

國立交通大學

土木工程學系

碩士論文

層狀半空間剛性圓盤基礎之振動

Vibration induced by harmonic loadings applied at  
circular rigid plate on layered half-space medium



研究生：林辰彥

指導教授：劉俊秀 博士

中華民國九十九年九月

# 層狀半空間剛性圓盤基礎之振動

## Vibration induced by harmonic loadings applied at circular rigid plate on layered half-space medium

研究生：林辰彥

Student: Chen-Yan Lin

指導教授：劉俊秀

Advisor: Gin-Show Liou



Submitted to Department of Civil Engineering  
National Chiao Tung University  
in partial Fulfillment of the Requirements  
for the Degree of  
Master of Science  
in  
Civil Engineering  
September 2010  
Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十九年九月

# 層狀半空間剛性圓盤基礎之振動

學生:林辰彥

指導教授:劉俊秀

國立交通大學土木工程學系碩士班

## 摘 要

本研究提出一個有系統的方法，計算由於圓形剛性板的和諧振動，造成在層狀半空間層任何特定的位置上的振動。在此研究中，使用在圓柱坐標下的三維波動方程之解析解。在層狀半空間中任何特定位置的振動可由半無限積分中積分其波數  $k$  由 0 到無限大得到解析解，由於波數  $k$  消滅的自然性質，其數值積分可用一個確定的上限值  $k_u$  取代無限大而不會使精度下降。上限值  $k_u$  的選擇與無因次化的振動頻率和無因次化的距離有關。由數值結果得知層內位移成波動狀衰減。本研究之方法可有效且準確的預測由剛性圓盤加载和諧載重所造成之層狀半空間層內振動位移。

# **Vibration induced by harmonic loadings applied at circular rigid plate on layered half-space medium**

Student: Chen-Yan Lin

Advisor: Gin-Show Liou

Institute of Civil Engineering  
College of Engineering  
National Chiao Tung University

## **Abstract**

The paper presents a systematic scheme to calculate the vibration at any specific location in layer medium due to harmonic vibrations of a circular rigid plate on the medium. In the scheme, the analytic solutions of 3D wave equations in cylindrical coordinates are employed. The vibration at any specific location in layer medium is obtained analytically by a semi-infinite integration with respect to wave number  $k$  from 0 to  $\infty$ . Because of decaying nature of integrand with respect to wave number  $k$ , the numerical integration can only be performed up to a certain upper limit  $k_u$  instead of  $\infty$  without losing accuracy. The choosing of the integration upper limit  $k_u$  is dependent upon the factors of nondimensional vibration frequency and nondimensional distance between vibration source and receiving location. From the numerical results, one finds that ground vibration may not attenuate monotonically along the distance from source. Comments on the presented scheme will be given, and the presented scheme is proved to be effective and efficient for accurately predicting the vibration induced by harmonic loadings applied at rigid circular plate.

## 誌 謝

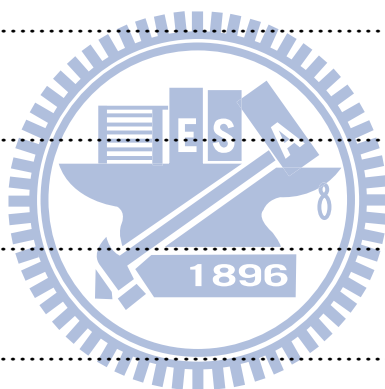
本論文得以完成，感謝吾師 劉俊秀教授的指導與幫助，使我能夠在對於許多研究上的問題中逐漸了解，在此特地感謝老師兩年來的指導，讓我有更多的成長。同時，也感謝 黃炯憲教授與 鄭復平教授給予的意見與指教。

在兩年的研究生涯中，感謝凱程與俊毅在許多時候都給予幫助不管是研究或是玩樂的時候。感謝宗輝、凱平、家宇、碧雲在學業上的幫助也使生活多了許多的事可以聊。感謝學長黃天宇、林暉盛與學弟丁進順在研究上的幫忙。也感謝許多朋友使單調的研究生活相當豐富。

最後，感謝我的家人，不管甚麼時候都支持我，使我有勇氣去面對許多事，感謝你們。



第一章 緒論.....	1
文獻回顧.....	1
第二章 層狀半空間之解析模型.....	3
2.1 波動方程式.....	3
2.2 層狀介質土壤應力與位移.....	6
2.3 層內位移與應力.....	9
2.4 線性應力分布.....	15
第三章 數值分析.....	18
3.1 假設模型.....	18
3.2 數據結果.....	20
第四章 結論與建議.....	23
4.1 結論:.....	23
4.2 建議:.....	23
參考文獻.....	24
圖表.....	26



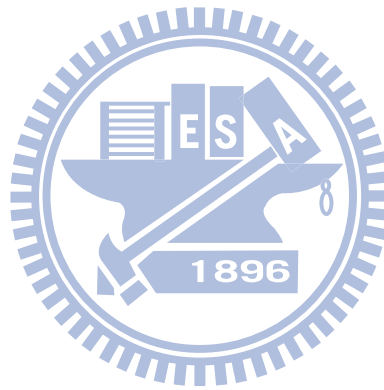
## 圖表目錄

圖 1 .....	26
圖 2 .....	27
圖 3 .....	28
圖 4 $G_2/G_1 = 5$ 垂直振動之 $u_r$ 位移 .....	29
圖 5 $G_2/G_1 = 5$ 垂直振動之 $u_z$ 位移 .....	30
圖 6 $G_2/G_1 = 5$ 之 x 水平方向上振動之 $u_r$ 位移 .....	31
圖 7 $G_2/G_1 = 5$ 之 x 水平方向上振動之 $u_z$ 位移 .....	32
圖 8 $G_2/G_1 = 5$ 翻滾振動之 $u_r$ 位移 .....	33
圖 9 $G_2/G_1 = 5$ 翻滾振動之 $u_z$ 位移 .....	34
圖 10 $G_2/G_1 = 5$ 扭轉振動之 $u_\theta$ 位移 .....	35
圖 11 $G_2/G_1 = 5$ 縱向振動之 $u_\theta$ 位移 .....	36
圖 12 $G_2/G_1 = 5$ 之 y 水平方向上振動之 $u_\theta$ 位移 .....	37
圖 13 $G_2/G_1 = \infty$ 垂直振動之 $u_r$ 位移 .....	38
圖 14 $G_2/G_1 = \infty$ 垂直振動之 $u_z$ 位移 .....	39
圖 15 $G_2/G_1 = \infty$ 之 x 水平方向上振動之 $u_r$ 位移 .....	40
圖 16 $G_2/G_1 = \infty$ 之 x 水平方向上振動之 $u_z$ 位移 .....	41
圖 17 $G_2/G_1 = \infty$ 翻滾振動之 $u_r$ 位移 .....	42
圖 18 $G_2/G_1 = \infty$ 翻滾振動之 $u_z$ 位移 .....	43

圖 19  $G_2/G_1 = \infty$  扭轉振動之  $u_\theta$  位移 ..... 44

圖 20  $G_2/G_1 = \infty$  縱向振動之  $u_\theta$  位移 ..... 45

圖 21  $G_2/G_1 = \infty$  之  $y$  水平方向上振動之  $u_\theta$  位移 ..... 46





# 第一章 緒論

## 文獻回顧

振動源附近的環境振動會影響高精密設備或高科技的生產設備的性能；如微電子產業使用的光學工具。因此，高科技生產設備的容許振動範圍與特定的振動源產生之振動評估，已成為設計高科技生產工廠的重要問題。

首先，Gordon and Dresner[1]提出對於不同振動敏感設備的通用振動標準曲線。從這些曲線，可以發現允許地表的振動越來越小，因為生產要求越來越嚴格。而第二個問題 Sheng et al. [2]和 Krylov [3]採用尤拉梁理論(Euler beam theory)模擬整個軌道，包括鐵軌，枕木和鎮流器等，而且 Kaynia et al. [4], Takemiya 和 Bian [5,6]提出了一種更成熟的分析模型，該模型考慮動態的相互作用，計算火車通過產生的振動。為減少軌道振動通常建議使用開口溝槽，Ahmad 和 Al-Hussaini[7] 與 Dasgupta et al. [8]做了一些理論研究。此外，如果軌道位於橋樑上，由橋接處產生之地面振動對高科技生產設備會產生更嚴重的問題。Takemiya [9]設計了一個蜂窩樁的波阻礙屏障，以靠近橋墩的減少地面振動。因此，計算由公路交通或列車通過橋基礎產生的振動所引起的地面振動對於鄰近的高精密設備是非常重要的。

大部分上述分析模型，使用有限元素法或邊界元素法模擬半空間層或層狀半空間。關於由計算特定來源產生之振動的分析方法， Miller and Pursey [10]計算了能量通量的壓力、剪力與 Rayleigh 波由圓盤垂直和諧振動所產生

在半無限層的遠場，而 Apsel and Ruco [11]計算了由於點源(Green's Function)產生的振動於半空間層。從實際角度來看，Woods and Jedele [12]收集了一些觀察數據而由這些數據推導出一個簡單的公式來表示振動的衰減與距離和土壤阻尼的關係。

而在此研究主題將使用半解析，計算在層狀介質內任何位置上的振動其由剛性圓板的和諧振動產生。使用"半解析"來描述是因為解析解的半無限積分由一個有現值來取代。平面的和諧振動由扭轉(torsional)、垂直(vertical)、水平(horizontal)與滾動(rocking)運動所組成。由 Liou [13]推導分解圓盤之牽引力方法解決在半空間層的波傳問題。這些分解牽引力會很容易地解析在圓柱坐標下的三維波動方程。這個方法由 Liou et al. [14]使用來產生在半空間層圓盤的阻抗函數。本研究中由 Liou et al. [14]之方法計算任意位置的振動在層狀介質半空間層其由和諧載重作用於剛性圓盤。

本研究由 Liou et al. [14]之方法延伸計算且對於特定位置之振動於層狀介質半空間其半無限積分由波數  $k$  取代。其振動之計算可以被特定上限  $k_u$  取代而精度不會下降。

於剛性圓盤加載扭轉、垂直與水平載重得其數值結果，由結果表示方法是否有效率又不失精確度。其數值由無因次化表示。

## 第二章 層狀半空間之解析模型

### 2.1 波動方程式

和諧動態載重加載於圖(1)之陰影區域且自由表面無牽引力作用可推得

其傅氏級數之圓柱座標方程式：

$$\begin{cases} \bar{\tau}_{rz}(r, \theta) \\ \bar{\sigma}_{zz}(r, \theta) \\ \bar{\tau}_{\theta z}(r, \theta) \end{cases} e^{i\omega t} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{cases} \bar{\tau}_{rz}^n(r) \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} \\ \bar{\sigma}_{zz}^n(r) \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} \\ \bar{\tau}_{\theta z}^n(r) \begin{pmatrix} -\sin n\theta \\ \cos n\theta \end{pmatrix} \end{cases} e^{i\omega t} \quad 0 \leq r \leq a_0, z = 0 \quad (2-1)$$

其下標  $n$  代表第  $n$  項傅氏級數分量，其中  $n=0$  代表垂直(vertical)與扭轉(torsional)載重， $n=1$  代表水平(horizontal)與翻轉(rocking)載重， $\omega$  為震動頻率， $a_0$  為圓盤半徑。因為時間函數  $e^{i\omega t}$  在以下數學運算均在方程式兩邊所以在以下運算先消除。

由於其方程式滿足疊加原則所以只用一個傅氏級數分量特解之推導表

示即可。現考慮第  $j$  層其波傳微分方程一般寫為：

$$\begin{aligned} -\omega^2 \rho_j u_r &= (\lambda_j + 2G_j) \frac{\partial \Delta}{\partial r} - \frac{2G_j}{r} \frac{\partial \omega_r}{\partial \theta} + 2G_j \frac{\partial \omega_\theta}{\partial z} \\ -\omega^2 \rho_j u_z &= (\lambda_j + 2G_j) \frac{\partial \Delta}{\partial z} - \frac{2G_j}{r} \frac{\partial(r\omega_\theta)}{\partial r} + \frac{2G_j}{r} \frac{\partial \omega_r}{\partial \theta} \\ -\omega^2 \rho_j u_\theta &= \frac{(\lambda_j + 2G_j)}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} - 2G_j \frac{\partial \omega_r}{\partial z} + 2G_j \frac{\partial \omega_z}{\partial r} \end{aligned} \quad (2-2)$$

下標  $j$  為第  $j$  層， $\lambda_j$  跟  $G_j$  為 Lamé's 常數， $\rho_j$  為土壤質量密度， $\omega$  為震動頻率，

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (2-3)$$

$\Delta$  為體積膨脹函數(dilatation)，

$$\begin{aligned} 2\omega_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\ 2\omega_z &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \\ 2\omega_\theta &= \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \end{aligned} \quad (2-4)$$

$2\omega_r, 2\omega_z, 2\omega_\theta$  為旋轉函數。

為其解於圓柱座標下之 3D 波傳方程，可以由 Sezawa[15] 所推導出對分離(separating)、擴張(dilatational)和旋轉(rotational)之波傳通解且使用分離變數法得第  $n$  項傅氏級數分量之通解如下：

$$\begin{cases} u_r(r,z) \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} \\ u_z(r,z) \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} \\ u_\theta(r,z) \begin{pmatrix} -\sin n\theta \\ \cos n\theta \end{pmatrix} \end{cases} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{pmatrix} -\sin n\theta \\ \cos n\theta \end{pmatrix} \end{bmatrix} J_{\kappa_1} e^A \quad (2-5)$$

或

$$Lu = LJ\kappa_1 eA \quad (2-6)$$

$$L = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{pmatrix} -\sin n\theta \\ \cos n\theta \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (2-7)$$

$$J = \begin{bmatrix} J'_n(kr) & 0 & \frac{n}{r} J_n(kr) \\ 0 & kJ_n(kr) & 0 \\ \frac{n}{r} J_n(kr) & 0 & J'_n(kr) \end{bmatrix} \quad (2-8)$$

$J_n(kr)$  為第  $n$  項之第一類貝索函數，且  $J'_n(kr) = \frac{dJ_n(kr)}{dr}$  而

$$\kappa_1 = [\kappa_1' \quad \kappa_1''] = \begin{bmatrix} k & -v_j' & 0 & k & v_j' & 0 \\ -v_j & k & 0 & v_j & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

$$e = \begin{bmatrix} e^{-v_j z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-v_j' z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-v_j' z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{v_j z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{v_j' z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{v_j' z} \end{bmatrix} \quad (2-10)$$

$v_j = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_{pj}^2}}$ ， $v_j' = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_{sj}^2}}$ ， $c_{pj}^2$  跟  $c_{sj}^2$  為第  $j$  層中之壓力與剪力波速，下標  $p$

代表壓力方向 s 代表剪力方向，k 為水平方向之波數，其

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad (2-11)$$

為未知係數，由邊界條件決定。

在層中之應力場可由位移場之微分再乘上彈性係數矩陣由(2-5)式可得：

$$t = \begin{Bmatrix} \tau_{rz}(r, z) \\ \sigma_{zz}(r, z) \\ \tau_{\theta z}(r, z) \end{Bmatrix} = J\kappa_2 eA \quad (2-12)$$

$$\kappa_2 = \begin{bmatrix} \kappa_2' & \kappa_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2kG_j\nu_j & G_j(2k^2 - k_{\beta_j}^2) & 0 & \vdots & 2kG_j\nu_j & G_j(2k^2 - k_{\beta_j}^2) & 0 \\ G_j(2k^2 - k_{\beta_j}^2) & -2kG_j\nu_j & 0 & \vdots & G_j(2k^2 - k_{\beta_j}^2) & 2kG_j\nu_j & 0 \\ 0 & 0 & -G_j\nu_j' & \vdots & 0 & 0 & G_j\nu_j' \end{bmatrix} \quad (2-13)$$

## 2.2 層狀介質土壤應力與位移

因為未知係數向量 A 由邊界位移應力條件決定，所以可以表示為在第 j 層中的下邊界之未知係數。此外其第 j 層位移應力之組成也可以由上下邊界之組合表示如：

$$Y_{j-1} = E a_j E^{-1} Y_j \quad (2-14)$$

$$Y_{j-1} = [u_r \quad u_z \quad u_\theta \quad \tau_{rz} \quad \sigma_{zz} \quad \tau_{\theta z}]_{j-1}^T \quad (2-15)$$

$$Y_j = [u_r \quad u_z \quad u_\theta \quad \tau_{rz} \quad \sigma_{zz} \quad \tau_{\theta z}]_j^T \quad (2-16)$$

其  $Y_{j-1}$  與  $Y_j$  為未知應力位移向量於第  $j$  層的上邊界與下邊界

而

$$E = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J'_n(kr) & 0 & \frac{n}{r} J_n(kr) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & kJ_n(kr) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{n}{r} J_n(kr) & 0 & J'_n(kr) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J'_n(kr) & 0 & \frac{n}{r} J_n(kr) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & kJ_n(kr) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{n}{r} J_n(kr) & 0 & J'_n(kr) \end{bmatrix} \quad (2-17)$$

而其  $a_j$  轉換矩陣為:

$$a_j = \kappa e^{-1} (d_j) \kappa^{-1} \quad (2-18)$$

$$\kappa = \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -v_j' & 0 & k & v_j' & 0 \\ -v_j & k & 0 & v_j & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2kG_j v_j & G_j(2k^2 - k_{\beta_j}^2) & 0 & 2kG_j v_j & G_j(2k^2 - k_{\beta_j}^2) & 0 \\ G_j(2k^2 - k_{\beta_j}^2) & -2kG_j v_j' & 0 & G_j(2k^2 - k_{\beta_j}^2) & 2kG_j v_j' & 0 \\ 0 & 0 & -G_j v_j' & 0 & 0 & G_j v_j' \end{bmatrix} \quad (2-19)$$

$$e(d_j) = e|_{z=d_j} \quad (2-20)$$

$d_j$  為第  $j$  層厚度。

考慮總系統，藉由(2-14)式跟位移與應力在水平表面之連續從最上層到半空間層，可得其總系統的表面位移應力向量，其由半空間層之位移應力向量組成(即  $z=0$ )，如：

$$Y_0 = E a_1 a_2 \dots a_M E^{-1} Y_M = E T E^{-1} Y_M \quad (2-21)$$

考慮半空間層，其波傳通解與應力場方程式相似於(2-5)式與(2-12)式，只是沒有向上之反射波其應力位移場可表示如：

$$Y_M = \begin{Bmatrix} u_M \\ t_M \end{Bmatrix} = E \kappa' A' \quad (2-22)$$



$$\kappa' = \begin{bmatrix} \kappa'_1 \\ \kappa'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -v'_j & 0 \\ -v_j & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2kG_j v_j & G_j(2k^2 - k_{\beta_j}^2) & 0 \\ G_j(2k^2 - k_{\beta_j}^2) & -2kG_j v'_j & 0 \\ 0 & 0 & -G_j v'_j \end{bmatrix} \quad (2-23)$$

$A'$  為未知係數，由半空間層之邊界條件決定

$$A' = \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{bmatrix} \quad (2-24)$$

### 2.3 層內位移與應力

將(2-22)式加載到(2-21)式得：

$$Y_0 = E a_1 a_2 \cdots a_M E^{-1} Y_M = E T E^{-1} Y_M = E T E^{-1} E \kappa' A' = E T \kappa' A' \quad (2-25)$$

所以

$$Y_0 = \begin{bmatrix} u_0 \\ t_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa'_1 \\ \kappa'_2 \end{bmatrix} A' = \begin{bmatrix} J T_{11} & J T_{12} \\ J T_{21} & J T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa'_1 \\ \kappa'_2 \end{bmatrix} A' = \begin{bmatrix} J(T_{11}\kappa'_1 + T_{12}\kappa'_2) A' \\ J(T_{21}\kappa'_1 + T_{22}\kappa'_2) A' \end{bmatrix} \quad (2-26)$$

由(2-26)式可得

$$A' = (T_{21}\kappa_1' + T_{22}\kappa_2')^{-1} J^{-1} t_0 \quad (2-27)$$

將(2-27)式帶入(2-26)式之 $u_0$ 得：

$$u_0 = J(T_{11}\kappa_1' + T_{12}\kappa_2')A' = J(T_{11}\kappa_1' + T_{12}\kappa_2')(T_{21}\kappa_1' + T_{22}\kappa_2')^{-1} J^{-1} t_0 = JQ_1 J^{-1} t_0 \quad (2-28)$$

$$Q_1 = (T_{11}\kappa_1' + T_{12}\kappa_2')(T_{21}\kappa_1' + T_{22}\kappa_2')^{-1} \quad (2-29)$$

$$Y_0 = \begin{bmatrix} u_0 \\ t_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} JQ_1 J^{-1} \\ I \end{bmatrix} t_0 \quad (2-30)$$

所以



$$Y_0 = E\kappa A = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{bmatrix} A \quad (2-31)$$

將(2-30)式帶入(2-31)式得

$$A = \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Q_1 J^{-1} \\ J^{-1} \end{bmatrix} t_0 \quad (2-32)$$

所以由(2-6)式得：

$$u = J\kappa_1 eA = J\kappa_1 e \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Q_1 \\ I \end{bmatrix} J^{-1} t_0 \quad (2-33)$$

或

$$\begin{bmatrix} u \\ t \end{bmatrix} = E\kappa eA = E \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Q_1 J^{-1} \\ J^{-1} \end{bmatrix} t_0 = E a'_j \begin{bmatrix} Q_1 J^{-1} \\ J^{-1} \end{bmatrix} t_0 \quad (2-34)$$

$$a'_j = \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{bmatrix}^{-1} \quad (2-35)$$

第 N 層的位移與應力：

由

$$Y_0 = E a_1 a_2 \cdots a_{N-1} E^{-1} Y_{N-1} = E T' E^{-1} Y_{N-1} \quad (2-36)$$

得第 N 層上邊界位移：

$$Y_{N-1} = E T'^{-1} E^{-1} Y_0 \quad (2-37)$$

所以第 N 層中之位移與應力帶入(2-36)式得

$$\begin{bmatrix} u(r, z) \\ t(r, z) \end{bmatrix} = E a'_j E^{-1} Y_{N-1} = E a'_j T'^{-1} E^{-1} Y_0 = E Q' E^{-1} Y_0 \quad (2-38)$$

$$Q' = a'_j T'^{-1} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} \\ Q'_{21} & Q'_{22} \end{bmatrix} \quad (2-39)$$

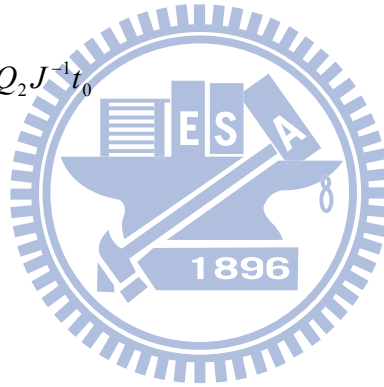
將(2-30)式代入(2-38)式

$$\begin{bmatrix} u \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} \\ Q'_{21} & Q'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & J^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} JQ_1 J^{-1} \\ I \end{bmatrix} t_0 = \begin{bmatrix} J(Q'_{11}Q_1 + Q'_{12})J^{-1} \\ J(Q'_{21}Q_1 + Q'_{22})J^{-1} \end{bmatrix} t_0 \quad (2-40)$$

由上式得

$$u = J(Q'_{11}Q_1 + Q'_{12})J^{-1}t_0 = JQ_2 J^{-1}t_0 \quad (2-41)$$

其



$$Q_2 = Q'_{11}Q_1 + Q'_{12} \quad (2-42)$$

假設為剛性基礎：

其  $u_M = 0$  所以

$$Y_0 = ETE^{-1}Y_M = ETE^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ t_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J^{-1} & 0 \\ 0 & J^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} JT_{12}J^{-1}t_m \\ JT_{22}J^{-1}t_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ t_0 \end{bmatrix} \quad (2-43)$$

$$t_0 = JT_{22}J^{-1}t_m \quad (2-44)$$

$$t_m = JT_{22}^{-1}J^{-1}t_0 \quad (2-45)$$

所以由(2-45)式代入(2-43)式得

$$u_0 = JT_{12}J^{-1}t_m = JT_{12}J^{-1}JT_{22}^{-1}J^{-1}t_0 = JT_{12}T_{22}^{-1}J^{-1}t_0 = JQJ^{-1}t_0 \quad (2-46)$$

$$Q = T_{12}T_{22}^{-1} \quad (2-47)$$

由(2-46)式得到表面總系統的位移與應力向量，然而要在任意狀況(即(2-2)式)下滿足(2-46)式是相當困難的。因此須要在一開始分解正確滿足其式。

以  $\bar{t}_0$  為(2-1)式中的第  $n$  個傅氏級數可分解得：

$$\begin{aligned} \bar{t}_0 = \begin{Bmatrix} \bar{r}_{rz}(r) \\ \bar{\sigma}_{zz}(r) \\ \bar{r}_{\theta z}(r) \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \frac{\bar{r}_{rz}(r) - \bar{r}_{\theta z}(r)}{2} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \bar{\sigma}_{zz}(r) + \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\bar{r}_{rz}(r) + \bar{r}_{\theta z}(r)}{2} \\ &= \int_0^\infty \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} kJ_{n+1}(kr)C_{n+1}(k)dk + \int_0^\infty \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} kJ_n(kr)C_n(k)dk + \int_0^\infty \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} kJ_{n-1}(kr)C_{n-1}(k)dk \end{aligned} \quad (2-48)$$

其中

$$C_{n+1}(k) = \int_0^{a_0} r \frac{\bar{r}_{rz}(r) - \bar{r}_{\theta z}(r)}{2} J_{n+1}(kr) dr \quad (2-49)$$

$$C_n(k) = \int_0^{a_0} r \bar{\sigma}_{zz}(r) J_n(kr) dr \quad (2-50)$$

$$C_{n-1}(k) = \int_0^{a_0} r \frac{\bar{r}_{rz}(r) + \bar{r}_{\theta z}(r)}{2} J_{n-1}(kr) dr \quad (2-51)$$

在(2-49)-(2-51)式其右式之積分為漢克轉換對(Hankel transform pairs)，因為

向量  $\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$ 、 $\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$  與  $\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$  為正交特徵向量相對於貝索方程矩陣 J 於(2-5)-(2-46)式中

之特徵值  $-kJ_{n+1}(kr)$ 、 $kJ_n(kr)$ 、 $kJ_{n-1}(kr)$ ，所以(2-48)式可寫為：

$$\bar{t}_0 = \int_0^\infty -J \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} C_{n+1}(k) dk + \int_0^\infty J \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} C_n(k) dk + \int_0^\infty J \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} C_{n-1}(k) dk \quad (2-52)$$

因為(2-52)式之連續情況且總系統之表面應力在(2-46)式也滿足，所以

$t_0 = -\bar{t}_0$  將(2-52)式帶入(2-46)式得：

$$\begin{aligned}
u_0 &= JQJ^{-1}t_0 = \int_0^\infty JQ \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} C_{n+1}(k) dk - \int_0^\infty JQ \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} C_n(k) dk - \int_0^\infty JQ \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} C_{n-1}(k) dk \\
&= \int_0^\infty JQ \begin{Bmatrix} C_{n+1}(k) - C_{n-1}(k) \\ C_n(k) \\ -C_{n+1}(k) - C_{n-1}(k) \end{Bmatrix} dk
\end{aligned} \tag{2-53}$$

(2-53)式包含層中的解析解，雖然只表現出其表面位移解，不過層中的位移與應力場可表示為相似的形態。

## 2.4 線性應力分布

為產生阻抗矩陣使用先前描述之解析解，其需要表示為可用的基礎結構之有限元素模型。因此，其圓柱座標之  $r$  方向的應力張量在(2-1)式之傅氏級數為分段線性在圖(2)之半徑  $a_0$  範圍內

假設在(2-1)式中之區間  $(0, a_0)$  分成  $m$  個區間的等寬長  $b = \frac{a_0}{m}$ ，所以可以表

示成分段線性應力分布如下：

$$\begin{aligned}
\bar{\tau}_{rz} &= \sum_{j=1}^{m-1} h_j(r)q_j + h_0(r)q_0 + h_m(r)q_m = h^T q \\
\bar{\sigma}_{zz} &= \sum_{j=1}^{m-1} h_j(r)p_j + h_0(r)p_0 + h_m(r)p_m = h^T p \\
\bar{\tau}_{\alpha z} &= \sum_{j=1}^{m-1} h_j(r)s_j + h_0(r)s_0 + h_m(r)s_m = h^T s
\end{aligned} \tag{2-54}$$

其中

$$h_j(r) = \begin{cases} 1 + \frac{r - jb}{b} & \text{若 } (j-1)b \leq r \leq jb \text{ 且 } 1 \leq j \leq m \\ 1 - \frac{r - jb}{b} & \text{若 } jb \leq r \leq (j+1)b \text{ 且 } 0 \leq j \leq m-1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

而  $q_j$ 、 $p_j$ 、 $s_j$  是  $j$  節點之應力張量相對於  $\bar{\tau}_{rz}$ 、 $\bar{\sigma}_{zz}$ 、 $\bar{\tau}_{\theta z}$ 。

加載(2-54)式到(2-48)式並使用(2-52)式，可以得到：

$$\bar{t}_0 = \begin{Bmatrix} \bar{\tau}_{rz} \\ \bar{\sigma}_{zz} \\ \bar{\tau}_{\theta z} \end{Bmatrix} = \int_0^\infty J \begin{bmatrix} -D_{n+1}^T + D_{n-1}^T & 0 & D_{n+1}^T + D_{n-1}^T \\ 0 & D_n^T & 0 \\ D_{n+1}^T + D_{n-1}^T & 0 & -D_{n+1}^T + D_{n-1}^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ p \\ s \end{Bmatrix} dk = \int_0^\infty JDPdk \quad (2-55)$$

其

$$\begin{aligned} D_{n+1}^T &= \int_0^{a_0} \frac{r}{2} J_{n+1}(kr) h^T dr \\ D_n^T &= \int_0^{a_0} r J_n(kr) h^T dr \\ D_{n-1}^T &= \int_0^{a_0} \frac{r}{2} J_{n-1}(kr) h^T dr \end{aligned} \quad (2-56)$$

使用  $t_0 = -\bar{t}_0$  與由(2-55)式之  $t_0 = -JDPdk$  帶入(2-46)式，可以得到 0 到無限之積分結果，其相等(2-53)式：

$$u_0 = -\int_0^\infty JQDPdk \quad (2-57)$$

若(2-55)式之 P 向量已知則由(2-57)式可求出表面邊界之任意位置之位移，



若要求層內任意位置，將(2-41)式之 $t_0$ 以 $t_0 = -JDPdk$ 代入即可求得如：

$$u = -\int_0^{\infty} JQ_2 DPdk \quad (2-58)$$

對剛性圓基礎，其基礎之位移場可假設如下：

$u_\theta(r, \theta) = v_1 r$  (反對稱模態之  $n=0$ ) 為扭轉力矩(torsional moment)之影響，

$u_z(r, \theta) = v_2$  (對稱模態之  $n=0$ ) 為垂直力(vertical force)之影響，而

$u_z(r, \theta) = v_3 r \cos \theta$ ,  $u_r(r, \theta) = v_4 \cos \theta$ ,  $u_\theta(r, \theta) = -v_4 \sin \theta$  (對稱模態之  $n=1$ ) 為滾動力

矩(rocking moment)與水平力(horizontal force)之影響。其 $v_1$ 為基礎中點受扭

轉力矩(torsional moment)影響之未知廣義位移， $v_2$ 為垂直(vertical force)影響，

$v_3$ 為滾動(rocking moment)影響與 $v_4$ 水平(horizontal force)影響。

由以上之位移場與阻抗矩陣跟(2-54)式之互制牽引力，可以計算和諧載重下之剛性圓盤基礎之位移。

## 第三章 數值分析

### 3.1 假設模型

在半無限積分中由(2-58)式：

$$u = -\int_0^{\infty} JQ_2 DPdk$$

若土層無阻尼可能會存在奇異點，雖然像殘值定理(Residue Theorem)之方法可計算奇異點，但為符合真實情況依然假設土層中有阻尼。因此可直接使用數值積分方法。此外由以下三個條件，當  $k \rightarrow \infty$  其半無限積分與  $1/k^2$  成比例：

(1) 當  $k \rightarrow \infty$  其  $J$  矩陣元素跟  $k^{0.5}$  成比例

(2) 當  $k \rightarrow \infty$   $Q_2$  矩陣元素會跟隨  $1/k$  消滅，因為  $v \doteq v' \doteq k$ 。

(3) 當  $k \rightarrow \infty$   $\int r^2 J_n(kr) dr = -\frac{r^2}{k} J_{n+1}(kr) + \frac{n+1}{k} \int r J_{n-1}(kr) dr$  與

$\int r J_n(kr) dr = -\frac{r}{k} J_{n-1}(kr) + \frac{n}{k} \int J_{n-1}(kr) dr$ 、 $J_n(kr) \propto \frac{1}{k^{0.5}}$ 。所以  $D$  矩陣元素會隨  $1/k^{1.5}$  消滅。

因此取適當的有限值置換無限積分上限不會造成數值結果精度下降，所以本研究使用 Gaussian Quadrature method 求其積分。其阻抗矩陣與方程式之計算精度與(2-55)式  $D$  矩陣之積分和(2-54)式之應力模態次區間數量(m)均相關。由於 Liou[16]中已對次區間數量  $m$  與積分上限  $k$  做過討論，所以

研究中直接以次區間數量  $m$  為 100、積分上限  $k$  為 5000，並且假設模型阻尼比( $\xi$ )為 0.05，Poisson ratio 為  $1/3$ ，剪力模數為  $G = \bar{G}(1 + 2\xi i)$  來計算。

為簡化討論假設模型之基礎半徑  $a_0$ 、距離  $r$  與波數  $k$  均由頻率 1Hz 之剪力波長無因次化，其剪力波長  $\lambda = \text{Re}(c_s)/1s$  其  $\text{Re}(c_s)$  為剪力波速  $c_s$  之實部，由於剪力模數  $G$  為複數所以  $c_s$  也為複數。而且，因為使用 Gaussian Quadrature method，其積分間隔大小須符合積分點數量，所以(2-56)式之  $D$  矩陣積分  $\Delta r k / \pi \leq 1$  其次區間  $\Delta r$  取 4 個 Gaussian 積分點。而(2-57)式之積分  $\Delta k \cdot r / \pi \leq 1$  其  $k > 1.3k_R$  次區間  $\Delta k$  取 5 個 Gaussian 積分點。 $k_R$  為雷利波數(Rayleigh wave number)， $r$  為計算振動位置之距離。對於  $k \leq 1.3k_R$  其次區間  $\Delta k$  使用  $\Delta k \cdot r / \pi \leq 0.1$  取 5 個 Gaussian 積分點來計算，因為對  $k$  積分在靠近壓力波數、剪力波數跟雷利波數(Rayleigh wave number)時變化更為劇烈。使用以上之積分條件，其半無限積分上限  $\infty$  由合適之  $k_u$  取代。

本研究中總系統為一無質量剛性圓盤，固定於兩層系統中之第一層自由表面如圖(3)，並且受到扭轉(torsional)、垂直(vertical)、翻滾(rocking)、水平(horizontal)之振動。使用無因次化頻率  $\omega a_0 \cdot 1s / 2\pi$  與無因次化距離  $\omega r \cdot 1s / 2\pi$  來計算振幅其中  $\omega = 1\text{Hz}$ 。

因為總系統為線性，所以所有的數值均可無因次化。因此，扭轉(torsional)、垂直(vertical)、水平(horizontal)、耦合(coupling)、翻滾(rocking)之阻抗方程可無因次化如： $I_{TT}/Ga_0^3, I_{VV}/Ga_0, I_{HH}/Ga_0, I_{HR}/Ga_0^2$  與  $I_{RR}/Ga_0^3$ 。而且作用力也可以

用相同的方式正規化。所以可以得到垂直與水平作用力的無因次化，分別為  $F_V/Ga_0\lambda$  與  $F_H/Ga_0\lambda$ ，而扭轉與滾動力偶正規化，分別為  $M_T/Ga_0^3\lambda$  與  $M_R/Ga_0^3\lambda$ ，其中 G 為第一層的剪力模數。由此方法運算導致其求得結果之  $u_r$ 、 $u_z$  與  $u_\theta$  已經由  $\lambda$  無因次化。以上之  $\lambda$  為頻率 1Hz 之剪力波長。

本研究由單位和諧載重作用，即  $F_V = Ga_0\lambda$ ， $F_H = Ga_0\lambda$ ， $M_T/Ga_0^3\lambda$  或  $M_R/Ga_0^3\lambda = 1$  來計算其數值結果。

### 3.2 數據結果

以一無質量之圓盤固定於雙層土壤，其土壤上層為層狀介質土壤下層為半空間層如圖(3)以此假設模型做分析計算。加載扭轉(torsional)、垂直(vertical)、水平(horizontal)、翻滾(rocking)等振動。研究中直接以次區間數量  $m$  為 100、積分上限  $k$  為 5000、Poisson ratio 為 1/3、無因次頻率為  $2\pi$ 、 $a_0$  為無因次半徑 0.1、 $d$  為無因次距離 1、阻尼比為 0.05，而且  $r$  的無因次距離以  $s$  代表，其  $s$  以每間隔為 0.125 計算其振動位移且深度  $z$  以對數座標表示，以下圖中的單位均以  $\lambda$ (為頻率 1Hz 之剪力波長)無因次化，而且圖中之  $u_\theta$  其  $\theta$  為  $90^\circ$ 、 $r$  的無因次距離以  $s$  代表、 $Gt = G_2/G_1$ ：

#### 模型(1)

假設無因次頻率為  $2\pi$ 、 $a_0$  為 0.1、 $d$  為 1、阻尼比為 0.05、剪力模數比  $G_2/G_1$  為 5、積分上限  $k$  為 5000、Poisson ratio 為 1/3 的層狀半空間得其層內振動

圖形為：

1. 垂直振動之  $u_r$  位移與  $u_z$  位移如圖(4)、圖(5)
2. x水平方向上振動之  $u_r$  位移與  $u_z$  位移如圖(6)、圖(7)
3. 翻滾振動之  $u_r$  位移與  $u_z$  位移如圖(8)、圖(9)
4. 扭轉振動之  $u_\theta$  位移如圖(10)
5. 縱向振動之  $u_\theta$  位移如圖(11)
6. y水平方向上振動之  $u_\theta$  位移如圖(12)

模型(1)由圖(4)~圖(12)得層內位移成波動狀衰減。取深度 $z=0、0.25、0.5、0.75、1.0$ 之振動位移曲線。由圖(4)可看出在 $z=0$ 時曲線較緩，隨深度增加變化越趨劇烈而在 $z=1.0$ 時又變緩。圖(6)與圖(8)之變化跟圖(4)相似只是在 $z=0.75$ 時曲線變化就趨緩。圖(11)與圖(4)的曲線變化相同，只是數值大小不同。圖(4)、圖(6)、圖(8)、圖(11)各深度之曲線變化較無規律。圖(5)、圖(7)、圖(9)、圖(10)、圖(12)其曲線在 $z=0\sim 0.25$ 的變化趨緩而在 $z=0.25\sim 0.75$ 曲線變化較劇烈然後在 $z=1.0$ 又變緩。不過圖(4)~圖(12)其振動位移均隨距離 $s$ 的增加振動逐漸變小

模型(2)

假設無因次頻率為  $2\pi$ 、 $a_0$  為 0.1、 $d$  為 1、阻尼比為 0.05 且剪力模數比  $G_2/G_1$  為無限(即半空間層改為剛性基底)、積分上限  $k$  為 5000、Poisson ratio 為 1/3 得其層內振動圖形為：

1. 垂直振動之  $u_r$  位移與  $u_z$  位移如圖(13)、圖(14)
2. x水平方向上振動之  $u_r$  位移與  $u_z$  位移如圖(15)、圖(16)
3. 翻滾振動之  $u_r$  位移與  $u_z$  位移如圖(17)、圖(18)
4. 扭轉振動之  $u_\theta$  位移如圖(19)
5. 縱向振動之  $u_\theta$  位移如圖(20)
6. y水平方向上振動之  $u_\theta$  位移如圖(21)

模型(2)由圖(13)~圖(21)得層內位移成波動狀衰減。取深度 $z=0$ 、 $0.25$ 、 $0.5$ 、 $0.75$ 之振動位移曲線。因為剛性基底所以 $z=1.0$ 振動位移為 $0$ 。由圖(13)、圖(15)可看出在 $z=0$ 時曲線變化劇烈在 $z=0.25$ 較緩， $z=0.25\sim 0.5$ 隨深度增加變化越趨劇烈而在 $z=0.75$ 時又變緩。圖(13)與圖(20)的曲線變化相同，只是數值大小不同。圖(17)之曲線變化隨深度加深就越劇烈。圖(14)、(16)、(18)、(19)、(21)其曲線在 $z=0\sim 0.25$ 的變化趨緩而在 $z=0.25\sim 0.75$ 曲線變化較劇烈。在圖(13)~圖(21)其振動位移均隨距離 $s$ 的增加振動逐漸變小。

將模型(1)與模型(2)做比較可看出在 $s=0\sim 1$ 時變化相同，在 $z=0$ 時模型(2)的振動位移較劇烈，且模型(2)數值較小。圖(13)、圖(15)、圖(17)相對於圖(4)、圖(6)、圖(8)由劇烈變化到和緩的過程發生於較淺的位置。

## 第四章 結論與建議

### 4.1 結論:

由以上之研究計算土壤振幅於層狀土壤介質，所以若有結構物時可直接將其有限元素模型帶入，即可求得土壤振動是否會對高精密儀器造成影響。

從圖(4)~圖(21)中可看出振動位移為波動狀衰減。若建築物在非岩盤基底上，一般來說，由圖(4)~圖(12)( $G_2/G_1 = 5$ )可看出深度增加振動減少，此與一般之預期相符。而圖(13)~圖(21)( $G_2/G_1 = \infty$ )也有相同的現象。研究中取雙層模型計算也可依土壤性質的不同使用更多層來計算，而層厚度也可依實際狀況不同來調整計算。

本研究所使用的方法，相當簡單而且具有自行收斂的性質。因此，在計算時間上與數值結果精度，都比有限元素法跟邊界元素法來的好。

### 4.2 建議:

研究中以剛性圓盤基礎計算層狀土壤位移，所以只用到  $n=0$  與  $n=1$  之傅氏級數，若是不同形狀之基礎如長方形、三角形等等，只要將(2-1)式中加入更多傅氏級數計算即可。此外，本研究假設基礎為剛性，所以也可假設為柔性以適應不同的建築。而且，研究中所使用的 Gaussian Quadrature method 可以再取更高的階數去計算也可以提高精度。

## 參考文獻

1. C.G. Gordon, T.L. Dresner, Methods of developing vibration and acoustic noise specifications for microelectronics process tools, *Vibration Monitoring and Control SPIE Proceedings*, Vol. 2264, July 1994.
2. X. Sheng, C.J.C. Jones and M. Petyt, Ground vibration generated by a load moving along a railway track, *Journal of Sound and Vibration* **228** (1) (1999), pp. 129–156.
3. V.V. Krylov, Vibrational impact of high-speed trains. I: effect of track dynamics, *Journal of the Acoustical Society of America* **100** (5) (1996), pp. 3121–3134.
4. A.M. Kaynic, C. Madshus and P. Zackrisson, Ground vibration from high-speed train: prediction and countermeasure, *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering* **126** (6) (2000), pp. 0531–0573.
5. H. Takemiya and X. Bian, Substructure simulation of inhomogeneous track and layered ground dynamic interaction under train passage, *Journal of Engineering Mechanics* **131** (7) (2005), pp. 699–711.
6. H. Takemiya, Simulation of track-ground vibrations due to high-speed train: the case of X-2000 at Ledsgard, *Journal of Sound Vibration* **261** (2003), pp. 503–526.
7. S. Ahmad and T.M. Al-Hussaini, Simplified design for vibration screening by open and in-filled trenches, *Journal of Geoenvironmental Engineering, ASCE* **117** (1) (1991), pp. 67–88.



8. B. Dasgupta, D.E. Beskos and I.G. Vardoulakis, Vibration isolation using open or filled trenches, part 2, 3D homogenous soil, *Computational Mechanics* (1990), pp. 129–142.
9. H. Takemiya, Field vibration mitigation by honeycomb WIB for pile foundations of a high-speed train viaduct, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* **24** (2004), pp. 69–87.
10. G.F. Miller and H. Pursey, On the partition of energy between elastic waves in a semi-infinite solid, *The Royal Society of London Series A, Mathematical and Physical Sciences* **233** (6) (1955), pp. 55–69.
11. R.J. Apse and J.E. Luco, On the Green's functions for a layered half-space, part II, *Bulletin of Seismological Society of America* **73** (4) (1983), pp. 931–951.
12. R.D. Woods, P.J. Larry, Energy-attenuation relationships from construction vibrations, *Proceedings of Vibration Problems in Geotechnical Engineering Convention*, Detroit, Michigan, 1985, pp. 229–246.
13. G.-S. Liou, Analytical solution for soil–structure interaction in layered media, *Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics* **18** (5) (1989), pp. 667–686.
14. G.-S. Liou, G.C. Lee and R. Ketter, Analytic solution for dynamic loading on half-space medium, *Journal of Engineering Mechanics ASCE* **117** (7) (1991), pp. 1485–1493.
15. Sezawa K. “Further studies on Rayleigh waves having some azimuthal distribution, “Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo Univ. 1929, Vol.6, 1-18.
16. Gin-Show Liou, “Vibrations Induced by Harmonic Loadings Applied at Circular Rigid Plate on Half-space Medium”, *Journal of Sound and Vibration*, , Vol.323,257-269,2009

圖表

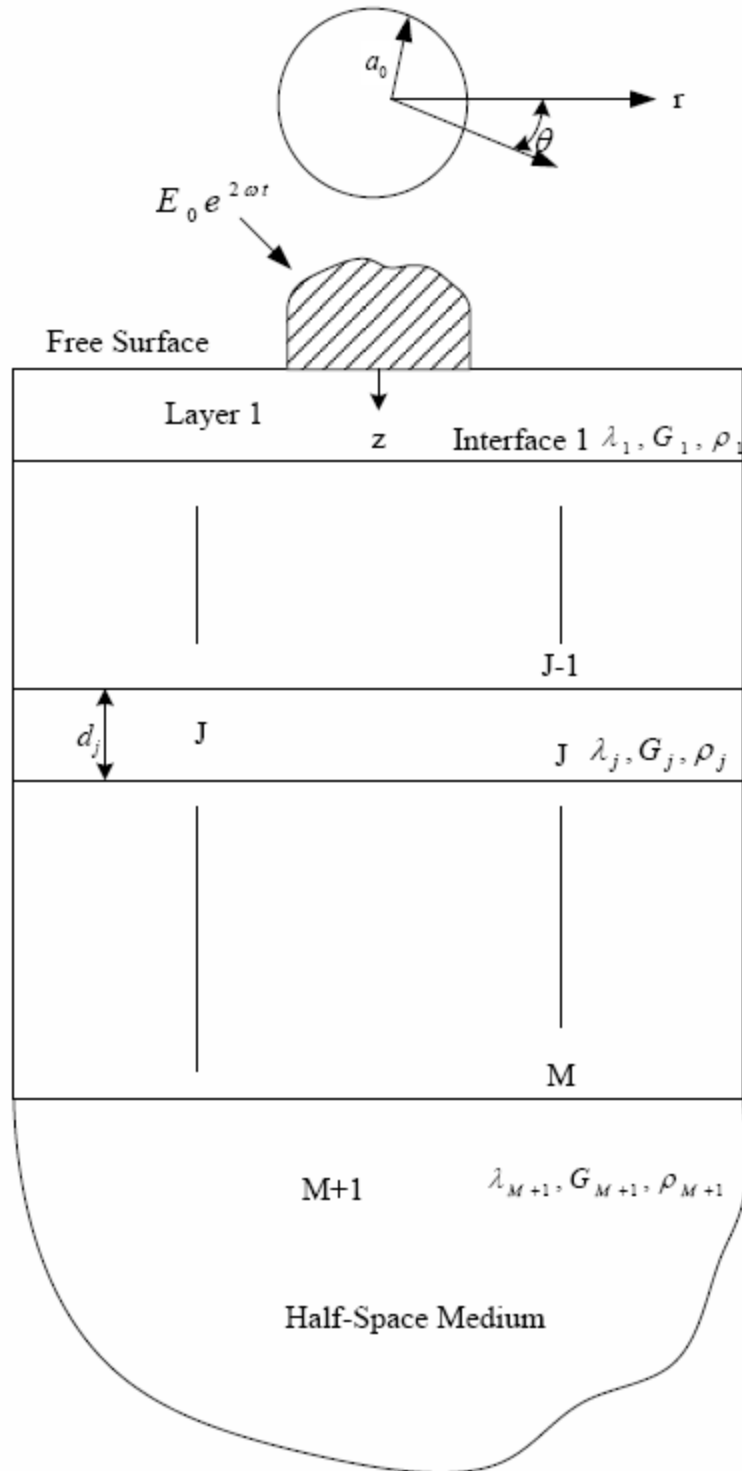


圖 1

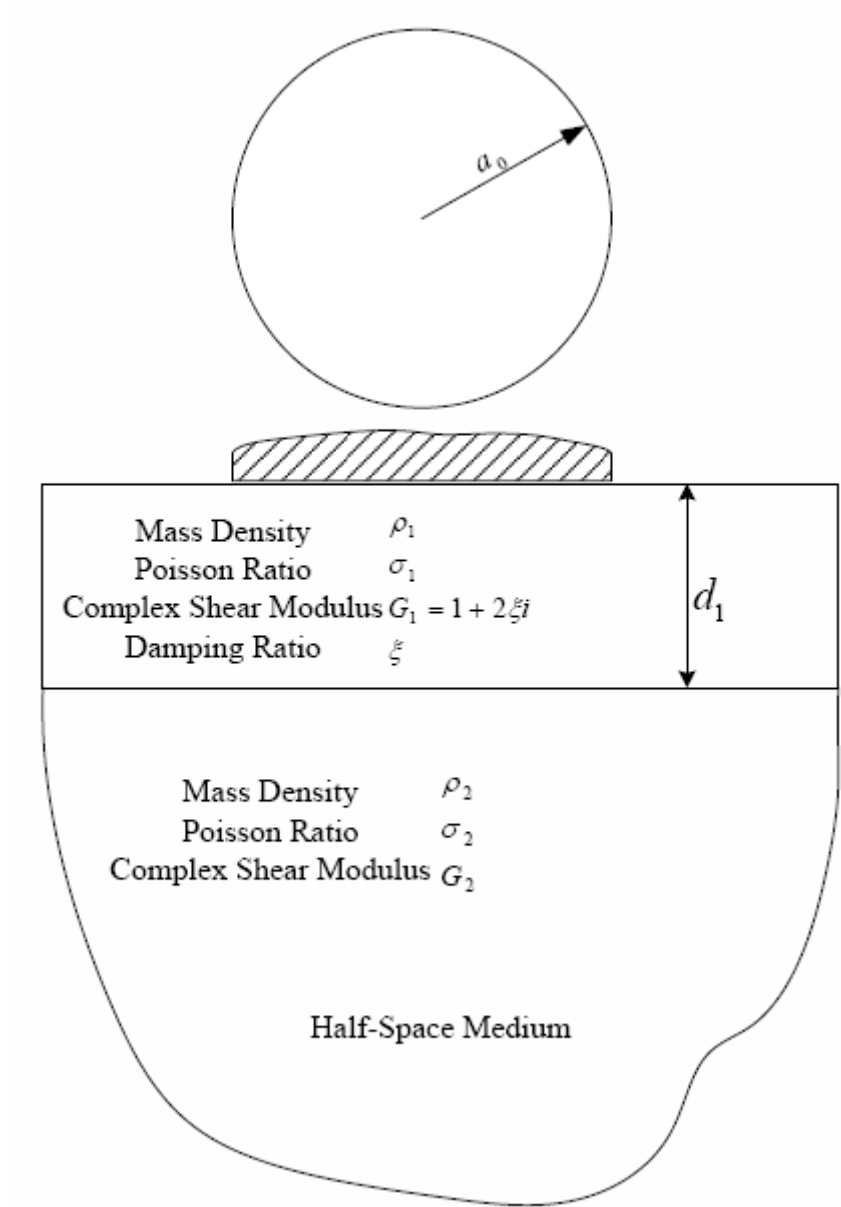


圖 2

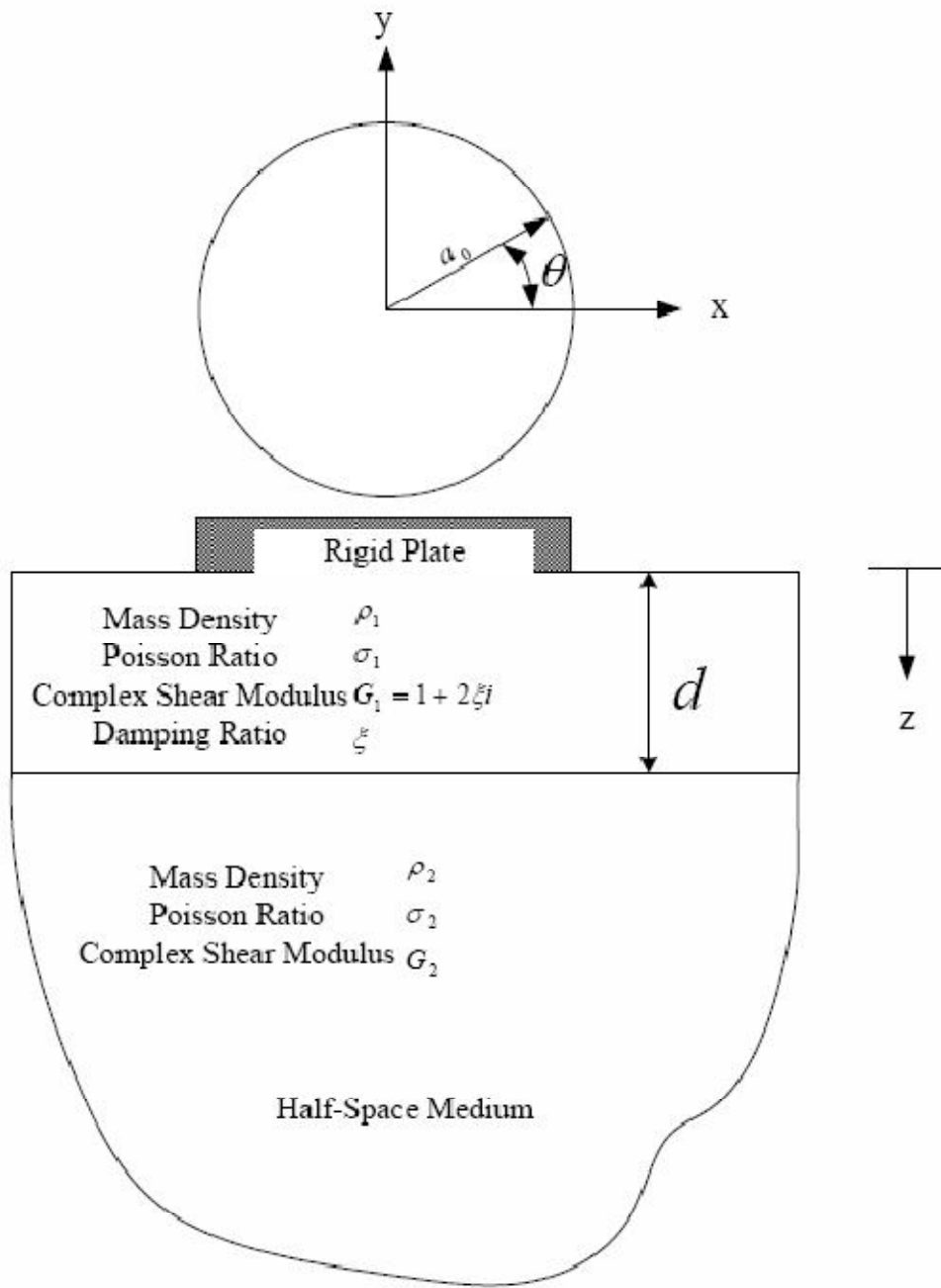


圖 3

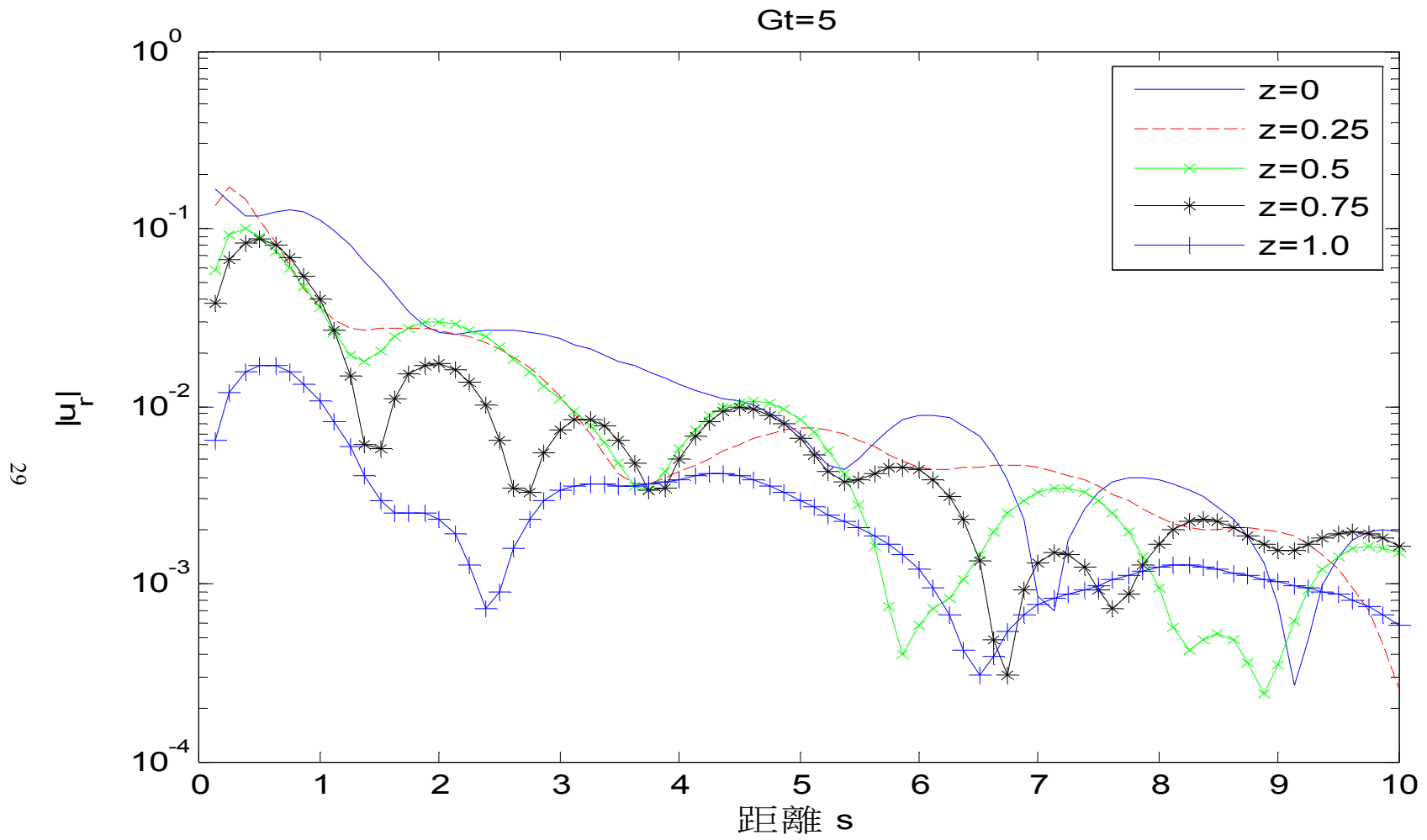


圖 4  $G_2/G_1 = 5$  垂直振動之  $u_r$  位移

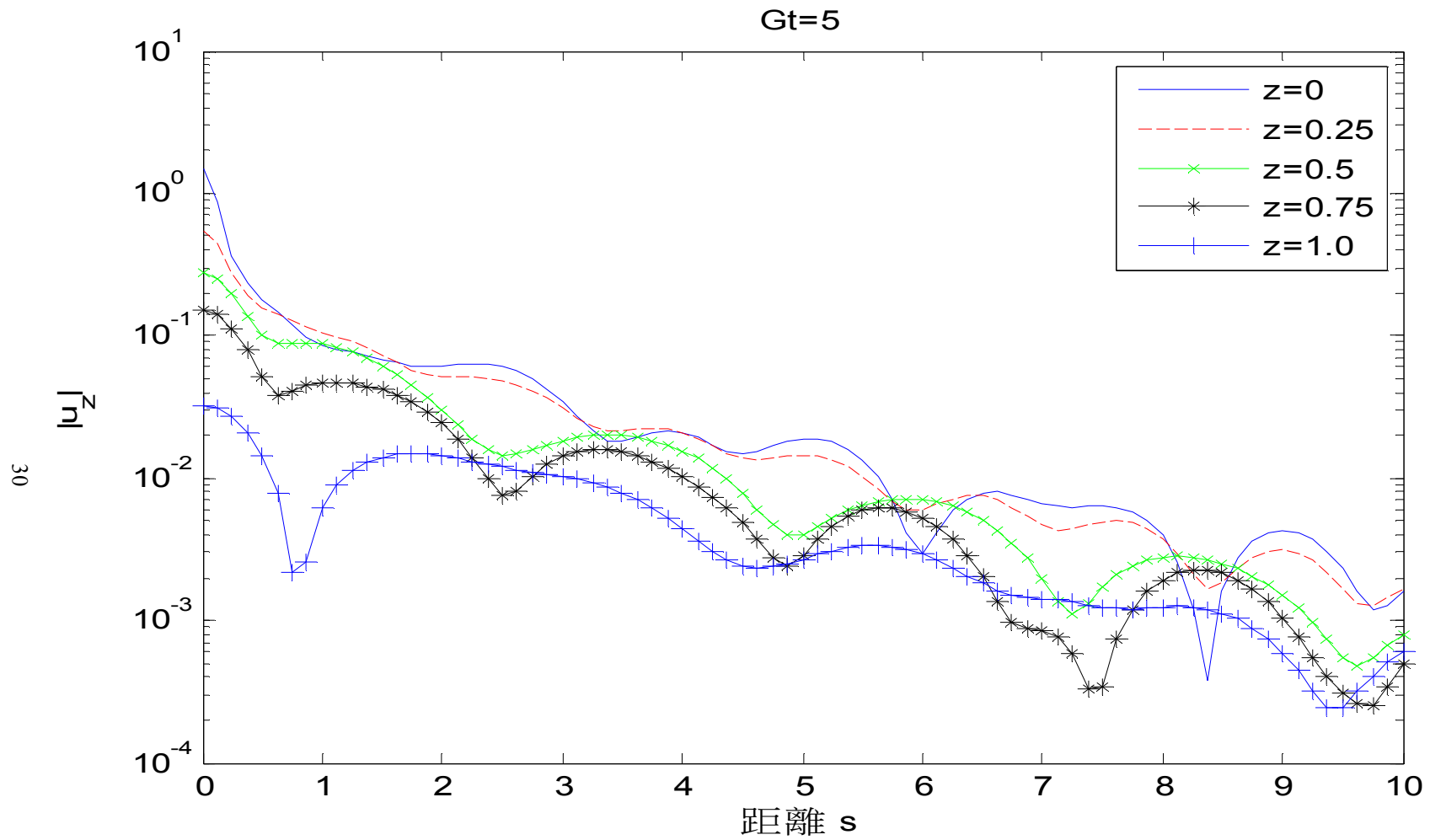


圖 5  $G_2/G_1=5$  垂直振動之  $u_z$  位移

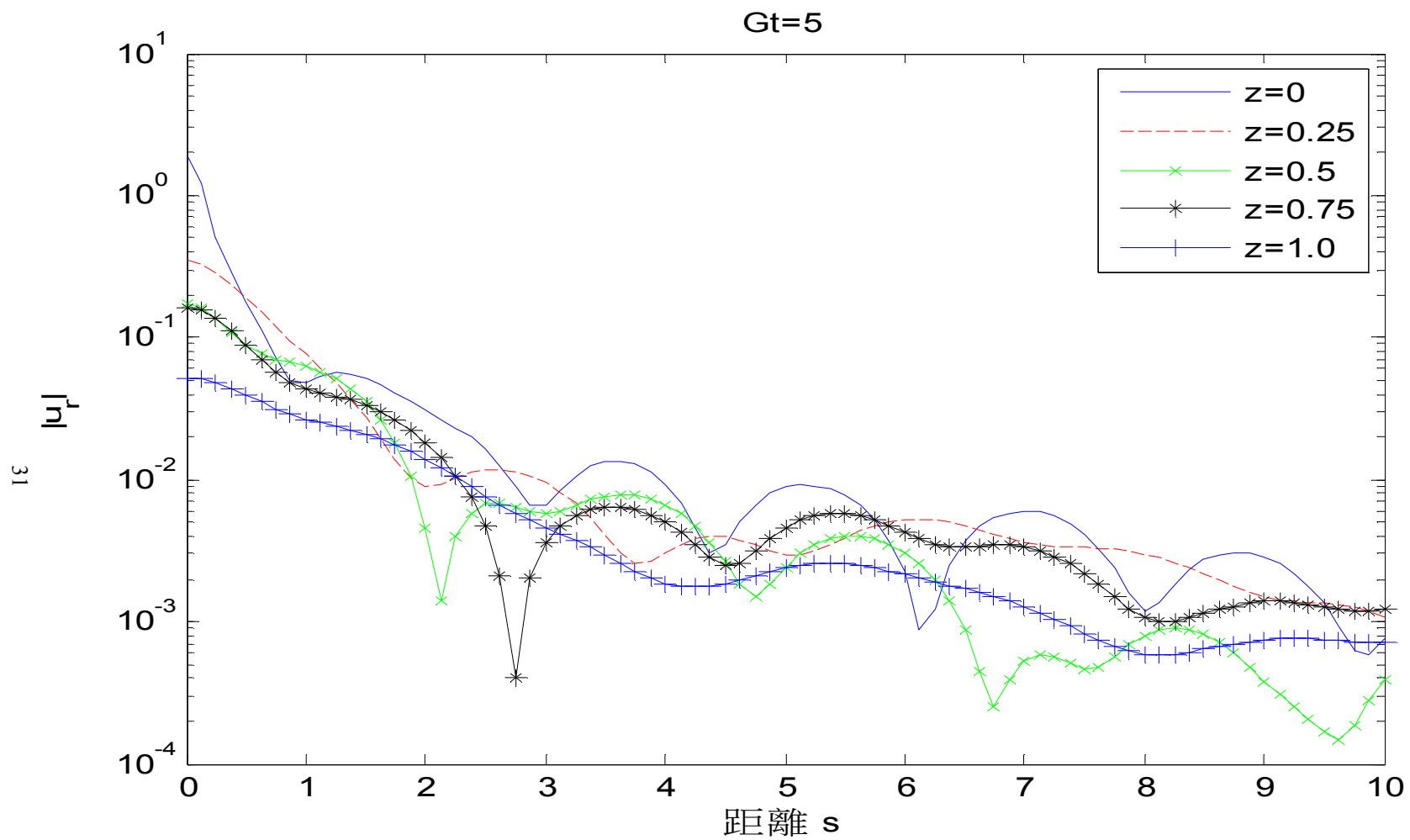


圖 6  $G_2/G_1=5$  之 x 水平方向上振動之  $u_r$  位移

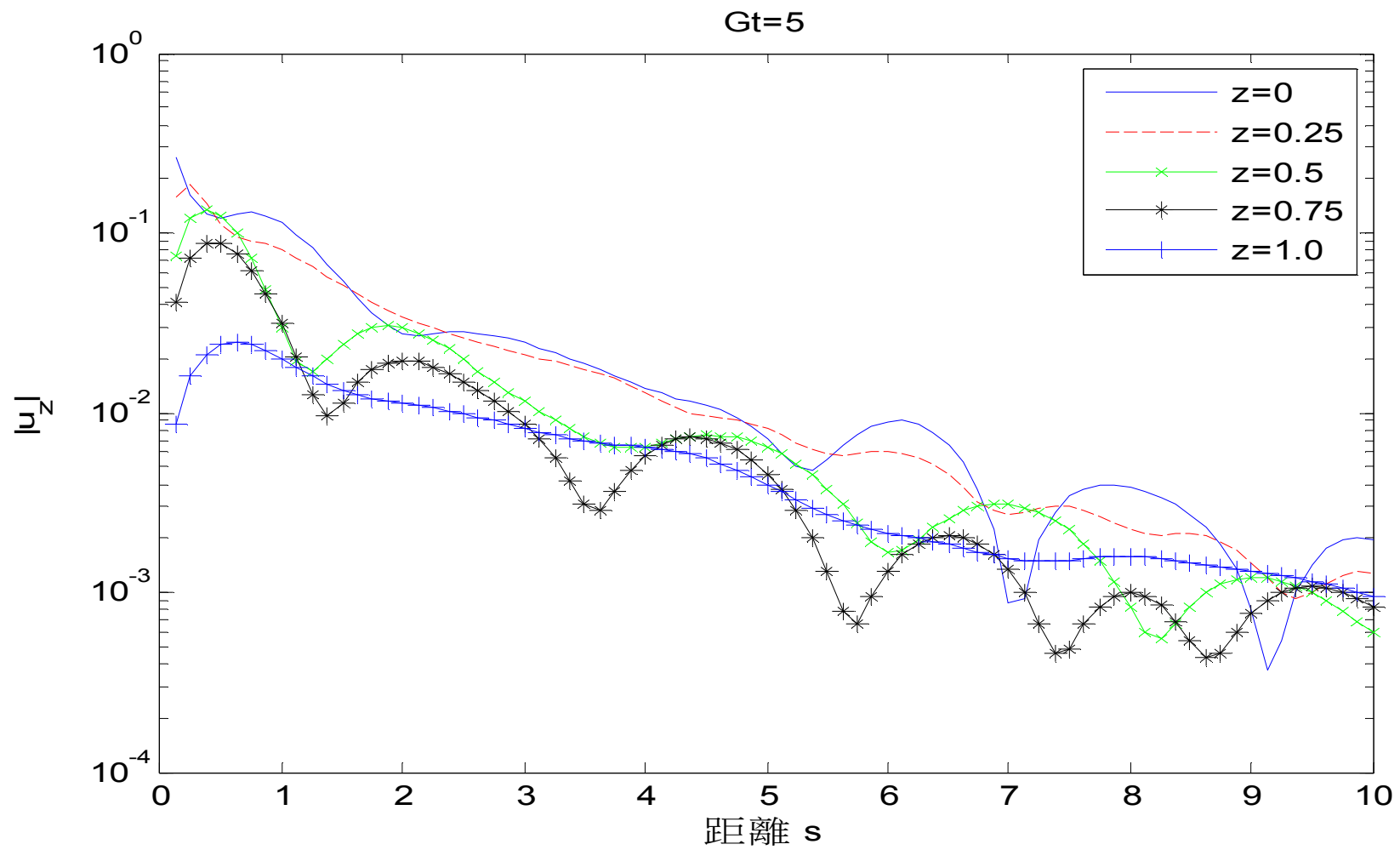


圖 7  $G_2/G_1=5$  之  $x$  水平方向上振動之  $u_z$  位移



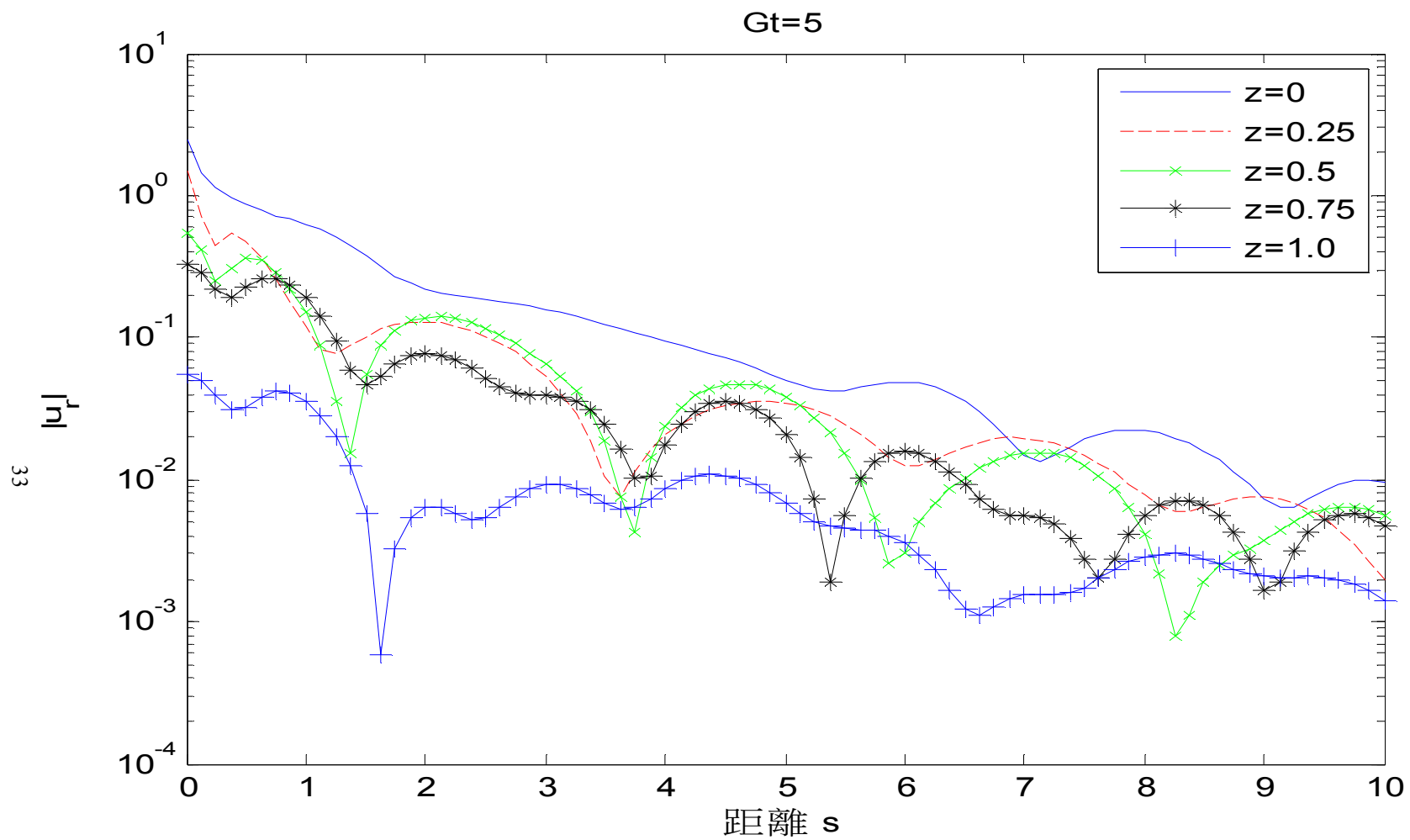


圖 8  $G_2/G_1 = 5$  翻滾振動之  $u_r$  位移

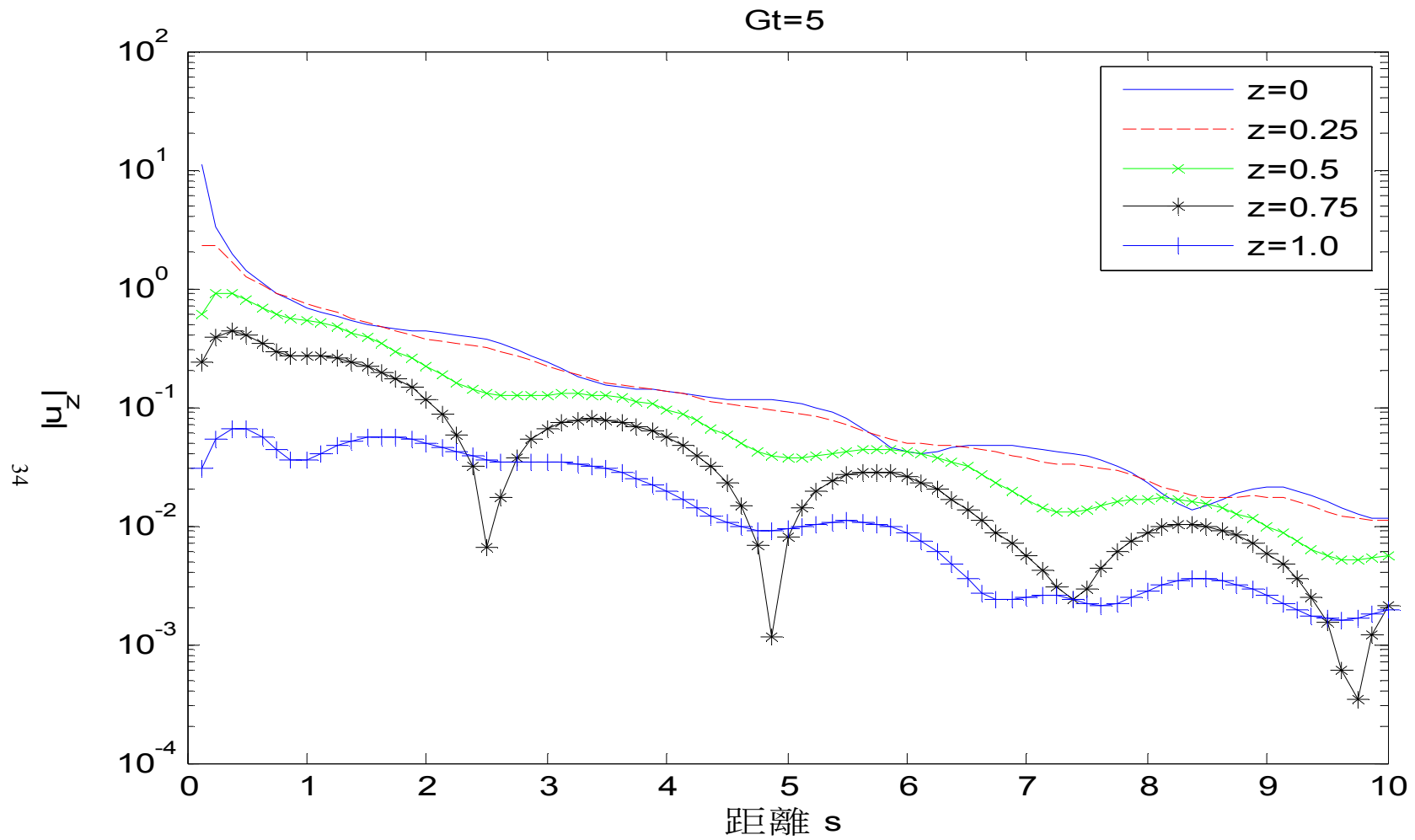


圖 9  $G_2/G_1 = 5$  翻滾振動之  $u_z$  位移

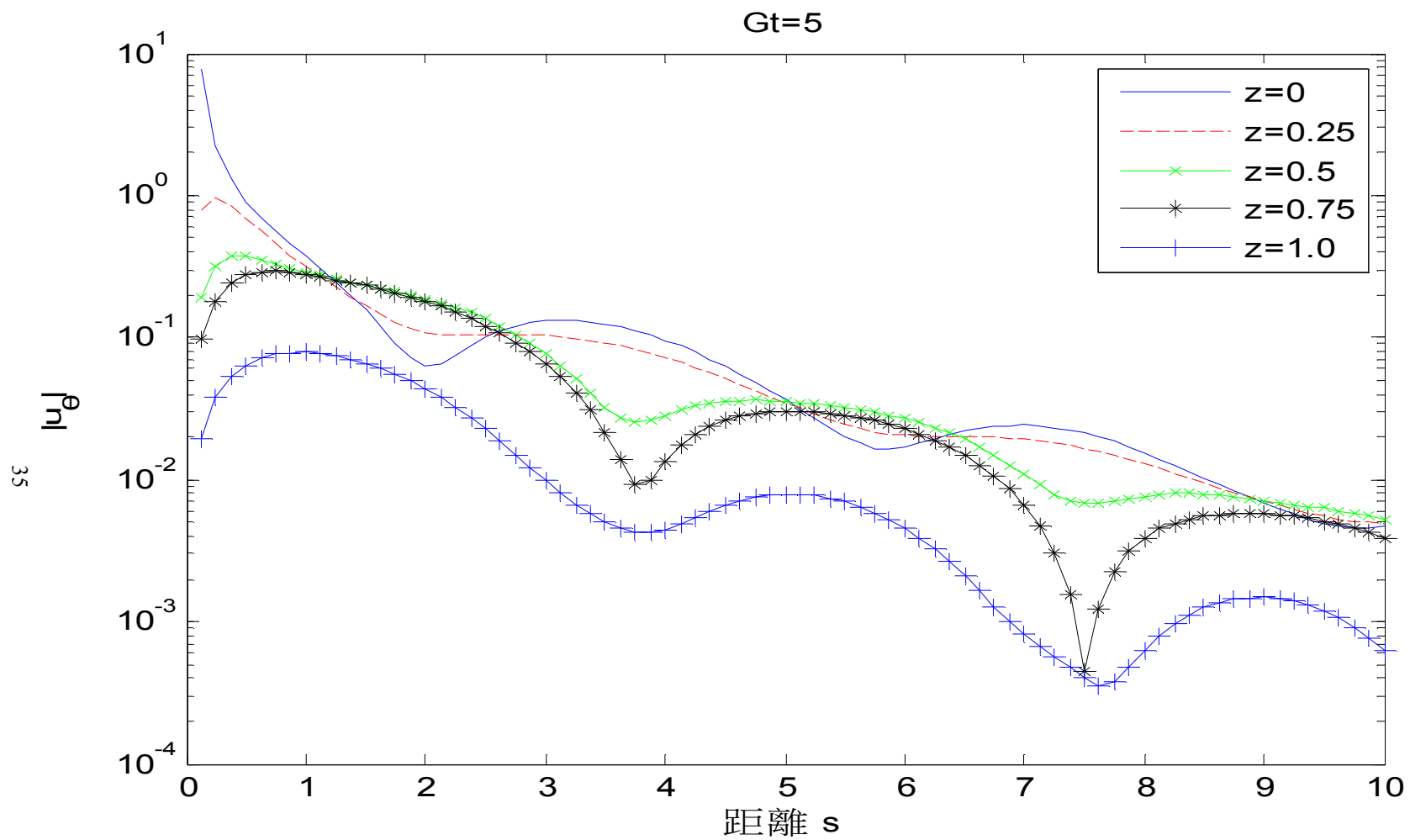


圖 10  $G_2/G_1=5$  扭轉振動之  $u_\theta$  位移

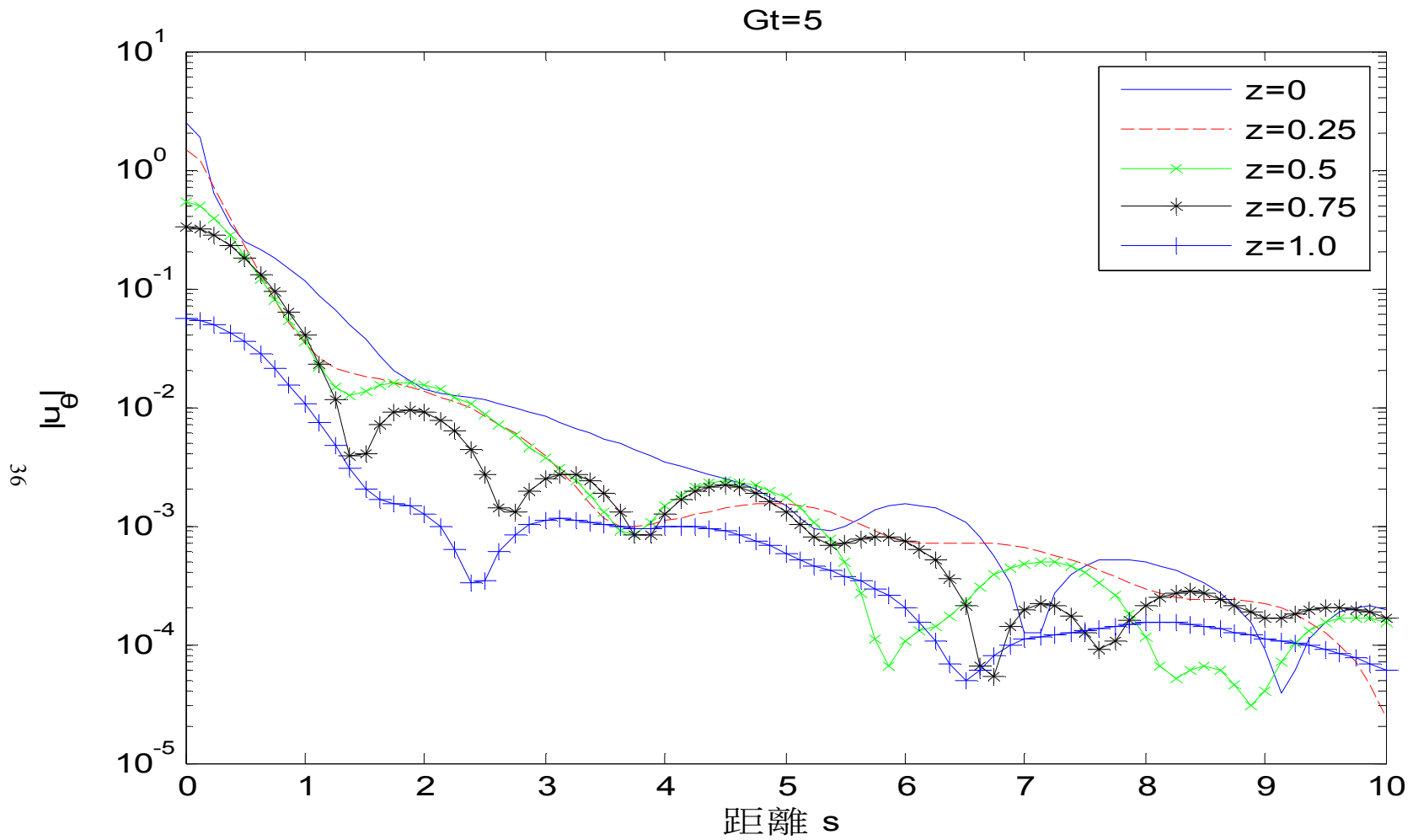


圖 11  $G_2/G_1 = 5$  縱向振動之  $u_0$  位移

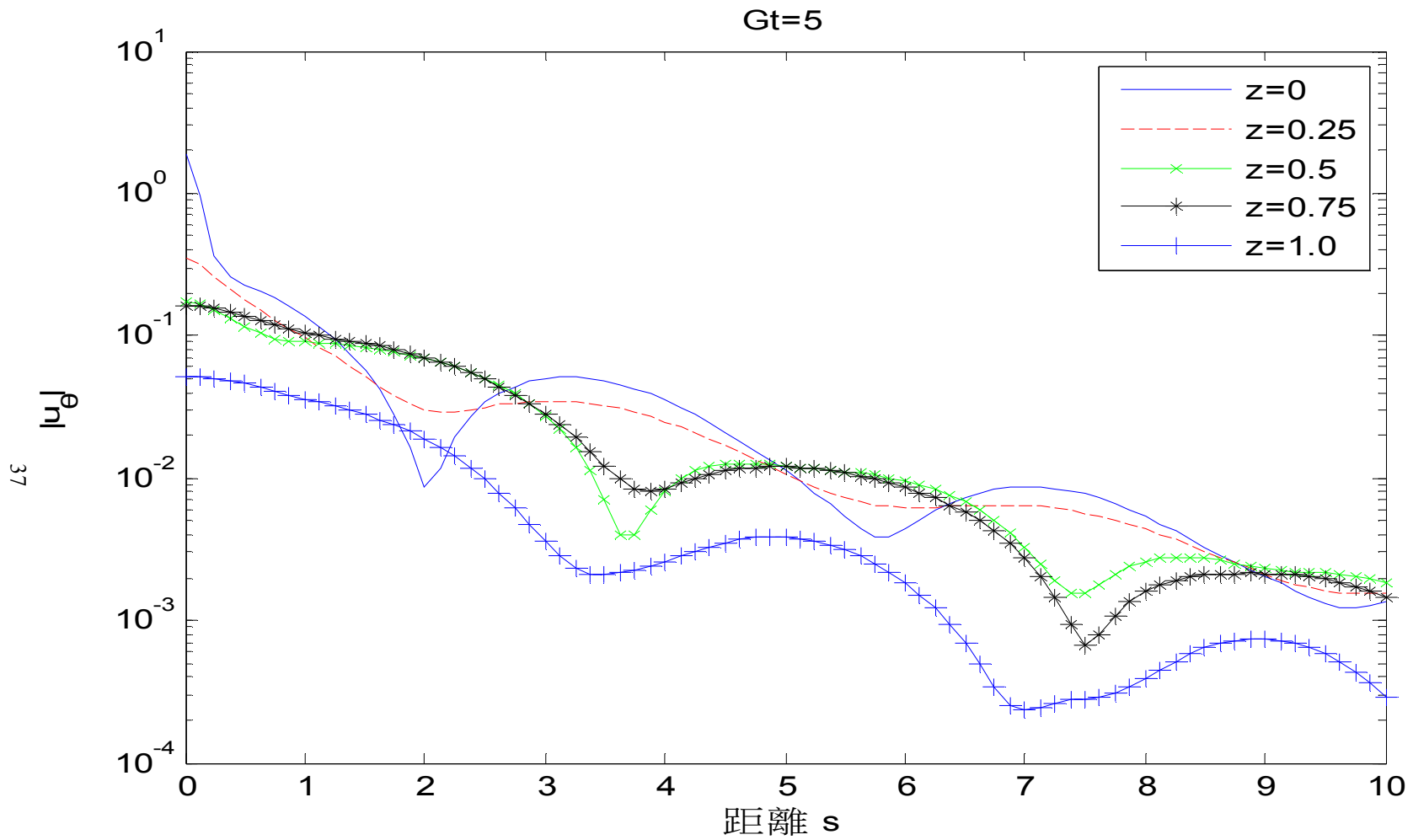


圖 12  $G_2/G_1=5$ 之  $y$  水平方向上振動之  $u_\theta$  位移

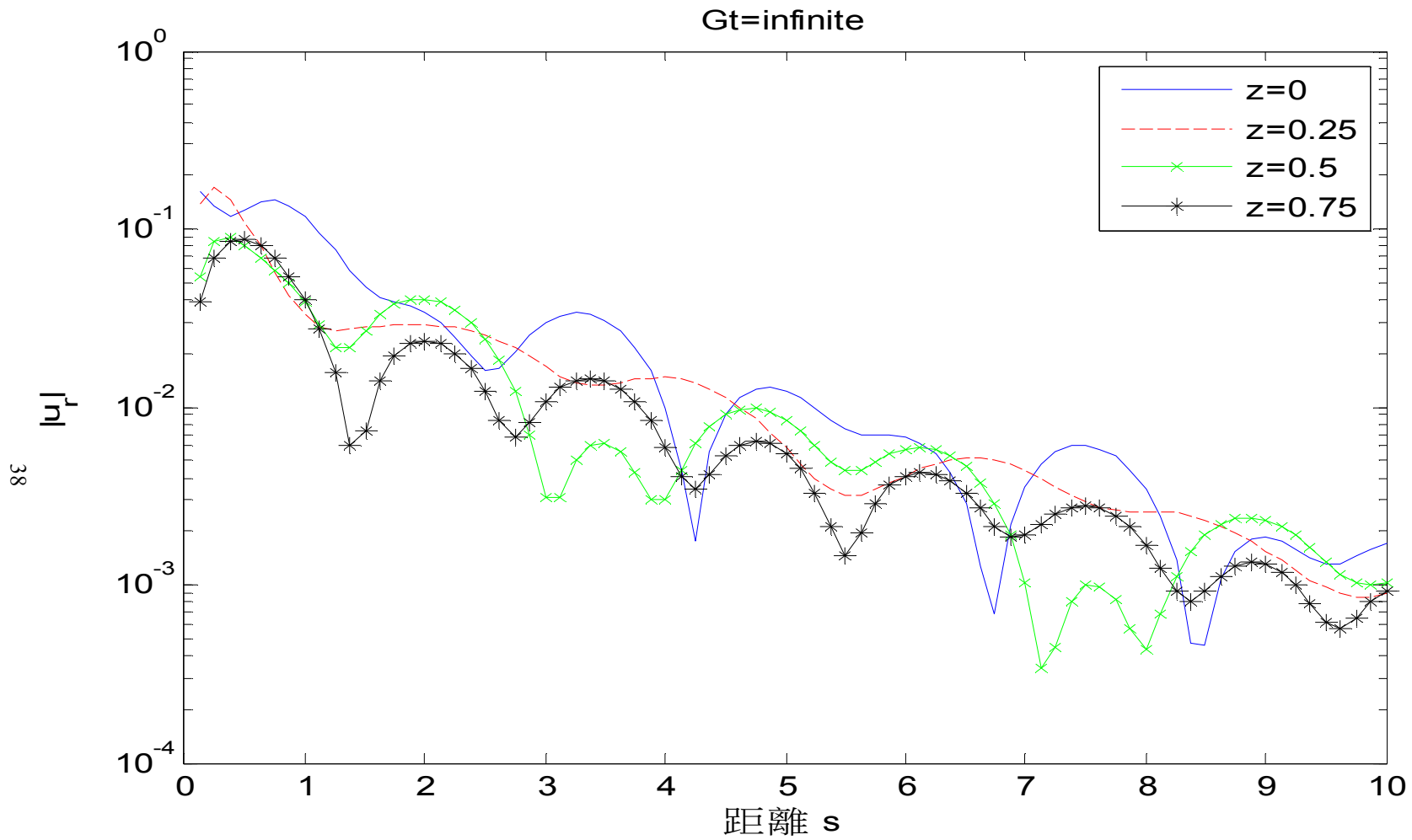


圖 13  $G_2/G_1 = \infty$  垂直振動之  $u_r$  位移

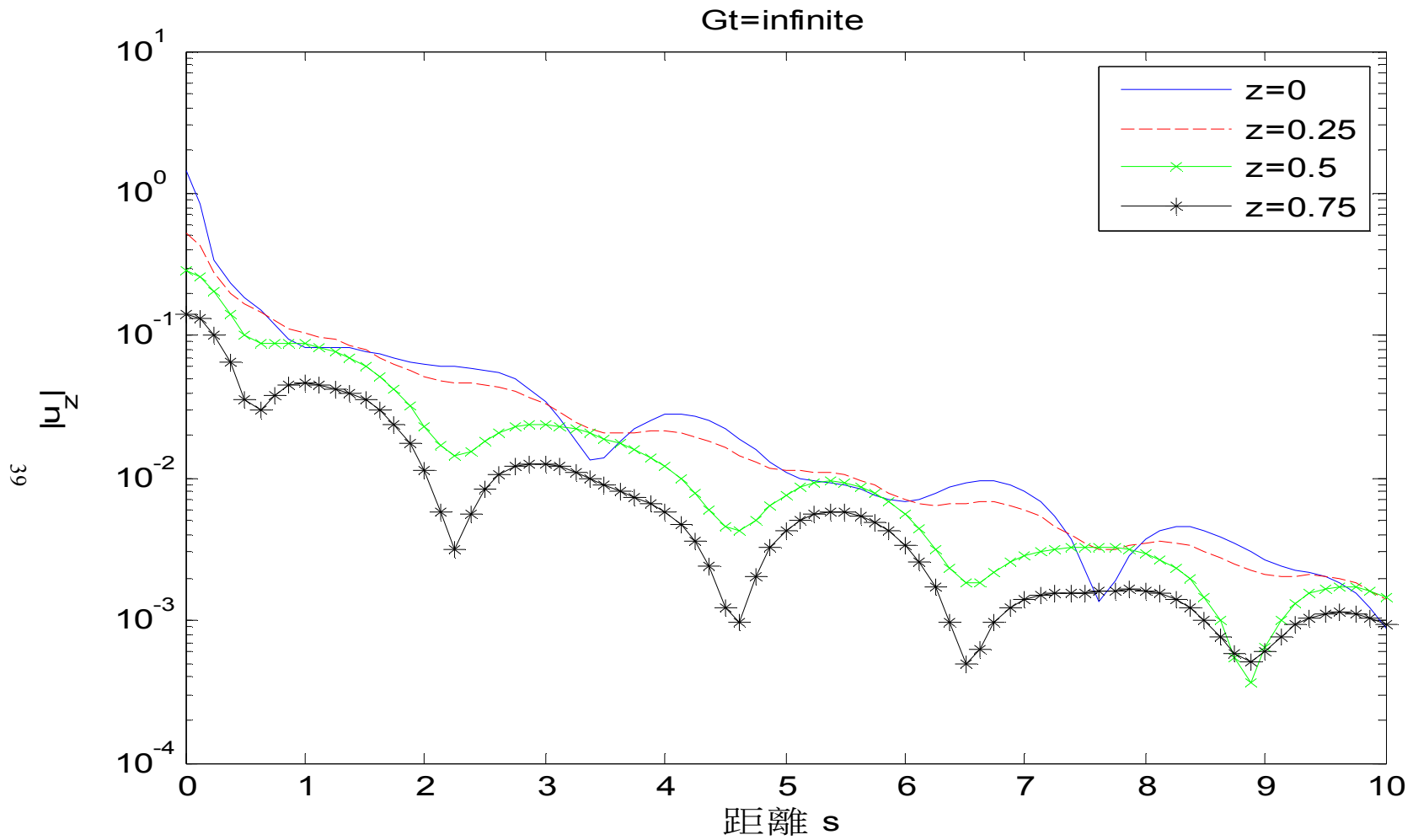


圖 14  $G_2/G_1 = \infty$  垂直振動之  $u_z$  位移

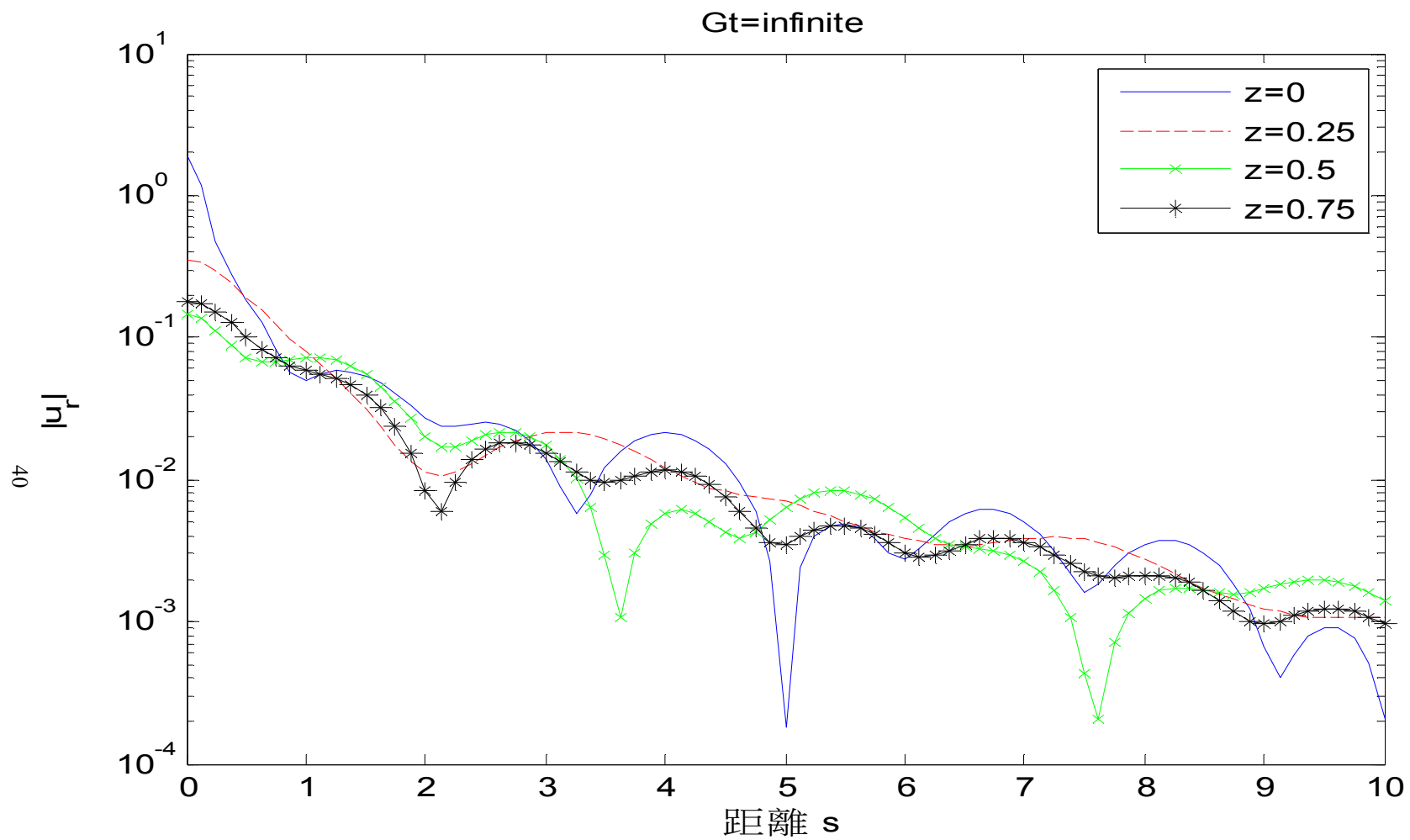


圖 15  $G_2/G_1 = \infty$  之 x 水平方向上振動之  $u_r$  位移



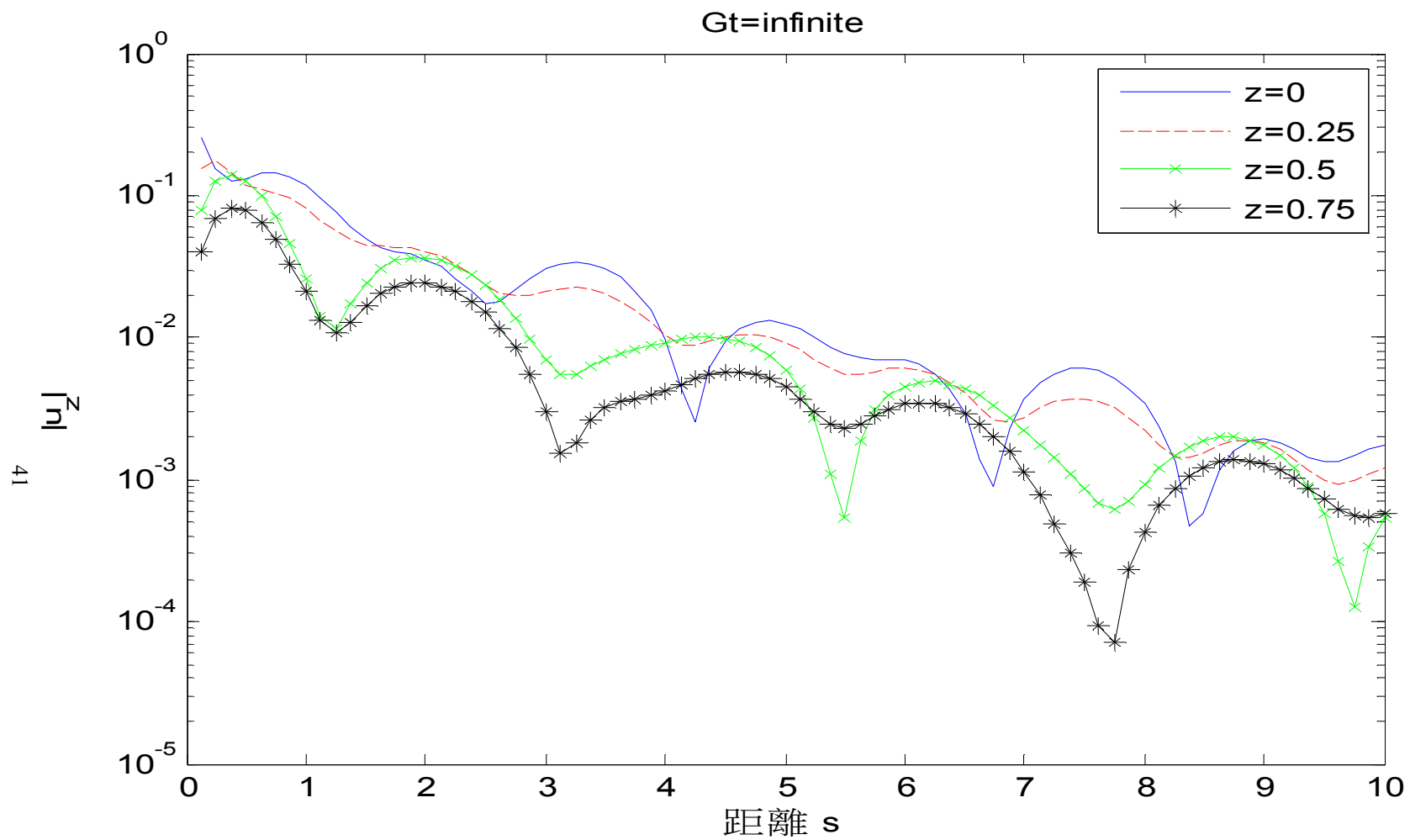


圖 16  $G_2/G_1 = \infty$  之 x 水平方向上振動之  $u_z$  位移

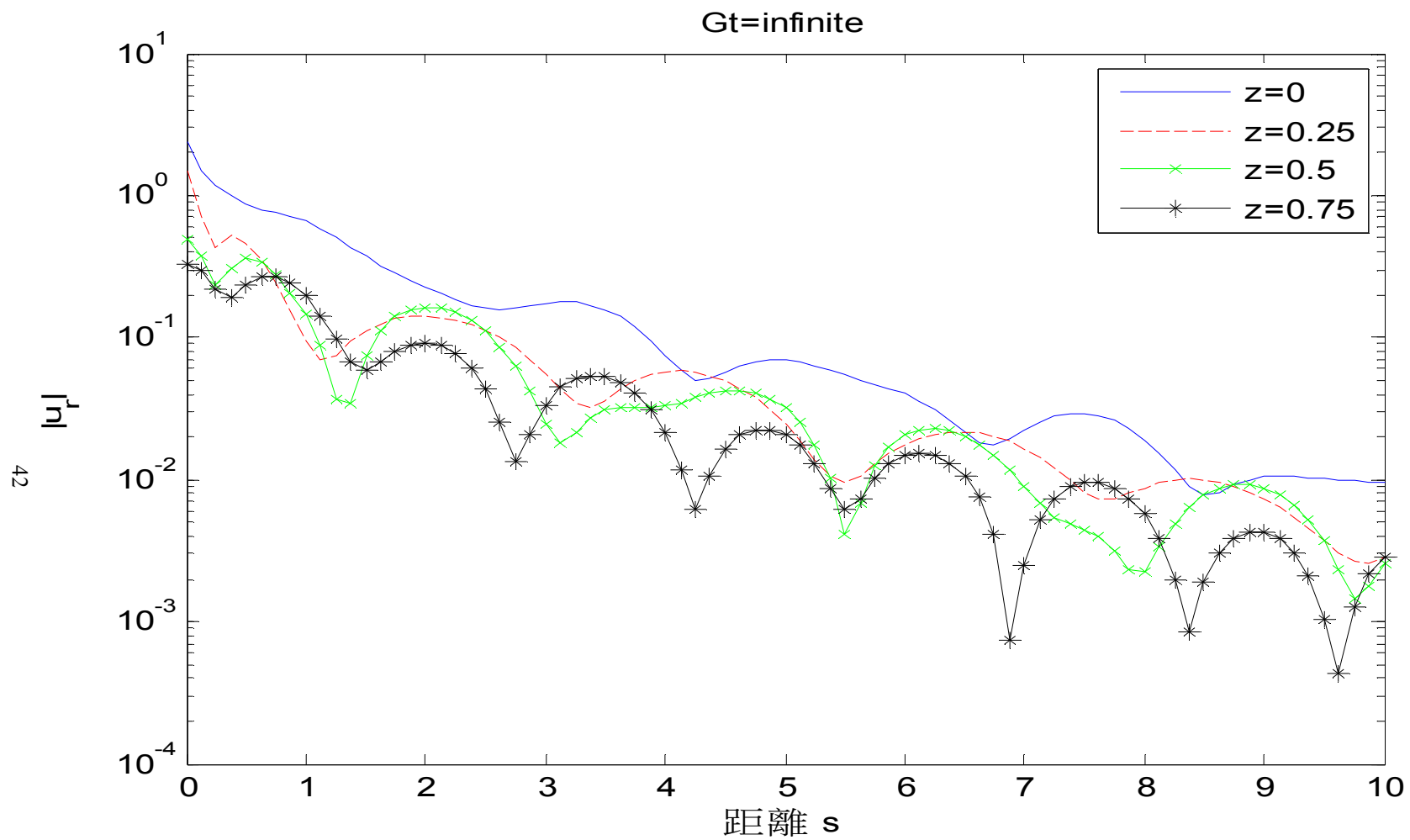


圖 17  $G_2/G_1 = \infty$  翻滾振動之  $u_r$  位移

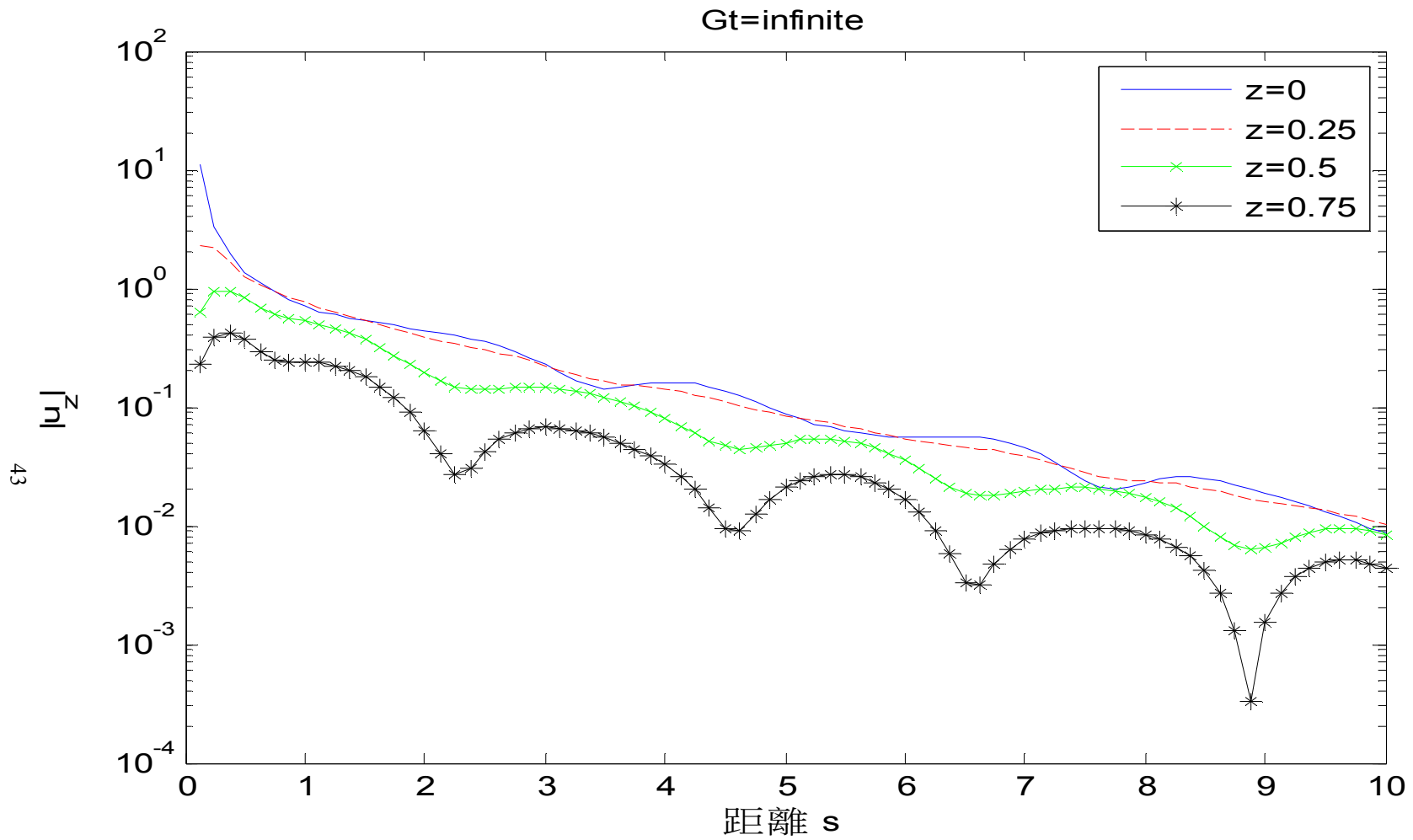


圖 18  $G_2/G_1 = \infty$  翻滾振動之  $u_z$  位移

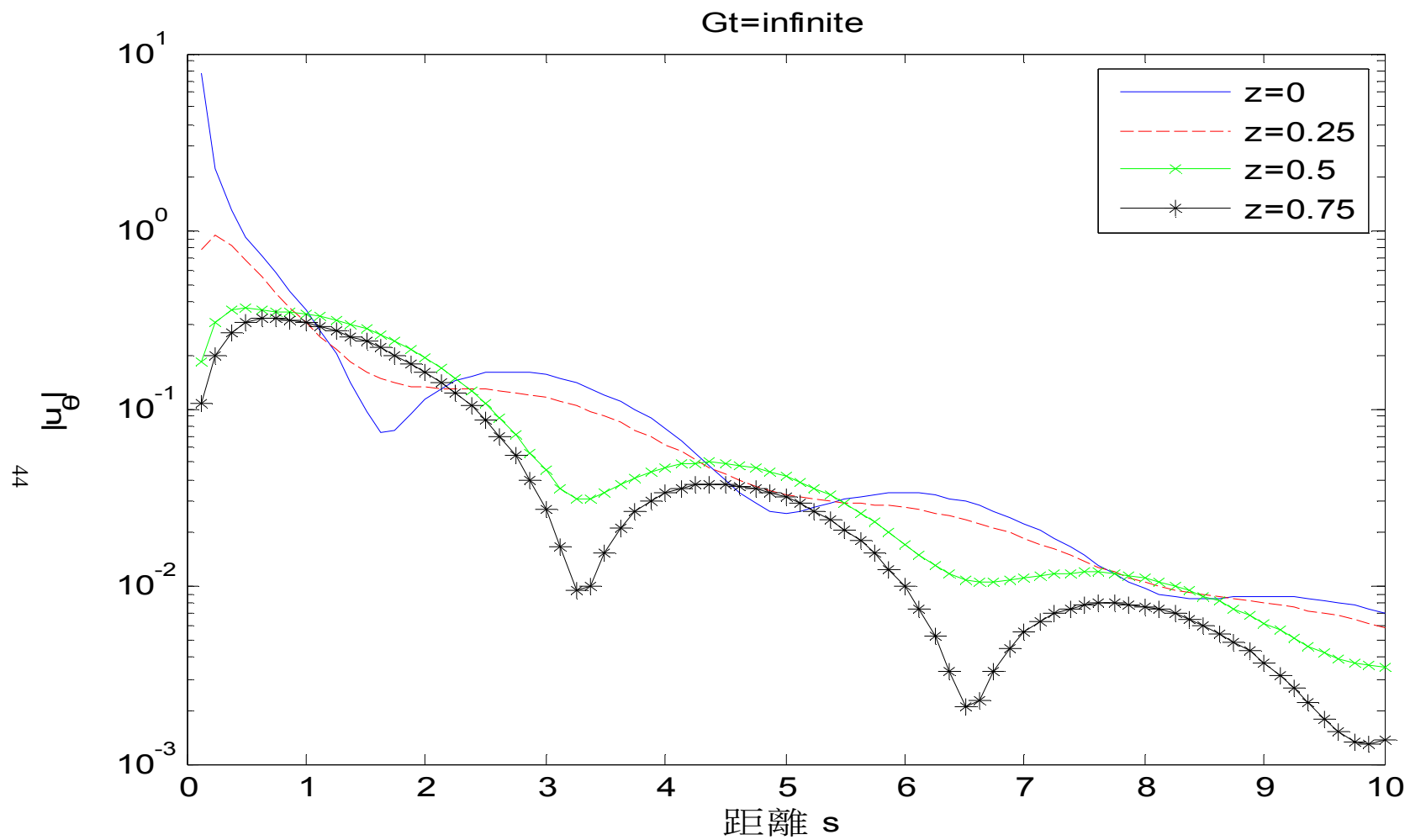


圖 19  $G_2/G_1 = \infty$  扭轉振動之  $u_\theta$  位移

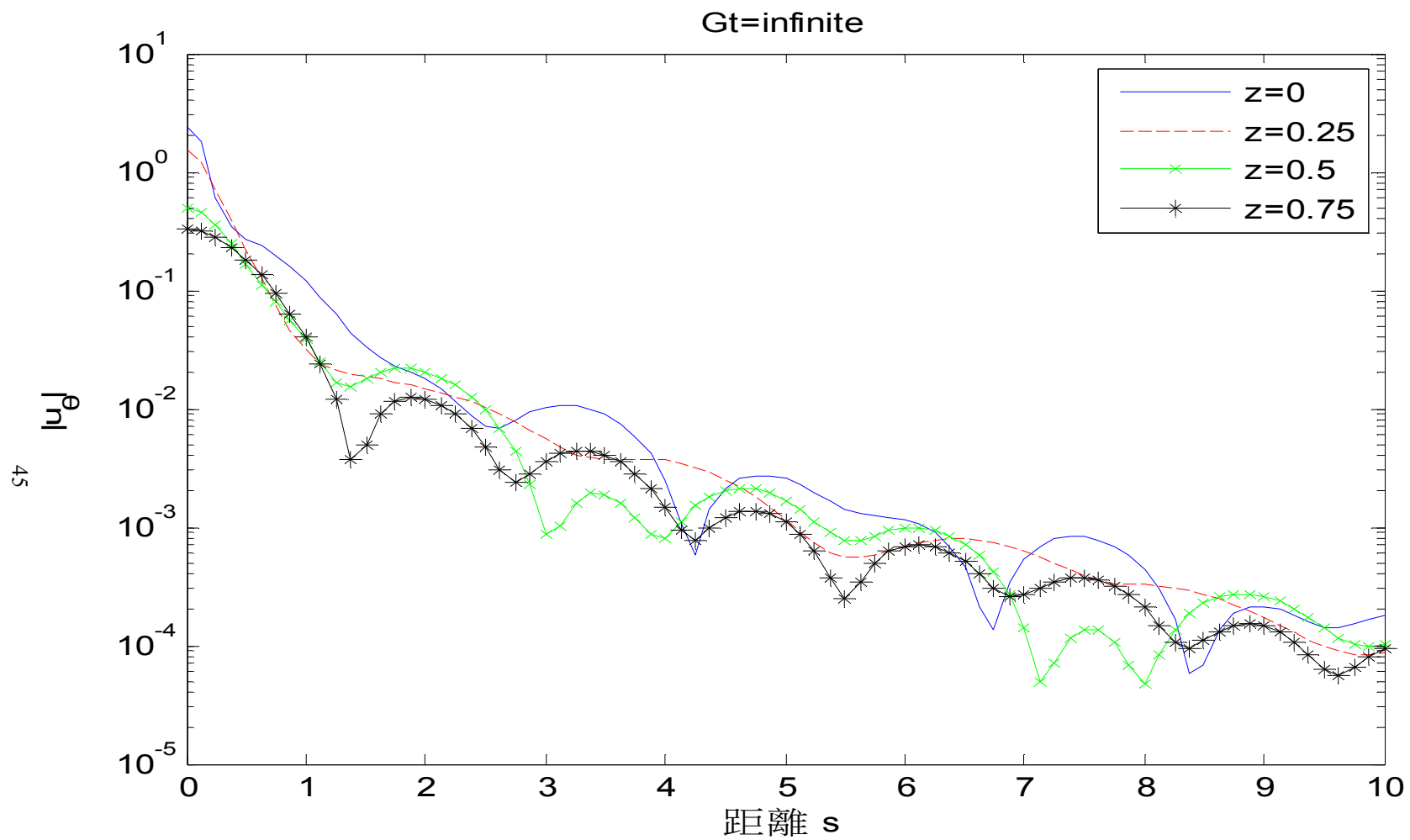


圖 20  $G_2/G_1 = \infty$  縱向振動之  $u_\theta$  位移

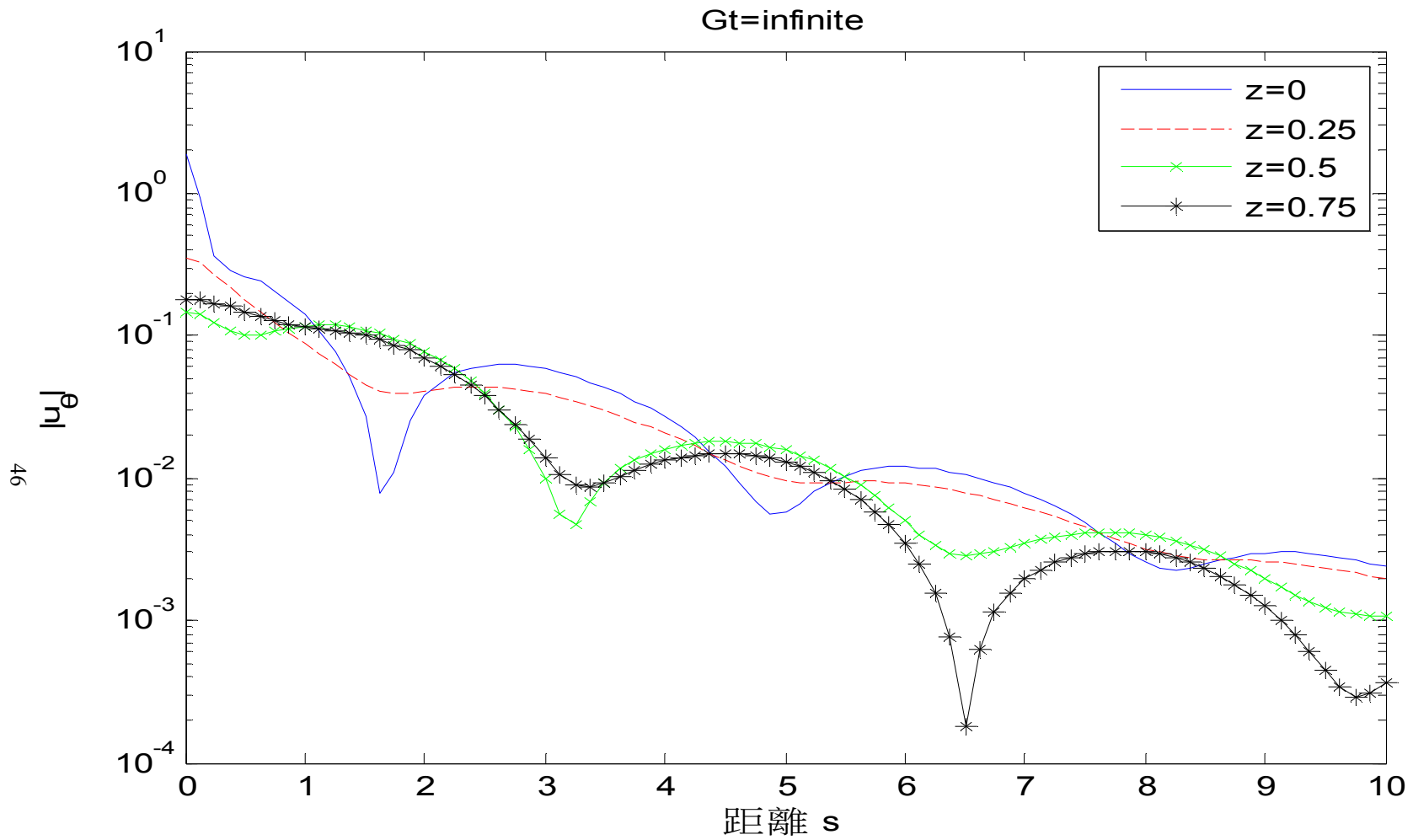


圖 21  $G_2/G_1 = \infty$  之  $y$  水平方向上振動之  $u_\theta$  位移