

國立交通大學

土木工程學系

碩士論文

軸對稱板於彈性基礎上受任意載重之研究



Axisymmetric Plate on Elastic Foundation Subjected to
Arbitrary Loading

研究生：林宗輝

指導教授：劉俊秀 教授

中華民國九十九年九月

軸對稱板於彈性基礎上受任意載重之研究

Axisymmetric Plate on Elastic Foundation Subjected to Arbitrary
Loading

研究生：林宗輝

Student : Zong-Huei Lin

指導教授：劉俊秀

Advisor : Gin-Show Liou

國立交通大學
土木工程學系
碩士論文



A Thesis
Submitted to Institute of Civil Engineering
College of Engineering
National Chiao Tung University
in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

in

Institute of Civil Engineering

Sep 2010

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十九年九月

軸對稱板於彈性基礎上受任意載重之研究

研究生：林宗輝

指導教授：劉俊秀 博士

國立交通大學土木工程學系

摘要

推導軸對稱彈性薄板於彈性基礎上受任意分佈荷重下之外力-變位關係式。此荷重在角方向以傅立葉級數之諧和函數展開，並假定各展開項之荷重強度為沿半徑方向呈分段線性。以彈性薄板理論及分段線性荷重形狀函數，解此板之動力位移。

動力分析之模式，係由運動方程是經解析得一含 Bessel function 的變位函數。再藉板之邊界條件推衍得頻率方程式，進而求得頻率參數，再得板之自然頻率。後依振態疊加法推導成廣義荷重及廣義質量，並於廣義荷重中引入分段線性荷重形狀函數轉換。此微分方程得一解，即為任意分佈荷重下之外力-變位關係式。

上述推導之外力-變位關係式，皆與以有限元素法所得之解相互比較，並印證之。

Axisymmetric Plate on Elastic Foundation Subjected to Arbitrary Loading

Student: Zong-Huei Lin

Advisor: Prof. Gin-Show Liou

Institute of Civil Engineering
College of Engineering
National Chiao Tung University

Abstract

Presented is the displacement field of axial symmetric plate on elastic foundation subjected to arbitrary loading. In the derivation, the arbitrary loading can be expressed as Fourier series in θ -direction and piecewise linear distribution in r-direction of cylindrical coordinates.

To obtain the displacement field, the modal shapes and respective frequencies of the system are solved first. Then, the technique of superposition is employed to obtain the displacement field due to arbitrary loading. The analytical solution of the presented method has been compared with the result of finite element method for some simple cases. The comparison shows the presented method is accurate and efficient.

誌謝

當碩士論文寫到此頁，則代表我的碩士生涯要正式落幕了，二年的研究所時光看似漫長，實則如過眼雲煙轉瞬即逝。人生的美好不在於延續生命的永恆不滅，而在於瞬間璀璨所散發出來的繽紛光芒，雖然二年時間匆匆而逝，但已在我的人生之中留下許多不可磨滅的奪目光采。首先最要感謝的人是劉俊秀老師，從入學，整整二年寒暑從未間斷的辛勤教導，吾以為學如逆水行舟，而老師則像是裝在舟上的電動馬達，帶我一路勇往直前奮力不倦，不僅於課業上給予指導，更教曉我做人做事的態度，如今輕舟已過萬重山，老師對我的照顧及付出，點滴在心，無限感激！另外，要感謝口試委員黃炯憲教授、鄭復平教授所提供之寶貴意見。於交大土木結構組的研究團隊中，要感謝眾學長與學弟妹的幫助與鼓勵。特別感謝我的家人，如不是你們一直以來的包容及支持，我也不可能有今天的小小成就。最後，要感謝的人實在太多，如有被遺忘的朋友在此亦一併感謝，感謝大家於這二年來對我的照顧。有些人的碩士生涯過的如黑白像片般愁雲慘淡，但我的碩士生涯用資訊豐富的高光譜影像來描述亦不為過，在此也祝福所有還在學的朋友們都能夠在求學的路上綻放出各式各樣的光芒！



目錄

中文摘要	iii
英文摘要	iv
誌謝	v
目錄	vi
表目錄	ix
圖目錄	x
符號說明	xii
一、	緒論.....	1
1.1	前言.....	1
1.2	文獻回顧.....	1
1.3	研究動機.....	2
二、	彈性基礎上環狀板於分段線性荷重之動力反應推導.....	3
2.1	概論.....	3
2.2	分析方法.....	4
2.3	軸對稱環狀板.....	9
2.3.1	前言.....	9
2.3.2	邊界條件.....	9
2.3.3	振態疊加法.....	16
2.3.4	外力-變位的關係式.....	18
2.4	頻率方程式求根.....	19



2.4.1	Bracketing Method.....	19
2.4.2	Open Method.....	19
2.4.3	應用求解.....	20
三、	實例分析 (振態).....	22
3.1	前言.....	22
3.2	ANSYS 介紹.....	22
3.2.1	ANSYS 分析步驟.....	22
3.3	頻率參數.....	23
3.4	自然頻率.....	24
3.5	振態.....	26
3.5.1	情況一之振態(環狀板內板為固定端，外板為自由端).....	27
3.5.2	情況二之振態(環狀板內板為自由端，外板為簡支承).....	31
3.5.1	情況三之振態(環狀板內板為固定端，外板為固定端).....	35
四、	實例分析 (變位).....	39
4.1	前言.....	39
4.2	ANSYS 數值結果與動力反應推導之比較.....	39
4.2.1	均佈荷重.....	40
4.2.2	線性遞減荷重.....	47
4.2.3	線性遞增荷重.....	54

4.2.4	Sine Shape 荷重.....	61
五、	結論與建議.....	68
5.1	結論.....	68
5.2	建議.....	68
	參考文獻.....	69



表目錄

表 1.	頻率參數值(情況一).....	24
表 2.	頻率參數值(情況二).....	24
表 3.	頻率參數值(情況三).....	24
表 4.	Analytical Solution 之自然頻率(情況一)	25
表 5.	Analytical Solution 之自然頻率(情況二)	25
表 6.	Analytical Solution 之自然頻率(情況三)	25
表 7.	ANSYS 之自然頻率(情況一)	25
表 8.	ANSYS 之自然頻率(情況二)	25
表 9.	ANSYS 之自然頻率(情況三)	26



圖目錄

圖 1. 環狀板內板為固定端，外板為自由端.....	9
圖 2. 環狀板內板為自由端，外板為簡支承.....	10
圖 3. 環狀板內板為固定端，外板為固定端.....	11
圖 4. $n=0$ 在第一模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態	27
圖 5. $n=0$ 在第二模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態	27
圖 6. $n=0$ 在第三模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態	28
圖 7. $n=0$ 在第四模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態	28
圖 8. $n=1$ 在第一模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態	29
圖 9. $n=1$ 在第二模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態	29
圖 10. $n=1$ 在第三模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態	30
圖 11. $n=1$ 在第四模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態	30
圖 12. $n=0$ 在第一模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態	31
圖 13. $n=0$ 在第二模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態	31
圖 14. $n=0$ 在第三模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態	32
圖 15. $n=0$ 在第四模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態	32
圖 16. $n=1$ 在第一模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態	33
圖 17. $n=1$ 在第二模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態	33
圖 18. $n=1$ 在第三模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態	34
圖 19. $n=1$ 在第四模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態	34
圖 20. $n=0$ 在第一模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態	35
圖 21. $n=0$ 在第二模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態	35
圖 22. $n=0$ 在第三模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態	36
圖 23. $n=0$ 在第四模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態	36
圖 24. $n=1$ 在第一模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態	37
圖 25. $n=1$ 在第二模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態	37
圖 26. $n=1$ 在第三模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態	38
圖 27. $n=1$ 在第四模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態	38
圖 28. 均佈荷重示意圖.....	40
圖 29. 均佈荷重下，ANSYS 與本文推導結果變位(情況一)	41
圖 30. 均佈荷重下，ANSYS 與本文推導結果變位(情況一)	42
圖 31. 均佈荷重下，ANSYS 與本文推導結果變位(情況二)	43
圖 32. 均佈荷重下，ANSYS 與本文推導結果變位(情況二)	44
圖 33. 均佈荷重下，ANSYS 與本文推導結果變位(情況三)	45
圖 34. 均佈荷重下，ANSYS 與本文推導結果變位(情況三)	46
圖 35. 線性遞減荷重示意圖.....	47

圖 36. 線性遞減荷重下，ANSYS 與本文推導結果變位(情況一).....	48
圖 37. 線性遞減荷重下，ANSYS 與本文推導結果變位(情況一).....	49
圖 38. 線性遞減荷重下，ANSYS 與本文推導結果變位(情況二).....	50
圖 39. 線性遞減荷重下，ANSYS 與本文推導結果變位(情況二).....	51
圖 40. 線性遞減荷重下，ANSYS 與本文推導結果變位(情況三).....	52
圖 41. 線性遞減荷重下，ANSYS 與本文推導結果變位(情況三).....	53
圖 42. 線性遞增荷重示意圖.....	54
圖 43. 線性遞增荷重下，ANSYS 與本文推導結果變位(情況一).....	55
圖 44. 線性遞增荷重下，ANSYS 與本文推導結果變位(情況一).....	56
圖 45. 線性遞增荷重下，ANSYS 與本文推導結果變位(情況二).....	57
圖 46. 線性遞增荷重下，ANSYS 與本文推導結果變位(情況二).....	58
圖 47. 線性遞增荷重下，ANSYS 與本文推導結果變位(情況三).....	59
圖 48. 線性遞增荷重下，ANSYS 與本文推導結果變位(情況三).....	60
圖 49. Sin shape 荷重示意圖	61
圖 50. Sin shape 荷重下，ANSYS 與本文推導結果變位(情況一)	62
圖 51. Sin shape 荷重下，ANSYS 與本文推導結果變位(情況一)	63
圖 52. Sin shape 荷重下，ANSYS 與本文推導結果變位(情況二)	64
圖 53. Sin shape 荷重下，ANSYS 與本文推導結果變位(情況二)	65
圖 54. Sin shape 荷重下，ANSYS 與本文推導結果變位(情況三)	66
圖 55. Sin shape 荷重下，ANSYS 與本文推導結果變位(情況三)	67



符號說明

a : 彈性環狀板之外徑

b : 彈性環狀板之內徑

h : 彈性環狀板之厚度

n : 富立葉展開的第個項

ω : 彈性環狀板之自然頻率

ρ : 彈性環狀板之比重量

K : 彈性環狀板之基礎彈性模數

β : 彈性環狀板之頻率參數

$u_{zz}(r, \theta, t)$: 彈性環狀板之總變位

r, θ, t, z : 圓柱座標系統之軸

$W(r, \theta)$: 彈性環狀板之振態

D : 彈性環狀板之撓曲剛度(flexural rigidity)

E : 彈性環狀板之彈性模數

ν : 彈性環狀板之卜森比(poisson ratio)

σ_{zz}^n : 第個富立葉展開項之正向應力(normal stress)

τ_{xz}^n : 第個富立葉展開項之剪應力(shear stress)

$\tau_{z\theta}^n$: 第個富立葉展開項之剪應力(shear stress)

I_n : 第一類修正型貝索(bessel)函數



J_n : 第一類貝索(bessel)函數

K_n : 第二類修正型貝索(bessel)函數

Y_n : 第二類貝索(bessel)函數



第一章 緒論

1.1 前言

隨著近代科技的發展，電腦輔助能力與日俱增，土木施工技術不斷改進，因此各種巨積結構體，如海域鑽油平台、雷達站的基礎、核電廠圍阻體、拱壩等，日漸增多。而在傳統的結構動力分析中，將基礎假設固定於岩盤之上，意謂試土壤介質為剛性體，此與土壤的實際物理性質，顯然相去甚遠，並不足以模擬土壤對結構物的影響。是以，對此類巨積結構物處於地震動力狀態時，土壤介質與結構物間的交互作用，已廣泛引起工程界的重視與探討。然而在早期的研究中，對土壤-結構物互制問題，均局限於假設基礎為一剛性體，置於彈性(elastic)或黏彈性(visco elastic)半平面的土壤介質之上。於上述假設前提下，並無須顧慮基礎的柔度(flexibility)對其動力反應的效應，但於後來對實際建築結構物所做的動力試驗，發現基礎具有相當非共平面(out of plane)的變位，因此，於土壤-結構物互制研究課題中，彈性基礎的影響成了不可或缺的考慮因素。而在引入基礎的柔度物理特性，也就是求取基礎的外力-變位關係式，所以，本文係針對軸對稱彈性薄板的基礎模式，就考慮慣性力之動力反應，在對外力荷重做一基本假設前提下，加以推導，並與有限元素法套裝軟體來相互驗證。

1.2 文獻回顧

從結構力學領域中，平板結構體甚早即受重視及研究，但僅始於自由振動下之實驗。於 1766 年 Euler[1]首度提出以數學方法，企圖對平板問題之變位行為加以描述。此後歷經 J.Bernoulli[2]；Jr'Sophie Germain；Lagrange；Navier 等加以推衍或修正，及至 Kirchhoff[3]，進一步同時考慮板的彎曲及伸展特性，並發現平板的頻率方程式和提出以虛位移法(virtual displacement methods)求解平板問題。

關於 Kirchhoff 所提薄板理論：

- (1) 薄板之厚度 h 比薄板其他尺寸為小。
- (2) 薄板中性面的撓度 w 比薄板之厚度 h 小。

基於上述兩個主要假定，可推論以下結果，做為薄板理論簡化的根據。

- (1) 薄板的厚度，於變形後的變化可略去不計。
- (2) 薄板內部平行於中性面的平面應力，沿著厚度之積分總值(即薄板張力)可略去不計。

- (3) 薄板中，垂直於中性面的法線，變形後仍為中性面之法線。
- (4) 在考慮平衡方程時，薄板乃做為一個平板看待。

此後，求解薄板問題，大抵以前述為依歸。而在求解平板問題中，外力－變位的關係式，隨著電腦的出現，大量發展出許多數值方法(如有限元素法)以模擬外力荷重分佈函數，及平板之幾何形狀。本文係針對軸對稱薄板置於彈性基礎所受任意外力荷重做一基本假設，並因而提出一形狀函數(shape function)，以求得外力－變位的關係式。

1.3 研究動機

按過去之研究，關於軸對稱薄板的外力-變位關係式，在解析解方面，僅能處理簡單荷重分佈函數。另一方面，利用數值模式所使用之有限元素法或有限插分法，必須先將平板問題加以劃分網格(mesh)，較缺乏效率。是以本文中，利用軸對稱薄板所得之解析解，並藉對外力荷重分佈函數於節點間為一線性變化的基本假設，加以推導印證。於文中，包括垂直變位(vertical translation)，翻轉(rocking)等，進而在考慮動力模式下，引進板之慣性力，求得軸對稱彈性薄板置於彈性基礎上的動力反應。並以三種邊界條件(boundary condition)，加以探討。



第二章 彈性基礎上環狀板於分段線性荷重之動力反應推導

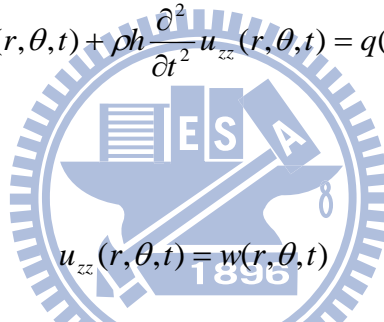
2.1 概論

本章推導環狀平板置於彈性半平面之界面模式中，彈性板的動力反應分析。亦即於運動方程式中，須考慮慣性力(inertia force)，以求軸對稱環型薄板之外力-變位關係式。因此，引用彈性薄板置於彈性基礎上之動力模式控制方程式，並以圓柱座標系統表之。

$$D\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)u_{zz}(r, \theta, t) + Ku_{zz}(r, \theta, t) + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2}u_{zz}(r, \theta, t) = q(r, \theta, t) \quad (2.1)$$

$$D\nabla^2\nabla^2u_{zz}(r, \theta, t) + Ku_{zz}(r, \theta, t) + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2}u_{zz}(r, \theta, t) = q(r, \theta, t) \quad (2.2)$$

其中



$$u_{zz}(r, \theta, t) = w(r, \theta, t) \quad (2.3)$$

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) \quad (2.4)$$

於 $u_{zz}(r, \theta, t)$ 中， $w(r, \theta, t)$ 表沿板邊緣所計算的位移函數。

由上述各式，經整理可得

$$D\nabla^2\nabla^2w(r, \theta, t) + Kw(r, \theta, t) + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2}w(r, \theta, t) = q(r, \theta, t) \quad (2.5)$$

於上式中，係將板緣之振動函數 $\Delta(r, \theta, t)$ 視作有效外力(P_{eff})。

而由參考文獻中，對位於層狀介質上之任意已知應力，以無限多項的傅立葉級數(Fourier series)依角度展開得以下形式：

$$q(r, \theta, t) = [q(r, \theta)]e^{i\omega t} = \sum_{n=0}^{\infty} [q(r) \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix}]e^{i\omega t} ; b \leq r \leq a \quad (2.6)$$

2.2 分析方法

假設除了彈性平板的板面外，無表面應力作用於其上，且於推導過程中，將板於徑向方位視作剛性，亦即無共平面(in-plane)方向之變位，此外板下之剛性變位為可任意指定的。則於 $Z=0$ 之邊界上

(1) 垂直擾動(Vertical excitation)，指振態 $n = 0$

$$u_{zz}^0(r, \theta, t) = w_0(r, \theta, t) ; b \leq r \leq a \quad (2.7)$$

$$\sigma_{zz}^0(r, \theta, t) = 0 ; r > a , r < b \quad (2.8)$$

$$\tau_{zr}^0(r, \theta, t) = \tau_{z\theta}^0(r, \theta, t) = 0 ; 0 \leq r \leq \infty \quad (2.9)$$

(2) 翻轉擾動(Rocking excitation)，指振態 $n = 1$

$$u_{zz}^1(r, \theta, t) = w_1(r, \theta, t) ; b \leq r \leq a \quad (2.10)$$

$$\sigma_{zz}^1(r, \theta, t) = 0 ; r > a , r < b \quad (2.11)$$

$$\tau_{zr}^1(r, \theta, t) = \tau_{z\theta}^1(r, \theta, t) = 0 ; 0 \leq r \leq \infty \quad (2.12)$$

(3) 對振態 $n > 1$

$$u_{zz}^n(r, \theta, t) = w_n(r, \theta, t) ; b \leq r \leq a \quad (2.13)$$

$$\sigma_{zz}^n(r, \theta, t) = 0 ; r > a , r < b \quad (2.14)$$

$$\tau_{zr}^n(r, \theta, t) = \tau_{z\theta}^n(r, \theta, t) = 0 ; 0 \leq r \leq \infty \quad (2.15)$$

於動力反應分析中，概分為二種情況：

(1)分佈參數系統的振態疊加分析。

(2)分離座標系統的振態疊加分析。

而於分佈參數系統之振態疊加分析中，只要振態與頻率求出，就可完全與分離座標系統相同。因此，二者均以各振態反應分量之振幅，作為定義結構物反應的廣義座標系統。然而，原則上，在分佈參數系統中，因具有無限多個振態，故此種座標有無限多個，但實際上只有那些對反應有顯著作用的振態才需考慮，故本文轉化成分離參數形式，用有限個數振態(正規)座標來描述對稱彈性薄板的動力反應。

分佈參數系統的動力反應振態分析，與分離座標系統的振態分析步驟相同，大抵可歸納為如下之步驟：

1. 計算振態與頻率。
2. 計算廣義質量與荷重。
3. 解正規座標或分離座標反應方程式。
4. 計算變位反應。



基於上述分析步驟，本文藉以推導軸對稱彈性薄板之外力-變位關係式。因此，對彈性薄板的自由振動運動方程式

$$D\nabla^2\nabla^2 w(r,\theta,t) + Kw(r,\theta,t) + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} w(r,\theta,t) = 0 \quad (2.16)$$

首先，採用分離變數法(separation of variables)，並假設變位函數的形式為 $w(r,\theta,t) = W(r,\theta)Y(t)$ ，亦即此自由振動運動包含一形狀不變的振態 $W(r,\theta)$ ，而其振幅隨時間成 $Y(t)$ 的變化。如是代入運動方程式中

$$D\nabla^2\nabla^2 W(r,\theta)Y(t) + KW(r,\theta)Y(t) + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} W(r,\theta)Y(t) = 0 \quad (2.17)$$

將變數分離

$$D\nabla^2\nabla^2W(r,\theta)Y(t) + KW(r,\theta)Y(t) = -\rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} W(r,\theta)Y(t) \quad (2.18)$$

$$\frac{D\nabla^2\nabla^2W(r,\theta) + KW(r,\theta)}{\rho h W(r,\theta)} = -\frac{Y(t)''}{Y(t)} = \omega^2 \quad (2.19)$$

整理可得

$$D\nabla^2\nabla^2W(r,\theta) + KW(r,\theta) - \omega^2 \rho h W(r,\theta) = 0 \quad (2.20)$$

其中，頻率參數 β 與自然頻率 ω 之關係式

$$\beta^4 = \frac{\rho h \omega^2}{D} - \frac{K}{D} \quad (2.21)$$

則得

$$(\nabla^4 - \beta^4)W(r,\theta) = 0 \quad (2.22)$$

$$(\nabla^2 - \beta^2)(\nabla^2 + \beta^2)W(r,\theta) = 0 \quad (2.23)$$

由於線性微分方程之原理(linear differential equations)，上式的完整解可由疊加法獲得

$$\begin{cases} \nabla^2 W_1(r,\theta) - \beta^2 W_1(r,\theta) = 0 \\ \nabla^2 W_2(r,\theta) + \beta^2 W_2(r,\theta) = 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

再將 $W(r,\theta)$ 對 θ 做傅立葉轉換(Fourier transform)

$$W(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(r) \cos n\theta + \sum_{n=0}^{\infty} W_n'(r) \sin n\theta \quad (2.25)$$

其中 n 表傅立葉展開之第 n 個項

代回可得

$$\begin{cases} \nabla^2 W_{n1}(r) \cos n\theta - \beta^2 W_{n1}(r) \cos n\theta = 0 \\ \nabla^2 W'_{n1}(r) \sin n\theta - \beta^2 W'_{n1}(r) \sin n\theta = 0 \\ \nabla^2 W_{n2}(r) \cos n\theta + \beta^2 W_{n2}(r) \cos n\theta = 0 \\ \nabla^2 W'_{n2}(r) \sin n\theta + \beta^2 W'_{n2}(r) \sin n\theta = 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

其中 $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)$ 代入上式

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial^2 r} W_{n1}(r) \cos n\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} W_{n1}(r) \cos n\theta + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial^2 \theta} W_{n1}(r) \cos n\theta - \beta^2 W_{n1}(r) \cos n\theta = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial^2 r} W'_{n1}(r) \sin n\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} W'_{n1}(r) \sin n\theta + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial^2 \theta} W'_{n1}(r) \sin n\theta - \beta^2 W'_{n1}(r) \sin n\theta = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial^2 r} W_{n2}(r) \cos n\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} W_{n2}(r) \cos n\theta + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial^2 \theta} W_{n2}(r) \cos n\theta + \beta^2 W_{n2}(r) \cos n\theta = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial^2 r} W'_{n2}(r) \sin n\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} W'_{n2}(r) \sin n\theta + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial^2 \theta} W'_{n2}(r) \sin n\theta + \beta^2 W'_{n2}(r) \sin n\theta = 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

化簡能得

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial^2 r} W_{n1}(r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} W_{n1}(r) - \left(\beta^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) W_{n1}(r) = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial^2 r} W'_{n1}(r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} W'_{n1}(r) - \left(\beta^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) W'_{n1}(r) = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial^2 r} W_{n2}(r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} W_{n2}(r) + \left(\beta^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) W_{n2}(r) = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial^2 r} W'_{n2}(r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} W'_{n2}(r) + \left(\beta^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) W'_{n2}(r) = 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

作 Bessel function 轉換

$$\begin{cases} W_{n1}(r) = A_{3n} I_n(\beta r) + A_{4n} K_n(\beta r) \\ W'_{n1}(r) = A'_{3n} I_n(\beta r) + A'_{4n} K_n(\beta r) \\ W_{n2}(r) = A_{1n} J_n(\beta r) + A_{2n} Y_n(\beta r) \\ W'_{n2}(r) = A'_{1n} J_n(\beta r) + A'_{2n} Y_n(\beta r) \end{cases} \quad (2.29)$$

最後將上式代入

$$W(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(r) \cos n\theta + \sum_{n=0}^{\infty} W_n'(r) \sin n\theta \quad (2.30)$$

則可得一含貝索函數(Bessel function)之函式

$$W(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \{A_{1n} J_n(\beta r) + A_{2n} Y_n(\beta r) + A_{3n} I_n(\beta r) + A_{4n} K_n(\beta r)\} \cos n\theta \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \{A_{1n}' J_n(\beta r) + A_{2n}' Y_n(\beta r) + A_{3n}' I_n(\beta r) + A_{4n}' K_n(\beta r)\} \sin n\theta \quad (2.31)$$

而上式中的八個係數 A_{kn} ; A_{kn}' , $k=1, 2, 3, 4$ 定義了板振動時的形狀與振幅，再由板邊緣的邊界條件，可得一頻率方程式，並可藉以解出頻率參數 β_{nm} ，進而求得自然頻率 ω_{nm} 。其中 $W_n(r, \theta)$ 具有 $\cos n\theta$ 及 $\sin n\theta$ ，因二者具有類似之週期特性，故以下僅就 $\cos n\theta$ 加以推導。

此外於計算廣義荷重時，原則上可直接應用於任意分佈荷重函數，但為能有效運用於土壤-結構物互制機制之研究課題中，故本文基於參考文獻，對任意分佈荷重建立其對每個傅立葉展開項的荷重強度為沿徑向分段線性(Piecewise Linear)的基本假設，即

$$q(r) = \sum_{j=1}^{s-1} h_j(r) q_j^n + h_0(r) q_0^n + h_s(r) q_s^n = h^T p \quad (2.32)$$

其中

n : 表傅立葉展開之第 n 個項。

s : 表板區分成 s 個區間。

h^T : 表由 h_j 所組成之 $[1 \times (s+1)]$ 向量函數。

p : 表由 q_j 所組成之 $[(s+1) \times 1]$ 向量。

並進而提出一形狀函數(piecewise linear shape function)，藉以模擬。

$$h_j(r) = \begin{cases} \frac{r-r_{j-1}}{r_j-r_{j-1}}, & \text{for } r_{j-1} \leq r \leq r_j, \quad 1 \leq j \leq s; \\ \frac{r_{j+1}-r}{r_{j+1}-r_j}, & \text{for } r_j \leq r \leq r_{j+1}, \quad 0 \leq j \leq s-1; \\ 0 & \end{cases} \quad (2.33)$$

鑑於上述結論與假設，以下就軸對稱環狀板加以推導。

2.3 軸對稱環狀板

2.3.1 前言

由彈性薄板於自由振動之運動控制方程式，經分離變數法得

$$W_n(r, \theta) = \{A_{1n}J_n(\beta r) + A_{2n}Y_n(\beta r) + A_{3n}I_n(\beta r) + A_{4n}K_n(\beta r)\} \cos n\theta \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.34)$$

2.3.2 邊界條件

本文就三種邊界條件情況之環狀板加以推導

情況一：

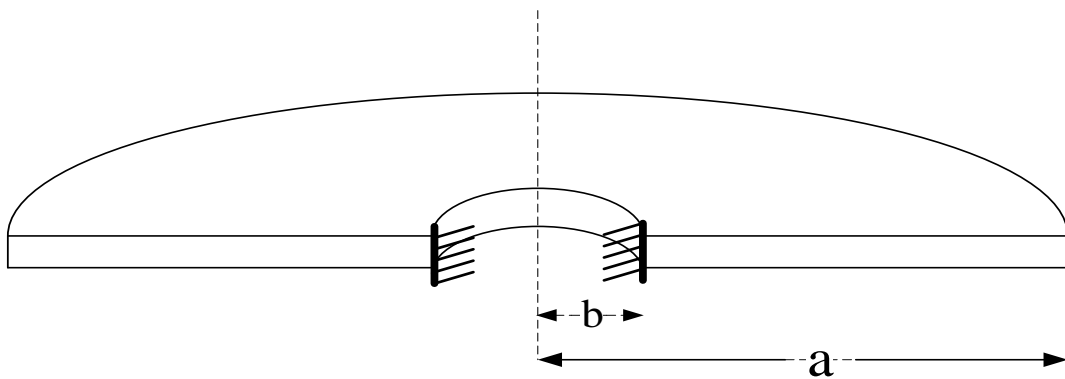


圖 1. 環狀板內板為固定端，外板為自由端

(i) 內板之邊緣為固定端，則 $r = b$ 處的變位為零。

$$[W_n(r, \theta)]_{r=b} = 0 \quad (2.35)$$

(ii) 內板之邊緣為固定端，則 $r = b$ 處的轉角為零。

$$\left[\frac{\partial W_n(r, \theta)}{\partial r} \right]_{r=b} = 0 \quad (2.36)$$

(iii) 外板之邊緣為自由端，則 $r = a$ 處的徑向彎矩為零。

$$(M_r)_{r=a} = 0 \quad (2.37)$$

(iv) 外板之邊緣為自由端，則 $r = a$ 處的剪力為零。

$$V = \left[Q_r - \frac{\partial M_r}{r \partial \theta} \right]_{r=a} = 0 \quad (2.38)$$

情況二：

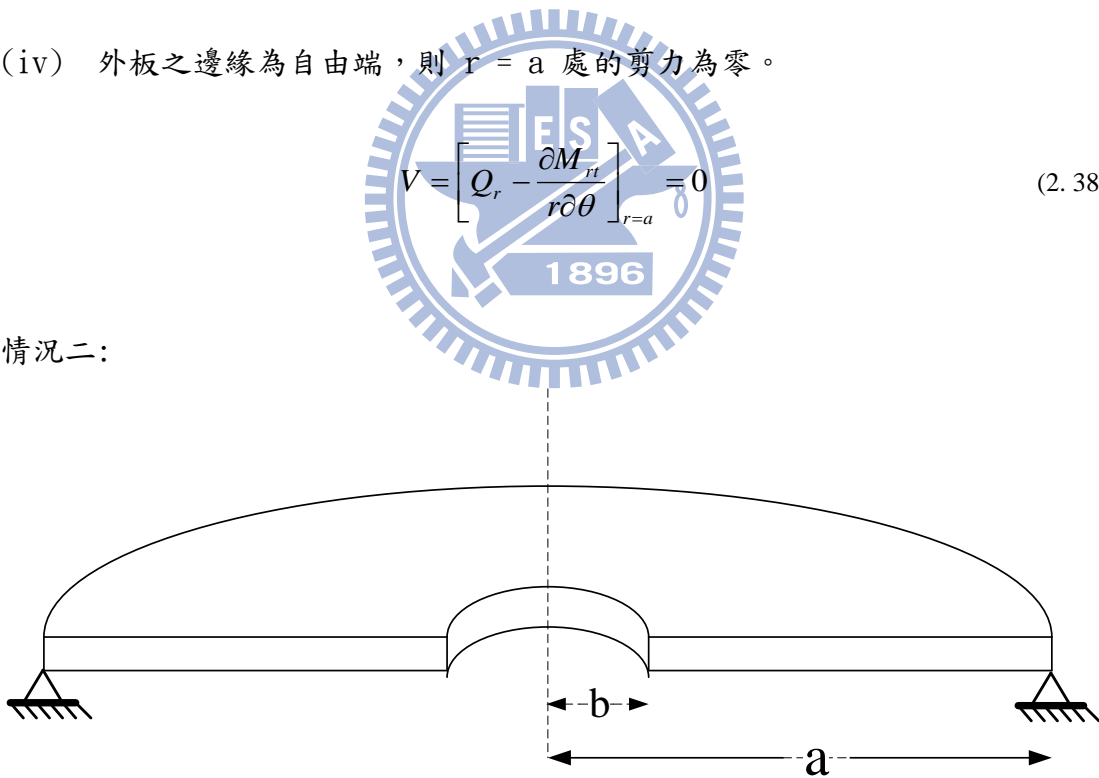


圖 2. 環狀板內板為自由端，外板為簡支承

(i) 內板之邊緣為自由端，則 $r = b$ 處的徑向彎矩為零。

$$(M_r)_{r=b} = 0 \quad (2.39)$$

(ii) 內板之邊緣為自由端，則 $r = b$ 處的剪力為零。

$$V = \left[Q_r - \frac{\partial M_r}{r \partial \theta} \right]_{r=b} = 0 \quad (2.40)$$

(iii) 外板之邊緣為簡支承，則 $r = a$ 處的徑向彎矩為零。

$$(M_r)_{r=a} = 0 \quad (2.41)$$

(iv) 外板之邊緣為簡支承，則 $r = a$ 處的變位為零。

$$[W_n(r, \theta)]_{r=a} = 0 \quad (2.42)$$

情況三：

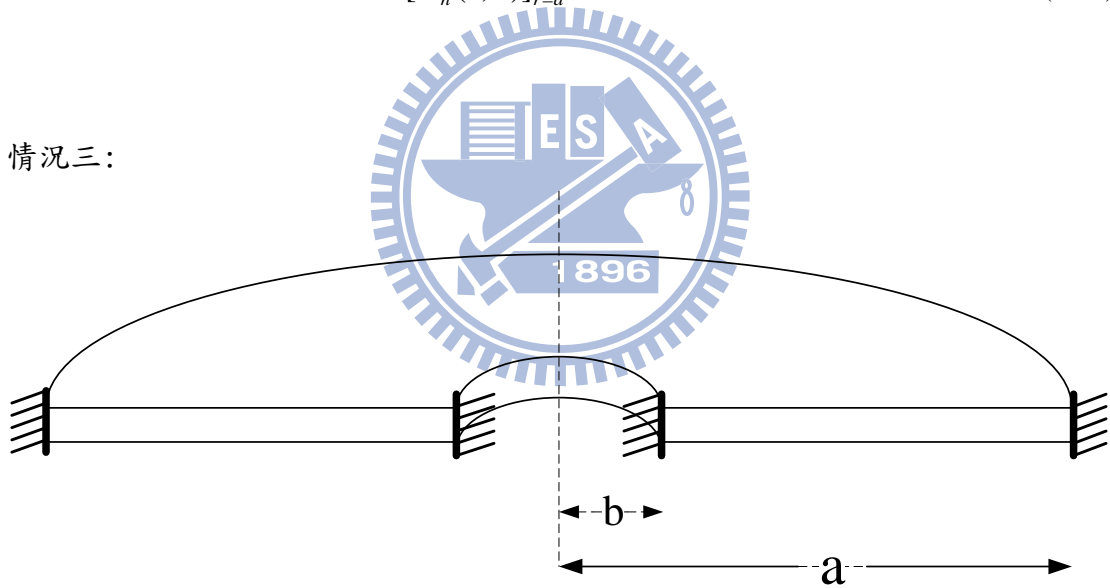


圖 3. 環狀板內板為固定端，外板為固定端

(i) 內板之邊緣為固定端，則 $r = b$ 處的變位為零。

$$[W_n(r, \theta)]_{r=b} = 0 \quad (2.43)$$

(ii) 內板之邊緣為固定端，則 $r = b$ 處的轉角為零。

$$\left[\frac{\partial W_n(r, \theta)}{\partial r} \right]_{r=b} = 0 \quad (2.44)$$

(iii) 外板之邊緣為固定端，則 $r = a$ 處的變位為零。

$$[W_n(r, \theta)]_{r=a} = 0 \quad (2.45)$$

(iii) 外板之邊緣為固定端，則 $r = a$ 處的轉角為零。

$$\left[\frac{\partial W_n(r, \theta)}{\partial r} \right]_{r=a} = 0 \quad (2.46)$$

藉由各邊界情況之邊界條件，可得：

$$\begin{bmatrix} Coe_{11} & Coe_{12} & Coe_{13} & Coe_{14} \\ Coe_{21} & Coe_{22} & Coe_{23} & Coe_{24} \\ Coe_{31} & Coe_{32} & Coe_{33} & Coe_{34} \\ Coe_{41} & Coe_{42} & Coe_{43} & Coe_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1n} \\ A_{2n} \\ A_{3n} \\ A_{4n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

其中

情況一：

$$Coe_{11} = J_n(\beta b)$$

$$Coe_{12} = Y_n(\beta b)$$

$$Coe_{13} = I_n(\beta b)$$

$$Coe_{14} = K_n(\beta b)$$

$$\begin{aligned}
Coe_{21} &= -\beta J_{n+1}(\beta b) + \frac{n}{b} J_n(\beta b) \\
Coe_{22} &= -\beta Y_{n+1}(\beta b) + \frac{n}{b} Y_n(\beta b) \\
Coe_{23} &= \beta I_{n+1}(\beta b) + \frac{n}{b} I_n(\beta b) \\
Coe_{24} &= -\beta K_{n+1}(\beta b) + \frac{n}{b} K_n(\beta b) \\
Coe_{31} &= \beta^2 J_{n+2}(\beta a) - \frac{\beta}{a} (2n+1+\nu) J_{n+1}(\beta a) + \frac{n(n-1)(1-\nu)}{a^2} J_n(\beta a) \\
Coe_{32} &= \beta^2 Y_{n+2}(\beta a) - \frac{\beta}{a} (2n+1+\nu) Y_{n+1}(\beta a) + \frac{n(n-1)(1-\nu)}{a^2} Y_n(\beta a) \\
Coe_{33} &= \beta^2 I_{n+2}(\beta a) + \frac{\beta}{a} (2n+1+\nu) I_{n+1}(\beta a) + \frac{n(n-1)(1-\nu)}{a^2} I_n(\beta a) \\
Coe_{34} &= \beta^2 K_{n+2}(\beta a) - \frac{\beta}{a} (2n+1+\nu) K_{n+1}(\beta a) + \frac{n(n-1)(1-\nu)}{a^2} K_n(\beta a) \\
Coe_{41} &= -\beta^3 J_{n+3}(\beta a) + \frac{\beta^2}{a} (3n+4) J_{n+2}(\beta a) - \frac{\beta[n^2(1+\nu)+2n]}{a^2} J_{n+1}(\beta a) \\
&\quad + \frac{n^2(1-n)(1-\nu)}{a^3} J_n(\beta a) \\
Coe_{42} &= -\beta^3 Y_{n+3}(\beta a) + \frac{\beta^2}{a} (3n+4) Y_{n+2}(\beta a) - \frac{\beta[n^2(1+\nu)+2n]}{a^2} Y_{n+1}(\beta a) \\
&\quad + \frac{n^2(1-n)(1-\nu)}{a^3} Y_n(\beta a) \\
Coe_{43} &= \beta^3 I_{n+3}(\beta a) + \frac{\beta^2}{a} (3n+4) I_{n+2}(\beta a) + \frac{\beta[n^2(1+\nu)+2n]}{a^2} I_{n+1}(\beta a) \\
&\quad + \frac{n^2(1-n)(1-\nu)}{a^3} I_n(\beta a) \\
Coe_{44} &= -\beta^3 K_{n+3}(\beta a) + \frac{\beta^2}{a} (3n+4) K_{n+2}(\beta a) - \frac{\beta[n^2(1+\nu)+2n]}{a^2} K_{n+1}(\beta a) \\
&\quad + \frac{n^2(1-n)(1-\nu)}{a^3} K_n(\beta a)
\end{aligned} \tag{2.48}$$

情況二：

$$Coe_{11} = \beta^2 J_{n+2}(\beta b) - \frac{\beta}{b} (2n+1+\nu) J_{n+1}(\beta b) + \frac{n(n-1)(1-\nu)}{b^2} J_n(\beta b)$$

$$Coe_{12} = \beta^2 Y_{n+2}(\beta b) - \frac{\beta}{b} (2n+1+\nu) Y_{n+1}(\beta b) + \frac{n(n-1)(1-\nu)}{b^2} Y_n(\beta b)$$

$$Coe_{13} = \beta^2 I_{n+2}(\beta b) + \frac{\beta}{b} (2n+1+\nu) I_{n+1}(\beta b) + \frac{n(n-1)(1-\nu)}{b^2} I_n(\beta b)$$

$$Coe_{14} = \beta^2 K_{n+2}(\beta b) - \frac{\beta}{a} (2n+1+\nu) K_{n+1}(\beta b) + \frac{n(n-1)(1-\nu)}{b^2} K_n(\beta b)$$

$$Coe_{21} = -\beta^3 J_{n+3}(\beta b) + \frac{\beta^2}{b} (3n+4) J_{n+2}(\beta b) - \frac{\beta[n^2(1+\nu)+2n]}{b^2} J_{n+1}(\beta b) \\ + \frac{n^2(1-n)(1-\nu)}{b^3} J_n(\beta b)$$

$$Coe_{22} = -\beta^3 Y_{n+3}(\beta b) + \frac{\beta^2}{b} (3n+4) Y_{n+2}(\beta b) - \frac{\beta[n^2(1+\nu)+2n]}{b^2} Y_{n+1}(\beta b) \\ + \frac{n^2(1-n)(1-\nu)}{b^3} Y_n(\beta b)$$

$$Coe_{23} = \beta^3 I_{n+3}(K\beta b) + \frac{\beta^2}{b} (3n+4) I_{n+2}(\beta b) + \frac{\beta[n^2(1+\nu)+2n]}{b^2} I_{n+1}(\beta b) \\ + \frac{n^2(1-n)(1-\nu)}{b^3} I_n(\beta b)$$

$$Coe_{24} = -\beta^3 K_{n+3}(\beta b) + \frac{\beta^2}{b} (3n+4) K_{n+2}(\beta b) - \frac{\beta[n^2(1+\nu)+2n]}{b^2} K_{n+1}(\beta b) \\ + \frac{n^2(1-n)(1-\nu)}{b^3} K_n(\beta b)$$

$$Coe_{31} = \beta^2 J_{n+2}(\beta a) - \frac{\beta}{a} (2n+1+\nu) J_{n+1}(\beta a) + \frac{n(n-1)(1-\nu)}{a^2} J_n(\beta a)$$

$$Coe_{32} = \beta^2 Y_{n+2}(\beta a) - \frac{\beta}{a} (2n+1+\nu) Y_{n+1}(\beta a) + \frac{n(n-1)(1-\nu)}{a^2} Y_n(\beta a)$$

$$Coe_{33} = \beta^2 I_{n+2}(\beta a) + \frac{\beta}{a} (2n+1+\nu) I_{n+1}(\beta a) + \frac{n(n-1)(1-\nu)}{a^2} I_n(\beta a)$$

$$Coe_{34} = \beta^2 K_{n+2}(\beta a) - \frac{\beta}{a} (2n+1+\nu) K_{n+1}(\beta a) + \frac{n(n-1)(1-\nu)}{a^2} K_n(\beta a)$$

$$Coe_{41} = J_n(\beta a)$$

$$Coe_{42} = Y_n(\beta a)$$

$$Coe_{43} = I_n(\beta a)$$

$$Coe_{44} = K_n(\beta a) \quad (2.49)$$

情況三：

$$Coe_{11} = J_n(\beta b)$$

$$Coe_{12} = Y_n(\beta b)$$

$$Coe_{13} = I_n(\beta b)$$

$$Coe_{14} = K_n(\beta b)$$

$$Coe_{21} = -\beta J_{n+1}(\beta b) + \frac{n}{b} J_n(\beta b)$$

$$Coe_{22} = -\beta Y_{n+1}(\beta b) + \frac{n}{b} Y_n(\beta b)$$

$$Coe_{23} = \beta I_{n+1}(\beta b) + \frac{n}{b} I_n(\beta b)$$

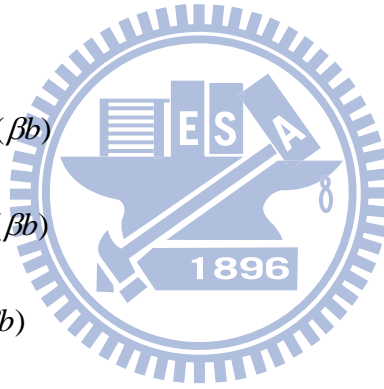
$$Coe_{24} = -\beta K_{n+1}(\beta b) + \frac{n}{b} K_n(\beta b)$$

$$Coe_{31} = J_n(\beta a)$$

$$Coe_{32} = Y_n(\beta a)$$

$$Coe_{33} = I_n(\beta a)$$

$$Coe_{34} = K_n(\beta a)$$



$$\begin{aligned}
Coe_{41} &= -\beta J_{n+1}(\beta a) + \frac{n}{a} J_n(\beta a) \\
Coe_{42} &= -\beta Y_{n+1}(\beta a) + \frac{n}{a} Y_n(\beta a) \\
Coe_{43} &= \beta I_{n+1}(\beta a) + \frac{n}{a} I_n(\beta a) \\
Coe_{44} &= -\beta K_{n+1}(\beta a) + \frac{n}{a} K_n(\beta a)
\end{aligned} \tag{2.50}$$

若為不使得空解(trivial solution)，則方矩陣的行列式值必為零，至此行列式值為零，可得頻率方程式，此為一實數系之超越函數，故利用數值方法(勘根定理與 secant 方法)，以求得頻率參數 β_{nm} ，由矩陣中之任三個方程式都可將 A_{2n} ，

A_{3n} ， A_{4n} 用 A_{1n} 表示出來。

2.3.3 振態疊加法

既已求得頻率參數 β_{nm} ，且 $W_n(r, \theta)$ 中 A_{2n} ， A_{3n} ， A_{4n} 係數可用 A_{1n} 表示，則變位函數可寫成

$$w(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{nm}(r, \theta) Y(t) \tag{2.51}$$

其中，將替代之係數，分別以 \tilde{B} ， \tilde{C} ， \tilde{D} 表之，則

$$W_{nm}(r, \theta) = A_{nm} [J_n(\beta_{nm} r) + \tilde{B} Y_n(\beta_{nm} r) + \tilde{C} I_n(\beta_{nm} r) + \tilde{D} K_n(\beta_{nm} r)] \cos n\theta \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{2.52}$$

再代入控制方程式中，得

$$\begin{aligned}
D \nabla^2 \nabla^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{nm}(r, \theta) Y(t) + K \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{nm}(r, \theta) Y(t) + \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{nm}(r, \theta) Y(t) = \\
q(r, \theta, t)
\end{aligned} \tag{2.53}$$

由 Normal Mode Expansion Method 得知，對上式之每一個項乘以 $W_{kl}(r, \theta)$ ，並對板面作積分，因振態之振幅廣義座標，亦即正規座標(Normal Coord.)具正交之特性，也就是說

$$\text{當 } \beta_{ij} \neq \beta_{kl}, \int_0^{2\pi} \int_b^a W_{ij}(r, \theta) W_{kl}(r, \theta) r dr d\theta = 0 \quad (2.54)$$

故除了 $k = m$; $l = n$ 外，餘皆為零，故最後可得

$$M_{nm} \ddot{Y}_{nm}(t) + \omega_{nm}^2 M_{nm} Y_{nm}(t) = P_{nm}(t) \quad (2.55)$$

其中，

廣義質量

$$M_{nm} = \int_0^{2\pi} \int_b^a W_{nm}^2(r, \theta) r dr d\theta \quad (2.56)$$

廣義荷重

$$P_{nm} = \frac{1}{\rho h} \int_0^{2\pi} \int_b^a W_{nm}(r, \theta) q(r, \theta, t) r dr d\theta \quad (2.57)$$

接著，經由本文所提出之形狀函數，將分佈荷重之情況，假設對每個傅立葉展開項的荷重強度為沿徑向分段線性(Piecewise Linear)，整理可得

$$M_{nm} = A_{nm}^2 \left(\frac{2\pi}{\pi} \right) \int_b^a [J_n(\beta_{nm} r) + \tilde{B} Y_n(\beta_{nm} r) + \tilde{C} I_n(\beta_{nm} r) + \tilde{D} K_n(\beta_{nm} r)]^2 r dr \quad (2.58)$$

$$P_{nm} = \bar{P}_{nm} \cdot p \cdot e^{i\omega t}$$

$$= \frac{1}{\rho h} A_{nm} \left(\frac{2\pi}{\pi} \right) \int_b^a [J_n(\beta_{nm} r) + \tilde{B} Y_n(\beta_{nm} r) + \tilde{C} I_n(\beta_{nm} r) + \tilde{D} K_n(\beta_{nm} r)] h^T r dr \cdot e^{i\omega t} \cdot p$$

$$= \left(\frac{2\pi}{\pi} \right) \frac{A_{nm}}{\rho h} \left[\begin{array}{c} \int_{r_0}^{r_1} [J_n(\beta_{nm}r) + \tilde{B}Y_n(\beta_{nm}r) + \tilde{C}I_n(\beta_{nm}r) + \tilde{D}K_n(\beta_{nm}r)] \frac{r_1 - r}{r_1 - r_0} r dr \\ \dots \\ \int_{r_{j-1}}^{r_j} [J_n(\beta_{nm}r) + \tilde{B}Y_n(\beta_{nm}r) + \tilde{C}I_n(\beta_{nm}r) + \tilde{D}K_n(\beta_{nm}r)] \frac{r - r_{j-1}}{r_j - r_{j-1}} r dr \\ + \int_{r_j}^{r_{j+1}} [J_n(\beta_{nm}r) + \tilde{B}Y_n(\beta_{nm}r) + \tilde{C}I_n(\beta_{nm}r) + \tilde{D}K_n(\beta_{nm}r)] \frac{r_{j+1} - r}{r_{j+1} - r_j} r dr \\ \dots \\ \int_{r_{s-1}}^{r_s} [J_n(\beta_{nm}r) + \tilde{B}Y_n(\beta_{nm}r) + \tilde{C}I_n(\beta_{nm}r) + \tilde{D}K_n(\beta_{nm}r)] \frac{r - r_{s-1}}{r_s - r_{s-1}} r dr \end{array} \right] \cdot e^{i\omega t} \cdot p \quad (2.59)$$

其中之 2π ， π 係因

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 n\theta d\theta = \begin{cases} 2\pi & n=0 \\ \pi & n=1,2,\dots \end{cases} \quad (2.60)$$

2.3.4 外力-變位的關係式

由 2.3.3 節，可得於正規座標之動力反應方程式

$$M_{nm} \ddot{Y}_{nm}(t) + \omega_{nm}^2 M_{nm} Y_{nm}(t) = P_{nm}(t) \quad (2.61)$$

解上式微分方程，令 $Y_{nm}(t) = C \cdot e^{i\omega t}$

再代回原式，得

$$Y_{nm}(t) = \frac{P_{nm}}{M_{nm}(\omega_{nm}^2 - \omega^2)} \quad (2.62)$$

上式結果代回變位函數中，可得軸對稱環型板上沿板邊緣所計算的位移函數。

$$\begin{aligned} w(r, \theta, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{nm}(r, \theta) \frac{P_{nm}}{M_{nm}(\omega_{nm}^2 - \omega^2)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{nm}(r, \theta) \frac{\bar{P}_{nm}}{M_{nm}(\omega_{nm}^2 - \omega^2)} \cdot p \cdot e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (2.63)$$

2.4 頻率方程式求根

為了求解彈性板於自由振動下之振態，因而推導出頻率方程式，然而此數學式為一含 bessel 函數之超越函式，可得無限多組解，是以藉數值方法求之。引用兩種數值技巧：

- (1) Bracketing Method
- (2) Open Method

2.4.1 Bracketing Method

本法利用函數於根的兩側，其函數值為異號之特性。因此，需要兩個初始猜想值(initial guess)以求根，此二值必須位於真實根之兩側，亦即涵蓋根值之範圍。故可得以下結論

設一函數 $f(x)$ ，兩個初始猜想值 x_l, x_u

若 $f(x_l) \times f(x_u) < 0$ ，則 $[x_l, x_u]$ ， x_u 區間內有奇數個根。

若 $f(x_l) \times f(x_u) > 0$ ，則 $[x_l, x_u]$ ， x_u 區間內有偶數個根或無解。

以上通則，適用於大部分函數，但當函數為與自變數之軸相切，即重根 (multiple root) 或為一不連續，則無法引用上述法則。

2.4.2 Open Method

於 Bracketing Method 中，其根為介於兩個初始猜想值之間，而藉不斷引用其結論，以趨近根值。故可謂其方法具收斂性之優點。而本節之方法，係引用單一或二個初始猜值，但無須將根值涵蓋於其範圍內。故此法有時會遠離根值，甚而具發散特性之缺點。但此法具有 Bracketing Method 所不及的優點，也就是當其收斂時，則收斂速度甚快。

Open Method 可概分為三種：

- (1) Simple One-Point Iteration
- (2) The Newton-Raphson Method
- (3) The Secant Method

本文引用第三種，設一函數 $f(x)$ ，利用 *F.D.M* 可得一次導數之近似式

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i} \quad (2.64)$$

藉代入 The Newton-Raphson Method 之疊代公式中，故可得另一疊代公式

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \\ &= x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)} \end{aligned} \quad (2.65)$$

而上式中須二個猜想值，但無須具 Bracketing Method 之特性。

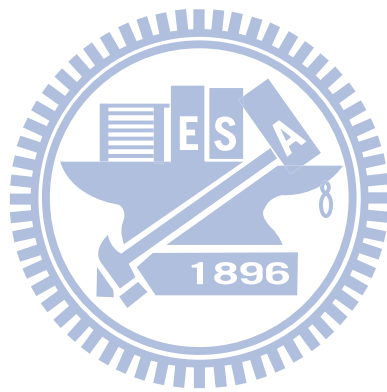
2.4.3 應用求解

如前兩小節所述，分別具有其優缺點。是以本文藉同時引用，以擷取二者之優點，彌補其缺點。因為頻率方程式為一具有無限多組解之超越函式，故先引用 Bracketing Method，以等間距之值作初始猜值(initial guess)，並利用 Bracketing Method 之通則，藉以判斷於始猜值(initial guess)間具唯一根值。而於 Bracketing Method 中，為認定是否具唯一根值，故以縮小間距加以檢測。結果，發現頻率方程式之根值間具近似等差之特性，此一發現更助於求根之過程，可藉此將求根之過程無因次化(Non-Dimensionize)。

接著，將 Bracketing Method 所求得約略根值，分別加減一小於間距之值，以為 The Secant Method 之二個初始猜值(initial guess)。藉以求頻率方程式之根值。

求解過程中，本文利用 Bracketing Method 作為判斷區間內具唯一根值之技巧。為避免此方法於求根過程缺乏效率，在引用 Open Method 中之 The Secant

Method，由先前之步驟，確定其具收斂性，再利用此法之優點，迅速收斂，求得頻率方程式之根值。



第三章 實例分析(振態)

3.1 前言

根據前述軸對稱彈性薄板置於彈性基礎上，考慮其於不同邊界條件下之自然頻率與振態。

3.2 ANSYS 介紹

隨著科技軟體的快速發展，發展出許多 CAE 計算軟體，如 ANSYS、ANSYS 的 LS-DYNA 模組、ABAQUS、MARC、ALGOR、ADINA、ASKA 等商用軟體。ANSYS 軟體是融合結構、流體、電場、磁場、聲場、分析於一體的大型通用有限元素分析軟體。由世界上最大的有限元素分析軟體公司之一的美國 ANSYS 開發，它可以與多數 CAD 軟體界面結合，展現數據及數值的共享和交換，Pro/Engineer, NASTRAN, Alogor, I-DEAS, AutoCAD 等，是現代產品設計中的高階 CAD 工具之一。它能同時分析 MODEL 受到靜力、動力、流力及熱傳等多重物理現象影響時之變化，所以多應用在土木、機械、航太、材料、電子、生物、醫學工程等多種領域。其中的運算原理乃根據有限元素法(Finite element)，因此當模型建立，並給它相關的參數設定，並加以網格化後，再來只需附加模型的邊界條件，即可直接利用有限元素法來計算。而在 ANSYS 建構模型的部份，可以利用三種方式，如，利用 GUI 介面建構模型、以指令方式建構模型、以 CAD 軟體建構模型，再輸入 ANSYS 介面，來探討其動力特性。

3.2.1 ANSYS 分析步驟

軟體主要包括三個部分：前處理，分析計算和後處理。[前處理]提供了一個強大的實體建模及網格劃分工具，可以很方便地建構有限元素模型；[分析計算]包括結構分析（可進行線性分析、非線性分析和高度非線性分析）、流體動力學分析、電磁場分析、聲場分析、壓電分析以及多物理場的耦合分析，具有靈敏度分析及優化分析能力；[後處理]可將計算結果以色彩顯示、梯度顯示、立體切片顯示、透明及半透明顯示（可看到架構內部）等圖形模式顯示出來，也可將計算結果以圖表、曲線形式顯示或輸出。軟體提供了 100 種以上的單元類型，用來比擬工程中的各種結構和材料。

啟動 ANSYS 後，進入軟體畫面以後，程式停留在開始平台。從（主選單）即可進入各處理模組：PREP7（前處理模組），SOLUTION（求解模組），POST1（通用後處理模組），POST26（時間歷程後處理模組）。

3.3 頻率參數

材料性質

環狀板，板內徑 $b = 0.3$ (in); 板外徑 $a = 1$ (in)

平板之卜森比(poisson ratio) $\nu = 0.3$

平板之彈性模數 $E = 1000$ (psi)

平板之密度 $\rho = 1$ (lb/in^3)

平板之厚度 $h = 0.02$ (in)

本文就三種情況之環狀板加以推導

我們可以使用一些數學軟體來求解頻率參數值，如 Mathlab、Mathematica 將結果得出，來達到輔助的效果。在本文中

$$\begin{bmatrix} Coe_{11} & Coe_{12} & Coe_{13} & Coe_{14} \\ Coe_{21} & Coe_{22} & Coe_{23} & Coe_{24} \\ Coe_{31} & Coe_{32} & Coe_{33} & Coe_{34} \\ Coe_{41} & Coe_{42} & Coe_{43} & Coe_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1n} \\ A_{2n} \\ A_{3n} \\ A_{4n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

若為不使得空解(trivial solution)，則矩陣的行列式值必為零，置此行列式值為零，可得頻率方程式，將此頻率方程式套入 Mathematica，解算後即可求得頻率參數 β 。

- 由頻率方程式知，頻率方程式具有平板內徑 b ，平板外徑 a ，平板之卜森比 ν 基礎彈性模數 K ，四個控制變因。
- 對各種板徑值，其振態 n 間，頻率參數值且隨內外半徑比值越大，差值越小。

- 對各種板徑值，其振態 m 間具有近似等差之特性，且隨內外半徑比值越大，特性更明顯。
- 利用上述特性，可對頻率參數於固定值時做無因次化(non-dimensional)過程，亦即先求得內外徑比值為 $x(0 < x < 1)$ 、基礎彈性模數 $K = 1(lb/in^3)$ 之頻率參數值，當真實內外徑比值均放大 y 倍時，僅須將無因次化之頻率參數值縮小 y 倍，當真實基礎彈性模數值均放大 z 倍時，僅須將無因次化之頻率參數值縮小 z 倍，即為真實頻率參數值。

• 表 1. 頻率參數值(情況一)

頻率參數	邊界條件一			
	第一模態	第二模態	第三模態	第四模態
n=0	2.55975	6.52796	11.1115	15.6265
n=1	2.58077	6.68065	11.2171	15.7094

• 表 2. 頻率參數值(情況二)

頻率參數	邊界條件二			
	第一模態	第二模態	第三模態	第四模態
n=0	2.15965	6.08623	10.3667	14.7691
n=1	3.57993	6.77031	10.6883	14.9595

• 表 3. 頻率參數值(情況三)

頻率參數	邊界條件三			
	第一模態	第二模態	第三模態	第四模態
n=0	6.73396	11.1965	15.6894	20.1802
n=1	6.82961	11.2863	15.764	20.2432

3.4 自然頻率

求得頻率參數後，代回 2.21 式

$$\beta^4 = \frac{\rho h \omega^2}{D} - \frac{K}{D}$$

可得基礎上環狀彈性板在不同邊界條件情況下之自然頻率。

• 表 4. Analytical Solution 之自然頻率(情況一)

自然頻率	邊界條件一			
	第一模態	第二模態	第三模態	第四模態
n=0	1.143536	1.717983	3.925607	7.522759
n=1	1.142957	1.764859	3.994468	7.601007

• 表 5. Analytical Solution 之自然頻率(情況二)

自然頻率	邊界條件二			
	第一模態	第二模態	第三模態	第四模態
n=0	1.134328	1.593625	3.461602	6.738899
n=1	1.191181	1.793311	3.657269	6.908955

• 表 6. Analytical Solution 之自然頻率(情況三)

自然頻率	邊界條件三			
	第一模態	第二模態	第三模態	第四模態
n=0	1.781694	3.980976	7.582089	12.45574
n=1	1.812503	4.040003	7.652779	12.53300

再比對由 ANSYS 所得出之自然頻率

• 表 7. ANSYS 之自然頻率(情況一)

自然頻率	邊界條件一			
	第一模態	第二模態	第三模態	第四模態
n=0	1.145005	1.724305	3.927228	7.517391
n=1	1.144497	1.770463	3.994675	7.593255

• 表 8. ANSYS 之自然頻率(情況二)

自然頻率	邊界條件二			
	第一模態	第二模態	第三模態	第四模態
n=0	1.135296	1.596834	3.460781	6.730323
n=1	1.192006	1.799006	3.66066	6.905673

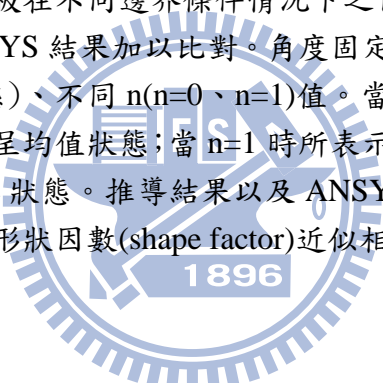
• 表 9. ANSYS 之自然頻率(情況三)

自然頻率	邊界條件三			
	第一模態	第二模態	第三模態	第四模態
n=0	1.781701	3.974655	7.564533	12.41725
n=1	1.812201	4.032849	7.634071	12.49657

3.5 振態

頻率參數再代回 2.34 式

$$W_n(r, \theta) = \{A_{1n}J_n(\beta r) + A_{2n}Y_n(\beta r) + A_{3n}I_n(\beta r) + A_{4n}K_n(\beta r)\} \cos n\theta$$

可得基礎上環狀彈性板在不同邊界條件情況下之自由振動各個振態。以下就三種邊界條件情況與 ANSYS 結果加以比對。角度固定為 0 度且沿徑向在不同模態(第一、二、三、四模態)、不同 n(n=0、n=1)值。當 n=0 時所表示為沿軸對稱彈性薄板的角度方向振態呈均值狀態；當 n=1 時所表示為沿軸對稱彈性薄板的角

 度方向振態呈 cosine shape 狀態。推導結果以及 ANSYS 之結果，皆有以最大振態處為比對基準，乘上一形狀因數(shape factor)近似相較。

3.5.1 情況一之振態(環狀板內板為固定端，外板為自由端)

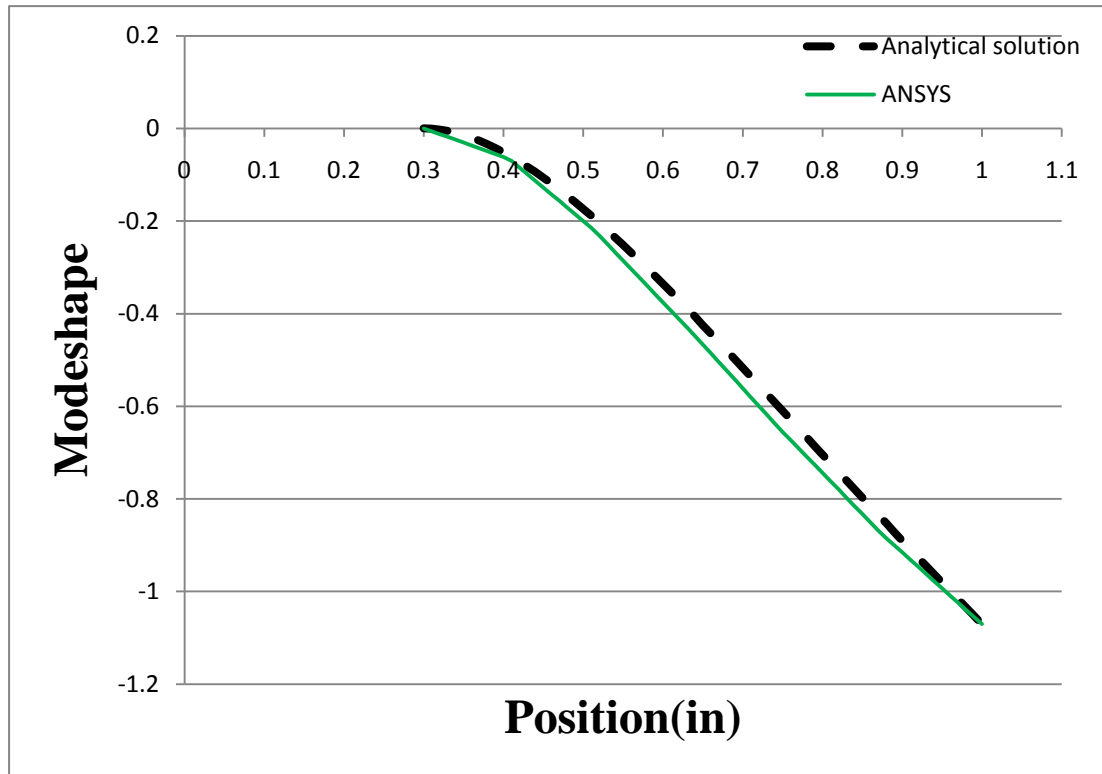


圖 4. $n=0$ 在第一模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態

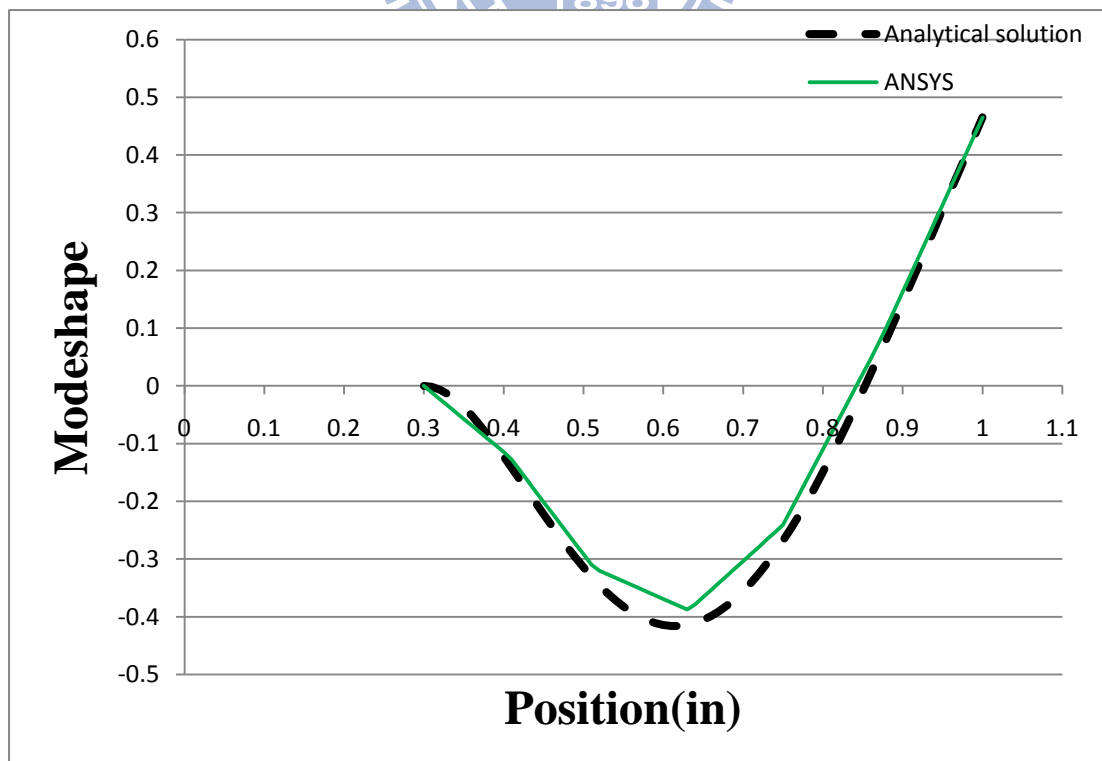


圖 5. $n=0$ 在第二模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態

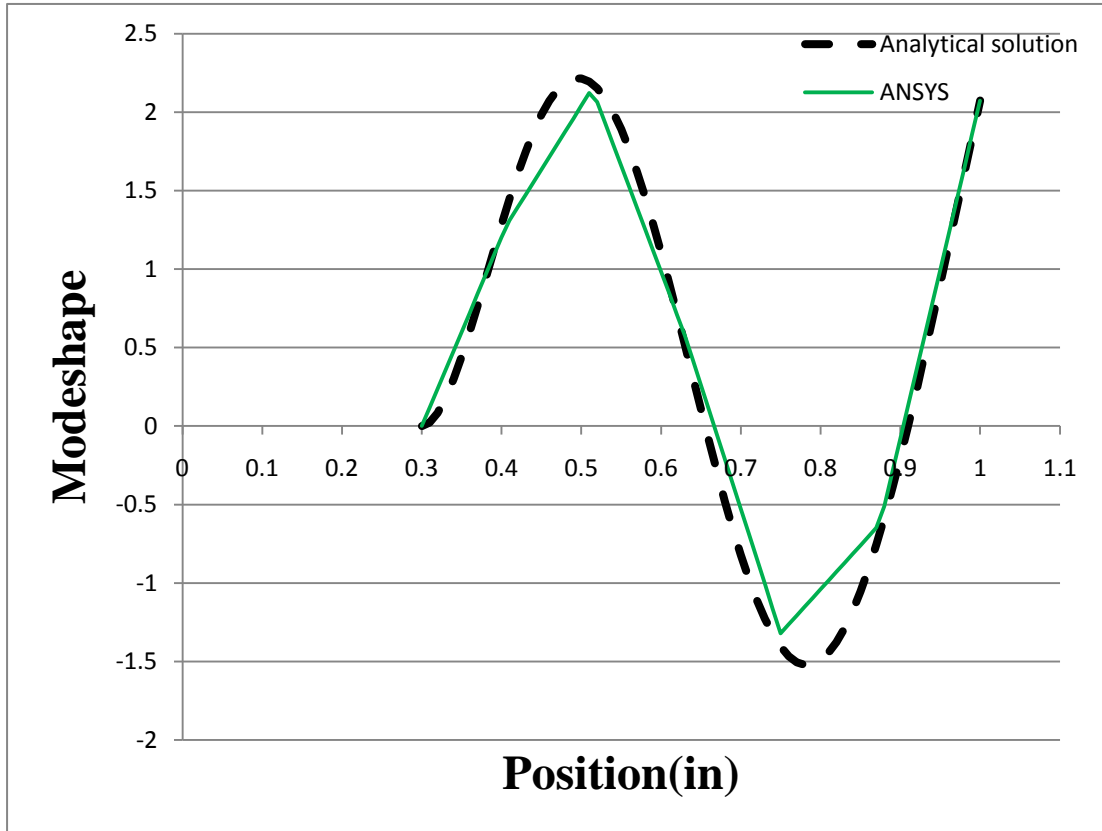


圖 6. $n=0$ 在第三模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態

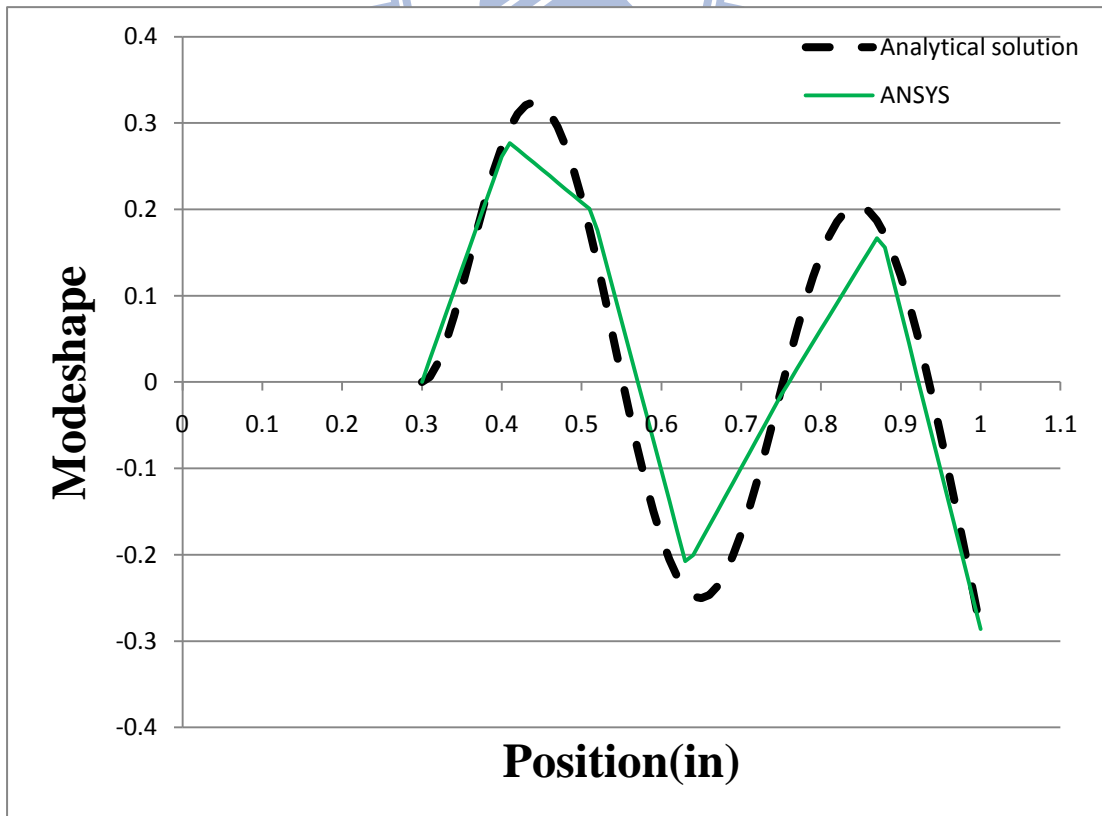


圖 7. $n=0$ 在第四模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態

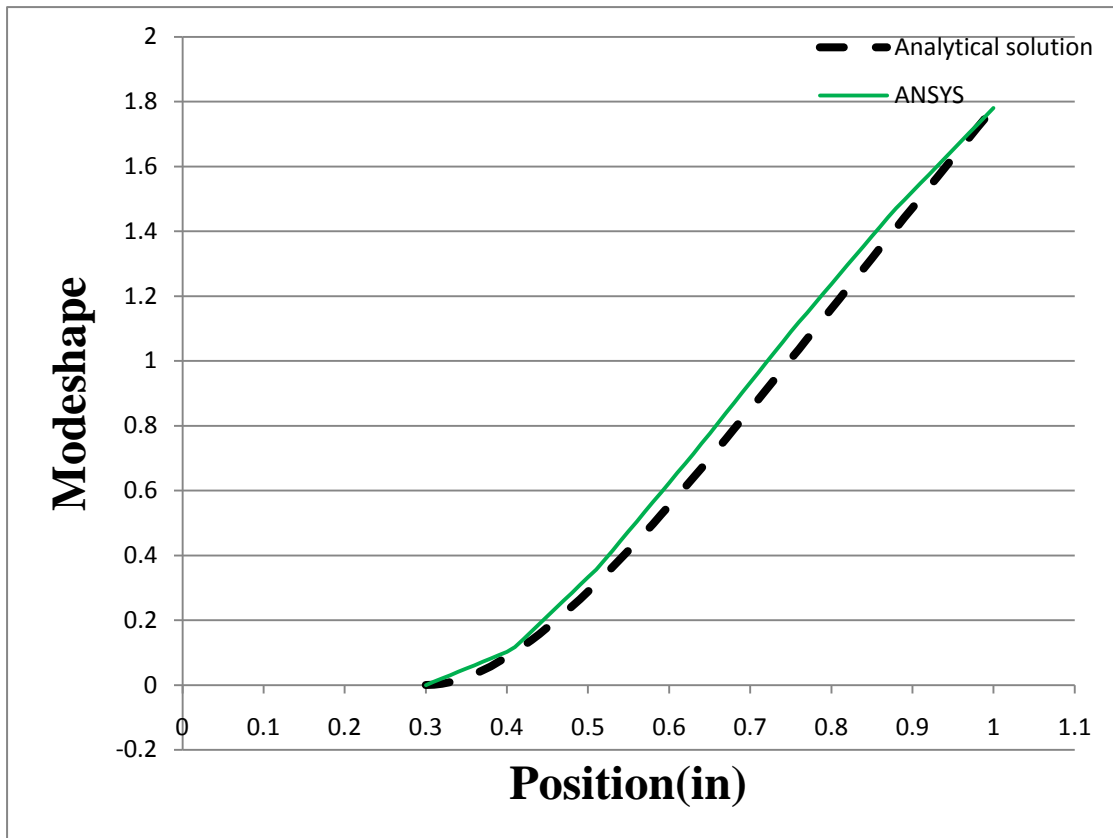


圖 8. $n=1$ 在第一模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態

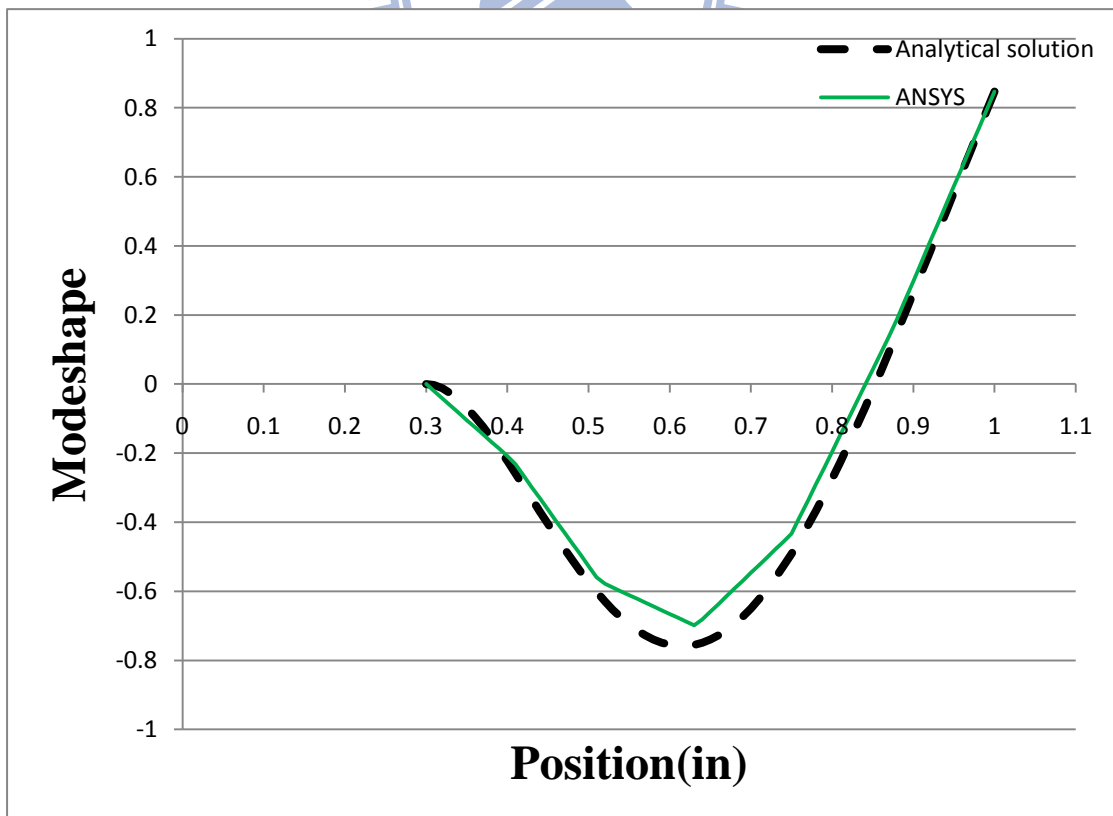


圖 9. $n=1$ 在第二模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態

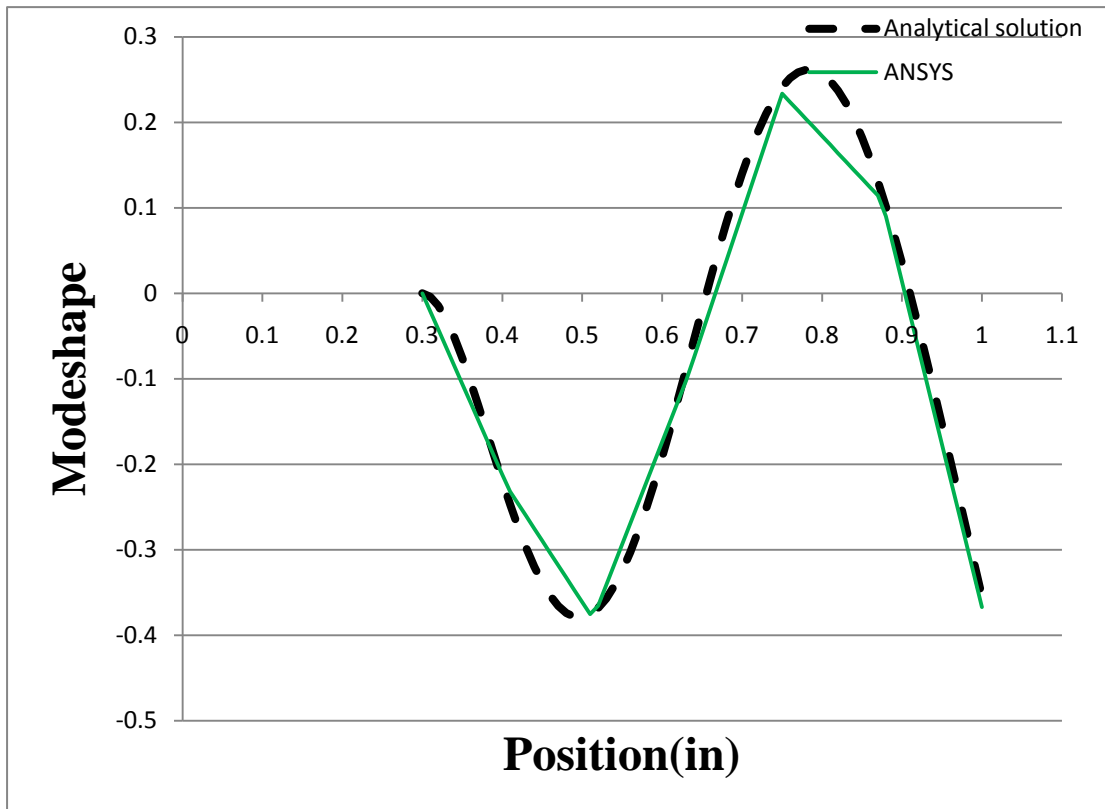


圖 10. $n=1$ 在第三模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態

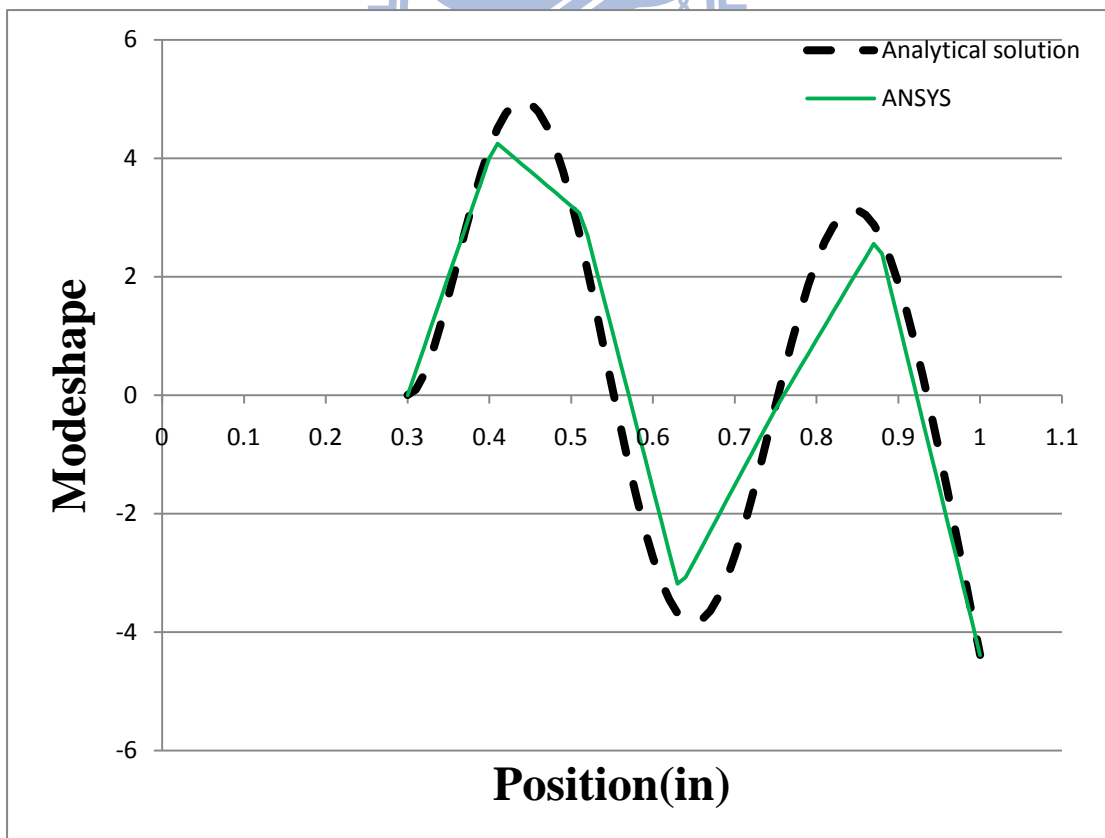


圖 11. $n=1$ 在第四模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態

3.5.2 情況二之振態(環狀板內板為自由端，外板為簡支承)

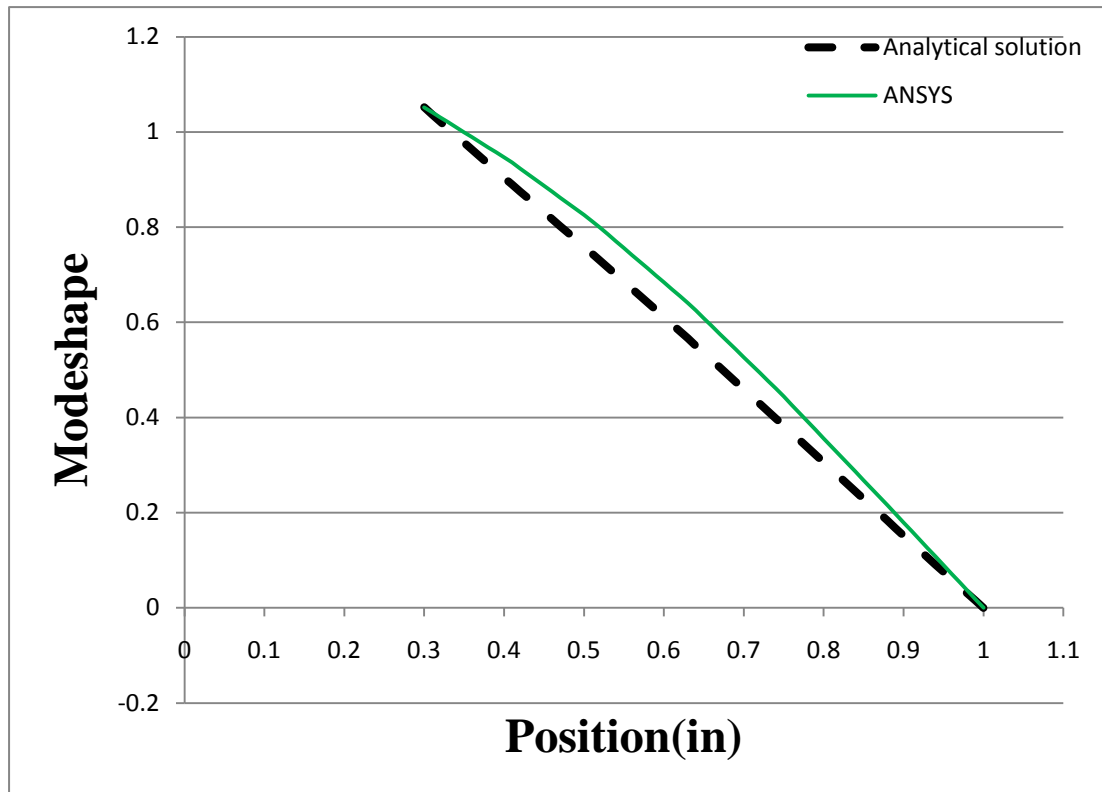


圖 12. $n=0$ 在第一模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態

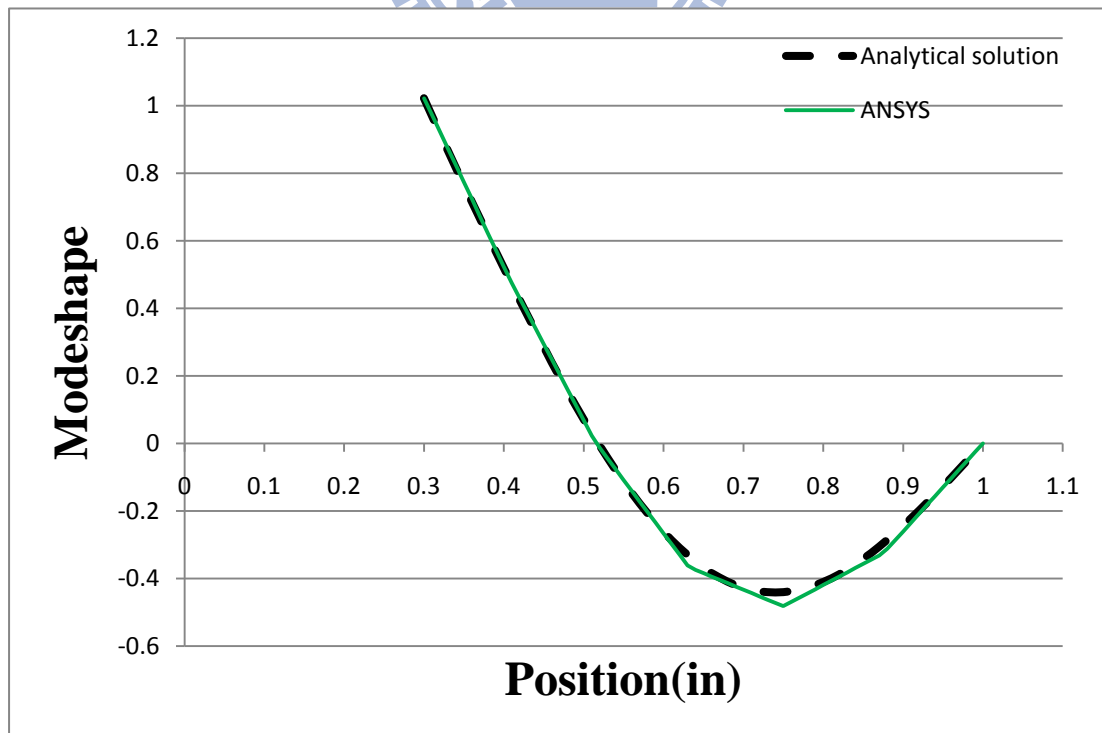


圖 13. $n=0$ 在第二模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態

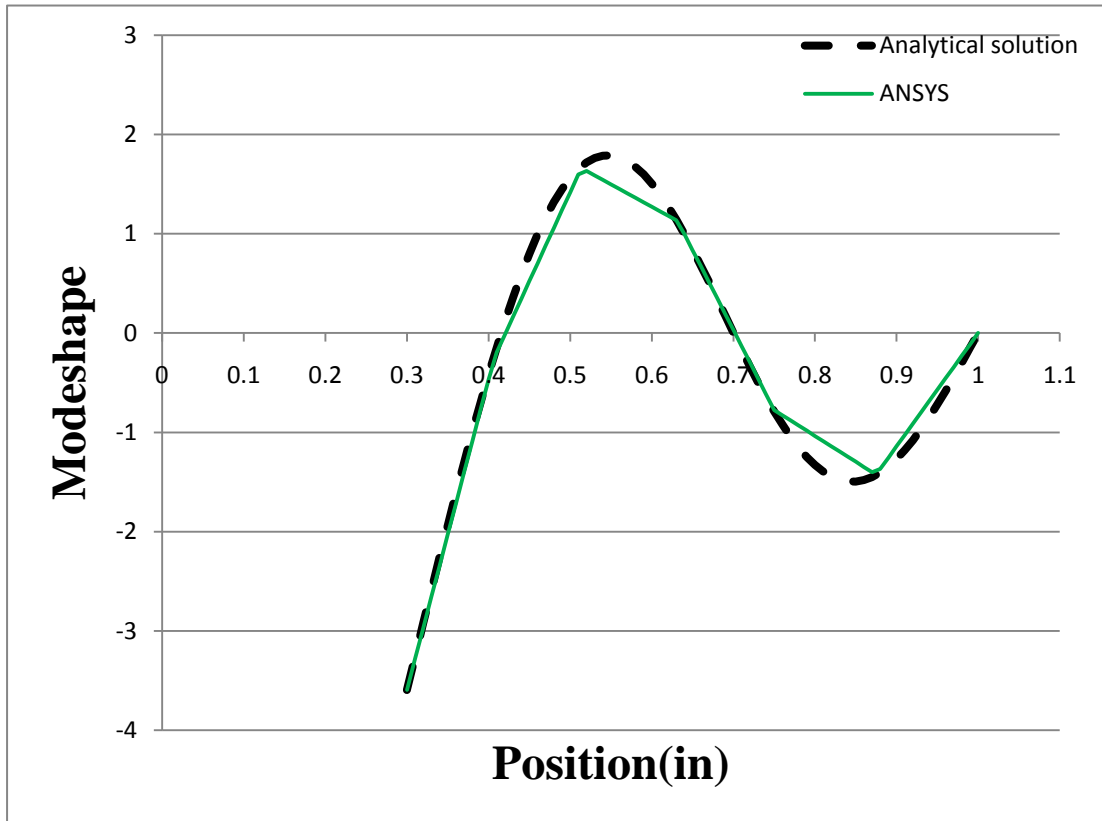


圖 14. $n=0$ 在第三模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態

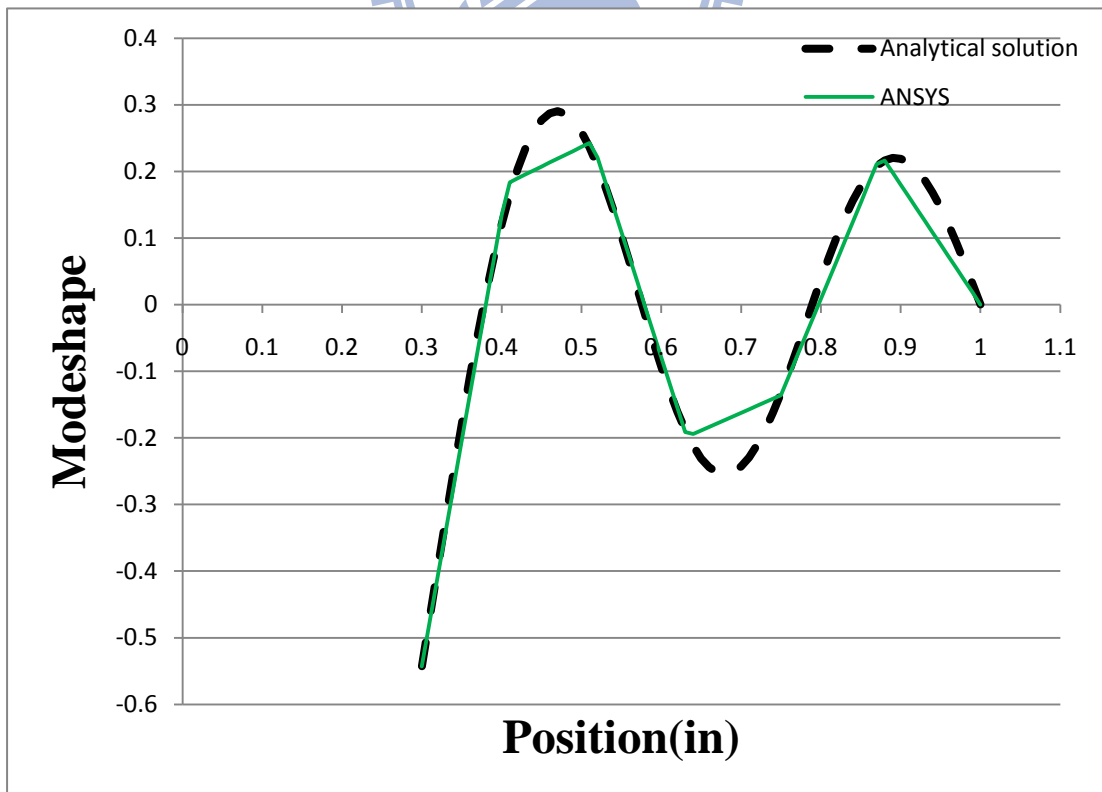


圖 15. $n=0$ 在第四模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態

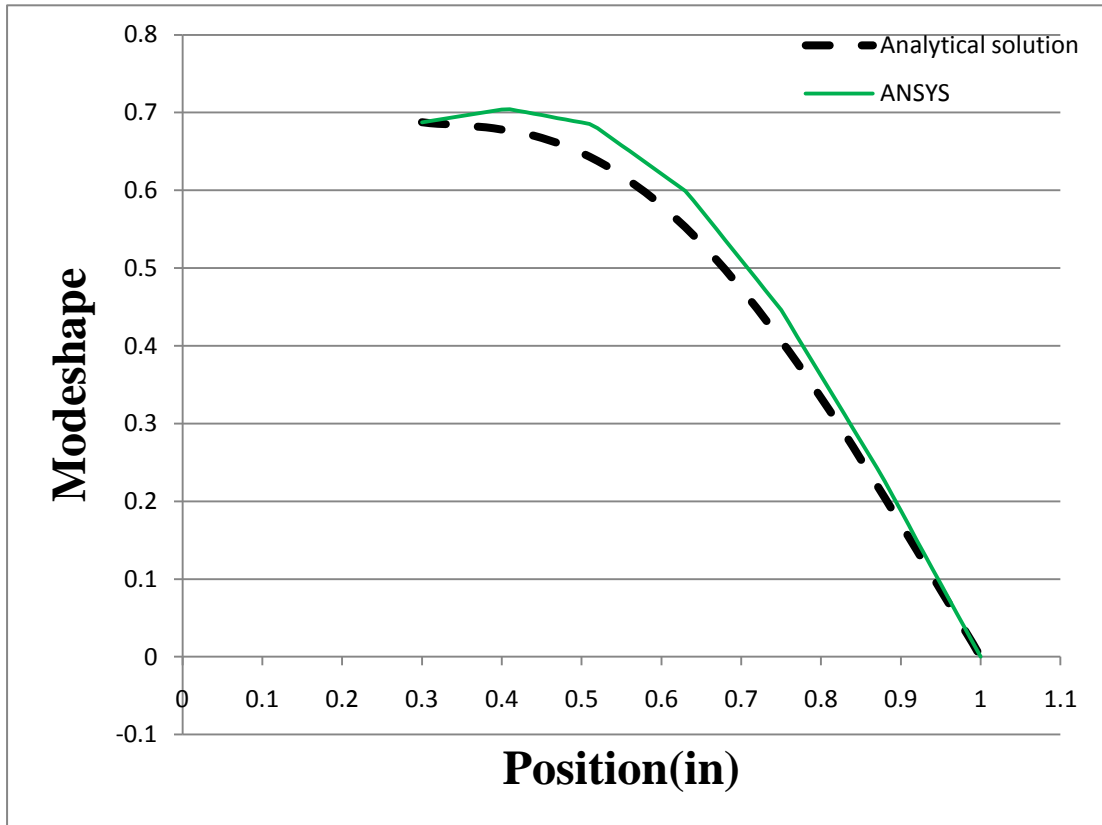


圖 16. $n=1$ 在第一模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態

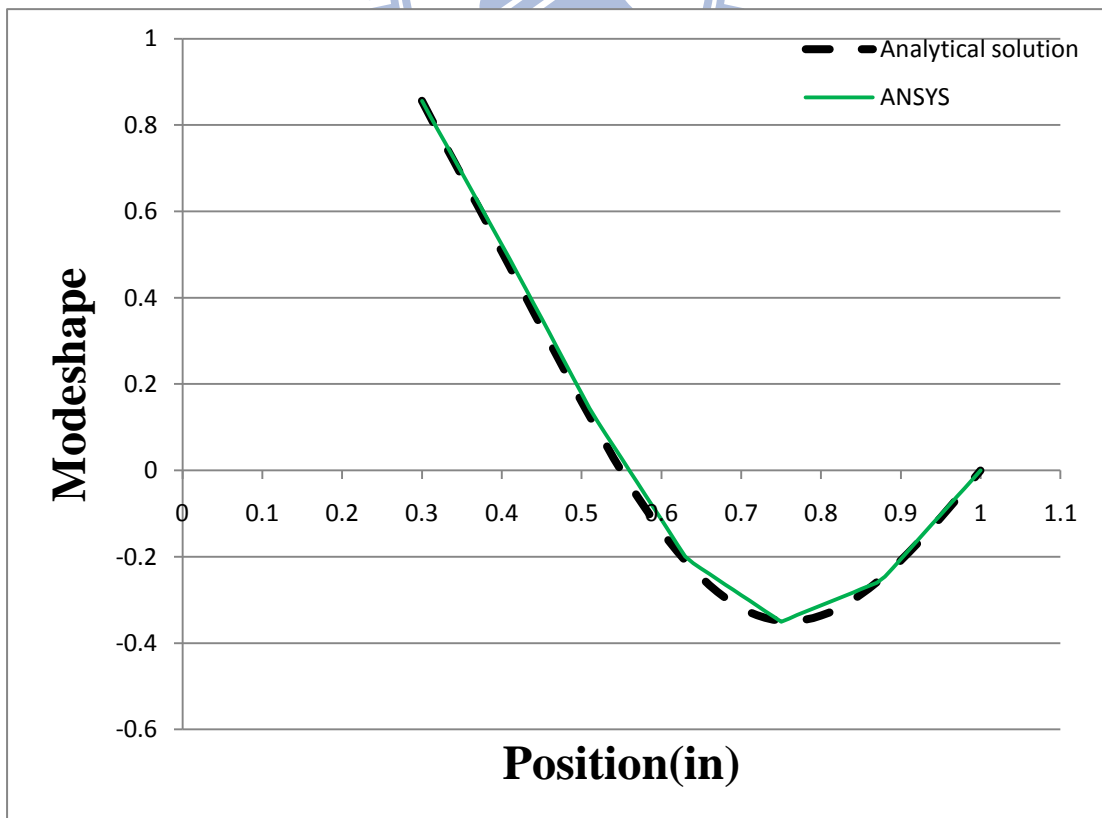


圖 17. $n=1$ 在第二模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態

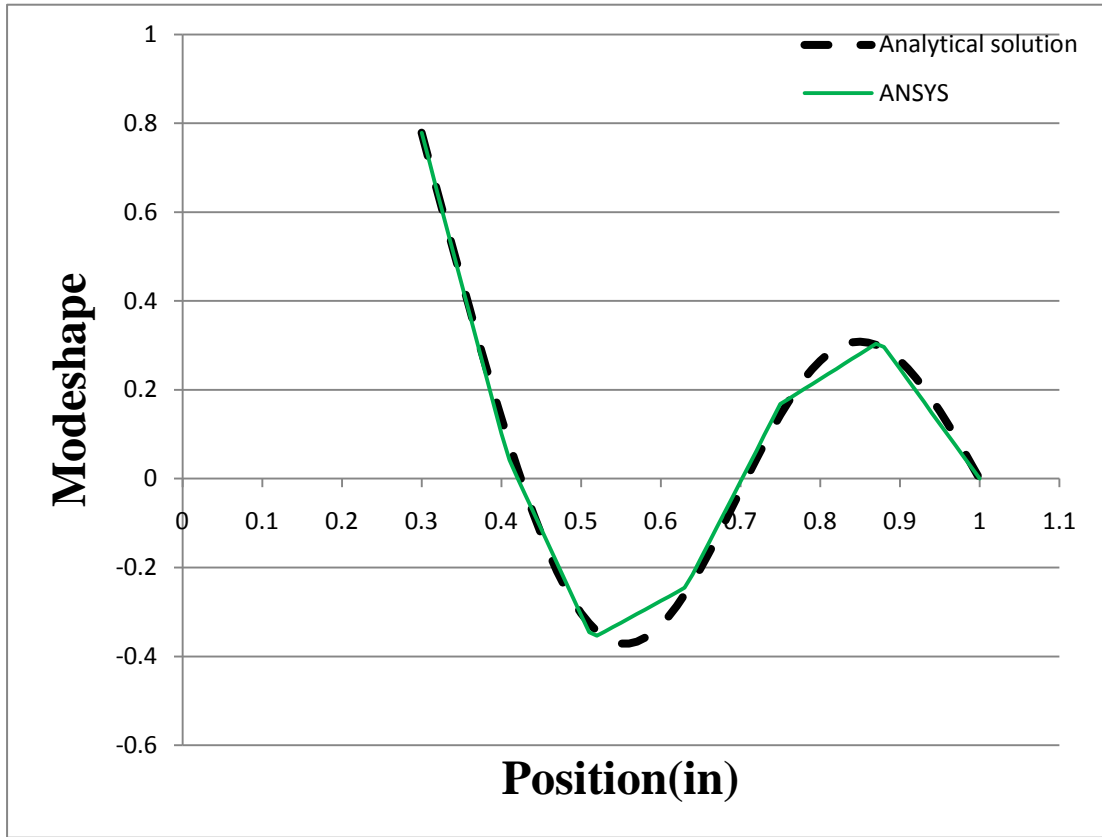


圖 18. $n=1$ 在第三模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態

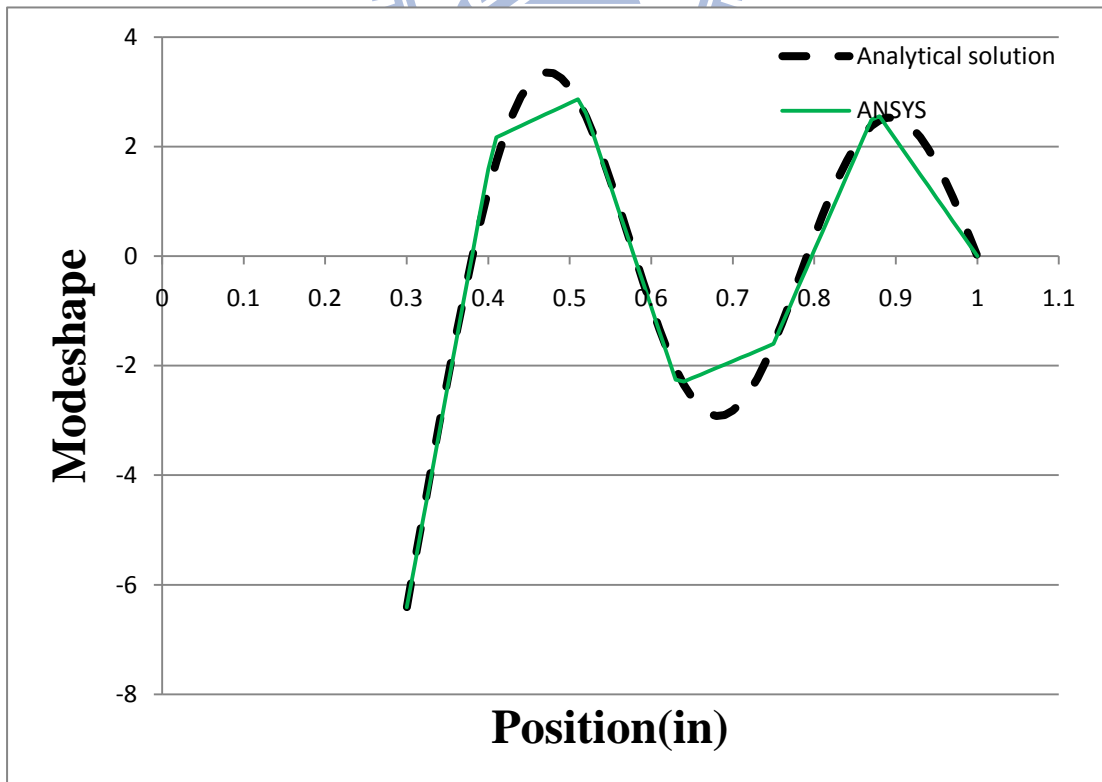


圖 19. $n=1$ 在第四模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態

3.5.3 情況三之振態(環狀板內板為固定端，外板為固定端)

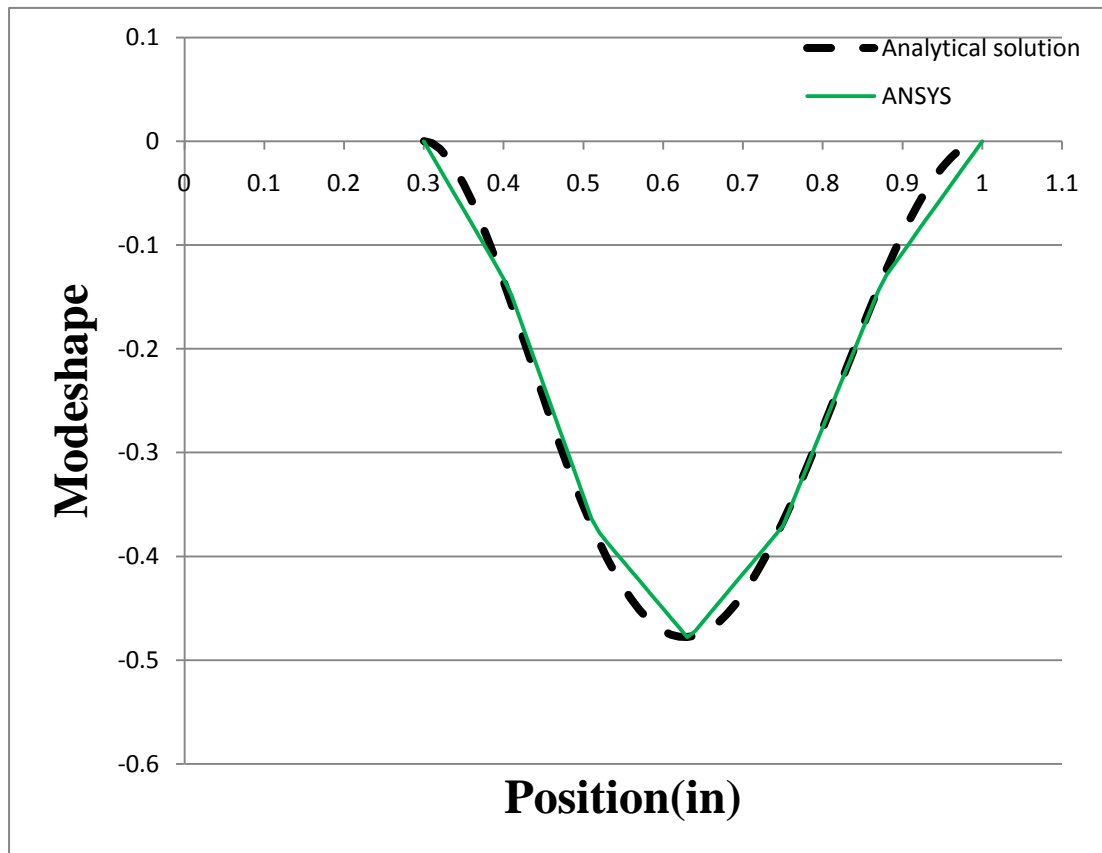


圖 20. $n=0$ 在第一模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態

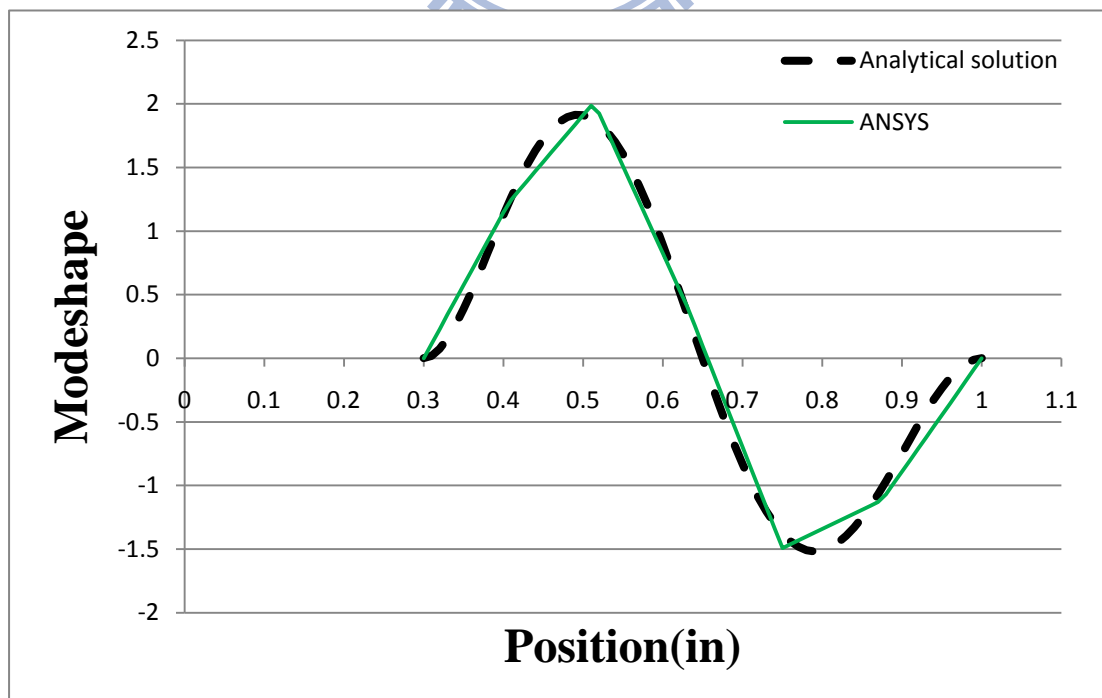


圖 21. $n=0$ 在第二模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態

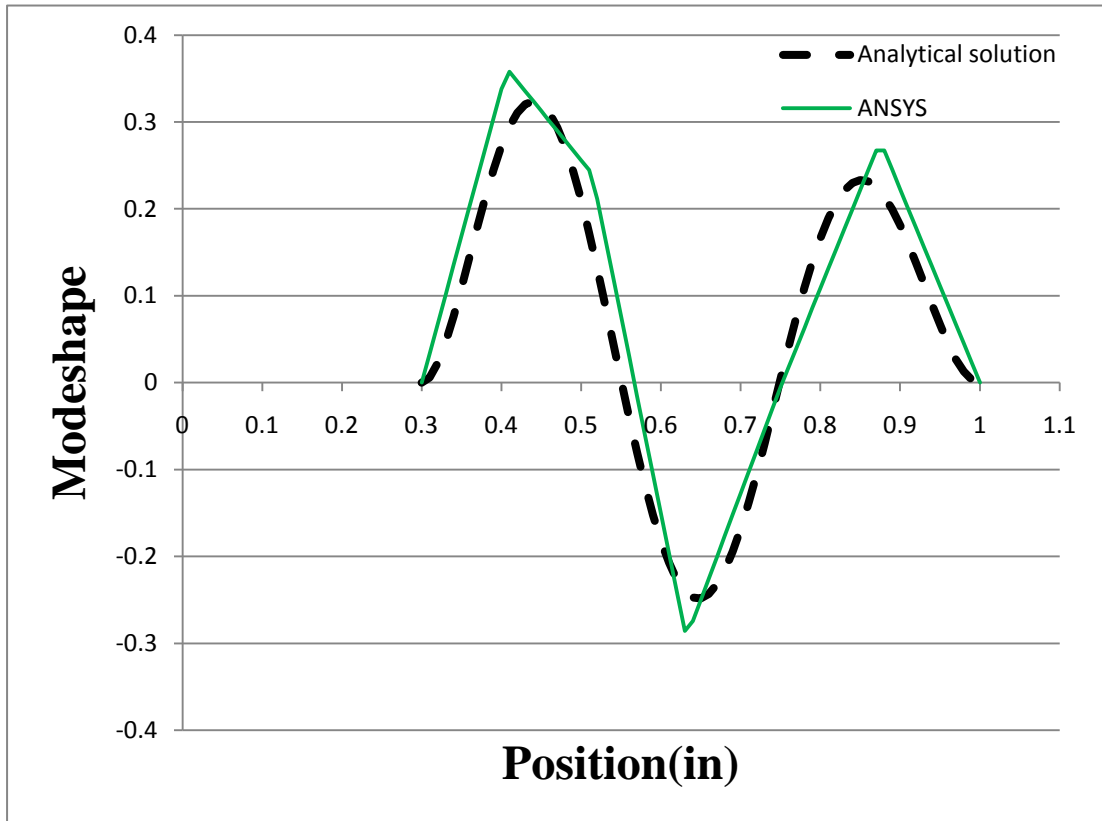


圖 22. $n=0$ 在第三模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態

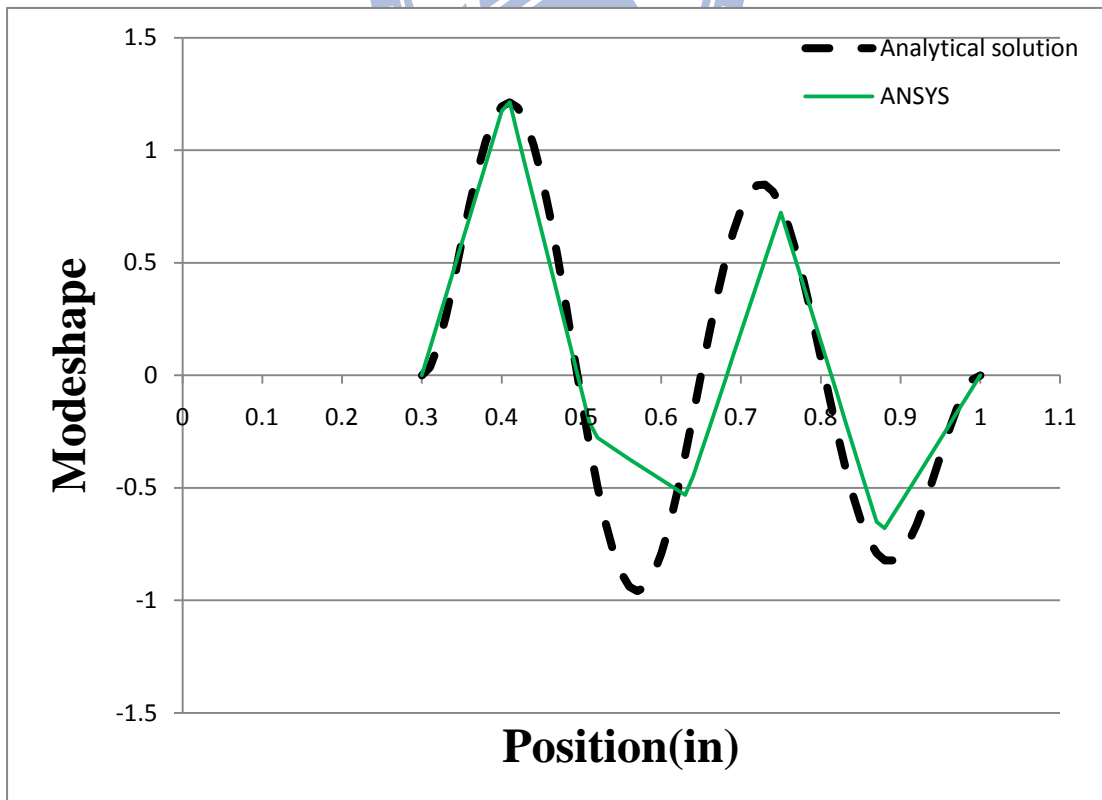


圖 23. $n=0$ 在第四模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態

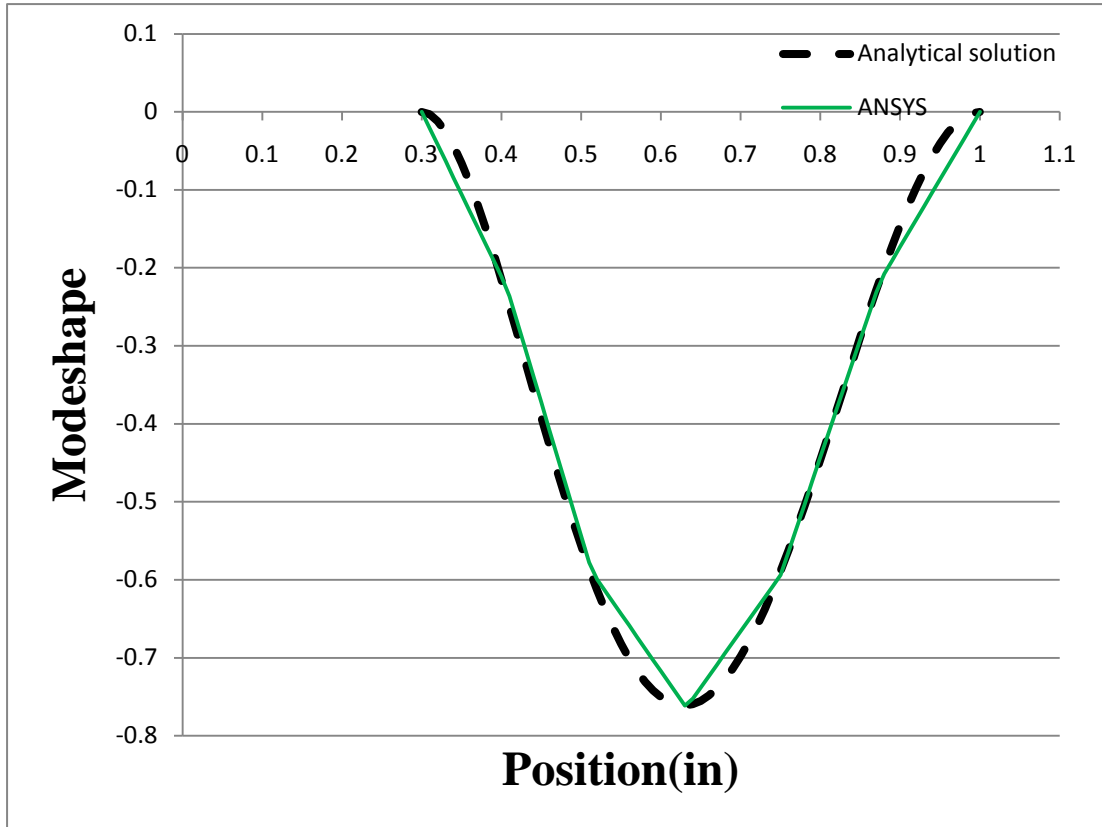


圖 24. $n=1$ 在第一模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態

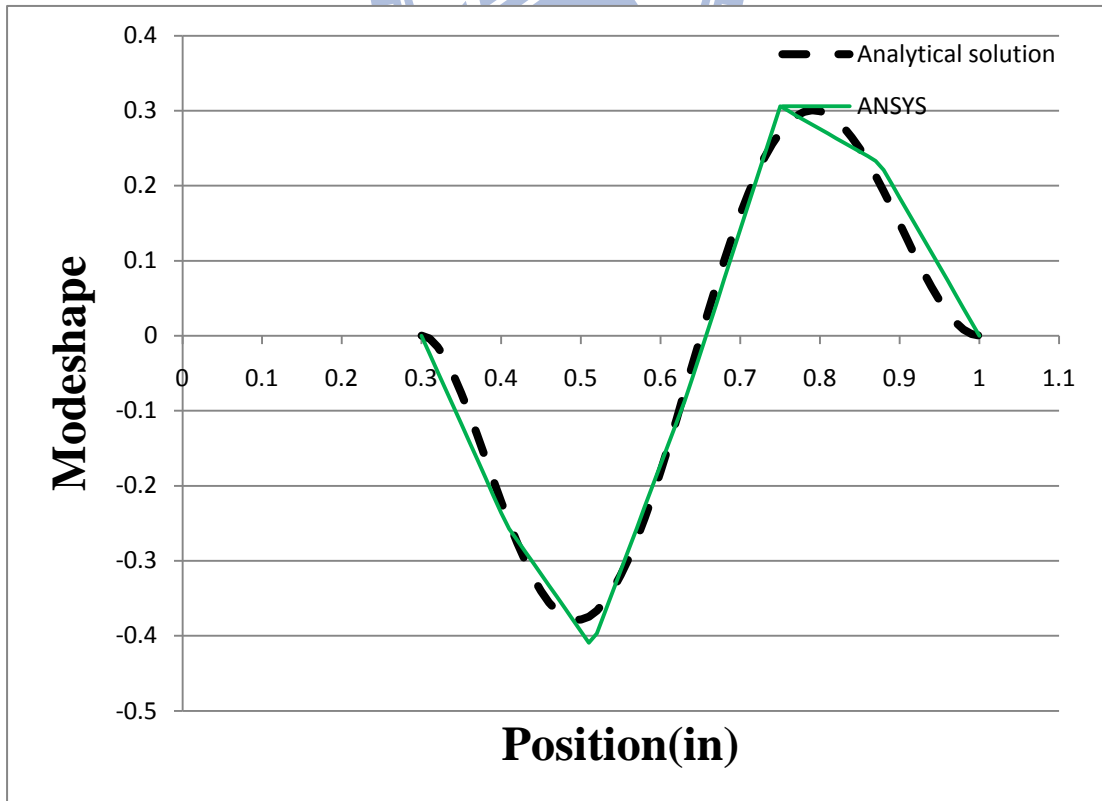


圖 25. $n=1$ 在第二模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態

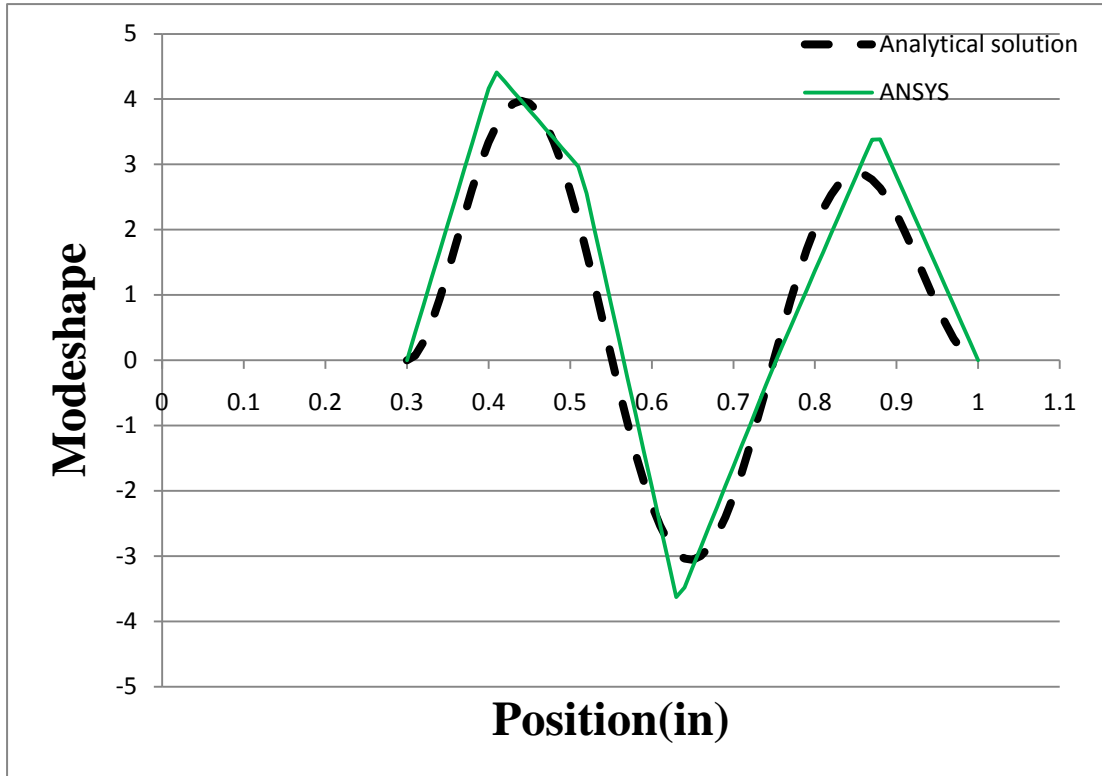


圖 26. $n=1$ 在第三模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態

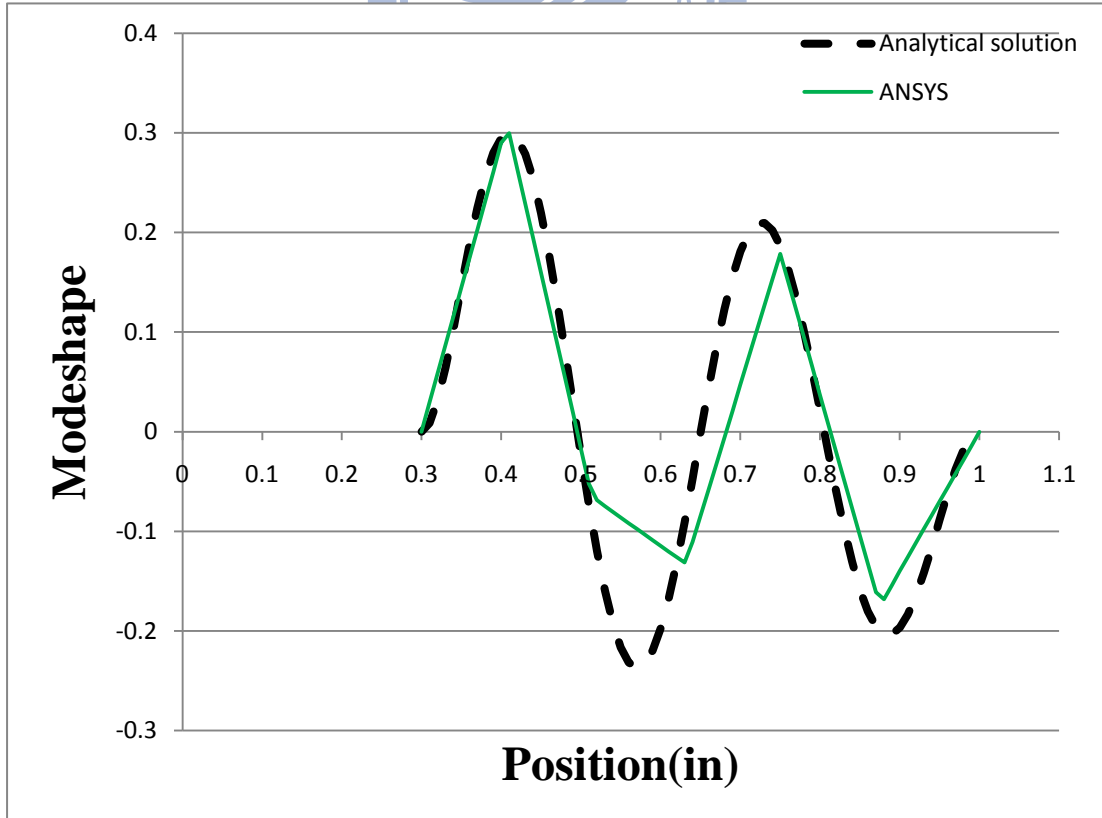


圖 27. $n=1$ 在第四模態下沿徑向 ANSYS 與本文推導結果振態

第四章 實例分析(變位)

4.1 前言

根據前述軸對稱彈性薄板置於彈性基礎上承受任意荷重，考慮慣性力之動力反應模式加以分析其變位。

4.2 ANSYS 數值結果與動力反應推導之比較

控制變因

環狀板，板內徑 $b = 0.3$ (in) 板外徑 $a = 1$ (in)

平板之卜森比(poisson ratio) $\nu = 0.3$

平板之彈性模數 $E = 1000$ (psi)

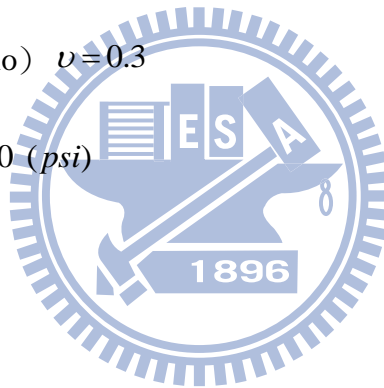
平板之密度 $\rho = 1$ (lb/in^3)

平板之厚度 $h = 0.02$ (in)

外力荷重 $p = 1$ (psi)

外力頻率 $\omega = 1 ; 5$ (rad/sec)

彈性係數 $K = 1$ (lb/in^3)



以下就四種荷重方式，三種邊界條件所加以探討其變位狀況與 ANSYS 結果相比較。當 $n=0$ 時所表示為沿軸對稱彈性薄板的角方向皆為均佈荷重；當 $n=1$ 時所表示為沿軸對稱彈性薄板的角方向為 cosine shape 荷重。此時圖上之 ANSYS 結果是與 $n=0$ 相比對。

4.2.1 均佈荷重

當外力荷重沿徑向方向為均佈荷重如圖 28 所示時：

1. 邊界條件情況一之變位如圖 29~30 所示，由圖中吾人可知板的變形形狀物理意義符合邊界條件所給定之，簡化後即與材料力學二維狀態內板邊緣固定外板邊緣自由相似，內板變位為零逐步至外板變位達最大值。由圖中吾人也可知由 ANSYS 求出之結果，與本文推導之 $n=0$ 接近等值。且當外力頻率 $\omega=1$ (rad/sec) 時有此情形，當頻率為 $\omega=5$ (rad/sec) 亦可觀察相似之結果。

2. 邊界條件情況二之變位如圖 31~32 所示，由圖中吾人可知板的變形形狀物理意義符合邊界條件所給定之，簡化後即與材料力學二維狀態內板邊緣自由外板邊緣固定相似，內板變位達最大值逐步至外板變位為零。由圖中吾人也可知由 ANSYS 求出之結果，與本文推導之 $n=0$ 接近等值。且當外力頻率 $\omega=1$ (rad/sec) 時有此情形，當頻率為 $\omega=5$ (rad/sec) 亦可觀察相似之結果。

3. 邊界條件情況三之變位如圖 33~34 所示，由圖中吾人可知板的變形形狀物理意義符合邊界條件所給定之，簡化後即與材料力學二維狀態內板邊緣固定外板邊緣固定相似，內板變位為零逐步至板中央處變位達最大值，再逐步至外板處變位為零。由圖中吾人也可知由 ANSYS 求出之結果，與本文推導之 $n=0$ 接近等值。且當外力頻率 $\omega=1$ (rad/sec) 時有此情形，當頻率為 $\omega=5$ (rad/sec) 亦可觀察相似之結果。

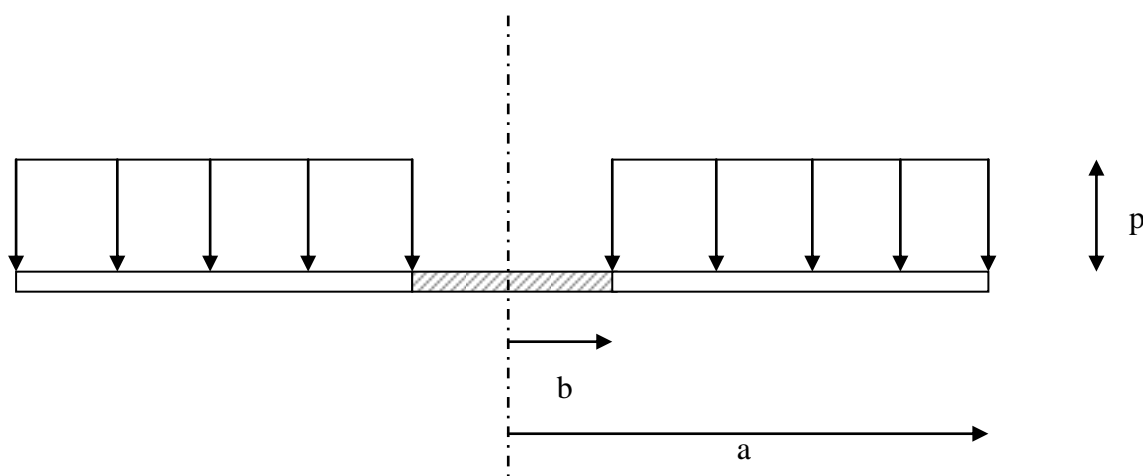


圖 28. 均佈荷重示意圖

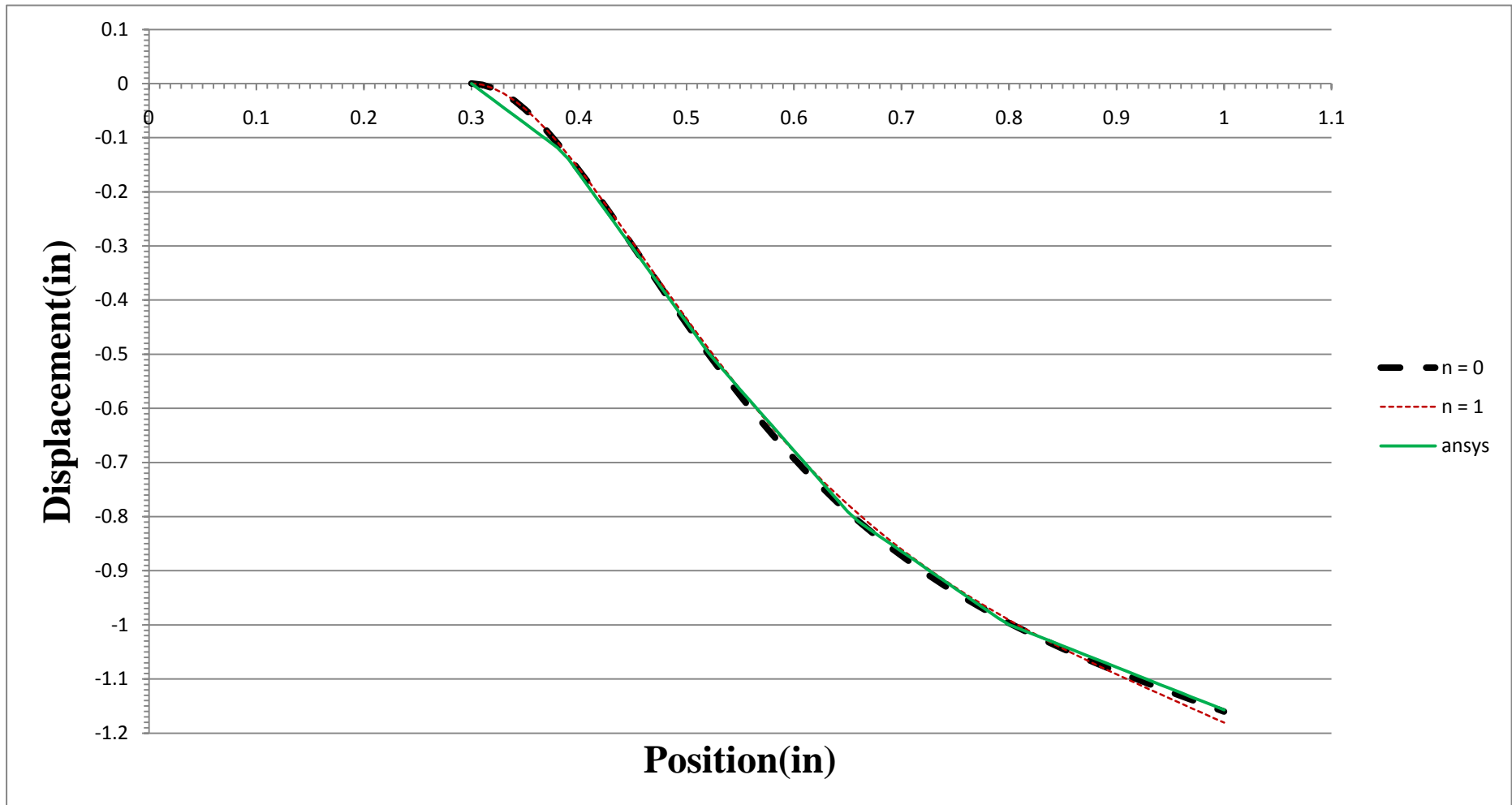


圖 29. 均佈荷重 ($\omega = 1 \text{ (rad/sec)}$) 下，沿徑向 ANSYS 與本文推導結果變位(情況一)

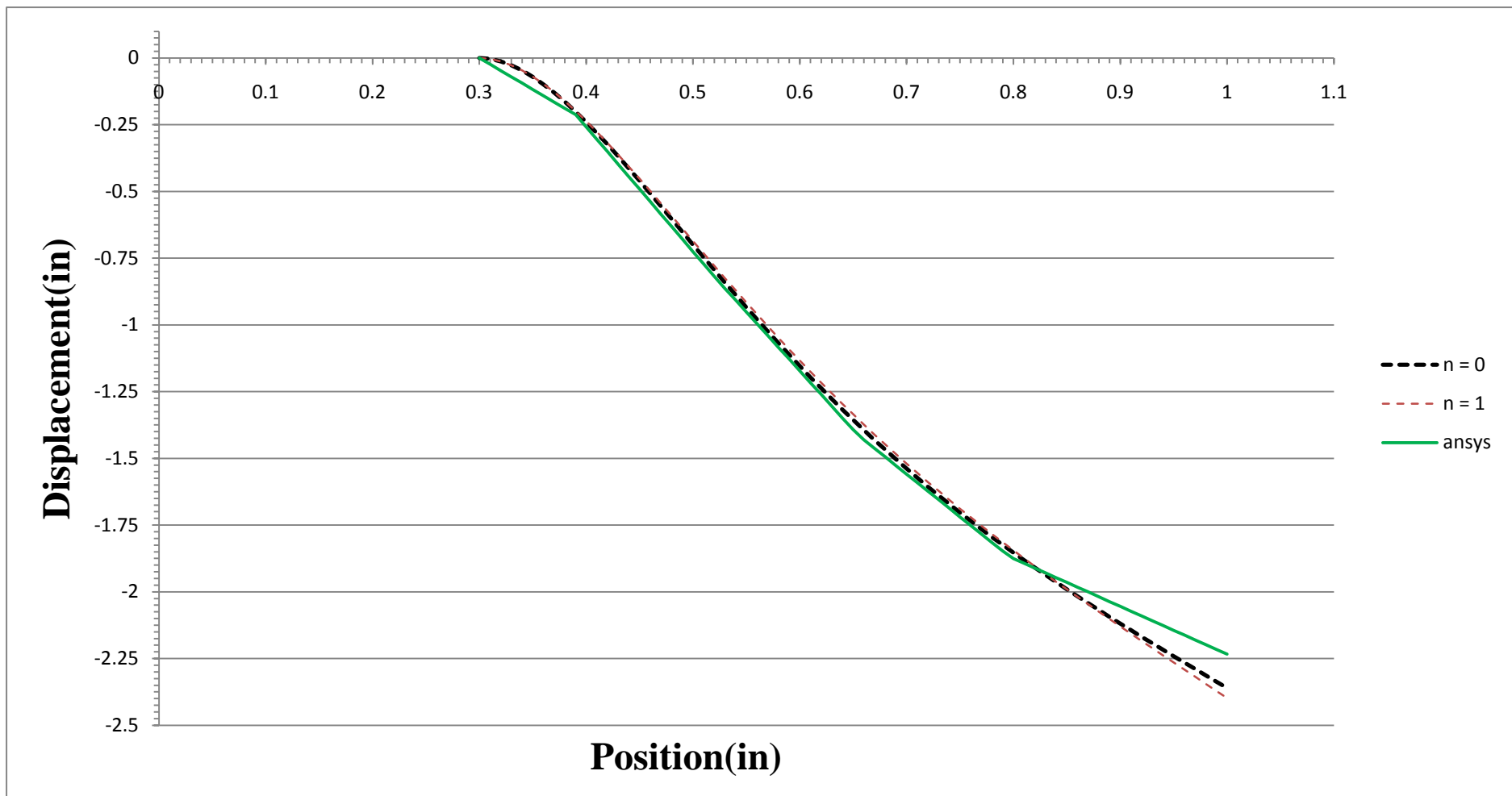


圖 30. 均佈荷重($\omega = 5 \text{ (rad/sec)}$)下，沿徑向 ANSYS 與本文推導結果變位(情況一)

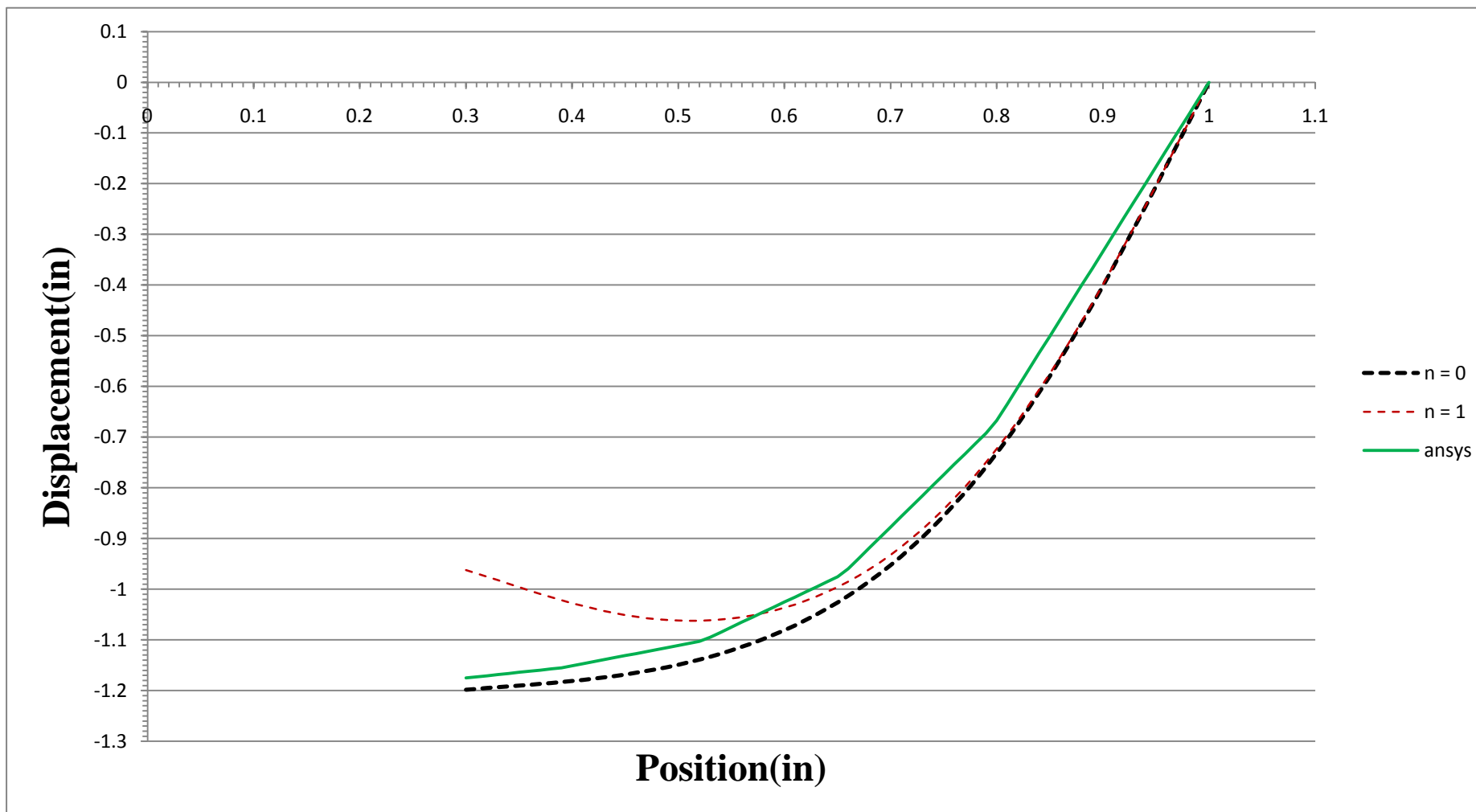


圖 31. 均佈荷重($\omega=1 (rad/sec)$)下，沿徑向 ANSYS 與本文推導結果變位(情況二)

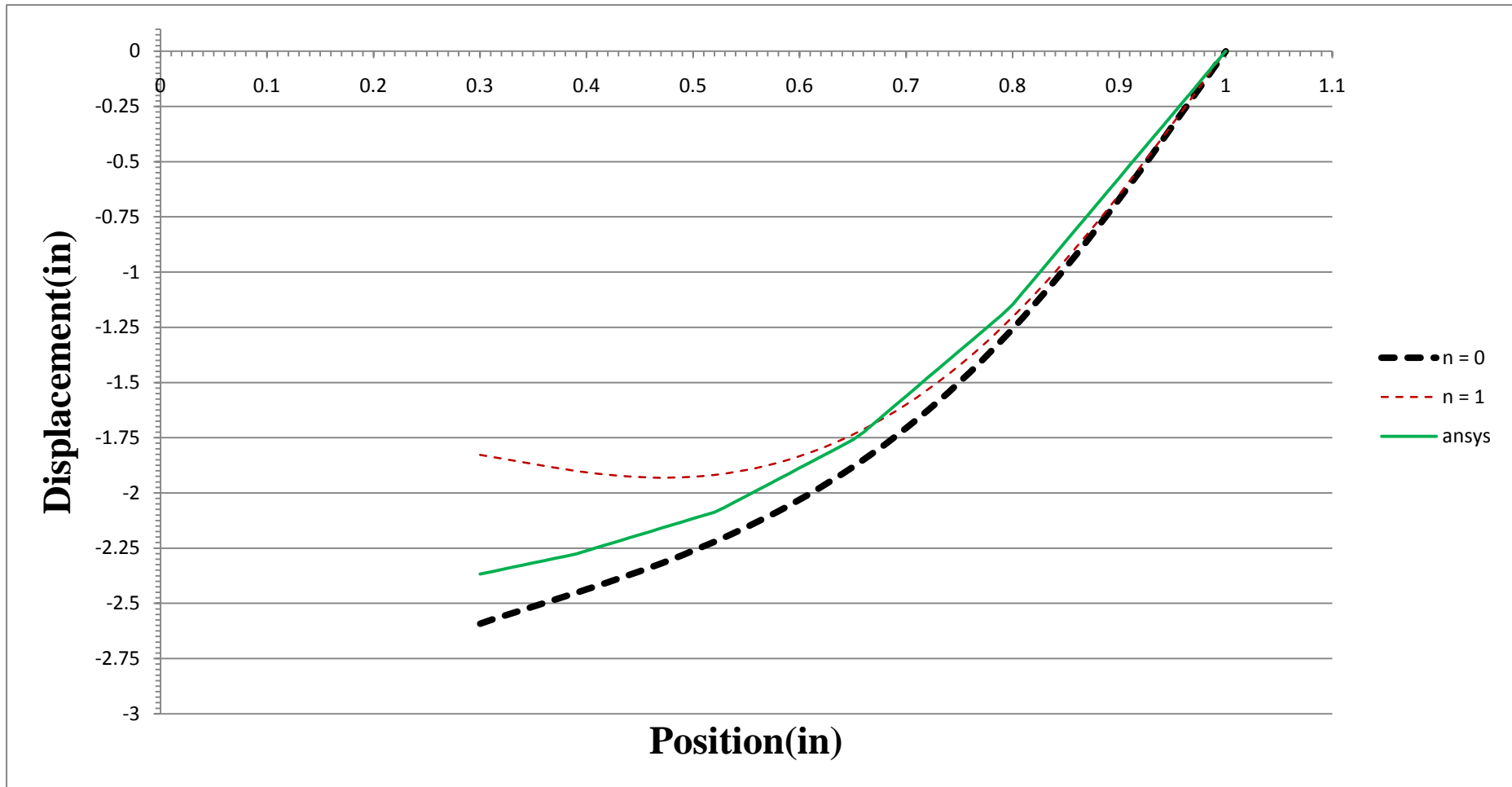


圖 32. 均佈荷重($\omega=5 \text{ (rad/sec)}$)下，沿徑向 ANSYS 與本文推導結果變位(情況二)

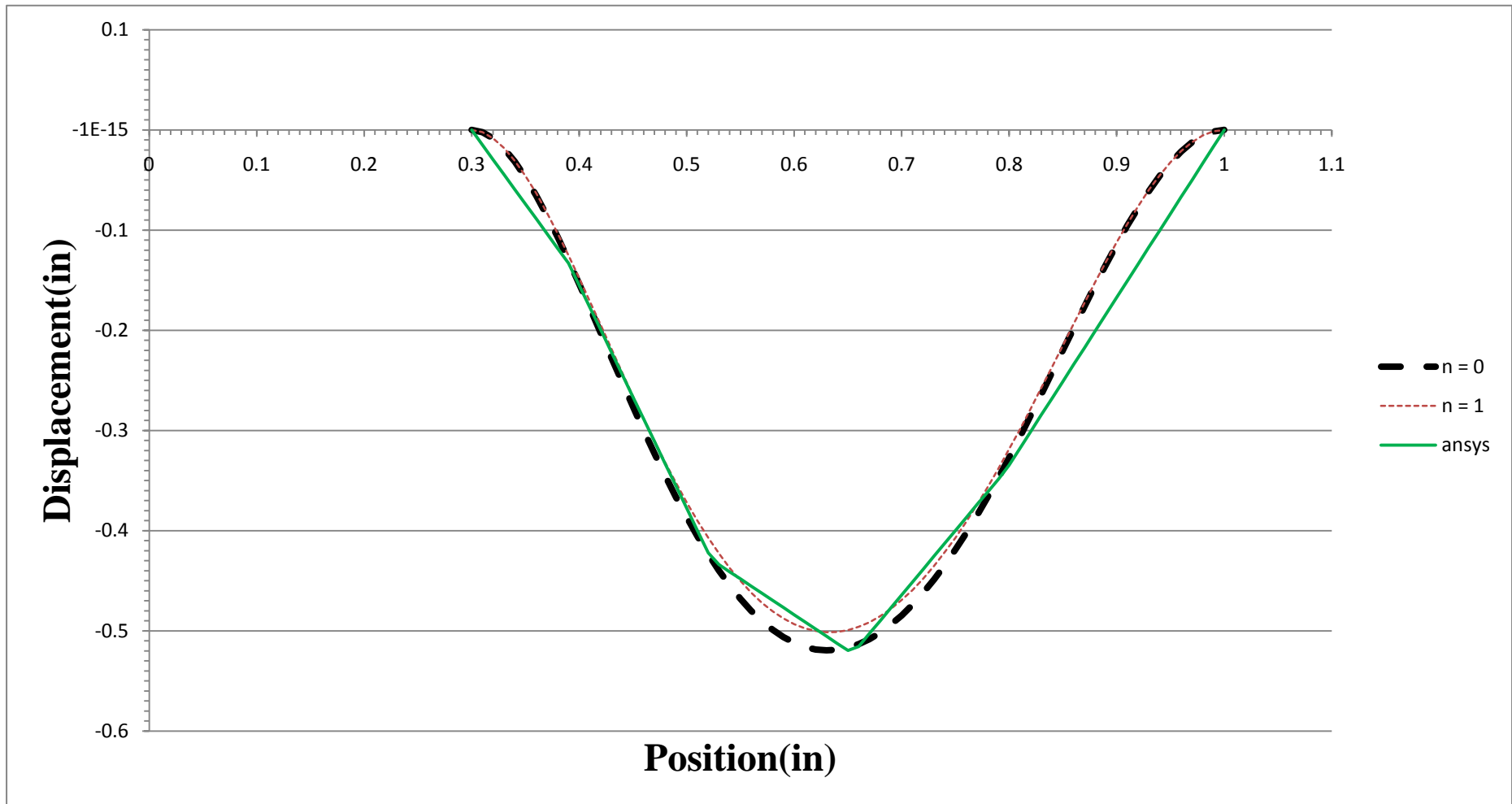


圖 33. 均佈荷重($\omega=1$ (rad/sec))下，沿徑向 ANSYS 與本文推導結果變位(情況三)

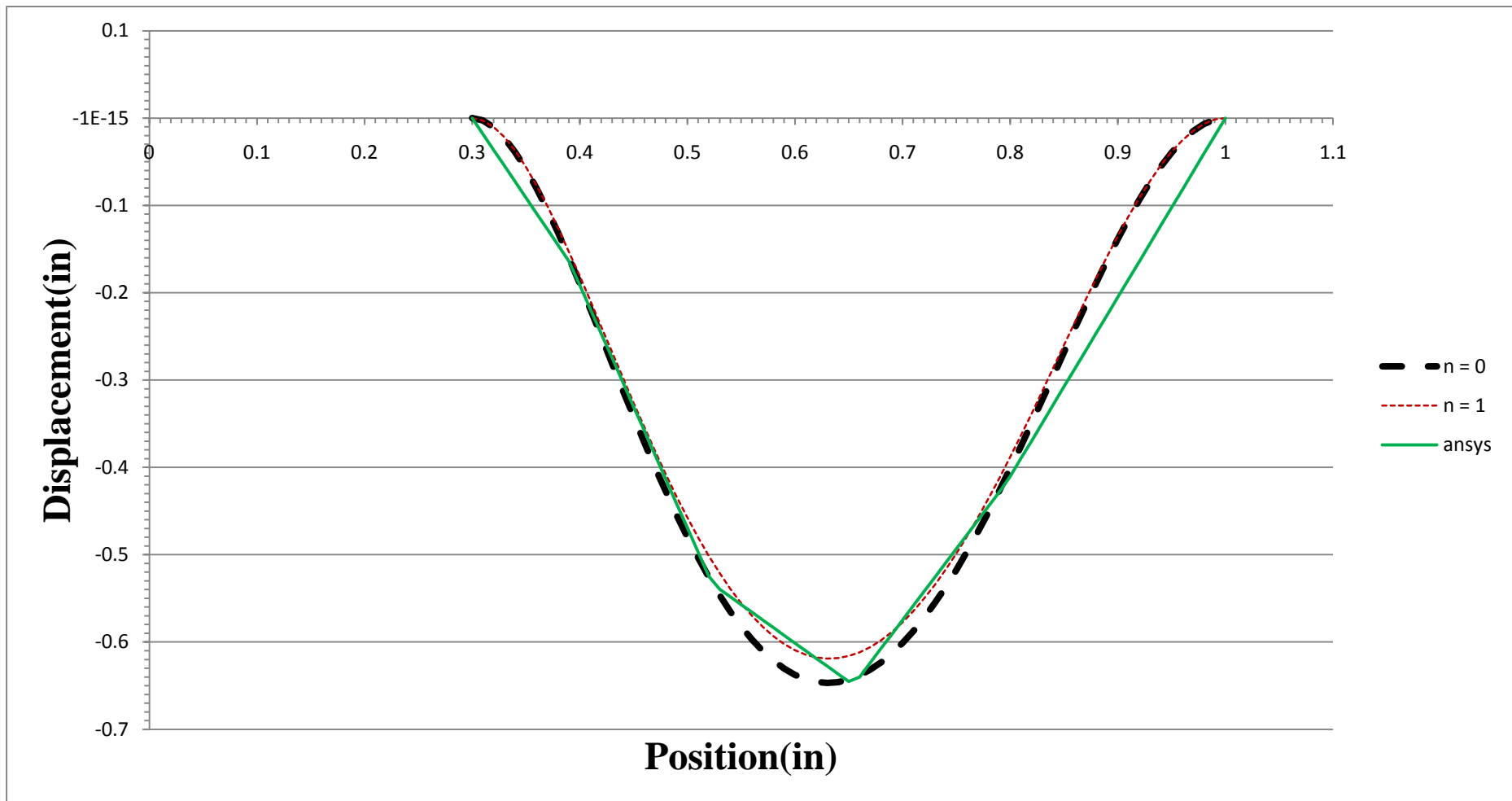


圖 34. 均佈荷重 ($\omega = 5 \text{ (rad/sec)}$) 下，沿徑向 ANSYS 與本文推導結果變位(情況三)

4.2.2 線性遞減荷重

當外力荷重沿徑向方向為線性遞減荷重如圖 35 所示時：

1. 邊界條件情況一之變位如圖 36~37 所示，由圖中吾人可知板的變形形狀物理意義符合邊界條件所給定之，簡化後即與材料力學二維狀態內板邊緣固定外板邊緣自由相似，但考慮荷重情況及彈性基礎，內板變位為零逐步至板中央處變位達最大值，再逐步遞減至外板。由圖中吾人也可知由 ANSYS 求出之結果，與本文推導之 $n=0$ 接近等值。且當外力頻率 $\omega=1$ (rad/sec) 時有此情形，當頻率為 $\omega=5$ (rad/sec) 可觀察相似之結果。

2. 邊界條件情況二之變位如圖 38~39 所示，由圖中吾人可知板的變形形狀物理意義符合邊界條件所給定之，簡化後即與材料力學二維狀態內板邊緣自由外板邊緣固定相似，雖考慮荷重情況及彈性基礎，結果仍是內板變位達最大值逐步至外板變位為零。由圖中吾人也可知由 ANSYS 求出之結果，與本文推導之 $n=0$ 接近等值。且當外力頻率 $\omega=1$ (rad/sec) 時有此情形，當頻率為 $\omega=5$ (rad/sec) 亦可觀察相似之結果。

3. 邊界條件情況三之變位如圖 40~41 所示，由圖中吾人可知板的變形形狀物理意義符合邊界條件所給定之，簡化後即與材料力學二維狀態內板邊緣固定外板邊緣固定相似，雖考慮荷重情況及彈性基礎，結果仍是內板變位為零逐步至板中央處變位達最大值，再逐步至外板處變位為零。由圖中吾人也可知由 ANSYS 求出之結果，與本文推導之 $n=0$ 接近等值。且當外力頻率 $\omega=1$ (rad/sec) 時有此情形，當頻率為 $\omega=5$ (rad/sec) 亦可觀察相似之結果。

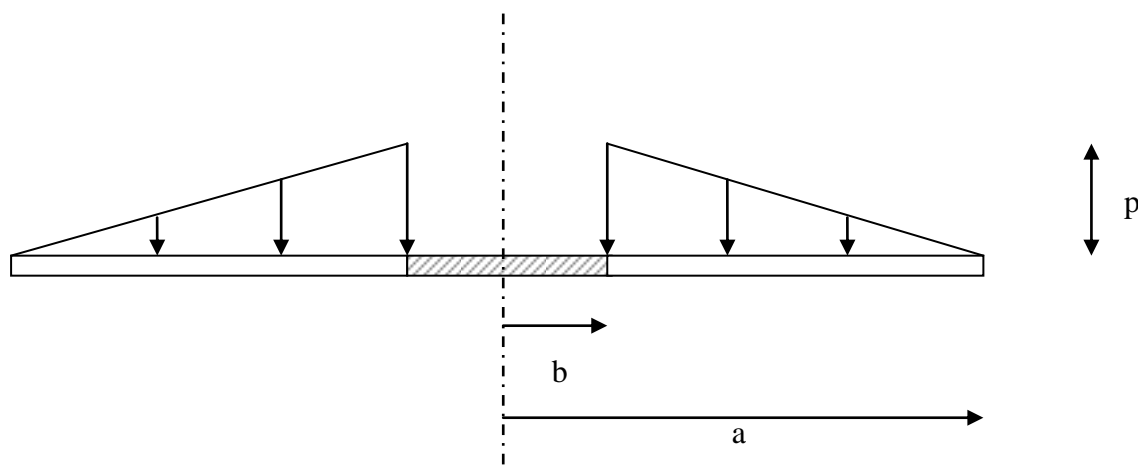


圖 35. 線性遞減荷重示意圖

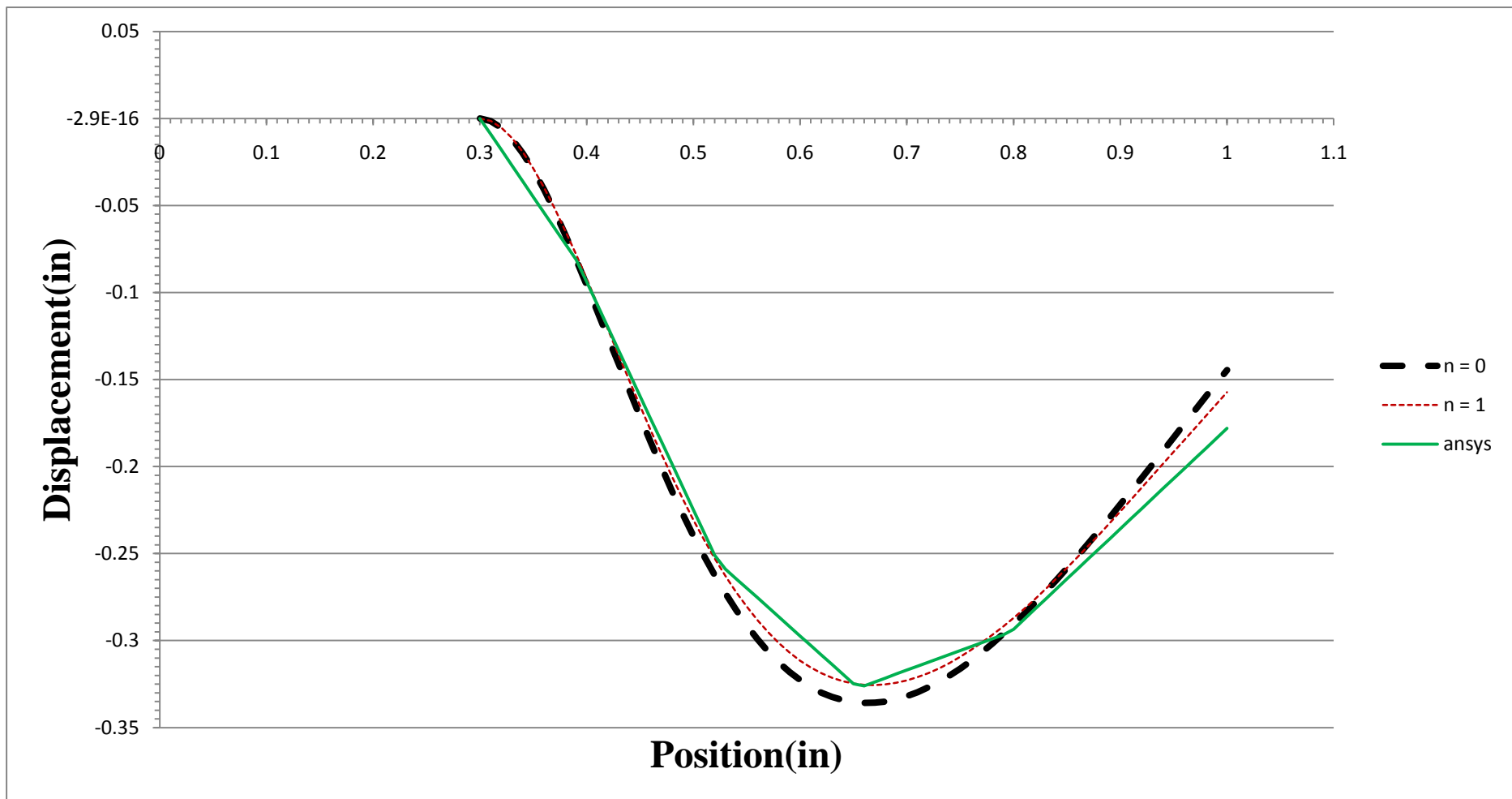


圖 36. 線性遞減荷重 ($\omega = 1 \text{ (rad/sec)}$) 下，沿徑向 ANSYS 與本文推導結果變位(情況一)

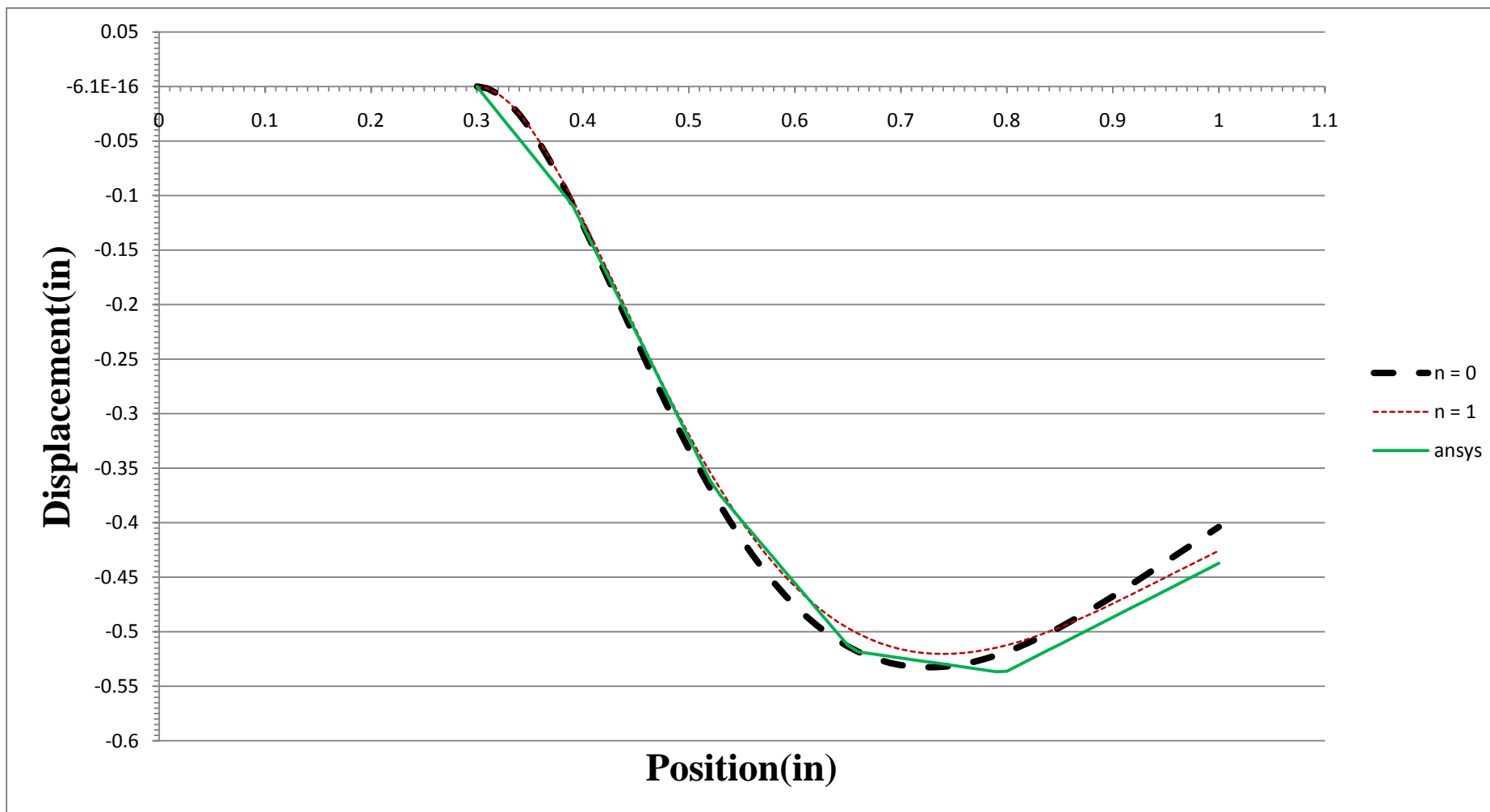


圖 37. 線性遞減荷重 ($\omega = 5 \text{ (rad/sec)}$) 下，沿徑向 ANSYS 與本文推導結果變位(情況一)

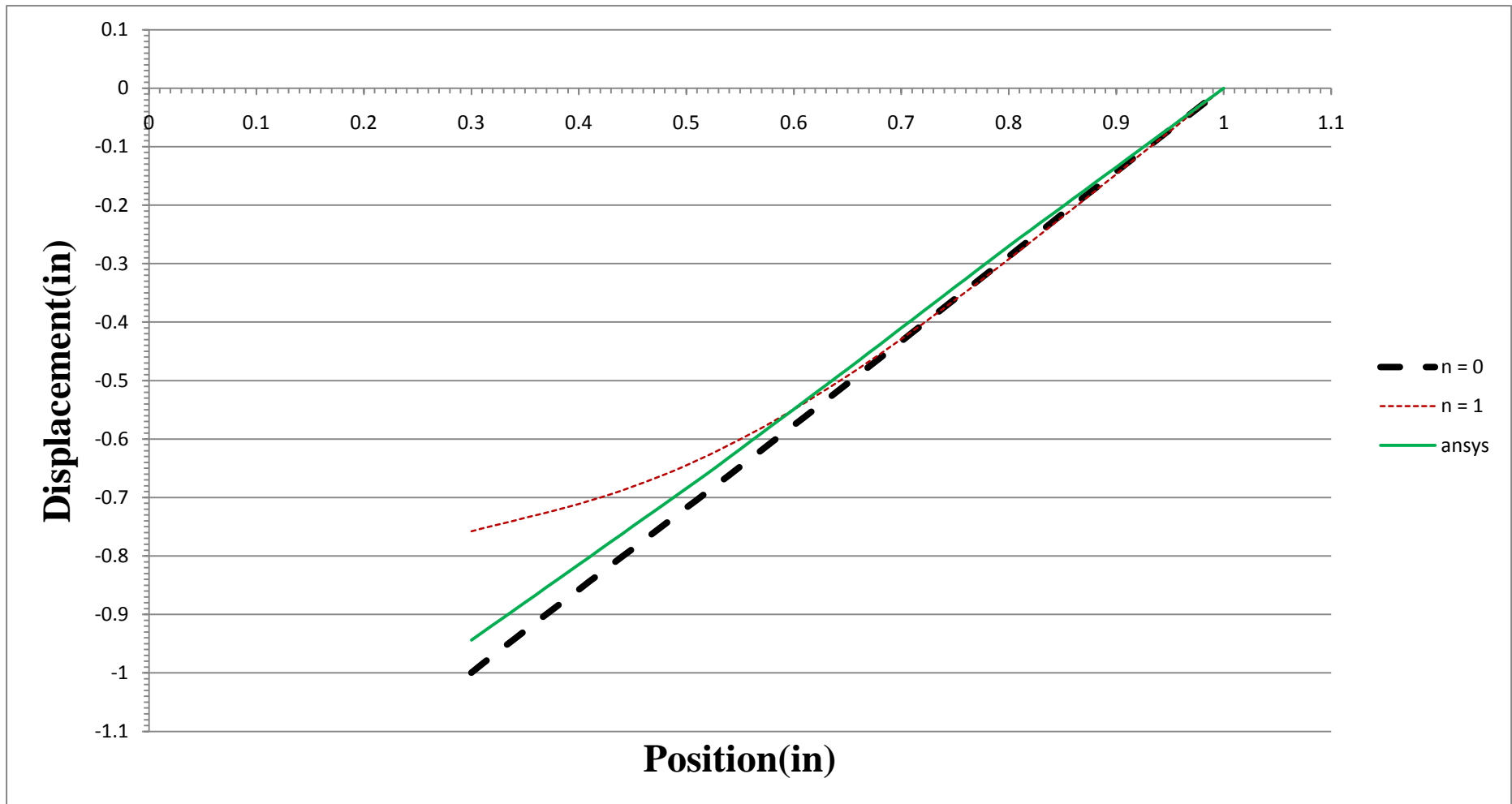


圖 38. 線性遞減荷重($\omega=1 (rad/sec)$)下，沿徑向 ANSYS 與本文推導結果變位(情況二)

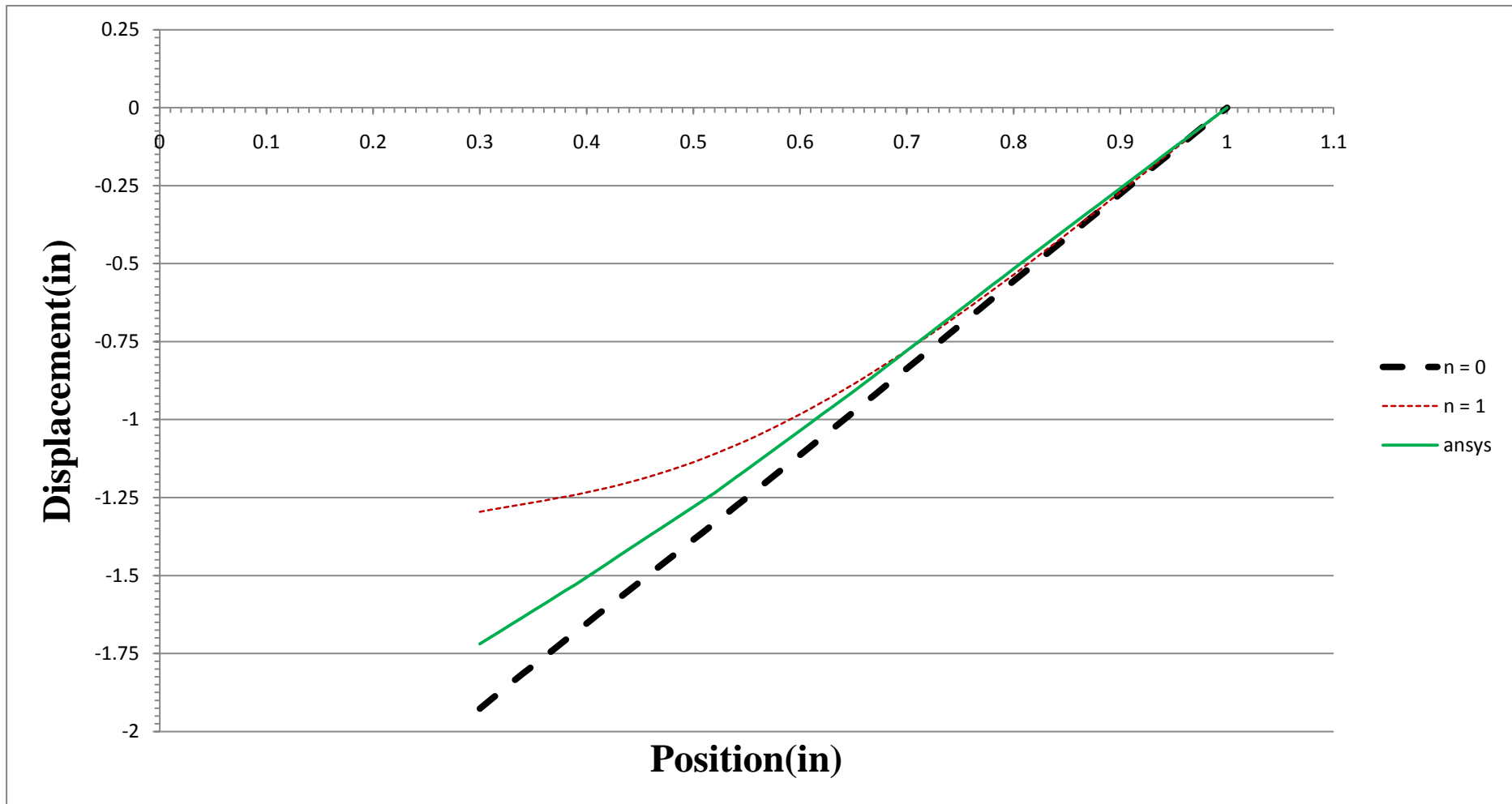


圖 39. 線性遞減荷重($\omega = 5 \text{ (rad/sec)}$)下，沿徑向 ANSYS 與本文推導結果變位(情況二)

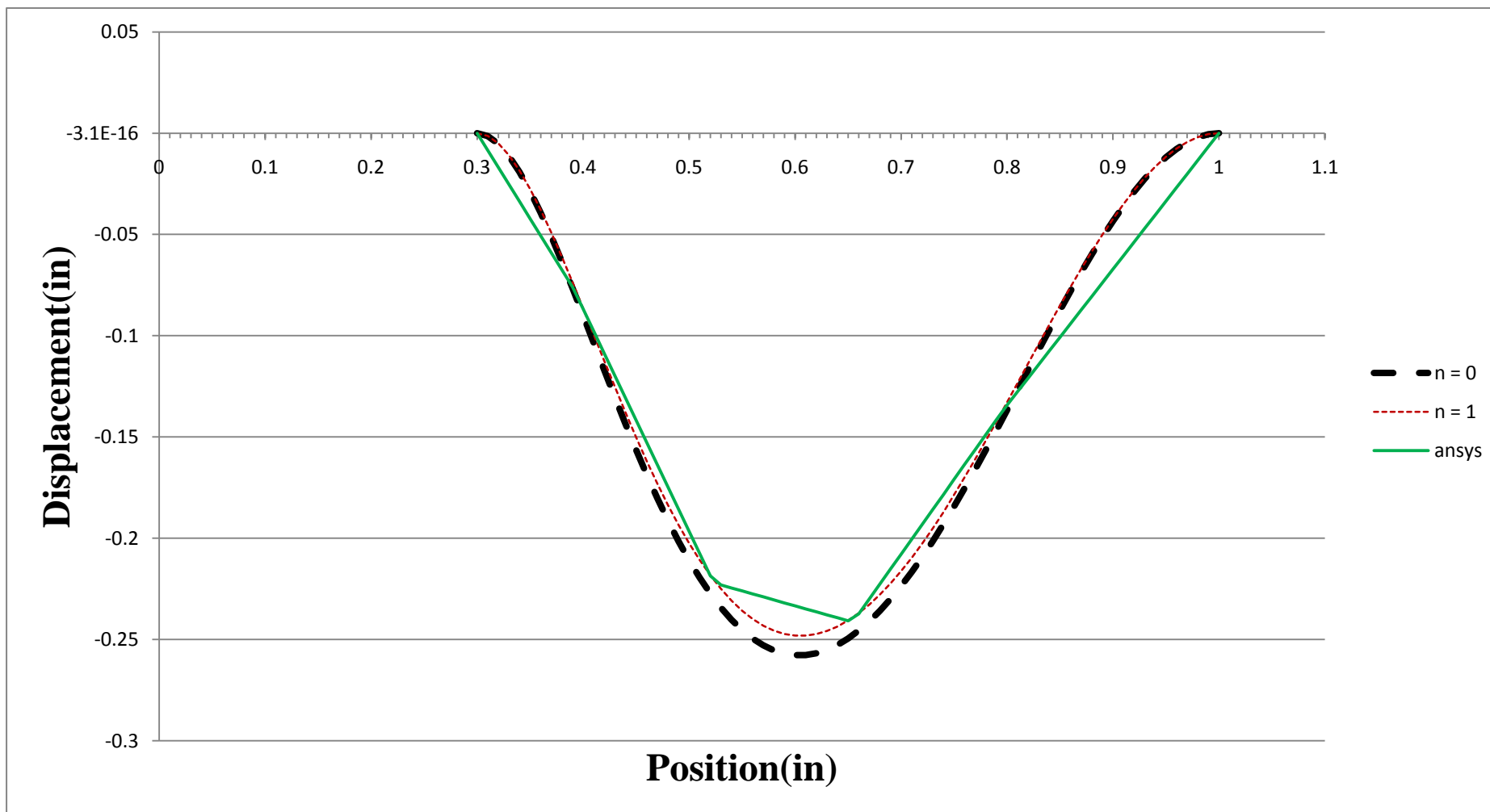


圖 40. 線性遞減荷重 ($\omega = 1 \text{ (rad/sec)}$) 下，沿徑向 ANSYS 與本文推導結果變位(情況三)

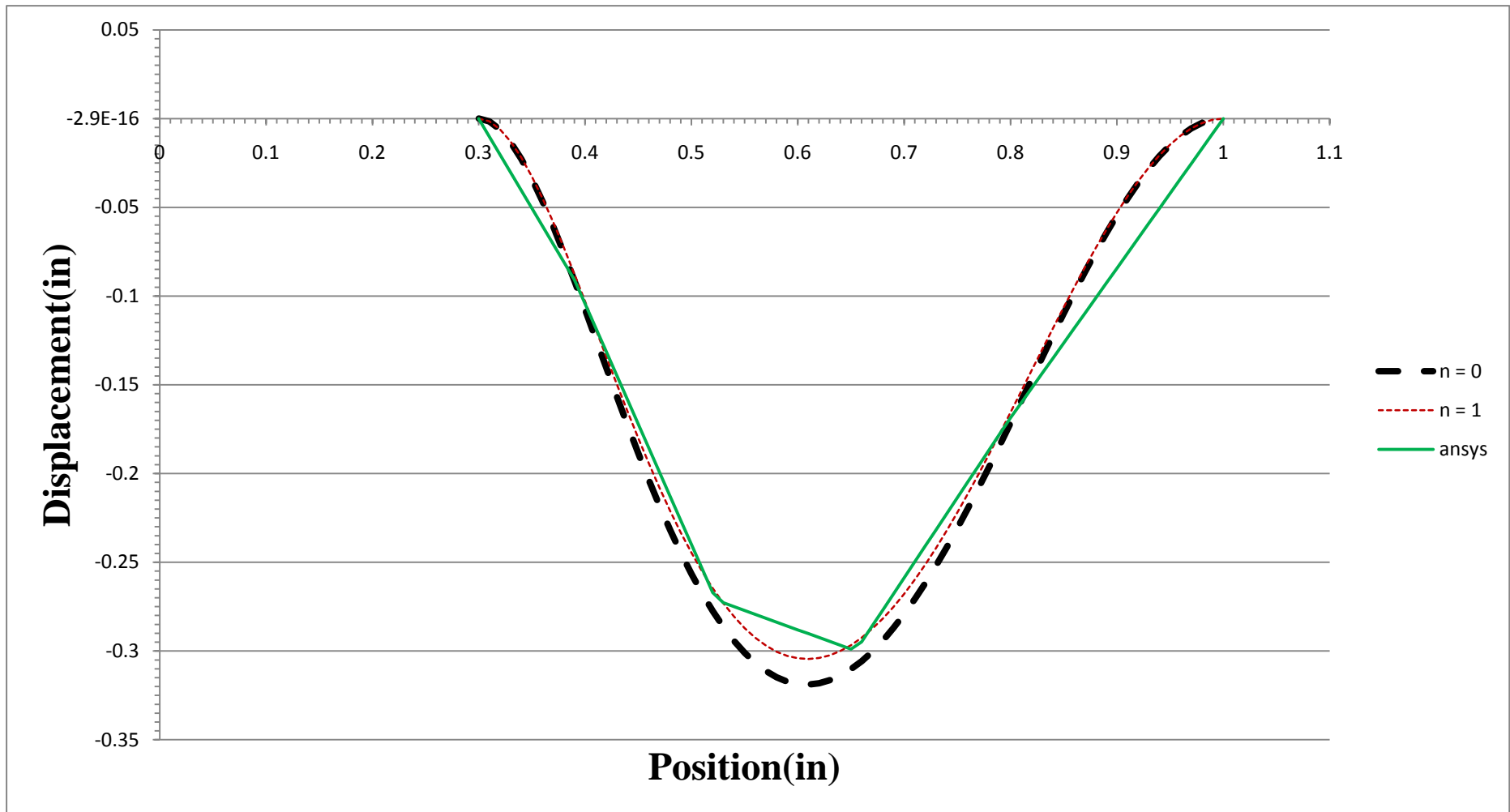


圖 41. 線性遞減荷重 ($\omega = 5 \text{ (rad/sec)}$) 下，沿徑向 ANSYS 與本文推導結果變位(情況三)

4.2.3 線性遞增荷重

當外力荷重沿徑向方向為線性遞減荷重如圖 42 所示時：

1. 邊界條件情況一之變位如圖 43~44 所示，由圖中吾人可知板的變形形狀物理意義符合邊界條件所給定之，簡化後即與材料力學二維狀態內板邊緣固定外板邊緣自由相似，雖考慮荷重情況及彈性基礎，結果仍是內板變位為零逐步至外板變位達最大值。由圖中吾人也可知由 ANSYS 求出之結果，與本文推導之 $n=0$ 接近等值。且當外力頻率 $\omega=1$ (rad/sec) 時有此情形，當頻率為 $\omega=5$ (rad/sec) 可觀察相似之結果。

2. 邊界條件情況二之變位如圖 45~46 所示，由圖中吾人可知板的變形形狀物理意義符合邊界條件所給定之，簡化後即與材料力學二維狀態內板邊緣自由外板邊緣固定相似，但考慮荷重情況及彈性基礎，內板變位逐步遞增至板中央處變位達最大值，再逐步遞減至外板變位為零。由圖中吾人也可知由 ANSYS 求出之結果，與本文推導之 $n=0$ 接近等值。且當外力頻率 $\omega=1$ (rad/sec) 時有此情形，當頻率為 $\omega=5$ (rad/sec) 亦可觀察相似之結果。

3. 邊界條件情況三之變位如圖 47~48 所示，由圖中吾人可知板的變形形狀物理意義符合邊界條件所給定之，簡化後即與材料力學二維狀態內板邊緣固定外板邊緣固定相似，雖考慮荷重情況及彈性基礎，結果仍是內板變位為零逐步至板中央處變位達最大值，再逐步至外板處變位為零。由圖中吾人也可知由 ANSYS 求出之結果，與本文推導之 $n=0$ 接近等值。且當外力頻率 $\omega=1$ (rad/sec) 時有此情形，當頻率為 $\omega=5$ (rad/sec) 亦可觀察相似之結果。

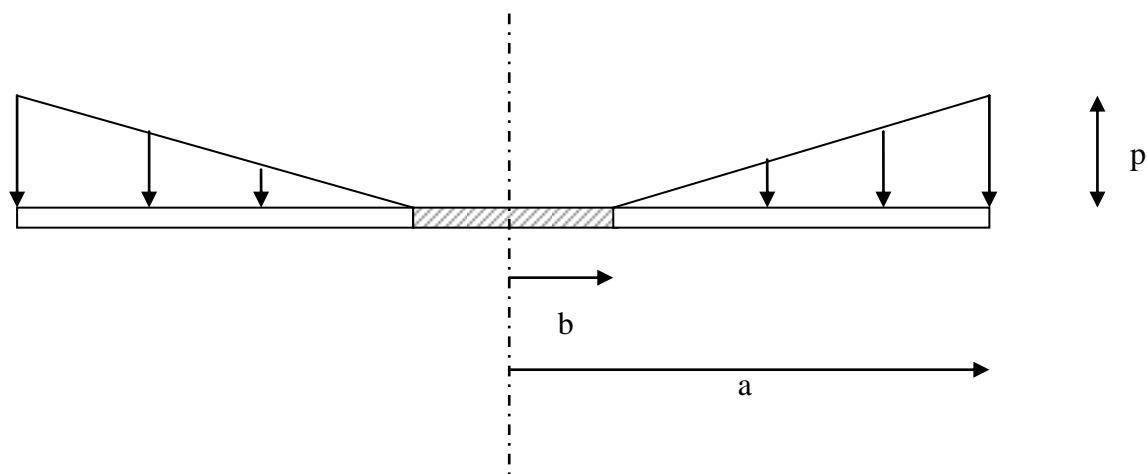


圖 42. 線性遞增荷重示意圖

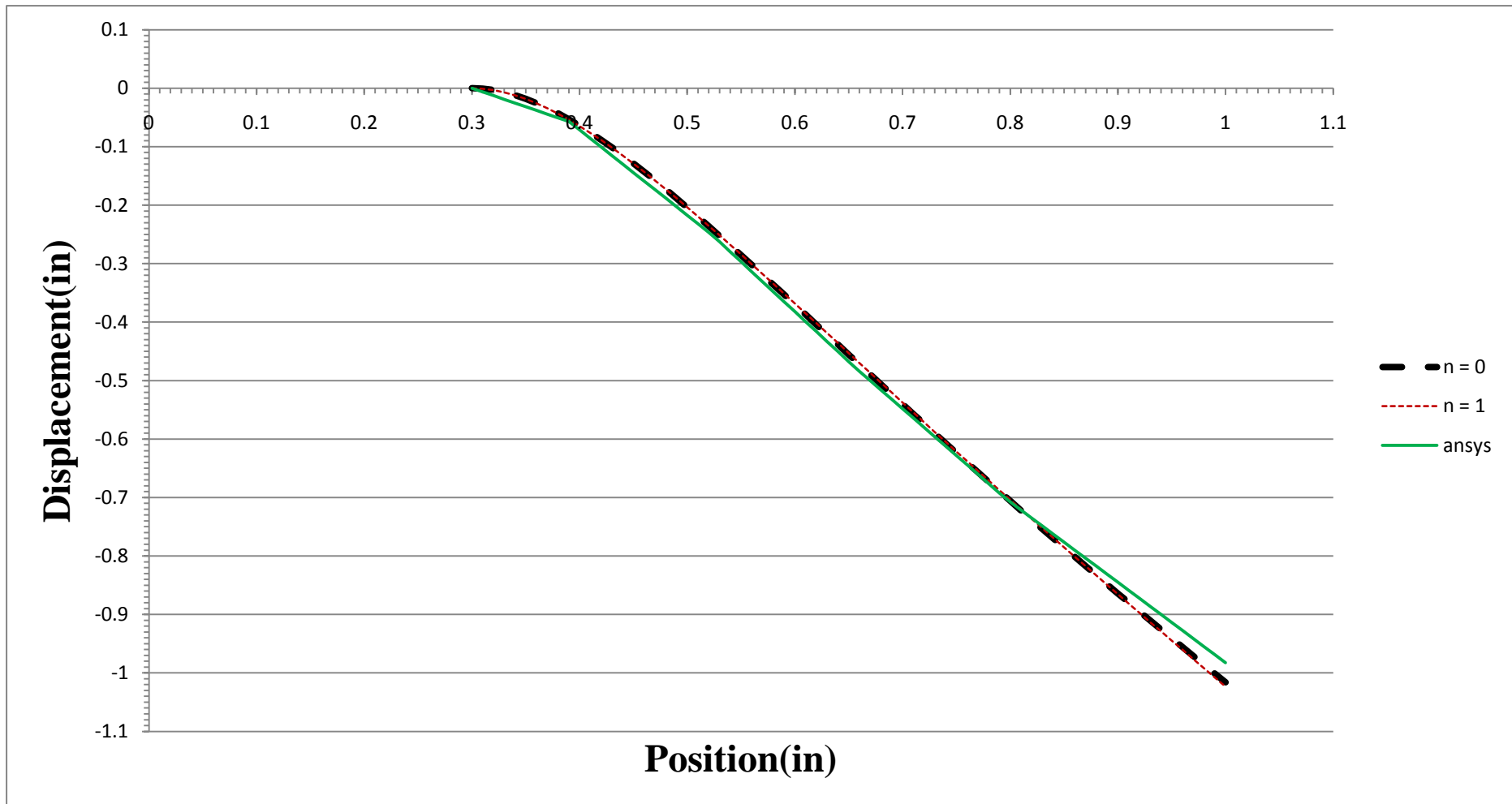


圖 43. 線性遞增荷重 ($\omega = 1 \text{ (rad/sec)}$) 下，沿徑向 ANSYS 與本文推導結果變位(情況一)

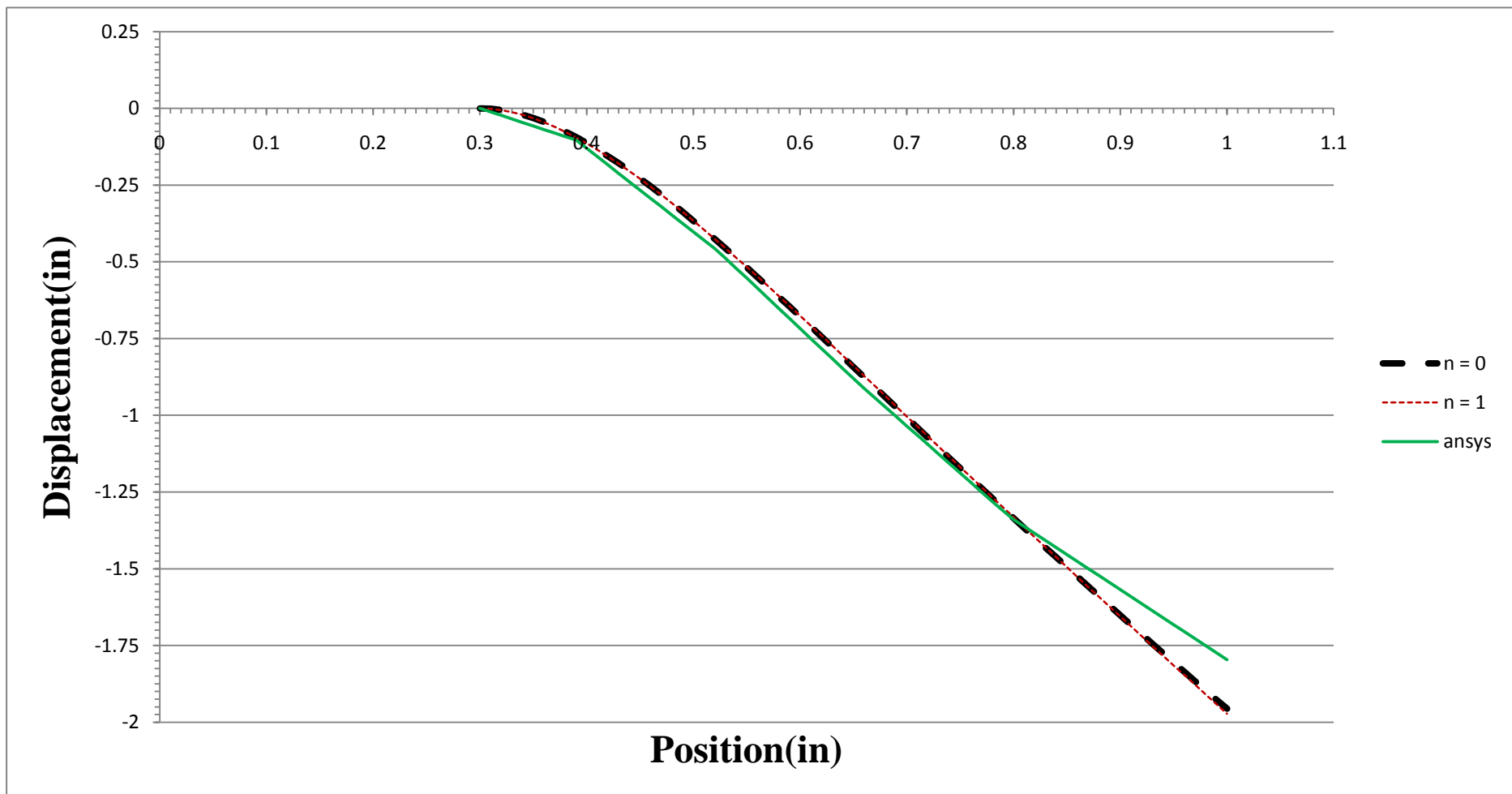


圖 44. 線性遞增荷重 ($\omega = 5 \text{ (rad/sec)}$) 下，沿徑向 ANSYS 與本文推導結果變位(情況一)

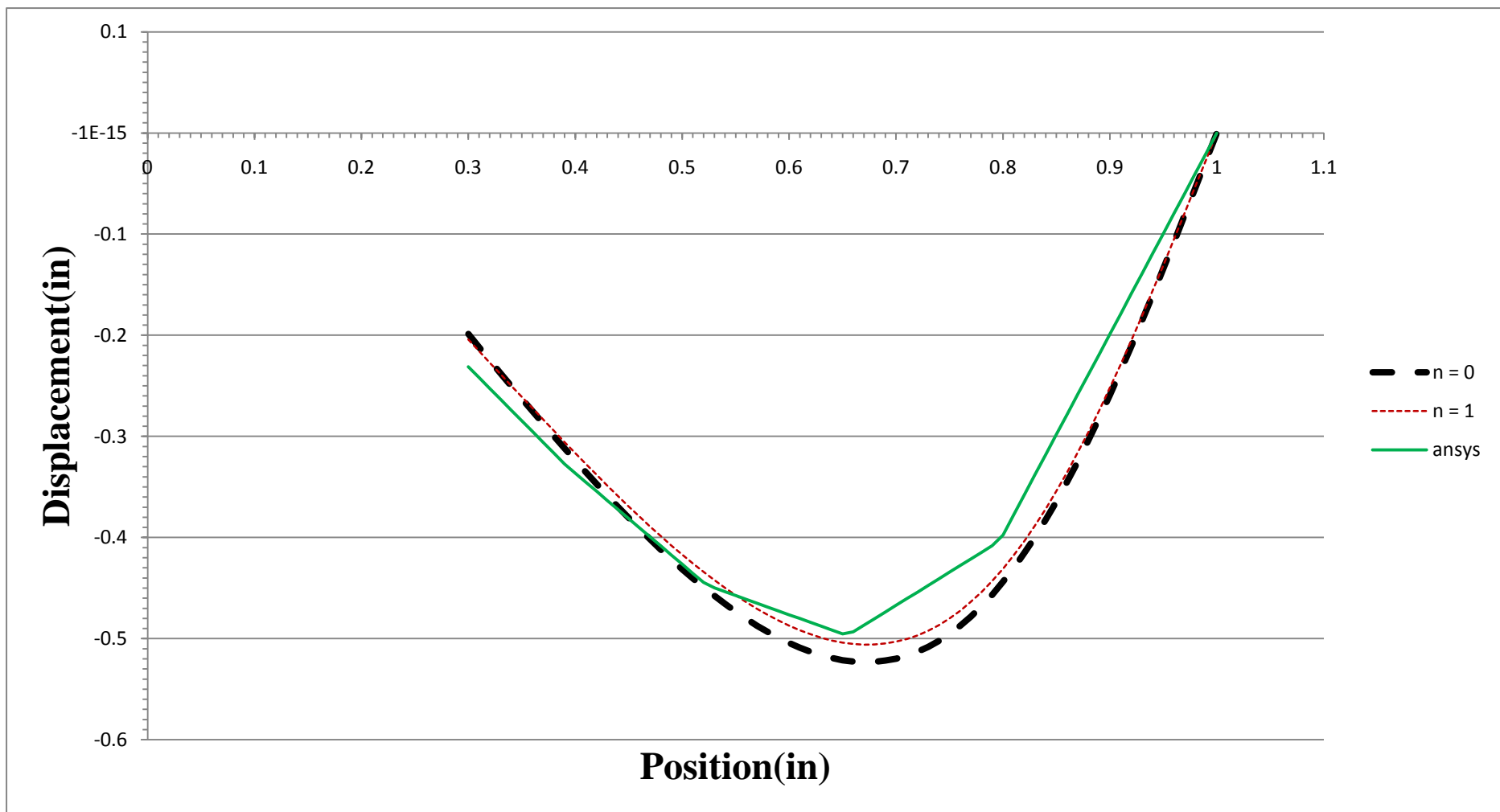


圖 45. 線性遞增荷重 ($\omega = 1 \text{ (rad/sec)}$) 下，沿徑向 ANSYS 與本文推導結果變位(情況二)

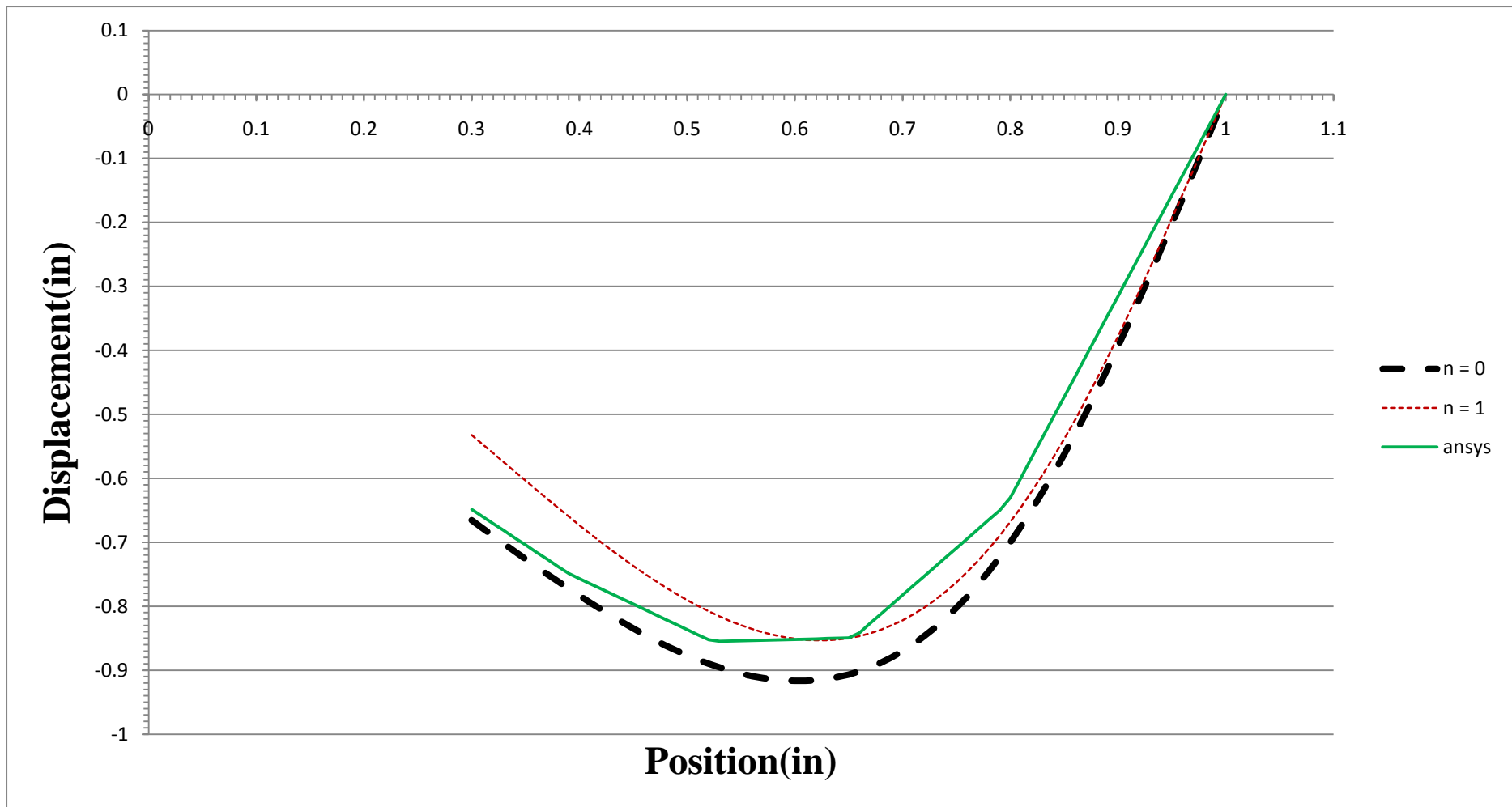


圖 46. 線性遞增荷重 ($\omega = 5 \text{ (rad/sec)}$) 下，沿徑向 ANSYS 與本文推導結果變位(情況二)

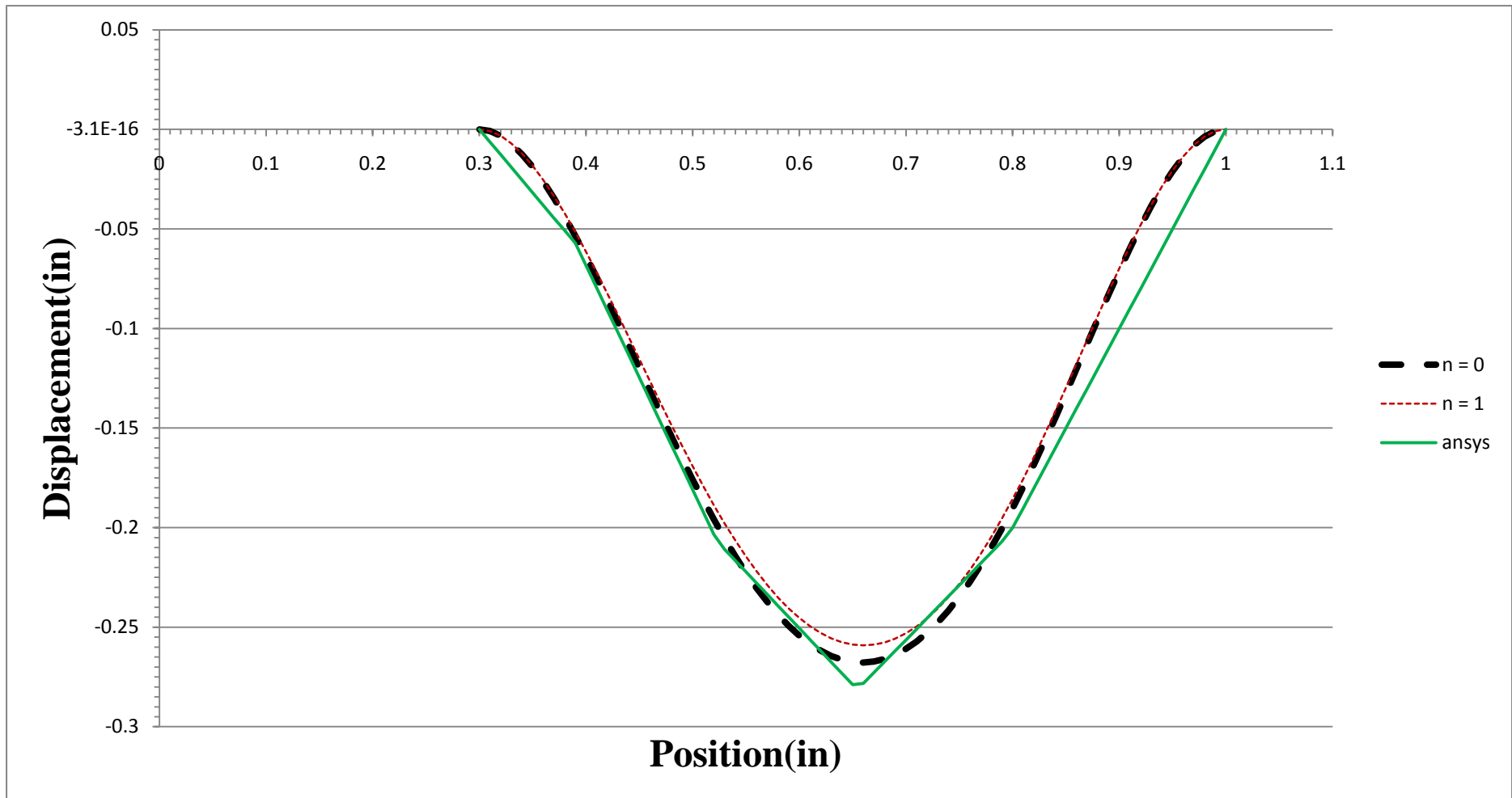


圖 47. 線性遞增荷重 ($\omega = 1 \text{ (rad/sec)}$) 下，沿徑向 ANSYS 與本文推導結果變位(情況三)

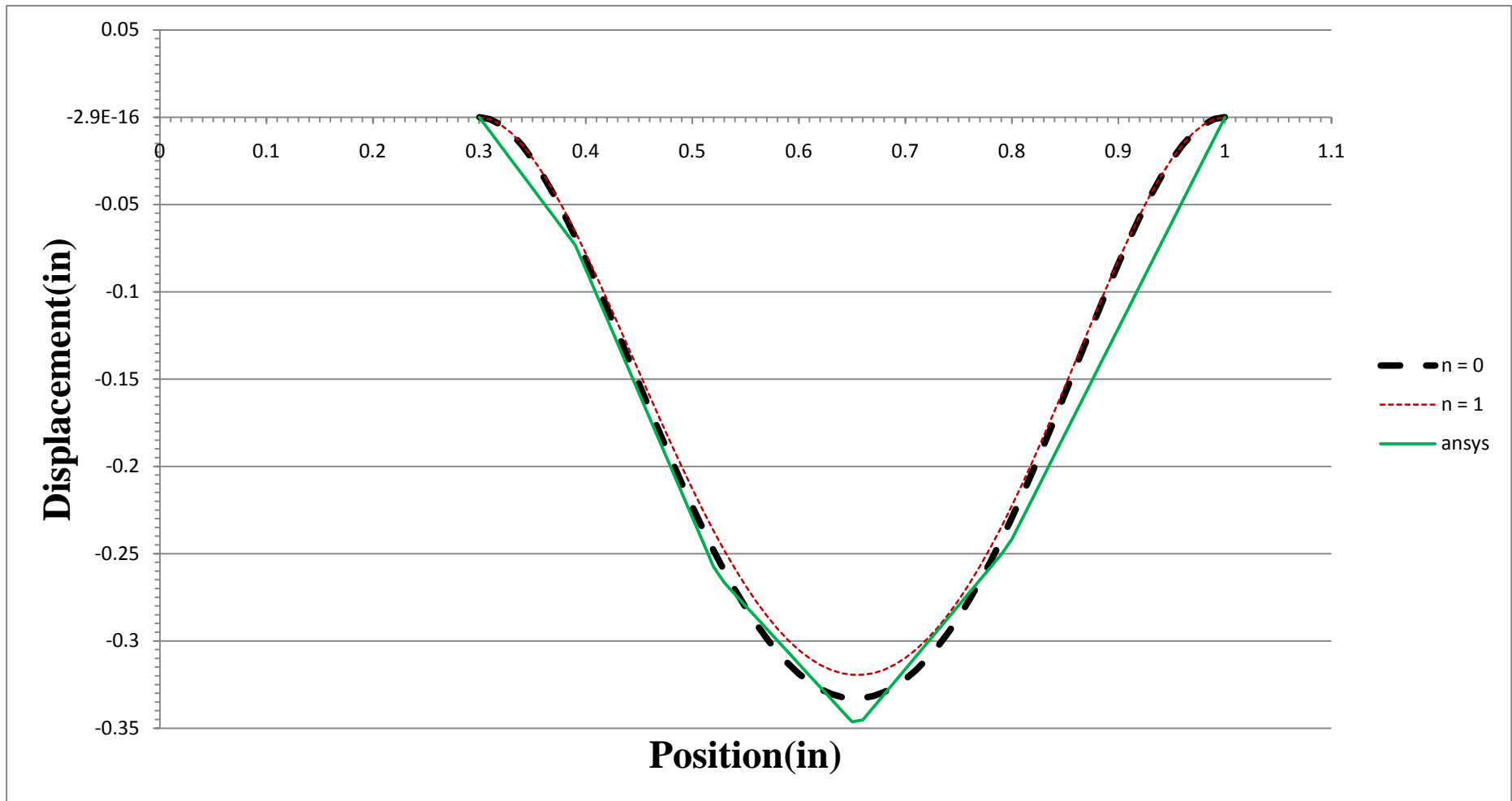


圖 48. 線性遞增荷重($\omega = 5 \text{ (rad/sec)}$)下，沿徑向 ANSYS 與本文推導結果變位(情況三)

4.2.4 Sine shape 荷重

當外力荷重沿徑向方向為 Sine shape 荷重如圖 49 所示時：

1. 邊界條件情況一之變位如圖 50~51 所示，由圖中吾人可知板的變形形狀物理意義符合邊界條件所給定之，簡化後即與材料力學二維狀態內板邊緣固定外板邊緣自由相似，但考慮荷重情況及彈性基礎，內板變位為零逐步至板中央處變位達最大值，再逐步遞減至外板。由圖中吾人也可知由 ANSYS 求出之結果，與本文推導之 $n=0$ 接近等值。且當外力頻率 $\omega=1$ (rad/sec) 時有此情形，當頻率為 $\omega=5$ (rad/sec) 亦可觀察相似之結果。

2. 邊界條件情況二之變位如圖 52~53 所示，由圖中吾人可知板的變形形狀物理意義符合邊界條件所給定之，簡化後即與材料力學二維狀態內板邊緣自由外板邊緣固定相似，但考慮荷重情況及彈性基礎，內板變位逐步遞增至板中央處變位達最大值，再逐步遞減至外板變位為零。由圖中吾人也可知由 ANSYS 求出之結果，與本文推導之 $n=0$ 接近等值。且當外力頻率 $\omega=1$ (rad/sec) 時有此情形，當頻率為 $\omega=5$ (rad/sec) 亦可觀察相似之結果。

3. 邊界條件情況三之變位如圖 54~55 所示，由圖中吾人可知板的變形形狀物理意義符合邊界條件所給定之，簡化後即與材料力學二維狀態內板邊緣固定外板邊緣固定相似，雖考慮荷重情況及彈性基礎，結果仍是內板變位為零逐步至板中央處變位達最大值，再逐步至外板處變位為零。由圖中吾人也可知由 ANSYS 求出之結果，與本文推導之 $n=0$ 接近等值。且當外力頻率 $\omega=1$ (rad/sec) 時有此情形，當頻率為 $\omega=5$ (rad/sec) 亦可觀察相似之結果。

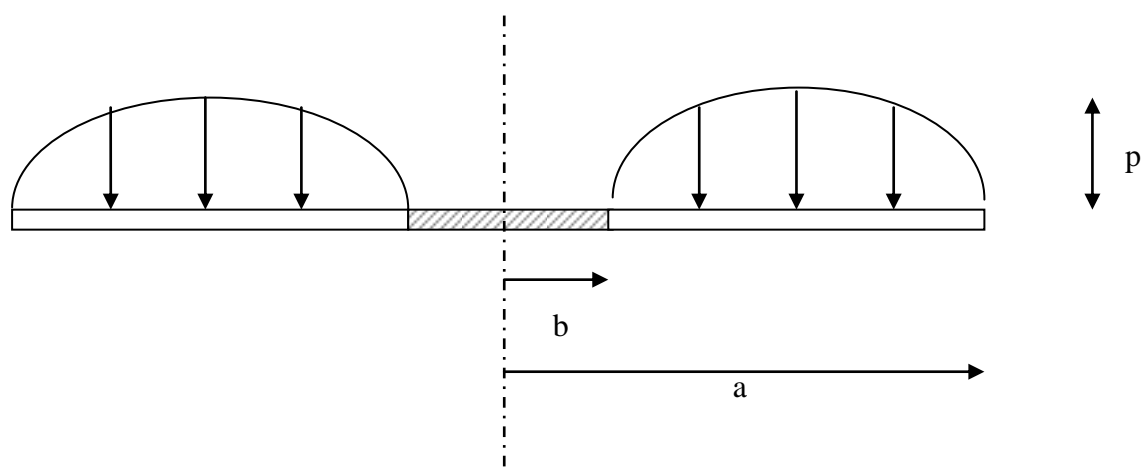


圖 49. Sine shape 荷重示意圖

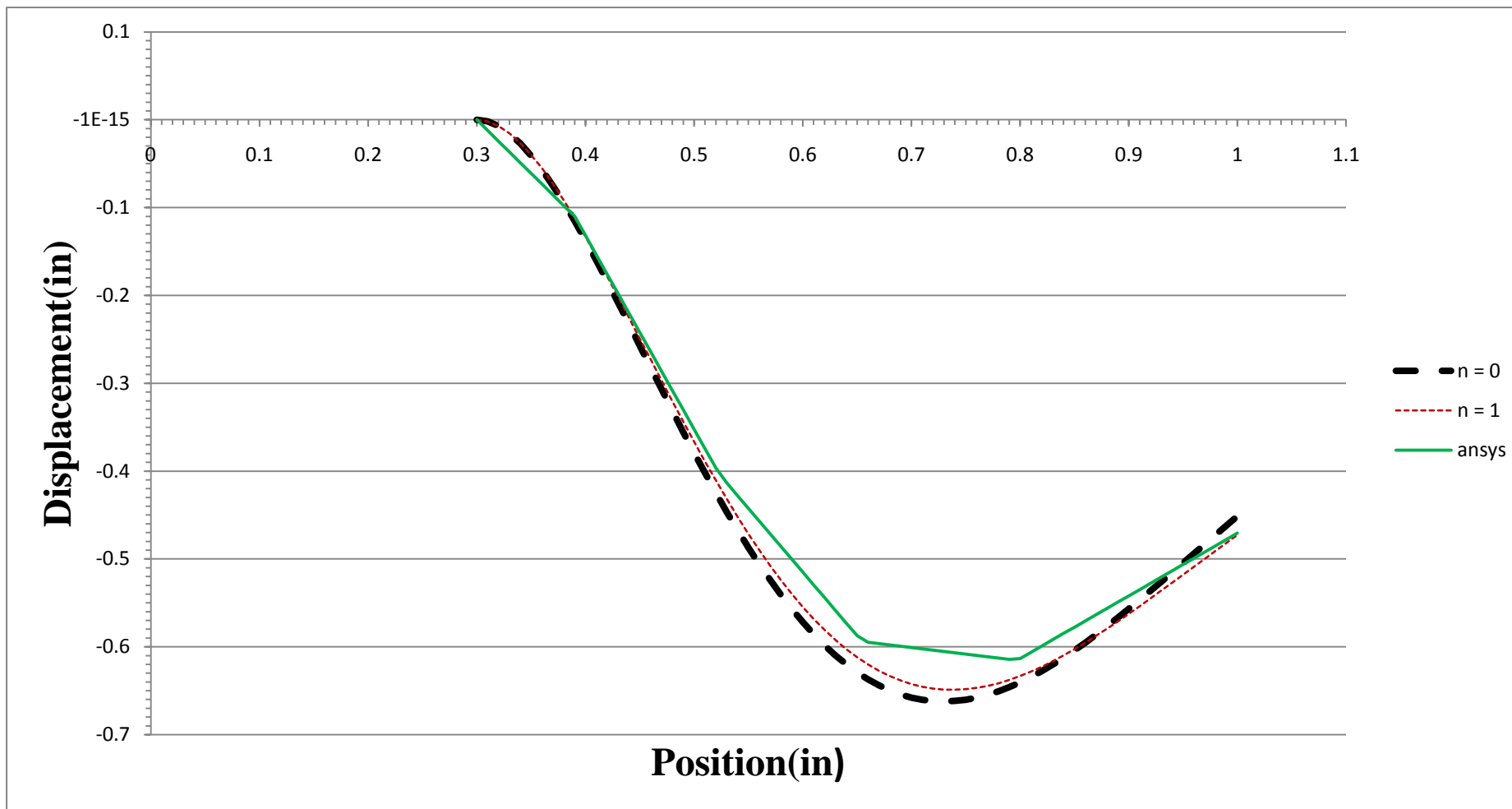


圖 50. Sine shape 荷重($\omega = 1 \text{ (rad/sec)}$) 下，沿徑向 ANSYS 與本文推導結果變位(情況一)

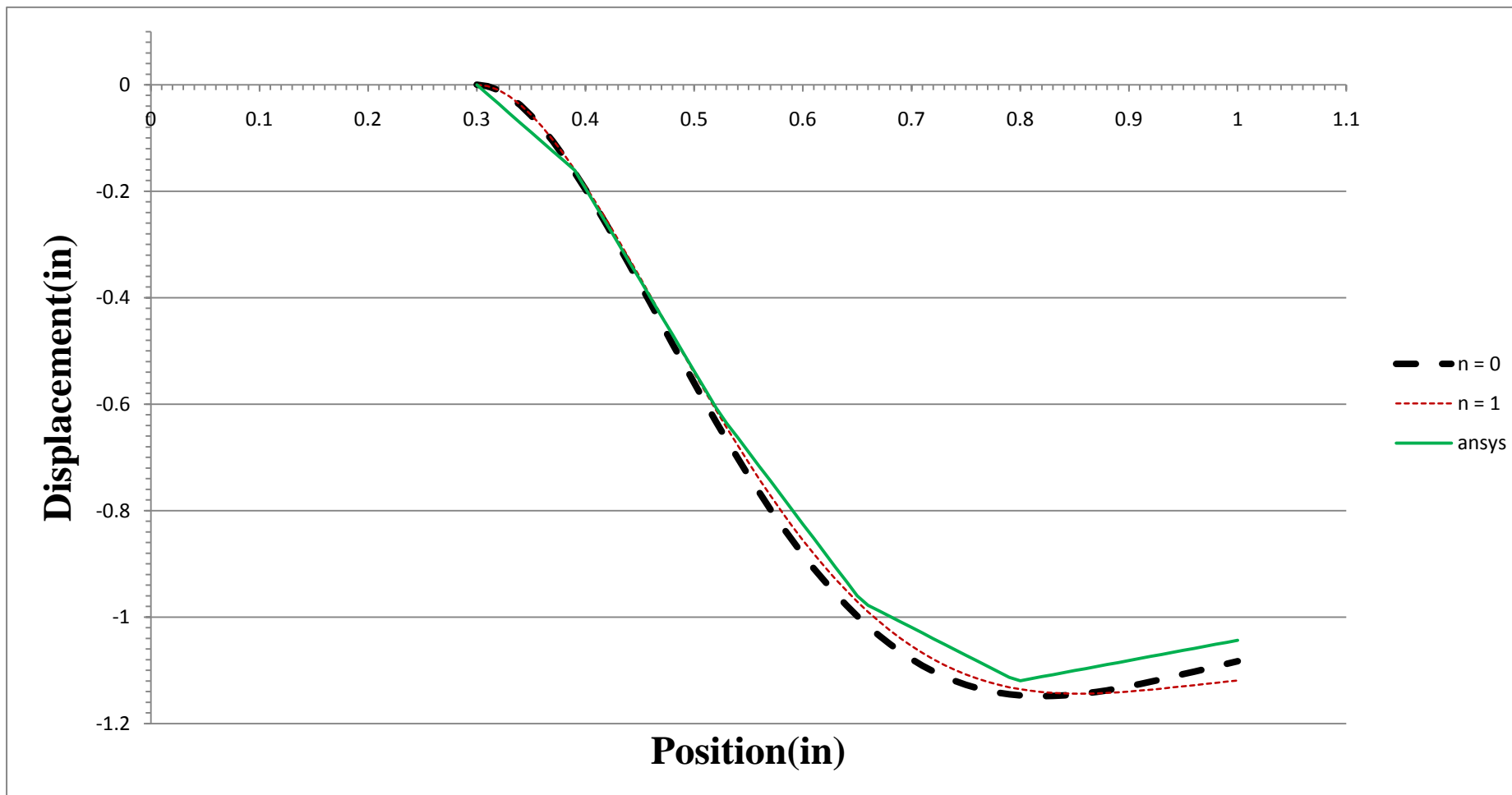


圖 51. Sine shape 荷重($\omega = 5 \text{ (rad/sec)}$)下，沿徑向 ANSYS 與本文推導結果變位(情況一)

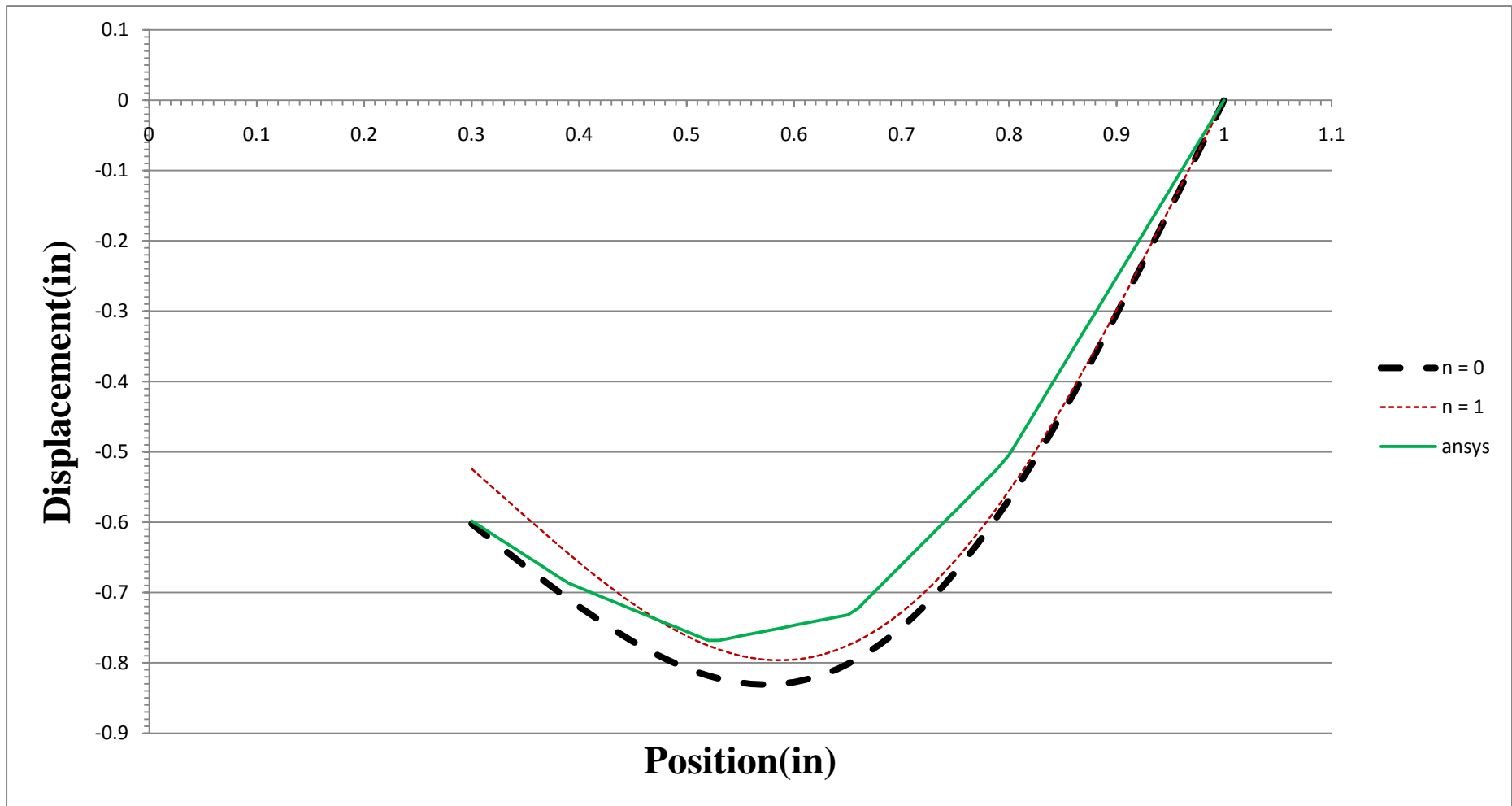


圖 52. Sine shape 荷重($\omega=1 (rad/sec)$) 下，沿徑向 ANSYS 與本文推導結果變位(情況二)

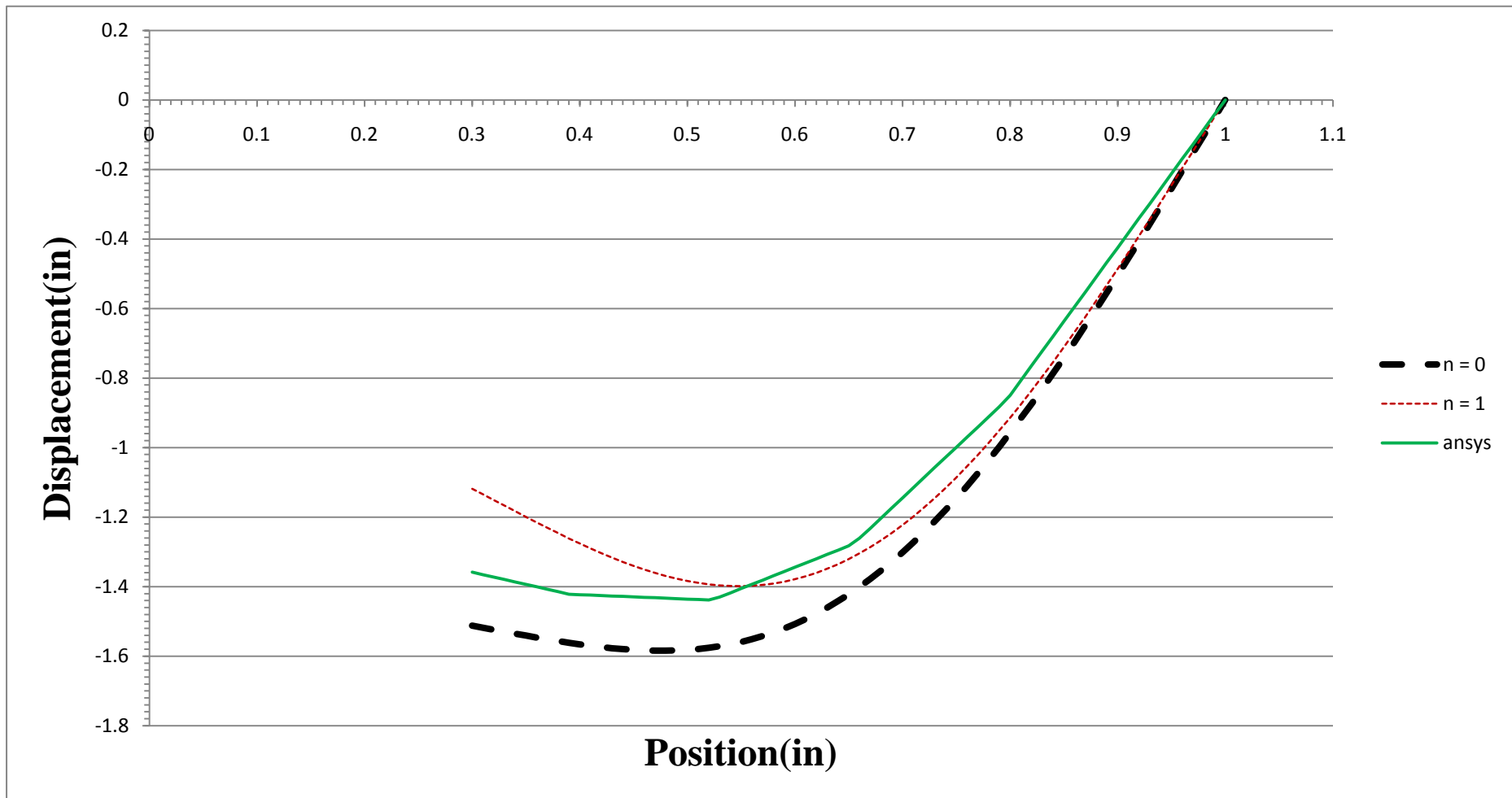


圖 53. Sine shape 荷重($\omega = 5 \text{ (rad/sec)}$) 下，沿徑向 ANSYS 與本文推導結果變位(情況二)

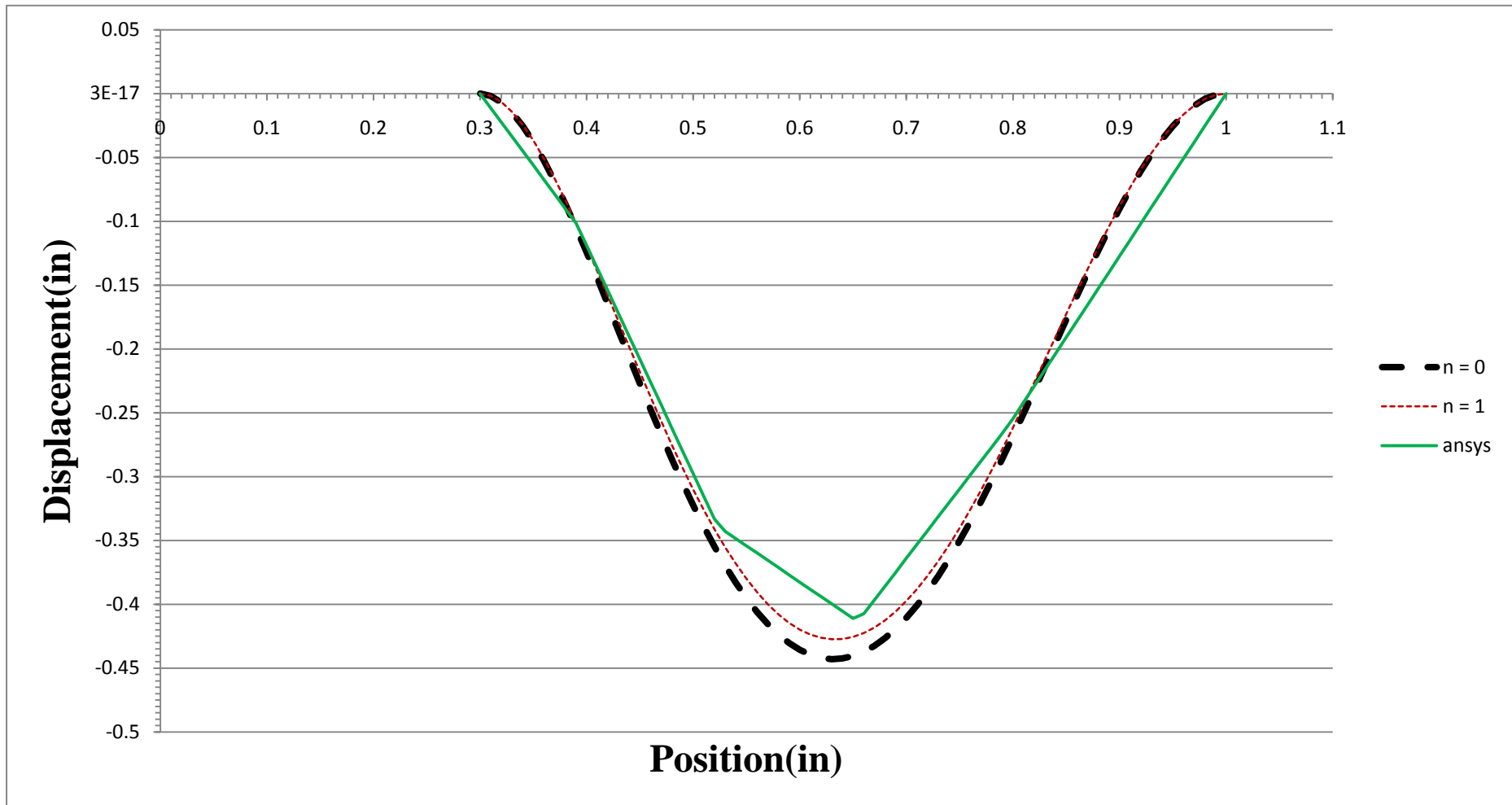


圖 54. Sine shape 荷重 ($\omega=1$ (rad/sec)) 下，沿徑向 ANSYS 與本文推導結果變位(情況三)

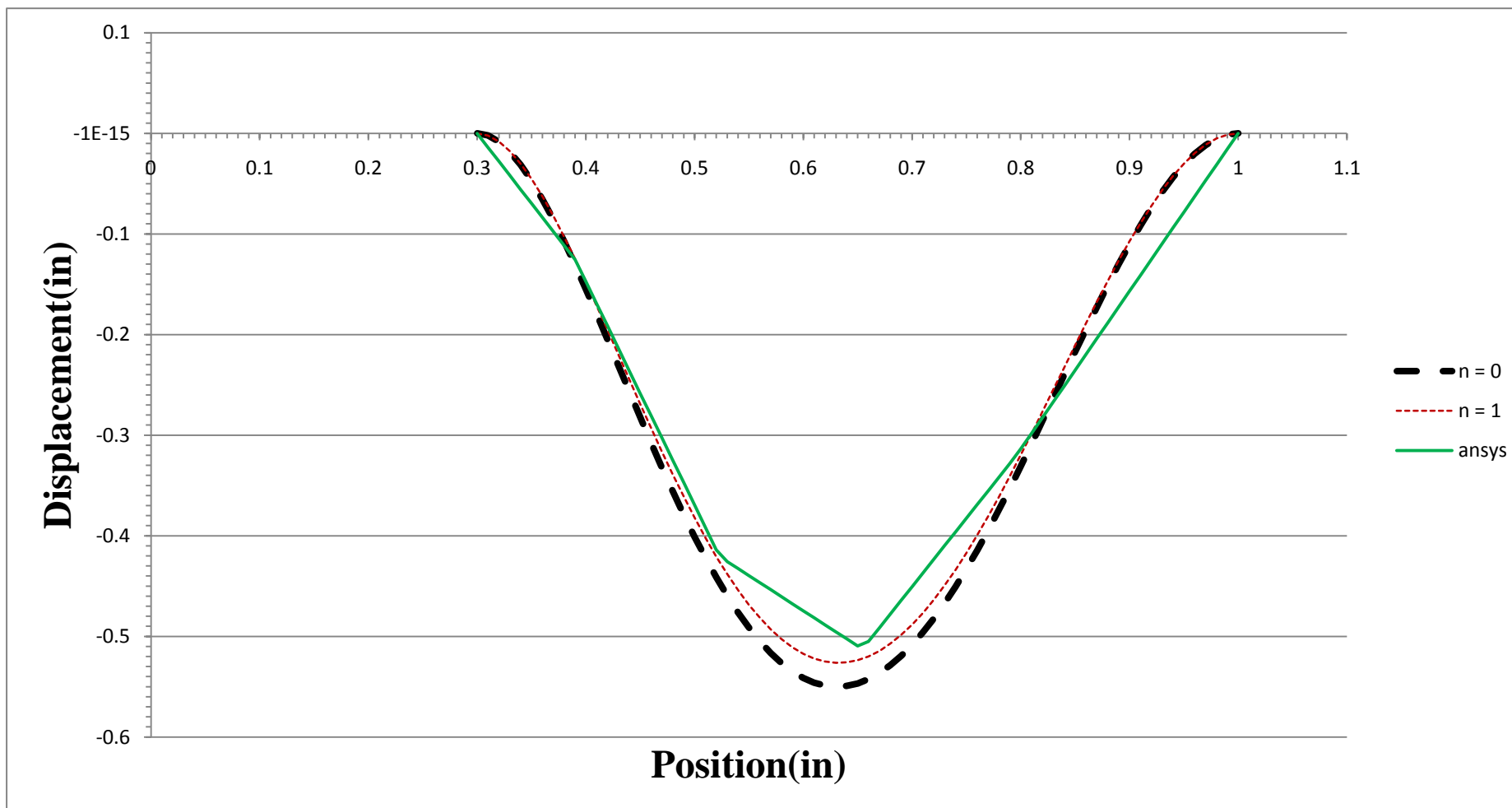


圖 55. Sine shape 荷重($\omega = 5 \text{ (rad/sec)}$)下，沿徑向 ANSYS 與本文推導結果變位(情況三)

第五章 結論與建議

5.1 結論

1. 本文所提出對任意分佈荷重函數的基本假設和形狀函數，適用於求解軸對稱彈性薄板，置於彈性基礎上之動力反應的外力-變位關係式。

2. 本文所提出分析模式係擷取對任意分佈荷重函數採數值方法，與求解過程採解析解方法的優點。在對分佈荷重函數所作的基本假設前提下，可得合理之外力-變位關係式。此結果可隨荷重節點數的增加，而越真實模擬外力荷重函數。

3. 於動力反應推導過程中，求解軸對稱彈性薄板之頻率方程式的根(root)，根值經數值分析，可知軸對稱彈性完整板之頻率參數 β_{nm} 間，具有一明顯的等差性質，而對軸對稱彈性環型板，則隨頻率參數 β_{nm} 之值越大，其間等差之特性越明顯。可藉此特性，進行無因次化(non-dimensional)之步驟。

4. 頻率參數求解過程中，本文利用 Bracketing Method 作為判斷區間內具唯一根值之技巧，再引用 Open Method 中之 The Secant Method，求得頻率方程式之根值，此方法於求根過程缺乏效率。而使用輔助軟體 Mathematica 求出的結果精準度不夠，只能求得六位數字，但影響結果不大。

5. 以有限元素軟體 ANSYS 加以分析模態，將其振幅之結果與理論解作比較，可以發現有所不同，其誤差來源為將問題領域分割成網格的大小狀況，其元素的選取也會有引響，處理切割數之誤差上，只要切割的細一點則影響可改善很多，以最小分割之結果與理論解已相當接近。

5.2 建議

在本文動力反應推導過程中，並未引入阻尼(Damping)的效應，故當外力荷重函數之頻率接近或等於軸對稱彈性薄板置於彈性基礎上之自然頻率時，會發生共振(Resonance)的現象，變位趨近無限大，失去實際上的意義，只淪為試驗現象。故建議可進一步導入阻尼(Damping)之動力反應下，軸對稱彈性板之外力-變位關係式的影響。

參考文獻

1. Euler, L., "De motu vibratorio tympanorum," *Novi Commentari Acad. Petropolit.*, 10(1766), p243-260
2. Bernoulli, J., Jr. "Essai theorique sur les vibrations de plaques elastiques rectangularies et libers," *Novi Commentari Acad Petropolit*, Vol. 5, pp. 197-219, 1789.
3. Kirchhoff, G., "Vorlesungen uber mathematische physik," Vol. 1, B.G. Teubner, Leipzig, 1876.
4. Gin-Show Liou, G. C. Lee "Impedance Matrices for Axial Symmetric Foundations on Layered Media", *Structural Eng./Earthquake Eng., JSCE*, Vol.9, 33-44, 1992.
5. C. L. Kantham, " Bending and vibration of elastically restrained circular plates," *J. Franklin Inst.* 265, 483-491 (1958).
6. Herbert Reismann, " Forced vibrations of a circular plate," *Trans. A.S.M.E., J. Appl. Mech.*, 26 (1959), pp. 526-527.
7. R.S.Weiner, "Forced Axisymmetric Motions of Circular Elastic Plates," *J. Appl. Mech.* 82~ 893, 1965.
8. Lysmer, J., "Vertical Motion of Rigid Footings," Dept. of Civil Eng., Univ. of Michigan Report to WES Contract Report No. 3-115 Under Contract No. DA-22-079-eng-340; also a Ph.D. dissertation, Univ. of Michigan, Aug. (1965).
9. S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, "Theory of Plates and Shells," McGRAW-HILL Book Company, 1959.
10. Szilard, R., *Theory and Analysis of Plates Classical and Numerical Methods*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J. 1974.
11. Michio Iguchi, and J.Enrique Luco, "Vibration of Flexibile Plate on Viscoelastic Medium," *ASCE*, Vol. 108, No.EM6, December, 1982.

12. Ray W. Clough, and J. Penzien, "Dynamics of Structures," McGraw-Hill Book Company, 1975.
13. Gin-Show Liou "Vibration of Surface Foundations of Arbitrary Shapes," Earthquake Eng. Str. Dyn., Vol.20, 1115-1125, 1991.
14. A.C. Ugural, "Stresses in Plates and Shells," McGRAW-HILL Book Company, 1981.
15. Y.J. Lin, "Dynamic Response of Circular Plates Resting on Viscoelastic Half Space," Journal of Applied Mechanics, Vol.45, 1978.
16. J. T. Chen, S. R. Kuo, I. L. Chen and C. X. Huang " Study on the true and spurious eigensolutions of two-dimensional cavities using the dual multiple reciprocity method," Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol.27, No.7, pp.655-670, 2003.
17. J. T. Chen, C. S. Wu and K. H. Chen, " A study of free terms for plate problems in the dual boundary integral equations," Engineering Analysis with Boundary Elements, Accepted, 2005.
18. 黃寶翰, "軸對稱彈性板承受任意載重之研究" 國立交通大學土木工程研究所碩士論文, 1993。
19. 羅遠智, "彈性矩形板承受任意載重之研究" 國立交通大學土木工程研究所碩士論文, 1995。
20. 洪慶章 劉清吉, "ANSYS 教學範例 "知城數位科技股份有限公司 2005 年 5 月。
21. 李輝煌, "ANSYS 工程分析基礎與觀念 "高立圖書有限公司 2005 年。
22. 康淵, 陳信吉, "ANSYS 入門 "全華科技圖書有限公司 2006 年。
23. 張起豪, 林敬三, "Mathematica 入門與教學 "碁峰資訊股份有限公司 2009 年。
24. 張錚, "MATLAB 程式設計與應用教學範本 "知城數位科技股份有限公司

2008 年 8 月。

25. 林暉盛, ”基礎上彈性環狀板振動分析” 國立交通大學土木工程研究所碩士論文, 2010。

