

國立交通大學

機械工程學系

碩士論文

以 DSP 實現 GPS 與 IMU 感測器整合系統

Implementation of a DSP-based Sensor Fusion
System : An Integrated System of GPS and IMU



研究生：廖文選

指導教授：陳宗麟 教授

中華民國九十九年十月

以 DSP 實現 GPS 與 IMU 感測器整合系統

Implementation of a DSP-based Sensor Fusion
System : An Integrated System of GPS and IMU

研究生：廖文選

Student : Wen-Hsuan Liao

指導教授：陳宗麟 博士

Advisor : Dr. Tsung-Lin Chen

國立交通大學

機械工程學系

碩士論文

A Thesis

Submitted to Department of Mechanical Engineering

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

in

Mechanical Engineering

October 2010

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十九年十月

以 DSP 實現 GPS 與 IMU 感測器整合系統

研究生：廖文選

指導教授：陳宗麟 博士

國立交通大學機械工程學系

中文摘要

本文目的在發展一套以 Extended Kalman Filter 作為演算法之基礎架構，整合 GPS 與 IMU 的訊號用以提高運動物體的軌跡與姿態判定的精準度。GPS 可以提供一運動物體於 3D 空間中的位置與速度，然而其輸出頻率僅有 1Hz，定位精度約 10 公尺。IMU 包括一 3 軸的加速規與 3 軸的陀螺儀，可以提供三軸的加速度量測與三軸的角速度量測。其輸出頻率可高達 1KHz，然而其輸出訊號亦包含雜訊且易出現訊號飄移 (drifting)。因此若能整合 GPS 與 IMU 的輸出，將有機會獲得一高輸出頻寬、高精度的 6DOF 定位資訊。

本文選用 Extended Kalman Filter 來整合 GPS 與 IMU 輸出的目的在於：(1) 它可以整合具不同輸出頻率的感測器；(2) 它可藉由其訊號整合方式、運算方式來消除各個感測器量測雜訊 (noise) 對整體訊號估測的影響，提高定位精度。至於訊號飄移 (drifting) 的部分，本文嘗試建立多種的 GPS 與 IMU 整合架構，並探討如何利用不同的整合架構來消除 IMU 訊號漂移所造成的估測誤差，其研究結果列表於本文的結論一章中。

最後，本文介紹 IMU 訊號輸出的校正方式，為此一感測器整合系統準備。並以一 DSP 平台來實現此一訊號整合系統。目前，IMU 輸出的類比訊號與 GPS 輸出的 NMEA 0183 之 ASCII Code 數位訊號，皆可同步的經由 DSP 來接收。以 C-code 來實現 Extended Kalman Filter 的工作仍在持續中。

Implementation of a DSP-based Sensor Fusion System : An Integrated System of GPS and IMU

Student: Wen-Hsuan Liao

Advisor: Dr. Tsung-Lin Chen

Department of Mechanical Engineering
National Chiao Tung University

Abstract

This thesis aims to develop a sensor fusion system and implement it on a DSP platform. This sensor fusion system uses Extended Kalman filter to coordinate GPS output and IMU output to obtain accurate trajectory and attitude for an object in motion. The GPS can provide the position and velocity information. However, its data output rate is 1 Hz and the position accuracy is around 10 meter. The IMU, consisting of 3-axis accelerometers and 3-axis gyroscopes, can provide 3-axis accelerations and 3-axis angular rate measurements with a data rate around 1KHz. However, its signal is noisy and drifting. Therefore, it is preferred to combine these two sensors to obtain a high data-throughput and high accurate 6 DOF sensor fusion system.

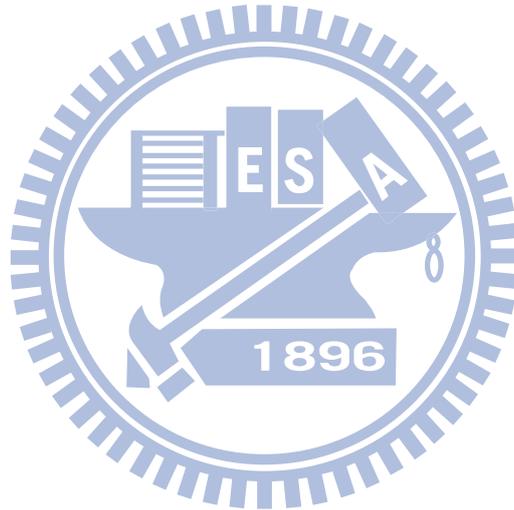
The advantages of using Extended Kalman filter are that it can coordinate sensors with different data output rate and it can minimize the effect from measurement noise associated with each sensor. As for the signal drifting from IMU, this thesis discusses different sensor fusion systems that comprised of different sensor units. This research result is summarized in table shown in the conclusion section in this thesis.

Lastly, this thesis describes the detail procedures of sensor calibration which is needed prior to the construction of a sensor fusion system. This sensor fusion system will be implemented on a DSP platform. Currently, the GPS data, which is NMEA 0813 in ASCII codes, and the IMU data, which is analog, can feed in the DSP synchronously. The C-code coding for the Extended Kalman filter is on the way.

誌謝

本論文得以順利完成，首先要感謝指導教授陳宗麟老師在這兩年來的悉心督促，給予我許多研究上的知識。老師在此領域上有卓越的研究基礎，所以在我遇到問題的時候能夠適時的給予協助，並提供我許多自己的思考空間，讓我學習到研究應有的態度與解決問題的思維邏輯。在此獻上誠摯的謝意與敬意。

此外，更要感謝實驗室的紀建宇學長、蔡俊胤學長、許齡元學長與實驗室的同學在研究過程中給予我許多不同的建議與想法使我在碩士生涯中成長不少也給予我許多美好的回憶。



目錄

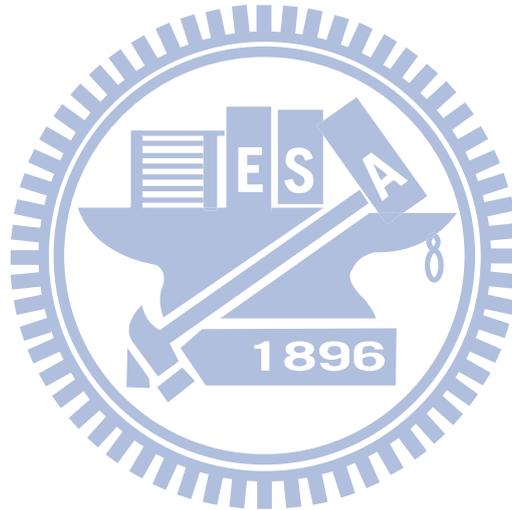
中文摘要.....	I
Abstract.....	II
誌謝.....	III
目錄.....	IV
表目錄.....	VI
圖目錄.....	VII
第一章 緒論	1
1.1 研究動機與文獻回顧.....	1
1.2 論文架構.....	2
第二章 姿態量測序言	4
2.1 座標系統.....	4
2.1.1 地心地固座標系 (Earth Centered Earth Fixed Frame)	4
2.1.2 導航座標系 (Navigation Frame)	4
2.1.3 附體座標系(Body Frame)	5
2.2 座標轉換.....	5
2.2.1 側滾角 (φ)	6
2.2.2 俯仰角 (θ)	6
2.2.3 航向角 (ψ)	7
2.3 姿態表示法.....	7
2.3.1 尤拉角法 (Euler angle).....	7
2.3.2 四元數法 (Quaternion)	9
第三章 感測元件量測原理	11
3.1 慣性感測元件(IMU).....	11
3.1.1 加速規.....	11
3.1.2 陀螺儀.....	13
3.2 GPS 定位系統.....	13
3.3 氣壓式高度計	15
第四章 感測器整合系統	16
4.1 擴增式卡爾曼濾波器(Extended Kalman Filter, EKF)	16
4.2 整合系統的觀察性分析	17
4.3 感測器整合系統模型	18
4.4 1 顆 GPS+IMU.....	22
4.4.1 陀螺儀量測具有訊號誤差，加速規量測無訊號誤差.....	22
4.4.2 陀螺儀量測無訊號誤差，加速規量測具有訊號誤差.....	26
4.5 2 顆 GPS+IMU.....	31
4.5.1 加速規與陀螺儀輸入訊號不帶有偏壓.....	31

4.5.2	加速規與陀螺儀輸入訊號帶有偏壓	40
4.6	2 顆 GPS+Barometer+IMU	45
4.6.1	加速規與陀螺儀輸入訊號不帶有偏壓	46
4.6.2	加速規與陀螺儀輸入訊號帶有偏壓	51
4.7	3 顆 GPS+IMU	56
第五章	DSP 實現系統訊號整合	62
5.1	硬體架構	62
5.2	感測元件性能測試與分析	62
5.2.1	IMU 測試校正	63
5.2.2	GPS 測試分析	65
第六章	結論與未來計畫	67
6.1	結論	67
6.2	未來計畫	68
參考文獻	69



表目錄

表(4.1) 模擬參數	19
表(4.2) 模擬參數	19
表(5.1) IMU 測試結果	65
表(6.1) 模擬結果	67



圖目錄

圖(2.1)ECEF 與 NED 座標系.....	5
圖(2.2)附體座標系.....	5
圖(2.3) 側滾角之示意圖及座標.....	6
圖(2.4) 俯仰角之示意圖及座標.....	6
圖(2.5) 航向角之示意圖及座標.....	7
圖(2.6) 尤拉定理.....	9
圖(3.1)IMU 元件.....	11
圖(3.2)固定座標及附體座標.....	11
圖(3.3)GPS 模組.....	14
圖(3.4)氣壓式高度計模組.....	15
圖(4.1) EKF 流程圖.....	17
圖(4.2)四元數連續系統與離散系統對照圖	20
圖(4.3)感測器擺放示意圖.....	22
圖(4.4)四元數對照圖.....	25
圖(4.5)角速度對照圖.....	25
圖(4.6)導航座標系 0 點速度對照圖.....	26
圖(4.7)導航座標系 0 點位置對照圖.....	26
圖(4.8)四元數對照圖.....	29
圖(4.9)附體座標系 0 點加速度對照圖	29
圖(4.10)導航座標系 0 點速度對照圖.....	30

圖(4.11)導航座標系 0 點位置對照圖	30
圖(4.12)感測器擺放示意圖	31
圖(4.13)四元數對照圖	34
圖(4.14)角速度對照圖	34
圖(4.15)附體座標系 0 點加速度對照圖	35
圖(4.16)導航座標系 0 點速度對照圖	35
圖(4.17)導航座標系 0 點位置對照圖	36
圖(4.18)四元數對照圖	38
圖(4.19)角速度對照圖	38
圖(4.20)附體座標系 0 點加速度對照圖	39
圖(4.21)導航座標系 0 點速度對照圖	39
圖(4.22)導航座標系 0 點位置對照圖	40
圖(4.23)四元數對照圖	43
圖(4.24)陀螺儀訊號偏壓對照圖	43
圖(4.25)加速規訊號偏壓對照圖	44
圖(4.26)導航座標系 0 點速度對照圖	44
圖(4.27)導航座標系 0 點位置對照圖	45
圖(4.28)感測器擺放示意圖	46
圖(4.29)四元數對照圖	49
圖(4.30)角速度對照圖	49
圖(4.31)附體座標系 0 點加速度對照圖	50

圖(4.32) 導航座標系 0 點速度對照圖	50
圖(4.33) 導航座標系 0 點位置對照圖	51
圖(4.34) 四元數對照圖	54
圖(4.35) 陀螺儀訊號偏壓對照圖	54
圖(4.36) 加速規訊號偏壓對照圖	55
圖(4.37) 導航座標系 0 點速度對照圖	55
圖(4.38) 導航座標系 0 點位置對照圖	56
圖(4.39) 感測器擺放示意圖	57
圖(4.40) 四元數對照圖	59
圖(4.41) 陀螺儀訊號偏壓對照圖	59
圖(4.42) 加速規訊號偏壓對照圖	60
圖(4.43) 導航座標系 0 點速度對照圖	60
圖(4.44) 導航座標系 0 點位置對照圖	61
圖(5.1) 系統整合架構圖	62
圖(5.2) 實驗平台	63
圖(5.3) 單軸直線運動之 IMU 實際六軸訊號	63
圖(5.4) 平台訊號與 IMU 加速規訊號對照圖	64
圖(5.5) 平台訊號與 IMU 陀螺儀訊號對照圖	65
圖(5.6) GPS 實際字串訊號分析	66
圖(5.7) DSP 同步處理 IMU 實際訊號與 GPS 模擬訊號	66

第一章 緒論

1.1 研究動機與文獻回顧

近年來微機電技術蓬勃發展，使得設計與製作微機電式的陀螺儀 (MEMS Gyroscope) 與加速規 (MEMS Accelerometer) 的門檻降低。這些微機電式的感測元件尺寸較傳統機械式的感測元件小很多，且在製作成本也降低許多，也因此創造出新的市場機會。以近年持續發展的 GPS 定位系統為例，其訊號擷取時間長達一秒鐘，對高速行進的物體而言，訊號擷取頻率極高的微機電式的加速規、陀螺儀等等感測元件更顯重要，且更加容易應用在低成本的導航系統感測、物體姿態追蹤裝製的相關電子產品上。即時且精確的物體姿態追蹤裝置，廣泛應用於機器人、航太科技、汽車工業，如今更可以應用在虛擬實境遊戲元件、行動通訊等更加生活化的電子產業。

慣性追蹤系統中藉著慣性量測元件，如加速規、陀螺儀等元件，來量測物體的加速度及角速度。加速規與陀螺儀具有高精度且高輸出頻率 (1KHz) 之加速度與角速度量測，透過積分運算進而獲得運動物體的速度、位置與角度。然而實際應用中，慣性量測元件會因為偏壓及雜訊而造成訊號積分漂移。所謂的訊號積分漂移主要是由於慣性量測元件所量測出來的訊號帶有偏壓與雜訊，隨著積分運算而產生訊號誤差累積的情形。而使用 GPS 定位系統雖可直接獲得運動物體軌跡路徑，但其訊號輸出頻率太低 (1Hz)，無法滿足即時物體姿態與路徑追蹤，但可利用 EKF 整合 GPS 定位系統所獲得之資訊做為修正慣性量測元件所量測之誤差，此誤差則可能來自初始條件設定、訊號雜訊與偏壓等等因素，如慣性量測元件常因為操作電壓不同或電壓源不穩定而產生訊號偏壓有所誤差或漂移，造成實際應用上初始化困難，因此利用加速規、陀螺儀、GPS 定位系統所組成的感測器整合系統，來精準估測物體運動姿態與路徑是需要的，另外本文中額外增

加一氣壓式高度計感測器，探討不同整合架構下對運動物體的軌跡與姿態估測之影響。

EKF 是一種最佳化的演算法[6][7]，不僅可應用於非線性系統亦能整合不同輸出頻率且具有雜訊與訊號飄移的感測元件來獲得系統的狀態變數，尤其當雜訊來源為高斯雜訊 (Guassian noise) 時，更可以得到最小化的均方誤差 (mean square error)，以提高姿態判定的精度。但是在運用 EKF 演算架構下，所建立出來的動態方程式中，必須滿足觀察性矩陣為滿秩(Full Rank)，即為可觀察之動態方程式方可有效估測系統狀態。

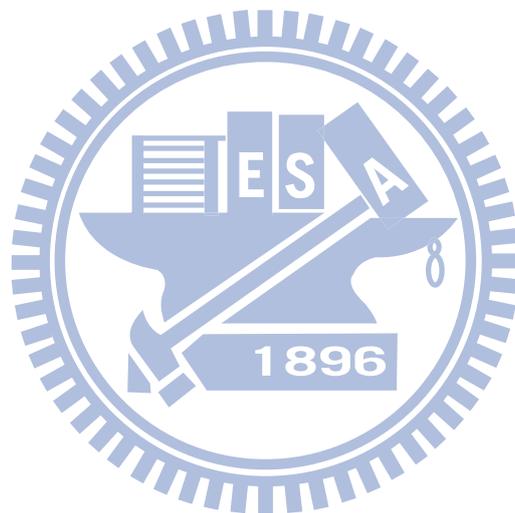
姿態估測問題即是算出姿態矩陣，此矩陣代表物體附體座標系相對導航座標系的旋轉關係。數學上有多種姿態表式法，有方向餘弦法、尤拉角法、四元數法。方向餘弦法具有九個變數，故需較多的計算時間，因此在導航系統中較為少用。尤拉角法只需三個變數即可描述附體座標系相對導航座標系的關係，但此法會產生奇異性的發生，故使用時則必須避開奇異點。而四元數法需四個變數但卻能有效避開尤拉角所產生的奇異點問題，而且適用於數值運算，故則以四元數法[5]為主。

目前已有許多 IMU 與 GPS 整合系統之相關研究，如文獻[1][2][3][4]，有別於大多文獻，本文將探討以更多元之觀察系統，以 GPS 所擷取之物體速度與位置資訊整合 IMU 與氣壓式高度計，以精準獲得運動物體姿態與路徑，並以 DSP (TMS320 F2812)系統[8]同步整合 GPS、陀螺儀、加速規、氣壓式高度計的類比與數位訊號，以 GPS 補償陀螺儀與加速規的量測訊號所造成之訊號積分漂移。

1.2 論文架構

本文共分為六章，第一章「緒論」，介紹研究動機、文獻回顧與計畫架構。第二章「姿態量測序言」，介紹使用座標、座標轉換以及四元數表示法。第三章「感測元件量測原理」，介紹各感測元件之原理、訊號處理與應用。第四章「感測器整合系統」，介紹擴增式卡爾曼濾波器並針對不

同模擬情況建立其估測系統動態模型，完成觀察性判別與模擬。第五章「DSP 實現系統訊號整合」，介紹硬體架構，以 DSP 實現系統訊號整合與感測元件測試與分析，第六章「結論與未來計畫」，總結此計畫目前為止的成果結論並提出未來計畫。



第二章 姿態量測序言

2.1 座標系統

在姿態估測系統過程中，除了仰賴感測元件取的量測值外，尚須透過座標系轉換以推算出適合使用者習慣的航向角及位置。本節將介紹一般常用的座標系及不同座標系之間的轉換。

2.1.1 地心地固座標系 (Earth Centered Earth Fixed Frame)

地心地固座標系也稱為傳統地面座標系 (Conventional Terrestrial Reference System, CTRS)，是以地心為原點但其他三個軸相對於地球卻是固定的，因此是隨著地球旋轉。其三軸的原點規定如下：

原點：位於地球的質量中心。

X 軸：通過格林威治之天文子午圈，即為經度為零度。

Z 軸：為地球的自轉軸，由原點指向北極點，即為平行於 CIO(Conventional International Origin)之平均北極。

Y 軸：由右手座標系 Z×Y 來決定。

2.1.2 導航座標系 (Navigation Frame)

這組座標系通常用於導航使用，可以直接提供導航者方位、航向等訊息。其軸向定義如下。

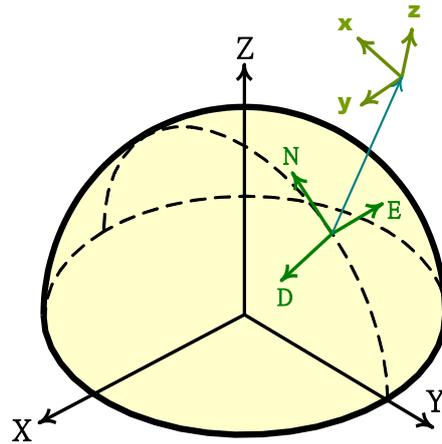
原點：定義為導航者所處的位置。

N 軸：指向地理北方。

D 軸：指向地心，即為平行地球的重力方向。

E 軸：由右手座標系 D×N 來決定，故指向東方。

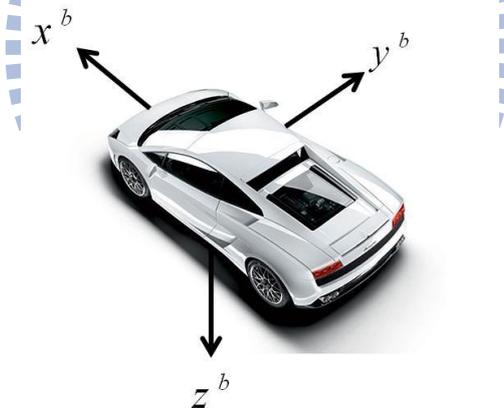
因此也簡稱為 NED 座標系。



圖(2.1)ECEF 與 NED 座標系

2.1.3 附體座標系 (Body Frame)

它是一組正交座標系，其三軸的定義通常是對準於載具 (vehicle) 前方—右側方—下方，原點位於載具的重心，如圖(2.2)所示，其附體做標定亦於物體上，並隨著物體移動及旋轉。



圖(2.2)附體座標系

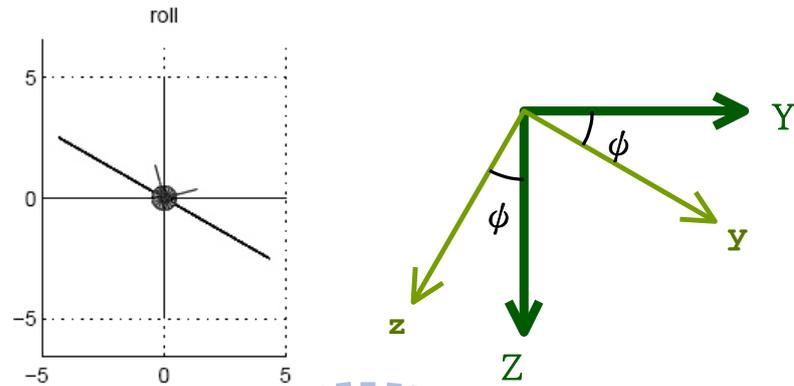
2.2 座標轉換

前述之地心地固座標系、導航座標系、附體座標系，皆是用以描述物體於一空間中的位置，其中附體座標系會隨著物體旋轉，用來描述物體位置最為方便，但是欠缺一固定點做為參考，因此有必要探討附體座標系與導航座標系之間的關係。關於物體的三種不同的旋轉方式，分別是側滾角 (Roll)、俯仰角 (Pitch) 及航向角 (Yaw)。我們可藉由這三種不同的角

度，來求得附體座標與導航座標之間旋轉的關係。

2.2.1 側滾角 (ϕ)

在航空學中側滾角表示為機翼的上/下的旋轉，也等效於對附體座標的 x 軸來旋轉。如圖(2.3)所示：



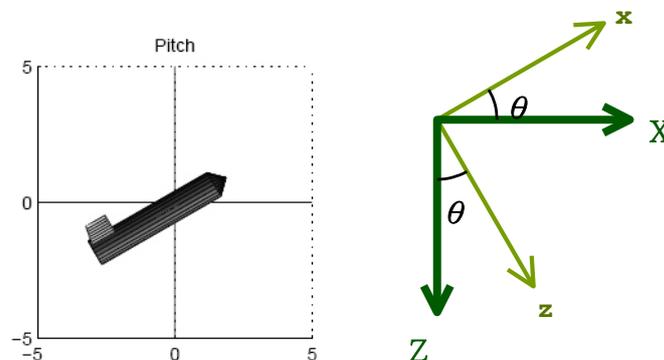
圖(2.3) 側滾角之示意圖及座標

旋轉後，附體座標上的位置 ($x y z$) 可由 NED 座標上的位置 ($X Y Z$) 乘上轉換矩陣 $R(x, \phi)$ 得到，

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R(x, \phi) \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad R(x, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

2.2.2 俯仰角 (θ)

在航空學中俯仰角表示為機鼻的上/下的旋轉，也等於對附體座標的 y 軸來旋轉。如圖(2.4)所示：



圖(2.4) 俯仰角之示意圖及座標

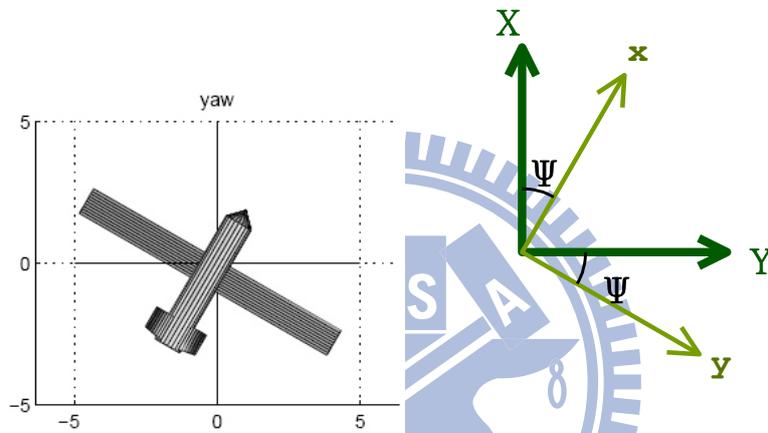
旋轉後，附體座標上的位置 $(x y z)$ 可由 NED 座標上的位置 $(X Y Z)$

乘上轉換矩陣 $R(y, \theta)$ 得到，

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R(y, \theta) \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad R(y, \theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

2.2.3 航向角 (Ψ)

在航空學中航向角表示為機鼻的左/右的旋轉，也等於對附體座標的 z 軸來旋轉。如圖(2.5)所示：



圖(2.5) 航向角之示意圖及座標

旋轉後，附體座標上的位置 $(x y z)$ 可由 NED 座標上的位置 $(X Y Z)$

乘上轉換矩陣 $R(z, \psi)$ 得到，

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R(z, \psi) \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad R(z, \psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

2.3 姿態表示法

數學上有多種的姿態表示法，有方向餘弦法、尤拉角法、四元數法。因為本報告主要以四元數法為主，尤拉角法為輔，因此本節介紹四元數法及尤拉角法。

2.3.1 尤拉角法 (Euler angle)

以尤拉角為姿態表示，其變數只有三個而且互相獨立。若以前述三個

旋轉角度，將 NED 座標依序旋轉航向角 (Yaw)、俯仰角 (Pitch) 及側滾角 (Roll) 得到附體座標，則描述附體座標上的位置向量與 NED 座標上的位置向量，兩者之間的轉換矩陣可如式(2.4)所示：

$$C_{NED}^b = R(x, \phi)R(y, \theta)R(z, \psi)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta)\cos(\psi) & \cos(\theta)\sin(\psi) & -\sin(\theta) \\ \cos(\psi)\sin(\theta)\sin(\phi) - \cos(\phi)\sin(\psi) & \cos(\phi)\cos(\psi) + \sin(\theta)\sin(\phi)\sin(\psi) & \cos(\theta)\sin(\phi) \\ \cos(\phi)\cos(\psi)\sin(\theta) + \sin(\phi)\sin(\psi) & \cos(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) - \cos(\psi)\sin(\phi) & \cos(\theta)\cos(\phi) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_b = C_{NED}^b \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{NED} \quad (2.4)$$

C_{NED}^b 表示為 NED 座標轉換至附體座標之轉換矩陣，為了確保尤拉角之唯一性，故要求

$$-\pi \leq \psi \leq \pi \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad -\pi \leq \phi \leq \pi$$

因為 C_{NED}^b 為一個單位正交矩陣，故具有下列之性質：

$$(C_{NED}^b)^T = (C_{NED}^b)^{-1} \quad \det(C_{NED}^b) = I$$

由上述方式，我們亦可獲得附體座標的角速度 ω^b 與尤拉角的角速度之間的關係：

$$\begin{bmatrix} \omega_x^b \\ \omega_y^b \\ \omega_z^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R(x, \phi) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + R(x, \phi)R(y, \theta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \cos(\theta)\sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\theta)\cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin(\phi)\tan(\theta) & \cos(\phi)\tan(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi)\sec(\theta) & \cos(\phi)\sec(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x^b \\ \omega_y^b \\ \omega_z^b \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

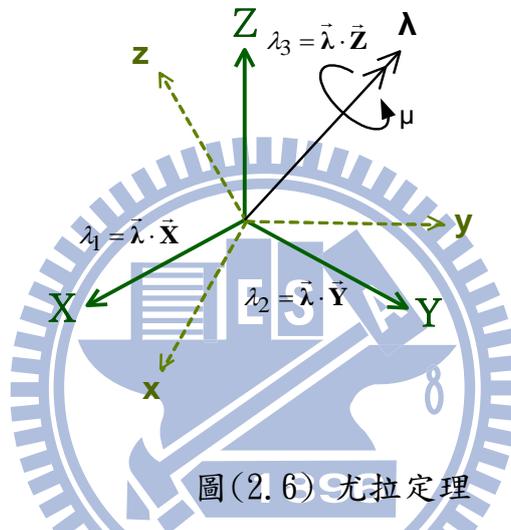
觀察式(2.6)可發現當俯仰角 (Pitch) 為 $\pm 90^\circ$ 時，也就是載具垂直向上或垂直向下飛行，其轉換矩陣會發生奇異性 (singularity)。故利

用此方程式來計算姿態的轉換矩陣時，俯仰角會有所限制。

2.3.2 四元數法 (Quaternion)

四元數為 William R. Hamilton 於 1843 年所提出，使用四元數表示法，其優點為計算姿態轉換矩陣時不會有奇異性問題。在介紹四元數法之前先介紹尤拉定理：

剛體繞固定點旋轉的運動，可表示為繞某一根通過該固定點之軸線 $(\vec{\lambda})$ 旋轉一個角度 (μ) 的運動。如圖(2.6)所示：



圖(2.6) 尤拉定理

若以座標系 (XYZ) 上之單位向量 λ ($=[\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3]^T$) 為轉軸，其中 $\lambda_1 \sim \lambda_3$ 為轉軸 λ 投影至 XYZ 座標的分量，將座標系 (XYZ) 對其旋轉一角度 μ 則可得座標 (xyz) ， μ 為繞 λ 軸旋轉的角度，因此轉換矩陣 C 以 λ 及 μ 表示為：

$$C(\lambda, \mu)_{NED}^b = \cos \mu \cdot I_3 + (1 - \cos \mu) \lambda \lambda^T - \sin \mu \cdot \lambda^\times \quad (2.7)$$

$$\text{其中 } \lambda^\times = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & 0 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 & 0 \end{bmatrix}$$

我們可令四元數向量為

$$\vec{Q} = q_0 + \vec{q} = q_0 + \vec{i}q_1 + \vec{j}q_2 + \vec{k}q_3 \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}
q_0 &= \cos(\mu/2) \\
q_1 &= \lambda_1 \sin(\mu/2) \\
q_2 &= \lambda_2 \sin(\mu/2) \\
q_3 &= \lambda_3 \sin(\mu/2)
\end{aligned} \tag{2.9}$$

四元數與尤拉角法皆是描述物體的姿態，因此不具有四個自由度，必須滿足單範的性質限制 (normalization constraint)

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1 \tag{2.10}$$

由四元數所得的轉換矩陣如式(2.11)所示：

$$C_{NED}^b = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

同理，附體座標系轉為導航座標系之轉換矩陣為本文較常使用，而

C_b^{NED} 表示如下

$$C_b^{NED} = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

由(2.4)、(2.11)式，其NED座標依序旋轉航向角(Yaw)、俯仰角(Pitch)及側滾角(Roll)得到之附體座標，則可獲得四元數與尤拉角之間的轉換關係：

$$\begin{aligned}
\phi &= \tan^{-1} \left(\frac{2(q_2q_3 + q_0q_1)}{q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2} \right) \\
\theta &= \sin^{-1} (2(-q_1q_3 + q_0q_2)) \\
\psi &= \tan^{-1} \left(\frac{2(q_1q_2 + q_0q_3)}{q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2} \right)
\end{aligned} \tag{2.13}$$

若姿態連續變化時，則四元數與附體座標角速度之關係如式(2.14)：

$$\dot{q}_{4 \times 1} = \frac{1}{2 \|q\|} \begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x^b \\ \omega_y^b \\ \omega_z^b \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

第三章 感測元件量測原理

3.1 慣性感測元件(IMU)

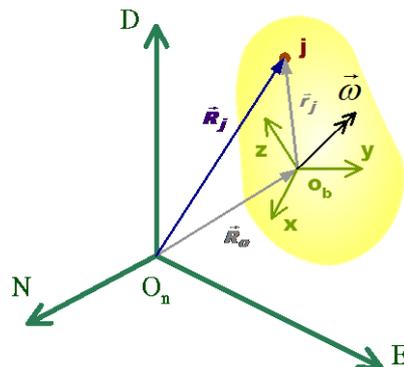
本文使用的 IMU 為 MEMSense 公司之 AR10-1200S050，具有三軸加速規與三軸陀螺儀感測元件，其主要輸出訊號為類比電壓訊號，本小節將介紹加速規與陀螺儀分別所獲得之加速度與角速度之應用原理。



圖(3.1)IMU 元件

3.1.1 加速規

根據剛體運動學，一個剛體在空間中運動，其加速度可用固定座標及運動座標之關係來表示，其中在此系統中是以導航座標為固定座標，而附體座標為運動座標，其方程式如式(3.1)：



圖(3.2)固定座標及附體座標

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{R}}_j^{NED} &= \ddot{\mathbf{R}}_o^{NED} + \dot{\boldsymbol{\omega}}^b \times \mathbf{r}_j^{NED} + \boldsymbol{\omega}^b \times (\boldsymbol{\omega}^b \times \mathbf{r}_j^{NED}) + 2\boldsymbol{\omega}^b \times \dot{\mathbf{r}}_j^{NED} + \ddot{\mathbf{r}}_j^{NED} \\ \Rightarrow \\ \ddot{\mathbf{a}}_j^{NED} &= \ddot{\mathbf{a}}_o^{NED} + \dot{\boldsymbol{\omega}}^b \times \mathbf{r}_j^{NED} + \boldsymbol{\omega}^b \times (\boldsymbol{\omega}^b \times \mathbf{r}_j^{NED}) + 2\boldsymbol{\omega}^b \times \dot{\mathbf{r}}_j^{NED} + \ddot{\mathbf{r}}_j^{NED}\end{aligned}\quad (3.1)$$

$\ddot{\mathbf{a}}_j^{NED}$ ：導航座標系之 j 點加速度。

$\ddot{\mathbf{a}}_o^{NED}$ ：導航座標系之 O_b 相對 O_n 的加速度。

$\boldsymbol{\omega}^b$ ：附體座標系相對導航座標系之角速度。

$\dot{\boldsymbol{\omega}}^b$ ：附體座標系相對導航座標系之角加速度。

\mathbf{r}_j^{NED} ：導航座標系之 j 點相對附體座標原點 O_b 的距離。

$\dot{\mathbf{r}}_j^{NED}$ ：導航座標系之 j 點相對附體座標原點 O_b 的速度。

$\ddot{\mathbf{r}}_j^{NED}$ ：導航座標系之 j 點相對附體座標原點 O_b 的加速度。

$2\boldsymbol{\omega}^b \times \dot{\mathbf{r}}_j^{NED}$ ：科氏加速度。

其中剛體上 \mathbf{r}_j^b 在附體座標系中為一固定常數，故 $\dot{\mathbf{r}}_j^b = \ddot{\mathbf{r}}_j^b = 0$ ，再由座標轉換關係可獲得 j 點在導航座標系上的加速度方程式：

$$\ddot{\mathbf{a}}_j^{NED} = \mathbf{C}_b^{NED} (\ddot{\mathbf{a}}_o^b) + \mathbf{C}_b^{NED} (\dot{\boldsymbol{\omega}}^b \times \mathbf{r}_j^b) + \mathbf{C}_b^{NED} [\boldsymbol{\omega}^b \times (\boldsymbol{\omega}^b \times \mathbf{r}_j^b)] \quad (3.2)$$

附體座標上之加速規所量測到之線性加速度，卻無法直接帶入 $\ddot{\mathbf{a}}_o^b$ 做為計算。由加速規所量測到運動物體之加速度通常包含線性加速度與重力加速度，且具有雜訊干擾、訊號偏壓與訊號漂移之問題，這些問題皆為必須被考慮進去而不可忽略之因素，因此加速規量測之訊號表示為：

$$\ddot{\mathbf{a}}_o^{*b} = \ddot{\mathbf{a}}_o^b + \mathbf{g}_o^b + d\mathbf{a}_{bias}^b + \mathbf{a}_{noise}^b \quad (3.3)$$

$\ddot{\mathbf{a}}_o^{*b}$ ：加速規實際量測之訊號

\mathbf{g}_o^b ：0 點所承受之重力加速度

$d\bar{a}_{bias}^b$: 加速規訊號飄移與偏壓量

\bar{a}_{noise}^b : 加速規量測雜訊

其運動方程式改寫為：

$$\bar{a}_j^{*NED} = C_b^{NED} \bar{a}_o^{*b} + C_b^{NED} (\dot{\bar{\omega}}^b \times \bar{r}_j^b) + C_b^{NED} [\bar{\omega}^b \times (\bar{\omega}^b \times \bar{r}_j^b)] \quad (3.4)$$

\bar{a}_j^{*NED} : j 點實際量測之導航座標系加速度

而訊號偏壓與雜訊雖然對於量測系統有很大的影響，但這些誤差可藉由 EKF 整合 GPS 訊號與 Barometer 訊號，獲得正確的估測與補償。

3.1.2 陀螺儀

相同地，陀螺儀於附體座標系所量測之值亦無法直接帶入 $[\omega_x^b, \omega_y^b, \omega_z^b]^T$ ，因其中亦帶有雜訊干擾、訊號偏壓與訊號漂移之問題，這些亦無法忽略，考慮這些問題後其方程式可表示為式(3.5)：

$$\bar{\omega}^{*b} = \bar{\omega}^b + d\bar{\omega}_{bias}^b + \bar{\omega}_{noise}^b \quad (3.5)$$

$\bar{\omega}^{*b}$: 陀螺儀實際量測之訊號

$\bar{\omega}^b$: 陀螺儀無誤差之標準訊號

$d\bar{\omega}_{bias}^b$: 陀螺儀訊號飄移與偏壓量

$\bar{\omega}_{noise}^b$: 陀螺儀量測雜訊

在附體座標系中，陀螺儀量測之角速度帶入四元數表式法與附體座標系角速度之動態模型方程式，便可獲得附體座標系與導航座標系的轉換矩陣。相同地，雜訊、訊號漂移、校準誤差、跨軸耦合等等之誤差對於姿態精確度有很大的影響。

3.2 GPS 定位系統

本文使用的 GPS 模組為 GARMIN 公司之 15L 模組。



圖(3.3)GPS 模組

利用 GPS 接收的資訊用以獲得運動剛體位置資訊有多種方法，較常見為被編譯好的位置資訊如 NMEA 0183 國際標準數據格式，其位置誤差約為 10 公尺，本架構則以此 GPS 資訊為主。而 GPS 所接收到的訊號頻率皆約為 1Hz，也因為其接收訊號頻率過於緩慢，故 GPS 無法單獨使用於高速高精度運動姿態估測系統中，通常整合訊號擷取頻率較高之加速規與陀螺儀，在高速動態下用以獲得更加精準的姿態資訊而 GPS 則做為校正補償 IMU 的訊號漂移之問題。然而 GPS 的接收天線不一定與 IMU 及 Boarmeter 放置於同一位置上，為了整合加速規與陀螺儀，GPS 所擷取到的位置姿態必須透過下列方程式做轉換，方程式如式(3.6)：

$$\bar{R}_j = \bar{R}_o^{NED} + C_b^{NED} \bar{r}_{j/o}^b + \bar{n}^{GPS} \quad (3.6)$$

\bar{R}_j ：GPS 所量測到之導航座標系之位置資訊。

\bar{R}_o^{NED} ：導航座標系之 O 點量測到之標準位置資訊。

C_b^{NED} ：附體座標系與導航座標系之轉換矩陣。

$\bar{r}_{j/o}^b$ ：GPS 與 O 點之附體座標系之距離。

\bar{n}^{GPS} ：GPS 之量測雜訊與誤差。

3.3 氣壓式高度計

本文中使用的氣壓式高度計為 Intersema 公司之 ms5540C 模組，為全數位輸出，以避免線路雜訊所造成之影響。且具有溫度感測元件做為補償以獲得較精確之高度資訊。



圖(3.4)氣壓式高度計模組

利用氣壓式高度計以獲得運動物體之導航座標系相對海平面的高度，而氣壓與高度轉換方程式如式(3.7)：

$$h = \frac{T_{sea}}{T_{gradient}} \cdot \left[1 - \left(\frac{P_{measurement}}{P_{sea}} \right)^{\frac{T_{gradient} R}{g}} \right] \quad (3.7)$$

h ：高度(m)

$P_{measurement}$ ：量測氣壓(mBar)

$T_{gradient} = 0.0065$ ：對流層氣溫遞減率(K/m)

$T_{sea} = 288.15$ ：平均海平面氣溫(K)

$P_{sea} = 1013.25$ ：平均海平面氣壓(mBar)

$R = 287.052$ ：理想氣體常數(m²/s²/K)

$g = 9.80665$ ：重力加速度(m/s²)

第四章 感測器整合系統

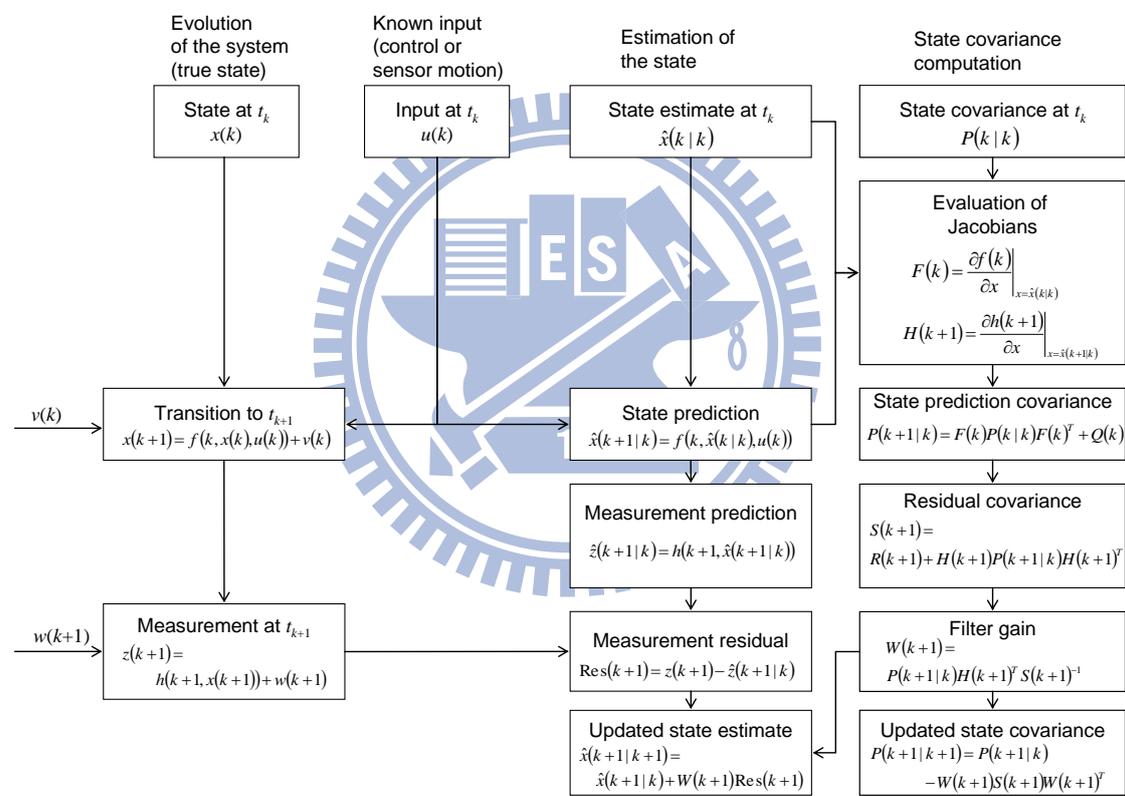
本文主要以 EKF 模擬之架構是將陀螺儀所量測到物體在附體座標上的角速度資訊帶入以四元數表示法為主的角速度與角度之動態模型，以獲得附體座標系與導航座標系之轉換矩陣，而加速規所量測到物體在附體座標上的加速度資訊，透過座標系統轉換矩陣，轉換為導航座標系之加速度，再帶入加速度、速度、位置關係之動態模型，進行姿態估測，然後整合 GPS 定位系統與 Barometer 所得到之位置資訊更正估測系統的姿態與路徑誤差，此誤差可能來自初始條件的設定、陀螺儀與加速規的訊號雜訊、飄移量等等因素，還有 GPS 定位系統資訊如 NMEA 0183 國際標準數據格式的位置誤差量與 Barometer 訊號之雜訊。於本文將 IMU 感測元件所量測的訊號視為估測系統輸入訊號，其為運動物體之附體座標系所量測之三軸角速度與三軸加速度訊號。GPS 則視為估測系統輸出訊號，其所獲得資訊為導航座標系之運動物體的三軸速度與位置資訊。Barometer 亦視為估測系統輸出訊號，其所獲得資訊為導航座標系之運動物體的高度資訊。

4.1 擴增式卡爾曼濾波器(Extended Kalman Filter, EKF)

於 1960 年，由 R. E. Kalman 所發表一篇著名的論文中，利用遞迴 (recursive) 來解決離散資料的線性濾波問題。由於此時電腦數值計算正蓬勃的發展，因此卡爾曼估測器在控制與導航系統領域中被大量的研究及應用。

卡爾曼濾波器是一種最佳化的估測器，可以間接從不準確及不確定的量測值來獲得系統的狀態變數，尤其對於雜訊來源為高斯雜訊時，卡爾曼估測器可以得到最小化的均方誤差。由於卡爾曼濾波器只能用於線性系統，而大部份的系統為非線性系統，非線性系統則須經線性化才能使用，因此對於被線性化的卡爾曼濾波器又稱為擴增卡爾曼濾波器(Extended Kalman Filter, EKF)。

擴增卡爾曼濾波器包括狀態預測、狀態修正兩大主要步驟，狀態預測亦是從此刻的狀態及輸入來估測下一刻時間的狀態。狀態修正則利用前一步驟所預測的狀態以獲得較佳估測值，且卡爾曼濾波器可以整合不同輸出頻率的感測器，故將利用擴增式卡爾曼濾波器整合所有的感測元件，直接利用帶有雜訊的感測元件量測訊號，透過四元數轉換矩陣後的估測姿態即時追蹤運動物體實際姿態與路徑，亦可有效降低雜訊的影響，以獲得更加精準的運動物體路徑與姿態。圖(4.1)為擴增式卡爾曼濾波器應用流程圖。



圖(4.1) EKF 流程圖

4.2 整合系統的觀察性分析

為了確定所設計的估測系統能成功的估測運動物體姿態、路徑及加速規、陀螺儀的偏壓量，我們檢驗系統的可觀察性 (observability)。由於上述系統為一非線性系統，必須使用非線性系統的觀察性矩陣來進行判斷。系統觀察性矩陣的公式推導結果如下：

$$h(X) = HX$$

$$\bar{O} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(X)}{\partial X} \\ \frac{\partial \dot{h}(X)}{\partial X} \\ \frac{\partial \ddot{h}(X)}{\partial X} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

其中 X 為系統的狀態變數，若系統觀察性矩陣 \bar{O} 為滿秩(full rank)，則此系統的所有狀態變數皆為可觀察，故可藉由合適的輸出系統設計，正確估測系統狀態變數。

4.3 感測器整合系統模型

以 EKF 整合 GPS 與 Barometer 輸出系統訊號用以修正並估測 IMU 感測器之輸入系統訊號誤差，由於無法得知 IMU 誤差訊號之系統時變函數方程且於本文中之模擬主要為建立不同的估測系統架構了解其可行性，故將 IMU 之訊號誤差視為一常數之偏壓誤差訊號。而因以 GPS 較低的擷取頻率 1Hz 所造成的姿態路徑 lose，較無法凸顯出所建立之估測系統架構的精確度，故於模擬中假設其取樣頻率與 IMU 及 Barometer 皆為 1kHz，較為能夠了解估測系統模型架構概念是否正確。利用電腦產生包含高斯分佈的隨機雜訊，其平均值為零，且僅給予較小之標準差即避免雜訊對估測系統之影響，以驗證估測系統之可行性。於本文中之模擬，假設 IMU 所量測之角速度與加速度視為一常數，當所建構之估測系統可精準估測出 IMU 誤差訊號即偏壓時，則表示即使 IMU 量測之角速度與加速度為時變函數時亦可精準估測運動物體的路徑與姿態。故模擬將針對不同的狀態估測系統與輸出系統建構其 EKF 估測動態模型以 MatLab 進行模擬，並加以延伸探討，本文模擬參數見下表(4.1)、表(4.2)。

模擬參數	
角速度	$[0.91 \ 0.5 \ 0.293]^T \text{ rad/s}$
角速度偏壓	$[2.5 \ 2.5 \ 2.5]^T \text{ rad/s}$
角速度雜訊	$[10^{-10} \ 10^{-10} \ 10^{-10}]^T \text{ rad/s}$
加速度	$[5 \ 2 \ 1]^T \text{ m/s}^2$
加速度偏壓	$[2.5 \ 2.5 \ 2.5]^T \text{ m/s}^2$
加速度雜訊	$[10^{-10} \ 10^{-10} \ 10^{-10}]^T \text{ m/s}^2$
GPS雜訊	$[10^{-7} \ 10^{-7} \ 10^{-7}]^T \text{ m or (m/s)}$
GPS-A與估測O點之附體座標距離	$[-5 \ 2 \ 2]^T \text{ m}$
GPS-B與估測O點之附體座標距離	$[7 \ 5 \ 3]^T \text{ m}$

表(4.1) 模擬參數

狀態初值	
四元數	$[1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$
角速度	$[0 \ 0 \ 0]^T \text{ rad/s}$
加速度	$[0 \ 0 \ 0]^T \text{ m/s}^2$
估測狀態初值	
四元數	$[0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5]^T$
角速度	$0.9*[0.91 \ 0.5 \ 0.293]^T \text{ rad/s}$
角速度偏壓	$0.9*[2.5 \ 2.5 \ 2.5]^T \text{ rad/s}$
加速度	$0.9*[5 \ 2 \ 1]^T \text{ m/s}^2$
加速度偏壓	$0.9*[2.5 \ 2.5 \ 2.5]^T \text{ m/s}^2$
估測點O導航座標系之速度	$[0 \ 0 \ 0]^T \text{ m/s}$
估測點O導航座標系之位置	$[0 \ 0 \ 0]^T \text{ m}$

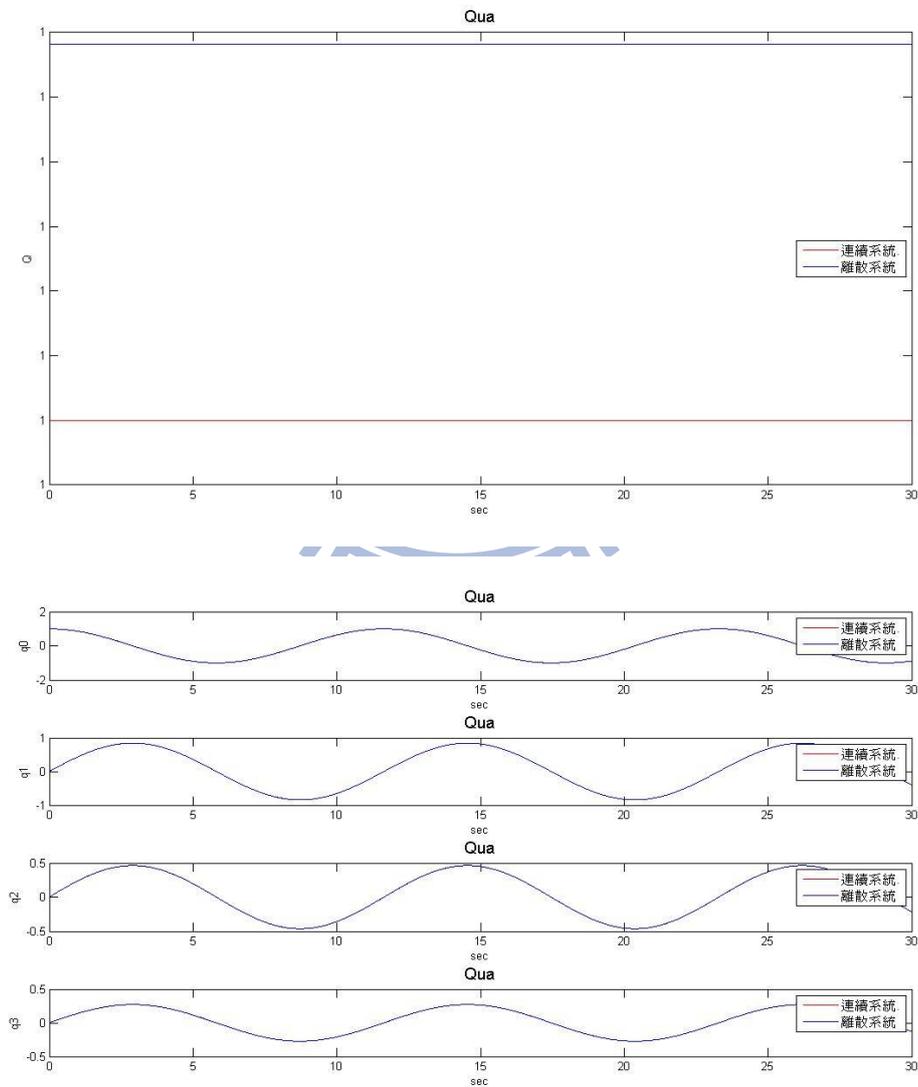
表(4.2) 模擬參數

首先將四元數連續的動態方程式以簡單的一階離散化可得以下方程式：

$$\bar{q}_{k+1} = Q^{-1/2} \left\{ \bar{q}_k + \frac{dt}{2} A(q) \bar{w}_k^b \right\}$$

$$A(q) = \begin{bmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} ; Q = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \quad (4.2)$$

於此將四元數動態方程式先離散後再做正規化，使離散後仍滿足其四元數 $Q = 1$ 的限制，下圖為模擬連續系統與離散系統所演算之四元數對照圖，取樣頻率為 1kHz。



圖(4.2)四元數連續系統與離散系統對照圖

假設陀螺儀實際量測之角速度令為 \bar{w}_o^{*b} ，則

$$\bar{w}_o^{*b} = \bar{w}_o^b + d\bar{w}_o^b$$

\bar{w}_o^b 為理想角速度
 $d\bar{w}_o^b$ 為雜訊誤差

(4.3)

相同的，加速規實際量測之加速度令為 \bar{a}_o^{*b} ，則

$$\bar{a}_o^{*b} = \bar{a}_o^b + d\bar{a}_o^b$$

\bar{a}_o^b 為理想加速度
 $d\bar{a}_o^b$ 為雜訊誤差

(4.4)

而本文中 IMU 所量測之雜訊誤差視為非時間變化之常數誤差，故其離散後方程式為

$$\begin{aligned} d\bar{w}_{o,k+1}^b &= d\bar{w}_{o,k}^b \\ d\bar{a}_{o,k+1}^b &= d\bar{a}_{o,k}^b \end{aligned}$$
(4.5)

將 IMU 量測之角速度與加速度視為非時間變化之常數，則其離散後方程式為

$$\begin{aligned} \bar{w}_{o,k+1}^b &= \bar{w}_{o,k}^b \\ \bar{a}_{o,k+1}^b &= \bar{a}_{o,k}^b \end{aligned}$$
(4.6)

於 0 點之速度與位置則為加速規量測之加速度透過積分後所獲得，其離散後方程式為

$$\begin{aligned} \bar{V}_{o,k+1}^{NED} &= \bar{V}_{o,k}^{NED} + dt * C_{b,k}^{NED} (\bar{a}_{o,k}^{*b} - d\bar{a}_{o,k}^b) \\ \bar{L}_{o,k+1}^{NED} &= \bar{L}_{o,k}^{NED} + dt * \bar{V}_{o,k}^{NED} \end{aligned}$$
(4.7)

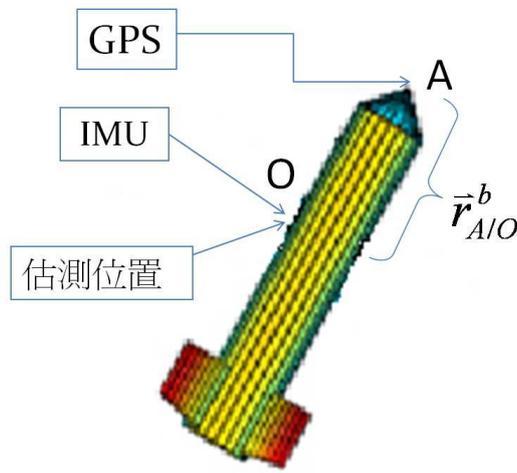
而 C_b^{NED} 為附體座標系轉為導航座標系之轉換矩陣，表示如(2.12)

藉由上述離散方程式便可建立出估測系統之動態模型，然而由(4.2)、(4.6)與(4.7)可知，對於精準的姿態與路徑估測系統而言，四元數直接與間接影響到所有的估測狀態，故四元數可否精準估測則是重點之一。而 IMU 輸出之誤差訊號會隨著積分運算而累積放大，進而影響四元數估測之精準

度，因此必須設法估測並補償其訊號偏壓值，才能確保 IMU 所獲得資訊的精準度。

4.4 1 顆 GPS+IMU

於此小節中建立兩種估測系統動態模型，第一種為先假設加速規量測無誤差之訊號，陀螺儀量測具有誤差雜訊，第二種為假設陀螺儀量測無誤差之訊號，加速規量測具有誤差雜訊。模擬後並加以討論，其感測元件擺放位置如下圖(4.3)所示，GPS 放置於 A 點，IMU 放置於 O 點而其 O 點亦為估測位置。



圖(4.3)感測器擺放示意圖

透過剛體運動學基本理論，A 點導航座標系之速度與位置表示如下

$$\begin{aligned} \vec{V}_A^{NED} &= \vec{V}_o^{NED} + C_b^{NED} \{ \vec{\omega}_o^b \times \vec{r}_{A/o}^b \} \\ \vec{L}_A^{NED} &= \vec{L}_o^{NED} + C_b^{NED} \vec{r}_{A/o}^b \end{aligned} \quad (4.8)$$

於此節以 A 點之 GPS 所量測的導航座標系之位置資訊做為系統輸出。

$$Z = \vec{L}_A^{NED} = \vec{L}_o^{NED} + C_b^{NED} \vec{r}_{A/o}^b \quad (4.9)$$

4.4.1 陀螺儀量測具有訊號誤差，加速規量測無訊號誤差

假設加速規量測訊號為標準無雜訊與誤差存在，陀螺儀量測為常數角速度，估測狀態則包含四元數、三軸角速度、三軸 NED 座標系之 O 點速度、

三軸 NED 座標系之 0 點位置即

$$X_{13 \times 1} = [\bar{q} \quad \bar{w}_o^b \quad \bar{V}_o^{NED} \quad \bar{L}_o^{NED}]^T$$

如前 4.2 節所述，我們將藉由相關的觀察性矩陣，來驗證姿態估測的可行性。系統的觀察性矩陣，如下式推導：

$$h(X) = \bar{L}_A^{NED} = \bar{L}_o^{NED} + C_b^{NED} \bar{r}_{A/o}^b$$

$$\frac{\partial h(X)}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \{ \bar{L}_o^{NED} + C_b^{NED} \bar{r}_{A/o}^b \}}{\partial \bar{q}} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$\dot{h}(X) = \bar{V}_A^{NED} = \bar{V}_o^{NED} + C_b^{NED} \{ \bar{w}_o^b \times \bar{r}_{A/o}^b \} = \bar{V}_o^{NED} + C_b^{NED} \Omega \bar{r}_{A/o}^b$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \dot{h}(X)}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \{ \bar{V}_o^{NED} + C_b^{NED} \{ \bar{w}_o^b \times \bar{r}_{A/o}^b \} \}}{\partial \bar{q}} & \frac{\partial \{ C_b^{NED} \{ \bar{w}_o^b \times \bar{r}_{A/o}^b \} \}}{\partial \bar{w}_o^b} & I_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$\ddot{h}(X) = \bar{a}_A^{NED} = \bar{a}_o^{NED} + C_b^{NED} \{ \bar{w}_o^b \times (\bar{w}_o^b \times \bar{r}_{A/o}^b) \}$$

$$= C_b^{NED} \bar{a}_o^b + C_b^{NED} \{ \bar{w}_o^b \times (\bar{w}_o^b \times \bar{r}_{A/o}^b) \} = C_b^{NED} \bar{a}_o^b + C_b^{NED} \Omega \Omega \bar{r}_{A/o}^b$$

$$\frac{\partial \ddot{h}(X)}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \{ C_b^{NED} \bar{a}_o^b + C_b^{NED} \{ \bar{w}_o^b \times (\bar{w}_o^b \times \bar{r}_{A/o}^b) \} \}}{\partial \bar{q}} & \frac{\partial \{ C_b^{NED} \{ \bar{w}_o^b \times (\bar{w}_o^b \times \bar{r}_{A/o}^b) \} \}}{\partial \bar{w}_o^b} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$\ddot{h}(X) = \dot{C}_b^{NED} \bar{a}_o^b + \dot{C}_b^{NED} \{ \bar{w}_o^b \times (\bar{w}_o^b \times \bar{r}_{A/o}^b) \}$$

$$\because \dot{C}_b^{NED} = C_b^{NED} \Omega$$

$$\therefore \ddot{h}(X) = C_b^{NED} \Omega \bar{a}_o^b + C_b^{NED} \Omega \{ \bar{w}_o^b \times (\bar{w}_o^b \times \bar{r}_{A/o}^b) \} = C_b^{NED} \Omega \bar{a}_o^b + C_b^{NED} \Omega \Omega \Omega \bar{r}_{A/o}^b$$

$$\frac{\partial \ddot{h}(X)}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \{C_b^{NED} \Omega \bar{a}_o^b + C_b^{NED} \Omega \{ \bar{w}_o^b \times (\bar{w}_o^b \times \bar{r}_{A/o}^b) \}}}{\partial \bar{q}} \\ \frac{\partial \{C_b^{NED} \Omega \bar{a}_o^b + C_b^{NED} \Omega \{ \bar{w}_o^b \times (\bar{w}_o^b \times \bar{r}_{A/o}^b) \}}}{\partial \bar{w}_o^b} \\ 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}^T \quad (4.13)$$

$$\bar{O} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(X)}{\partial X} \\ \frac{\partial \dot{h}(X)}{\partial X} \\ \frac{\partial \ddot{h}(X)}{\partial X} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

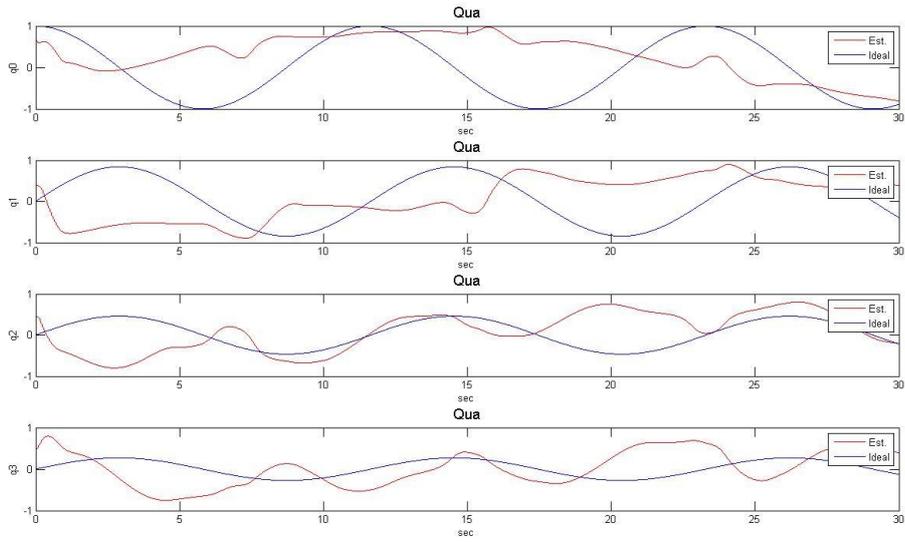
$\therefore \text{rank}(\bar{O}) = 11$

此 case 之估測系統動態方程式如下

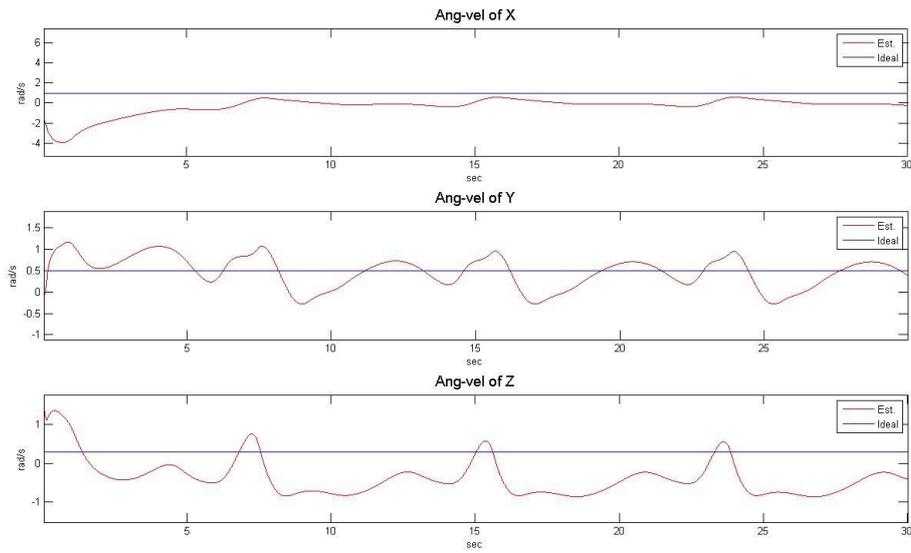
$$\begin{bmatrix} \hat{\bar{q}} \\ \hat{\bar{w}}_o^b \\ \hat{\bar{V}}_o^{NED} \\ \hat{\bar{L}}_o^{NED} \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} Q^{-1/2} * I_{4 \times 4} & Q^{-1/2} * \frac{dt * A(q)}{2} & 0_{4 \times 3} & 0_{4 \times 3} \\ 0_{3 \times 4} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 4} & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 4} & 0_{3 \times 3} & dt * I_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\bar{q}} \\ \hat{\bar{w}}_o^b \\ \hat{\bar{V}}_o^{NED} \\ \hat{\bar{L}}_o^{NED} \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} \\ dt * C_b^{NED} \\ 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}_k [\bar{a}_o^b]_k \quad (4.15)$$

觀察性矩陣驗證此姿態估測系統的可行性，其無法滿足觀察性矩陣滿秩，利用 EKF 估測系統模擬如下：

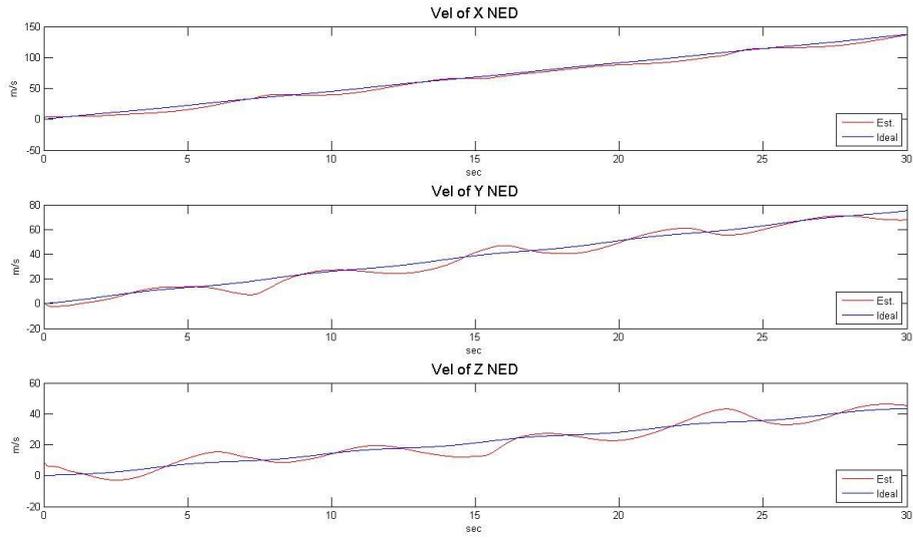
模擬估測狀態為 $X_{13 \times 1} = [\bar{q} \quad \bar{w}_o^b \quad \bar{V}_o^{NED} \quad \bar{L}_o^{NED}]^T$



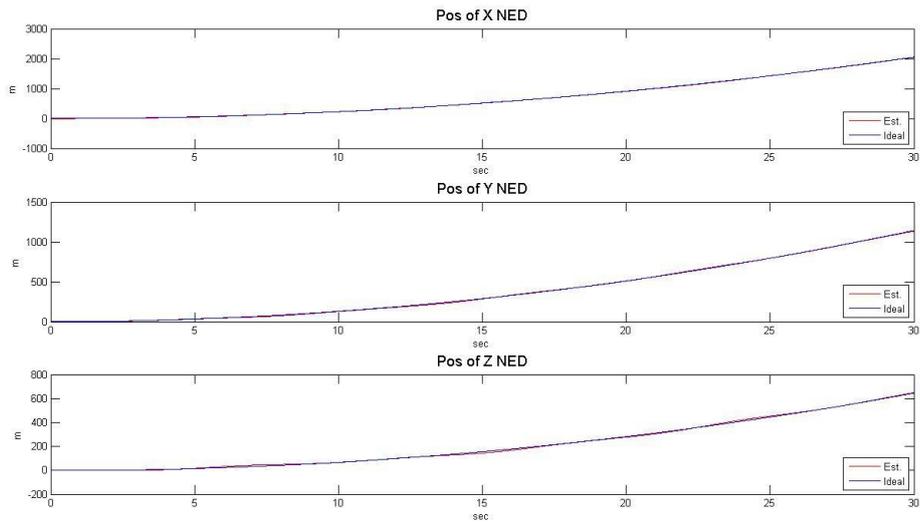
圖(4.4)四元數對照圖



圖(4.5)角速度對照圖



圖(4.6) 導航座標系 0 點速度對照圖



圖(4.7) 導航座標系 0 點位置對照圖

由觀察性矩陣驗證姿態估測的可行性，發現有 lose rank 發生並非滿秩，故當加速度為無誤差與雜訊情況下，且所估測的角速度僅為常數值，並無法正確估測到四元數，導致其他估測狀態產生估測錯誤之情形，以 MatLab 模擬結果亦驗證無法精準估測運動物體之軌跡與路徑。

4.4.2 陀螺儀量測無訊號誤差，加速規量測具有訊號誤差

假設陀螺儀量測訊號為標準無雜訊與誤差存在，加速規量測為常數加速度，估測狀態則包含四元數、三軸加速度、三軸 NED 座標系之 0 點速度、三軸 NED 座標系之 0 點位置即

$$X_{13 \times 1} = [\bar{q} \quad \bar{a}_o^b \quad \bar{V}_o^{NED} \quad \bar{L}_o^{NED}]^T$$

藉由相關的觀察性矩陣，來驗證姿態估測的可行性。系統的觀察性矩陣，如下式推導：

$$h(X) = \bar{L}_A^{NED} = \bar{L}_o^{NED} + C_b^{NED} \bar{r}_{A/o}^b$$

$$\frac{\partial h(X)}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \{\bar{L}_o^{NED} + C_b^{NED} \bar{r}_{A/o}^b\}}{\partial \bar{q}} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

$$\dot{h}(X) = \bar{V}_A^{NED} = \bar{V}_o^{NED} + C_b^{NED} \{\bar{w}_o^b \times \bar{r}_{A/o}^b\} = \bar{V}_o^{NED} + C_b^{NED} \Omega \bar{r}_{A/o}^b$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \dot{h}(X)}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \{\bar{V}_o^{NED} + C_b^{NED} \{\bar{w}_o^b \times \bar{r}_{A/o}^b\}\}}{\partial \bar{q}} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$$\ddot{h}(X) = \bar{a}_A^{NED} = \bar{a}_o^{NED} + C_b^{NED} \{\bar{w}_o^b \times (\bar{w}_o^b \times \bar{r}_{A/o}^b)\}$$

$$= C_b^{NED} \bar{a}_o^b + C_b^{NED} \{\bar{w}_o^b \times (\bar{w}_o^b \times \bar{r}_{A/o}^b)\} = C_b^{NED} \bar{a}_o^b + C_b^{NED} \Omega \Omega \bar{r}_{A/o}^b$$

$$\frac{\partial \ddot{h}(X)}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \{C_b^{NED} \bar{a}_o^b + C_b^{NED} \{\bar{w}_o^b \times (\bar{w}_o^b \times \bar{r}_{A/o}^b)\}\}}{\partial \bar{q}} & C_b^{NED} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

$$\ddot{\dot{h}}(X) = \dot{C}_b^{NED} \bar{a}_o^b + \dot{C}_b^{NED} \{\bar{w}_o^b \times (\bar{w}_o^b \times \bar{r}_{A/o}^b)\}$$

$$\because \dot{C}_b^{NED} = C_b^{NED} \Omega$$

$$\therefore \ddot{\dot{h}}(X) = C_b^{NED} \Omega \bar{a}_o^b + C_b^{NED} \Omega \{\bar{w}_o^b \times (\bar{w}_o^b \times \bar{r}_{A/o}^b)\} = C_b^{NED} \Omega \bar{a}_o^b + C_b^{NED} \Omega \Omega \Omega \bar{r}_{A/o}^b$$

$$\frac{\partial \ddot{\dot{h}}(X)}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \{C_b^{NED} \bar{a}_o^b + C_b^{NED} \{\bar{w}_o^b \times (\bar{w}_o^b \times \bar{r}_{A/o}^b)\}\}}{\partial \bar{q}} & C_b^{NED} \Omega & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$$\bar{O} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(X)}{\partial X} \\ \frac{\partial \dot{h}(X)}{\partial X} \\ \frac{\partial \ddot{h}(X)}{\partial X} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

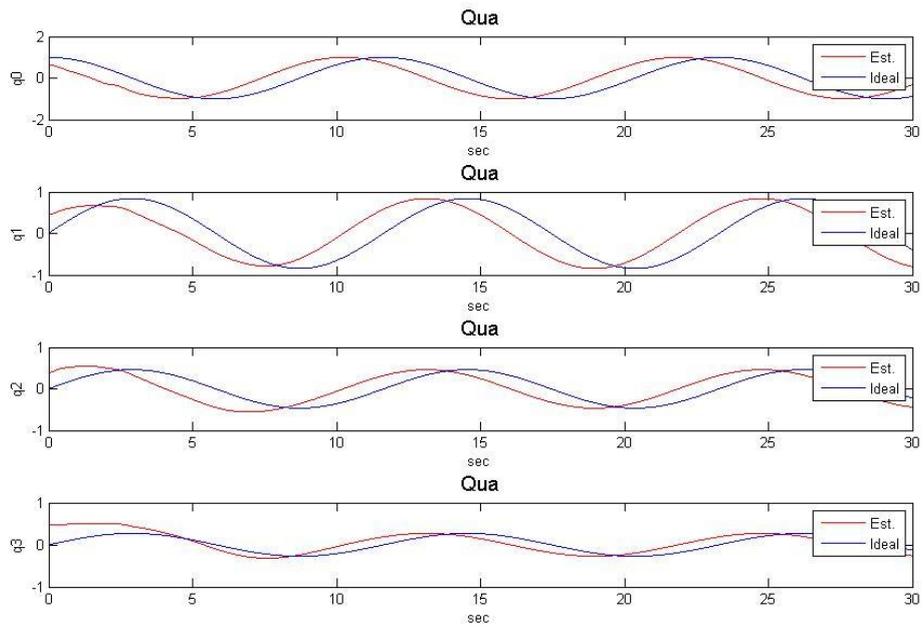
$$\therefore \text{rank}(\bar{O}) = 11$$

則其估測系統動態方程式如下

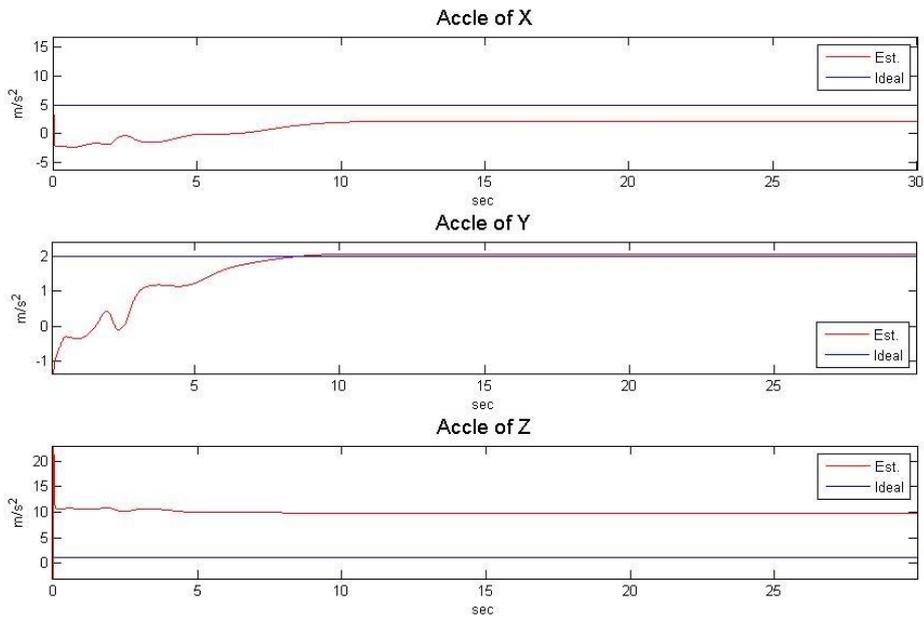
$$\begin{bmatrix} \hat{\bar{q}} \\ \hat{\bar{a}}_o^b \\ \hat{\bar{V}}_o^{NED} \\ \hat{\bar{L}}_o^{NED} \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} Q^{-1/2} * I_{4 \times 4} & 0_{4 \times 3} & 0_{4 \times 3} & 0_{4 \times 3} \\ 0_{3 \times 4} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 4} & dt * C_b^{NED} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 4} & 0_{3 \times 3} & dt * I_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\bar{q}} \\ \hat{\bar{a}}_o^b \\ \hat{\bar{V}}_o^{NED} \\ \hat{\bar{L}}_o^{NED} \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} Q^{-1/2} * \frac{dt * A(q)}{2} \\ 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} [\bar{w}]_k \quad (4.21)$$

觀察性矩陣驗證此姿態估測系統亦無法滿足觀察性矩陣滿秩，利用 EKF 估測系統模擬如下：

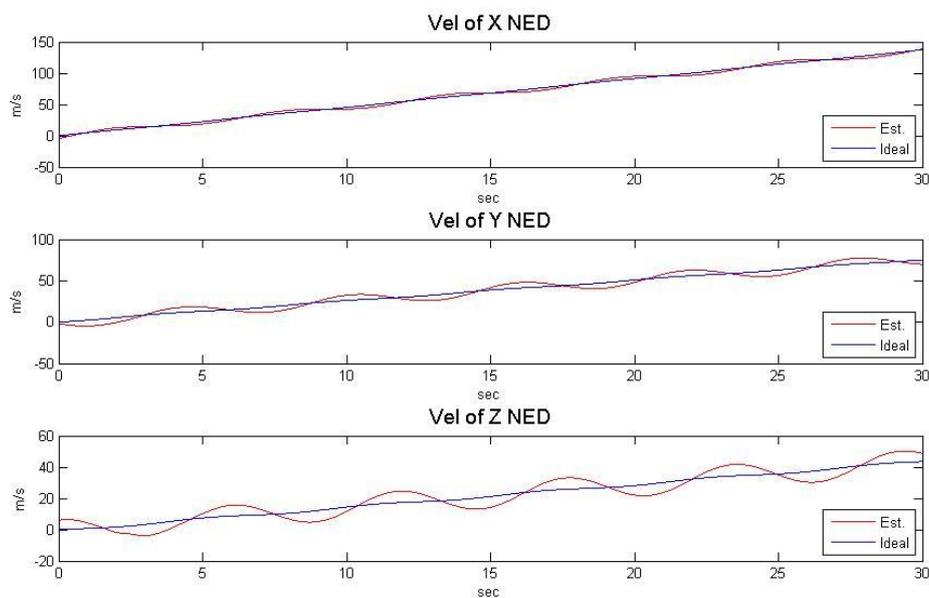
$$\text{模擬估測狀態為 } X_{13 \times 1} = [\bar{q} \quad \bar{a}_o^b \quad \bar{V}_o^{NED} \quad \bar{L}_o^{NED}]^T$$



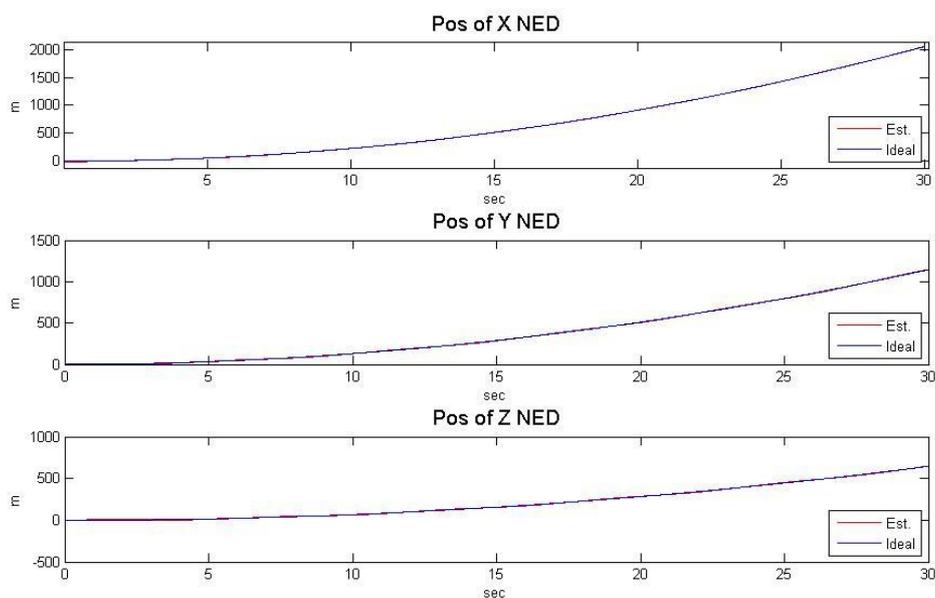
圖(4.8)四元數對照圖



圖(4.9)附體座標系 0 點加速度對照圖



圖(4.10)導航座標系 0 點速度對照圖



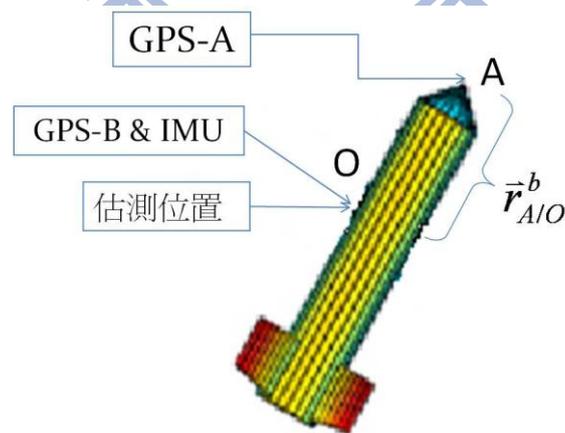
圖(4.11)導航座標系 0 點位置對照圖

以觀察性矩陣驗證姿態估測，發現有 lose rank 發生並非滿秩，可知即使當角速度為無任何誤差情況下之架構並無法獲得估測狀態之正確值。MatLab 模擬結果與觀察性矩陣驗證結果相同，無法準確估測運動物體之路徑與姿態。

透過上述兩種估測系統架構了解，單單僅以一顆 GPS 所獲得之位置與速度資訊，且 IMU 估測狀態僅為估測常數項之角速度或加速度，並無法正確估測到四元數的數值，亦即無法精準的估測運動物體的姿態與補償 IMU 之誤差訊號，故後續章節中將分別討論以 2 顆 GPS、2 顆 GPS+Barometer、3 顆 GPS 此三種情形做為輸出系統之估測模型。主要根據不同的系統輸出建立兩種系統輸入架構，第一種為當加速規與陀螺儀輸入訊號不帶有偏壓訊號之情形，第二種為加速規與陀螺儀輸入帶有偏壓訊號之情形。若 EKF 估測系統模擬得以精準估測當加速規與陀螺儀不帶有偏壓訊號之情況下的運動物體軌跡與姿態時，才有機會估測加速規與陀螺儀之偏壓訊號，進而獲得更精準之運動物體軌跡與姿態。

4.5 2 顆 GPS+IMU

於此小節以兩顆 GPS 作為系統輸出，建立如上述之兩種輸入系統模型，並加以延伸不同之輸出系統對於估測系統之影響，此時 IMU 所量測之角速度與加速度則為系統輸入。其感測元件擺放位置如下圖(4.12)所示，將 GPS-A 放置於 A 點，特別的是將 GPS-B 與 IMU 放置於估測位置 O 點。



圖(4.12)感測器擺放示意圖

4.5.1 加速規與陀螺儀輸入訊號不帶有偏壓

估測狀態則包括四元數、三軸常數角速度、三軸常數加速度、導航座

標系三軸 0 點速度、導航座標系三軸 0 點位置即

$$X_{16 \times 1} = [\bar{q} \quad \bar{w}_o^b \quad \bar{a}_o^b \quad \bar{V}_o^{NED} \quad \bar{L}_o^{NED}]^T$$

當 GPS-B 放置於 IMU 與估測點 0 時，以 $\bar{V}_{A/o}^{NED}$ 、 $\bar{L}_{A/o}^{NED}$ 、 \bar{L}_o^{NED} 做為輸出系

統，而所帶入之資訊則以附體座標系為主，其方程式如下

$$\begin{aligned} \bar{V}_{A/o}^{NED} &= C_b^{NED} \Omega \bar{r}_{A/o}^b \\ \bar{L}_{A/o}^{NED} &= C_b^{NED} \bar{r}_{A/o}^b \\ \bar{L}_o^{NED} &= \bar{L}_o^{NED} \\ \Rightarrow Z &= \begin{bmatrix} \bar{V}_{A/o}^{NED} \\ \bar{L}_{A/o}^{NED} \\ \bar{L}_o^{NED} \end{bmatrix}_{9 \times 1} = \begin{bmatrix} C_b^{NED} \Omega \bar{r}_{A/o}^b \\ C_b^{NED} \bar{r}_{A/o}^b \\ \bar{L}_o^{NED} \end{bmatrix}_{9 \times 1} \end{aligned} \quad (4.22)$$

由相關的觀察性矩陣，來驗證姿態估測的可行性。系統的觀察性矩陣，

如下式推導：

$$\begin{aligned} h(X) &= \begin{bmatrix} \bar{V}_{A/o}^{NED} \\ \bar{L}_{A/o}^{NED} \\ \bar{L}_o^{NED} \end{bmatrix}_{9 \times 1} = \begin{bmatrix} C_b^{NED} \Omega \bar{r}_{A/o}^b \\ C_b^{NED} \bar{r}_{A/o}^b \\ \bar{L}_o^{NED} \end{bmatrix}_{9 \times 1} \\ \Omega &= \begin{bmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial h(X)}{\partial X} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \{C_b^{NED} \Omega \bar{r}_{A/o}^b\}}{\partial \bar{q}} & \frac{\partial \{C_b^{NED} \Omega \bar{r}_{A/o}^b\}}{\partial \bar{w}_o^b} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \frac{\partial \{C_b^{NED} \bar{r}_{A/o}^b\}}{\partial \bar{q}} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 4} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{9 \times 16} \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\dot{h}(X) = \begin{bmatrix} \dot{C}_b^{NED} \Omega \bar{r}_{A/o}^b \\ \dot{C}_b^{NED} \bar{r}_{A/o}^b \\ \dot{\bar{L}}_o^{NED} \end{bmatrix}_{9 \times 1} = \begin{bmatrix} C_b^{NED} \dot{\Omega} \bar{r}_{A/o}^b \\ C_b^{NED} \Omega \dot{\bar{r}}_{A/o}^b \\ \dot{\bar{V}}_o^{NED} \end{bmatrix}_{9 \times 1}$$

$$\frac{\partial \dot{h}(X)}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \{C_b^{NED} \Omega \Omega \bar{r}_{A/o}^b\}}{\partial \bar{q}} & \frac{\partial \{C_b^{NED} \Omega \Omega \bar{r}_{A/o}^b\}}{\partial \bar{w}_0^b} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \frac{\partial \{C_b^{NED} \Omega \bar{r}_{A/o}^b\}}{\partial \bar{q}} & \frac{\partial \{C_b^{NED} \Omega \bar{r}_{A/o}^b\}}{\partial \bar{w}_0^b} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 4} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{9 \times 16} \quad (4.24)$$

$$\ddot{h}(X) = \begin{bmatrix} \dot{C}_b^{NED} \Omega \Omega \bar{r}_{A/o}^b \\ \dot{C}_b^{NED} \Omega \bar{r}_{A/o}^b \\ \dot{\bar{V}}_o^{NED} \end{bmatrix}_{9 \times 1} = \begin{bmatrix} C_b^{NED} \Omega \Omega \Omega \bar{r}_{A/o}^b \\ C_b^{NED} \Omega \Omega \bar{r}_{A/o}^b \\ C_b^{NED} \bar{a}_o^b \end{bmatrix}_{9 \times 1}$$

$$\frac{\partial \ddot{h}(X)}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \{C_b^{NED} \Omega \Omega \Omega \bar{r}_{A/o}^b\}}{\partial \bar{q}} & \frac{\partial \{C_b^{NED} \Omega \Omega \Omega \bar{r}_{A/o}^b\}}{\partial \bar{w}_0^b} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \frac{\partial \{C_b^{NED} \Omega \Omega \bar{r}_{A/o}^b\}}{\partial \bar{q}} & \frac{\partial \{C_b^{NED} \Omega \Omega \bar{r}_{A/o}^b\}}{\partial \bar{w}_0^b} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \frac{\partial \{C_b^{NED} \bar{a}_o^b\}}{\partial \bar{q}} & 0_{3 \times 3} & C_b^{NED} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{9 \times 16} \quad (4.25)$$

$$\bar{O} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(X)}{\partial X} \\ \frac{\partial \dot{h}(X)}{\partial X} \\ \frac{\partial \ddot{h}(X)}{\partial X} \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

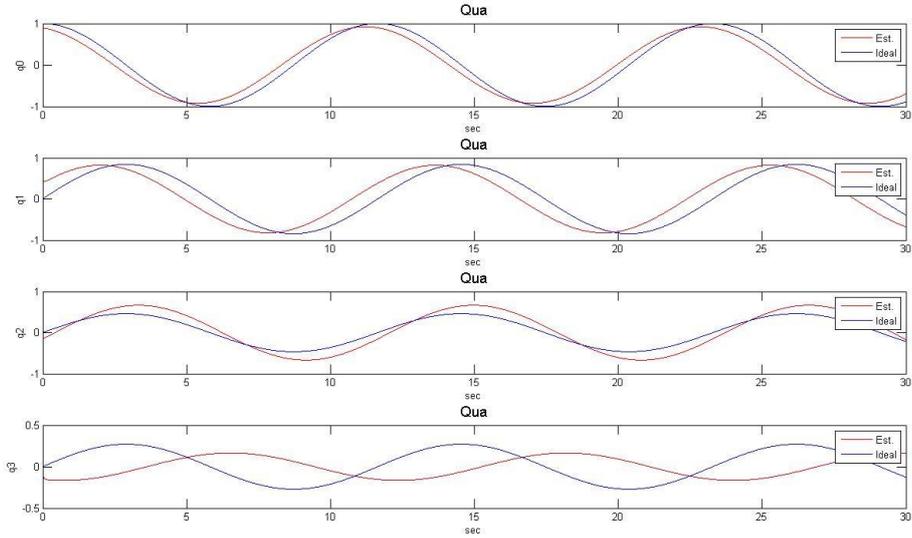
$$\therefore \text{rank}(\bar{O}) = 15$$

而則其估測系統動態方程式如下

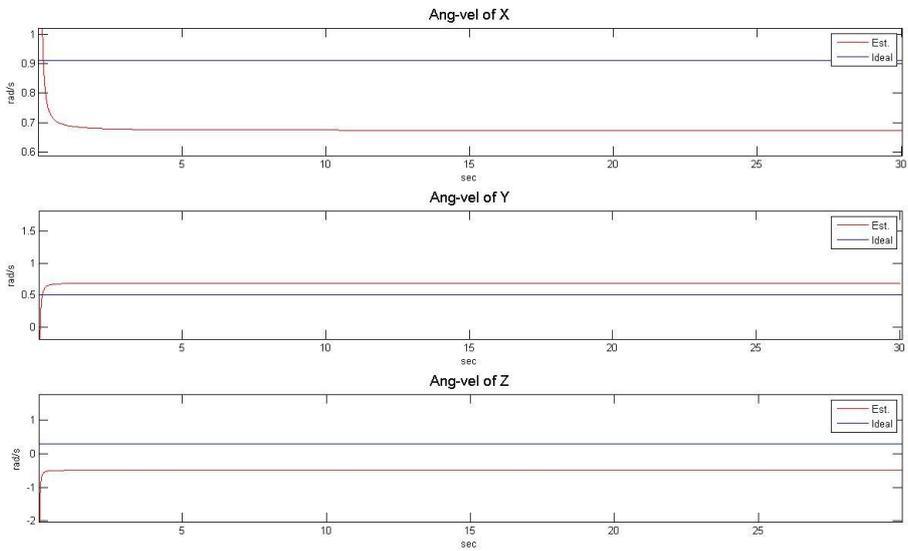
$$\begin{bmatrix} \hat{\bar{q}} \\ \hat{\bar{w}}_o^b \\ \hat{\bar{a}}_o^b \\ \hat{\bar{V}}_o^{NED} \\ \hat{\bar{L}}_o^{NED} \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} Q^{-1/2} * I_{4 \times 4} & Q^{-1/2} * \frac{dt * A(q)}{2} & 0_{4 \times 3} & 0_{4 \times 3} & 0_{4 \times 3} \\ 0_{3 \times 4} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 4} & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 4} & 0_{3 \times 3} & dt * C_b^{NED} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 4} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & dt * I_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\bar{q}} \\ \hat{\bar{w}}_o^b \\ \hat{\bar{a}}_o^b \\ \hat{\bar{V}}_o^{NED} \\ \hat{\bar{L}}_o^{NED} \end{bmatrix}_k \quad (4.27)$$

EKF 模擬結果如下所示。

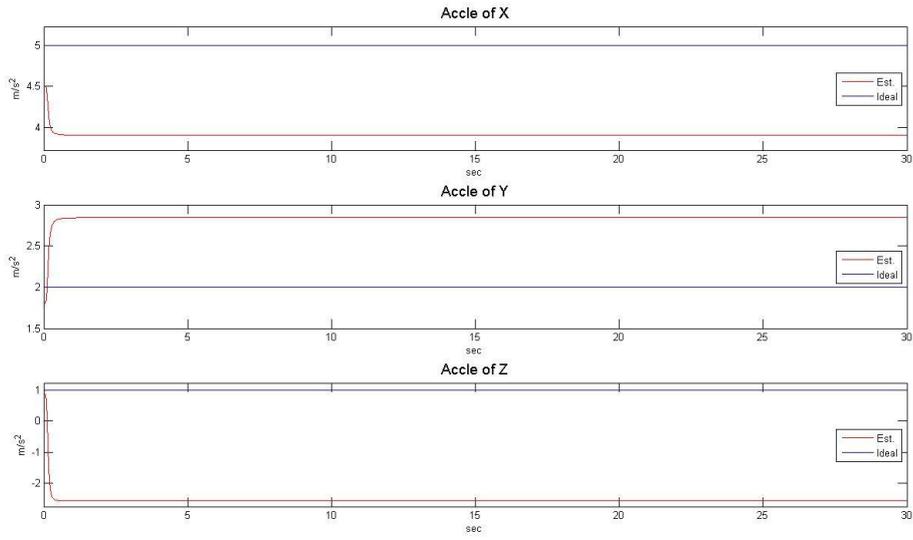
模擬估測狀態為 $X_{16 \times 1} = [\bar{q} \quad \bar{w}_o^b \quad \bar{a}_o^b \quad \bar{V}_o^{NED} \quad \bar{L}_o^{NED}]^T$



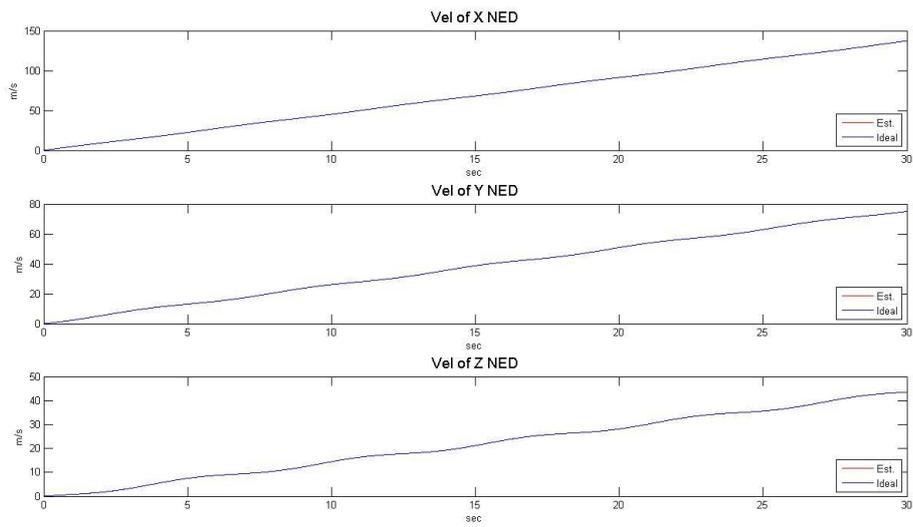
圖(4.13)四元數對照圖



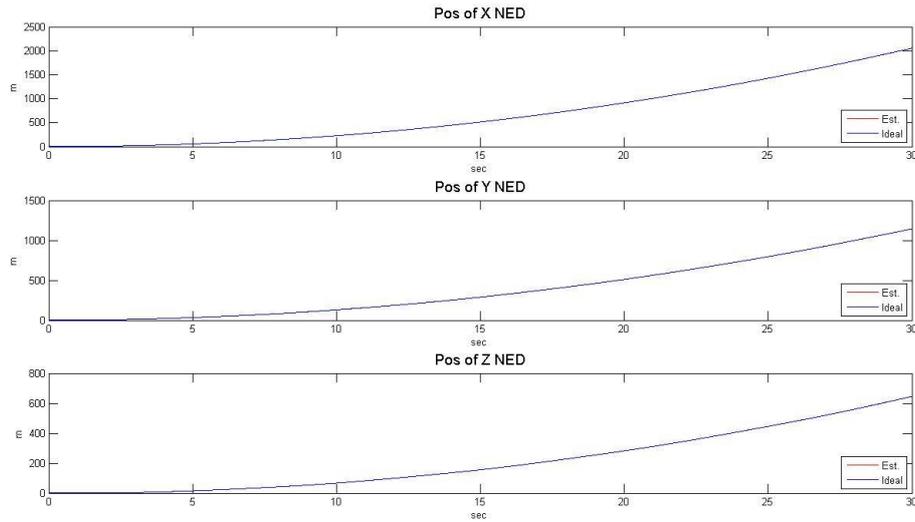
圖(4.14)角速度對照圖



圖(4.15)附體座標系 0 點加速度對照圖



圖(4.16)導航座標系 0 點速度對照圖



圖(4.17)導航座標系 0 點位置對照圖

由此觀察性矩陣驗證姿態估測的可行性，發現其亦有 lose rank 發生並非滿秩，可知以此架構並無法獲得估測狀態之正確值，且以 MatLab 模擬結果亦是如此，並無法精確估測運動物體之路徑與姿態。然而在此架構下，有別於上述輸出系統僅以附體座標系資訊，進而嘗試將兩顆 GPS 所獲得之導航座標系資訊帶入估測系統中的輸出系統，其方程式如下

$$\begin{aligned}
 \vec{V}_{A/o}^{NED} &= C_b^{NED} \Omega \vec{r}_{A/o}^b = \vec{r}_{A/o}^{NED} \vec{w}_o^b \\
 \vec{L}_{A/o}^{NED} &= C_b^{NED} \vec{r}_{A/o}^b \\
 \vec{L}_o^{NED} &= \vec{L}_o^{NED} \\
 \Rightarrow Z &= \begin{bmatrix} \vec{V}_{A/o}^{NED} \\ \vec{L}_{A/o}^{NED} \\ \vec{L}_o^{NED} \end{bmatrix}_{9 \times 1} = \begin{bmatrix} \vec{r}_{A/o}^{NED} \vec{w}_o^b \\ C_b^{NED} \vec{r}_{A/o}^b \\ \vec{L}_o^{NED} \end{bmatrix}_{9 \times 1} \quad (4.28)
 \end{aligned}$$

其中， $\vec{r}_{A/o}^{NED}$ 直接由 GPS-A 與 GPS-B 所獲得的導航座標系位置資訊帶入此輸出系統中，由相關的觀察性矩陣，來驗證姿態估測的可行性。系統的觀察性矩陣，如下式推導：

$$h(X) = \begin{bmatrix} \bar{V}_{A/o}^{NED} \\ \bar{L}_{A/o}^{NED} \\ \bar{L}_o^{NED} \end{bmatrix}_{9 \times 1} = \begin{bmatrix} \bar{r}_{A/o}^{NED} \bar{w}_o^b \\ C_b^{NED} \bar{r}_{A/o}^b \\ \bar{L}_o^{NED} \end{bmatrix}_{9 \times 1}$$

$$\frac{\partial h(X)}{\partial X} = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 4} & \frac{\partial \{ \bar{r}_{A/o}^{NED} \bar{w}_o^b \}}{\partial \bar{w}_o^b} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \frac{\partial \{ C_b^{NED} \bar{r}_{A/o}^b \}}{\partial \bar{q}} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 4} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{9 \times 16} \quad (4.29)$$

$$\dot{h}(X) = \begin{bmatrix} \dot{\bar{r}}_{A/o}^{NED} \bar{w}_o^b \\ \dot{C}_b^{NED} \bar{r}_{A/o}^b \\ \dot{\bar{L}}_o^{NED} \end{bmatrix}_{9 \times 1} = \begin{bmatrix} \bar{V}_{A/o}^{NED} \bar{w}_o^b \\ C_b^{NED} \Omega \bar{r}_{A/o}^b \\ \bar{V}_o^{NED} \end{bmatrix}_{9 \times 1}$$

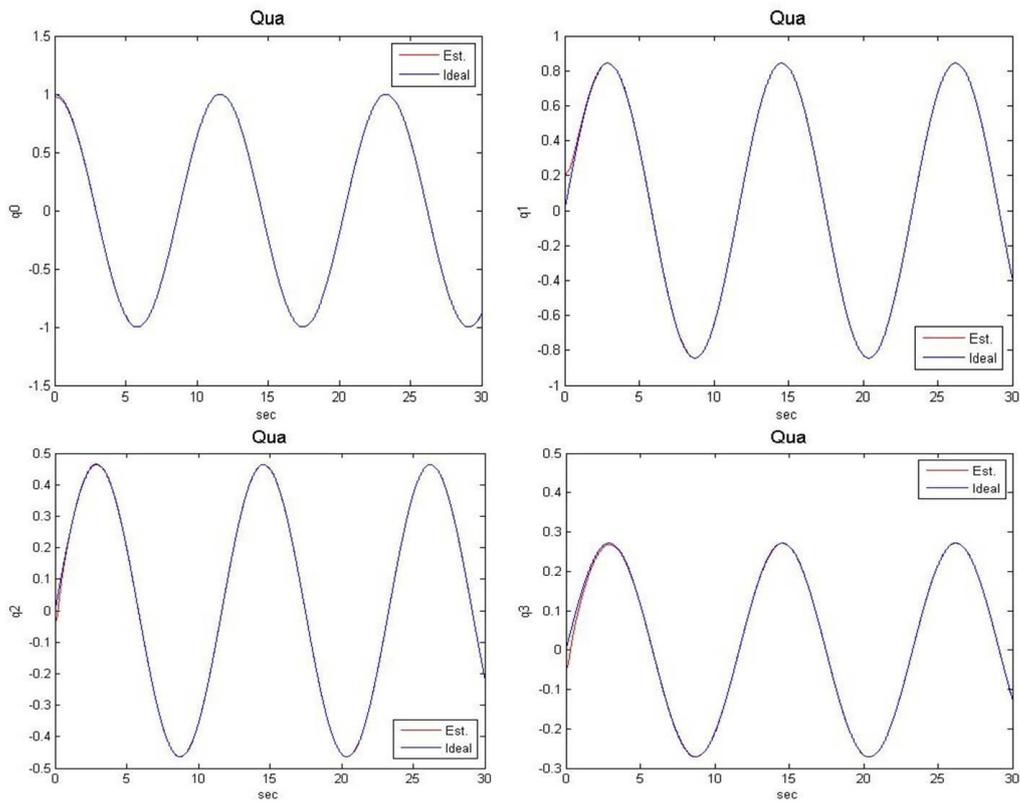
$$\frac{\partial \dot{h}(X)}{\partial X} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 4} & \frac{\partial \{ \bar{V}_{A/o}^{NED} \bar{w}_o^b \}}{\partial \bar{w}_o^b} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \frac{\partial \{ C_b^{NED} \Omega \bar{r}_{A/o}^b \}}{\partial \bar{q}} & \frac{\partial \{ C_b^{NED} \Omega \bar{r}_{A/o}^b \}}{\partial \bar{w}_o^b} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 4} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{9 \times 16} \quad (4.30)$$

$$\bar{O} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(X)}{\partial X} \\ \frac{\partial \dot{h}(X)}{\partial X} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

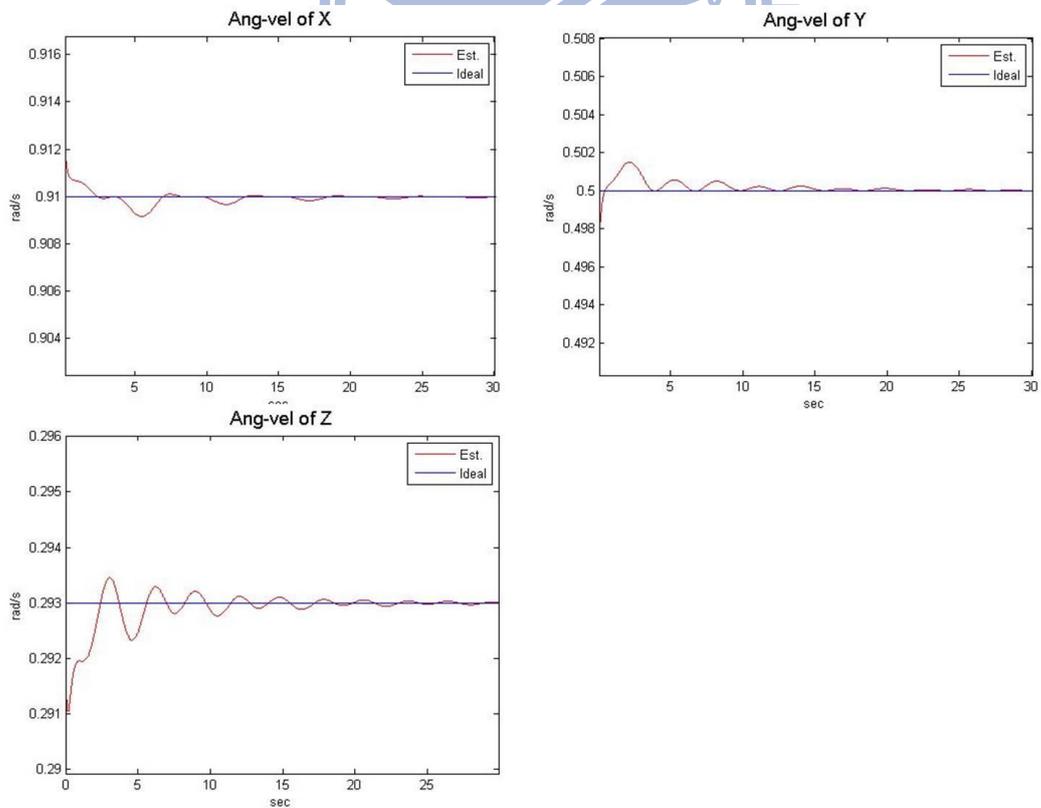
$\therefore \text{rank}(\bar{O}) = 16$

觀察性矩陣滿足滿秩的條件，故此架構應為可精確的估測到四元數等等估測狀態，EKF 估測模擬如下：

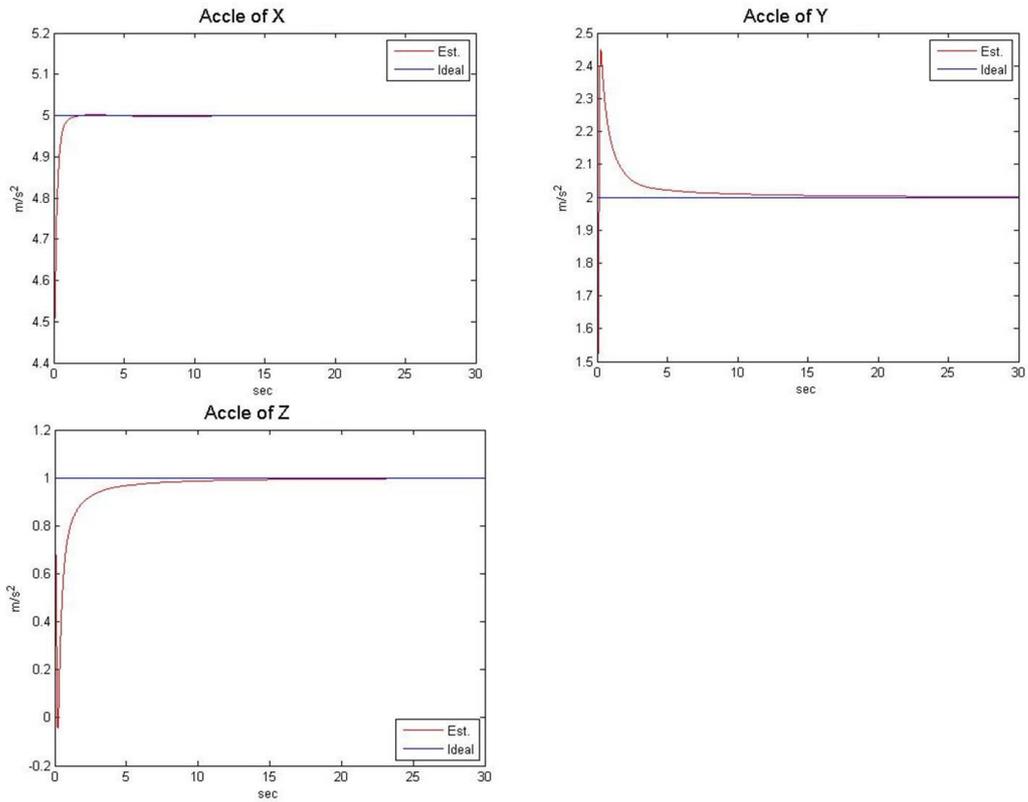
模擬估測狀態為 $X_{16 \times 1} = [\bar{q} \quad \bar{w}_o^b \quad \bar{a}_o^b \quad \bar{V}_o^{NED} \quad \bar{L}_o^{NED}]^T$



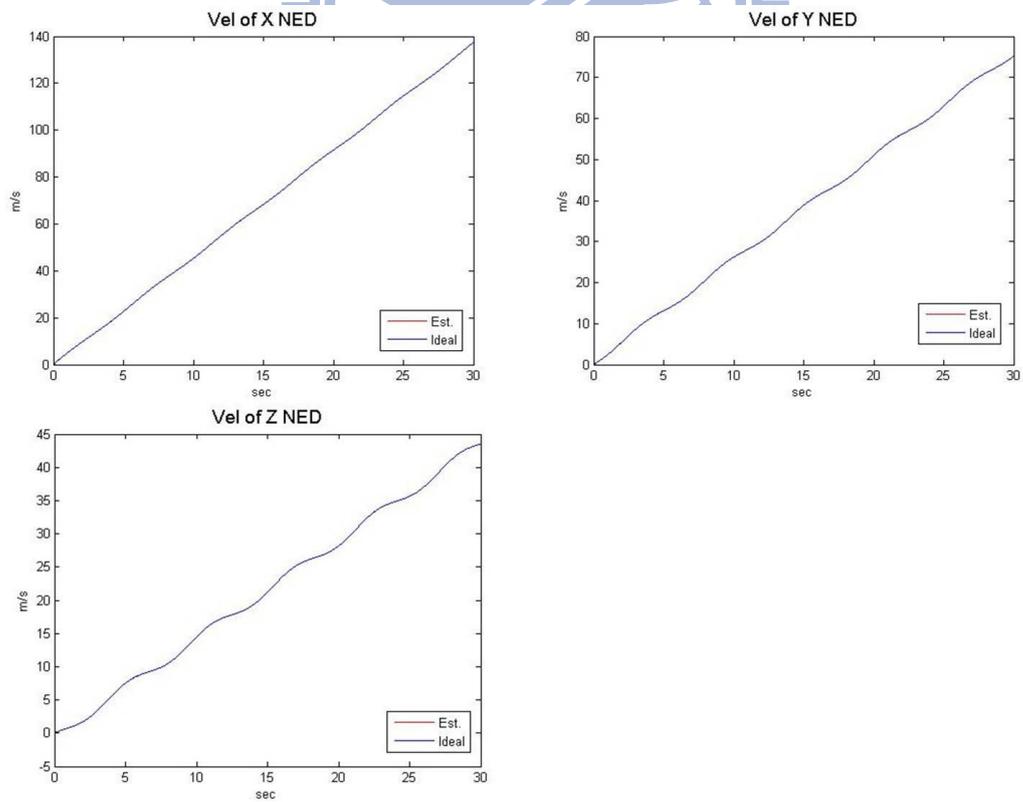
圖(4.18)四元數對照圖



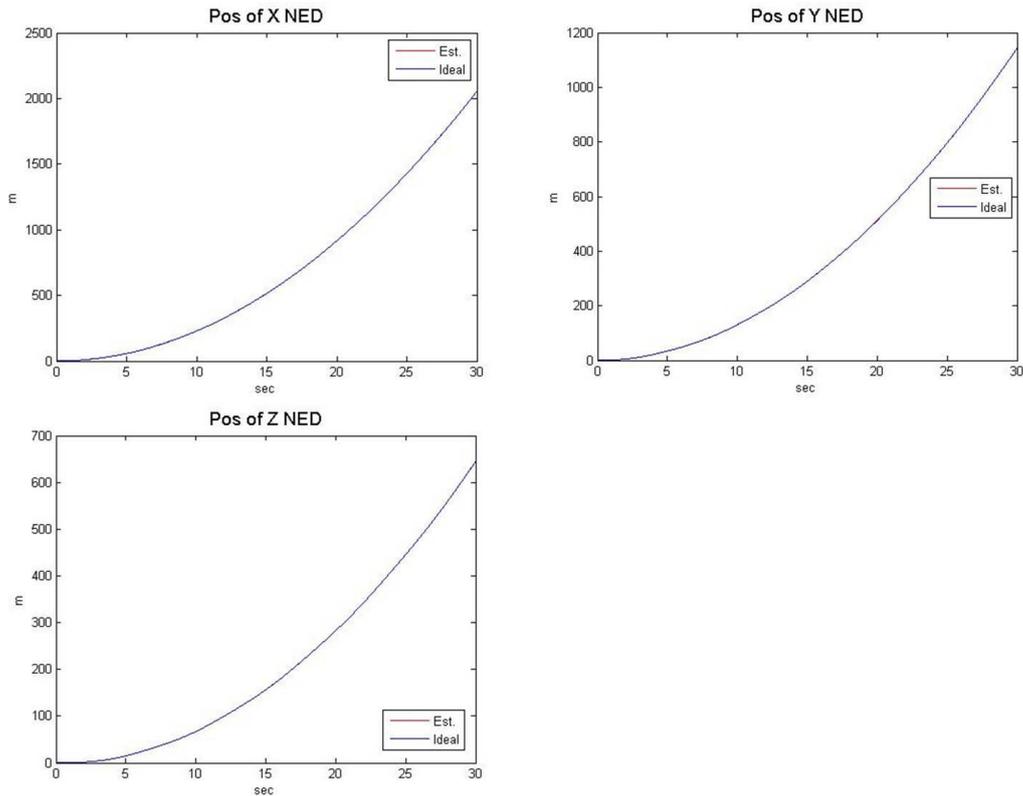
圖(4.19)角速度對照圖



圖(4.20)附體座標系 0 點加速度對照圖



圖(4.21)導航座標系 0 點速度對照圖



圖(4.22)導航座標系 0 點位置對照圖

模擬結果與觀察性矩陣驗證結果相符，當以兩顆 GPS 所獲得之導航座標系資訊帶入估測系統中之輸出系統，可精準估測出運動物體路徑與姿態，以此做為依據，進而模擬當輸入系統之陀螺儀與加速規訊號帶有偏壓之情形。

4.5.2 加速規與陀螺儀輸入訊號帶有偏壓

以兩顆 GPS 之導航座標系資訊直接帶入估測系統中之輸出系統做為依據，架構延伸建立一估測狀態則包括四元數、三軸角速度常數偏壓、三軸加速度常數偏壓、導航座標系三軸 0 點速度、導航座標系三軸 0 點位置即

$$X_{16 \times 1} = [\bar{q} \quad d\bar{w}_o^b \quad d\bar{a}_o^b \quad \bar{V}_o^{NED} \quad \bar{L}_o^{NED}]^T$$

相同低以 $\bar{V}_{A/o}^{NED}$ 、 $\bar{L}_{A/o}^{NED}$ 、 \bar{L}_o^{NED} 做為輸出系統，其所帶入之資訊則包含導航座標系的資訊，其方程式如下

$$\begin{aligned}
\bar{V}_{A/o}^{NED} &= C_b^{NED} \Omega^* \bar{r}_{A/o}^b = \bar{r}_{A/o}^{NED} \{ \bar{w}_o^{*b} - d\bar{w}_o^b \} \\
\bar{L}_{A/o}^{NED} &= C_b^{NED} \bar{r}_{A/o}^b \\
\bar{L}_o^{NED} &= \bar{L}_o^{NED} \\
\Omega^* &= \begin{bmatrix} 0 & -\{w_o^{*b} - dw_o^b\}_z & \{w_o^{*b} - dw_o^b\}_y \\ \{w_o^{*b} - dw_o^b\}_z & 0 & -\{w_o^{*b} - dw_o^b\}_x \\ -\{w_o^{*b} - dw_o^b\}_y & \{w_o^{*b} - dw_o^b\}_x & 0 \end{bmatrix} \\
\Rightarrow Z &= \begin{bmatrix} \bar{V}_{A/o}^{NED} \\ \bar{L}_{A/o}^{NED} \\ \bar{L}_o^{NED} \end{bmatrix}_{9 \times 1} = \begin{bmatrix} \bar{r}_{A/o}^{NED} \{ \bar{w}_o^{*b} - d\bar{w}_o^b \} \\ C_b^{NED} \bar{r}_{A/o}^b \\ \bar{L}_o^{NED} \end{bmatrix}_{9 \times 1}
\end{aligned} \tag{4.32}$$

由相關的觀察性矩陣，來驗證姿態估測的可行性。系統的觀察性矩陣，

如下式推導：

$$\begin{aligned}
h(X) &= \begin{bmatrix} \bar{V}_{A/o}^{NED} \\ \bar{L}_{A/o}^{NED} \\ \bar{L}_o^{NED} \end{bmatrix}_{9 \times 1} = \begin{bmatrix} \bar{r}_{A/o}^{NED} \{ \bar{w}_o^{*b} - d\bar{w}_o^b \} \\ C_b^{NED} \bar{r}_{A/o}^b \\ \bar{L}_o^{NED} \end{bmatrix}_{9 \times 1} \\
\frac{\partial h(X)}{\partial X} &= \begin{bmatrix} 0_{4 \times 4} & \frac{\partial \{ \bar{r}_{A/o}^{NED} \{ \bar{w}_o^{*b} - d\bar{w}_o^b \} \}}{\partial d\bar{w}_o^b} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \frac{\partial \{ C_b^{NED} \bar{r}_{A/o}^b \}}{\partial \bar{q}} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 4} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{9 \times 16}
\end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\dot{h}(X) = \begin{bmatrix} \dot{\bar{r}}_{A/o}^{NED} \bar{w}_o^b \\ \dot{C}_b^{NED} \bar{r}_{A/o}^b \\ \dot{\bar{L}}_o^{NED} \end{bmatrix}_{9 \times 1} = \begin{bmatrix} \bar{V}_{A/o}^{NED} \{ \bar{w}_o^{*b} - d\bar{w}_o^b \} \\ C_b^{NED} \Omega^* \bar{r}_{A/o}^b \\ \bar{V}_o^{NED} \end{bmatrix}_{9 \times 1}$$

$$\frac{\partial \dot{h}(X)}{\partial X} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 4} & \frac{\partial \{ \bar{V}_{A/o}^{NED} \{ \bar{w}_o^{*b} - d\bar{w}_o^b \} \}}{\partial d\bar{w}_o^b} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \frac{\partial \{ C_b^{NED} \Omega^* \bar{r}_{A/o}^b \}}{\partial \bar{q}} & \frac{\partial \{ C_b^{NED} \Omega^* \bar{r}_{A/o}^b \}}{\partial d\bar{w}_o^b} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 4} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{9 \times 16} \quad (4.34)$$

$$\bar{O} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(X)}{\partial X} \\ \frac{\partial \dot{h}(X)}{\partial X} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

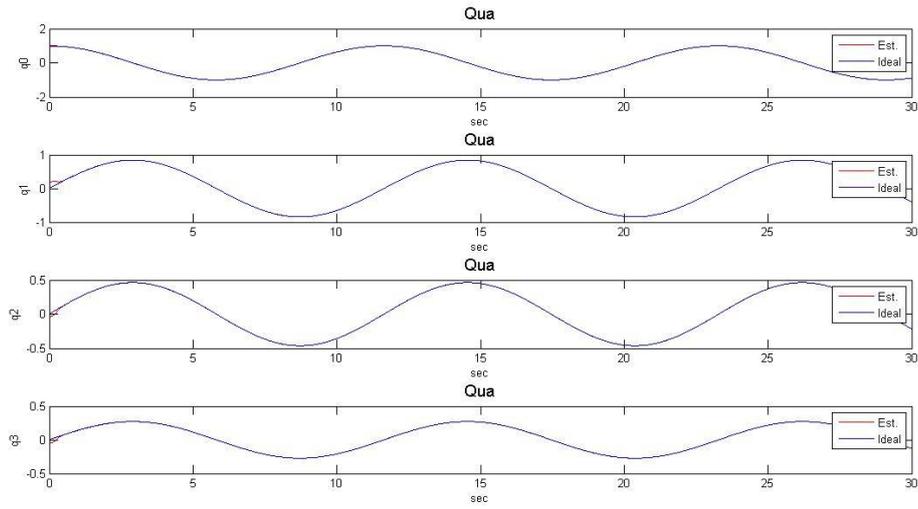
$$\therefore \text{rank}(\bar{O}) = 16$$

其估測系統動態方程式如下

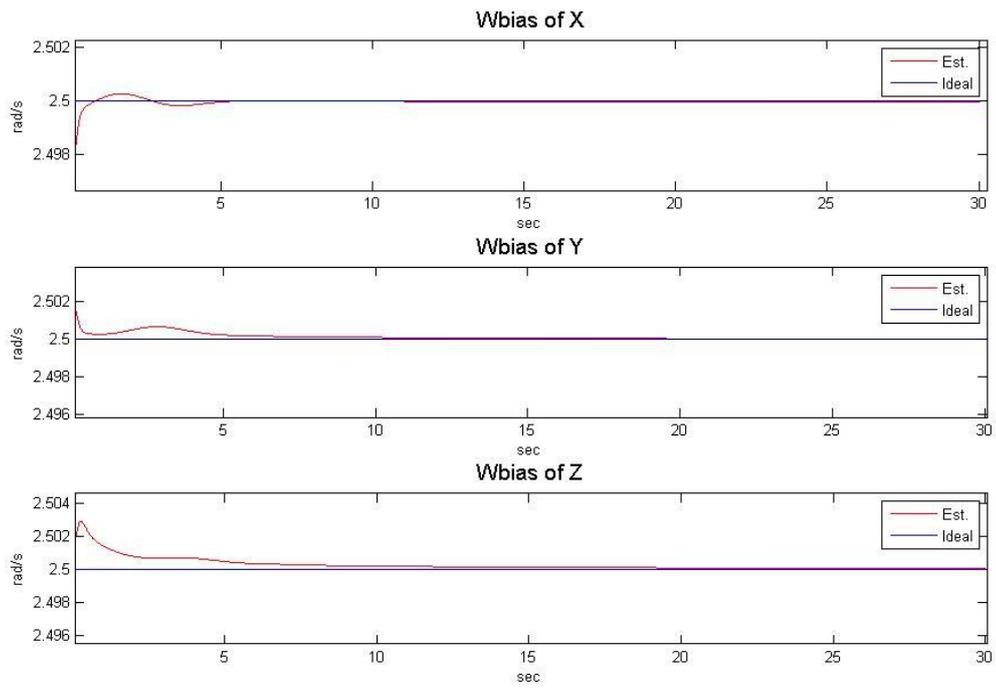
$$\begin{bmatrix} \hat{\bar{q}} \\ d\hat{w}_o^b \\ d\hat{a}_o^b \\ \hat{V}_o^{NED} \\ \hat{L}_o^{NED} \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} Q^{-1/2} * I_{4 \times 4} & -Q^{-1/2} * \frac{dt * A(q)}{2} & 0_{4 \times 3} & 0_{4 \times 3} & 0_{4 \times 3} \\ 0_{3 \times 4} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 4} & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 4} & 0_{3 \times 3} & -dt * C_b^{NED} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 4} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & dt * I_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\bar{q}} \\ d\hat{w}_o^b \\ d\hat{a}_o^b \\ \hat{V}_o^{NED} \\ \hat{L}_o^{NED} \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} Q^{-1/2} * \frac{dt * A(q)}{2} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & dt * C_b^{NED} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w}_o^{*b} \\ \bar{a}_o^{*b} \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

相同的，觀察性矩陣滿足滿秩的條件，故此架構應為可精確的估測到四元數等等估測狀態，EKF 模擬如下。

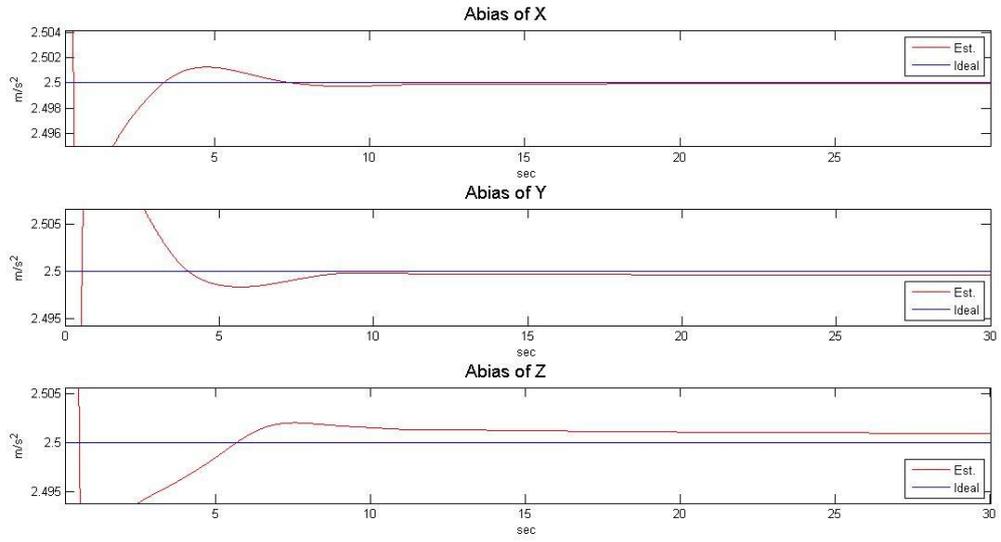
$$\text{模擬估測狀態為 } X_{16 \times 1} = \left[\bar{q} \quad d\bar{w}_o^b \quad d\bar{a}_o^b \quad \bar{V}_o^{NED} \quad \bar{L}_o^{NED} \right]^T$$



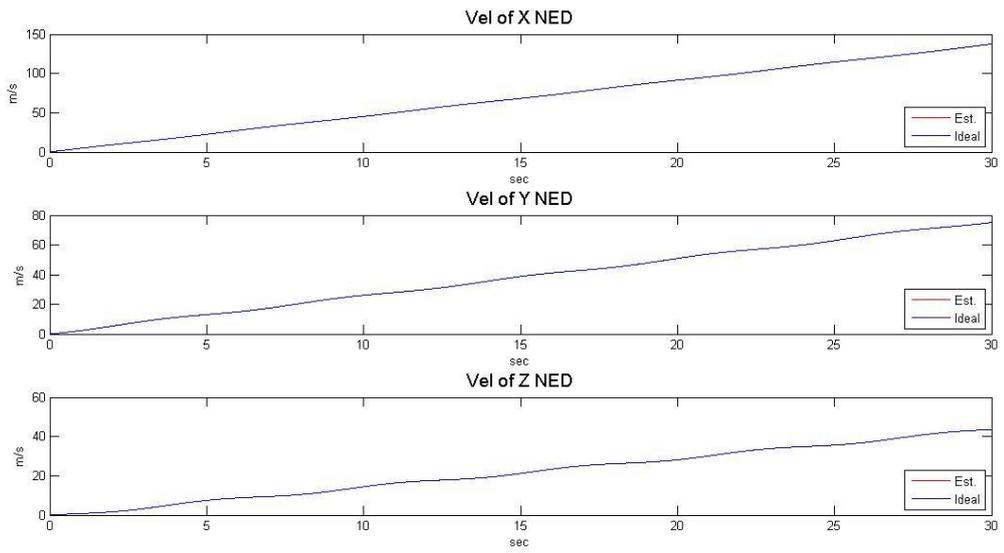
圖(4.23)四元數對照圖



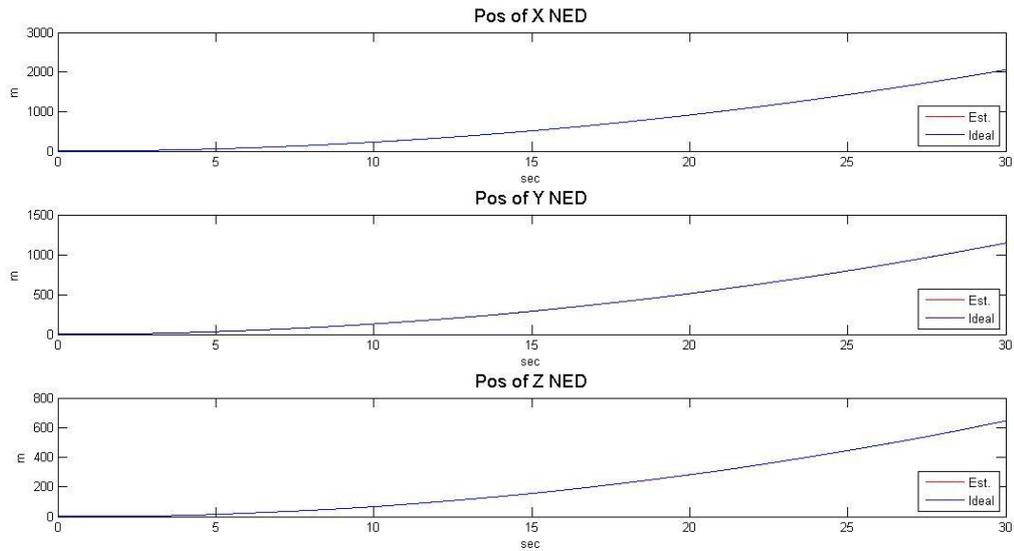
圖(4.24)陀螺儀訊號偏壓對照圖



圖(4.25)加速規訊號偏壓對照圖



圖(4.26)導航座標系 0 點速度對照圖

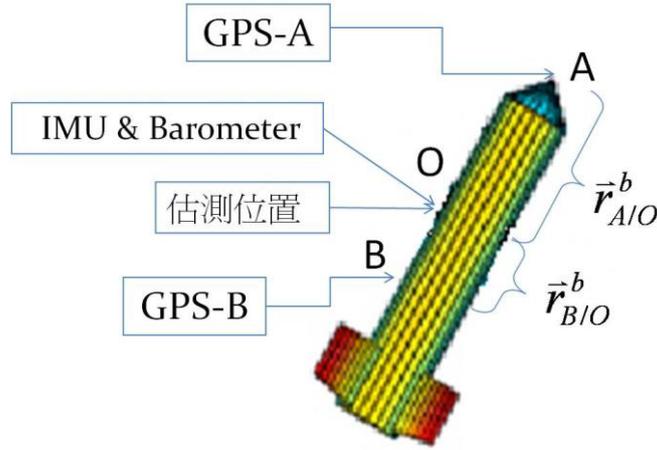


圖(4.27)導航座標系 0 點位置對照圖

將導航座標系資訊直接帶入觀察系統中，如預期所示，可估測精確的姿態。

4.6 2 顆 GPS+Barometer+IMU

藉由增加可觀察的資訊即增加系統輸出，避免因座標轉換矩陣所造成四元數估測狀態造成誤判情形，可使觀察性矩陣滿秩，以達到估測系統準確估測運動物體姿態。在此嘗試以兩顆 GPS 並增加 Barometer 以獲得導航座標系的高度資訊，建立兩種系統輸入架構並驗證其可行性。其感測元件擺放位置如下圖(4.28)所示，GPS-A 放置於 A 點，GPS-B 放置於 B 點，而 Barometer 與 IMU 放置於估測位置 0 點。



圖(4.28)感測器擺放示意圖

4.6.1 加速規與陀螺儀輸入訊號不帶有偏壓

估測狀態則包括四元數、三軸常數角速度、三軸常數加速度、導航座標系三軸 0 點速度、導航座標系三軸 0 點位置即

$$X_{16 \times 1} = [\bar{q} \quad \bar{w}_o^b \quad \bar{a}_o^b \quad \bar{V}_o^{NED} \quad \bar{L}_o^{NED}]^T$$

以 \bar{L}_A^{NED} 、 \bar{L}_B^{NED} 、 $L_{o,Z}^{NED}$ 做為系統輸出，而所帶入之資訊則以附體座標系

為主，其方程式如下

$$\bar{L}_A^{NED} = \bar{L}_o^{NED} + C_b^{NED} \bar{r}_{A/o}^b$$

$$\bar{L}_B^{NED} = \bar{L}_o^{NED} + C_b^{NED} \bar{r}_{B/o}^b$$

$$L_{o,Z}^{NED} = L_{o,Z}^{NED}$$

$$\Rightarrow Z = \begin{bmatrix} \bar{L}_A^{NED} \\ \bar{L}_B^{NED} \\ L_{o,Z}^{NED} \end{bmatrix}_{7 \times 1} = \begin{bmatrix} \bar{L}_o^{NED} + C_b^{NED} \bar{r}_{A/o}^b \\ \bar{L}_o^{NED} + C_b^{NED} \bar{r}_{B/o}^b \\ L_{o,Z}^{NED} \end{bmatrix}_{7 \times 1}$$

(4.37)

由相關的觀察性矩陣，來驗證姿態估測的可行性。此系統的觀察性矩陣，如下式推導：

$$h(X) = \begin{bmatrix} \bar{L}_A^{NED} \\ \bar{L}_B^{NED} \\ L_{o,Z}^{NED} \end{bmatrix}_{7 \times 1} = \begin{bmatrix} \bar{L}_o^{NED} + C_b^{NED} \bar{r}_{A/o}^b \\ \bar{L}_o^{NED} + C_b^{NED} \bar{r}_{B/o}^b \\ L_{o,Z}^{NED} \end{bmatrix}_{7 \times 1}$$

$$\frac{\partial h(X)}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \{C_b^{NED} \bar{r}_{A/o}^b\}}{\partial \bar{q}} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \\ \frac{\partial \{C_b^{NED} \bar{r}_{B/o}^b\}}{\partial \bar{q}} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \\ 0_{1 \times 4} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{7 \times 16} \quad (4.38)$$

$$\dot{h}(X) = \begin{bmatrix} \dot{\bar{L}}_o^{NED} + \dot{C}_b^{NED} \bar{r}_{A/o}^b \\ \dot{\bar{L}}_o^{NED} + \dot{C}_b^{NED} \bar{r}_{B/o}^b \\ \dot{L}_{o,Z}^{NED} \end{bmatrix}_{7 \times 1} = \begin{bmatrix} \bar{V}_o^{NED} + C_b^{NED} \Omega \bar{r}_{A/o}^b \\ \bar{V}_o^{NED} + C_b^{NED} \Omega \bar{r}_{B/o}^b \\ V_{o,Z}^{NED} \end{bmatrix}_{7 \times 1}$$

$$\frac{\partial \dot{h}(X)}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \{C_b^{NED} \Omega \bar{r}_{A/o}^b\}}{\partial \bar{q}} & \frac{\partial \{C_b^{NED} \Omega \bar{r}_{A/o}^b\}}{\partial \bar{w}_0^b} & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \frac{\partial \{C_b^{NED} \Omega \bar{r}_{B/o}^b\}}{\partial \bar{q}} & \frac{\partial \{C_b^{NED} \Omega \bar{r}_{B/o}^b\}}{\partial \bar{w}_0^b} & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{1 \times 4} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0 & 0 & 1 & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{7 \times 16} \quad (4.39)$$

$$\ddot{h}(X) = \begin{bmatrix} \dot{\bar{V}}_o^{NED} + \dot{C}_b^{NED} \Omega \bar{r}_{A/o}^b \\ \dot{\bar{V}}_o^{NED} + \dot{C}_b^{NED} \Omega \bar{r}_{B/o}^b \\ \dot{V}_{o,Z}^{NED} \end{bmatrix}_{7 \times 1} = \begin{bmatrix} C_b^{NED} \bar{a}_o^b + C_b^{NED} \Omega \Omega \bar{r}_{A/o}^b \\ C_b^{NED} \bar{a}_o^b + C_b^{NED} \Omega \Omega \bar{r}_{B/o}^b \\ a_{o,Z}^{NED} \end{bmatrix}_{7 \times 1}$$

$$= \begin{bmatrix} C_b^{NED} \bar{a}_o^b + C_b^{NED} \Omega \Omega \bar{r}_{A/o}^b \\ C_b^{NED} \bar{a}_o^b + C_b^{NED} \Omega \Omega \bar{r}_{B/o}^b \\ 2a_{o,X}^b (q_1 q_3 - q_0 q_2) + 2a_{o,Y}^b (q_2 q_3 + q_0 q_1) + a_{o,Z}^b (q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2) \end{bmatrix}_{7 \times 1}$$

$$\frac{\partial \ddot{h}(X)}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \{C_b^{NED} \bar{a}_o^b + C_b^{NED} \Omega \Omega \bar{r}_{A/o}^b\}}{\partial \bar{q}} & \frac{\partial \{C_b^{NED} \Omega \Omega \bar{r}_{A/o}^b\}}{\partial \bar{w}_0^b} & C_b^{NED} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \frac{\partial \{C_b^{NED} \bar{a}_o^b + C_b^{NED} \Omega \Omega \bar{r}_{B/o}^b\}}{\partial \bar{q}} & \frac{\partial \{C_b^{NED} \Omega \Omega \bar{r}_{B/o}^b\}}{\partial \bar{w}_0^b} & C_b^{NED} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \frac{\partial \{a_{o,Z}^{NED}\}}{\partial \bar{q}} & 0_{1 \times 3} & \frac{\partial \{a_{o,Z}^{NED}\}}{\partial \bar{a}_o^b} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} \end{bmatrix}_{7 \times 16}$$

$$(4.40)$$

$$\bar{O} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(X)}{\partial X} \\ \frac{\partial \dot{h}(X)}{\partial X} \\ \frac{\partial \ddot{h}(X)}{\partial X} \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

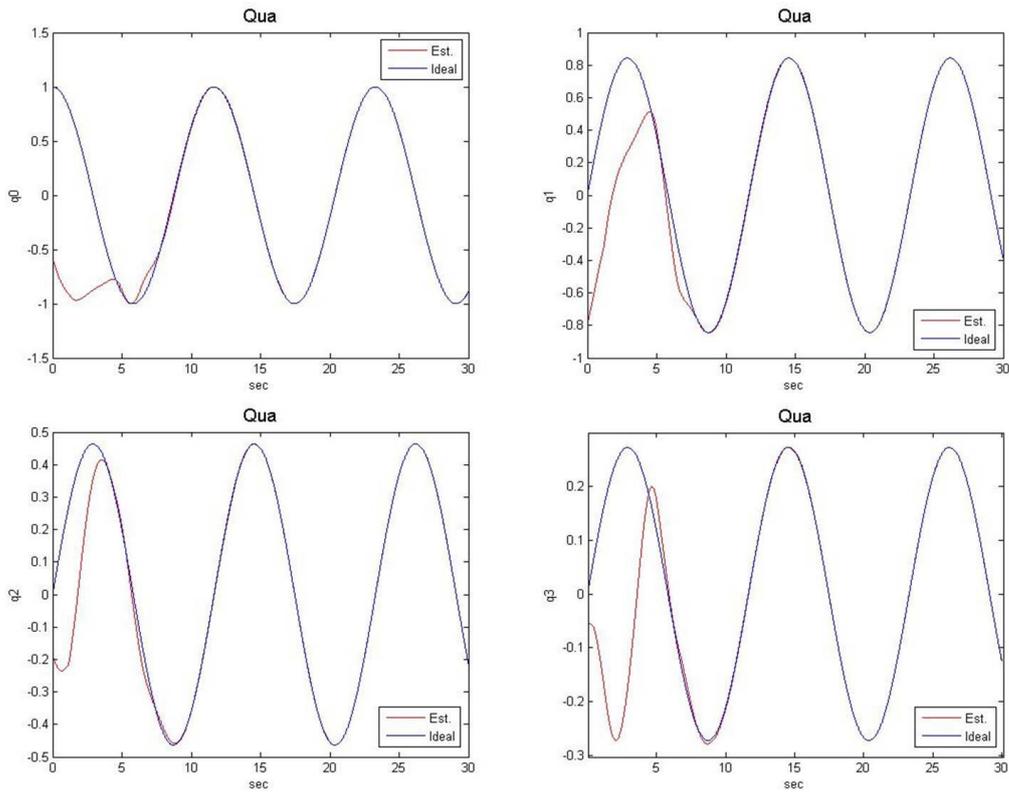
$$\therefore \text{rank}(\bar{O}) = 16$$

而則其估測系統動態方程式如下

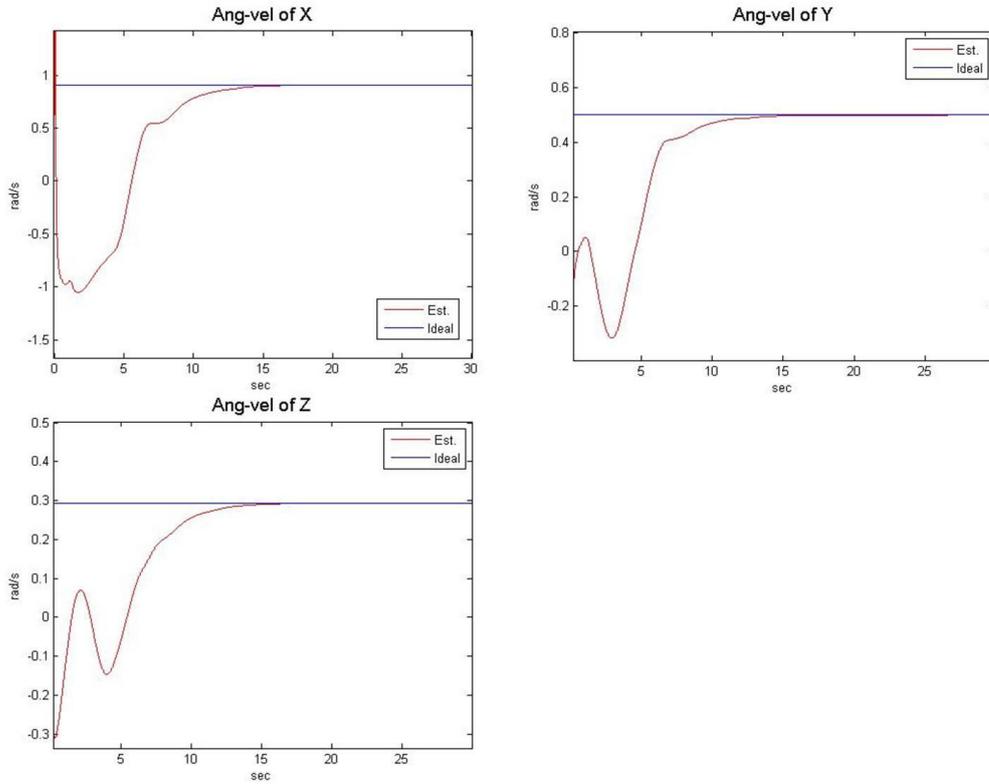
$$\begin{bmatrix} \hat{q} \\ \hat{w}_o^b \\ \hat{a}_o^b \\ \hat{V}_o^{NED} \\ \hat{L}_o^{NED} \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} Q^{-1/2} * I_{4 \times 4} & Q^{-1/2} * \frac{dt * A(q)}{2} & 0_{4 \times 3} & 0_{4 \times 3} & 0_{4 \times 3} \\ 0_{3 \times 4} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 4} & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 4} & 0_{3 \times 3} & dt * C_b^{NED} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 4} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & dt * I_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{q} \\ \hat{w}_o^b \\ \hat{a}_o^b \\ \hat{V}_o^{NED} \\ \hat{L}_o^{NED} \end{bmatrix}_k \quad (4.42)$$

觀察性矩陣驗證此姿態估測系統的可行性。故因此架構為可滿足觀察性矩陣滿秩，利用 EKF 估測系統模擬如下：

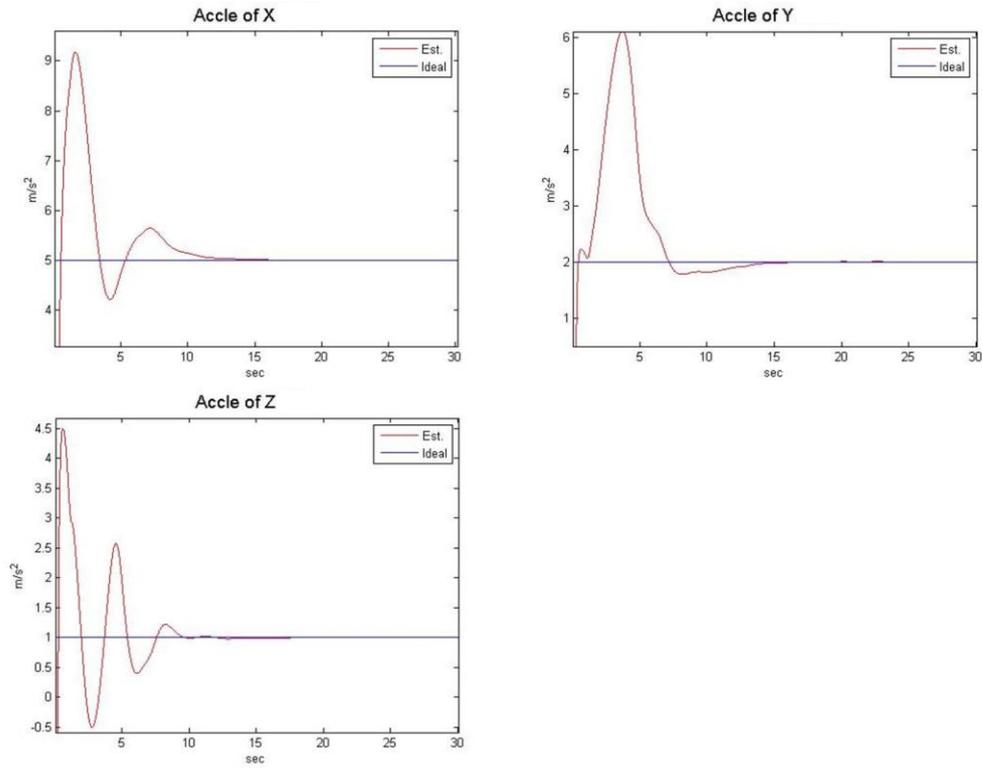
$$\text{模擬估測狀態為 } X_{16 \times 1} = [\hat{q} \quad \hat{w}_o^b \quad \hat{a}_o^b \quad \hat{V}_o^{NED} \quad \hat{L}_o^{NED}]^T$$



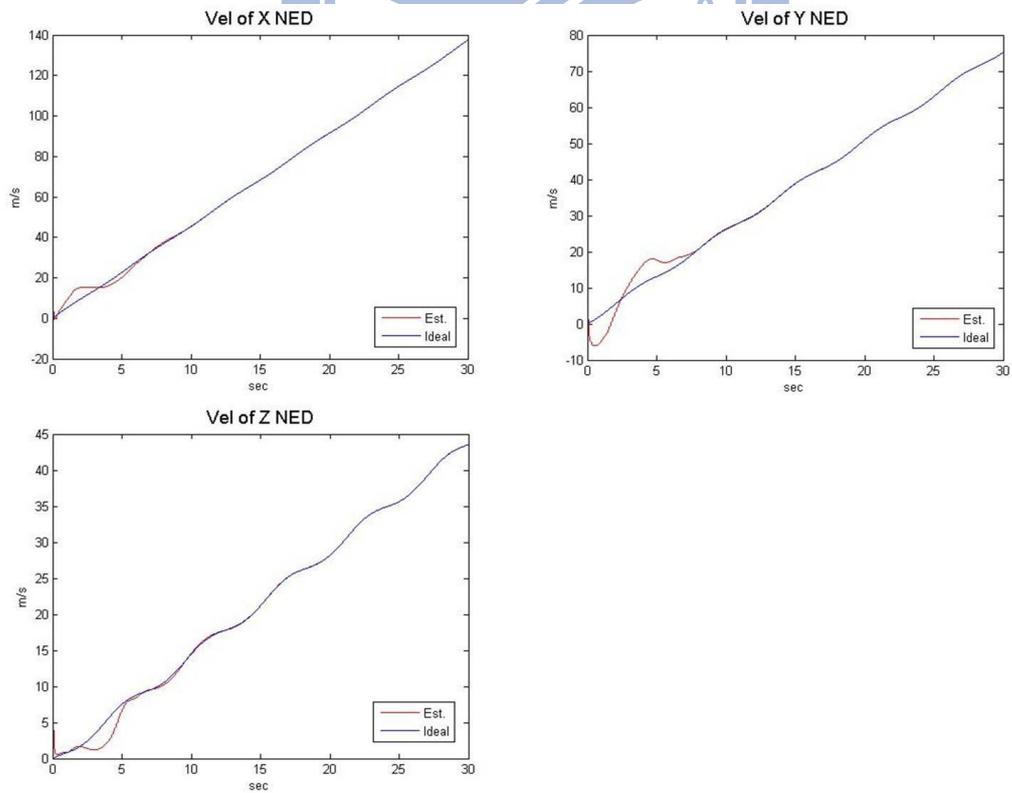
圖(4.29)四元數對照圖



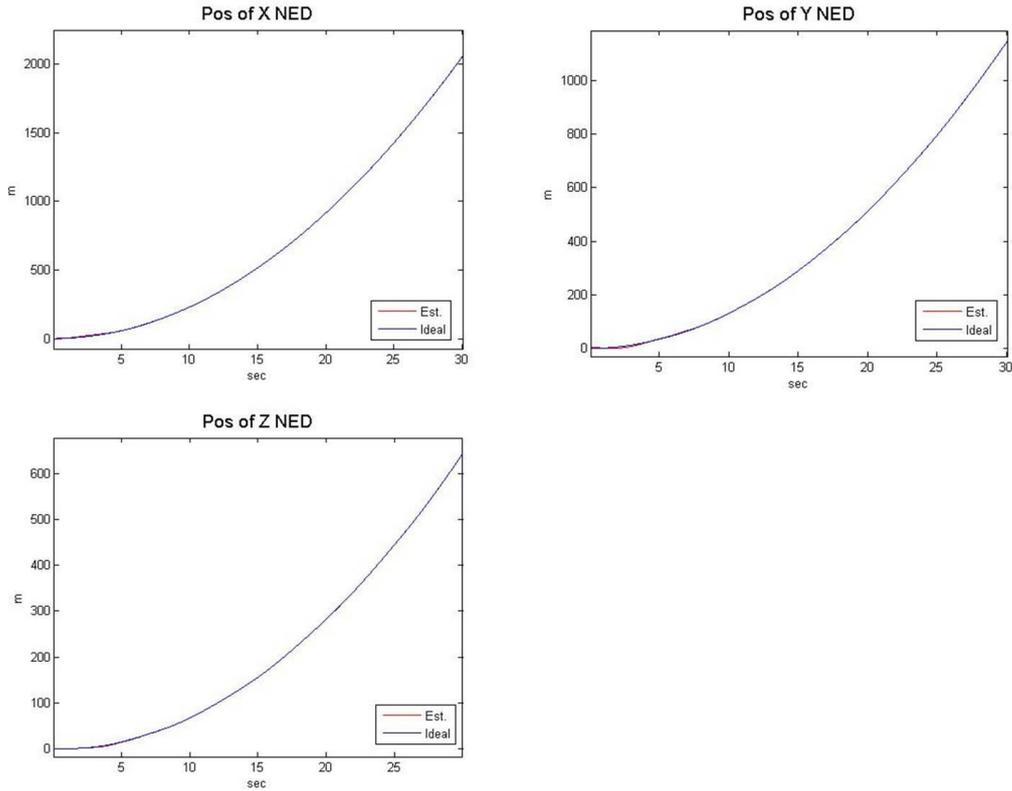
圖(4.30)角速度對照圖



圖(4.31)附體座標系 0 點加速度對照圖



圖(4.32)導航座標系 0 點速度對照圖



圖(4.33)導航座標系 0 點位置對照圖

4.6.2 加速規與陀螺儀輸入訊號帶有偏壓

由 4.6.1 節中觀察性矩陣與 EKF 模擬驗證當加速規與陀螺儀輸入訊號不帶有偏壓時之姿態與路徑估測系統為可行後，進而嘗試建立一估測狀態則包括四元數、三軸角速度常數偏壓、三軸加速度常數偏壓、導航座標系三軸 0 點速度、導航座標系三軸 0 點位置即

$$X_{16 \times 1} = [\bar{q} \quad d\bar{\omega}_o^b \quad d\bar{a}_o^b \quad \bar{V}_o^{NED} \quad \bar{L}_o^{NED}]^T$$

此時 IMU 所量測之角速度與加速度則為系統輸入，相同地，以 \bar{L}_A^{NED} 、 \bar{L}_B^{NED} 、 $L_{o,Z}^{NED}$ 做為系統輸出，由相關的觀察性矩陣，來驗證姿態估測的可行性。於此先以系統的觀察性矩陣，如下式推導：

$$h(X) = \begin{bmatrix} \bar{L}_A^{NED} \\ \bar{L}_B^{NED} \\ L_{o,Z}^{NED} \end{bmatrix}_{7 \times 1} = \begin{bmatrix} \bar{L}_o^{NED} + C_b^{NED} \bar{r}_{A/o}^b \\ \bar{L}_o^{NED} + C_b^{NED} \bar{r}_{B/o}^b \\ L_{o,Z}^{NED} \end{bmatrix}_{7 \times 1}$$

$$\frac{\partial h(X)}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \{C_b^{NED} \bar{r}_{A/o}^b\}}{\partial \bar{q}} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \\ \frac{\partial \{C_b^{NED} \bar{r}_{B/o}^b\}}{\partial \bar{q}} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \\ 0_{1 \times 4} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{7 \times 16} \quad (4.43)$$

$$\dot{h}(X) = \begin{bmatrix} \dot{\bar{L}}_o^{NED} + \dot{C}_b^{NED} \bar{r}_{A/o}^b \\ \dot{\bar{L}}_o^{NED} + \dot{C}_b^{NED} \bar{r}_{B/o}^b \\ \dot{L}_{o,Z}^{NED} \end{bmatrix}_{7 \times 1} = \begin{bmatrix} \bar{V}_o^{NED} + C_b^{NED} \Omega^* \bar{r}_{A/o}^b \\ \bar{V}_o^{NED} + C_b^{NED} \Omega^* \bar{r}_{B/o}^b \\ V_{o,Z}^{NED} \end{bmatrix}_{7 \times 1}$$

$$\Omega^* = \begin{bmatrix} 0 & -\{w_o^{*b} - dw_o^b\}_z & \{w_o^{*b} - dw_o^b\}_y \\ \{w_o^{*b} - dw_o^b\}_z & 0 & -\{w_o^{*b} - dw_o^b\}_x \\ -\{w_o^{*b} - dw_o^b\}_y & \{w_o^{*b} - dw_o^b\}_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \dot{h}(X)}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \{C_b^{NED} \Omega^* \bar{r}_{A/o}^b\}}{\partial \bar{q}} & \frac{\partial \{C_b^{NED} \Omega^* \bar{r}_{A/o}^b\}}{\partial d\bar{w}_0^b} & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \frac{\partial \{C_b^{NED} \Omega^* \bar{r}_{B/o}^b\}}{\partial \bar{q}} & \frac{\partial \{C_b^{NED} \Omega^* \bar{r}_{B/o}^b\}}{\partial d\bar{w}_0^b} & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{1 \times 4} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0 & 0 & 1 & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{7 \times 16} \quad (4.44)$$

$$\ddot{h}(X) = \begin{bmatrix} \dot{\bar{V}}_o^{NED} + \dot{C}_b^{NED} \Omega^* \bar{r}_{A/o}^b \\ \dot{\bar{V}}_o^{NED} + \dot{C}_b^{NED} \Omega^* \bar{r}_{B/o}^b \\ \dot{V}_{o,Z}^{NED} \end{bmatrix}_{7 \times 1} = \begin{bmatrix} C_b^{NED} \{\bar{a}_o^{*b} - d\bar{a}_o^b\} + C_b^{NED} \Omega^* \Omega^* \bar{r}_{A/o}^b \\ C_b^{NED} \{\bar{a}_o^{*b} - d\bar{a}_o^b\} + C_b^{NED} \Omega^* \Omega^* \bar{r}_{B/o}^b \\ a_{o,Z}^{NED} \end{bmatrix}_{7 \times 1}$$

$$= \begin{bmatrix} C_b^{NED} \{\bar{a}_o^{*b} - d\bar{a}_o^b\} + C_b^{NED} \Omega^* \Omega^* \bar{r}_{A/o}^b \\ C_b^{NED} \{\bar{a}_o^{*b} - d\bar{a}_o^b\} + C_b^{NED} \Omega^* \Omega^* \bar{r}_{B/o}^b \\ 2\{a_{o,X}^{*b} - d\bar{a}_{o,X}^b\}(q_1 q_3 - q_0 q_2) + 2\{a_{o,Y}^{*b} - d\bar{a}_{o,Y}^b\}(q_2 q_3 + q_0 q_1) + \{a_{o,Z}^{*b} - d\bar{a}_{o,Z}^b\}(q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2) \end{bmatrix}_{7 \times 1}$$

$$\frac{\partial \ddot{h}(X)}{\partial X} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial \{C_b^{NED} \{\bar{a}_o^{*b} - d\bar{a}_o^b\} + C_b^{NED} \Omega^* \Omega^* \bar{r}_{A/o}^b\}}{\partial \bar{q}} & \frac{\partial \{C_b^{NED} \Omega^* \Omega^* \bar{r}_{A/o}^b\}}{\partial d\bar{w}_o^b} & -C_b^{NED} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \frac{\partial \{C_b^{NED} \{\bar{a}_o^{*b} - d\bar{a}_o^b\} + C_b^{NED} \Omega^* \Omega^* \bar{r}_{B/o}^b\}}{\partial \bar{q}} & \frac{\partial \{C_b^{NED} \Omega^* \Omega^* \bar{r}_{B/o}^b\}}{\partial d\bar{w}_o^b} & -C_b^{NED} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \frac{\partial \{a_{o,Z}^{NED}\}}{\partial \bar{q}} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & \frac{\partial \{a_{o,Z}^{NED}\}}{\partial d\bar{a}_o^b} & \mathbf{0}_{1 \times 3} & \mathbf{0}_{1 \times 3} \end{bmatrix}_{7 \times 16} \quad (4.45)$$

$$\bar{O} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(X)}{\partial X} \\ \frac{\partial \dot{h}(X)}{\partial X} \\ \frac{\partial \ddot{h}(X)}{\partial X} \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

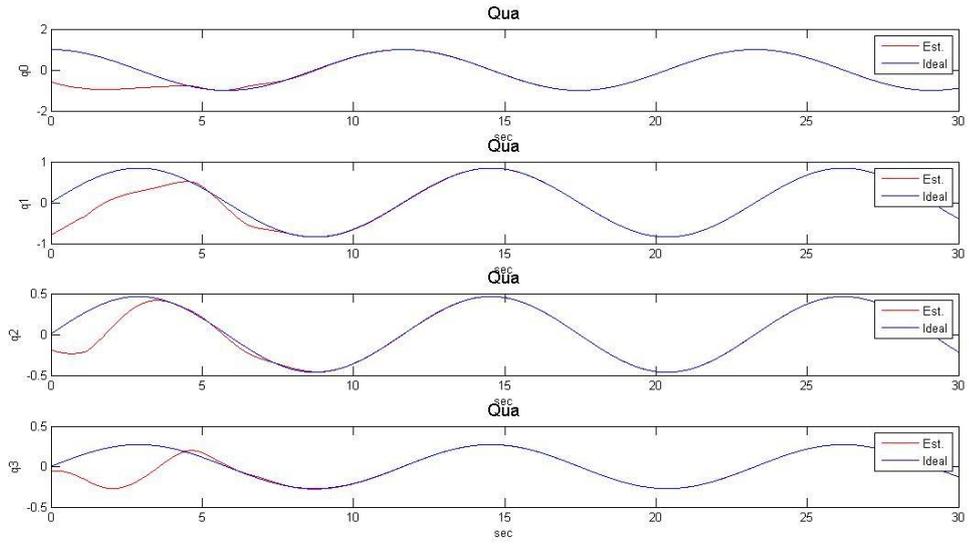
$\therefore \text{rank}(\bar{O}) = 16$

其估測系統動態方程式如下

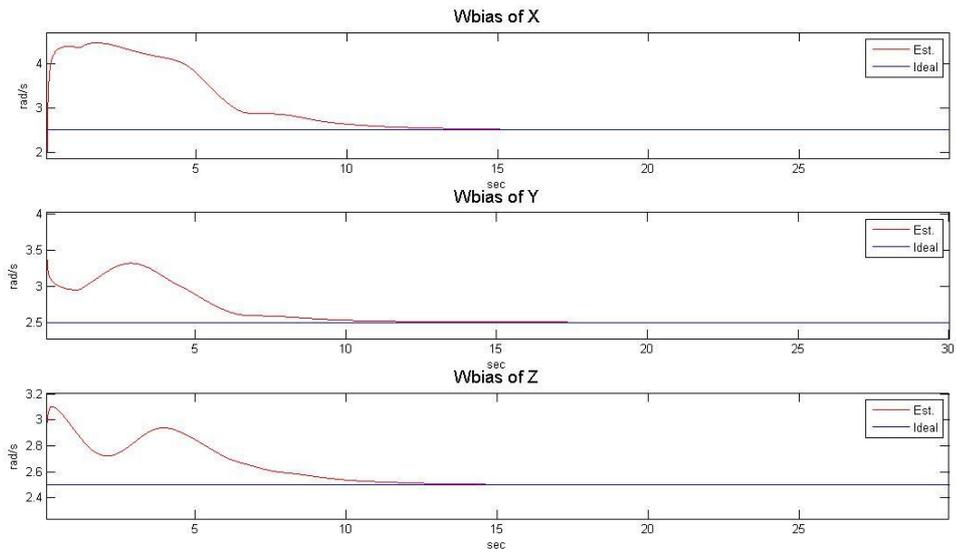
$$\begin{bmatrix} \hat{\bar{q}} \\ d\hat{w}_o^b \\ d\hat{a}_o^b \\ \hat{V}_o^{NED} \\ \hat{L}_o^{NED} \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} Q^{-1/2} * I_{4 \times 4} & -Q^{-1/2} * \frac{dt * A(q)}{2} & \mathbf{0}_{4 \times 3} & \mathbf{0}_{4 \times 3} & \mathbf{0}_{4 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 4} & I_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 4} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 4} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & -dt * C_b^{NED} & I_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 4} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & dt * I_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\bar{q}} \\ d\hat{w}_o^b \\ d\hat{a}_o^b \\ \hat{V}_o^{NED} \\ \hat{L}_o^{NED} \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} Q^{-1/2} * \frac{dt * A(q)}{2} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & dt * C_b^{NED} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w}_o^{*b} \\ \bar{a}_o^{*b} \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

EKF 模擬結果如下所示。

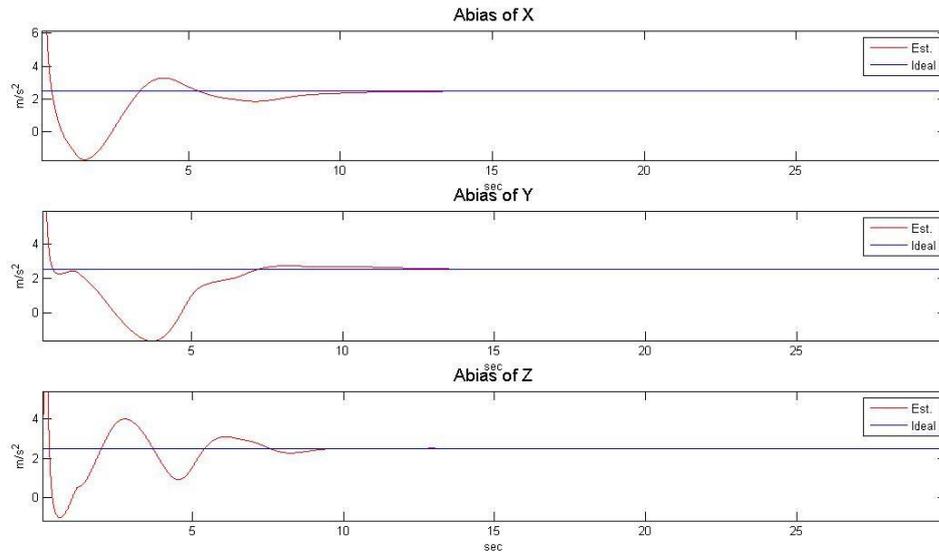
模擬估測狀態為 $\hat{X}_{16 \times 1} = \left[\hat{\bar{q}} \quad d\hat{w}_o^b \quad d\hat{a}_o^b \quad \hat{V}_o^{NED} \quad \hat{L}_o^{NED} \right]^T$



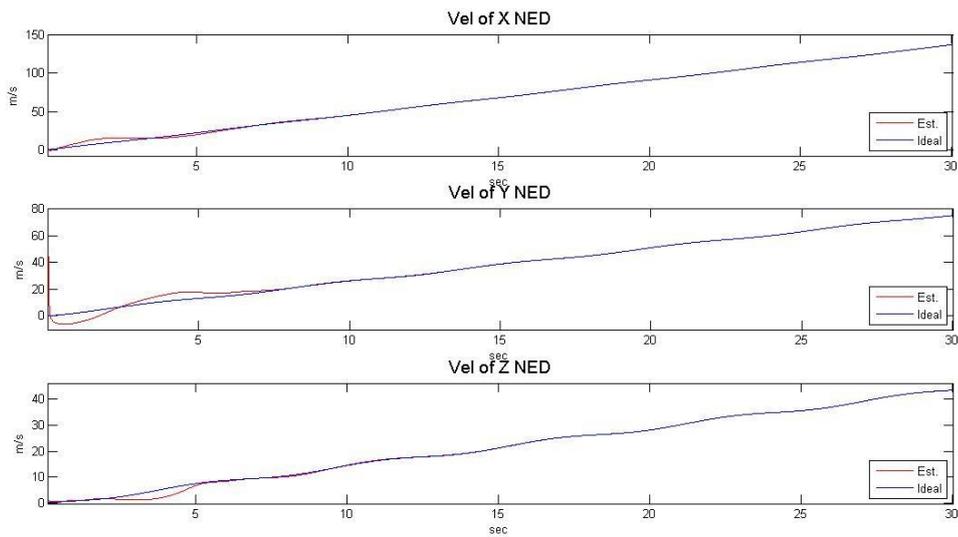
圖(4.34)四元數對照圖



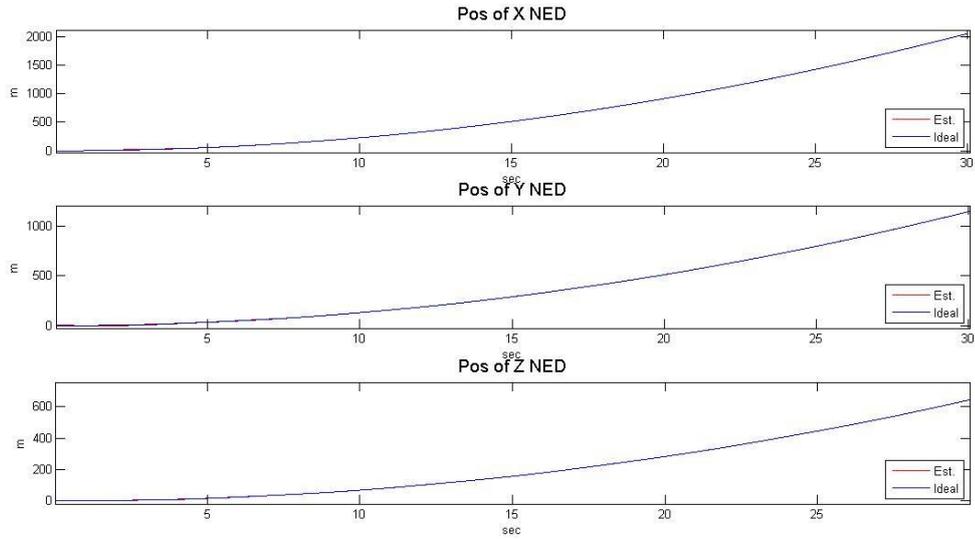
圖(4.35)陀螺儀訊號偏壓對照圖



圖(4.36)加速規訊號偏壓對照圖



圖(4.37)導航座標系 0 點速度對照圖



圖(4.38)導航座標系 0 點位置對照圖

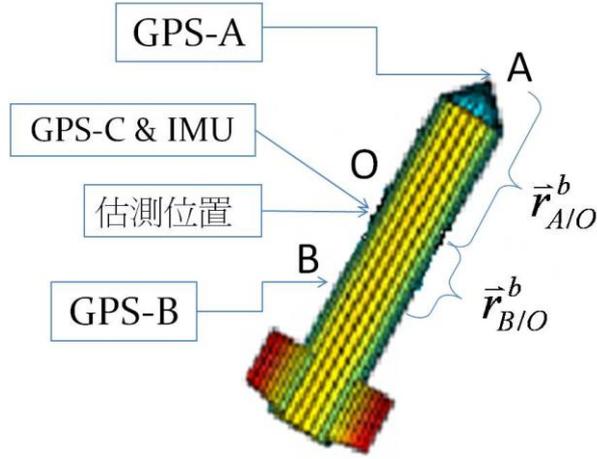
其模擬結果亦如我們先前所預期之結果，觀察性矩陣為滿秩故系統為可觀察系統，且以 MatLab 模擬結果亦可精準估測運動物體之路徑與姿態。

4.7 3 顆 GPS+IMU

以三顆 GPS 做為系統輸出為一般常見用以估測角度變化之架構，於本文中亦重新建構其估測系統模型，模擬其估測情況，並以此架構為基準。估測狀態則包括四元數、三軸角速度常數偏壓、三軸加速度常數偏壓、導航座標系三軸 0 點速度、導航座標系三軸 0 點位置即

$$X_{16 \times 1} = [\bar{q} \quad d\bar{w}_o^b \quad d\bar{a}_o^b \quad \bar{V}_o^{NED} \quad \bar{L}_o^{NED}]^T$$

此時 IMU 所量測之角速度與加速度則為系統輸入，其感測元件擺放位置如下圖(4.39)所示，GPS-A 放置於 A 點，GPS-B 放置於 B 點，而 GPS-C 與 IMU 放置於 0 點而其 0 點亦為估測位置。



圖(4.39)感測器擺放示意圖

而則其動態方程式如下

$$\begin{bmatrix} \hat{q} \\ d\hat{w}_o^b \\ d\hat{a}_o^b \\ \hat{V}_o^{NED} \\ \hat{L}_o^{NED} \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} Q^{-1/2} * I_{4 \times 4} & -Q^{-1/2} * \frac{dt * A(q)}{2} & 0_{4 \times 3} & 0_{4 \times 3} & 0_{4 \times 3} \\ 0_{3 \times 4} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 4} & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 4} & 0_{3 \times 3} & -dt * C_b^{NED} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 4} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & dt * I_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{q} \\ d\hat{w}_o^b \\ d\hat{a}_o^b \\ \hat{V}_o^{NED} \\ \hat{L}_o^{NED} \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} Q^{-1/2} * \frac{dt * A(q)}{2} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & dt * C_b^{NED} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{w}_o^{*b} \\ \hat{a}_o^{*b} \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

由 A、B、O 點所放置的三顆 GPS 可獲得各點的導航座標系位置資訊，藉由剛體運動學基本理論，在此架構下以 $\bar{L}_{A/o}^{NED}$ 、 $\bar{L}_{B/o}^{NED}$ 與 \bar{L}_o^{NED} 做為系統輸出，其方程式如下所示

$$\begin{aligned} \bar{L}_{A/o}^{NED} &= C_b^{NED} \bar{r}_{A/o}^b \\ \bar{L}_{B/o}^{NED} &= C_b^{NED} \bar{r}_{B/o}^b \\ \bar{L}_o^{NED} &= \bar{L}_o^{NED} \\ \Rightarrow Z &= \begin{bmatrix} \bar{L}_{A/o}^{NED} \\ \bar{L}_{B/o}^{NED} \\ \bar{L}_o^{NED} \end{bmatrix}_{9 \times 1} = \begin{bmatrix} C_b^{NED} \bar{r}_{A/o}^b \\ C_b^{NED} \bar{r}_{B/o}^b \\ \bar{L}_o^{NED} \end{bmatrix}_{9 \times 1} \end{aligned} \quad (4.49)$$

由相關的觀察性矩陣，來驗證姿態估測的可行性。系統的觀察性矩陣，

如下式推導：

$$h(X) = \begin{bmatrix} \bar{L}_{A/o}^{NED} \\ \bar{L}_{B/o}^{NED} \\ \bar{L}_o^{NED} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_b^{NED} \bar{r}_{A/o}^b \\ C_b^{NED} \bar{r}_{B/o}^b \\ \bar{L}_o^{NED} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial h(X)}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \{C_b^{NED} \bar{r}_{A/o}^b\}}{\partial \bar{q}} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \frac{\partial \{C_b^{NED} \bar{r}_{B/o}^b\}}{\partial \bar{q}} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 4} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{9 \times 16} \quad (4.50)$$

$$\dot{h}(X) = \begin{bmatrix} \dot{C}_b^{NED} \bar{r}_{A/o}^b \\ \dot{C}_b^{NED} \bar{r}_{B/o}^b \\ \dot{L}_o^{NED} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_b^{NED} \Omega^* \bar{r}_{A/o}^b \\ C_b^{NED} \Omega^* \bar{r}_{B/o}^b \\ \bar{V}_o^{NED} \end{bmatrix}$$

$$\Omega^* = \begin{bmatrix} 0 & -\{w_o^{*b} - dw_o^b\}_z & \{w_o^{*b} - dw_o^b\}_y \\ \{w_o^{*b} - dw_o^b\}_z & 0 & -\{w_o^{*b} - dw_o^b\}_x \\ -\{w_o^{*b} - dw_o^b\}_y & \{w_o^{*b} - dw_o^b\}_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \dot{h}(X)}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \{C_b^{NED} \Omega^* \bar{r}_{A/o}^b\}}{\partial \bar{q}} & \frac{\partial \{C_b^{NED} \Omega^* \bar{r}_{A/o}^b\}}{\partial d\bar{w}_0^b} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \frac{\partial \{C_b^{NED} \Omega^* \bar{r}_{B/o}^b\}}{\partial \bar{q}} & \frac{\partial \{C_b^{NED} \Omega^* \bar{r}_{B/o}^b\}}{\partial d\bar{w}_0^b} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 4} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}_{9 \times 16} \quad (4.51)$$

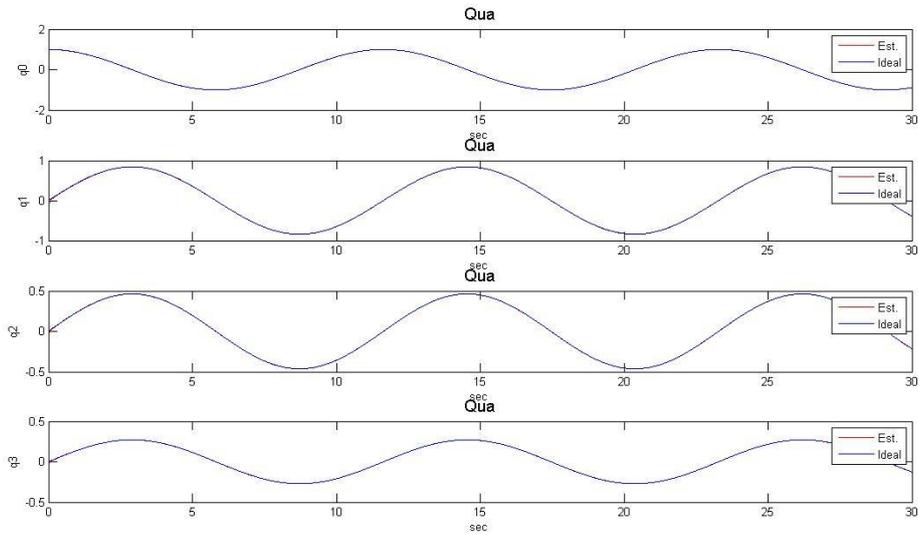
$$\bar{O} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(X)}{\partial X} \\ \frac{\partial \dot{h}(X)}{\partial X} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

$$\therefore \text{rank}(\bar{O})=16$$

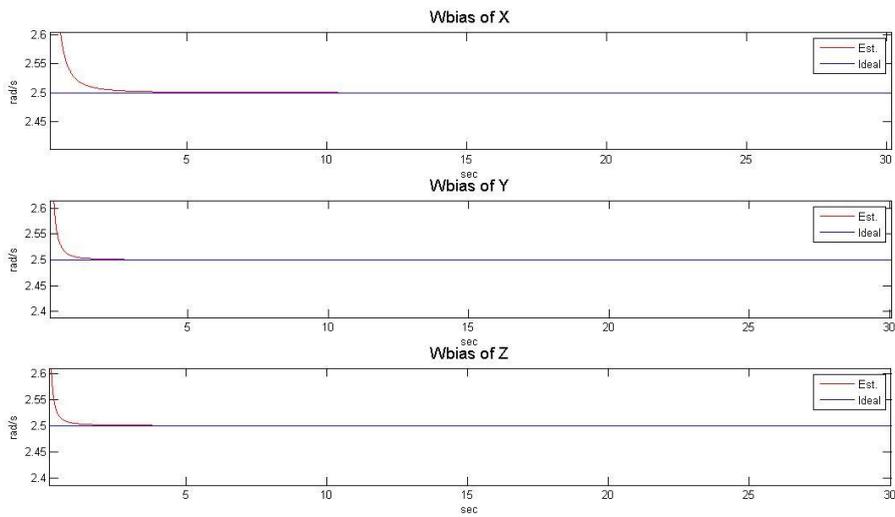
觀察性矩陣滿足滿秩的條件，故此架構應為可精確的估測到四元數等等估測狀態，透過 EKF 估測系統模擬如下：

針對此系觀察系統之 EKF 估測動態架構，模擬估測狀態為

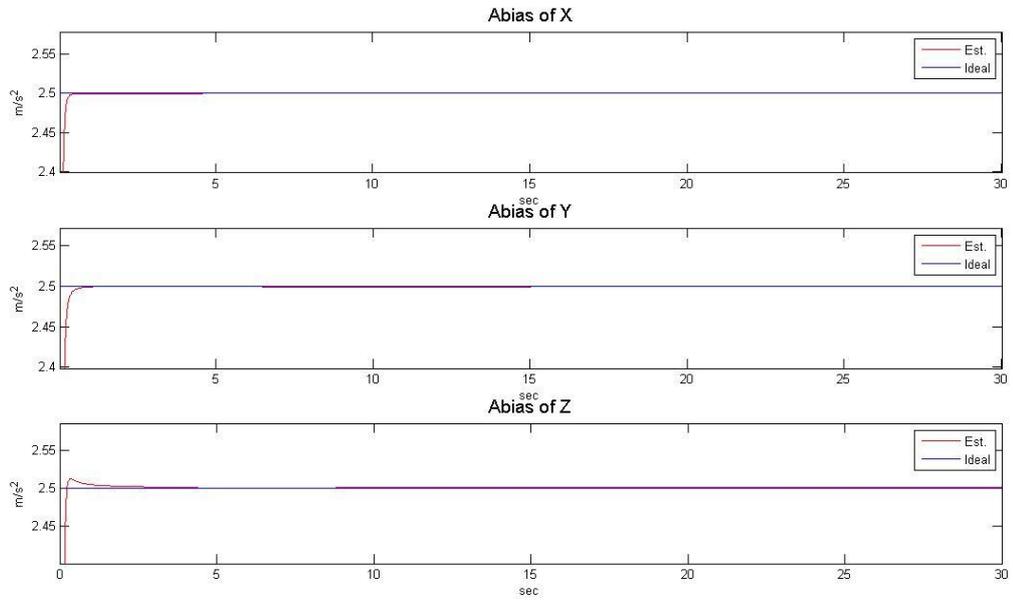
$$X_{16 \times 1} = [\bar{q} \quad d\bar{w}_o^b \quad d\bar{a}_o^b \quad \bar{V}_o^{NED} \quad \bar{L}_o^{NED}]^T$$



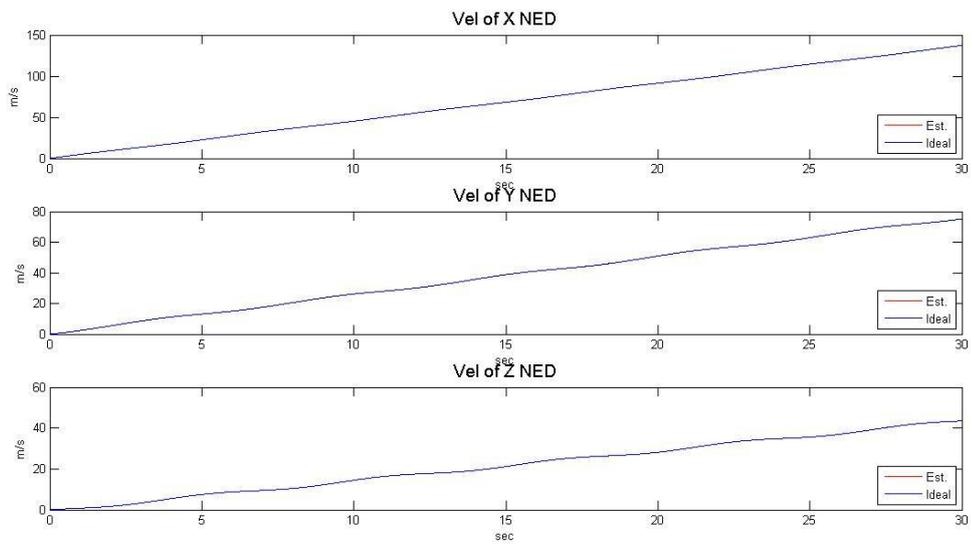
圖(4.40)四元數對照圖



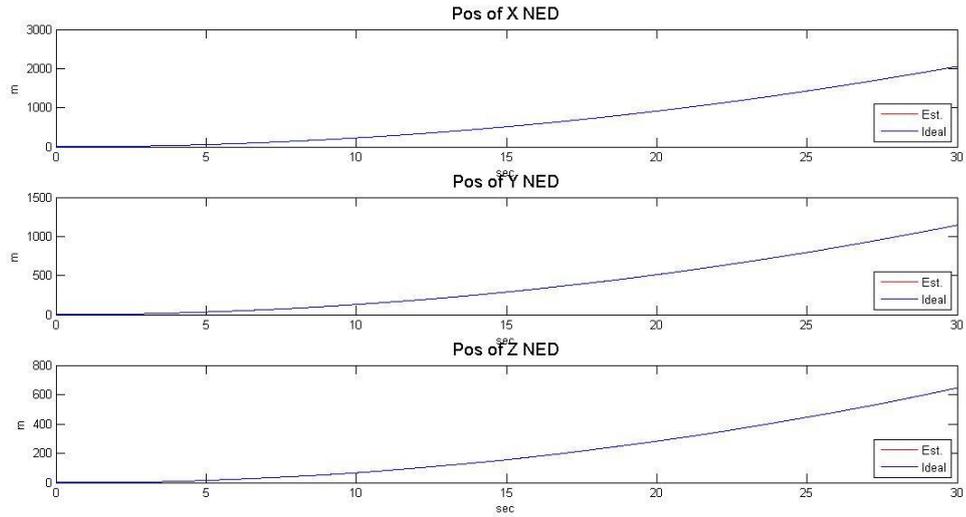
圖(4.41)陀螺儀訊號偏壓對照圖



圖(4.42)加速規訊號偏壓對照圖



圖(4.43)導航座標系 0 點速度對照圖



圖(4.44)導航座標系 0 點位置對照圖

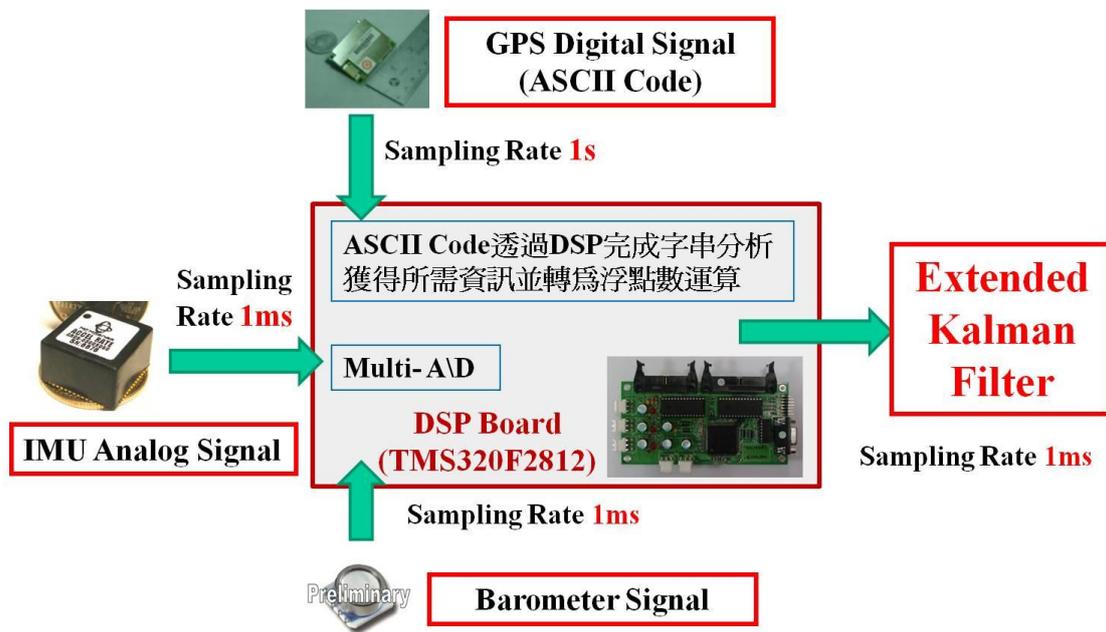
由模擬結果發現其估測之角速度偏壓與加速度偏壓之誤差低於百分之一，亦精確估測到四元數等等之估測狀態，符合預期之結果。



第五章 DSP 實現系統訊號整合

5.1 硬體架構

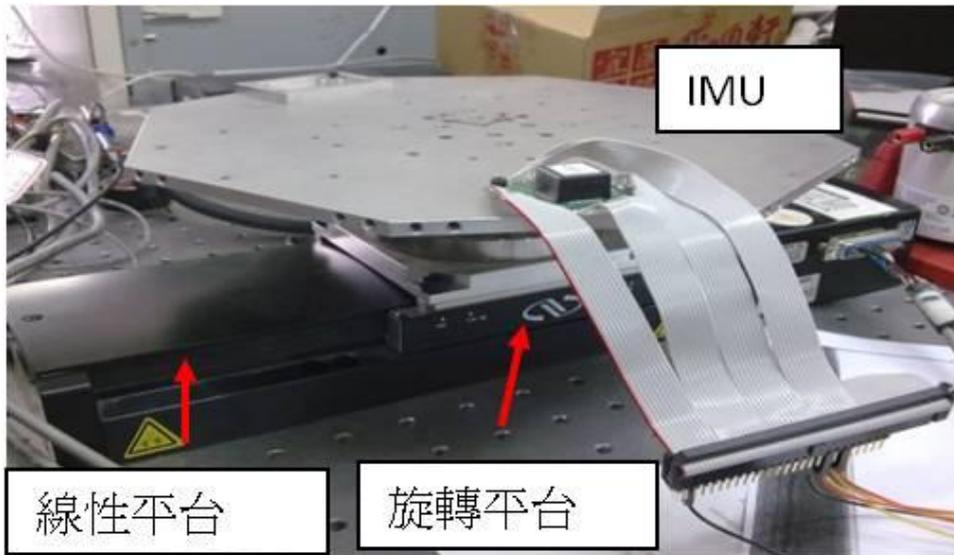
本文採用 DSP(TMS320 F2812)、IMU、Barometer 與 GPS 定位系統來獲得物體運動路徑與姿態。利用 DSP 同步接收高度計輸出的數位訊號與加速規、陀螺儀之類比訊號再即時轉換為數位訊號，同時，DSP 亦同步接收 GPS 定位系統之字串訊號(ASCII Code)，再經過字串分析，便可將所有接收到的資訊帶入 EKF 演算法，以即時獲得演算後之精準姿態。系統整合架構如圖(5.1)所示。



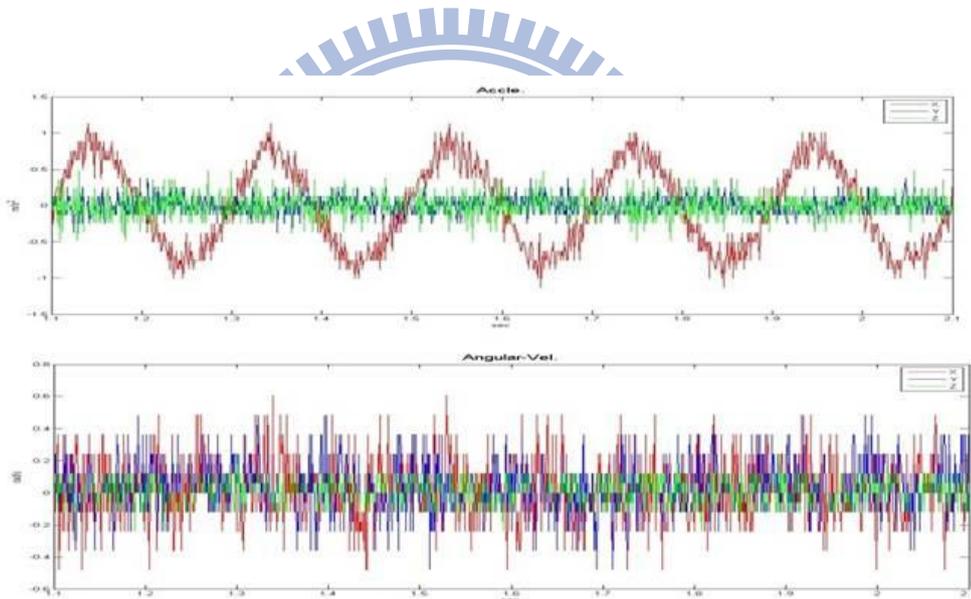
圖(5.1)系統整合架構圖

5.2 感測元件性能測試與分析

DSP 透過程式語言的撰寫可針對不同類型與頻率的訊號進行同步擷取與分析。加速規與陀螺儀輸出訊號皆為類比訊號、輸出頻率皆為 1KHz，透過 DSP 進行類比與數位訊號轉換始能將其資訊帶入演算法。利用線性走位平台進行測試，實驗平台如下圖(5.2)所示，DSP 擷取 IMU 以單軸直線 Sin 波形式運動之訊號如圖(5.3)。



圖(5.2)實驗平台



圖(5.3) 單軸直線運動之 IMU 實際六軸訊號

5.2.1 IMU 測試校正

以線性走位平台進行 DSP 所擷取之 IMU 訊號測試與對照，馬達 Encoder 精度為 0.5um，透過 Alpha-Beta Filter 運算用以抑制馬達 Encoder 雜訊誤差與補償精度之不足，進而獲得平台位移之位置、速度、加速度或者平台之旋轉角速度與角度。Alpha-Beta Filter 動態架構如下：

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_k \\ \hat{V}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_{k-1} \\ \hat{V}_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha & I - \alpha \\ \beta/T & -\beta/T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{Y}_k \\ \hat{X}_k^* \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

$$\hat{X}_k^* = [I \quad T] \begin{bmatrix} \hat{X}_{k-1} \\ \hat{V}_{k-1} \end{bmatrix}$$

Y ：馬達量測 Encoder 換算後之位置訊號

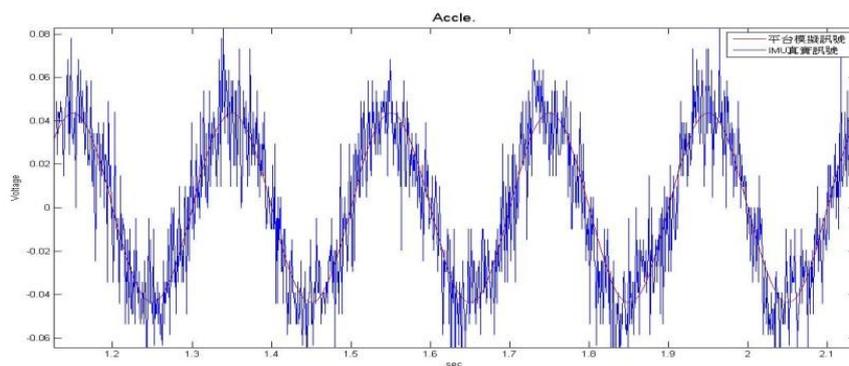
\hat{X}^* ：運算過渡矩陣

T ：馬達 Encoder 擷取時間

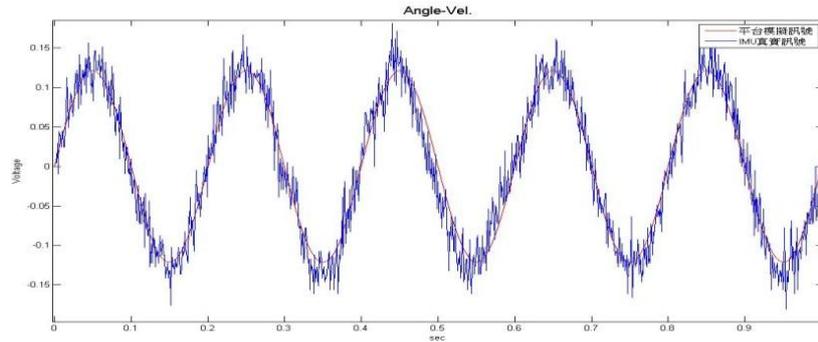
α 、 β ：增益值

α 、 β 為依經驗所設定之增益值，當 α 設定為 0.8114， β 設定為 0.32 依此設定以 MatLab 模擬一標準弦波以 Alpha-Bata Filter 運算所獲得之速度、加速度或角度、角速度，相互對照下極為精準，故實際上則以此增益大小帶入運算。

以線性走位平台之 Encoder 透過 Alpha-Bata Filter 運算做為校正 DSP 所擷取之 IMU 訊號之依據，平台訊號與加速規訊號對照圖如下(5.4)，平台訊號與陀螺儀訊號對照圖如下(5.5)。



圖(5.4) 平台訊號與 IMU 加速規訊號對照圖



圖(5.5) 平台訊號與 IMU 陀螺儀訊號對照圖

測試結果如下表(5.1)：

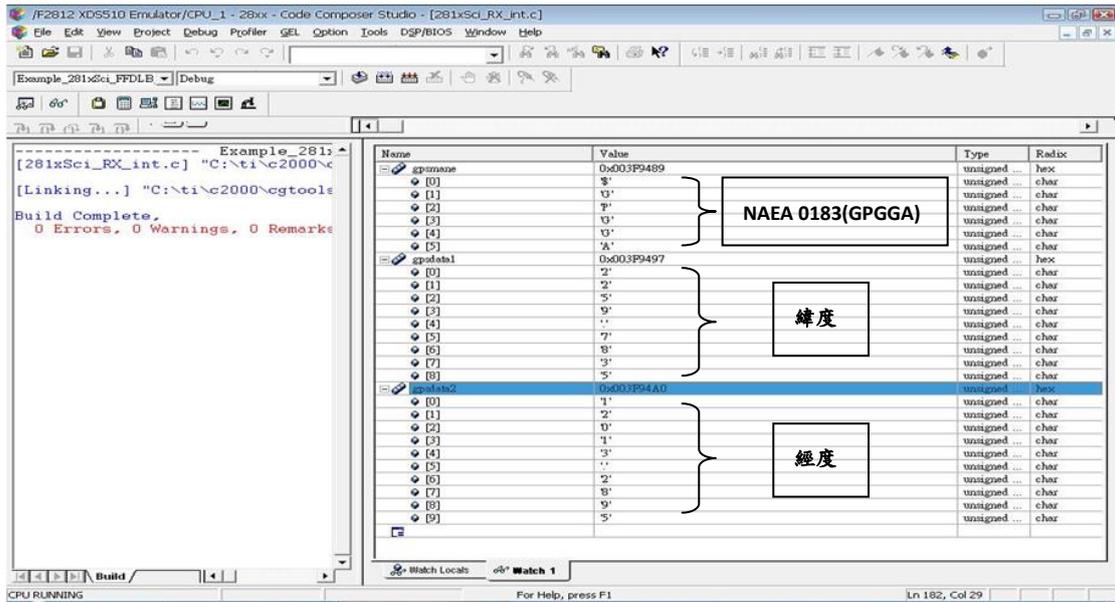
	三軸平均 偏壓值	Gain	Noise Standard Deviation
加速規	2.4873 V	$208.0373(\frac{mV}{g})$	$0.0174V = 0.21379m/s^2$
陀螺儀	2.4980 V	$1.27183(\frac{mV}{\circ/s})$	$0.0124V = 9.749\circ/s$

表(5.1) IMU 測試結果

5.2.2 GPS 測試分析

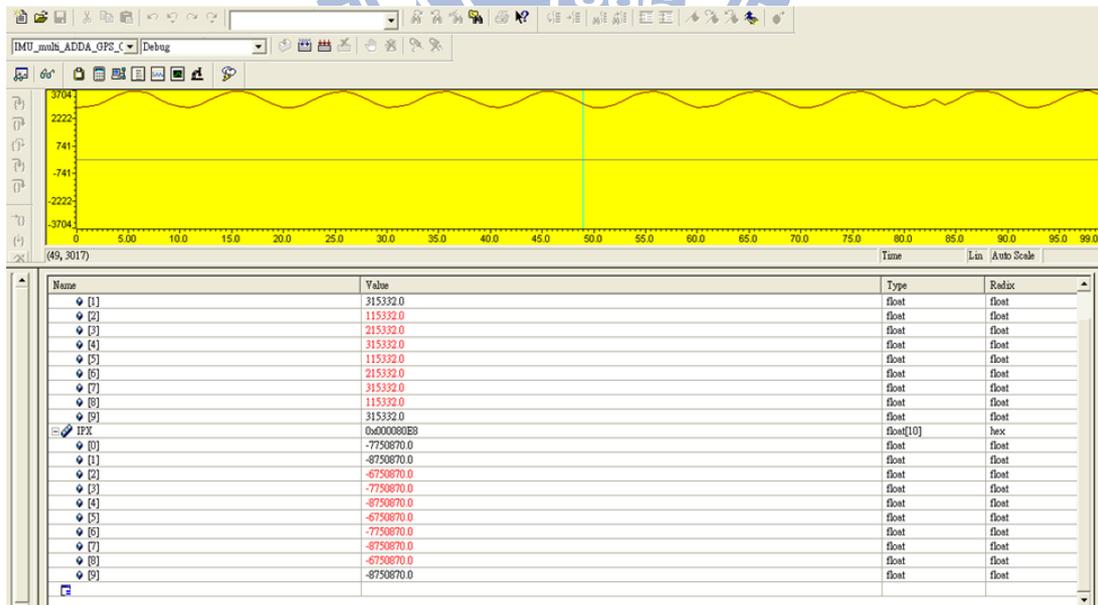
GPS 輸出訊號則為數位訊號、輸出頻率為 1Hz，但是 GPS 所輸出的數位訊號(NMEA 0183)則為字串訊號(ASCII CODE)，須透過 DSP 做訊號擷取後，分析與拆解其字串，以獲得大筆字串中所需的資訊，再將字串訊號轉換為可帶入演算法中的浮點數，以 DSP 擷取 GPS 之字串訊號拆解如圖

(5.6)。



圖(5.6)GPS 實際字串訊號分析

為確認 DSP 所寫入之同步處理 IMU 與 GPS 訊號之程式語言是否正確，在此以電腦模擬一個每秒變動之 GPS 訊號，再以 RS232 連結 DSP 接收端。IMU 訊號再經過 AD 轉換後與模擬之 GPS 訊號轉換為浮點數後之 DSP 同步訊號處理如圖(5.7)。



圖(5.7)DSP 同步處理 IMU 實際訊號與 GPS 模擬訊號

第六章 結論與未來計畫

6.1 結論

本文利用擴增式卡爾曼估測器建立多種估測系統動態模型，針對不同輸出與輸入系統情況下模擬運動物體的六個自由度之姿態與路徑估測整合系統。在姿態表示上以四元數法為主，因此更可解決姿態矩陣奇異性的問題。

許多架構在直覺上認為輸出系統所給予的資訊，足已使估測系統準確估測到運動物體的路徑與姿態，但從本文章節中所建立的多種估測系統動態模型中，藉由觀察性矩陣與 EKF 模擬驗證，發現事實並非如此，單單僅以一顆 GPS 並無法獲得運動物體精準姿態而使物體運動路徑誤差甚大。由於陀螺儀所獲得的角速度為直接影響四元數，進而直接影響座標系轉換矩陣，間接影響 GPS 欲修正之 IMU 雜訊誤差，亦間接影響到所估測之運動物體路徑與姿態，因此能否精準估測四元數變成一大挑戰。以 EKF 估測系統模擬結果如下表(6.1)。

	1GPS	2GPS (估測輸出系統帶 以附體座標系資訊)	2GPS (估測輸出系統帶 以導航座標系資訊)	2GPS+Barometer	3GPS
IMU無 偏壓訊 號	✘	✘	✔	✔	/
IMU具 偏壓訊 號	/	/	✔	✔	✔

表(6.1) 模擬結果

本文成功建立出利用兩顆 GPS 與高度計做為輸出系統、僅以兩顆 GPS 利用所獲得的導航座標系資訊帶入輸出系統，這兩種估測系統，其有效估測其訊號偏壓，且有效抑制加速規與陀螺儀的積分誤差及降低其量測雜訊與 GPS 位置訊號誤差的影響，進而獲得精準度更高的運動物體估測路徑與

姿態，誤差甚至低於百分之一，且亦減少感測器的使用，以降低商業成本。本文中亦利用 DSP 成功的整合不同輸出頻率的加速規、陀螺儀與 GPS 的實際訊號。

6.2 未來計畫

將有效的估測系統架構寫入 DSP，完成整合並加以實驗。目前 DSP 以完成同步 IMU 與 GPS 的訊號擷取與分析，當估測系統架構模擬完成後即可將其演算法以 C 語言寫入 DSP 中作為整合核心，如此一來便可獲得及時且高精準度的姿態。然而 DSP 須擷取在 1KHz 頻率下的加速規與陀螺儀輸出訊號，故必須在 1ms 內完成一次的演算法，因此在 DSP 晶片中的演算時間卻是必須加以注意的一大問題。

本文目前僅利用 GPS 系統中一般使用之位置與速度做為輸出系統的資訊，為商用 GPS 處理後之資訊，故在物體運動姿態模擬上利用較少的觀察器精準的估測運動姿態較為困難。日後可建立一直接利用接收到的不同衛星的資訊做為直接修正角度姿態資訊，更可減少感測器使用數量達到降低商業成本。

參考文獻

1. Sven Rönnbäck ; 「Development of a INS/GPS navigation loop for an UAV」, Luleå University of Technology, Department of Computer Science and Electrical Engineering, M. S. Thesis, pp. 01-80, 2000.
2. Vikas Kumar N. ; 「Integration of Inertial Navigation System and Global Positioning System Using Kalman Filtering」, Indian Institute of Technology, Department of Aerospace Engineering, pp. 20-33, 2004.
3. Y. Zhang, Y. Gao ; 「Integration of INS and Un-Differenced GPS Measurements for Precise Position and Attitude Determination」, The Journal of Navigation, Volume 61, Issue 01, pp. 87-97 Jan. 2008.
4. X. Niu, S. Nasser, C. Goodall, N. Sheimy ; 「A Universal Approach for Processing any MEMS Inertial Sensor Configuration for Land-Vehicle Navigation」, The Journal of Navigation, Volume 60, Issue 02, pp233-245, May. 2007.
5. D. Choukroun, I. Y. Bar-Itzhack, Y. Oshman ; 「A Novel Quaternion Kalman Filter」, Presented as Paper 2002-4460 at the 42th AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, Monterey, Aug. 2002.
6. Yaakov Bar-Shalom ; Xiao-Rong Li ; 「Estimation with application to tracking and navigation」, John Wiley & Sons, 2001.
7. Greg Welch, Gary Bishop ; 「An Introduction to Kalman Filter」, 2004.
8. 林容益 ; 「DSP 數位化機電控制：TMS320 F281X 系統」, 全華圖書, 2008.