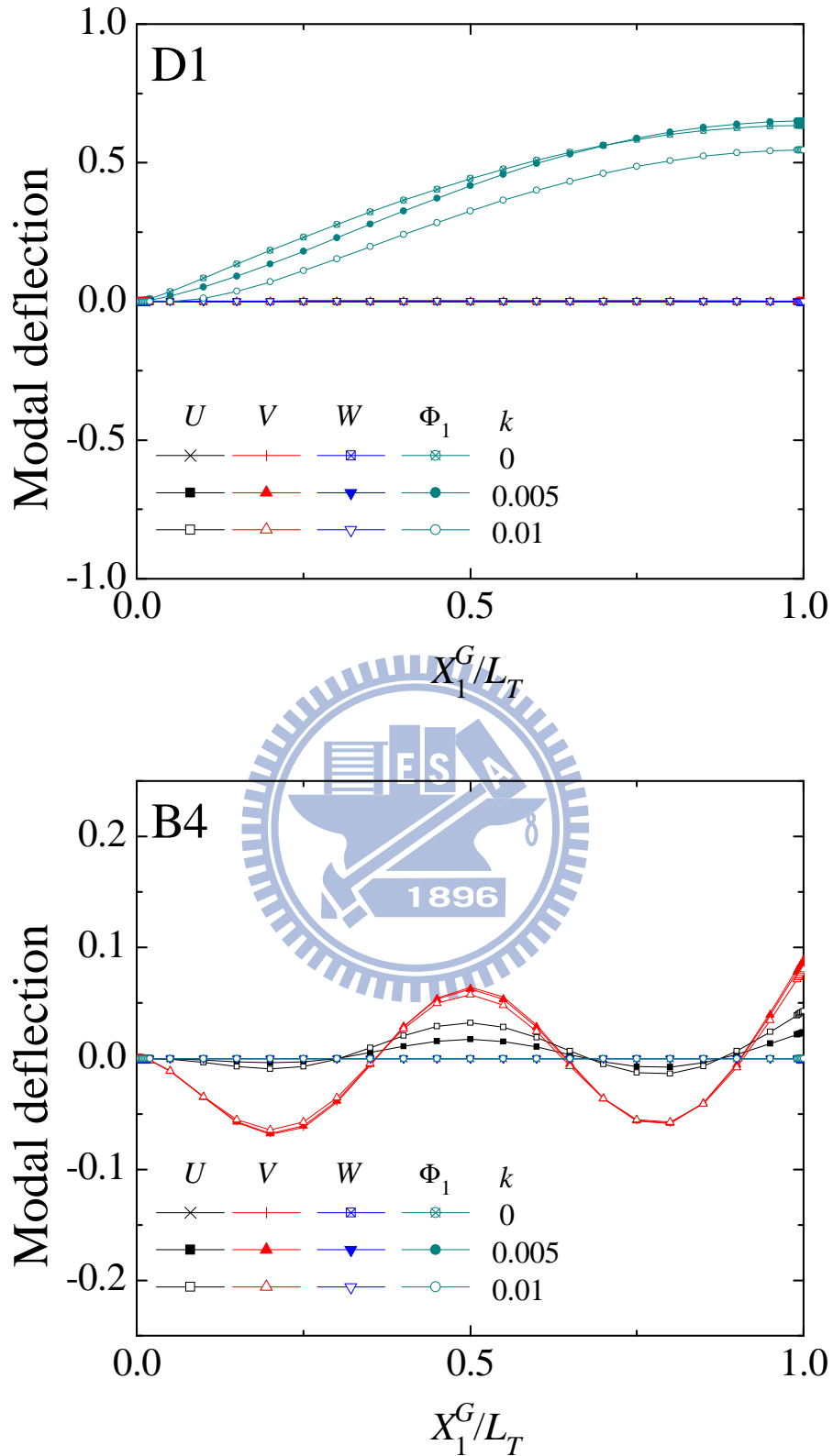
(橢圓斷面 $a/b = 10$, $L_T/a = 50$, $r = 1$, $\alpha = 45^\circ$, $N = 50$)



圖十九 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第一、第二振動模態
 (橢圓斷面 $a/b=10$, $r=1$, $L_T/a=20$, $\alpha=30^\circ$, $\beta=0^\circ$, $N=35^*$)

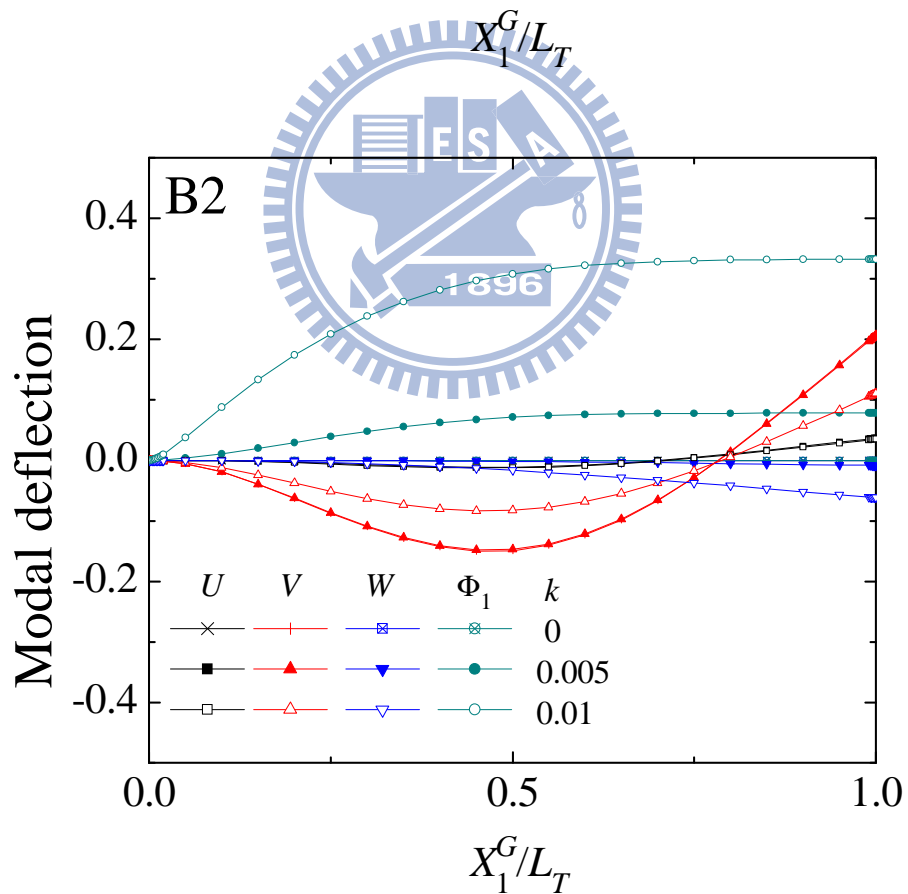
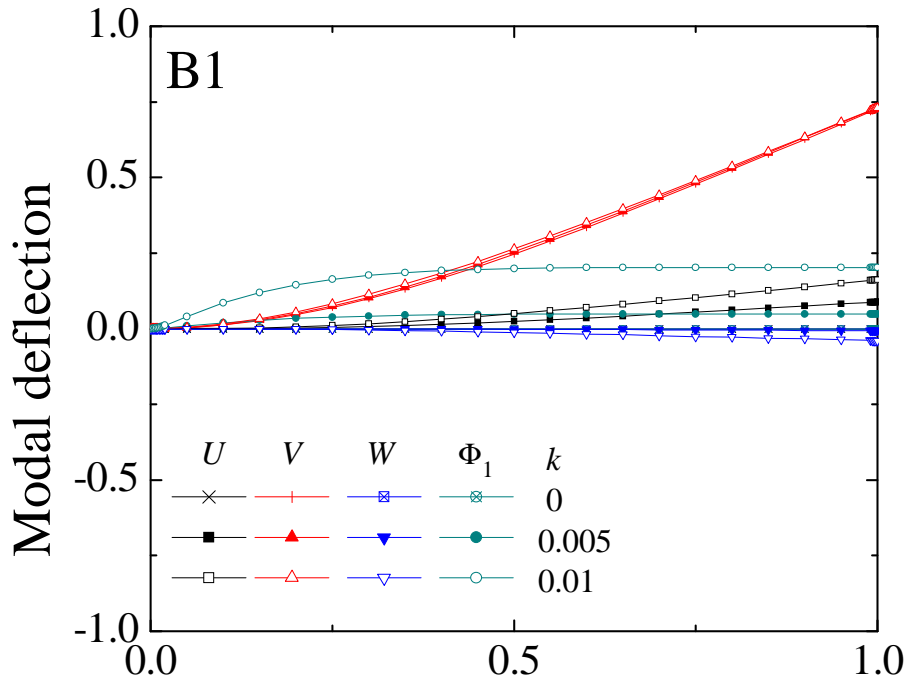


圖二十 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第三、第四振動模態
 (橢圓斷面 $a/b=10$, $r=1$, $L_T/a=20$, $\alpha=30^\circ$, $\beta=0^\circ$, $N=35^*$)



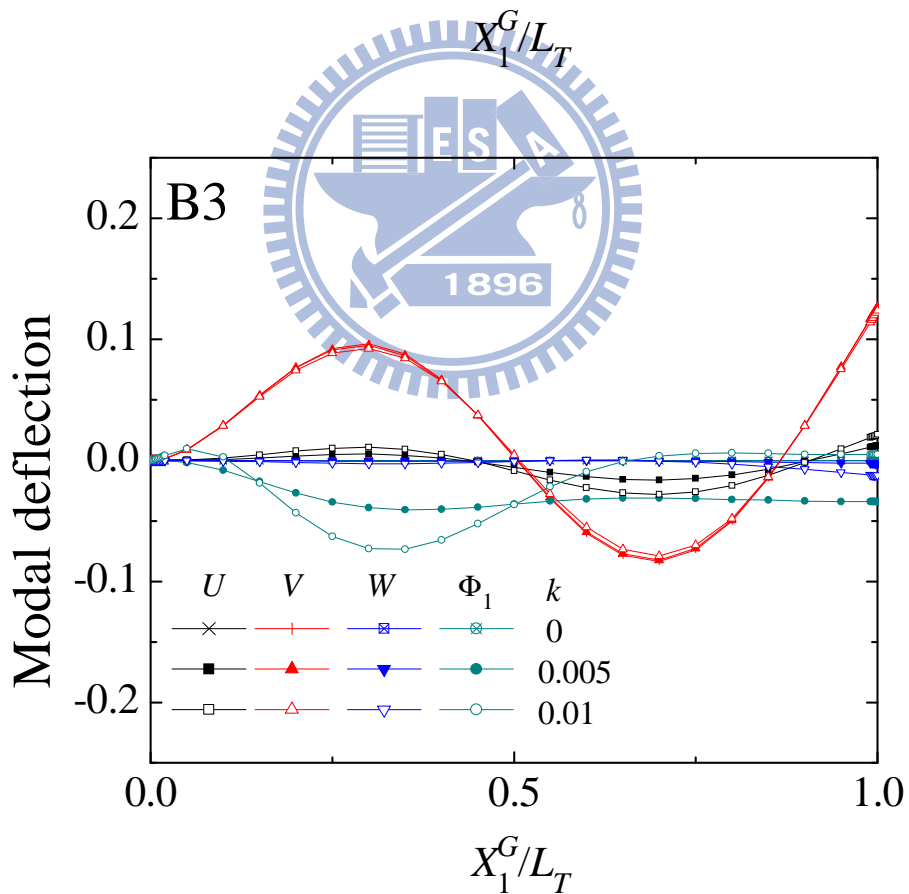
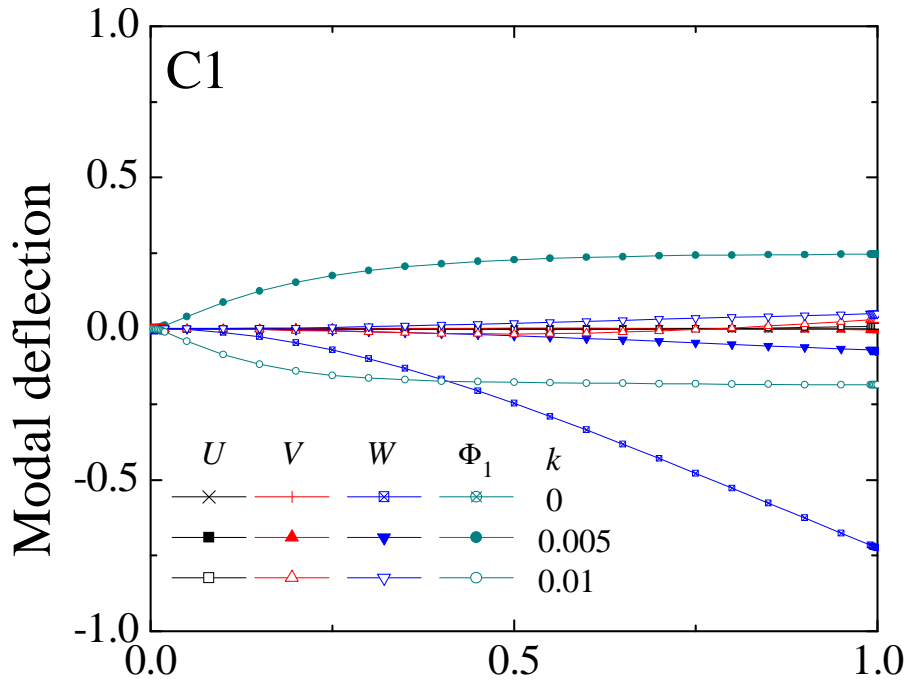
圖二十一 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第五、第六振動模態

(橢圓斷面 $a/b=10$, $r=1$, $L_T/a=20$, $\alpha=30^\circ$, $\beta=0^\circ$, $N=35^*$)



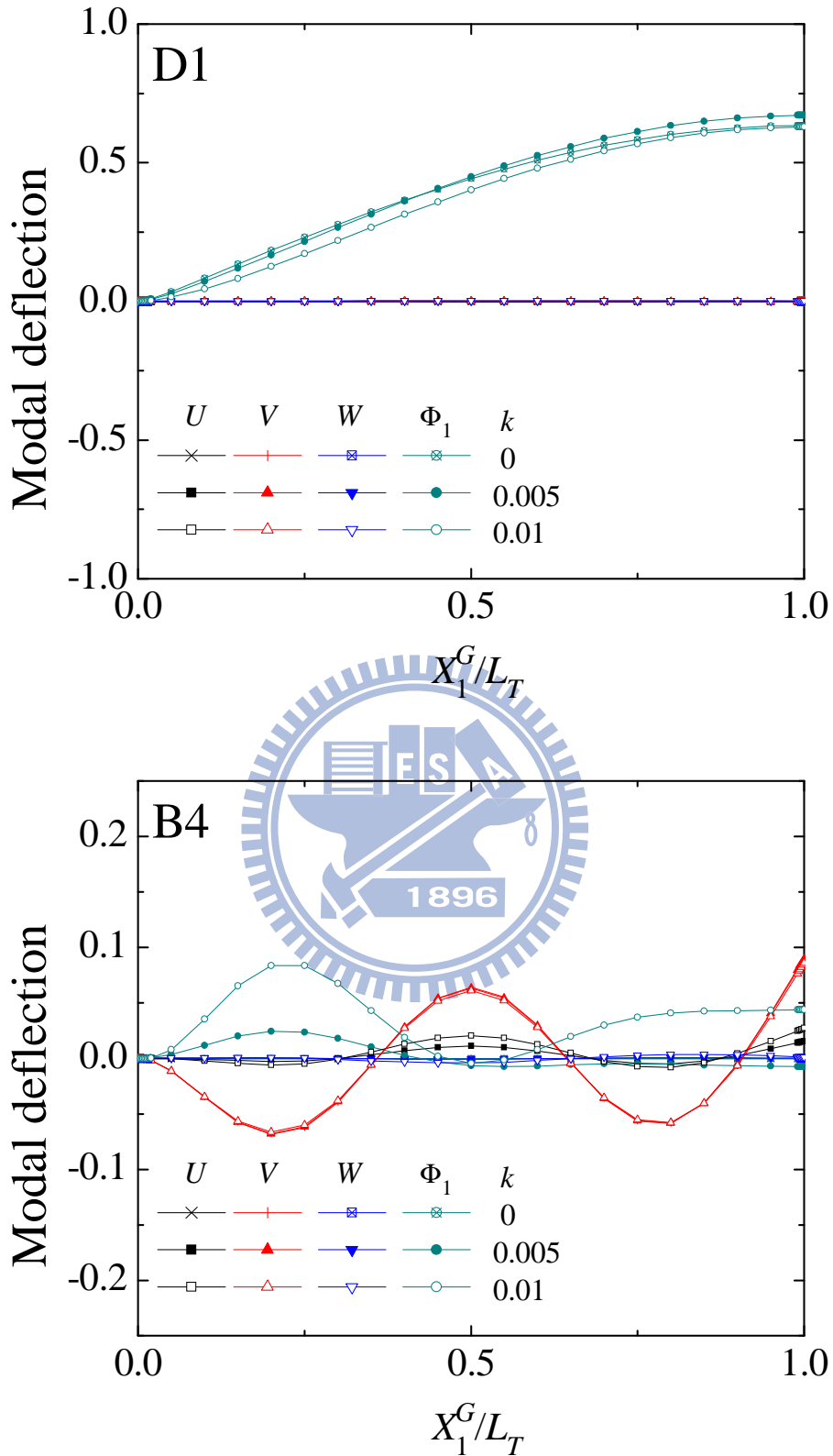
圖二十二 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第一、第二振動模態

(橢圓斷面 $a/b=10$, $r=1$, $L_T/a=20$, $\alpha=30^\circ$, $\beta=45^\circ$, $N=35^*$)



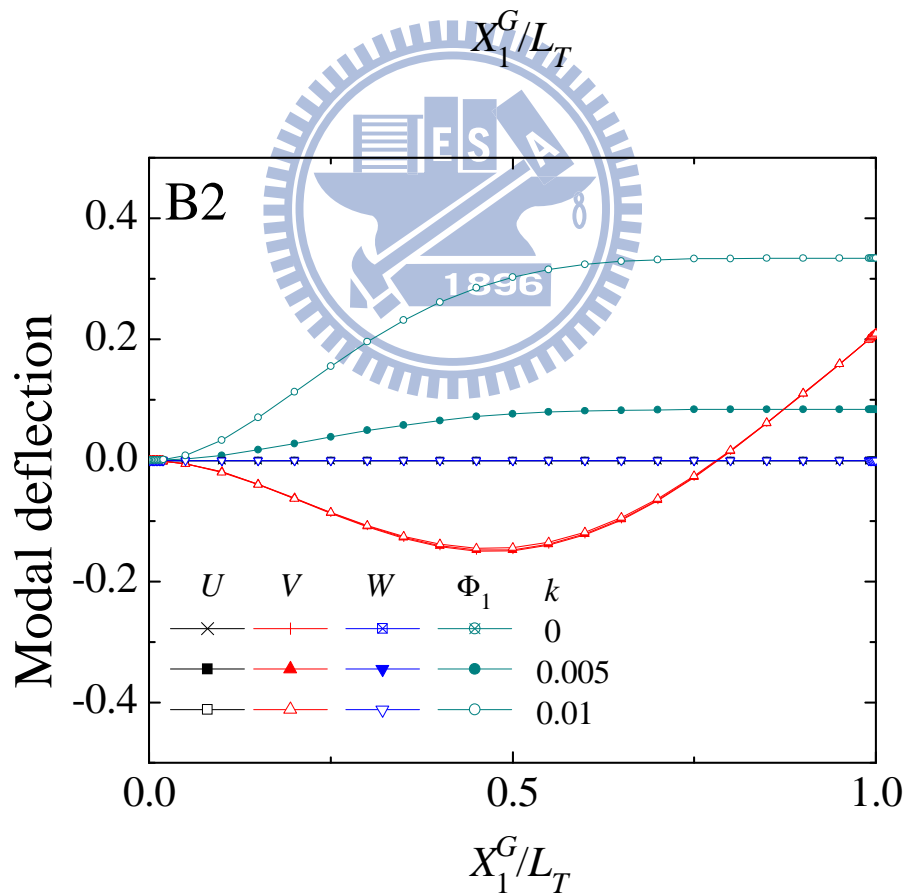
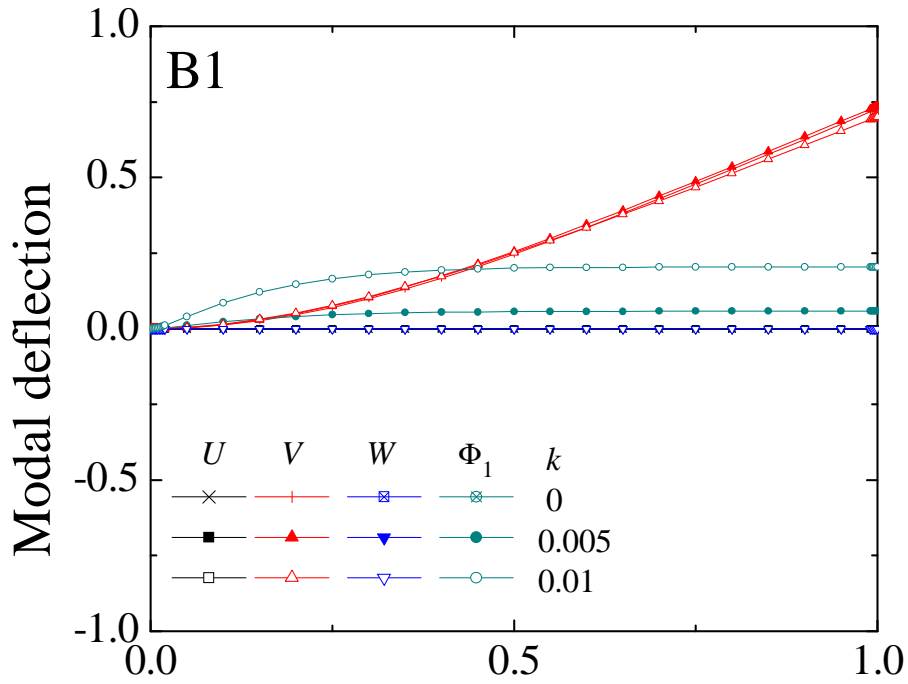
圖二十三 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第三、第四振動模態

(橢圓斷面 $a/b=10$, $r=1$, $L_T/a=20$, $\alpha=30^\circ$, $\beta=45^\circ$, $N=35^*$)



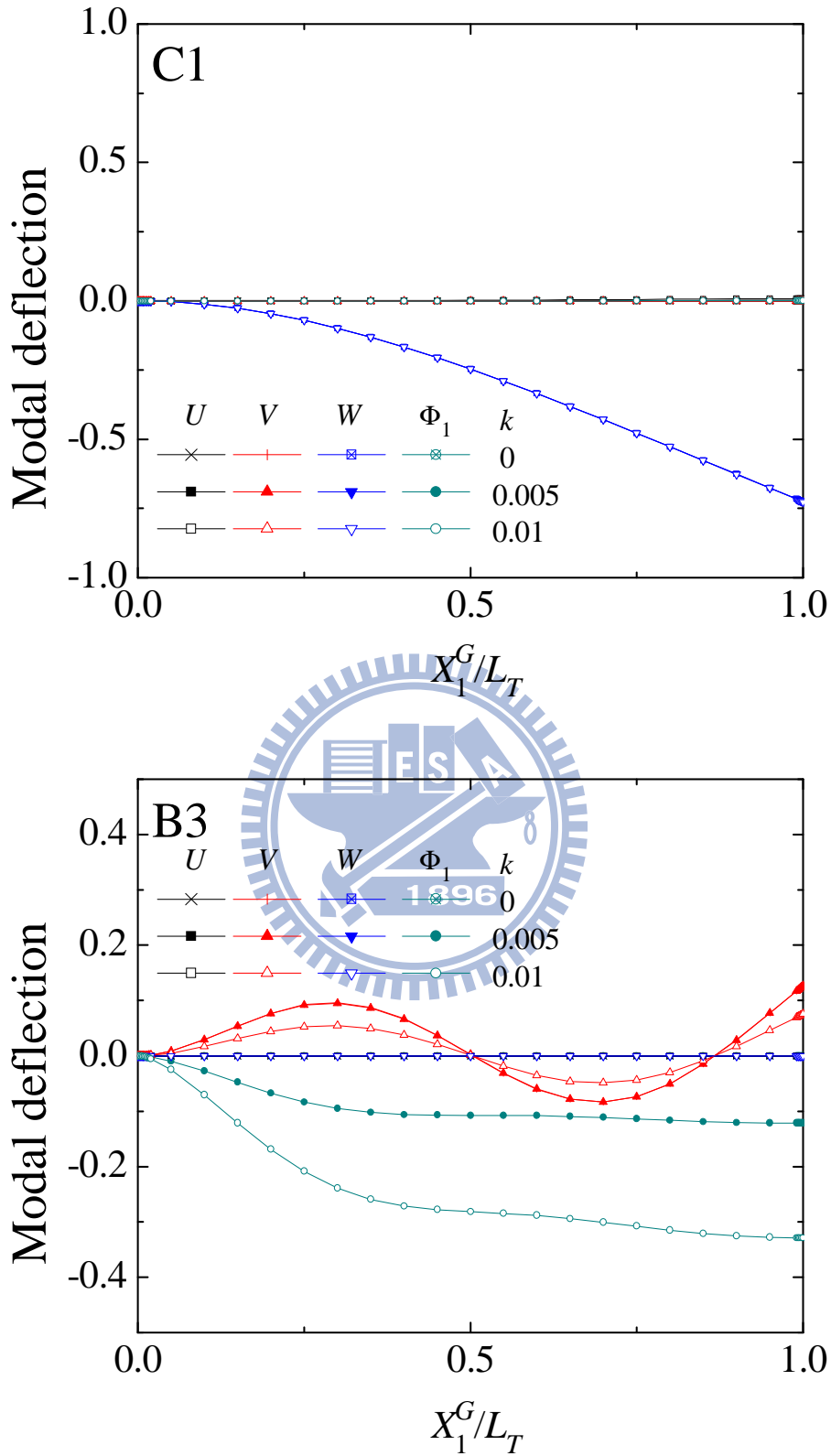
圖二十四 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第五、第六振動模態

(橢圓斷面 $a/b=10$, $r=1$, $L_T/a=20$, $\alpha=30^\circ$, $\beta=45^\circ$, $N=35^*$)



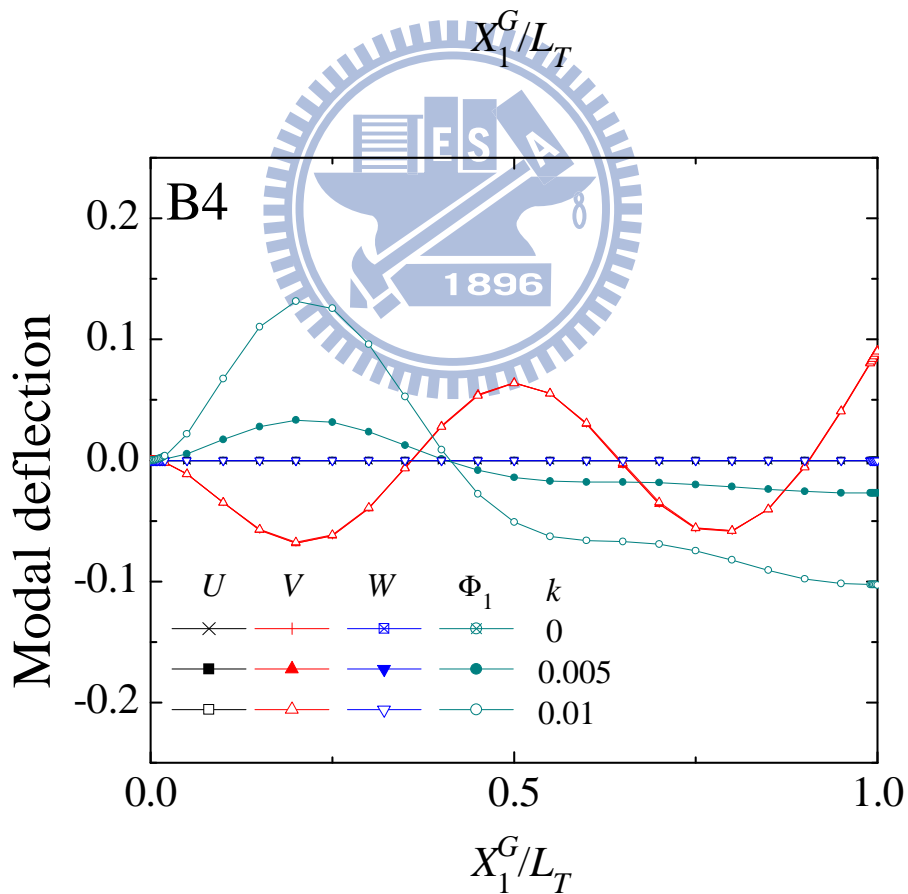
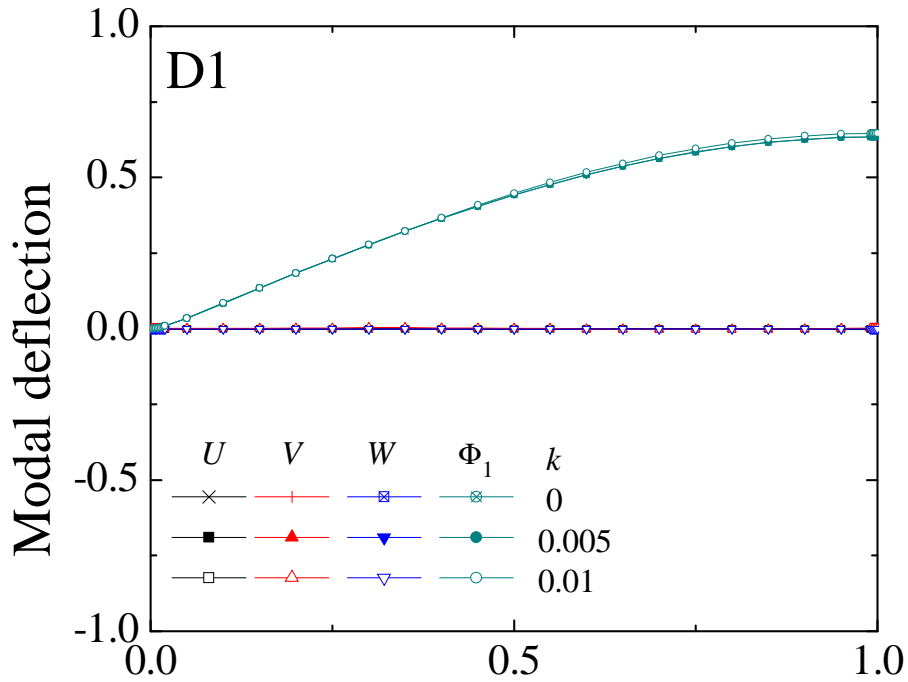
圖二十五 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第一、第二振動模態

(橢圓斷面 $a/b=10$, $r=1$, $L_T/a=20$, $\alpha=30^\circ$, $\beta=90^\circ$, $N=35^*$)



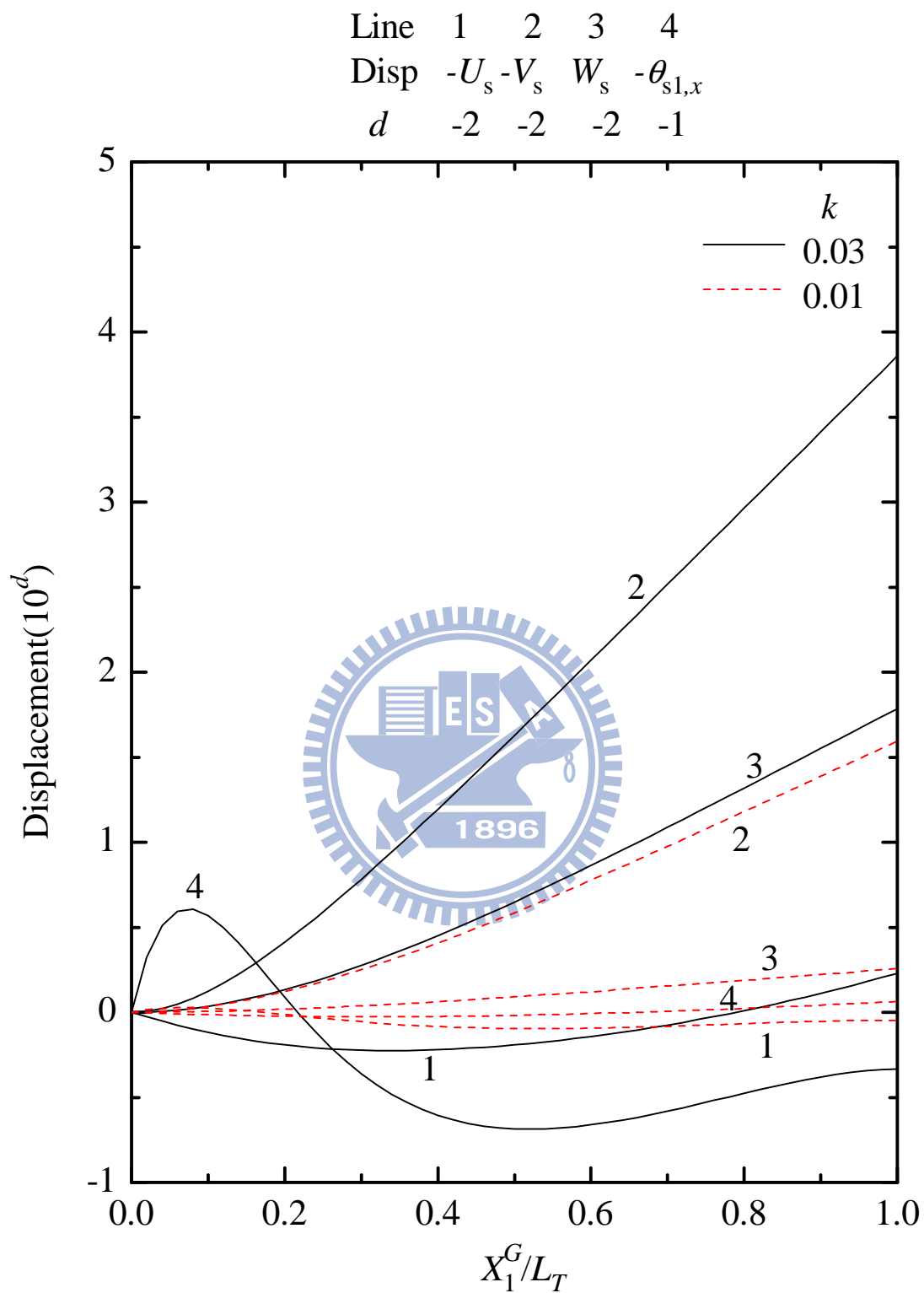
圖二十六 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第三、第四振動模態

(橢圓斷面 $a/b=10$, $r=1$, $L_T/a=20$, $\alpha=30^\circ$, $\beta=90^\circ$, $N=35^*$)



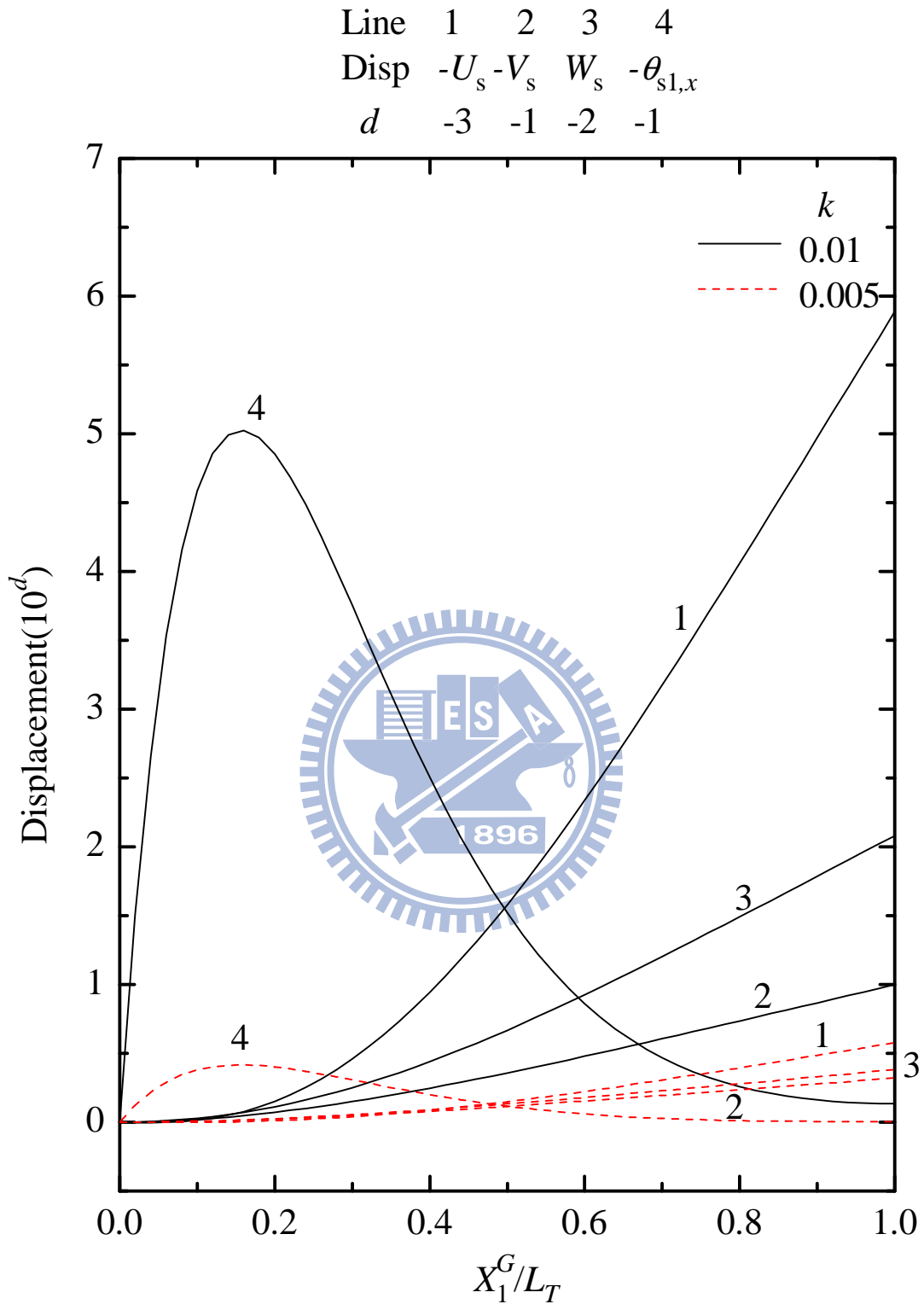
圖二十七 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第五、第六振動模態

(橢圓斷面 $a/b=10$, $r=1$, $L_T/a=20$, $\alpha=30^\circ$, $\beta=90^\circ$, $N=35^*$)



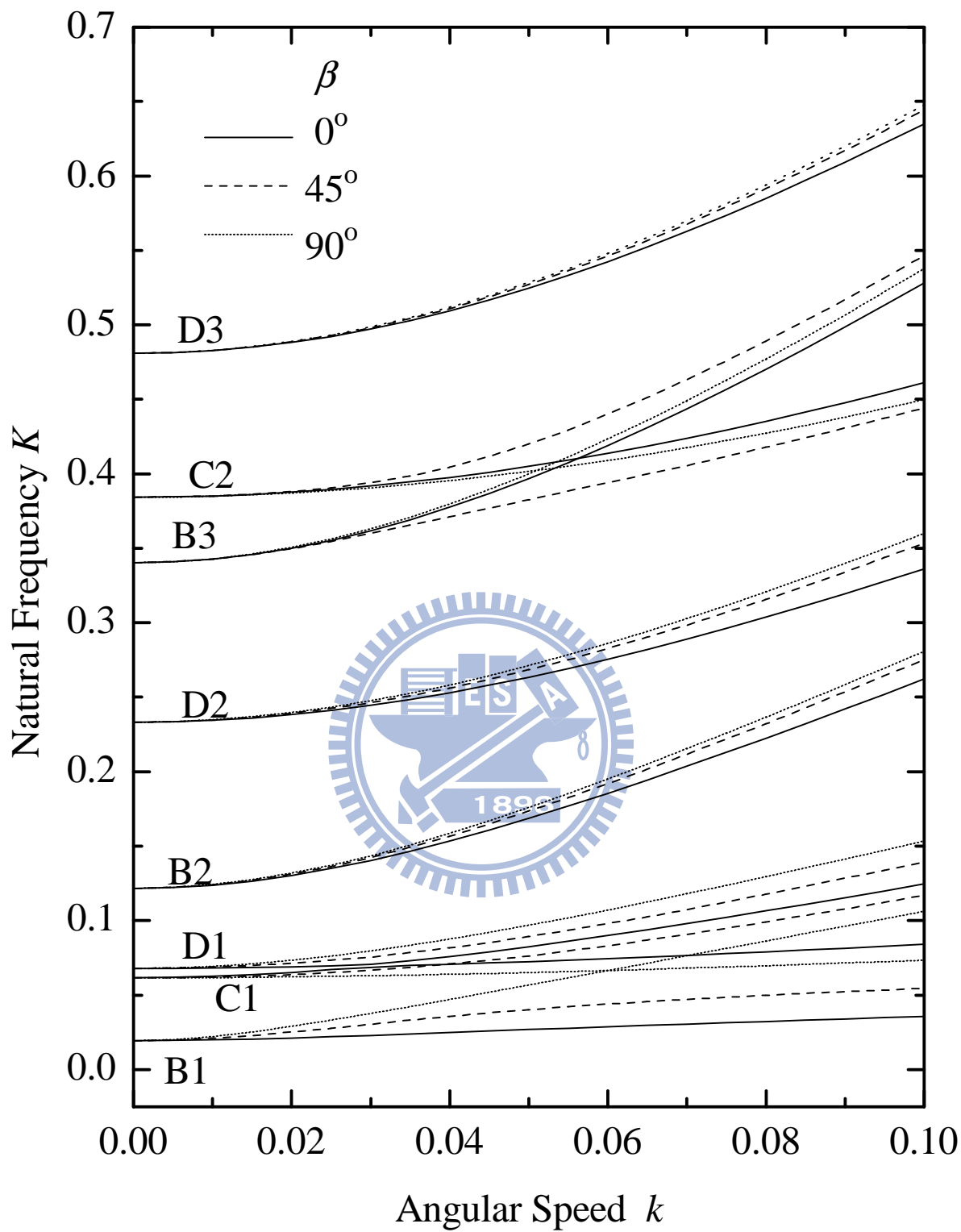
圖二十八 位移分佈圖

(I 型斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\beta = 45^\circ$, $\alpha = 5^\circ$, $N = 50$)



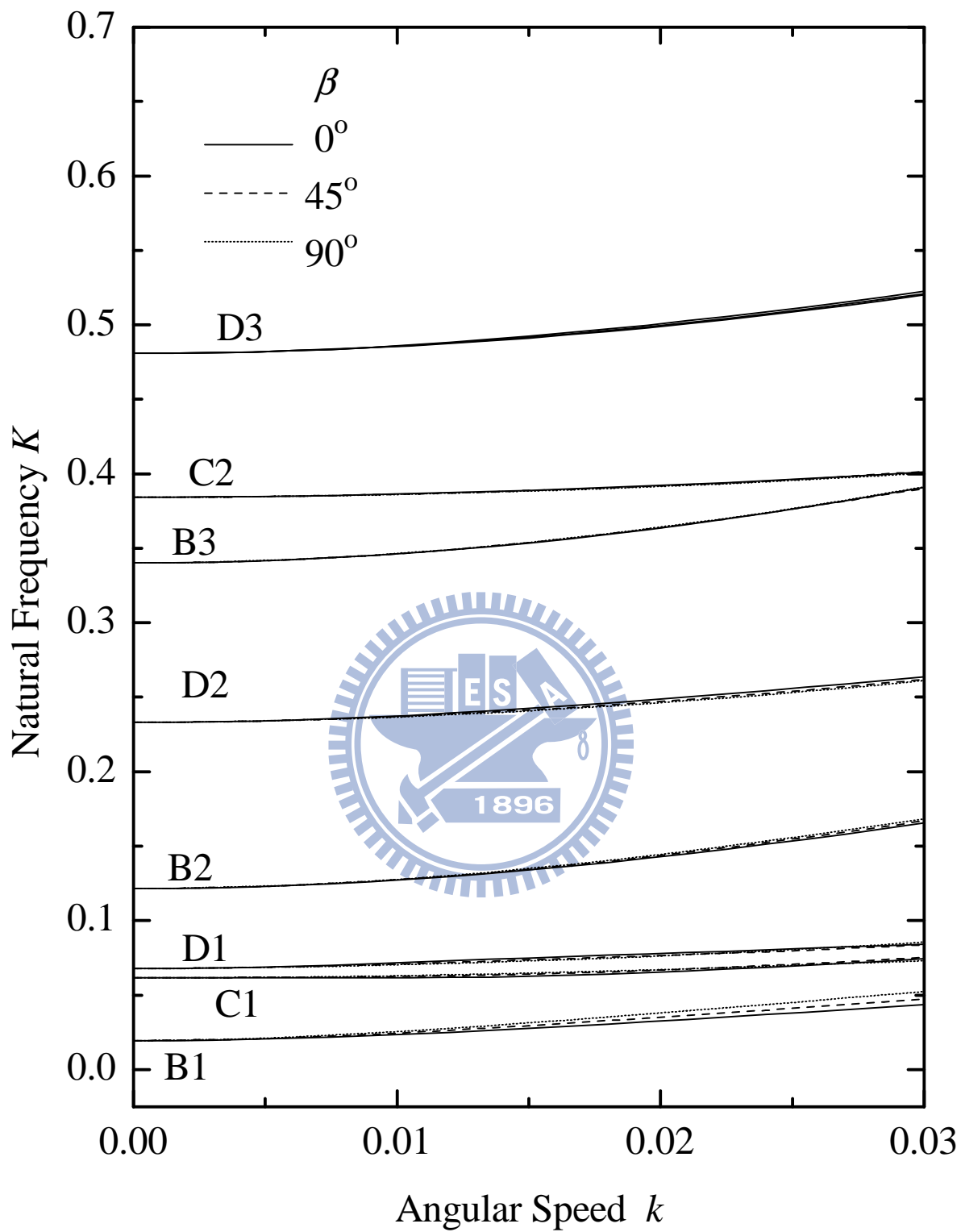
圖二十九 位移分佈圖

(I 型斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\beta = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$, $N = 50$)



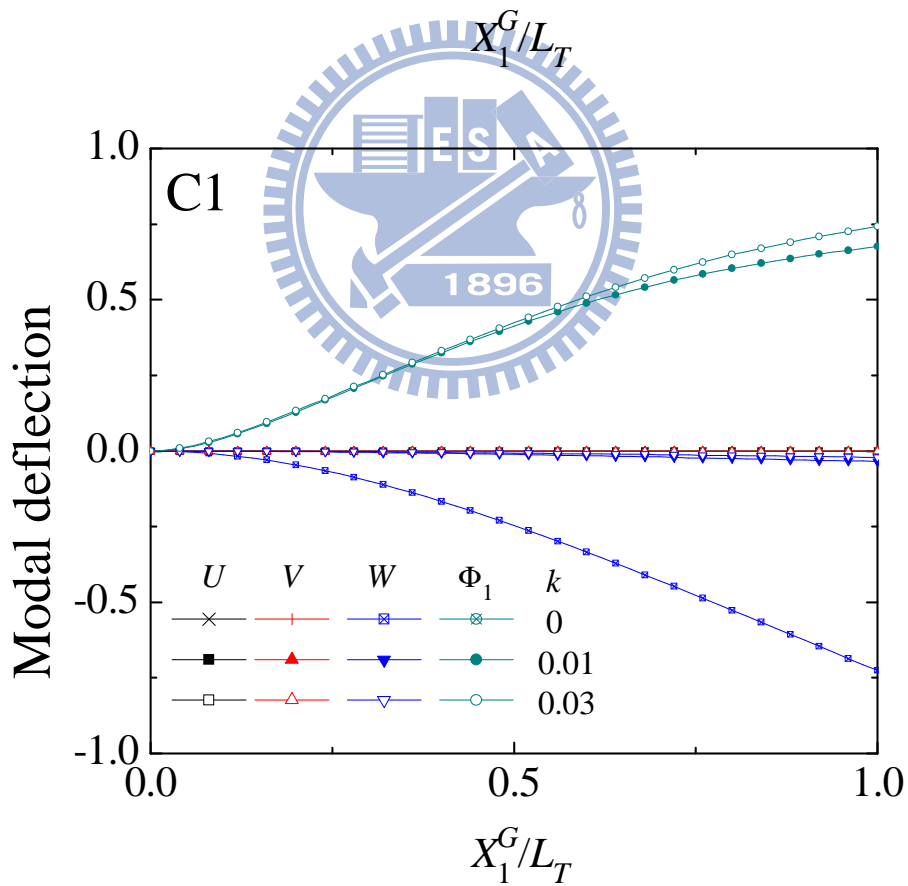
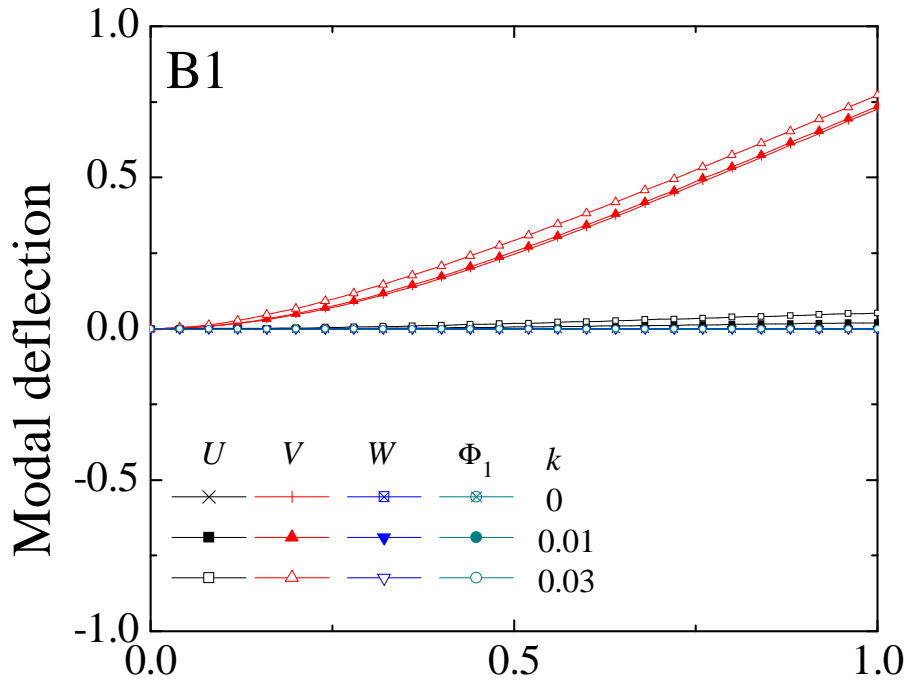
圖三十 轉速 - 自然頻率圖

(I 型斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 0$, $\alpha = 0^\circ$, $N = 50$)



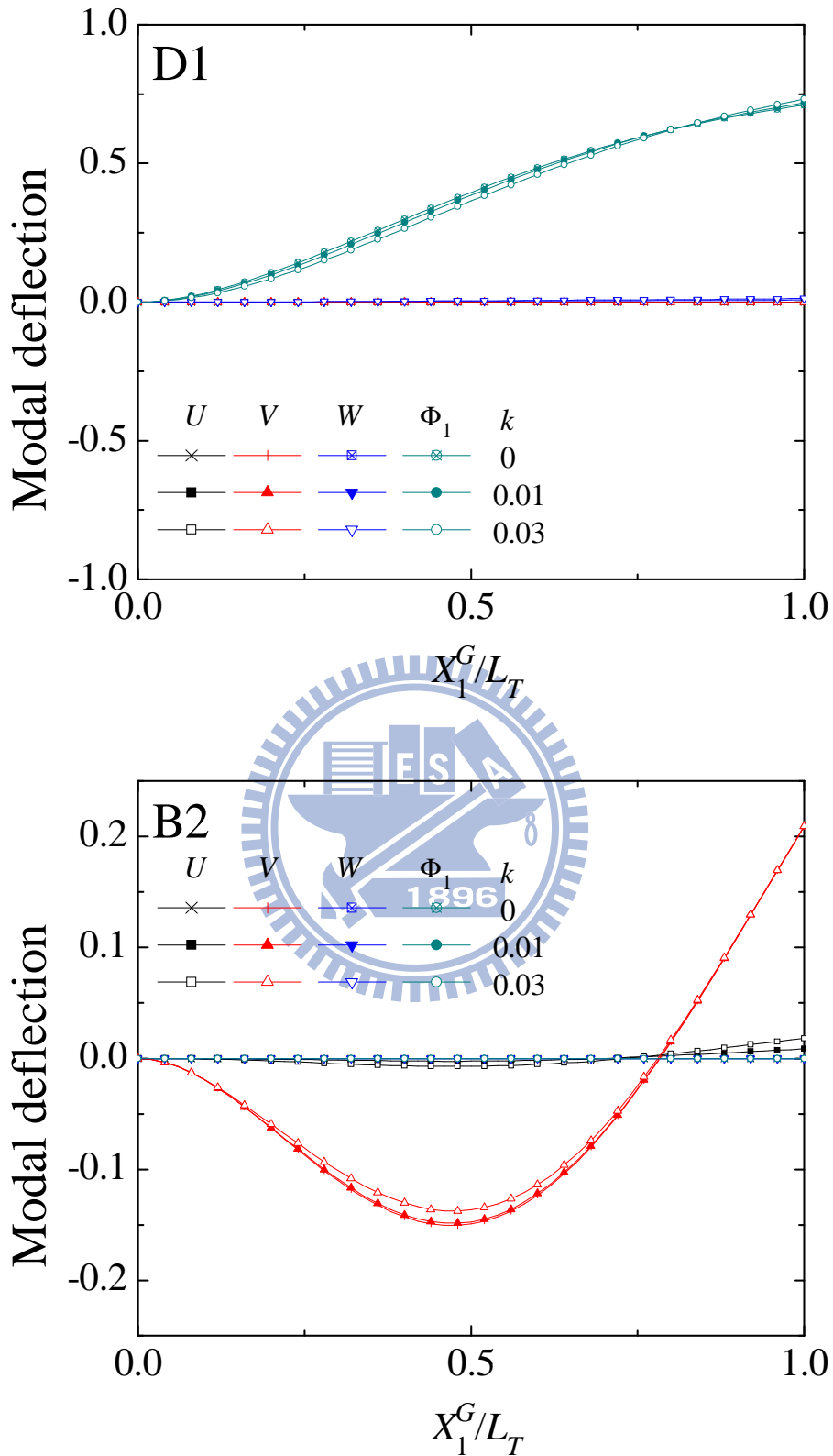
圖三十一 轉速 - 自然頻率圖

(I 型斷面 $W10 \times 30$, $L_T/d_{nom} = 25$, $r = 1$, $\alpha = 5^\circ$, $N = 50$)



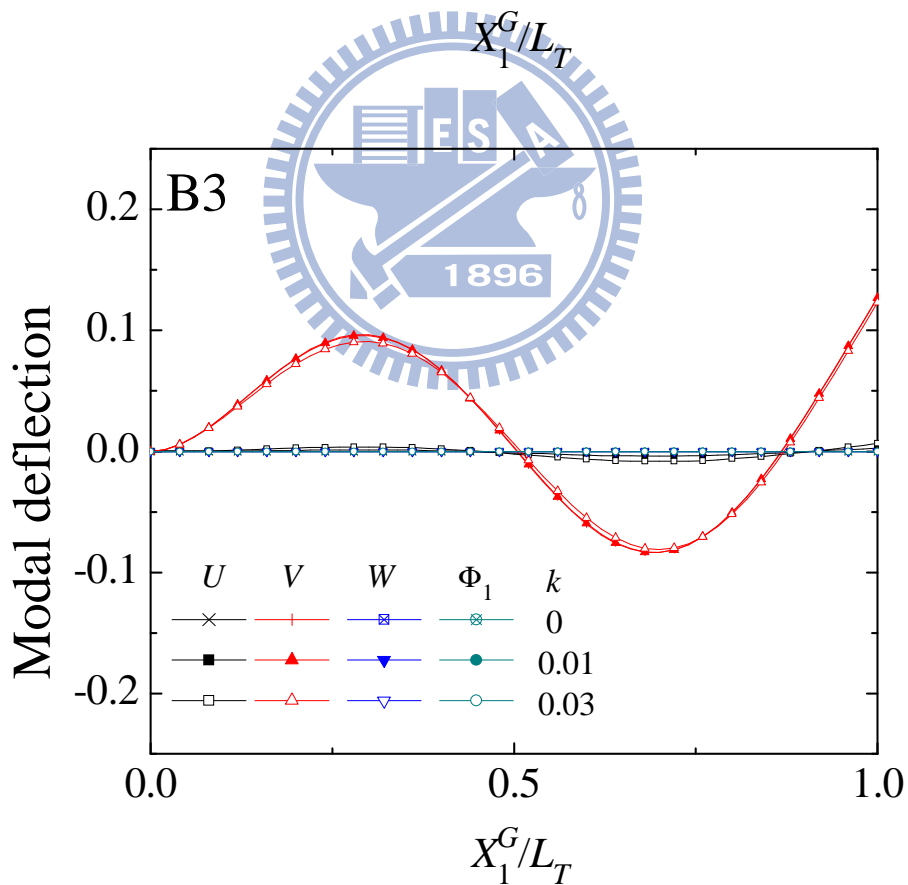
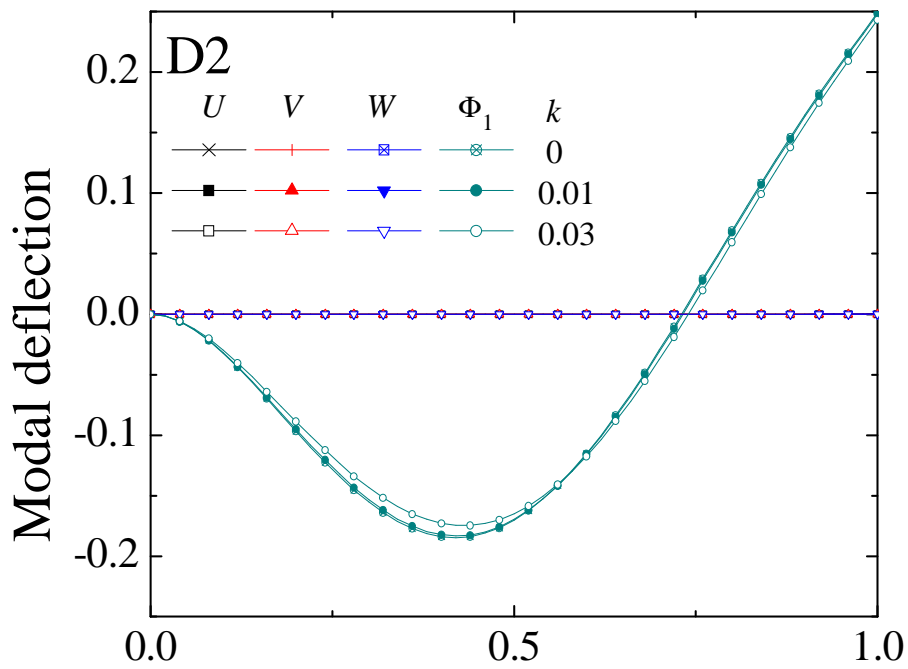
圖三十二 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第一、第二振動模態

(I 型斷面 $W10 \times 30$, $r=1$, $L_T/d_{nom} = 25$, $\alpha = 5^\circ$, $\beta = 0^\circ$, $N = 50$)



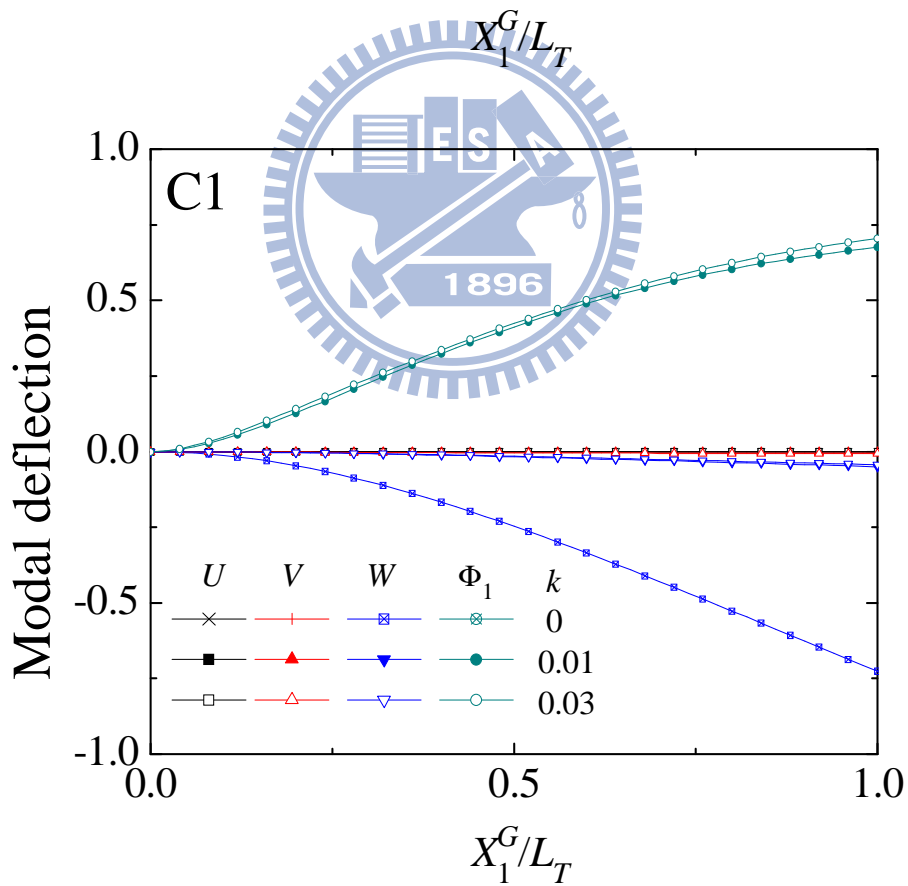
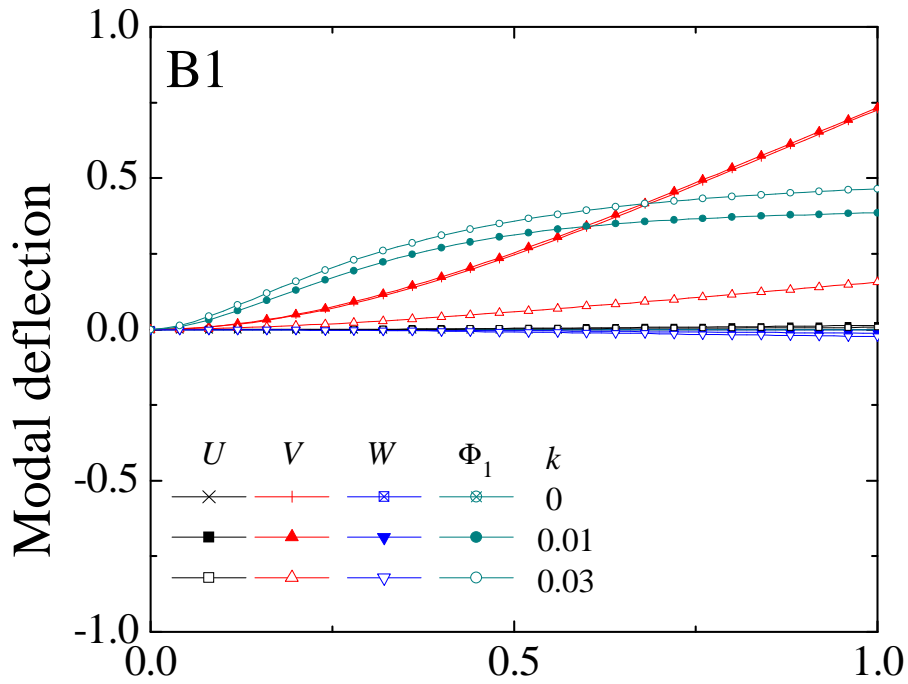
圖三十三 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第三、第四振動模態

(I 型斷面 $W10 \times 30$, $r = 1$, $L_T/d_{nom} = 25$, $\alpha = 5^\circ$, $\beta = 0^\circ$, $N = 50$)



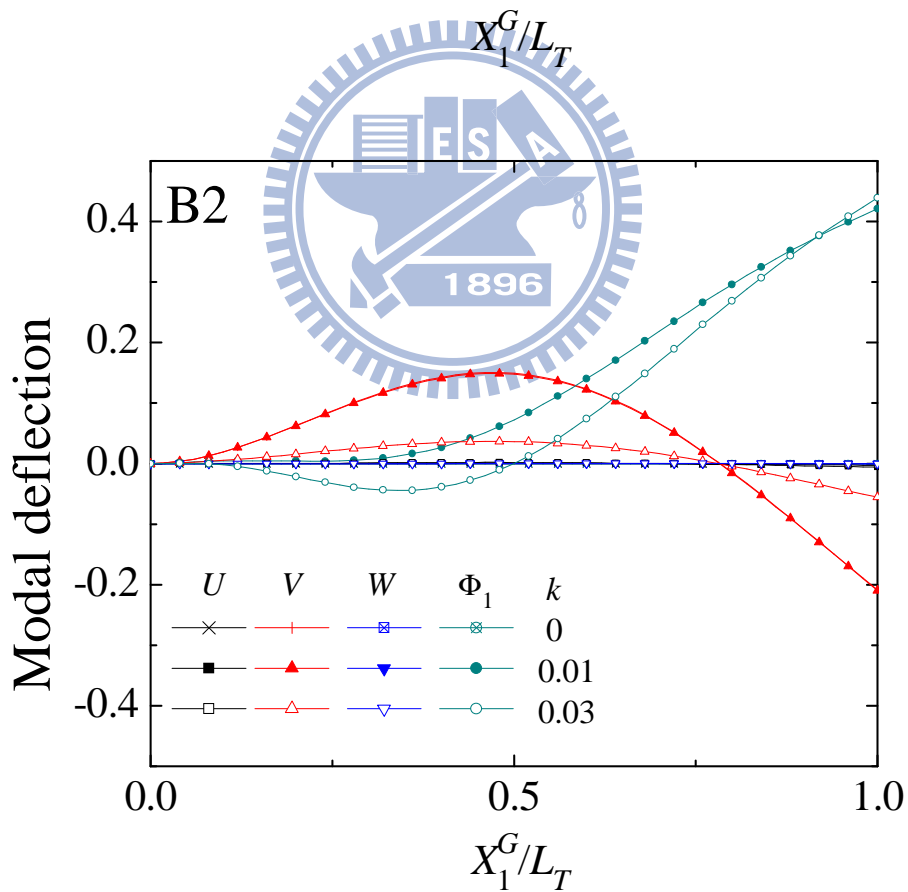
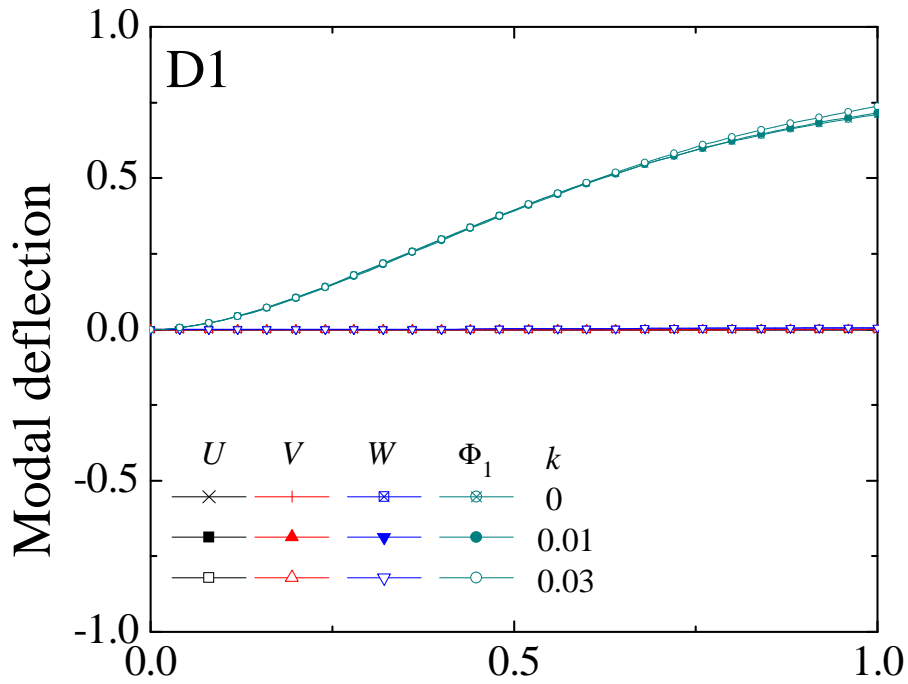
圖三十四 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第五、第六振動模態

(I 型斷面 $W10 \times 30$, $r = 1$, $L_T/d_{nom} = 25$, $\alpha = 5^\circ$, $\beta = 0^\circ$, $N = 50$)



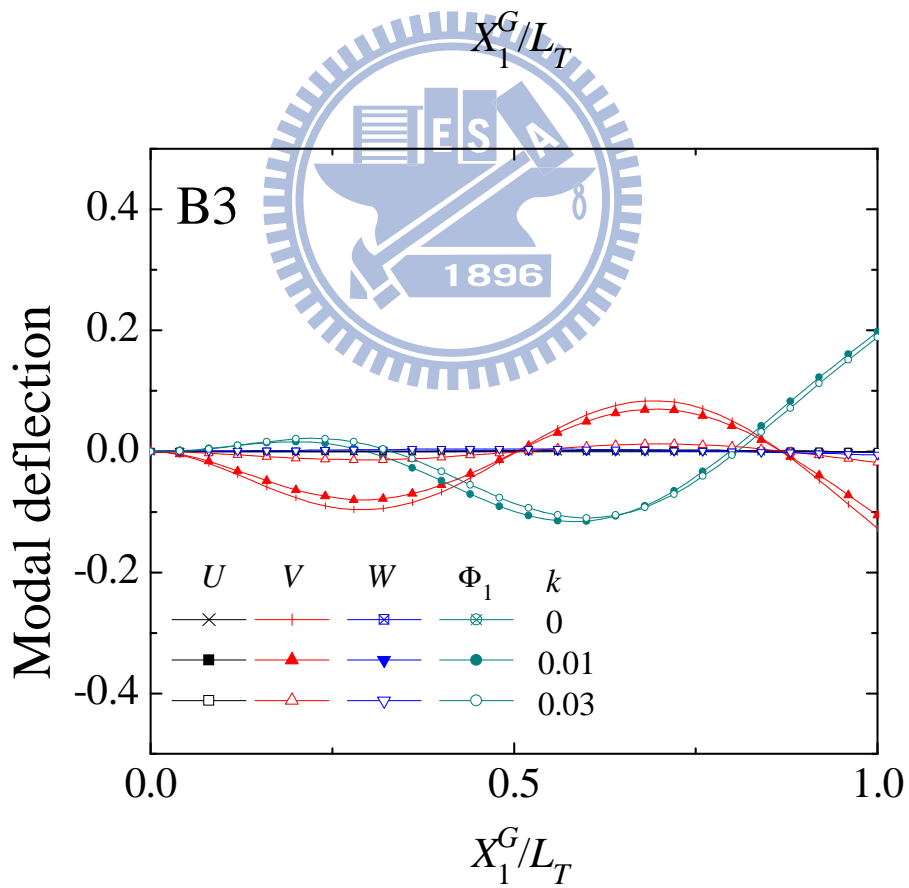
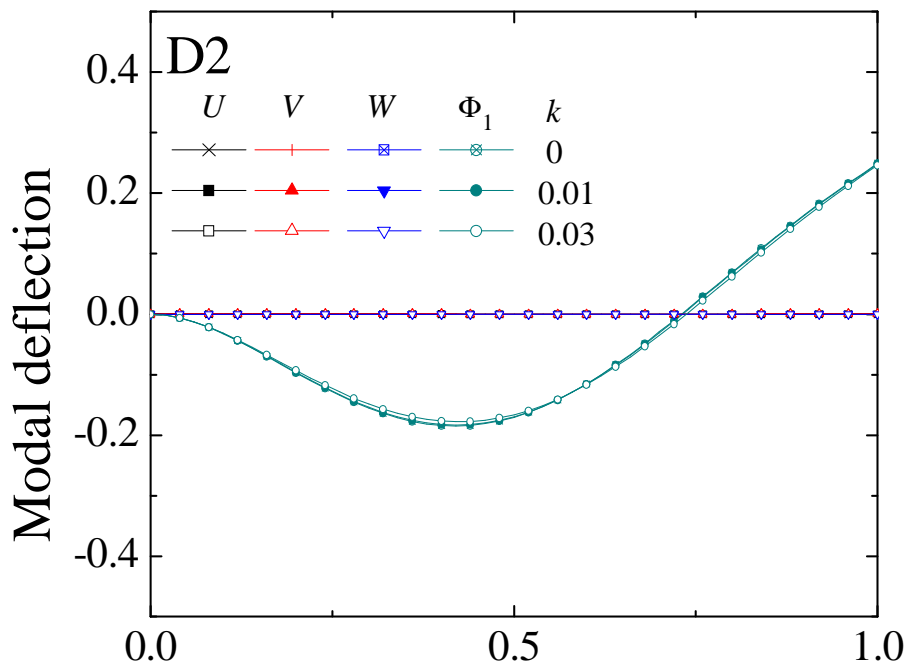
圖三十五 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第一、第二振動模態

(I 型斷面 $W10 \times 30$, $r = 1$, $L_T/d_{nom} = 25$, $\alpha = 5^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $N = 50$)

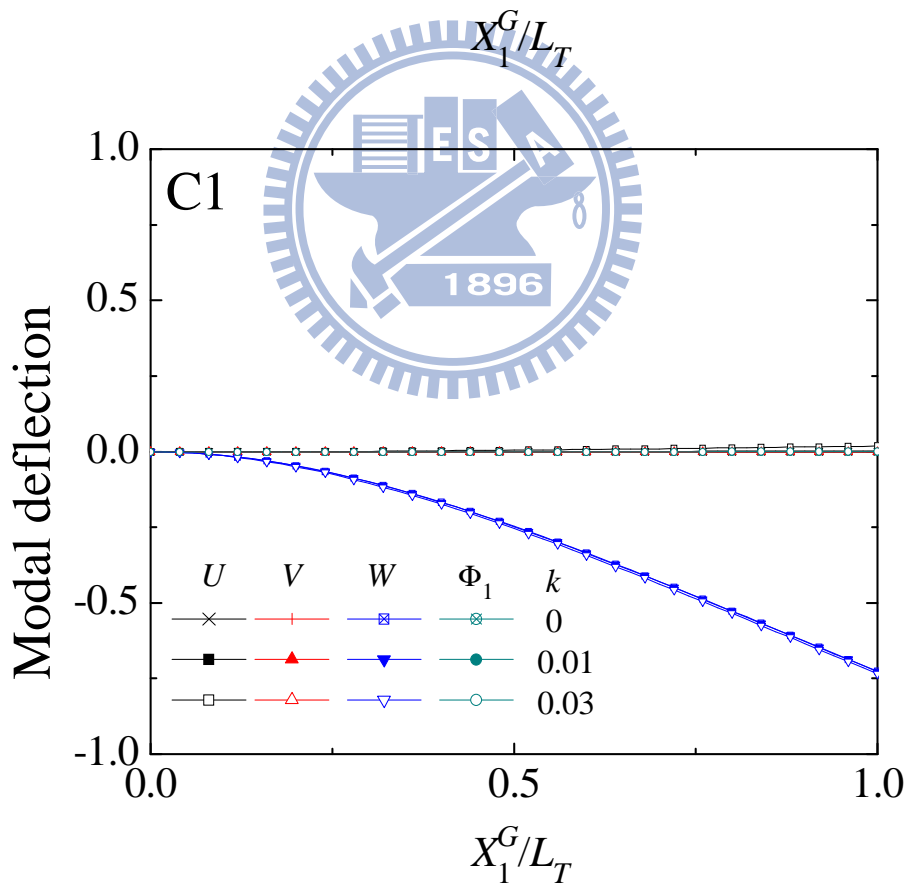
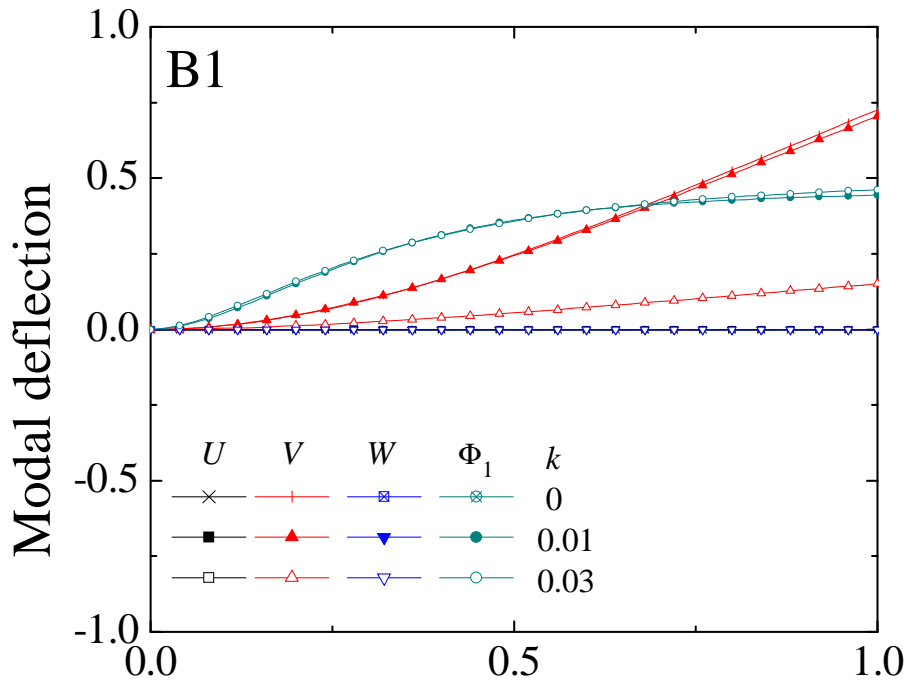


圖三十六 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第三、第四振動模態

(I 型斷面 $W10 \times 30$, $r = 1$, $L_T/d_{nom} = 25$, $\alpha = 5^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $N = 50$)

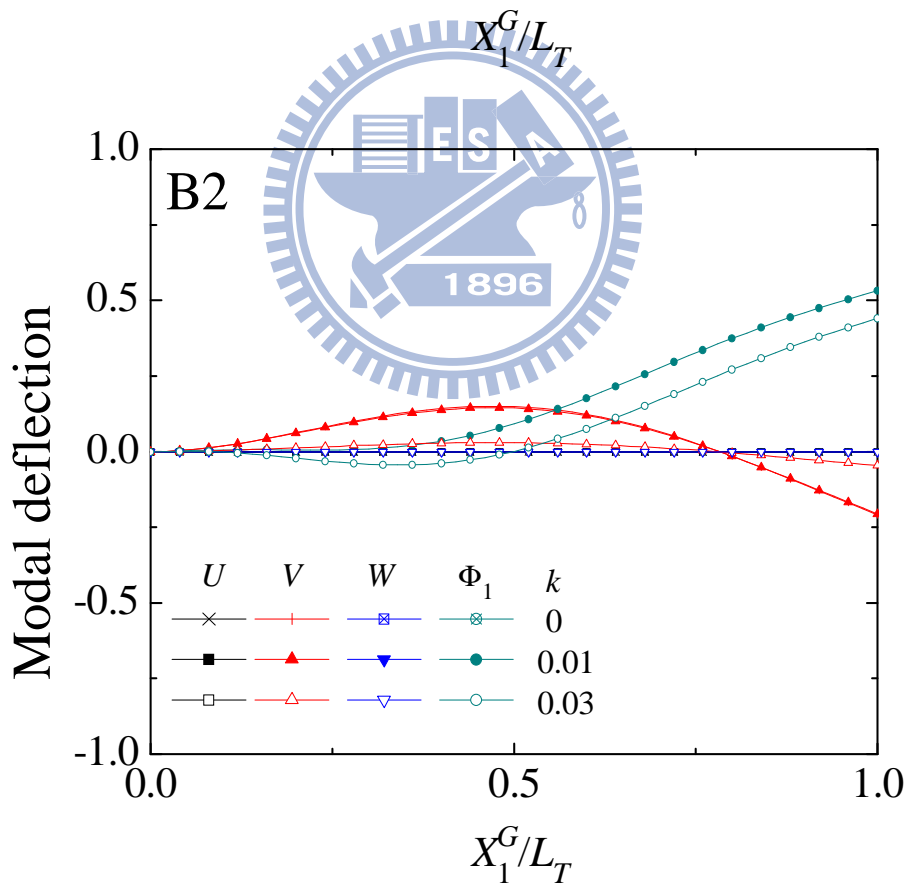
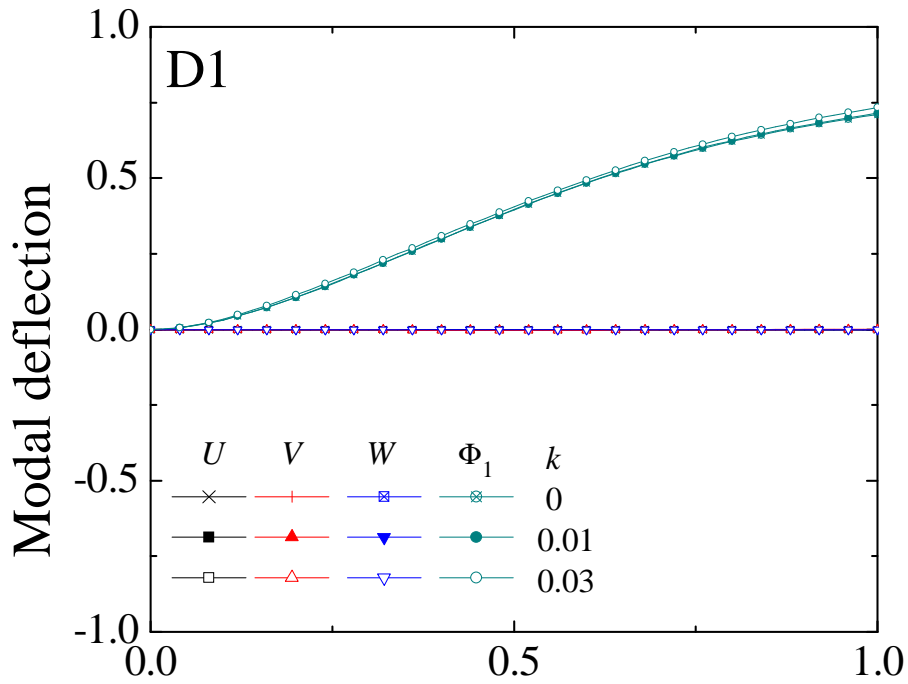


圖三十七 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第五、第六振動模態
 (I 型斷面 $W10 \times 30$, $r = 1$, $L_T/d_{nom} = 25$, $\alpha = 5^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $N = 50$)



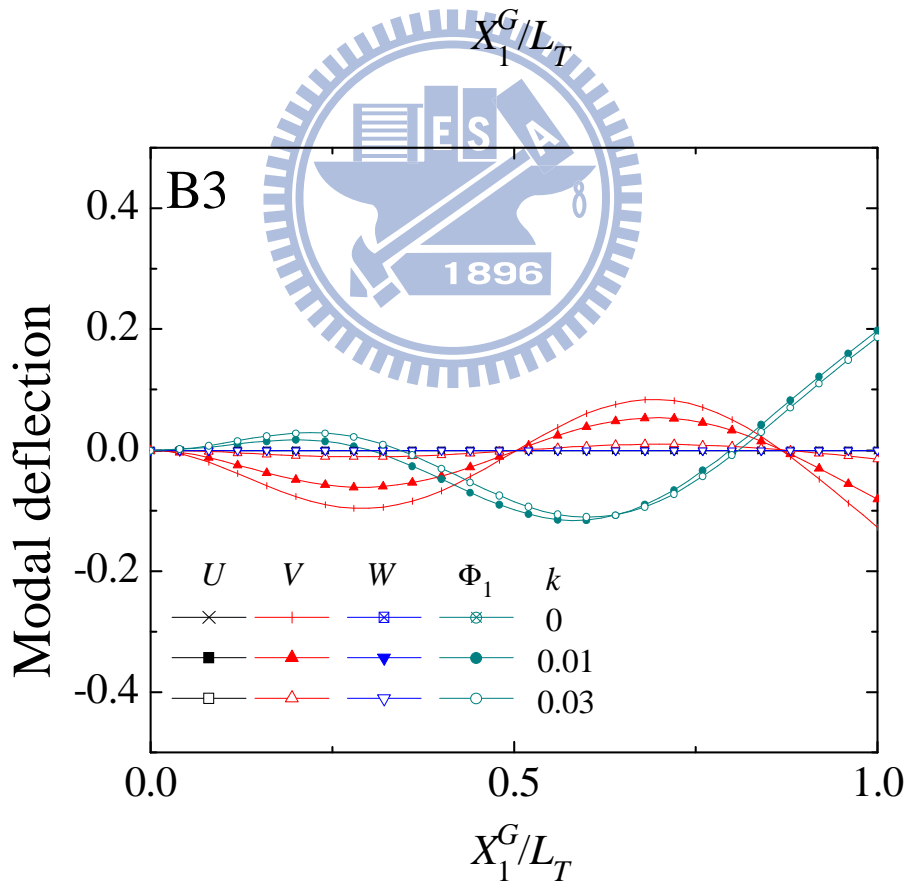
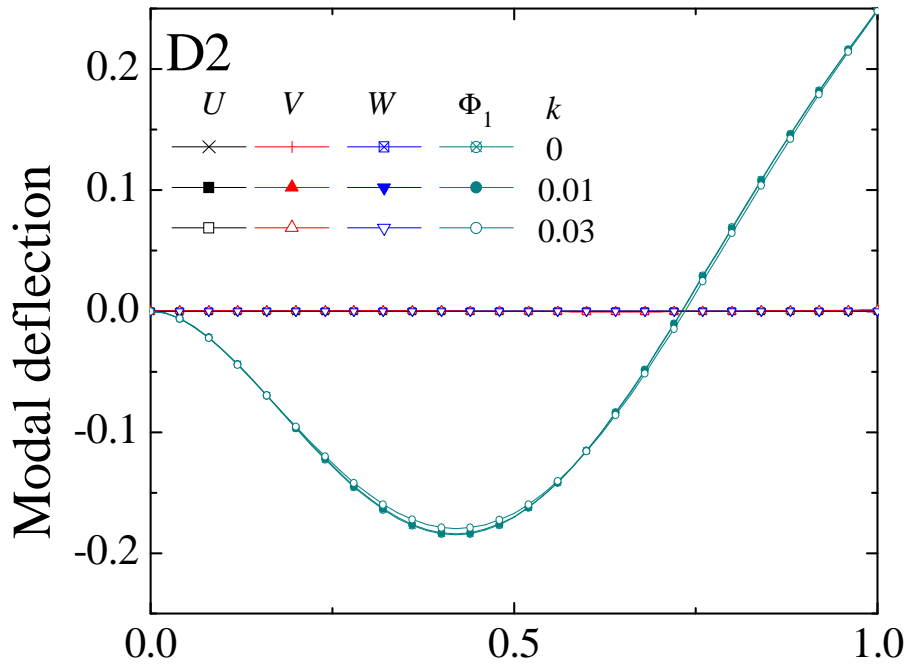
圖三十八 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第一、第二振動模態

(I 型斷面 $W10 \times 30$, $r = 1$, $L_T/d_{nom} = 25$, $\alpha = 5^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $N = 50$)



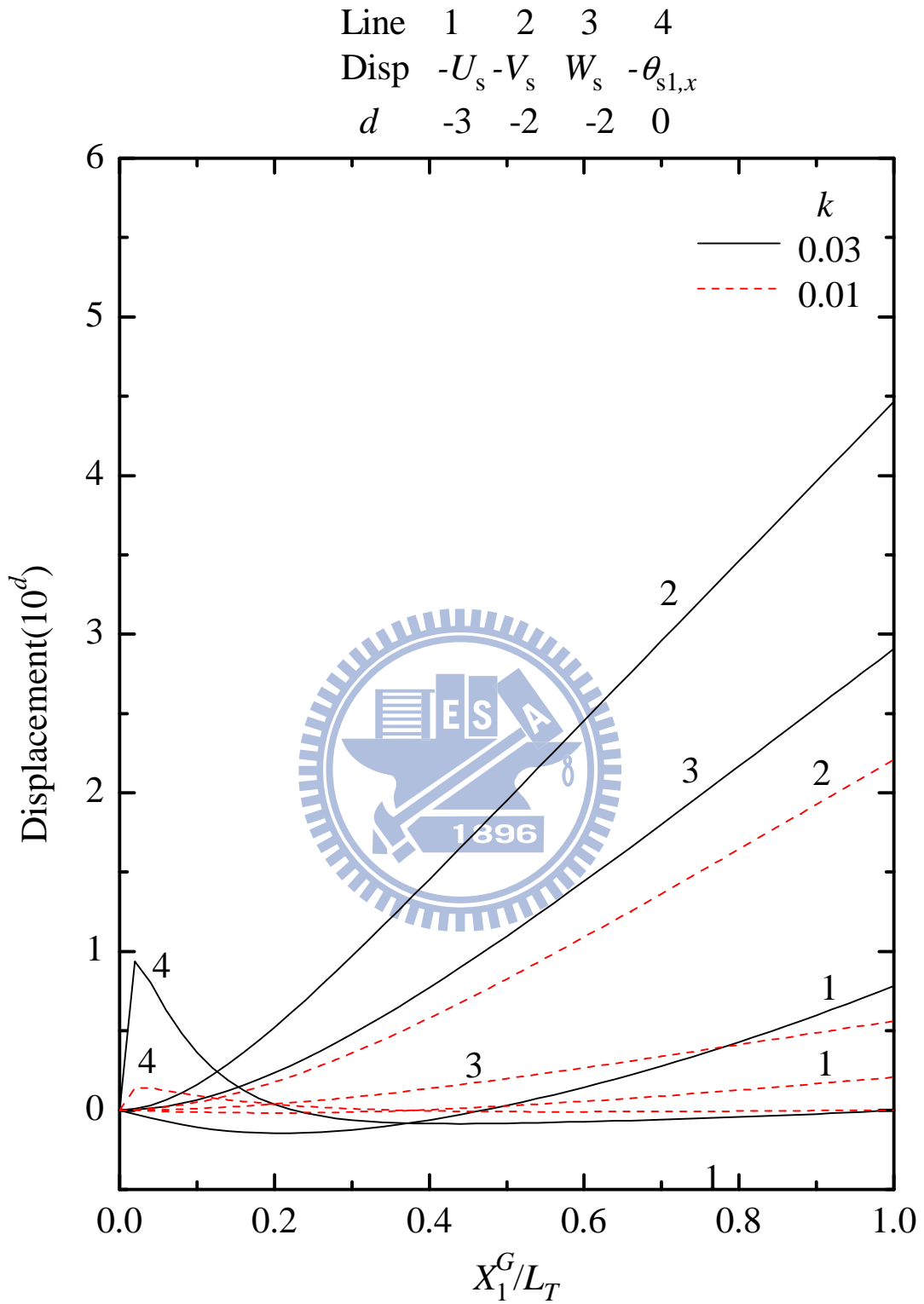
圖三十九 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第三、第四振動模態

(I 型斷面 $W10 \times 30$, $r = 1$, $L_T/d_{nom} = 25$, $\alpha = 5^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $N = 50$)



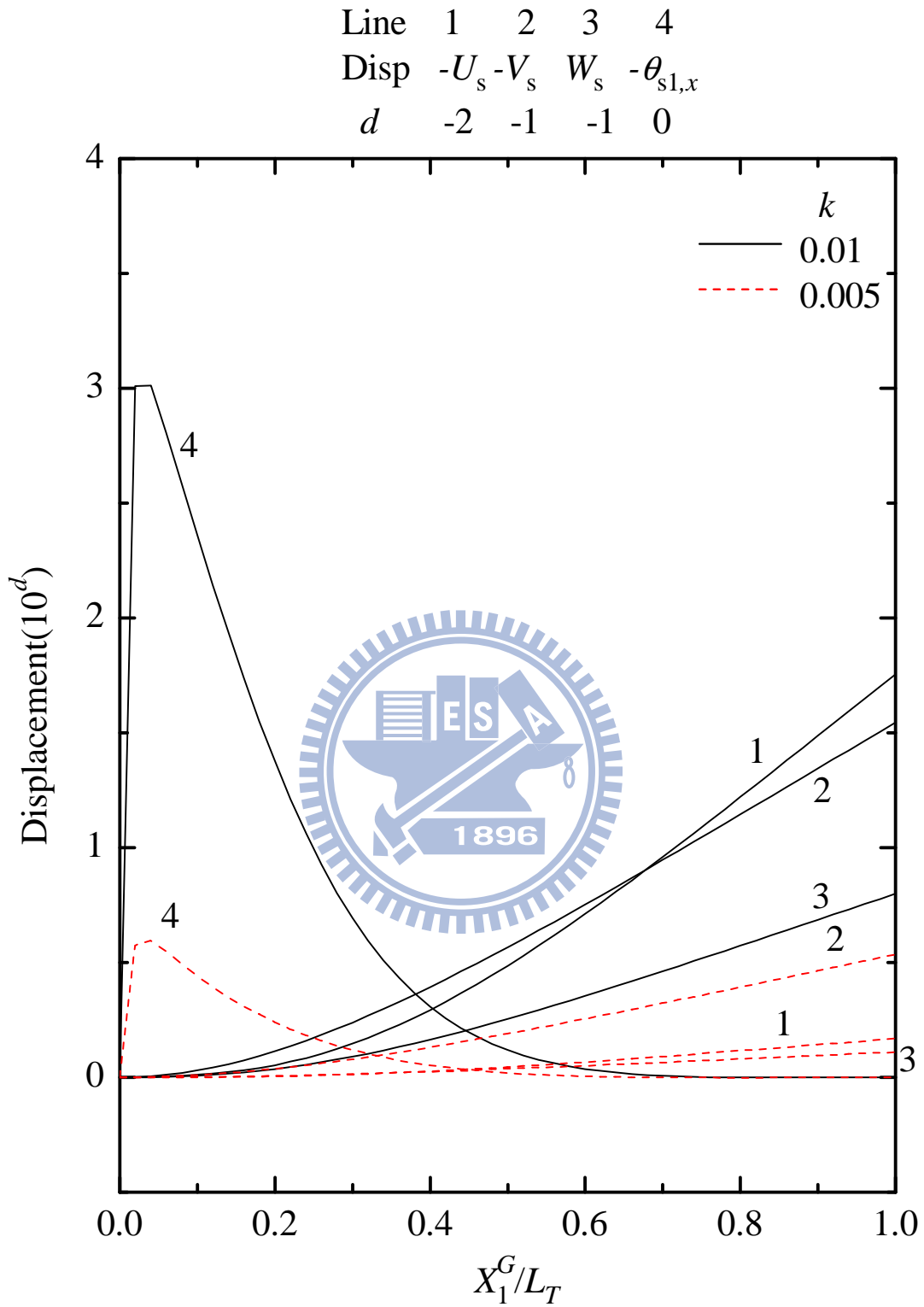
圖四十 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第五、第六振動模態

(I 型斷面 $W10 \times 30$, $r = 1$, $L_T/d_{nom} = 25$, $\alpha = 5^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $N = 50$)



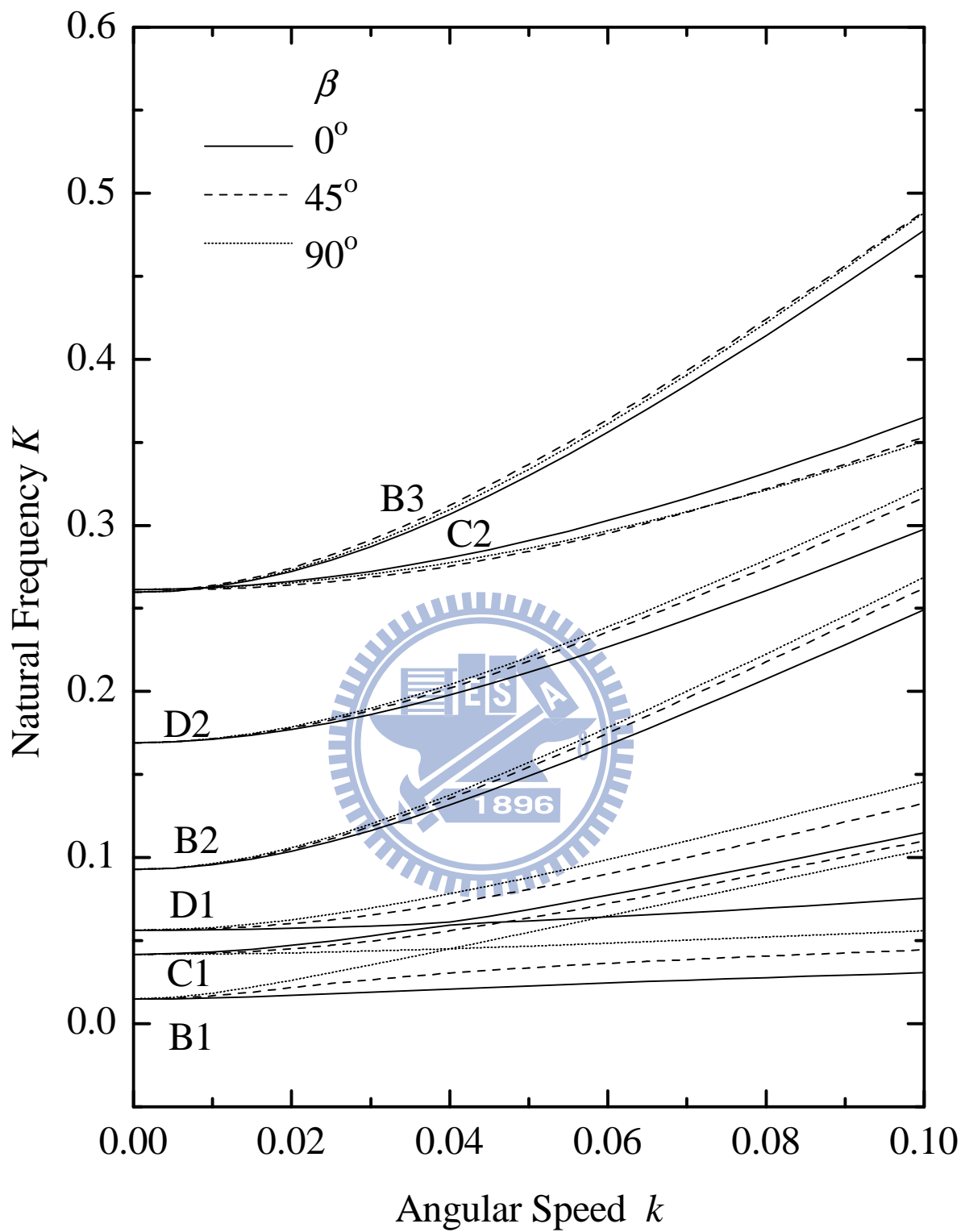
圖四十一 位移分佈圖

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 20$, $r = 1$, $\beta = 45^\circ$, $\alpha = 5^\circ$, $N = 50$)



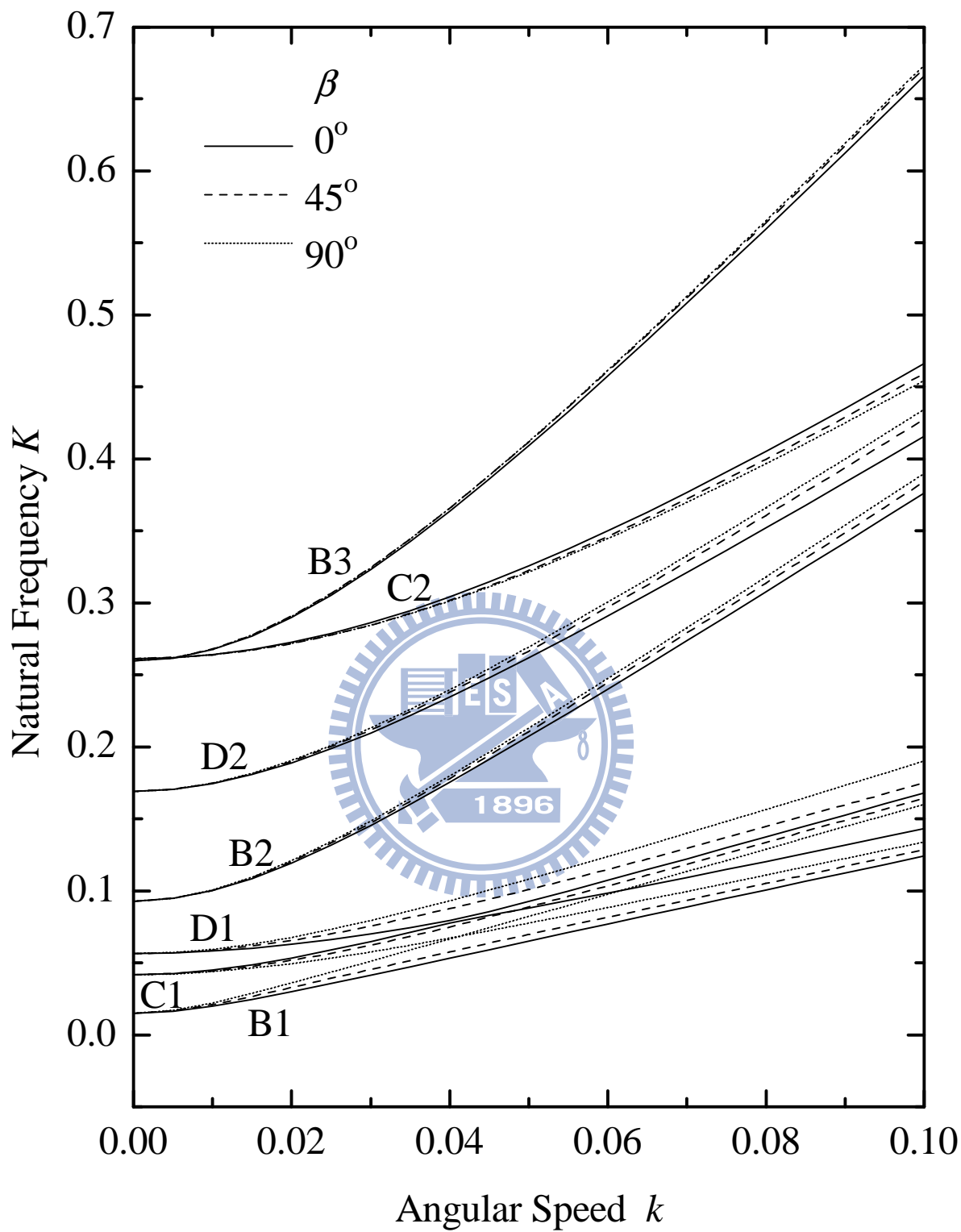
圖四十二 位移分佈圖

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 20$, $r = 1$, $\beta = 45^\circ$, $\alpha = 30^\circ$, $N = 50$)



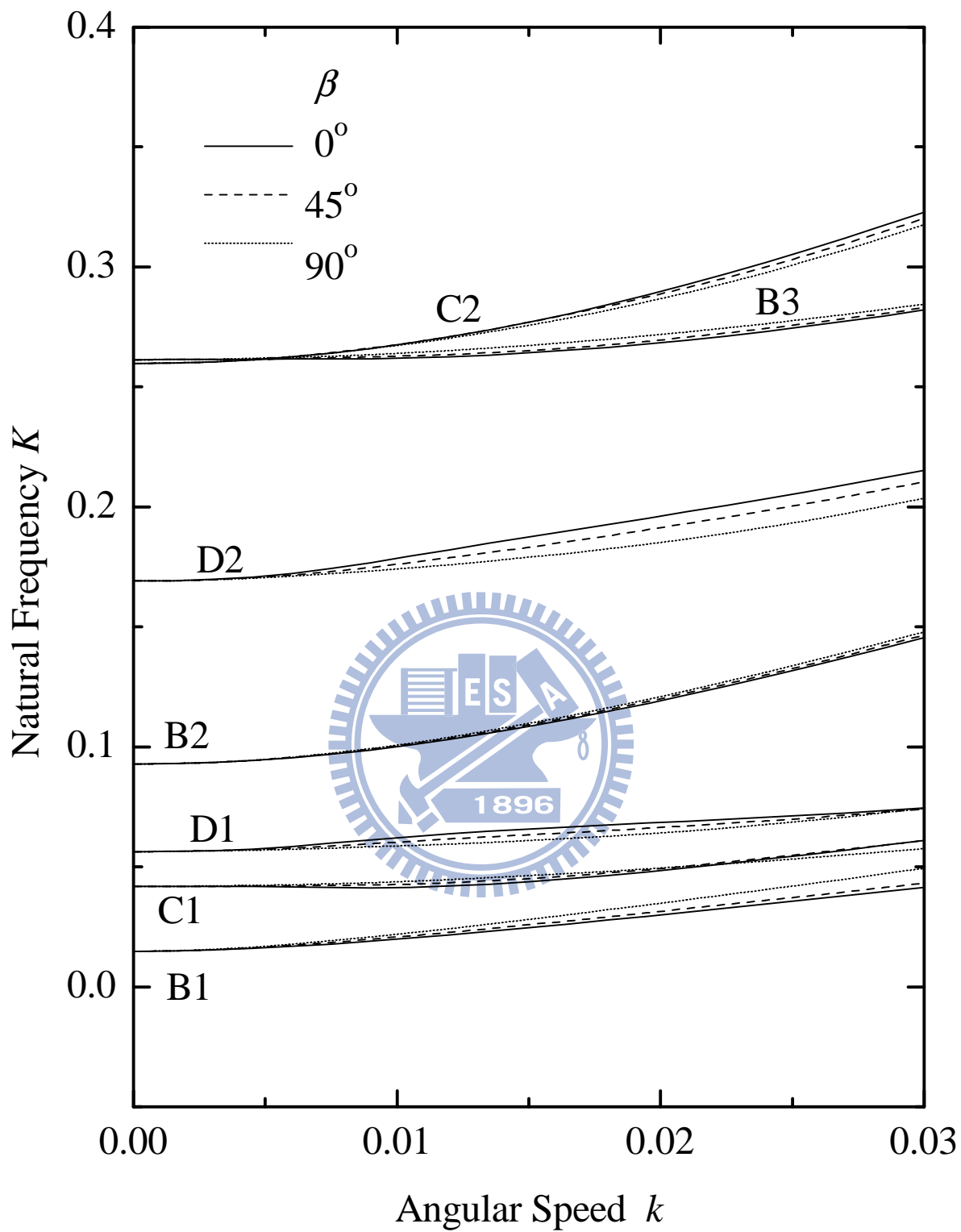
圖四十三 轉速 - 自然頻率圖

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 20$, $r = 0$, $\alpha = 0^\circ$, $N = 50$)



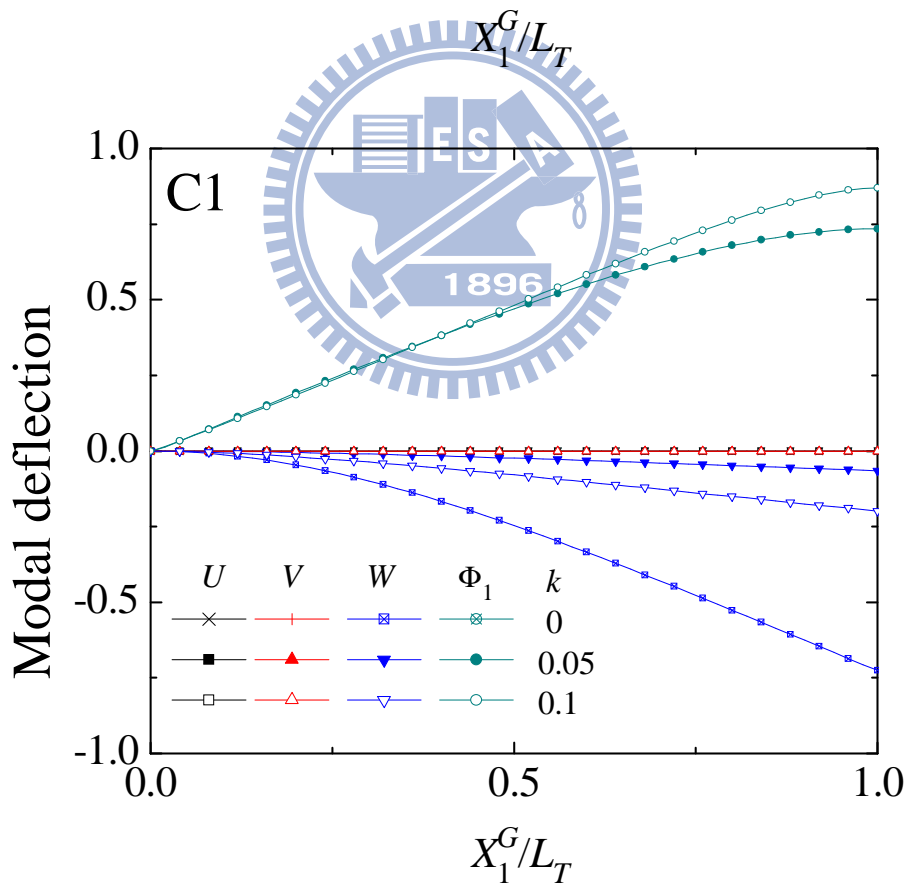
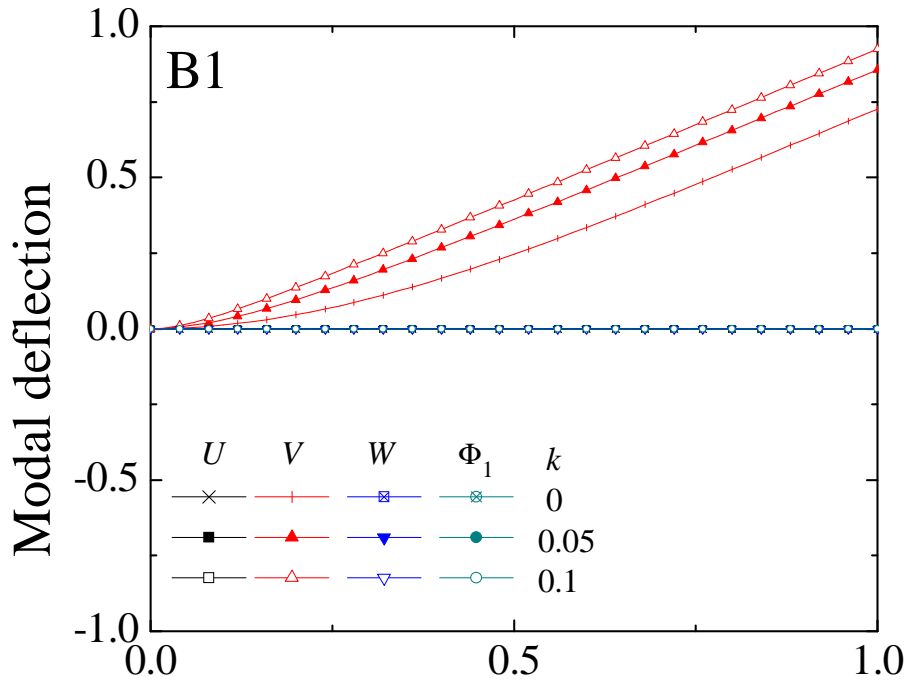
圖四十四 轉速 - 自然頻率圖

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 20$, $r = 1$, $\alpha = 0^\circ$, $N = 50$)



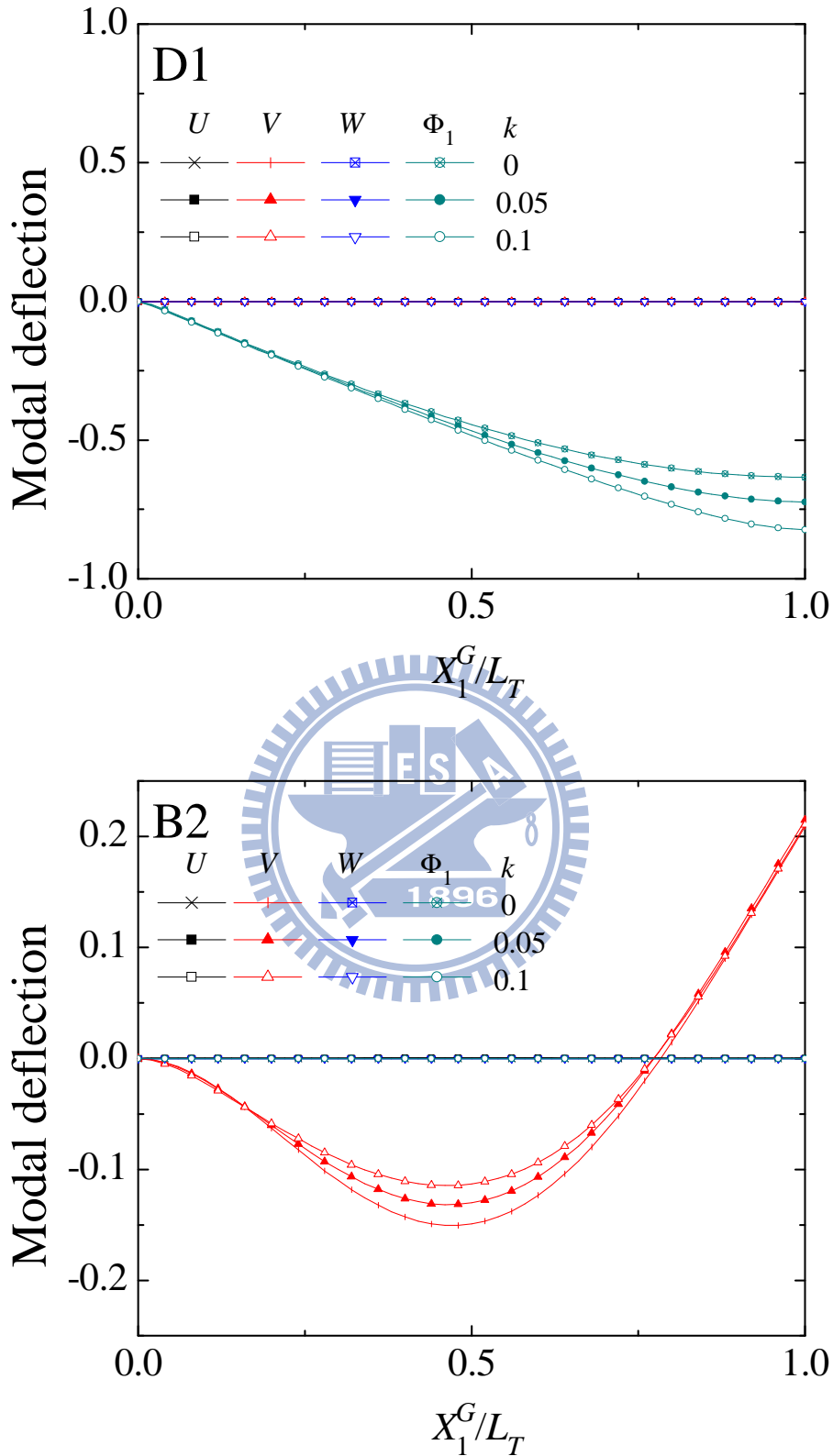
圖四十五 轉速 - 自然頻率圖

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $L_T/d = 20$, $r = 1$, $\alpha = 5^\circ$, $N = 50$)



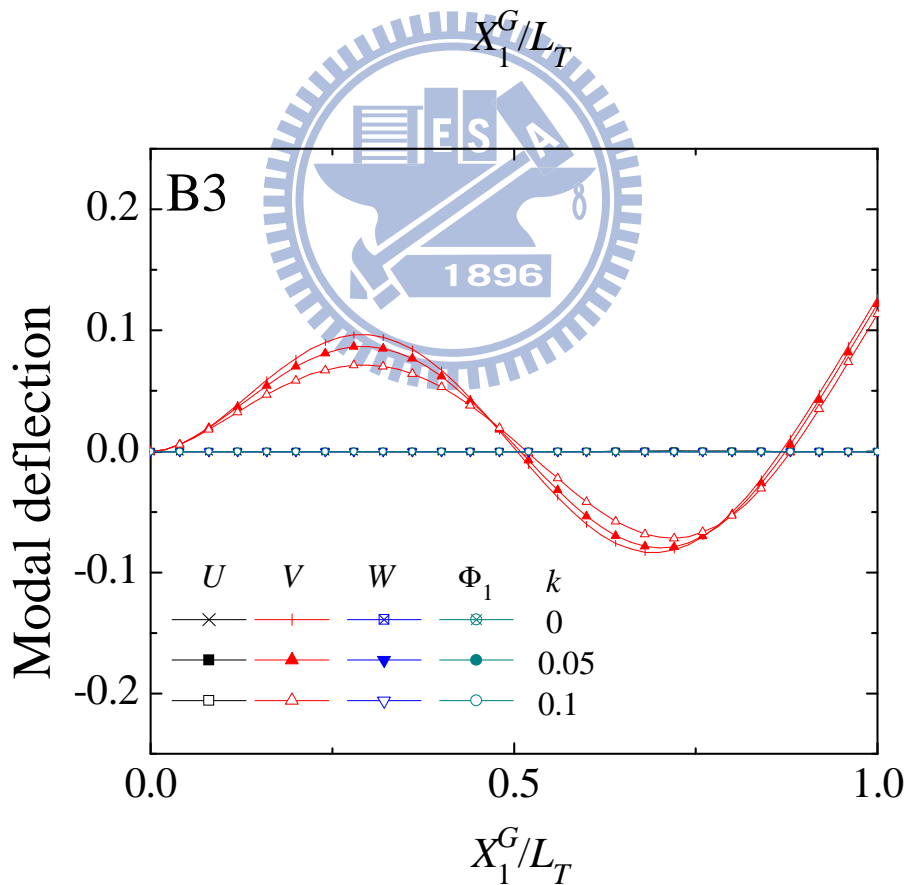
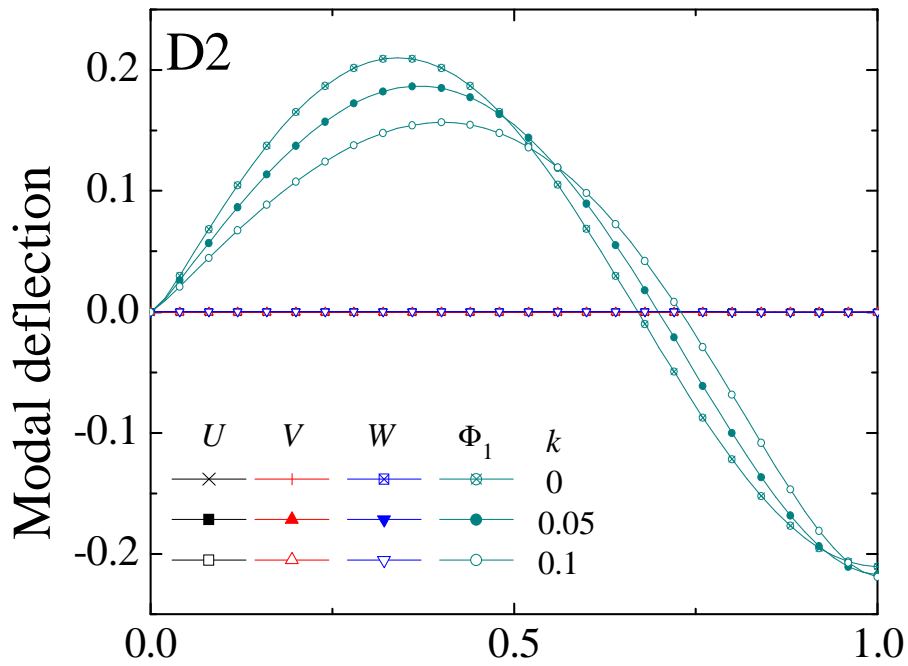
圖四十六 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第一、第二振動模態

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $r = 0$, $L_T/d = 20$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 0^\circ$, $N = 50$)



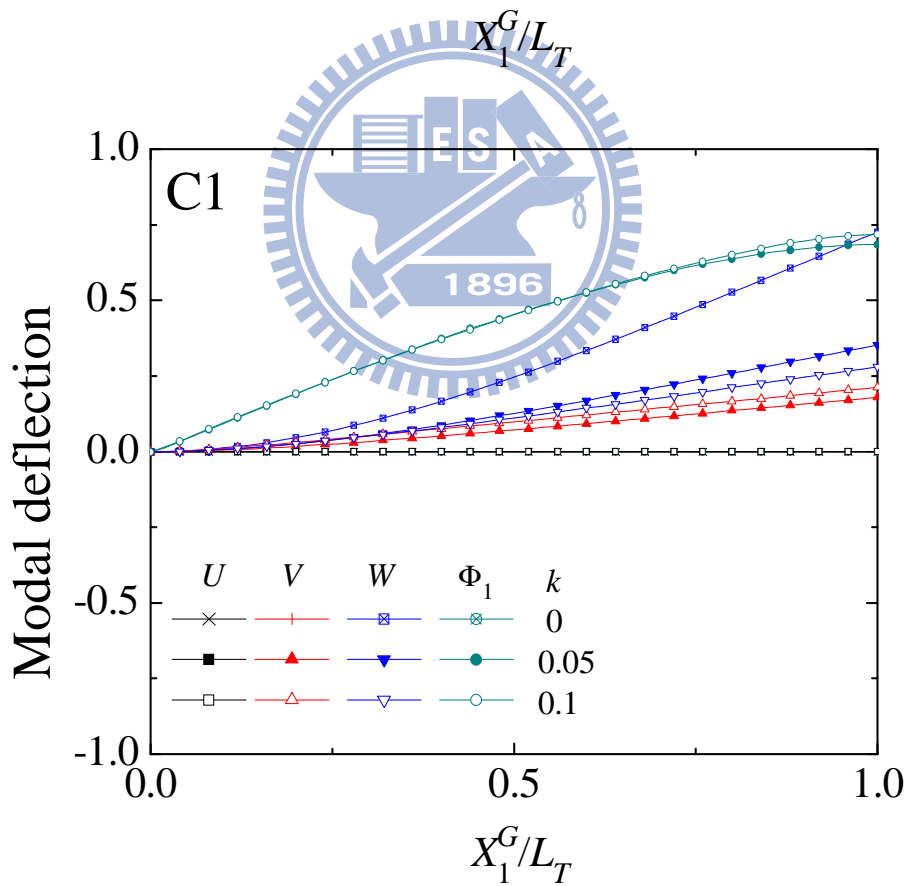
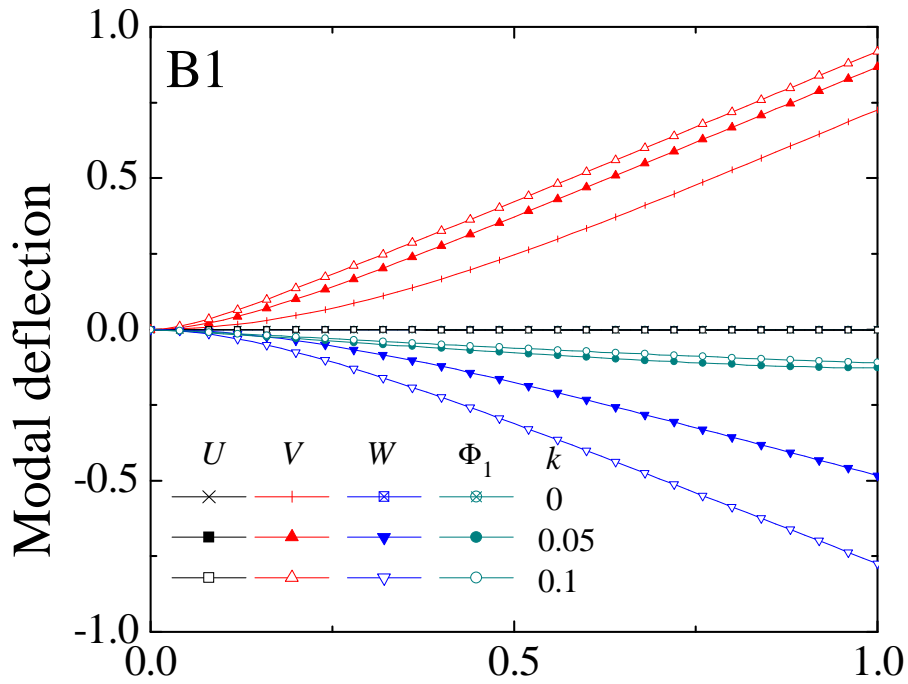
圖四十七 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第三、第四振動模態

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $r = 0$, $L_T/d = 20$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 0^\circ$, $N = 50$)



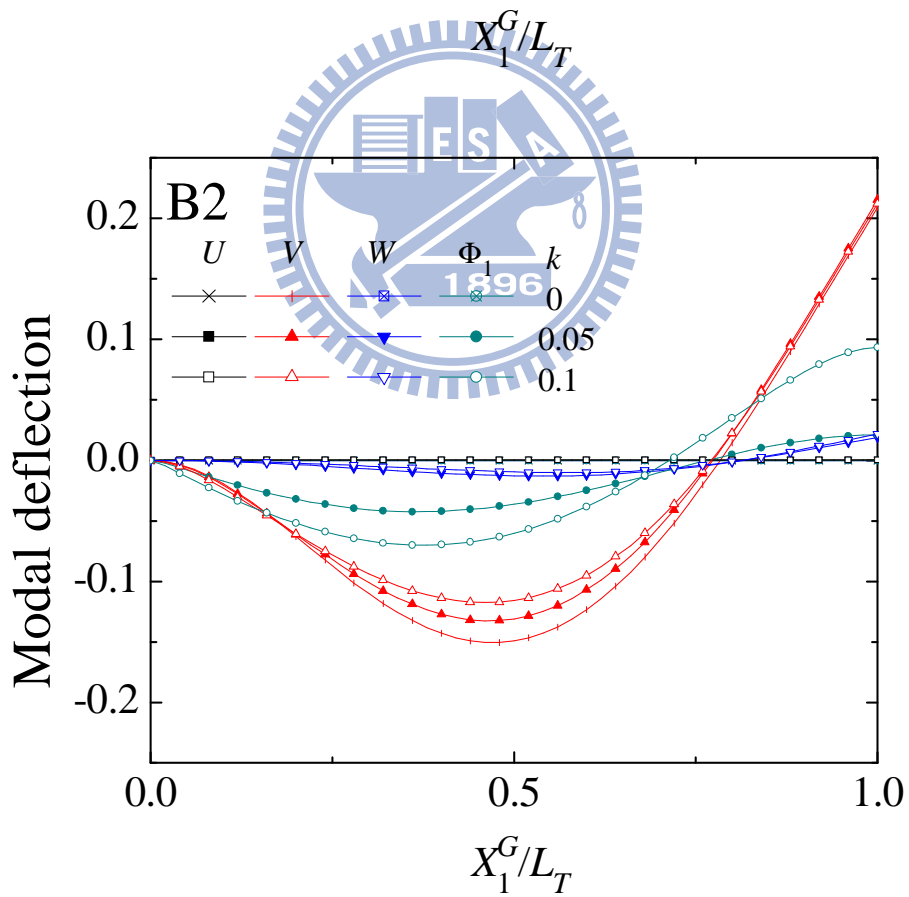
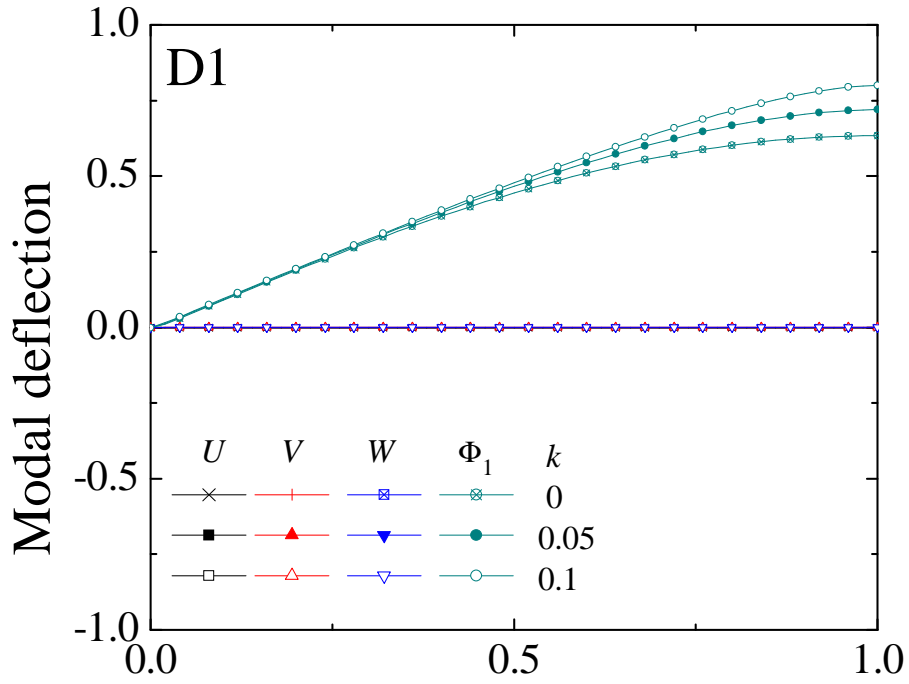
圖四十八 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第五、第六振動模態

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $r = 0$, $L_T/d = 20$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 0^\circ$, $N = 50$)



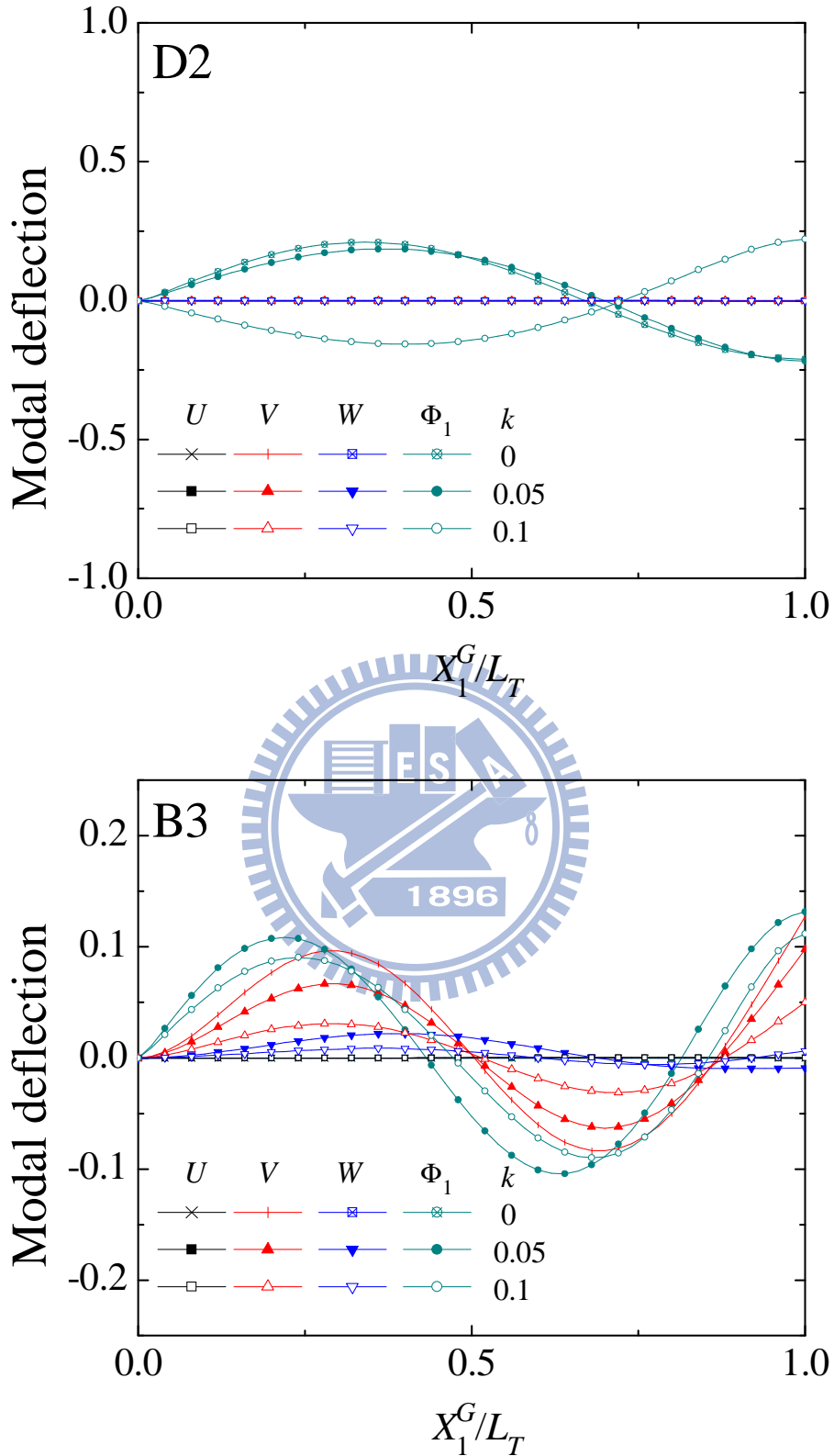
圖四十九 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第一、第二振動模態

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $r = 0$, $L_T/d = 20$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $N = 50$)



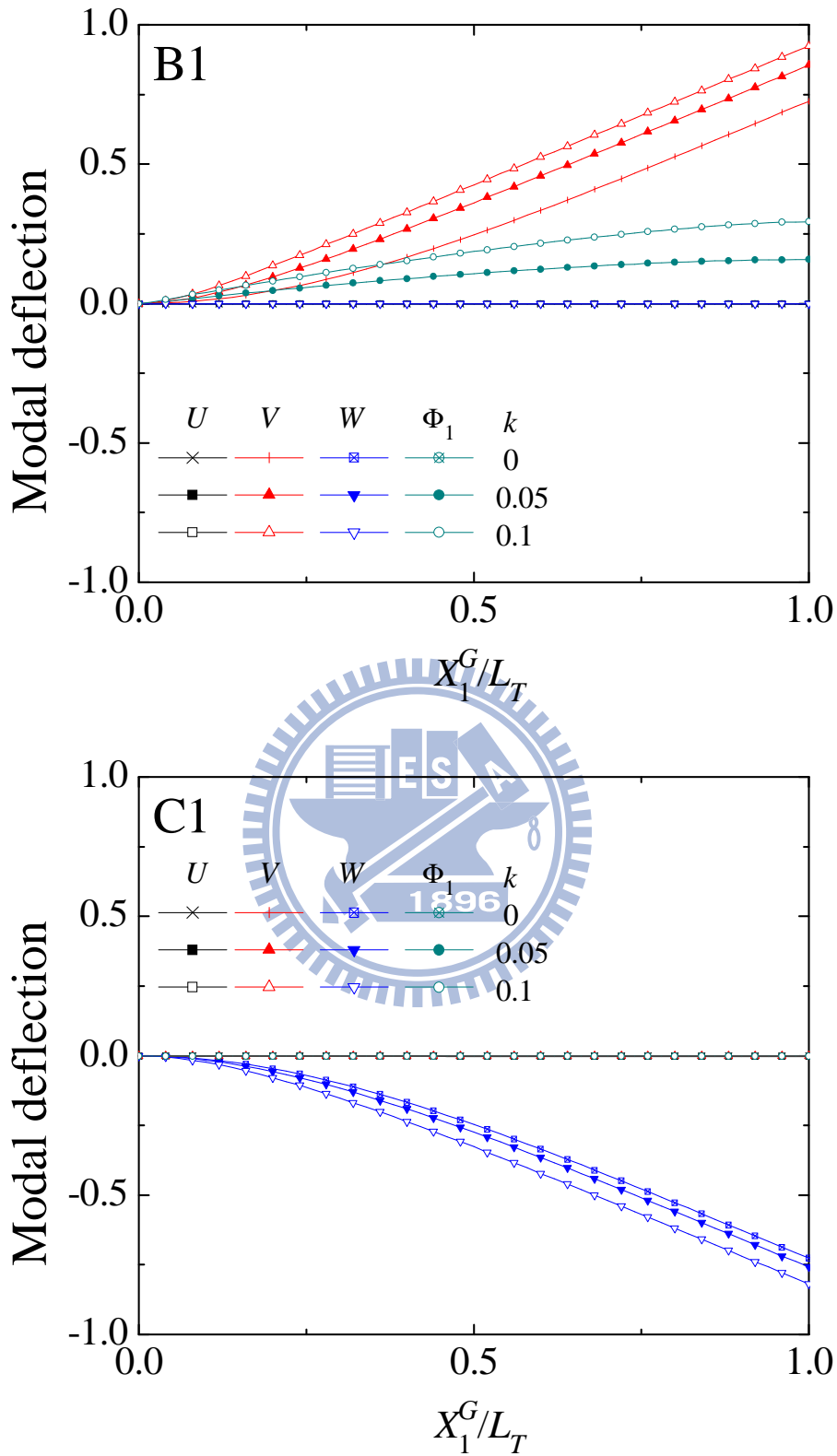
圖五十 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第三、第四振動模態

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $r = 0$, $L_T/d = 20$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $N = 50$)



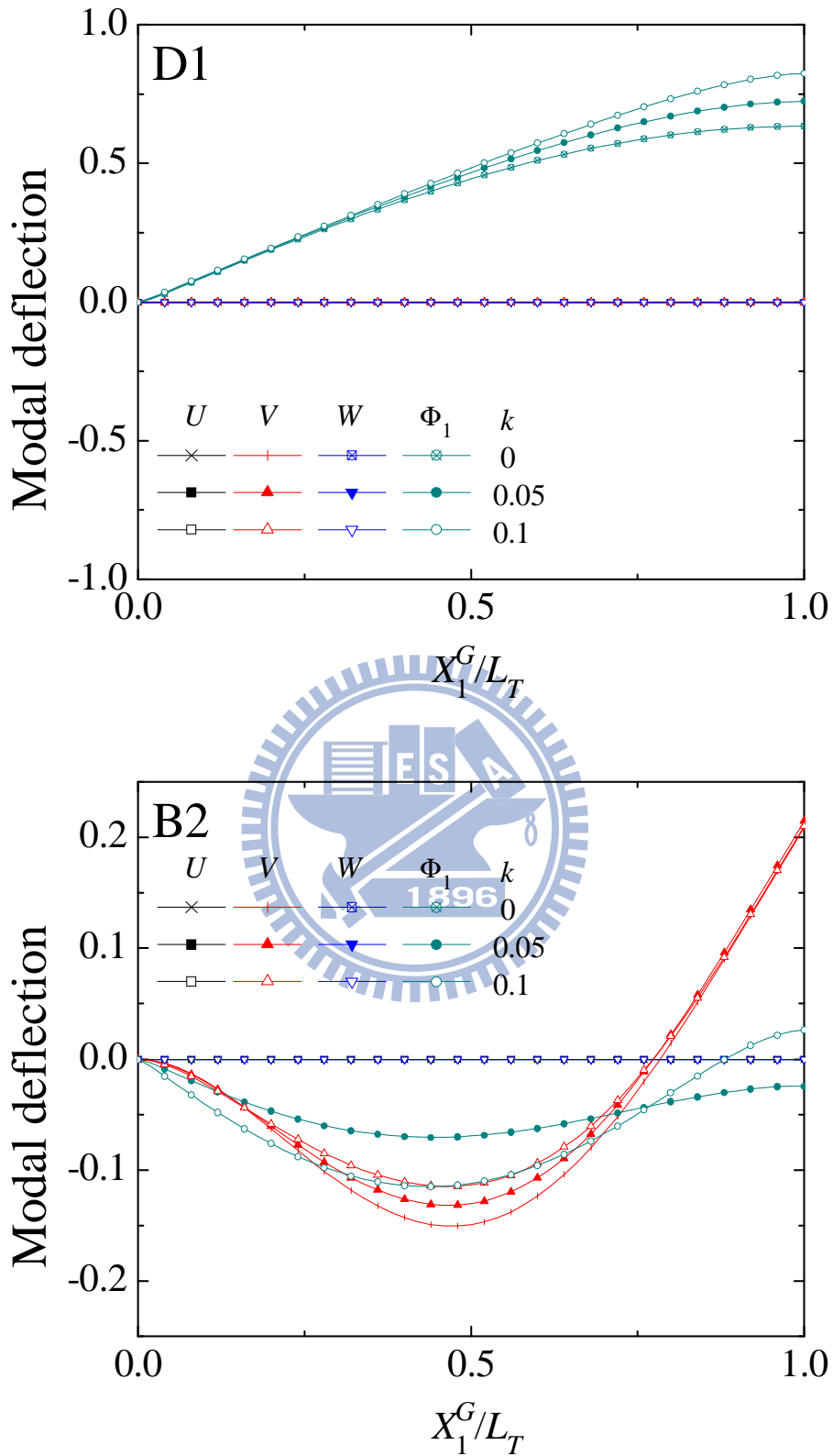
圖五十一 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第五、第六振動模態

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $r = 0$, $L_T/d = 20$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $N = 50$)



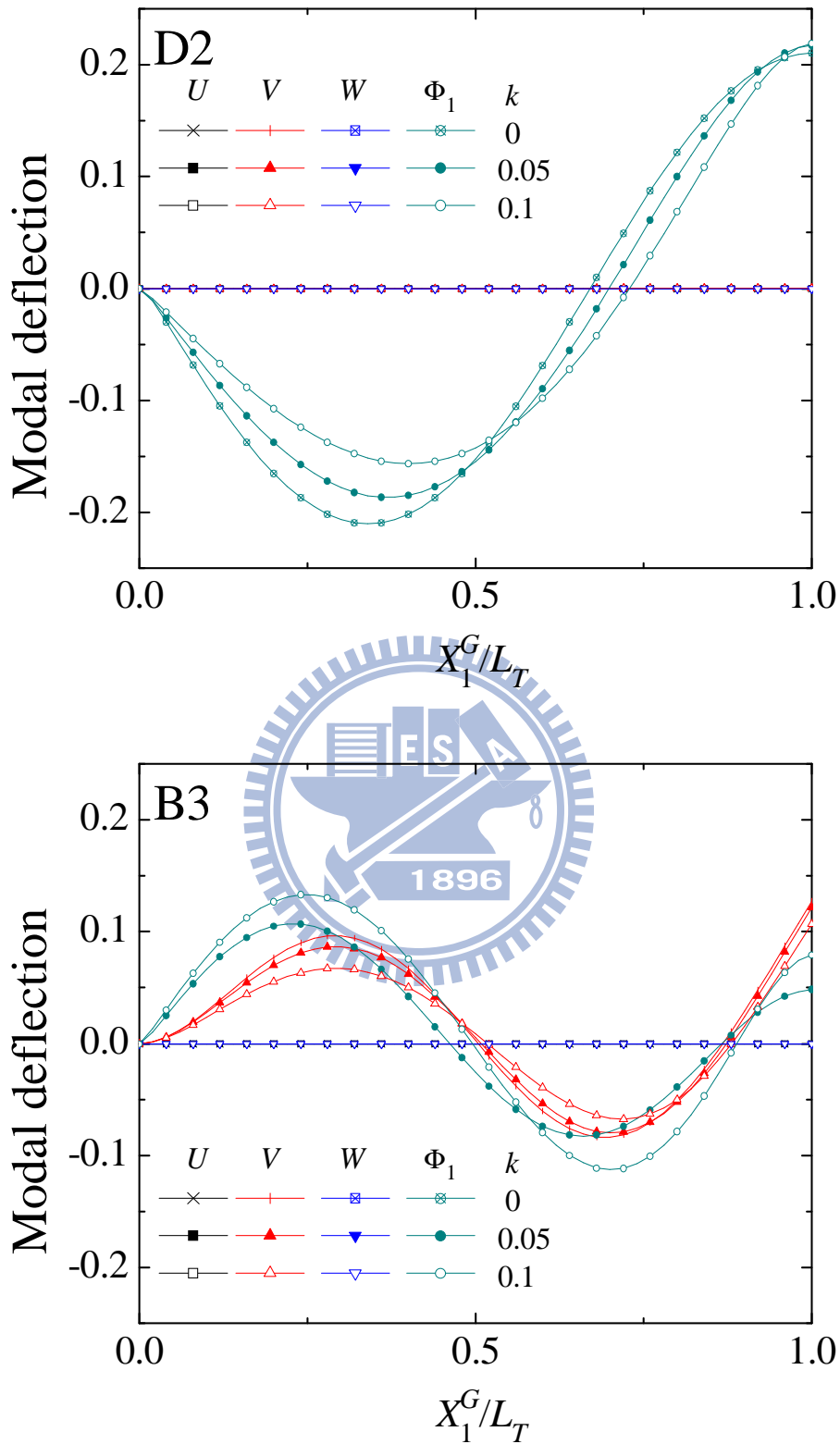
圖五十二 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第一、第二振動模態

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $r = 0$, $L_T/d = 20$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $N = 50$)



圖五十三 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第三、第四振動模態

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $r = 0$, $L_T/d = 20$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $N = 50$)



圖五十四 傾斜旋轉梁不同設定角不同轉速下的第五、第六振動模態

(十字斷面 $d \times b \times t = 14 \times 7 \times 0.35$, $r = 0$, $L_T/d = 20$, $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $N = 50$)

附錄 A 斷面常數

本附錄中所使用的斷面常數包括

$$A = \int dA$$

$$J = \int (y^2 + z^2 - z\omega_{,y} + y\omega_{,z}) dA$$

$$I_y = \int z^2 dA$$

$$I_z = \int y^2 dA$$

$$I_\omega = \int \omega^2 dA$$

$$K_I = \int (y^2 + z^2)^2 dA$$

$$\alpha_{yz\omega} = \int yz\omega dA$$

$$J_{y\omega z} = \int y\omega_{,z} dA$$

$$J_{z\omega y} = \int z\omega_{,y} dA$$

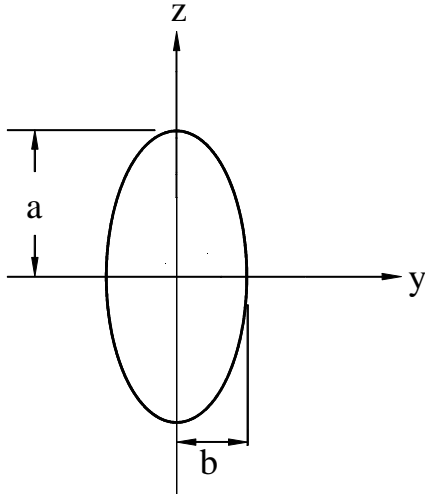


(2.7.14)

其中 ω 為斷面的翹曲函數(warping function)。

本附錄中考慮橢圓斷面，其斷面的形狀、尺寸、翹曲函數 ω (warping function)、及斷面的常數值分別表示如下：

橢圓斷面



$$A = \pi ab \quad \omega = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} yz$$

$$I_y = \frac{1}{4} \pi a^3 b \quad I_z = \frac{1}{4} \pi a b^3$$

$$I_\omega = \frac{a^3 b^3 \pi}{24} \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right)^2$$

$$J = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

$$\alpha_{yz\omega} = \frac{a^3 b^3 \pi}{24} \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right)$$

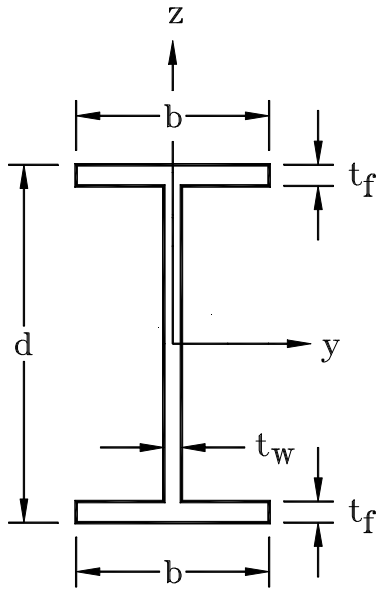
$$K_I = \frac{ab}{192} (24a^4 + 16a^2 b^2 + 24b^4) \pi$$

$$J_{y\alpha x} = \frac{ab^3 \pi}{4} \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right)$$

$$J_{y\alpha x} = \frac{ab^3 \pi}{4} \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right)$$

a : b	2	5	10	20	30
A/a^2 (10^{-1})	15.7079	6.2832	3.1416	1.5708	1.0472
I_y/a^4 (10^{-2})	39.2699	15.7080	7.8540	3.9270	2.6180
I_z/a^4 (10^{-4})	981.7477	62.8319	7.8540	0.9816	0.2909
J/a^4 (10^{-3})	314.1593	24.1661	3.1105	0.3917	0.1162
I_ω/a^6 (10^{-4})	58.9049	8.9229	1.2577	0.1620	0.0483
K_I/a^6 (10^{-2})	24.1346	8.0760	3.9536	1.9668	1.3100
I_y/Aa^2 (10^{-1})	2.5000	2.5000	2.5000	2.5000	2.5000
I_ω/Aa^4 (10^{-4})	37.5000	14.2011	4.0033	1.0313	0.4609
$J_{y\alpha x}/a^4$ (10^{-4})	589.0486	57.9986	7.6985	0.9769	0.2902
$J_{z\alpha y}/a^4$ (10^{-2})	23.5619	14.4997	7.6985	3.9074	2.6122
$\alpha_{yz\omega}/a^6$ (10^{-4})	98.1748	9.6664	1.2831	0.1628	0.0484

I 型斷面



翹曲函數：

Top flange

$$\omega = -y(z - d + t_f)$$

$$\text{for } \begin{cases} -0.5b \leq y \leq 0.5b \\ 0.5(d - 2t_f) \leq z \leq 0.5d \end{cases}$$

Web

$$\omega = yz$$

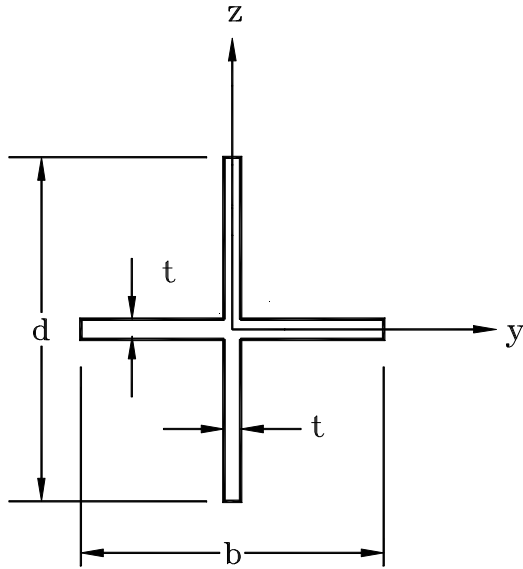
$$\text{for } \begin{cases} -0.5t_w \leq y \leq 0.5t_w \\ -0.5(d - 2t_f) \leq z \leq 0.5(d - 2t_f) \end{cases}$$

Bottom flange

$$\omega = -y(z + d - t_f) \quad \text{for } \begin{cases} -0.5b \leq y \leq 0.5b \\ -0.5d \leq z \leq -0.5(d - 2t_f) \end{cases}$$

	W14×159	W14×90	W10×100	W10×60	W10×30
d (in)	14.98	14.02	11.1	10.22	10.47
b (in)	15.565	14.52	10.34	10.08	5.81
t_f (in)	1.19	0.71	1.12	0.68	0.51
t_w (in)	0.745	0.44	0.68	0.37	0.30
A (10^1 in^2)	4.6432	2.6162	2.9186	1.6987	0.8761
J (in^4)	19.3870	3.8425	10.7306	2.2741	0.6034
I_y (10^2 in^4)	18.8970	9.8738	6.1856	3.3389	1.6820
I_z (10^2 in^4)	7.4833	3.6234	2.0666	1.1611	0.1669
I_ω (10^3 in^6)	35.6499	16.0600	5.1615	2.6458	0.4140
K_I (10^4 in^6)	18.6411	8.5996	2.8819	1.4482	0.4859
$J_{y\omega z}$ (10^2 in^4)	-7.4747	-3.6216	-2.0613	-1.1604	-0.1665
$J_{z\omega y}$ (10^2 in^4)	18.8096	9.8565	6.1372	3.3283	1.6794
$\alpha_{yz\omega}$ (10^3 in^6)	35.4734	16.0270	5.1184	2.6368	0.4132

十字斷面



翹曲函數

$$\omega = yz$$

$$\text{for } \begin{cases} -0.5t \leq y \leq 0.5t \\ -0.5d \leq z \leq 0.5d \end{cases}$$

$$\omega = -yz$$

$$\text{for } \begin{cases} -0.5b \leq y \leq -0.5t \\ -0.5t \leq z \leq 0.5t \end{cases}$$

$$\omega = -yz$$

$$\text{for } \begin{cases} 0.5t \leq y \leq 0.5b \\ -0.5t \leq z \leq 0.5t \end{cases}$$

$$J = \frac{2\left(\frac{b-t}{2}\right)t^3 + dt^3}{3}$$

$d \times b \times t$ (in)	14×7×0.7	14×7×0.35	14×3.5×0.35
A (in^2)	14.2100	7.2275	6.0025
J (in^4)	2.3210	0.2951	0.2451
I_y ($10^2 in^4$)	1.6025	0.8006	0.8004
I_z (in^4)	20.3885	10.0529	1.2993
I_ω (in^6)	7.3522	0.9191	0.8298
K_I ($10^3 in^6$)	4.8677	2.4284	2.3569
$J_{y\omega z}$ (in^4)	-19.6282	-9.9554	-1.2018
$J_{z\omega y}$ ($10^2 in^4$)	1.5985	0.8001	0.8002
$\alpha_{yz\omega}$ (in^6)	5.7182	0.7147	0.8043

附錄 B 旋轉傾斜梁的線性穩態解

若不考慮旋轉傾斜梁穩態變形對慣性力及梁之側向剛度的影響，則可用 d'Alembert 原理及剛體動力學求得慣性分佈力，再用材料力學可以求得旋轉傾斜梁的線性穩態解。

令圖 B1 中 \mathbf{r} 為轉軸 A 到旋轉梁上任一點 P 的位置向量， q_1 、 q_2 、 q_3 及 m_1 、 m_2 及 m_3 分別為作用在通過 P 點斷面 X_1 、 X_2 及 X_3 方向的慣性分佈力及力矩，則作用在通過 P 點斷面之一小段梁 dx 的慣性分佈力及力矩可以表示成

$$\{q_1, q_2, q_3\}dx = -\rho \int_A (\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) dA) dx = (-\rho \int_A \mathbf{a} dA) dx \quad (\text{B.1})$$

$$\{m_1, m_2, m_3\}dx = (-\rho \int_A \mathbf{r}_{QP} \times \mathbf{a} dA) dx \quad (\text{B.2})$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega \{0, \sin \beta, \cos \beta\} \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{AQ} + \mathbf{r}_{QP} = \{R \cos \alpha + x, -R \sin \alpha \cos \beta + y, R \sin \alpha \sin \beta + z\} \quad (\text{B.4})$$

$$\mathbf{r}_{AQ} + \mathbf{r}_{QP} = \{R \cos \alpha + x, -R \sin \alpha \cos \beta, R \sin \alpha \sin \beta\} \quad (\text{B.5})$$

$$\mathbf{r}_{QP} = \{0, y, z\} \quad (\text{B.6})$$

其中 ρ 、 A 為梁的密度及斷面積， Ω 為轉速。

將(B3)–(B.6)式代入(B.1)、(B.2)式整理可得

$$q_1 = \frac{k^2 EA}{L_T^2} (R \cos \alpha + x) \quad (\text{B.7})$$

$$q_2 = -\frac{k^2 EA}{L_T^2} R \sin \alpha \cos \beta \quad (\text{B.8})$$

$$q_3 = \frac{k^2 EA}{L_T^2} R \sin \alpha \sin \beta \quad (\text{B.9})$$

$$m_1 = -\frac{k^2 E}{L_T^2} \sin \beta \cos \beta (I_z - I_y) \quad (\text{B.10})$$

$$m_y = 0 \quad (\text{B.11})$$

$$m_z = 0 \quad (\text{B.12})$$

$$k^2 = \frac{\rho \Omega^2 L_T^2}{E} \quad (2.10.1)$$

其中 k 為無因次化轉速。由(B.4)及(B.5)式可知旋轉傾斜梁相當於受到如圖 B2 所示的分布力。

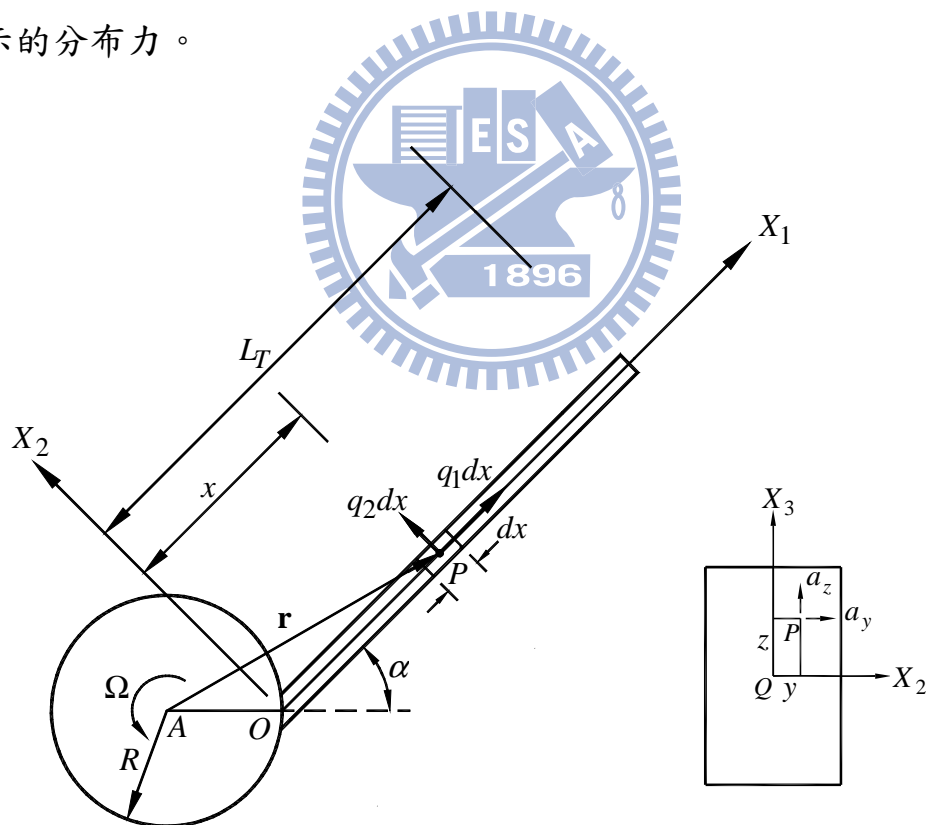
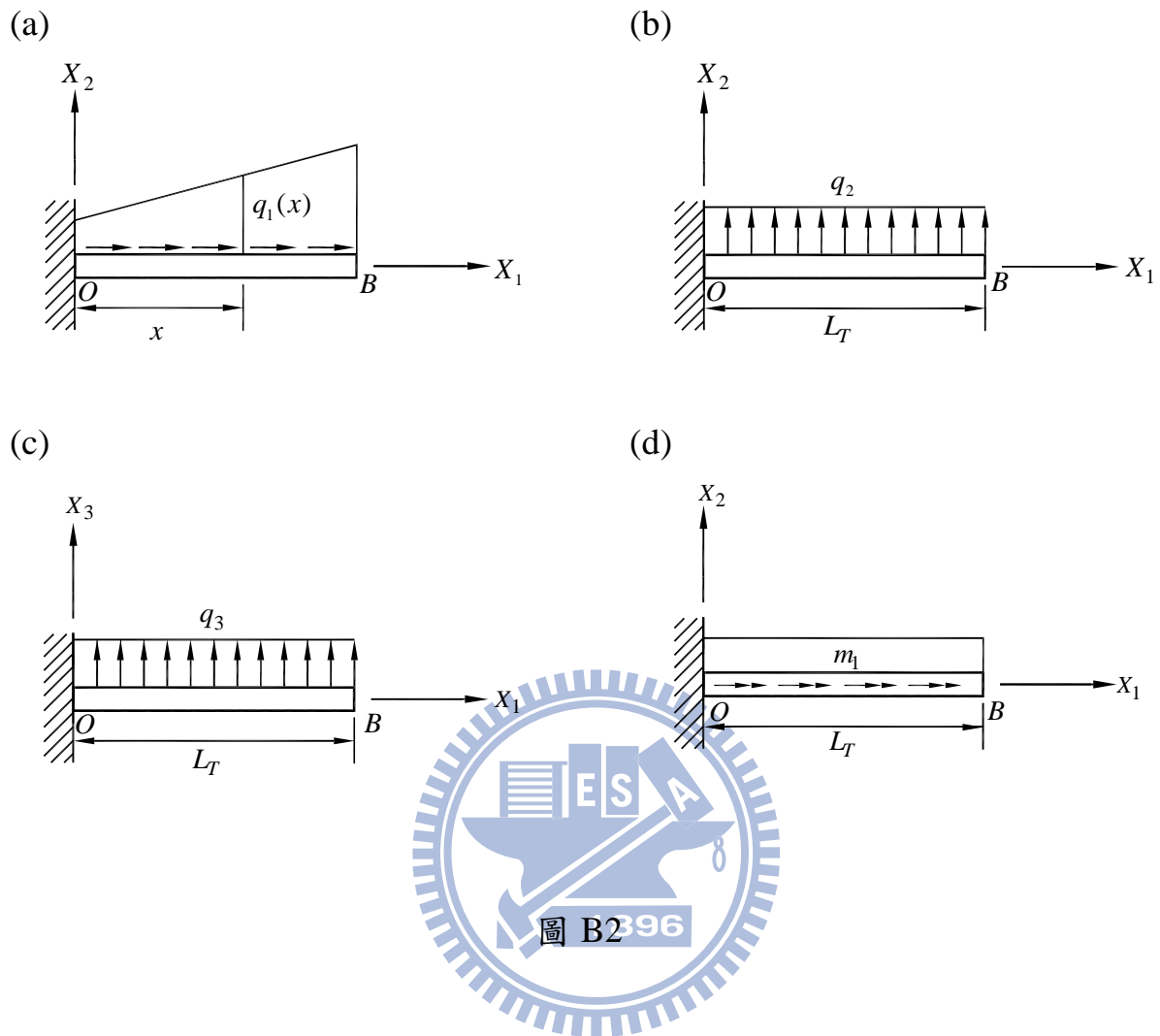


圖 B1



由(B.7)式及圖 B2(a)可得旋轉傾斜梁在距離固定端 x 處的軸向位移 $u(x)$

及膜應變(membrane strain) $\epsilon_0(x)$ 可表示成

$$u(x) = -\frac{k^2}{L_T^2} \left[R \cos \alpha \left(L_T x - \frac{1}{2} x^2 \right) + \frac{1}{2} L_T^2 x - \frac{1}{6} x^3 \right] \quad (\text{B.13})$$

$$\epsilon_0 = \frac{k^2}{L_T^2} \left[R \cos \alpha (L_T - x) \cos \alpha + \frac{1}{2} (L_T^2 - x^2) \right] \quad (\text{B.14})$$

由(B.14)式可知當 $x = 0$ 時，旋轉傾斜梁有最大的膜應變 $\epsilon_{0\max}$

$$\epsilon_{0\max} = k^2 \left(r \cos \alpha + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{B.15})$$

$$r = \frac{R}{L_T} \quad (2.10.1)$$

其中 r 為無因次轉軸半徑。

由(B.8)式及圖 B2(b)可得旋轉傾斜梁在自由端 X_2 方向的端點位移 v_B 為
[18]

$$\frac{v_B}{L_T} = -\frac{q_2 L_T^4}{8EI_z L_T} = -\frac{n_y^2 k^2 r \sin \alpha \cos \beta}{8} \quad (B.16)$$

$$n_y = \sqrt{\frac{AL_T^2}{I_z}} \quad (2.10.1)$$

其中 E 為楊氏係數， I_z 為梁斷面對 z 軸的二次矩， n_y 為 $X_1 - X_2$ 平面的細長比， r 為無因次轉軸半徑。

由(B.8)式可得梁在 $X_1 - X_2$ 平面的最大應變的絕對值為[18]

$$\varepsilon_{b \max} = \frac{M_{2 \max} c_2}{EI_z} = -\frac{k^2 E A c_2}{2EI_z} R \sin \alpha \cos \beta = \frac{n_y^2 k^2 r}{2} \frac{c_2}{L_T} \sin \alpha \cos \beta \quad (B.17)$$

其中 c_2 為斷面上的點和 X_3 軸的最大距離。

由(B.9)式及圖 B2(c)可得旋轉傾斜梁在自由端 X_3 方向的端點位移 w_B 為
[18]

$$\frac{w_B}{L_T} = -\frac{q_2 L_T^4}{8EI_y L_T} = \frac{n_z^2 k^2 r \sin \alpha \sin \beta}{8} \quad (B.18)$$

$$n_z = \sqrt{\frac{AL_T^2}{I_y}} \quad (2.10.1)$$

其中 E 為楊氏係數， I_y 為梁斷面對 y 軸的二次矩， n_z 為 $X_1 - X_3$ 平面的細長比， r 為無因次轉軸半徑。

由(B.9)式圖及 B2(c)可得梁在 $X_1 - X_3$ 平面的最大應變的絕對值為[18]

$$\varepsilon_{c \max} = \frac{M_{3 \max} c_3}{EI_y} = \frac{k^2 E A c_3}{2EI_y} R \sin \alpha \sin \beta = \frac{n_z^2 k^2 r}{2} \frac{c_3}{L_T} \sin \alpha \cos \beta \quad (\text{B.19})$$

其中 c_3 為斷面上的點和 X_2 軸的最大距離。



附錄 C 不均勻元素網格



令 $AF=1$ 為無因次法後梁的長度， L_{IJ} 表 I 、 J 兩點的距離， N_{IJ} 表 I 、 J 間元素的數目。

本文中不均勻網格的的產生過程可說明如下：

取一 N_{REF} 、 L_{AB} 、 N_{AB} 、 L_{EF} 及 N_{EF} ， AB 、 CD 、 EF 間為不同的均勻網格，

CD 間元素的長度為 $\frac{1}{N_{REF}}$ ，元素的數目 N_{CD} 、 N_{BC} 、 N_{DE} 的決定方式如下：

$$\text{令 } L_{AC} = \frac{N_C}{N_{REF}}, \quad 0 \leq L_{BC} < \frac{1}{N_{REF}}$$

$$L_{AD} = \frac{N_D}{N_{REF}}, \quad 0 \leq L_{DE} < \frac{1}{N_{REF}}$$

其中 N_D ， N_C 為整數。由上式可以求出 N_D ， N_C 及 L_{DE} ， L_{BE} ，

取 $N_{CD} = N_D - N_C$ ，

若 $L_{DE} > 0$ ，則取 $N_{DE} = 1$ ，否則則取 $N_{DE} = 0$

若 $L_{BC} > 0$ ，則取 $N_{BC} = 1$ ，否則則取 $N_{BC} = 0$

則 $N^* = N_{AF} = N_{AB} + N_{BC} + N_{CD} + N_{DE} + N_{EF}$

本文中取 $L_{AB} = 0.02$ 、 $N_{AB} = 10$ 、 $L_{EF} = 0.01$ 及 $N_{EF} = 5$ 。