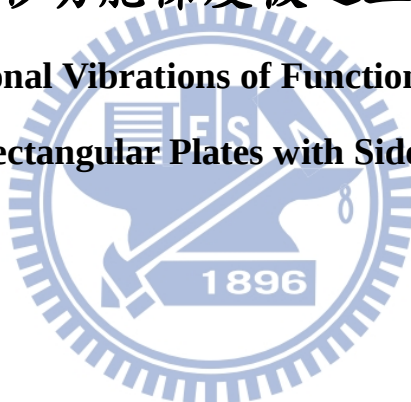




國立交通大學
土木工程學系碩士班
碩 士 論 文

含邊裂縫矩形功能梯度板之三維自由振動分析

Three-Dimensional Vibrations of Functionally Graded Material
Rectangular Plates with Side Cracks



研 究 生：王凱平

指導教授：黃炯憲 博士

中 華 民 國 九 十 九 年 十 一 月

含邊裂縫矩形功能梯度板之三維自由振動分析

Three-Dimensional Vibrations of Functionally Graded Material Rectangular Plates with Side Cracks

研 究 生：王凱平

Student：Kai-Ping Wang

指導教授：黃炯憲

Advisor：Dr. Chiung-Shiann Huang

國 立 交 通 大 學

土 木 工 程 研 究 所

碩 士 論 文

A Thesis

Submitted to Department of Civil Engineering

College of Engineering

National Chiao Tung University

in partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master

in

Civil Engineering

November 2010

Hsinchu, Taiwan, Republic of China

中華民國九十九年十一月

含邊裂縫矩形功能梯度板之三維自由振動分析

研究生：王凱平

指導教授：黃炯憲 博士

國立交通大學土木工程學系碩士班

摘要

此研究分析含邊裂縫矩形功能梯度板之三維自由振動，利用 3D 彈性理論與 Ritz 法；並提出一組新的允許函數，其包含完備正交多項式函數和裂縫函數。所提的裂縫函數滿足跨越裂縫位移不連續之現象，並能正確描述裂縫尖端局部變形及應力場。為驗證所提解及所發展電腦程式的正確性，進行收斂性分析，並與文獻中具裂縫均質板及功能梯度板的結果比較。本文所探討的功能梯度板是由金屬鋁及陶瓷(Al_2O_3 或 ZrO_2)組成的，使用簡單的冪級數與體積分數來描述材料的性質。本文探討不同材料組成、不同邊界、不同厚度、裂縫長度、角度與位置對板的振動行為之影響，並繪有中平面及三維變形之模態圖；此些結果均尚未見於文獻。

Three-Dimensional Vibrations of Functionally Graded Material Rectangular Plates with Side Cracks

Student: Kai-Ping Wang

Adviser: Prof. Chiung-Shiann Huang

Department of Civil Engineering

National Chiao-Tung University

Abstract

This study examines the three-dimensional (3-D) vibrations of rectangular plates of functionally graded material (FGM) having side cracks. Employing 3-D theory of elasticity and a variational Ritz methodology, new hybrid series of mathematically complete orthogonal polynomials and crack functions as the assumed displacement fields are proposed to enhance the convergence modeling of the stress singular behavior of the crack terminus edge front in a rectangular FGM plate. The proposed admissible hybrid series properly describe the $\mathcal{O}(1/\sqrt{r})$ 3-D stress singularities at the terminus edge front of the crack, allowing for displacement discontinuities across the crack sufficient to explain the most general 3-D “mixed modes” of local crack-edge deformation and stress fields typically seen in fracture mechanics. The correctness and validity of the vibration analysis are confirmed through comprehensive convergence studies and comparisons with published results for homogeneous and FGM rectangular plates with side cracks based on various plate theories. Two types of FGM plates, Al/Al₂O₃ and Al/ZrO₂, are included in the study. The locally effective material

properties are estimated by a simple power law and the effects of the volume fraction on the frequencies are investigated. Frequency data, mode shapes and nodal patterns for FGM rectangular plates with different boundary conditions, and having side cracks with varying crack length ratios, crack positions, and crack inclination angles are reported herein for the first time in the published literature.



誌謝

在此，首先感謝指導教授黃炯憲老師在這段期間內，不厭其煩的辛勤指導與悉心教誨，並耐心的一遍又一遍的糾正錯誤，再加上老師不斷的更新設備以及提供優質的研究環境，使得我可以順利及專心的作研究。在我撰寫論文的期間，實在是令修改論文的老師非常費神，老師耐心的修改每一環節，在此致上最深的謝意，感謝老師無私的幫助、教導與關心，最終論文得以順利完成，師恩浩瀚，學生銘記在心，此生難忘。

論文口試期間，承蒙交通大學土木工程學系師長，劉俊秀教授、鄭復平副教授於口試期間提供寶貴的意見，使本文更臻完善，在此表達最由衷的謝意。

在研究所期間，感謝研究室明儒學長、威智學長、榕師學長的指導，在課業與研究上給予極大幫助。尤其是明儒、威智學長，他們已經畢業還要常常打擾他們，提供學弟我解決問題的方向甚至是解決問題，在此致上萬分感謝，學長的幫助，學弟我謹記在心，並以學長當楷模，望有朝一日也能像學長一樣具有解決問題的能力。同時也感謝靖俞學長、政寧學長、昱成學長、仲維學長、以及學弟博然、均誠、中原一起互相鼓勵，讓我在

研究的路上不孤單。另外也要感謝學弟裕鈞、承哲，在口試當天幫忙，使我能更專注的應付口試。

最後將本論文獻給我最親愛家人，爸爸、媽媽與弟弟，感謝爸媽這二十多年的養育、栽培與支持，給予我無後顧之憂的求學環境，你們的辛苦我將銘記在心且繼續努力不讓你們失望。



目錄

中文摘要.....	i
英文摘要.....	ii
誌謝	iv
目錄	vi
表目錄.....	viii
圖目錄.....	xxii
第一章 緒論.....	1
1.1 研究動機與方法.....	1
1.2 文獻回顧.....	2
1.3 內容概要.....	6
第二章 分析方法.....	8
2.1 功能梯度材料的由來.....	8
2.2 功能梯度材料公式.....	10
2.3 3D彈性理論之應變能與動能.....	11
2.4 利用Ritz法求解板之自然振動頻率.....	13
2.5 允許函數之建構.....	15

第三章 收斂性分析	18
3.1 厚度影響	20
3.2 裂縫長度、角度影響	22
3.3 邊界條件影響	23
第四章 數值結果	26
4.1 裂縫對振態頻率之影響	26
4.1.1 四邊簡支(SSSS)板	27
4.1.2 四邊自由端(FFFF)板	28
4.1.3 懸臂(CFFF)板	30
4.1.4 兩端固定端，兩端自由端(CFCF)板	32
4.1.5 不同邊界條件之影響	34
4.2 不同理論所得結果比較	35
4.3 板之振動模態探討	37
第五章 結論與建議	40
5.1 結論	40
5.2 建議	41
參考文獻	42

表目錄

表 2.1 材料參數	48
表 3.1 具水平邊緣裂縫簡支方形均質薄板($a/b = 2.0$, $h/b = 0.01$, c_y $/b = 0.5$, $d/a = 0.5$, $\alpha = 0^\circ$)之無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho/E}$ 收 斂性分析	49
表 3.2 具水平邊緣裂縫簡支之Al/Al ₂ O ₃ FGM方形厚板($h/b = 0.1$, c_y $/b = 0.5$, $d/a = 0.5$, $\alpha = 0^\circ$, $\hat{n}=1$)之無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ 收斂性分析	52
表 3.3 具邊緣裂縫四邊自由端之Al/Al ₂ O ₃ FGM方形薄板($h/b = 0.02$, $c_y/b = 0.5$, $d/a = 0.5$, $\alpha = 30^\circ$, $\hat{n}=10$)之無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ 收斂性分析	55
表 3.4 具邊緣裂縫四邊自由端之Al/Al ₂ O ₃ FGM方形厚板($h/b = 0.3$, $c_y/b = 0.5$, $d/a = 0.2$, $\alpha = 30^\circ$, $\hat{n}=10$)之無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ 收斂性分析	58
表 3.5 具邊緣裂縫四邊自由端之Al/Al ₂ O ₃ FGM方形厚板($h/b = 0.3$, $c_y/b = 0.5$, $d/a = 0.5$, $\alpha = 30^\circ$, $\hat{n}=10$)之無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ 收斂性分析	61

表 3.6 具頂部裂縫懸臂之Al/Al ₂ O ₃ FGM矩形薄板($a/b = 2.0, h/b = 0.02, c_y/b = 1.0, d/a = 0.5, \alpha = 90^\circ, \hat{n} = 0.2$)之無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ 收斂性分析	64
表 3.7 具頂部裂縫懸臂之Al/Al ₂ O ₃ FGM矩形厚板($a/b = 2.0, h/b = 0.3, c_y/b = 1.0, d/b = 0.2, \alpha = 90^\circ, \hat{n} = 0.2$)之無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ 收斂性分析	67
表 3.8 具頂部裂縫懸臂之Al/Al ₂ O ₃ FGM矩形厚板($a/b = 2.0, h/b = 0.3, c_y/b = 1.0, d/b = 0.5, \alpha = 90^\circ, \hat{n} = 0.2$)之無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ 收斂性分析	70
表 3.9 具頂部裂縫兩端自由端，兩端固定端之Al/ ZrO ₂ FGM矩形薄板($a/b = 2.0, h/b = 0.02, c_y/b = 0.5, d/b = 0.5, \alpha = 135^\circ, \hat{n} = 5$)之無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ 收斂性分析	73
表 3.10 具頂部裂縫兩端自由端，兩端固定端之Al/ ZrO ₂ FGM矩形厚板($a/b = 2.0, h/b = 0.3, c_y/b = 0.5, d/b = 0.2, \alpha = 135^\circ, \hat{n} = 5$)之無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ 收斂性分析	76
表 3.11 具頂部裂縫兩端自由端，兩端固定端之Al/ ZrO ₂ FGM矩形厚板($a/b = 2.0, h/b = 0.3, c_y/b = 0.5, d/b = 0.5, \alpha = 135^\circ, \hat{n} = 5$)之無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ 收斂性分析	79

表 4.1 具不同水平邊緣裂縫簡支之Al/Al₂O₃ 方形FGM薄板無因次化

頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($h/b = 0.05$) 82

表 4.2 具不同水平邊緣裂縫簡支之Al/Al₂O₃ 方形FGM薄板無因次化

頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($h/b = 0.05$) 83

表 4.3 具不同水平邊緣裂縫簡支之Al/Al₂O₃ 方形FGM厚板無因次化

頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($h/b = 0.1$) 84

表 4.4 具不同水平邊緣裂縫簡支之Al/Al₂O₃ 方形FGM厚板無因次化

頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($h/b = 0.1$) 85

表 4.5 具不同水平邊緣裂縫簡支之Al/Al₂O₃ 方形FGM厚板無因次化

頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($h/b = 0.2$) 86

表 4.6 具不同水平邊緣裂縫簡支之Al/Al₂O₃ 方形FGM厚板無因次化

頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($h/b = 0.2$) 87

表 4.7 具不同邊緣裂縫四邊自由端之Al/Al₂O₃ 方形FGM薄板無因次

化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($h/b = 0.02$) 88

表 4.7 具不同邊緣裂縫四邊自由端之Al/Al₂O₃ 方形FGM薄板無因次

化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b = 1$ 、 $h/b = 0.02$) 89

表 4.7 具不同邊緣裂縫四邊自由端之Al/Al₂O₃ 方形FGM薄板無因次

化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b = 1$ 、 $h/b = 0.02$) 90

表 4.7 具不同邊緣裂縫四邊自由端之Al/Al₂O₃ 方形FGM薄板無因次

化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=1$ 、 $h/b=0.02$) 91

表 4.7 具不同邊緣裂縫四邊自由端之Al/Al₂O₃ 方形FGM薄板無因次

化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=1$ 、 $h/b=0.02$) 92

表 4.7 具不同邊緣裂縫四邊自由端之Al/Al₂O₃ 方形FGM薄板無因次

化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=1$ 、 $h/b=0.02$) 93

表 4.7 具不同邊緣裂縫四邊自由端之Al/Al₂O₃ 方形FGM薄板無因次

化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=1$ 、 $h/b=0.02$) 94

表 4.7 具不同邊緣裂縫四邊自由端之Al/Al₂O₃ 方形FGM薄板無因次

化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=1$ 、 $h/b=0.02$) 95

表 4.7 具不同邊緣裂縫四邊自由端之Al/Al₂O₃ 方形FGM薄板無因次

化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=1$ 、 $h/b=0.02$) 96

表 4.7 具不同邊緣裂縫四邊自由端之Al/Al₂O₃ 方形FGM薄板無因次

化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=1$ 、 $h/b=0.02$) 97

表 4.8 具不同邊緣裂縫四邊自由端之Al/Al₂O₃ 方形FGM厚板無因次

化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=1$ 、 $h/b=0.1$) 98

表 4.8 具不同邊緣裂縫四邊自由端之Al/Al₂O₃ 方形FGM厚板無因次

化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=1$ 、 $h/b=0.1$) 99

表 4.8 具不同邊緣裂縫四邊自由端之Al/Al₂O₃ 方形FGM厚板無因次

化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=1$ 、 $h/b=0.1$) 100

表 4.8 具不同邊緣裂縫四邊自由端之Al/Al₂O₃ 方形FGM厚板無因次

化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=1$ 、 $h/b=0.1$) 101

表 4.8 具不同邊緣裂縫四邊自由端之Al/Al₂O₃ 方形FGM厚板無因次

化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=1$ 、 $h/b=0.1$) 102

表 4.8 具不同邊緣裂縫四邊自由端之Al/Al₂O₃ 方形FGM厚板無因次

化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=1$ 、 $h/b=0.1$) 103

表 4.8 具不同邊緣裂縫四邊自由端之Al/Al₂O₃ 方形FGM厚板無因次

化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=1$ 、 $h/b=0.1$) 104

表 4.8 具不同邊緣裂縫四邊自由端之Al/Al₂O₃ 方形FGM厚板無因次

化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=1$ 、 $h/b=0.1$) 105

表 4.8 具不同邊緣裂縫四邊自由端之Al/Al₂O₃ 方形FGM厚板無因次

化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=1$ 、 $h/b=0.1$) 106

表 4.8 具不同邊緣裂縫四邊自由端之Al/Al₂O₃ 方形FGM厚板無因次

化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=1$ 、 $h/b=0.1$) 107

表 4.9 具不同邊緣裂縫四邊自由端之Al/Al₂O₃ 方形FGM厚板無因次

化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=1$ 、 $h/b=0.3$) 108

表 4.9 具不同邊緣裂縫四邊自由端之Al/Al ₂ O ₃ 方形FGM厚板無因次 化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=1$ 、 $h/b=0.3$)	109
表 4.9 具不同邊緣裂縫四邊自由端之Al/Al ₂ O ₃ 方形FGM厚板無因次 化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=1$ 、 $h/b=0.3$)	110
表 4.9 具不同邊緣裂縫四邊自由端之Al/Al ₂ O ₃ 方形FGM厚板無因次 化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=1$ 、 $h/b=0.3$)	111
表 4.9 具不同邊緣裂縫四邊自由端之Al/Al ₂ O ₃ 方形FGM厚板無因次 化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=1$ 、 $h/b=0.3$)	112
表 4.9 具不同邊緣裂縫四邊自由端之Al/Al ₂ O ₃ 方形FGM厚板無因次 化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=1$ 、 $h/b=0.3$)	113
表 4.9 具不同邊緣裂縫四邊自由端之Al/Al ₂ O ₃ 方形FGM厚板無因次 化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=1$ 、 $h/b=0.3$)	114
表 4.9 具不同邊緣裂縫四邊自由端之Al/Al ₂ O ₃ 方形FGM厚板無因次 化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=1$ 、 $h/b=0.3$)	115
表 4.9 具不同邊緣裂縫四邊自由端之Al/Al ₂ O ₃ 方形FGM厚板無因次 化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=1$ 、 $h/b=0.3$)	116
表 4.9 具不同邊緣裂縫四邊自由端之Al/Al ₂ O ₃ 方形FGM厚板無因次 化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=1$ 、 $h/b=0.3$)	117

表 4.10 具不同邊緣裂縫懸臂之Al/Al₂O₃ 矩形FGM薄板無因次化頻

率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.02$) 118

表 4.10 具不同邊緣裂縫懸臂之Al/Al₂O₃ 矩形FGM薄板無因次化頻

率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.02$) 119

表 4.10 具不同邊緣裂縫懸臂之Al/Al₂O₃ 矩形FGM薄板無因次化頻

率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.02$) 120

表 4.10 具不同邊緣裂縫懸臂之Al/Al₂O₃ 矩形FGM薄板無因次化頻

率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.02$) 121

表 4.10 具不同邊緣裂縫懸臂之Al/Al₂O₃ 矩形FGM薄板無因次化頻

率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.02$) 122

表 4.10 具不同邊緣裂縫懸臂之Al/Al₂O₃ 矩形FGM薄板無因次化頻

率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.02$) 123

表 4.11 具不同邊緣裂縫懸臂之Al/Al₂O₃ 矩形FGM厚板無因次化頻

率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.1$) 124

表 4.11 具不同邊緣裂縫懸臂之Al/Al₂O₃ 矩形FGM厚板無因次化頻

率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.1$) 125

表 4.11 具不同邊緣裂縫懸臂之Al/Al₂O₃ 矩形FGM厚板無因次化頻

率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.1$) 126

表 4.11 具不同邊緣裂縫懸臂之Al/Al₂O₃ 矩形FGM厚板無因次化頻

率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.1$) 127

表 4.11 具不同邊緣裂縫懸臂之Al/Al₂O₃ 矩形FGM厚板無因次化頻

率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.1$) 128

表 4.11 具不同邊緣裂縫懸臂之Al/Al₂O₃ 矩形FGM厚板無因次化頻

率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.1$) 129

表 4.12 具不同邊緣裂縫懸臂之Al/Al₂O₃ 矩形FGM厚板無因次化頻

率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.3$) 130

表 4.12 具不同邊緣裂縫懸臂之Al/Al₂O₃ 矩形FGM厚板無因次化頻

率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.3$) 131

表 4.12 具不同邊緣裂縫懸臂之Al/Al₂O₃ 矩形FGM厚板無因次化頻

率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.3$) 132

表 4.12 具不同邊緣裂縫懸臂之Al/Al₂O₃ 矩形FGM厚板無因次化頻

率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.3$) 133

表 4.12 具不同邊緣裂縫懸臂之Al/Al₂O₃ 矩形FGM厚板無因次化頻

率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.3$) 134

表 4.12 具不同邊緣裂縫懸臂之Al/Al₂O₃ 矩形FGM厚板無因次化頻

率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.3$) 135

表 4.13 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之Al/ ZrO ₂ 矩形 FGM薄板無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.02$)	136
表 4.13 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之Al/ ZrO ₂ 矩形 FGM薄板無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.02$)	137
表 4.13 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之Al/ ZrO ₂ 矩形 FGM薄板無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.02$)	138
表 4.13 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之Al/ ZrO ₂ 矩形 FGM薄板無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.02$)	139
表 4.13 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之Al/ ZrO ₂ 矩形 FGM薄板無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.02$)	140
表 4.13 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之Al/ ZrO ₂ 矩形 FGM薄板無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.02$)	141

表 4.13 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之Al/ ZrO ₂ 矩形 FGM薄板無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.02$)	142
表 4.13 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之Al/ ZrO ₂ 矩形 FGM薄板無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.02$)	143
表 4.13 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之Al/ ZrO ₂ 矩形 FGM薄板無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.02$)	144
表 4.13 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之Al/ ZrO ₂ 矩形 FGM薄板無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.02$)	145
表 4.14 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之Al/ ZrO ₂ 矩形 FGM厚板無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.1$)	146
表 4.14 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之Al/ ZrO ₂ 矩形 FGM厚板無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.1$)	147

表 4.14 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之Al/ ZrO ₂ 矩形 FGM厚板無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.1$)	148
---	-----

表 4.14 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之Al/ ZrO ₂ 矩形 FGM厚板無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.1$)	149
--	-----

表 4.14 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之Al/ ZrO ₂ 矩形 FGM厚板無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.1$)	150
---	-----

表 4.14 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之Al/ ZrO ₂ 矩形 FGM厚板無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.1$)	151
--	-----

表 4.14 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之Al/ ZrO ₂ 矩形 FGM厚板無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.1$)	152
---	-----

表 4.14 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之Al/ ZrO ₂ 矩形 FGM厚板無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.1$)	153
--	-----

表 4.14 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之Al/ ZrO ₂ 矩形 FGM厚板無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.1$)	154
--	-----

表 4.14 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之Al/ ZrO ₂ 矩形 FGM厚板無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.1$)	155
---	-----

表 4.15 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之Al/ ZrO ₂ 矩形 FGM厚板無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.3$)	156
--	-----

表 4.15 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之Al/ ZrO ₂ 矩形 FGM厚板無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.3$)	157
---	-----

表 4.15 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之Al/ ZrO ₂ 矩形 FGM厚板無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.3$)	158
--	-----

表 4.15 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之Al/ ZrO ₂ 矩形 FGM厚板無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.3$)	159
---	-----

表 4.15 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之Al/ ZrO₂ 矩形

FGM厚板無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.3$)

..... 160

表 4.15 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之Al/ ZrO₂ 矩形

FGM厚板無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.3$)

..... 161

表 4.15 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之Al/ ZrO₂ 矩形

FGM厚板無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.3$)

..... 162

表 4.15 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之Al/ ZrO₂ 矩形

FGM厚板無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.3$)

..... 163

表 4.15 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之Al/ ZrO₂ 矩形

FGM厚板無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.3$)

..... 164

表 4.15 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之Al/ ZrO₂ 矩形

FGM厚板無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.3$)

..... 165

表 4.16 具不同邊緣裂縫簡支方形均質板之厚度效應($c_y/b = 0.5$ 、

$\alpha = 0^\circ$)..... 166

表 4.17 具不同邊緣裂縫簡支方形FGM板($\hat{n} = 5$)之不同理論比較(c_y

$/b = 0.5$ 、 $\alpha = 0^\circ$)..... 167



圖目錄

圖 2.1 具邊緣裂縫方形板示意圖（裂縫與 $x = a$ 軸相交）	168
圖 2.2 具頂部裂縫矩形板示意圖（裂縫與 $y = b$ 軸相交）	169
圖 2.3 座標轉換示意圖	170
圖 4.1 Al/Al ₂ O ₃ 功能梯度材料參數 $E(z)$ 和 $\rho(z)$ 沿厚度變化圖根據式 (2.1)	171
圖 4.2 Al/ZrO ₂ 功能梯度材料參數 $E(z)$ 和 $\rho(z)$ 沿厚度變化圖根據式 (2.1)	172
圖 4.3 具不同水平邊緣裂縫簡支之方形均質厚板模態圖($h/b=0.1$)	173
圖 4.4 具不同水平邊緣裂縫簡支之Al/Al ₂ O ₃ 方形FGM厚板模態圖($\hat{n}=5, h/b=0.1$)	176
圖 4.5 具不同邊緣裂縫四邊自由端之Al/Al ₂ O ₃ 方形FGM厚板模態圖 ($\hat{n}=5, h/b=0.1$)	179
圖 4.6 具不同邊緣裂縫懸臂之矩形均質厚板模態圖($a/b=2, h/b=0.1$)	186
圖 4.7 具不同邊緣裂縫懸臂之Al/Al ₂ O ₃ 矩形FGM厚板模態圖($\hat{n}=5$)	

($a/b=2, h/b=0.1$) 191

圖 4.8 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之矩形均質厚板模

態圖($a/b=2, h/b=0.1$) 196

圖 4.9 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之Al/ ZrO₂ 矩形

FGM厚板模態圖($\hat{n}=5$) ($a/b=2, h/b=0.1$)..... 205



第一章 緒論

1.1 研究動機與方法

在工程與科學的領域中，為了克服複雜、苛刻的使用環境，人們對材料的要求越來越高；因此新材料、新工藝不斷湧現，陶瓷-金屬功能梯度材料以其獨特的優勢展現出廣泛的應用前景，日本的研究團隊在 1980 年代中期開始發展功能梯度材料(functionally graded material，簡稱 FGM)，並提出其製造理論與技術(Niino 和 Maeda, 1990)。FGM 是一種由不同材料(如陶瓷和金屬)依照不同比例組合而成的材料，其材料組成與結構所呈現的連續性，不僅強化了材料本身的強度、韌性及耐高溫性，亦使其內部界面消除。解決傳統複合材料容易在層與層的界面上產生脫離而破壞之現象，並克服苛刻的使用環境。因此，在近幾年來，功能梯度材料被廣泛應用於各種工業領域，如國防工業(飛彈)、醫學(骨骼)、光學(光記憶材料)、電磁學等。

當這種功能梯度板被應用在機械及結構內的元素時，經常會受到不規則的載重或環狀的載重由外力或機械引起。結構因長期載重所引起的疲勞裂縫開始在 FGM 板中產生，而且結構受振動造成 FGM 板的破裂需要做動力分析；因此，探討裂縫周圍的局部應力，而避免整體結構破壞是值得注

意的。本研究即首先依 3D 彈性理論探討功能梯度板因裂縫所致之應力奇異行為；並分析應力奇異對功能梯度板之影響。

1.2 文獻回顧

文獻中已有了許多關於均質板由形狀幾何與材料所引起應力奇異之文章，且大部分文獻探討靜態行為，即用各種方法求取不同載重情況之應力強度因子(stress intensity factor)。僅有少數研究振動行為者，其中又以古典板理論者居多。

以下文獻應用積分方程求解矩形薄板之振動問題，使用不同技巧建立所需之積分方程。Lynn 和 Kumbasar(1967)用 Green 函數來表示具裂縫之四邊簡支矩形板之位移分量，將問題轉換成齊性 Fredholm 第一型積分積分方程 (homogeneous Fredholm integral equations of the first kind)，再求解之；Stahl 和 Keer (1972)則利用對偶級數方程得齊性 Fredholm 第二型積分方程 (homogeneous Fredholm integral equations of the second kind) 來解決同樣的振動問題。Aggarwala 和 Ariel (1981)應用 Stahl 和 Keer (1972)之方法，求解簡支方形板具有位於中心點十字型裂縫或兩組(水平與垂直)對稱於中心點之邊緣裂縫振動問題。Hirano 和 Okazaki (1980)亦針對一組對邊為簡支承之裂縫矩形板，利用 Levy 的解，將裂縫兩邊的不連續位移當作未知函數，並

進一步以加權餘數法(weighted residual method)來滿足邊界條件，求解此振動問題。另外，Neku (1982)則是修正 Lynn 和 Kumbasar (1967)之方法，以 Levy 解建立所須之 Green 函數。Solecki (1983)的方法與 Hirano 和 Okazaki (1980)類似，利用 Navier 解配合描述裂縫處位移和轉角的不連續函數之 Fourier 轉換，進而求解裂縫板振動問題。

於數值方法中，最常利用有限元素法與 Ritz 法分析具裂縫矩形板之振動問題。Qian 等人 (1991)為了發展一有限元素的解法，對裂縫尖端的元素，經由對應力強度因子的積分，建構含裂縫元素的勁度矩陣。Krawczuk(1993)則提出類似 Qian 等人 (1991)的解決方式，唯一的不同是對裂縫尖端元素勁度矩陣，採用封閉形式 (closed form) 的積分。Bachene 等 (2009)討論在 Mindlin 板理論架構下利用擴展的有限元素法 (extended finite element method (X-FEM)) 分析含水平裂縫矩形薄板 (厚寬比 $h/b \leq 1/500$) 的自然振動頻率。

在利用 Ritz 法分析板振動問題是否成功，主要決定於所使用允許函數之恰當性。目前利用 Ritz 法求解裂縫板振動問題文獻如下：Yuan 和 Dickinson (1992)將矩形板分成數個區塊，並加置人工彈簧於各區塊連結之邊界上，因此，可用傳統的允許函數 (regular admissible functions) 於各區域來求解，不必用特別的函數來描述裂縫。Lee 和 Lim (1993)根據 Reissner 定理，利

用區域分解的技巧決定 Ritz 法求解含水平中心裂縫簡支矩形 Mindlin 板之允許函數，並求解振動頻率。Liew 等人（1994）用類似於 Yuan 和 Dickinson（1992）之切割方法，且僅要求各區塊之允許函數於兩區塊交接處，以積分形式滿足允許函數及其一階微分之連續性。Khaddem 和 Rezaee（2000）利用 Levy's solution 建立所謂修正比較函數（modified comparison functions），作為 Ritz 法所中的允許函數（admissible functions），分析具水平裂縫簡支承矩形板於不同裂縫長度、深度與位置時之振動。然而，因為 Khadem 和 Rezaee（2000）使用之允許函數較為特殊，其僅適用於處理至少一對邊是簡支承（two opposite edges simply supported）之裂縫矩形板振動問題。Huang 和 Leissa（2009）在近期，利用 Williams（1952）推導裂縫尖端之漸近解，提出了一組可準確描述邊緣裂縫奇異行為的允許函數，並將此允許函數用於求解不同邊界條件下（四邊簡支承與自由端）含邊緣裂縫薄板的振動問題。李昱成（2009）使用 Ritz 法分析裂縫矩形板之自由振動，引入一組特殊函數，來描述裂縫尖端之奇異性並滿足跨裂縫之位移與轉角不連續行為。上述應用 Ritz 法求解具裂縫板振動之文獻回顧中，絕大部分均透過切割次區域之技巧處理（Yuan 和 Dickinson、Liew 等與 Lee 和 Lim），先在各區域內選擇適當之允許函數，再利用各種類似連續條件，建立全域之允許函數。但這些文獻忽略了 Ritz 法頻率從上限收斂的特性，因為其允許函數在兩個

次區域連接處並非處處連續，而且例如 Yuan 和 Dickinson (1992) 安裝人工彈簧於次區域之連接處，雖然強迫滿足了必要之連續條件，但彈簧的勁度也會影響數據結果。

利用厚板理論研究具裂縫板振動之文獻如下： Xiang 等人 (2009) 用一階剪力變形板理論為基礎，推導出離散奇異摺積-元素法 (discrete singular convolution (DSC))，來分析自由振動矩形 Mindlin 板。Hosseini-Hashemi 等人 (2010) 利用 Mindlin 板理論，分析具裂縫之矩形板，並提高了自然振動頻率的計算速度。李榕師 (2009) 使用 Ritz 法分析含裂縫矩形 Mindlin 板之自然振動頻率與模態，為了準確描述裂縫，提出一組新的允許函數，此允許函數包含能滿足邊界條件之多項式函數與能準確描述裂縫尖端之奇異性並滿足跨越裂縫位移與轉角不連續行為之函數。

絕大部分文獻研究功能梯度材料板，是以探討熱相關的問題，僅少數探討關於 FGM 板或複合材料板振動之文獻。基於古典板理論，Yang 和 Shen (2001) 研究含平面應力之四邊固定 FGM 方形板之振動行為。He 等人 (2001) 研究附有壓電感應器的 FGM 方形板之振動。Zhao 等人 (2009) 採用一階剪力變形板理論去分析 FGM 方形板在不同邊界條件下之振動。Reddy (2000) 導出一有限元素解來分析 FGM 板之振動行為。Ferreira 等人 (2006) 採用無網格葛勒金法去解決一般方程。Matsunaga (2008) 根據 2D 高階板理論，導

出一系列的基礎動力方程來分析簡支方形 FGM 板。Qian 等人 (2004)根據高階剪力變形板理論，利用無網格葛勒金法去解決一般方程，並研究 FGM 板之振動行為。Vel 和 Batra (2004)提出 3D 解來分析簡支矩形 FGM 板之振動。張明儒 (2008)推導功能梯度材料厚板的漸近解，並探討板幾何所致的應力奇異性；進而將該漸近解引入懸臂斜形板和具邊緣裂縫簡支承矩形板之振動分析中，並計算具邊緣裂縫矩形板的應力強度因子。

過去尚未有文獻考慮具裂縫之功能梯度材料板之振動行為。本研究將首次利用 3D 彈性理論探討具邊緣裂縫 FGM 板由不同邊界條件、不同厚度、不同裂縫位置、不同裂縫長度經振動所引致之奇異應力現象以及影響。

1.3 內容概要

本論文共分為四章，其內容如下：

第一章 說明本文研究的動機與目的，並回顧相關文獻。

第二章 介紹本研究所使用之理論與方法，含 3D 彈性理論，並引入允許函數，得符合裂縫尖端之應力奇異性。

第三章 以 3D 彈性理論為基礎，並利用 Ritz 法求解邊緣裂縫矩形板之振動，驗證允許函數之適用性，並探討不同案例對收斂性之影響。

第四章 以前一章所用之允許函數分析不同案例之振動問題，並探討各個案

例對於數值結果的影響。

第五章 本研究之結論與建議。



第二章 分析方法

本章將討論 3D 彈性理論架構下，利用 Ritz 法求解含裂縫之功能梯度板（參考圖 2.1 與圖 2.2）振動。首先介紹功能梯度板的材料性質，再敘述使用 3D 彈性理論，配合 Ritz 法之相關公式。

2.1 功能梯度材料的由來

一般分析材料時都假設材料為均質且等向，但在許多情況下(例如航天技術、汽車工程等)，人們希望同一材料的兩側具有不同的性質或功能，又希望彼此之間結合完美，而不至於在實際使用中因性能未達到要求而產生破壞。陶瓷-金屬功能梯度材料是 1987 年由日本科學家新野正之、平井敏雄等首先提出的新概念和新思想，其分別由不同性能的材料組成，以應付所需的使用環境；而內部的組成和結構又是連續變化的，在使用中可防止界面因不連續產生的破壞。功能梯度材料其可按設計的梯度函數調節金屬與陶瓷的組成比例已達到總體要求的標準，更重要的是他們將性能不同的材料結合成結構內部非均勻的新型材料，並將材料的開發引入了更高的層次。

對於不同的複合材料來說，其各擁有不同的性質，並綜合分析以供選擇使用。而對 FGM 來說，其組成材料、含量、結構等參數稍有變化將產生

新一類型的材料，且結構可以根據工程需要，而設計出具有高強度、剛度、耐熱性、耐磨性等的合適材料。FGM 複合結構的狹義概念為：材料的組成及結構沿梯度變化，材料的力學性能與材料的性質隨參數連續變化，由此所獲得的功能為新創造的，是個全新的概念。

FGM 結構有特定的整體尺寸，且其內部無界面或者界面不明顯，以材料設計為基礎，採用先進的材料製造技術(先進工藝方法)，使材料的組成及結構等按照設計者的需求沿厚度梯度變化，以而使材料力學性能及材料性質連續變化，獲得緩熱、耐熱及隔熱等功能。

最初研究 FGM 的目的，是為了解決航太方面的問題，進而發展的金屬和超耐熱陶瓷結合的研究，由於 FGM 的特點，它很快的就被利用在其他功能材料的構想和研究中，用途從航太工業擴大到核能、電子、汽車、化學、生物醫學科學領域，其構成也由金屬-陶瓷擴展到金屬-聚合物、非金屬-陶瓷、高分子膜-聚合物及聚合物-金屬等多種組合，應用前景廣闊，是許多國家的研究重心。

經過近些年的發展應用，由於 FGM 的概念與思想，使其能為材料創造出某種特殊功能，且為材料的結構分析帶來了新的探討，進而引起物理、力學、生物與材料研究者的特別關注。研究 FGM 複合結構是航空業進一步發展的關鍵，特別是航太工業。此外 FGM 已漸漸擴大其應用範圍，並很可

能首先應用於汽車工業。FGM 對於各種耐熱、結構承載上的充分應用提供理論依據和力學分析，有效的減輕導彈重量、火箭的自重、提高飛行器的耐熱極限及承載能力有者極重要的戰略意義，對國防事業有巨大的經濟價值。

由於研究 FGM 複合結構有者極大的目的性、實用性及理論性，再加上材料沿梯度變化的概念所蘊含的意義非常深遠，最近在生物力學方面，已經提出了胚胎中存在著決定發育的關鍵力學性質，其結構的組成在特定方向上也呈梯度分布，並建立了梯度結構理論，由此可見 FGM 領域已擴展至生物領域，相信 FGM 在生物體系方面往後會有更多的發展。

2.2 功能梯度材料公式

由於 FGM 材料參數的非均勻性，使得描述問題的控制方程式為非線性。本文的 FGM 板包含兩個隨機分佈的等向性材料成分，且材料特性不同之處僅為厚度方向；所以 功能梯度板之振動的材料特性沿厚度方向變化。可假設表示為

$$P(Z) = P_b + V(z)\Delta P \quad (2.1)$$

其中 $P(Z)$ 為材料的有效性質， P_b 代表板底層($z=-h/2$)的材料性質， ΔP 是 P_b 跟板頂層($z=h/2$)的變化量，

$$V(Z) = \left(\frac{h}{z} + \frac{1}{2} \right)^{\hat{n}} \quad (2.2)$$

h 是代表板厚； $\hat{n}$ 是控制材料沿厚度方向變化的參數。

本文中所探討的功能梯度板是由金屬鋁跟陶瓷(ZrO_2 或 Al_2O_3)組成的，其材料參數由如 2.1 所示。

2.3 3D 彈性理論之應變能與動能

由於分析矩形板，可以 $x-y-z$ 直角座標系統表示 3D 彈性理論之應變能與動能。應變能可以張量分量表示成：

$$U = \int \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad (2.3)$$

$$\text{其中 } \sigma_{ij} = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{xz} \quad \sigma_{yz}]^T \quad (2.4a)$$

$$\varepsilon_{ij} = [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad 2\varepsilon_{xy} \quad 2\varepsilon_{xz} \quad 2\varepsilon_{yz}]^T \quad (2.4b)$$

$$\text{彈性之本構方程為 } \sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.5)$$

其中 c_{ijkl} 為材料參數張量；可將 c_{ijkl} 簡化成 c_{pq} ，其中取 $ij=11, ij=22, ij=33$ 時，分別取 $p=1, 2, 3$ ；取 $ij=23, ij=31, ij=12$ ，分別取 $p=4, 5, 6$ ；同理 kl 亦然。由於本研究考慮等向性(isotropic)材料， c_{pq} 可簡化為

$$c_{pq} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

其中 λ 與 μ 為 Lamé 常數，故 $\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk}$ 。利用此本構方程，可得

$$\frac{1}{2}\sigma_{ij}\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\epsilon_{kk})\epsilon_{ij} \quad (2.7)$$

再依微小變形理論中，應變與位移的關係

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.8)$$

其中 u_i 代表 u_1, u_2, u_3 ， $u_{i,j}$ 代表 i 方向的位移在 j 方向上的變化率， i 跟 j 為 1,2,3

將式(2.8)代入式(2.7)中可得應變能

$$U = \int \left[\frac{\mu}{4}(u_{i,j} + u_{j,i})^2 + \frac{1}{2}\lambda u_{i,i}u_{k,k} \right] dV \quad (2.9)$$

另外，三維問題之動能可表示成

$$T = \frac{1}{2}\rho \int_V (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2) dV \quad (2.10)$$

其中 ρ 為單位體積重量

2.4 利用 Ritz 法求解板之自然振動頻率

假設板內某點位移為 u_j ($j=1, 2, 3$)，並令

$$u_j = \bar{U}_j e^{i\omega t} \quad (2.11)$$

式中 ω 為自然振動頻率， t 為時間。利用 Ritz 法求解矩形板之自然振動頻率，其能量定義為

$$\Pi = U_{\max} - T_{\max} \quad (2.12)$$

其中 Π 為結構總勢能， $T_{\max}$ 為一振動週期內最大動能， $U_{\max}$ 為一振動週期內最大應變能。

依式(2.9)及(2.10)可得最大應變能及動能分別可表示為

$$U_{\max} = \int \left[\frac{\mu}{4} (\bar{U}_{i,j} + \bar{U}_{j,i})^2 + \frac{1}{2} \lambda \bar{U}_{i,i} \bar{U}_{k,k} \right] dV \quad (2.13)$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \rho \int_V (\bar{U}_1^2 + \bar{U}_2^2 + \bar{U}_3^2) dV \quad (2.14)$$

將 $\bar{U}_j$ 利用完備性之允許函數序列可展開得

$$\bar{U}_j = \sum_{i=1}^{\infty} A_{ij} \tilde{U}_{ij} \quad (2.15)$$

其中 $\tilde{U}_{ij}$ 為滿足幾何邊界條件的允許函數。

為使整體總勢能 Π 最小，即

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_{1j}} = \frac{\partial \Pi}{\partial A_{2j}} = \frac{\partial \Pi}{\partial A_{3j}} = 0 \quad (2.16)$$

上式經整理可簡化為以下特徵值問題，並求解自然振動頻率 ω ，以及振動模態。

整理後可得一組特徵方程式

$$\begin{bmatrix} K^{11} & K^{12} & K^{13} \\ K^{21} & K^{22} & K^{23} \\ K^{31} & K^{32} & K^{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{1j} \\ A_{2j} \\ A_{3j} \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} M^{11} & 0 & 0 \\ 0 & M^{22} & 0 \\ 0 & 0 & M^{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{1j} \\ A_{2j} \\ A_{3j} \end{Bmatrix} \quad (2.17)$$

勁度矩陣 $[K]$ 與質量矩陣 $[M]$ ，經上面推導得各矩陣元素表示式為：

$$K_{ij}^{11} = \int_V \mu [2\tilde{U}_{1i,1}\tilde{U}_{1j,1} + \tilde{U}_{1i,2}\tilde{U}_{1j,2} + \tilde{U}_{1i,3}\tilde{U}_{1j,3}] + \lambda \tilde{U}_{1i,1}\tilde{U}_{1j,1} dV \quad (2.18a)$$

$$K_{ij}^{12} = \int_V \mu \tilde{U}_{1i,2}\tilde{U}_{2j,1} + \lambda \tilde{U}_{1i,1}\tilde{U}_{2j,2} dV \quad (2.18b)$$

$$K_{ij}^{13} = \int_V \mu \tilde{U}_{1i,3}\tilde{U}_{3j,1} + \lambda \tilde{U}_{1i,1}\tilde{U}_{3j,3} dV \quad (2.18c)$$

$$K_{ij}^{22} = \int_V \mu [\tilde{U}_{2i,1}\tilde{U}_{2j,1} + 2\tilde{U}_{2i,2}\tilde{U}_{2j,2} + \tilde{U}_{2i,3}\tilde{U}_{2j,3}] + \lambda \tilde{U}_{2i,2}\tilde{U}_{2j,2} dV \quad (2.18d)$$

$$K_{ij}^{23} = \int_V \mu \tilde{U}_{2i,3}\tilde{U}_{3j,2} + \lambda \tilde{U}_{2i,2}\tilde{U}_{3j,3} dV \quad (2.18e)$$

$$K_{ij}^{33} = \int_V \mu [\tilde{U}_{3i,1}\tilde{U}_{3j,1} + \tilde{U}_{3i,2}\tilde{U}_{3j,2} + 2\tilde{U}_{3i,3}\tilde{U}_{3j,3}] + \lambda \tilde{U}_{3i,3}\tilde{U}_{3j,3} dV \quad (2.18f)$$

$$M_{ij}^{11} = \rho\omega^2 \int_V \mu \tilde{U}_{1i} \tilde{U}_{1j} dV \quad (2.19a)$$

$$M_{ij}^{22} = \rho\omega^2 \int_V \mu \tilde{U}_{2i} \tilde{U}_{2j} dV \quad (2.19b)$$

$$M_{ij}^{33} = \rho\omega^2 \int_V \mu \tilde{U}_{3i} \tilde{U}_{3j} dV \quad (2.19c)$$

2.5 允許函數之建構

在 Ritz 法中所用之允許函數必須滿足自然或幾何邊界條件。為詳細表示，以下以 $\bar{U}$ 、 $\bar{V}$ 、 $\bar{W}$ 分別替代上節所示之 $\bar{U}_1$ 、 $\bar{U}_2$ 及 $\bar{U}_3$ 。本文所使用之允許函數含完備的多項式函數集合($\bar{U}_p(x,y)$ 、 $\bar{V}_p(x,y)$ 、 $\bar{W}_p(x,y)$)與能正確描述尖端處奇異應力行為及沿裂縫位移不連續現象之裂縫函數集($\bar{U}_c(r,\theta)$ 、 $\bar{V}_c(r,\theta)$ 、 $\bar{W}_c(r,\theta)$)，即令

$$\bar{U}(x,y) = \bar{U}_p(x,y) + \bar{U}_c(r,\theta) \quad (2.20a)$$

$$\bar{V}(x,y) = \bar{V}_p(x,y) + \bar{V}_c(r,\theta) \quad (2.20b)$$

$$\bar{W}(x,y) = \bar{W}_p(x,y) + \bar{W}_c(r,\theta) \quad (2.20c)$$

為延遲式(2.17)病態矩陣之出現，依 Bhat (1985)所提之正交多項式函數建構

允許函數， $\bar{U}_p$ 、 $\bar{V}_p$ 、 $\bar{W}_p$ 表示成：

$$\bar{U}_p(x,y) = \sum_{k=0} \sum_{j=1} \sum_{i=1} a_{ijk} f_{ui}(x) g_{uj}(y) z^k \quad (2.21a)$$

$$\bar{V}_p(x,y) = \sum_{k=0} \sum_{j=1} \sum_{i=1} b_{ijk} f_{vi}(x) g_{vj}(y) z^k \quad (2.21b)$$

$$\bar{W}_p(x,y) = \sum_{k=0} \sum_{j=1} \sum_{i=1} c_{ijk} f_{wi}(x) g_{wj}(y) z^k \quad (2.21c)$$

其中， I 和 J 和 k 為多項式之項數， a_{ijk} 、 b_{ijk} 、 c_{ijk} 為待定係數， $f_{ui}(x)$ 、 $f_{vi}(x)$ 、 $f_{wi}(x)$ 、 $g_{uj}(y)$ 、 $g_{vj}(y)$ 、 $g_{wj}(y)$ 是經由 Gram-Schmidt 的演算程序所獲得之 x 向及 y 向正交多項式函數。

以建構 $f_{ui}(x)$ 為例，考慮 $x=0$ 及 $x=a$ 處簡支承；

$$f_{u0}(x) = x(a-x) \quad (2.22a)$$

$$f_{u1}(x) = x(a-\beta_1) f_{u0}(x) \quad (2.22b)$$

$$f_{ui}(x) = (x-\beta_i) f_{ui-1}(x) - C_i f_{ui-2}(x) \quad (2.22c)$$

$$\text{其中 } \beta_i = \frac{\int_0^a x f_{ui-1}^2(x) dx}{\int_0^a f_{ui-1}^2(x) dx}, \quad C_i = \frac{\int_0^a x f_{ui-1}(x) f_{ui-2}(x) dx}{\int_0^a f_{ui-2}^2(x) dx},$$

$$f_{ui}(x) \text{ 滿足 } \int_0^a f_{uk}(x) f_{ul}(x) dx = \begin{cases} 0, & uk \neq ul \\ a_{ukul}, & uk = ul \end{cases} \text{ 使用正交多項式可改善使用一般多項}$$

式造成病態矩陣之現象。

若只使用式(2.21)之允許函數於 Ritz 法中，將無法辨識裂縫是否存在。

因此，所得之結果將與無裂縫板結果一致。為使允許函數符合裂縫尖端之

應力奇異性，以及跨越裂縫之位移不連續性，必需引入另一組函數集。張

明儒(2009)建立了具裂縫之 FGM 矩形六面體之公式，因此 $\bar{U}_c(r, \theta, z)$ 、 $\bar{V}_c(r, \theta, z)$

與 $\bar{W}_c(r, \theta, z)$ 可表示成：

$$\bar{U}_c(r, \theta, z) = f_{Bu}(x, y) \sum_{k=0} \left\{ \sum_{n=1}^{Nu} \sum_{m=0}^n \tilde{a}_{mnk} r^{\frac{2n-1}{2}} \cos \frac{2m+1}{2} \theta + \sum_{n=1}^{Nu} \sum_{m=0}^n \bar{a}_{mnk} r^{\frac{2n-1}{2}} \sin \frac{2m+1}{2} \theta \right\} z^k$$

(2.23a)

$$\bar{V}_c(r, \theta, z) = f_{Bv}(x, y) \sum_{k=0} \left\{ \sum_{n=1}^{Nv} \sum_{m=0}^n \tilde{b}_{mnk} r^{\frac{2n-1}{2}} \sin \frac{2m+1}{2} \theta + \sum_{n=1}^{Nu} \sum_{m=0}^n \bar{b}_{mnk} r^{\frac{2n-1}{2}} \cos \frac{2m+1}{2} \theta \right\} z^k$$

(2.23b)

$$\bar{W}_c(r, \theta, z) = f_{Bw}(x, y) \sum_{k=0} \left\{ \sum_{n=1}^{Nw} \sum_{m=0}^n \tilde{c}_{mnk} r^{\frac{2n-1}{2}} \cos \frac{2m+1}{2} \theta + \sum_{n=1}^{Nw} \sum_{m=0}^n \bar{c}_{mnk} r^{\frac{2n-1}{2}} \sin \frac{2m+1}{2} \theta \right\} z^k$$

(2.23c)

上式函數 $f_{Bu}(x, y)$ 、 $f_{Bv}(x, y)$ 與 $f_{Bw}(x, y)$ ，為使 $\bar{U}_c$ 、 $\bar{V}_c$ 及 $\bar{W}_c$ 滿足幾何邊界條件。

若考慮簡支承，則可表示成

$$f_{Bu}(x, y) = y(BL - y) \quad (2.24a)$$

$$f_{Bv}(x, y) = x(AL - x) \quad (2.24b)$$

$$f_{Bw}(x, y) = xy(AL - x)(BL - y) \quad (2.24c)$$



以上所定義之 $\bar{U}_c(r, \theta)$ 、 $\bar{V}_c(r, \theta)$ 與 $\bar{W}_c(r, \theta)$ 皆以極座標(可參考圖 2.3)表示

之，其中卡式座標 (x, y) 與極座標 (r, θ) 之轉換關係如下：

$$r = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} \quad (2.25)$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \quad (2.26)$$

$$\text{其中，} \bar{x} = (x - A_x) \cos \alpha - (y - A_y) \sin \alpha \quad (2.27a)$$

$$\bar{y} = (x - A_x) \sin \alpha + (y - A_y) \cos \alpha \quad (2.27b)$$

(A_x, A_y) 為裂縫尖端之 (x, y) 座標， α 為裂縫與水平軸之夾角。

第三章 收斂性分析

一般而言，適當之允許函數取用足夠多項時，利用 Ritz 法所求得之頻率將準確地從上限收斂至真解。而本文所分析之案例皆具有裂縫，故於允許函數中引入能描述裂縫行為之裂縫函數，進行收斂性分析之研究，並與文獻值比較，驗證所用允許函數的適用性；並探討裂縫函數是否能有效的加速數值解收斂之速度。在病態矩陣發生前，求得準確的自然振動頻率。

本文是利用 FORTRAN 程式語言，並配合“IMSL”程式庫中之副程式“DGVCSP”來求解特徵值問題，不僅可以獲得自然振動頻率，亦可得到相對應的振態。執行程式的系統為 64 位元 pc，為求其高精度的精確收斂解以 128-bit 之變數來撰寫程式。本章的數值結果僅列出前五個模態並以無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ 表示。取波松比(ν)為 0.3， b 為板寬， h 為板厚，取氧化鋁(Alumina, Al_2O_3)的材料性質 $E_c = 380\text{Gpa}$ ， $\rho_c = 3800\text{kg/m}^3$ 或氧化鋅(Zirconia, ZrO_2)的材料性質 $E_c = 200\text{Gpa}$ ， $\rho_c = 5700\text{kg/m}^3$ 。此外邊界條件為 CFCF、CFFF 所相應之位置於圖 3.1 呈現，SSSS 與 FFFF 呈現於圖 3.2 中。圖中之 1.2.3.4 分別對應到 CFCF、CFFF、SSSS 及 FFFF。

表 3.1~表 3.11 為具邊緣裂縫板在不同邊界條件下之收斂性分析，各表

中 (I,J) 為式(2.21)多項式函數之項數所使用之個數，而裂縫函數數目 $\bar{N}$ (No. of Corner Functions)，依式(2.23)與裂縫函數之個數有關，如此所使用允許函數總項數為 $\{[(\bar{N}+3)]\bar{N}+I\times J\}\times 3\times \hat{N}_z$

表 3.1 為四邊簡支(SSSS)均質矩形板($a/b=2.0$)，厚寬比($h/b=0.01$)，含位於 $c_y/b=0.5$ 且長 $d/b=0.5$ 之水平邊緣裂縫之收斂性分析，考慮無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho/E}$ 。使用之允許函數乃依式(2.21)與式(2.23)所定義者。表中第一欄代表振態數，第二欄($\bar{N}$)為式(2.23)的裂縫函數之項數使用個數， (I,J) 為式(2.21)多項式函數之項數所使用之個數。在各模態首列是未加入任何裂縫函數($\bar{N}=0$)所得的無因次化頻率，可發現只使用多項式函數，無因次化頻率雖可收斂；但此收斂值卻是“無裂縫”矩形板的收斂頻率，因為單使用多項式函數並無法讓 Ritz 法知道裂縫之存在。將式(2.23)之裂縫函數加入允許函數時可發現，隨著裂縫函數項數提高所得到的結果也逐漸與使用板理論之文獻值接近，但卻略小於文獻值。Stahl 和 Keer 探討之問題是架構在薄板理論下，利用 Fredholm 積分，求解具裂縫簡支承矩形薄板之自然振動頻率，故相對於 3D 彈性理論會有高估自然振動頻率的現象。另外與 Huang 和 Leissa(2009)利用薄板理論配合 Ritz 法所求得之自然振動頻率的結果相比，也顯得略小。表 3.1 中當 $I=J=8$ 、 $\bar{N}=5$ 及 $\hat{N}_z=3$ (總項數 936)時，可達至少 3 位有效位數之收斂值。

表 3.2 為四邊簡支(SSSS)功能梯度矩形板($a/b=2.0, \hat{n}=1$)，厚寬比($h/b=0.1$)，含位於 $c_y/b=0.5$ 且長 $d/b=0.5$ 之水平邊緣裂縫之收斂性分析，考慮無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ，其中下標 c 指的是陶瓷(ceramic)。此功能梯度材料由鋁和氧化鋁所組成，並依式(2.2)取材料特性 $\hat{n}=1$ 。與文獻值相比之下，除了第二模態外，其於卻略大於文獻值。其中文獻之結果是 Huang 等人(2010) 利用 Reddy 三階板理論配合 Ritz 法所求得之自然振動頻率。當 $I=J=7, \bar{N}=5$ 及 $\hat{N}_z=5$ (總項數 1335)時，可達至少 3 位有效位數之收斂值。

以上結果確認本研究中允許函數之適用性及所發展程式的正確性。將其進一步用於不同邊界條件、不同厚度、不同裂縫長度，並探討其對於收斂性的影響。

3.1 厚度影響

厚度效應中，將允許函數用於分析不同厚度($h/b=0.02, 0.01, 0.1$ 及 0.3)之具邊緣裂縫板，觀察厚度是否影響允許函數項數的收斂結果。

表 3.3 為四邊自由端(FFFF)功能梯度方形板($a/b=1.0, \hat{n}=10$)，厚寬比($h/b=0.02$)，含位於 $c_y/b=0.5$ 且長 $d/a=0.5$ ，角度 30° 之邊緣裂縫之收斂性分析，考慮無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ 。表 3.5 則為與表 3.3 所考慮者相同，除了板厚從 $h/b=0.02$ 改為 $h/b=0.3$ 。表 3.3($h/b=0.02$)中當 $I=J=8, \bar{N}=8$ 及 $\hat{N}_z=4$ (總項數 1824)時，可達至少 3 位有效位數之收斂值。表 3.5($h/b=0.3$)

$\hat{N}_z = 4$ 之高模態結果較 $\hat{N}_z = 6$ 或 7 者明顯不精準。當取 $I = J = 7$ 、 $\bar{N} = 5$ 及 $\hat{N}_z = 7$ (總項數 1869)時，即可達至少 3 位有效位數之收斂值。

表 3.6 為懸臂(CFFF)功能梯度矩形板($a/b = 2.0$, $\hat{n} = 0.2$)，厚寬比($h/b = 0.02$)，含位於 $c_y/b = 1.0$ 且長 $d/b = 0.5$ ，角度 90° 之邊緣裂縫之收斂性分析，考慮無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ 。表 3.8 則為與表 3.6 所考慮者相同，除了板厚從 $h/b = 0.02$ 改為 $h/b = 0.3$ 。表 3.6($h/b = 0.02$)顯示 $\hat{N}_z = 3$ 之第四、五模態結果較 $\hat{N}_z = 4$ 或 5 者不精準。當取 $I = J = 9$ 、 $\bar{N} = 8$ 及 $\hat{N}_z = 4$ (總項數 2028)時，可達至少 3 位有效位數之收斂值。表 3.8($h/b = 0.3$) $\hat{N}_z = 4$ 或 5 或 6 影響收斂結果較不明顯。當取 $I = J = 8$ 、 $\bar{N} = 3$ 及 $\hat{N}_z = 5$ (總項數 1230)時，可達至少 3 位有效位數之收斂值。

表 3.9 為兩端自由端，兩端固定端(CFCF)功能梯度矩形板($a/b = 2.0$, $\hat{n} = 5$)，厚寬比($h/b = 0.02$)，含位於 $c_y/b = 0.5$ 且長 $d/b = 0.5$ ，角度 135° 之邊緣裂縫之收斂性分析，考慮無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ 。表 3.11 則為與表 3.9 所考慮者相同，除了板厚從 $h/b = 0.02$ 改為 $h/b = 0.3$ 。表 3.9($h/b = 0.02$)顯示 $\hat{N}_z = 3$ 之第四、五模態結果較 $\hat{N}_z = 4$ 或 5 者不精準。當取 $I = J = 9$ 、 $\bar{N} = 8$ 及 $\hat{N}_z = 4$ (總項數 2028)時，可達至少 3 位有效位數之收斂值。表 3.11($h/b = 0.3$)顯示 $\hat{N}_z = 4$ 之第四、五模態結果較 $\hat{N}_z = 5$ 或 6 者不精準。當取 $I = J = 8$ 、 $\bar{N} = 5$ 及 $\hat{N}_z = 6$ (總項數 1872)時，可達至少 3 位有效位數之收斂值。

3.2 裂縫長度、角度影響

在裂縫影響中，將允許函數用於分析具不同邊緣裂縫 ($d/b=0.2、0.5$) 之 FGM 板，觀察裂縫長度是否影響允許函數項數的收斂結果。

表 3.4 為四邊自由端(FFFF)功能梯度方形板($a/b=1.0, \hat{n}=10$)，厚寬比 ($h/b=0.3$)，含位於 $c_y/b=0.5$ 且長 $d/a=0.2$ ，角度 30° 之邊緣裂縫之收斂性分析，考慮無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ 。表 3.5 則為與表 3.4 所考慮者相同，除了裂縫長度從 $d/a=0.2$ 改為 $d/a=0.5$ 。表 3.4($d/a=0.2$) 中，當取 $I=J=7$ 、 $\bar{N}=4$ 及 $\hat{N}_z=7$ (總項數 1617) 時，可達至少 3 位有效位數之收斂值。表 3.5($d/a=0.5$) 中，當取 $I=J=7$ 、 $\bar{N}=5$ 及 $\hat{N}_z=7$ (總項數 1869) 時，可達至少 3 位有效位數之收斂值。裂縫較短時，用比較少的允許函數就可收斂；裂縫較長時，則必須用較多項數，尤其是裂縫函數 $\bar{N}$ (crack function)，方可使結果更精確。

表 3.7 為懸臂(CFFF)功能梯度矩形板($a/b=2.0, \hat{n}=0.2$)，厚寬比($h/b=0.3$)，含位於 $c_y/b=1.0$ 且長 $d/b=0.2$ ，角度 90° 之邊緣裂縫之收斂性分析，考慮無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ 。表 3.8 則為與表 3.7 所考慮者相同，除了裂縫長度從 $d/b=0.2$ 改為 $d/b=0.5$ 。表 3.7($d/b=0.2$) 中，當取 $I=J=7$ 、 $\bar{N}=5$ 及 $\hat{N}_z=5$ (總項數 1335) 時，可達至少 3 位有效位數之收斂值。表 3.8($d/b=0.5$) 中，當取 $I=J=8$ 、 $\bar{N}=3$ 及 $\hat{N}_z=5$ (總項數 1230) 時，可達至少 3 位有效位數之收斂值。此案例中裂縫較短時，反而用比較多的允許函數方可收斂；但一般而言，

裂縫較長需要較多的項數，尤其是裂縫函數 $\bar{N}$ (crack function)。

表 3.10 為兩端自由端，兩端固定端(CFCF)功能梯度矩形板($a/b=2.0$, $\hat{n}=5$)，厚寬比($h/b=0.3$)，含位於 $c_y/b=0.5$ 且長 $d/b=0.2$ ，角度 135° 之邊緣裂縫之收斂性分析，考慮無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ 。表 3.11 則為與表 3.10 所考慮者相同，除了裂縫長度從 $d/b=0.2$ 改為 $d/b=0.5$ 。表 3.10($d/b=0.2$)中，當取 $I=J=8$ 、 $\bar{N}=4$ 及 $\hat{N}_z=6$ (總項數 1656)時，可達至少 3 位有效位數之收斂值。表 3.11($d/b=0.5$)中，當取 $I=J=8$ 、 $\bar{N}=6$ 及 $\hat{N}_z=6$ (總項數 2124)時，可達至少 3 位有效位數之收斂值。裂縫較短時，用比較少的允許函數就可收斂；裂縫較長時，則必須用較多項數，尤其是裂縫函數 $\bar{N}$ (crack function)，方可使結果更精確。

3.3 邊界條件影響

在邊界條件影響中，雖然針對不同的邊界沒有相同的案例可以互相比較，且收斂的項數均不同，但是其均可達三位有效收斂。

四邊自由端(FFFF)的案例中表 3.3 為功能梯度方形板($a/b=1.0$, $\hat{n}=10$)，厚寬比($h/b=0.02$)，含位於 $c_y/b=0.5$ 且長 $d/a=0.5$ ，角度 30° 之邊緣裂縫之收斂性分析，考慮無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ，當取 $I=J=8$ 、 $\bar{N}=8$ 及 $\hat{N}_z=4$ (總項數 1824)，可達至少 3 位有效位數之收斂值；表 3.4 則為與表 3.3 所考慮者相同，除了板厚從 $h/b=0.02$ 改為 $h/b=0.3$ 。當取 $I=J=7$ 、 $\bar{N}=5$ 及 $\hat{N}_z=7$

(總項數 1869)，可達至少 3 位有效位數之收斂值；表 3.5 則為與表 3.4 所考慮者相同，除了裂縫長度從 $d/a=0.2$ 改為 $d/a=0.5$ ，當取 $I=J=7$ 、 $\bar{N}=5$ 及 $\hat{N}_z=7$ (總項數 1869)，可達至少 3 位有效位數之收斂值。

懸臂(CFFF)的案例中表 3.6 為功能梯度矩形板($a/b=2.0, \hat{n}=0.2$)，厚寬比($h/b=0.02$)，含位於 $c_y/b=1.0$ 且長 $d/b=0.5$ ，角度 90° 之邊緣裂縫之收斂性分析，考慮無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ，當取 $I=J=9$ 、 $\bar{N}=8$ 及 $\hat{N}_z=4$ (總項數 2028)，可達至少 3 位有效位數之收斂值；表 3.7 則為與表 3.6 所考慮者相同，除了板厚從 $h/b=0.02$ 改為 $h/b=0.3$ ，當取 $I=J=7$ 、 $\bar{N}=5$ 及 $\hat{N}_z=5$ (總項數 1335)，可達至少 3 位有效位數之收斂值；表 3.8 則為與表 3.7 所考慮者相同，除了裂縫長度從 $d/b=0.2$ 改為 $d/b=0.5$ ，當取 $I=J=8$ 、 $\bar{N}=3$ 及 $\hat{N}_z=5$ (總項數 1230)，可達至少 3 位有效位數之收斂值。

兩端固定端，兩端自由端(CFCF)的案例中表 3.9 為功能梯度矩形板($a/b=2.0, \hat{n}=5$)，厚寬比($h/b=0.02$)，含位於 $c_y/b=0.5$ 且長 $d/b=0.5$ ，角度 135° 之邊緣裂縫之收斂性分析，考慮無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ，當取 $I=J=9$ 、 $\bar{N}=8$ 及 $\hat{N}_z=4$ (總項數 2028)，可達至少 3 位有效位數之收斂值；表 3.10 則為與表 3.9 所考慮者相同，除了板厚從 $h/b=0.02$ 改為 $h/b=0.3$ ，當取 $I=J=8$ 、 $\bar{N}=5$ 及 $\hat{N}_z=6$ (總項數 1872)，可達至少 3 位有效位數之收斂值；表 3.11 則為與表 3.10 所考慮者相同，除了裂縫長度從 $d/b=0.2$ 改為 $d/b=0.5$ ，當取

$I = J = 8$ 、 $\bar{N} = 5$ 及 $\hat{N}_z = 6$ (總項數 1872) ，可達至少 3 位有效位數之收斂值。



第四章 數值結果

先前於第三章已經驗證加入裂縫函數確實能有效描述裂縫存在，在病態矩陣產生前，可得至少三位有效數字之收斂解。因此，本節將其應用於分析具有邊緣裂縫之矩形 FGM 板，討論在不同邊界條件和裂縫位置、角度及長度下，對振動行為的影響。允許函數項數之取法，乃根據前一章之收斂性探討，取法如下：當裂縫長度 d/a (或 d/b) ≥ 0.3 時，取 $I = J = 10$ 、 $\bar{N} = 8$ ，當裂縫長度 d/a (或 d/b) ≤ 0.3 時，取 $I = J = 9$ 、 $\bar{N} = 7$ ，當裂縫長度為零時，取 $I = J = 10$ 、 $\bar{N} = 0$ (無裂縫函數)；若為薄板 ($h/b \leq 0.02$) 時，取 $\hat{N}_z = 4$ ，若為厚板時，取 $\hat{N}_z = 7$ 。表 4.1~表 4.16 中列出前五個模態之無因次化頻率值，依第三章之收斂探討可確認所得之解至少準確至三位有效數字。以下觀察各表的結果並探討對振動行為的影響。

4.1 裂縫對振態頻率之影響

因裂縫而導致之無因次化頻率折減量率，定義為：

$$\Delta\omega = \frac{\omega_{\text{無裂縫}} - \omega_{\text{裂縫}}}{\omega_{\text{無裂縫}}} \times 100\% ;$$

其中， $\omega_{\text{無裂縫}}$ 為完整板無因次化頻率值， $\omega_{\text{裂縫}}$ 為具裂縫板之無因次化頻率值。

4.1.1 四邊簡支(SSSS)板

表 4.1~表 4.6 為具水平裂縫於 $c_y/b = 0.5$ 處之 Al/Al₂O₃ FGM 方形 SSSS 板，在不同裂縫長度 ($d/a = 0.1 \sim 0.5$)、 $\hat{n}(0, 0.2, 1, 5, 10)$ 與厚度 ($h/b = 0.02, 0.1, 0.2$) 下之無因次自然振動頻率，而表 4.2、4.4 及 4.6 則為裂縫導致之 $\Delta\omega$ 。

觀察各表可發現以下現象

- (1) 考慮完整板(無裂縫者)中厚度為($h/b = 0.1, 0.2$)板之第四與第五模態頻率完全相同，厚度($h/b = 0.05$)之第二與第三模態頻率完全相同，此現象為方形板具有的特徵值重根現象。
- (2) 當裂縫長度增加時，無因次化頻率隨之下降；此乃由於裂縫長度的增加，導致板勁度降低。觀察各案例 $d/a = 0.1$ ，其頻率折減量比 $\Delta\omega$ 大部分都小於 4%；最大值 $\Delta\omega = 4.25\%$ 發生在 $h = 0.05, \hat{n} = 0.2$ 的第五模態。當 $d/a = 0.5$ 時，其頻率折減量比 $\Delta\omega$ 則可升至約 21%；最大值 $\Delta\omega = 20.85\%$ 發生在 $h = 0.05, \hat{n} = 0.2$ 的第四模態。裂縫較短時，各模態頻率值受裂縫引起的改變很小，勁度降低量較不明顯。
- (3) 無因次化頻率隨 $\hat{n}$ 值增加而下降，是因為 $\hat{n}$ 增加所造成的勁度下降相較於 Al/Al₂O₃ FGM 板質量減少來的快 (如圖 4.1 所示)。
- (4) 厚板($h/b = 0.1, 0.2$)之第五模態主要以面內位移限制時(參看圖 4.2)，其無因次化頻率的變化對於裂縫長度之增加較不明顯，也就是勁度比

較不受裂縫長度的影響。

- (5) 只有厚度改變時，隨者厚度增加，其無因次化頻率將隨之下降，此因於無因次化頻率中含 $(\frac{1}{h})$ 之項。

4.1.2 四邊自由端(FFFF)板

表 4.7~表 4.9 為具邊緣裂縫之 Al/Al_2O_3 FGM 方形 FFFF 板，在不同裂縫位置($c_y/b=0.5$ 與 0.75)、傾角 ($\alpha=0^\circ、30^\circ、45^\circ$)、裂縫長度($d/a=0.1\sim 0.5$)、 $\hat{n}(0、0.2、1、5、10)$ 與厚度 ($h/b=0.02、0.1、0.3$) 下之無因次自然振動頻率。FFFF 板有 6 個頻率為零之剛體運動模態，未列於表中。觀察各表可發現以下現象：

- (1) 當裂縫為零(無裂縫者)，板之第四與第五模態頻率完全相同，此為方形板具有的特徵值重根現象。
- (2) 當 $d/a=0.1$ ，各案例之頻率折減量比 $\Delta\omega$ 小於 3%；且最大值 $\Delta\omega=2.95\%$ 發生於 $h=0.3, \alpha=0^\circ, \hat{n}=10, c_y/b=0.5$ 的第四模態。當 $d/a=0.5$ 時，其頻率折減量比 $\Delta\omega$ 則可升至約 57%；最大值 $\Delta\omega=57.47\%$ 發生在 $h=0.3, \alpha=45^\circ, \hat{n}=10, c_y/b=0.5$ 的第一模態。
- (3) 考慮不同厚度下裂縫位置改變對頻率之影響：

- (a) 當 $h/b=0.02$ 時，水平裂縫隨位置($c_y/b=0.5$ 與 0.75)，對頻率值之影

響：觀察 $d/a=0.1$ 發現， $c_y/b=0.5$ 頻率折減量比 $\Delta\omega$ 較 $c_y/b=0.75$ 者大； $d/a=0.2$ 時，無一定之趨勢； $d/a=0.3\sim 0.5$ 的第一模態，其 $c_y/b=0.5$ 頻率折減量比 $\Delta\omega$ 較 $c_y/b=0.75$ 者大。

(b) 當 $h/b=0.1$ 時，水平裂縫隨位置 ($c_y/b=0.5$ 與 0.75)，對頻率值之影響：

觀察 $d/a=0.1$ 發現， $c_y/b=0.5$ 頻率折減量比 $\Delta\omega$ 較 $c_y/b=0.75$ 者大； $d/a=0.2$ 的第一、三、五模態，其 $c_y/b=0.5$ 頻率折減量比 $\Delta\omega$ 較 $c_y/b=0.75$ 者大； $d/a=0.3$ 時，無一定趨勢； $d/a=0.4\sim 0.5$ 的第一模態，其 $c_y/b=0.5$ 頻率折減量比 $\Delta\omega$ 較 $c_y/b=0.75$ 者大。

(c) 當 $h/b=0.3$ 時，水平裂縫隨位置 ($c_y/b=0.5$ 與 0.75)，對頻率值之影響：

觀察 $d/a=0.1\sim 0.5$ ，無一定之趨勢。

(4) 考慮不同厚度下裂縫角度改變對頻率之影響：

(a) 當 $h/b=0.02$ 且 $c_y/b=0.5$ 時，角度之增加 ($\alpha=0^\circ$ 、 30° 、 45°) 對頻率值之影響：

觀察 $d/a=0.1$ ，各模態之頻率隨角度而增加； $d/a=0.2\sim 0.5$ 則無一定之趨勢。當 $c_y/b=0.75$ 時，觀察 $d/a=0.1$ 之變化，各模態之頻率隨角度而增加； $d/a=0.2\sim 0.5$ 則無一定之趨勢。

(b) 當 $h/b=0.1$ 且 $c_y/b=0.5$ 時，角度之增加 ($\alpha=0^\circ$ 、 30° 、 45°) 對頻率值之影響：

觀察 $d/a=0.2$ ，各模態之頻率隨角度而增加；其餘

不同裂縫長度則無一定之趨勢。當 $c_y/b=0.75$ 時，觀察

$d/a=0.1\sim 0.5$ ，無一定之趨勢。

(c) 當 $h/b=0.3$ 且 $c_y/b=0.5$ 時，角度之增加 ($\alpha=0^\circ$ 、 30° 、 45°) 對頻率

值之影響：觀察 $d/a=0.1\sim 0.2$ ，各模態之頻率隨角度而增加；

$d/a=0.3\sim 0.5$ 則無一定之趨勢。當 $c_y/b=0.75$ 時，觀察 $d/a=0.1\&0.3$ ，

各模態之頻率隨角度而增加；其餘裂縫長度則無一定之趨勢。

(5) 材料由 Al/Al_2O_3 組成，與四邊簡支(SSSS)之案例相同，故 $\hat{n}$ 值對於頻

率之影響與前節所述一致。

4.1.3 懸臂(CFFF)板

表 4.10~表 4.12 為具邊緣裂縫之 Al/Al_2O_3 FGM 矩形 CFFF 板，在不同

裂縫位置 ($c_y/a=0.25$ 與 0.5)、釐 ($\alpha=90^\circ$)、裂縫長度 ($d/a=0.1\sim 0.5$)、 $\hat{n}$

(0、0.2、1、5、10) 與厚度 ($h/b=0.02$ 、0.1、0.3) 下之無因次自然振動頻

率。觀察各表可發現裂縫對頻率之影響與前節所述者不同的是：

(1) 觀察各案例 $d/a=0.1$ ，其頻率折減量比 $\Delta\omega$ 大部分都小於 4%；且最大

值 $\Delta\omega=3.53\%$ 發生於 $h=0.1$ ， $\alpha=90^\circ$ ， $\hat{n}=5$ ， $c_y/a=0.25$ 的第四模態。當

$d/a=0.5$ 時，其頻率折減量比 $\Delta\omega$ 則可升至約 47%；最大值 $\Delta\omega=46.76\%$

發生在 $h=0.3$ ， $\alpha=90^\circ$ ， $\hat{n}=1$ ， $c_y/a=0.25$ 的第二模態。

(2) 考慮不同厚度下裂縫位置改變對頻率之影響

(a) 當 $h/b = 0.02$ 且 $\alpha = 90^\circ$ 時，裂縫隨位置 ($c_y/a = 0.25$ 與 0.5)，對頻率值之影響：觀察 $d/a = 0.1$ ，除了第三、四模態外，其餘 $c_y/a = 0.25$ 頻率折減量比 $\Delta\omega$ 較 $c_y/a = 0.5$ 者大； $d/a = 0.2 \sim 0.3$ ，除了第三模態外，其餘 $c_y/a = 0.25$ 頻率折減量比 $\Delta\omega$ 較 $c_y/a = 0.5$ 者大； $d/a = 0.4$ ，除了第三、五模態外，其餘 $c_y/a = 0.25$ 頻率折減量比 $\Delta\omega$ 較 $c_y/a = 0.5$ 者大； $d/a = 0.5$ ，除了第三、四、五模態外，其餘 $c_y/a = 0.25$ 頻率折減量比 $\Delta\omega$ 較 $c_y/a = 0.5$ 者大。

(b) 當 $h/b = 0.1$ 且 $\alpha = 90^\circ$ 時，裂縫隨位置 ($c_y/a = 0.25$ 與 0.5)，對頻率值之影響：觀察 $d/a = 0.1$ ，除了第三、五模態外，其餘 $c_y/a = 0.25$ 頻率折減量比 $\Delta\omega$ 較 $c_y/a = 0.5$ 者大； $d/a = 0.2 \sim 0.3$ ，除了第三模態外，其餘 $c_y/a = 0.25$ 頻率折減量比 $\Delta\omega$ 較 $c_y/a = 0.5$ 者大； $d/a = 0.4$ ，無規律變化； $d/a = 0.5$ ，除了第五模態外，其餘 $c_y/a = 0.25$ 頻率折減量比 $\Delta\omega$ 較 $c_y/a = 0.5$ 者大。

(c) 當 $h/b = 0.3$ 且 $\alpha = 90^\circ$ 時，裂縫隨位置 ($c_y/a = 0.25$ 與 0.5)，對頻率值之影響：觀察 $d/a = 0.1 \sim 0.4$ ，除了第五模態外，其餘 $c_y/a = 0.25$ 頻率折減量比 $\Delta\omega$ 較 $c_y/a = 0.5$ 者大； $d/a = 0.5$ ，除了第四、五模態外，其

餘 $c_y/a = 0.25$ 頻率折減量比 $\Delta\omega$ 較 $c_y/a = 0.5$ 者大。

4.1.4 兩端固定端，兩端自由端(CFCF)板

表 4.13~表 4.15 為具邊緣裂縫之 Al/ZrO₂ FGM 矩形 CFCF 板於不同裂縫位置 ($c_y/a = 0.25$ 與 0.5)、鰭 ($\alpha = 90^\circ$ 、 135°)、裂縫長度 ($d/a = 0.1 \sim 0.5$)、 $\hat{n}(0、0.2、1、5、10)$ 與厚度 ($h/b = 0.02、0.1、0.3$) 下之無因次自然振動頻率。觀察各表可發現以下現象

- (1) 當 $h/b = 0.02、0.1$ 時，觀察各案例 $d/a = 0.1$ ，其頻率折減量比 $\Delta\omega$ 皆小於 1%；且最大值 $\Delta\omega = 0.98\%$ 發生於 $h = 0.1, \alpha = 90^\circ, \hat{n} = 10, c_y/a = 0.5$ 的第一、四模態， $d/a = 0.5$ 時，其頻率折減量比 $\Delta\omega$ 升至約 29%；最大值 $\Delta\omega = 28.57\%$ 發生在 $h = 0.1, \alpha = 135^\circ, \hat{n} = 0, c_y/a = 0.25$ 的第五模態。當 $h/b = 0.3$ 時，觀察各案例 $d/a = 0.1$ ，頻率折減量比 $\Delta\omega$ 皆小於 2%；且最大值 $\Delta\omega = 1.19\%$ 發生於 $h = 0.3, \alpha = 90^\circ, \hat{n} = 10, c_y/a = 0.5$ 的第三模態， $d/a = 0.5$ 時，其頻率折減量比 $\Delta\omega$ 升至約 30%；最大值 $\Delta\omega = 29.63\%$ 發生在 $h = 0.3, \alpha = 90^\circ, \hat{n} = 0.2, c_y/a = 0.5$ 的第四模態。表示裂縫較短時，各模態頻率值受裂縫引起的改變很小，勁度降低量較不明顯。

- (2) 考慮不同厚度下裂縫位置改變對頻率之影響

- (a) 當 $h/b = 0.02$ 時，裂縫隨位置 ($c_y/a = 0.25$ 與 0.5)，對頻率值之影響：

觀察 $d/a = 0.1 \sim 0.3$ 的第二、三、五模態，其 $c_y/a = 0.25$ 頻率折減量比

$\Delta\omega$ 較 $c_y/a=0.5$ 者大； $d/a=0.4\sim 0.5$ 的第二、五模態，其 $c_y/a=0.25$ 頻

率折減量比 $\Delta\omega$ 較 $c_y/a=0.5$ 者大。

(b) 當 $h/b=0.1$ 時，裂縫隨位置($c_y/a=0.25$ 與 0.5)，對頻率值之影響：觀

察 $d/a=0.1\sim 0.3$ ，無一定之趨勢； $d/a=0.4\sim 0.5$ 的第二、五模態，其

$c_y/a=0.25$ 頻率折減量比 $\Delta\omega$ 較 $c_y/a=0.5$ 者大。

(c) 當 $h/b=0.3$ 時，裂縫隨位置($c_y/a=0.25$ 與 0.5)，對頻率值之影響，觀

察 $d/a=0.1\sim 0.2$ ，除了第一、三、五模態外，其餘 $c_y/a=0.25$ 頻率折

減量比 $\Delta\omega$ 較 $c_y/a=0.5$ 者大； $d/a=0.3\sim 0.5$ ，無一定之趨勢。

(3) 考慮不同厚度下裂縫角度改變對頻率之影響

(a) 當 $h/b=0.02$ 時，觀察 $c_y/a=0.25$ 和 0.5 時，裂縫隨角度變化，對頻率

值之影響：當 $c_y/a=0.25$ ， $d/a=0.1\sim 0.3$ ，無一定之趨勢； $d/a=0.4\sim 0.5$ ，

除了第一、四、五模態之外， $\alpha=90^\circ$ 頻率折減量比 $\Delta\omega$ 較 $\alpha=135^\circ$ 者

大。當 $c_y/a=0.5$ ， $d/a=0.1\sim 0.3$ ，除了第五模態之外， $\alpha=90^\circ$ 頻率

折減量比 $\Delta\omega$ 較 $\alpha=135^\circ$ 者大； $d/a=0.4\sim 0.5$ ，除了第二、五模態之

外， $\alpha=90^\circ$ 頻率折減量比 $\Delta\omega$ 較 $\alpha=135^\circ$ 者大。

(b) 當 $h/b=0.1$ 時，觀察 $c_y/a=0.25$ 和 0.5 時，裂縫隨角度變化，對頻率

值之影響：當 $c_y/a=0.25$ ， $d/a=0.1\sim 0.3$ ，無一定之趨勢； $d/a=0.4\sim 0.5$ ，

除了第四、五模態之外， $\alpha=90^\circ$ 頻率折減量比 $\Delta\omega$ 較 $\alpha=135^\circ$ 者大。

當 $c_y/a=0.5$ ， $d/a=0.1\sim 0.4$ ，無一定之趨勢； $d/a=0.5$ ，除了第二、四、五模態之外， $\alpha=90^\circ$ 頻率折減量比 $\Delta\omega$ 較 $\alpha=135^\circ$ 者大。

(c) 當 $h/b=0.3$ 時，觀察 $c_y/a=0.25$ 和 0.5 時，裂縫隨角度變化，對頻率值之影響：當 $c_y/a=0.25$ ， $d/a=0.1\sim 0.3$ ，除了第三模態之外， $\alpha=90^\circ$ 頻率折減量比 $\Delta\omega$ 較 $\alpha=135^\circ$ 者大； $d/a=0.4\sim 0.5$ ，除了第三、五模態之外， $\alpha=90^\circ$ 頻率折減量比 $\Delta\omega$ 較 $\alpha=135^\circ$ 者大。當 $c_y/a=0.5$ ， $d/a=0.1\sim 0.3$ ， $\alpha=90^\circ$ 頻率折減量比 $\Delta\omega$ 較 $\alpha=135^\circ$ 者大； $d/a=0.4$ ，除了第二模態之外， $\alpha=90^\circ$ 頻率折減量比 $\Delta\omega$ 較 $\alpha=135^\circ$ 者大； $d/a=0.5$ ，除了第二、五模態之外， $\alpha=90^\circ$ 頻率折減量比 $\Delta\omega$ 較 $\alpha=135^\circ$ 者大。

(4) 材料由 Al/ZrO_2 組成，觀察 $\hat{n}$ 值對頻率之影響：當 $\hat{n}=1$ 增至 5 時，其頻率增加，其餘 $\hat{n}$ 值影響與 $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$ 相同(如圖 4.2 所示)。

4.1.5 不同邊界條件之影響

表 4.3 及表 4.8 分別為具水平裂縫之 $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$ FGM 方形 SSSS 板和 FFFF 板，在不同裂縫長度 ($d/a=0.1\sim 0.5$)、 $\hat{n}(0、0.2、1、5、10)$ 與厚度 ($h/b=0.1$) 之下之無因次自然振動頻率。觀察各表可發現以下現象

(1) 在 FFFF 的案例中，裂縫長度越長對於頻率的下降越明顯(其頻率折減量比 $\Delta\omega$ 則可升至約 57%)。

- (2) 當 $\hat{n}=0\sim 1$ 時，FFFF 頻率下降趨勢大於 SSSS，當 $\hat{n}=1\sim 10$ 時，SSSS 頻率下降趨勢大於 FFFF。

另外由收斂性分析的各表結果可看出，均質板頻率隨厚度或裂縫長度增加而下降，另外材料由均質變成功能梯度時，頻率隨者 $\hat{n}$ 增加而上升，乃因根據式(2.2)材料隨厚度方向之變化情形可發現，當 $\hat{n}$ 增加時，勁度與質量均會逐漸遞減；但是質量降低的速度比勁度快，故形成頻率值增加的趨勢。

4.2 不同理論所得結果比較

厚度效應中，將允許函數用於分析不同厚度 ($h/b=0.002$ 、 0.05 及 0.1) 與位於 $c_y/b=0.5$ 之水平裂縫 ($d/a=0.2$ 及 0.4) 方形板，表 4.16 列出邊界條件為簡支之結果，其中 [] 之值為 Huang 與 Leissa (2009)，利用古典板理論所得結果，() 之值為 Mindlin 板理論，{ } 之值為 3D 彈性理論之結果。

- (1) 厚寬比為 $h/b=0.002$ 時，古典板理論之值與 Mindlin 板理論之值所得無因次化頻率與 3D 彈性理論之值非常接近。

- (2) 古典板理論與 3D 彈性理論所得者之相對差異隨 h/b 增加而增加，當厚度 $h/b=0.002$ 時，相對 3D 彈性理論誤差分別小於 0.067% 與 0.069% ，厚度增加為 $h/b=0.05$ 時誤差則分別介於 $0.94\%\sim 4.48\%$ 與 $1.40\%\sim 5.12\%$ ；但如果厚度 $h/b=0.1$ ，其誤差則高達 $3.53\%\sim 15.84\%$ 與 $4.27\%\sim 16.44\%$ 。

其中表 4.16 誤差最大值大部分發生在第五模態。此外古典板理論與

3D 彈性理論所得者之相對差異也隨 d/a 增加而增加，當 $d/a=0.2$ 時，相對 3D 彈性理論誤差均小於 15.84%，且最大值發生在 $h/b=0.1$ 的第五模態，裂縫長度增加為 $d/a=0.4$ 時，相對 3D 彈性理論誤差均小於 16.44%，且最大值發生在 $h/b=0.1$ 的第五模態。故薄板理論相較於 3D 彈性理論會有高估的現象。

- (3) 當 $h/b \leq 0.1$ 時，Mindlin 板理論與 3D 彈性理論所得者之相對差異均小於 1%，誤差最大值大部分發生在第四、五模態，且誤差隨者厚度增加而漸增。裂縫長度增加時，Mindlin 板理論與 3D 彈性理論所得者之相對差異也隨之增加，但無上述結果明顯。當 $d/a=0.2$ 時，相對 3D 彈性理論誤差均小於 0.63%，最大值發生在 $h/b=0.1$ 的第五模態；當 $d/a=0.4$ 時，相對 3D 彈性理論誤差均小於 0.64%，最大值發生在 $h/b=0.1$ 的第四模態。因此由以上討論可知 Mindlin 板理論與 3D 彈性理論皆可用於分析厚板，但 Mindlin 板理論相較於 3D 彈性理論會稍有低估的現象，故使用 3D 彈性理論分析厚板是的確有其重要性。

表 4.17 列出邊界條件為四邊簡支(SSSS) Al/Al_2O_3 FGM 板之結果，其中

() 之值為 Reddy 板理論，{ } 之值為 3D 彈性理論之結果。

- (1) 從無裂縫至 $d/a=0.5$ ，其與 3D 彈性理論的結果是非常接近的，誤

差最大為 0.24%，且發生於 $d/a = 0.4$ 的第二模態。

- (2) 在表中的所有結果，Reddy 板理論與 3D 彈性理論之結果相比之下，大部分皆較小，有些甚至是一致的，但 $d/a = 0.4$ 的第二與第四模態卻又較大些，故 Reddy 板理論相較於 3D 彈性理論會有上下跳躍的現象。

4.3 板之振動模態探討

圖 4.3~4.9 為前述所分析具有裂縫之 FGM 板的部分 3D 振動模態圖與在中平面上之 2D 模態圖；圖中包含了各種裂縫開裂的形式。2D 圖中板內空白者乃為平面位移為主振態，其餘則為面外位移為主的振動模態；面外位移為主之模態圖中，繪有面外位移等高線，虛線為位移=0 之節點線。

對於無裂縫之均質板而言，其縱向撓曲、側向撓曲、縱向延伸以及扭曲等模態，彼此間是不耦合的，並且形成四個相異的對稱模態。然後就一般而言，對於具裂縫之 FGM 板，其各模態間相互耦合，且無一致的對稱性。

考慮無裂縫板之模態圖，圖 4.3 與圖 4.4 分別為邊緣裂縫簡支(SSSS)之均質板振態圖與 $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$ FGM 板振態圖 ($\hat{n}=5$)，板厚為 $h/b=0.1$ 。其第一模態為一個無節點線之面外撓曲，第二、第三模態分別為具不同方向單一節點線之面外撓曲，第四、第五模態則為平面內的縱向延伸。圖 4.5 為四邊自由端(FFFF)之 $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$ FGM 板($\hat{n}=5$)，板厚為 $h/b=0.1$ 。其中第一模態，

為兩條互相垂直的節點線之面外撓曲，第二模態為兩條沿板角落處至中心點互相垂直的節點線之面外撓曲，第三模態是沿圓圈狀的節點線之面外撓曲，第四第五模態為一扭曲模態，沿圖中節點線之面外扭曲。圖 4.6 與圖 4.7 分別為懸臂(CFFF)之均質板振態圖與 $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$ FGM 板振態圖($\hat{n}=5$)，板厚為 $h/b=0.1$ 。其第一模態為一個無節點線之面外撓曲，第二模態為分別具不同方向單一節點線之面外扭曲，第三模態為沿單一節點線之面外撓曲，第四模態為平面內之延伸，第五模態為一扭曲模態，沿兩條相互垂直之節點線面外扭曲。以上圖中可見均質板與 $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$ FGM 板所呈現之振態圖相同，故模態圖並不受 $\hat{n}$ 值所影響。圖 4.8 與圖 4.9 為兩端固定端，兩端自由端(CFCF)之均質板振態圖與 Al/ZrO_2 FGM 板振態圖($\hat{n}=5$)，板厚為 $h/b=0.1$ 。第一模態為無節點線之面外撓曲，第二模態為單一節點線之面外扭曲，第三模態為具不同方向單一節點線之面外撓曲，第四模態為沿兩條相互垂直之節點線之面外扭曲。其中均質板的第五模態為兩條節點線之面外扭曲，而 Al/ZrO_2 FGM 板則為平面內之側向延伸。

基本上具裂縫 FGM 板之模態依其開裂形式可分為三種：一.剪力式裂縫。二.滑動式裂縫。三.撕裂式裂縫。然而有些模態圖中，又可將上述三種形式使用疊代法呈現之，像是 FFFF 的案例、CFFF 的案例以及 CFCF 的案例中，明確的描述三種基礎開裂形式之混合模態，此外，裂縫長度增加(d/a

或 $d/b=0.5$)、非水平、裂縫位置非對稱(c_x/a 或 $c_y/b \neq 0.5$)的案例中，都會使混合模態更明顯。

觀察圖 4.3~圖 4.9，對於裂縫位置的改變，振態沒有明顯的趨勢。但根據不同的 $\hat{n}$ 、裂縫長度、位置和角度可歸類出振態包含了以下幾種：平面外的縱向撓曲、平面外的扭轉、側面(面內)撓曲、平面橫向的延伸；並將展現各種裂縫型態，如剪力裂縫、滑動裂縫、撕裂裂縫。當裂縫位置偏離板的對稱軸時，會完全破壞無裂縫板振形原有的對稱性；當 $\alpha \neq 0^\circ$ 或 $\alpha = 90^\circ$ 時，裂縫會更進一步使得對稱節點線被扭曲。

不同邊界條件會導致板之振態不同，舉例而言： $d/a=0.2$ 之四邊簡支(SSSS)板，如圖 4.3 及圖 4.4 中，前三個模態幾乎與無裂縫者完全相同，然而圖 4.5 中的第二模態，使原本無裂縫板交錯的節點線改變。值得注意的是，在淺裂縫(d/a 或 $d/b=0.2$)或深裂縫(d/a 或 $d/b=0.5$)中有些案例的節點線會跟裂縫交叉，甚至通過裂縫尖端。

第五章 結論與建議

5.1 結論

本研究以 3D 彈性理論為架構，利用 Ritz 法提出一組裂縫函數配合多項式函數，來分析具邊裂縫矩形板之自由振動。所提之裂縫函數不僅能描述裂縫尖端之應力奇異性，並符合裂縫處位移之不連續特性；可有效加速數值解之收斂，以得準確數值解。依本研究的結，果吾人可得結論如下：

- (1) 本研究所得自然振動頻率具 Ritz 法由上限收斂至真值之特性。且其正確性經與文獻值比較而確認。當使用較多項之允許函數時，所得結果大部分皆為至少三位有效數字收斂。
- (2) 收斂性分析驗證了將裂縫函數引入允許函數中，對於 Ritz 法中決定板振動頻率之影響。只增加多項式允許函數無法使數值解快速收斂至精確解，特別是針對裂縫問題時(多項式函數無法描述裂縫之存在)；但加入角函數不只加速解之收斂；並能了解每一振態於裂縫附近之應力奇異行為。
- (3) 數值結果中，本文所提之函數用於求解邊緣裂縫之各種案例：簡支承、四邊自由端、懸臂端及兩端固定端，兩端自由端四種邊界條件下，在不同裂縫位置 ($c_y = 0.5$ 、 0.75 或 $c_x = 0.5$ 、 1.0)、長度 ($d/a = 0.1 \sim 0.5$)、

角度 ($\alpha = 0^\circ$ 、 30° 、 45° 、 90° 及 135°) 的振動分析。其中所有數值結果皆可達三位有效，且有 3D 及 2D 之模態圖。另外，不論邊界條件或裂縫類型，裂縫長度增加將使得板的勁度下降，而頻率也跟著降低。當裂縫長度較短 ($d/a = 0.1$) 時，前五個模態頻率值下降幅度較不明顯。

- (4) FGM 之體積比例階數 $\hat{n}$ 直接改變 FGM 厚板材料參數的分布狀況及板的勁度。由數值分析的結果發現：當材料為 $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$ 時， $\hat{n}$ 越大會使無因次化頻率呈現遞減的趨勢；但材料為 Al/ZrO_2 時，當 $\hat{n} = 1 \sim 5$ ，其頻率增加， $\hat{n} = 0 \sim 0.2$ 、 $\hat{n} = 0.2 \sim 1$ 及 $\hat{n} = 5 \sim 10$ 則為遞減。

5.2 建議

Ritz 法常用來分析裂縫振動問題，本研究發現加入裂縫函數增強了 Ritz 法求解裂縫 FGM 板的能力。將來可直接應用本研究所提之方法於其他具應力奇異之問題；例如具內部裂縫之問題(具有兩個奇異點)。亦可將本研究所提方法之精神(建立漸近解，再利用漸近法)於其他數值方法中或分析其他理論(如電磁彈性理論)中具奇異點之問題。

參考文獻

- Aggarwala, B. D. and Ariel, P. D. (1981) “Vibration and bending of a cracked plate”, *Rozprawy Inzynierskie*, 29(2), pp. 295-310.
- Bachene, M., Tiberkak, R., Rechak, S. (2009) “Vibration analysis of cracked plates using the extended finite element method”, *Archive of Applied Mechanics*, 79, pp. 249-262
- Delale, F. and Erdogan, F., (1983), “The crack problem for a nonhomogeneous plane”, *Journal of Applied Mechanics*, 50, pp. 609-614.
- Erdogan, F., (1985), “The crack problem for bonded nonhomogeneous materials under Antiplane shear loading”, *Journal of Applied Mechanics*, 64, pp. 449-456.
- Ferreira A. J. M., Batra R. C., Roque C. M. C., Qian L. F., Jorge R. M. N. (2006) “Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method”, *Composite Structures*, 75, pp. 593-600.
- He X. Q., Ng T. Y., Sivashanker S., Liew K. M. (2001) “Active control of FGM plates with integrated piezoelectric sensors and actuators”, *International*

Journal of Solids and Structures, 38, pp.1641-1655.

Hirano, Y. and Okazaki, K. (1980) "Vibration of cracked rectangular plates",

Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers, 23(179), pp. 732-740.

Hosseini-Hashemi, S. h. and Heydar Roohi, G. h. and Hossein Rokni, D. T.

(2010) "Exact free vibration study of rectangular Mindlin plates with all-over part-through open cracks", *Computer and Structures*, 88, pp.1015-1032.

Huang, C. S. and Leissa, A. W. (2009) "Vibrtaiion analysis of rectangular plates

with side cracks via the Ritz method", *Journal of Sound and Vibrtaiion*, 323(3-5) , pp.974-988

Khadem, S. E. and Rezaee, M. (2000) "Introduction of modified comparison

functions for vibration analysis of a rectangular cracked plate", *Journal of Sound and Vibration*, 236(2), pp. 245-258.

Krawczuk, M. (1993) "Natural vibrations of rectangular plates with a through

crack", *Archive of Applied Mechanics*, 63(7), pp. 491-504.

Lee, H. P. and Lim, S. P. (1993) "Vibration of cracked rectangular plates

including transverse shear deformation and rotary inertia", *Computers & Structures*, 49(4) , pp.715-718

Liew, K. M., Hung, K. C. and Lim, M. K. (1994) “A solution method for analysis of cracked plates under vibration”, *Engineering Fracture Mechanics*, 48(3), pp. 393-404.

Lynn, P. P. and Kumbasar, N. (1967) “Free vibrations of thin rectangular plates having narrow cracks with simply supported edges”, *Developments in Mechanics*, 4, *Proc. 10th Midwestern Mechanics Conference*, Colorado State University, Fort Collins, Colorado, August 21-23, pp. 911-928.

Matsunaga H. (2008) “Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory”, *Composite Structures*, 82, pp.499-512.

Neku, K. (1982) “Free vibration of a simply-supported rectangular plate with a straight through-notch”, *Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers*, 25(199), pp. 16-23.

Noda, N. and Jin, Z. H., (1993), “Thermal stress intensity factors for a crack in a strip of a functionally gradient material”, *International Journal of Solids and Structures*, 30, pp.1039-1056.

Ozturk, M. and Erdogan, F., (1992), “Diffusion problem in bonded

nonhomogeneous materials with an interface cut”, *International Journal of Engineering Science*, 30(10), pp.1507-1523.

Ozturk, M. and Erdogan, F., (1995), “An axisymmetric crack in bonded materials with a nonhomogeneous interfacial zone under torsion”, *Journal of Applied Mechanics*, 62(1), pp.116-125.

Qian, G. L., Gu, S. N. and Jiang, J. S. (1991) “A finite element model of cracked plates and application to vibration problems”, *Computers and Structures*, 39(5), pp. 483-487

Qian L. F., Batra R. C., Chen L. M. (2004) “Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local Petrov-Galerkin method”, *Composites Part B*, 35, pp.685-697.

Reddy J. N. (2009) “Analysis of functionally graded plates”, *International Journal of Numerical Method for Engineering*, 47(1-3), pp.663-84.

Solecki, R. (1983) “Bending vibration of a simply supported rectangular plate with a crack parallel to one edge”, *Engineering Fracture Mechanics*, 18(6), pp. 1111-1118.

Stahl, B. and Keer, L. M. (1972) "Vibration and Stability of cracked rectangular plates", *International Journal of Solids and Structures*, 8(1), pp. 69-91.

Vel S. S., Batra R. C. (2004) "Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates", *Journal of Sound and Vibrations*, 272(3), pp.703-730.

Yang Y., Shen H. S. (2001) "Dynamic response of initially stressed functional graded rectangular thin plates", *Composite Structures*, 54, pp.497-508.

Yuan, J. and Dickinson, S. M. (1992) "The flexural vibration of rectangular plate systems approached by using artificial springs in the Rayleigh-Ritz method", *Journal of Sound and Vibration*, 159(1), pp. 39-55

Zhao X., Lee Y. Y., Liew K. M. (2009) "Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method", *Journal of Sound and Vibration*, 319, pp.918-939.

張明儒 (2008) ,「功能梯度厚板之應力奇異性分析」, 國立交通大學土木工程學系碩士論文, 黃炯憲指導。

李榕師 (2009) ,「利用 Ritz 法分析具有裂縫之矩形 Mindlin 板振動」, 國立交通大學土木工程學系碩士論文, 黃炯憲指導。

李昱成 (2009) ,「利用 Ritz 法分析具有裂縫之矩形薄板振動」,國立交通大學土木工程學系碩士論文,黃炯憲指導。



表 2.1 材料參數

Material	Properties		
	E(Gpa)	Poisson's ratio	$\rho(\text{kg/m}^3)$
Aluminum(Al)	70.0	0.3	2702
Alumina(Al_2O_3)	380	0.3	3800
Zirconia(ZrO_2)	200	0.3	5700



表 3.1 具水平邊緣裂縫簡支方形均質薄板($a/b = 2.0$, $h/b = 0.01$, $c_y/b = 0.5$, $d/a = 0.5$, $\alpha = 0^\circ$)之無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho/E}$ 收斂性分析

Mode No.	No. of Crack Functions ($\bar{N}$)	order of polynomial ($I \times J$)						Stahl & Keer* Huang et al. + (2009)
		4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	
1	0	[4.132] (3.733) {3.733}	[4.132] (3.733) {3.733}	[4.131] (3.733) {3.733}	[4.131] (3.733) {3.733}	[4.131] (3.733) {3.733}	[4.131] (3.733) {3.733}	3.05* 3.053+
	2	[3.877] (3.551) {3.551}	[3.648] (3.384) {3.383}	[3.618] (3.363) {3.363}	[3.464] (3.247) {3.247}	[3.452] (3.238) {3.238}	[3.368] (3.173) {3.173}	
	4	[3.234] (3.065) {3.064}	[3.234] (3.057) {3.057}	[3.220] (3.054) {3.053}	[3.217] (3.052) {3.051}	[3.217] (3.051) {3.051}	[3.216] (3.051) {3.050}	
	5	[3.225] (3.058) {3.057}	[3.217] (3.052) {3.052}	[3.217] (3.051) {3.051}	[3.216] (3.051) {3.050}	[3.216] (3.050) {3.050}	[3.215] (3.050) {3.049}	
	6	[3.220] (3.054) {3.054}	[3.216] (3.051) {3.050}	[3.216] (3.050) {3.050}	[3.215] (3.050) {3.049}	[3.215] (3.050) {3.049}	[3.214] (3.049) {3.048}	

Note: []: results from $\hat{N}_z = 2$; (): results from $\hat{N}_z = 3$; { } : results from $\hat{N}_z = 4$

表 3.1(續上頁)

Mode No.	No. of Crack Functions ($\bar{N}$)	order of polynomial ($I \times J$)						Stahl & Keer* Huang et al. + (2009)
		4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	
2	0	[7.198] (6.539) {6.539}	[6.618] (5.981) {5.980}	[6.618] (5.980) {5.980}	[6.609] (5.972) {5.971}	[6.609] (5.972) {5.971}	[6.609] (5.971) {5.971}	5.507* 5.506+
	2	[6.919] (6.347) {6.346}	[6.209] (5.699) {5.699}	[6.189] (5.685) {5.685}	[6.102] (5.614) {5.613}	[6.096] (5.609) {5.609}	[6.060] (5.578) {5.578}	
	4	[5.840] (5.554) {5.554}	[5.799] (5.517) {5.516}	[5.780] (5.512) {5.512}	[5.773] (5.507) {5.506}	[5.769] (5.506) {5.506}	[5.767] (5.505) {5.505}	
	5	[5.779] (5.539) {5.539}	[5.765] (5.508) {5.507}	[5.761] (5.505) {5.504}	[5.759] (5.504) {5.504}	[5.758] (5.504) {5.504}	[5.757] (5.504) {5.503}	
	6	[5.765] (5.532) {5.532}	[5.761] (5.506) {5.505}	[5.758] (5.504) {5.504}	[5.758] (5.504) {5.503}	[5.756] (5.504) {5.503}	[5.756] (5.503) {5.503}	
3	0	[13.75] (12.78) {12.77}	[13.74] (12.61) {12.61}	[10.84] (9.801) {9.801}	[10.84] (9.799) {9.798}	[10.74] (9.703) {9.703}	[10.74] (9.703) {9.703}	5.570* 5.570+
	2	[13.51] (12.51) {12.50}	[12.93] (11.90) {11.90}	[10.75] (9.747) {9.747}	[10.74] (9.733) {9.732}	[10.64] (9.642) {9.642}	[10.63] (9.637) {9.636}	
	4	[6.027] (5.631) {5.630}	[5.973] (5.598) {5.597}	[5.967] (5.584) {5.583}	[5.960] (5.578) {5.577}	[5.960] (5.574) {5.573}	[5.958] (5.573) {5.572}	
	5	[6.006] (5.583) {5.582}	[5.961] (5.571) {5.570}	[5.957] (5.568) {5.566}	[5.956] (5.566) {5.565}	[5.956] (5.564) {5.563}	[5.956] (5.564) {5.562}	
	6	[5.996] (5.570) {5.569}	[5.958] (5.567) {5.566}	[5.956] (5.564) {5.563}	[5.956] (5.564) {5.562}	[5.956] (5.562) {5.561}	[5.955] (5.562) {5.560}	

表 3.1(續上頁)

Mode No.	No. of Crack Functions ($\bar{N}$)	order of polynomial ($I \times J$)						Stahl & Keer* Huang et al. + (2009)
		4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	
4	0	[17.49] (16.04) {16.04}	[14.09] (12.74) {12.74}	[14.09] (12.74) {12.73}	[14.04] (12.69) {12.68}	[14.04] (12.69) {12.68}	[14.04] (12.68) {12.68}	9.336* 9.336+
	2	[14.32] (13.40) {13.40}	[13.34] (12.26) {12.26}	[12.51] (11.59) {11.59}	[12.45] (11.54) {11.54}	[12.10] (11.27) {11.27}	[12.07] (11.24) {11.24}	
	4	[11.44] (10.52) {10.52}	[10.32] (9.545) {9.544}	[10.16] (9.382) {9.381}	[10.15] (9.370) {9.369}	[10.12] (9.343) {9.342}	[10.12] (9.341) {9.340}	
	5	[10.77] (9.884) {9.883}	[10.13] (9.359) {9.359}	[10.12] (9.349) {9.348}	[10.11] (9.341) {9.340}	[10.10] (9.333) {9.332}	[10.10] (9.333) {9.332}	
	6	[10.62] (9.766) {9.765}	[10.11] (9.341) {9.340}	[10.11] (9.339) {9.338}	[10.10] (9.332) {9.331}	[10.10] (9.332) {9.331}	[10.10] (9.331) {9.330}	
5	0	[19.96] (18.25) {18.25}	[16.57] (14.97) {14.97}	[16.57] (14.97) {14.97}	[16.51] (14.92) {14.92}	[16.51] (14.92) {14.92}	[16.51] (14.92) {14.92}	12.76* 12.87+
	2	[18.51] (17.01) {17.01}	[15.46] (14.06) {14.06}	[15.30] (13.90) {13.90}	[15.24] (13.84) {13.84}	[15.15] (13.76) {13.75}	[15.15] (13.75) {13.75}	
	4	[14.73] (13.33) {13.33}	[14.65] (13.27) {13.27}	[14.57] (13.21) {13.21}	[14.50] (13.15) {13.15}	[14.48] (13.14) {13.14}	[14.46] (13.13) {13.13}	
	5	[14.11] (12.88) {12.88}	[13.98] (12.81) {12.81}	[13.95] (12.79) {12.79}	[13.94] (12.78) {12.78}	[13.93] (12.78) {12.77}	[13.93] (12.77) {12.77}	
	6	[13.97] (12.79) {12.79}	[13.93] (12.77) {12.77}	[13.92] (12.77) {12.76}	[13.92] (12.76) {12.76}	[13.91] (12.76) {12.76}	[13.91] (12.76) {12.76}	

表 3.2 具水平邊緣裂縫簡支之 Al/Al₂O₃ FGM 方形厚板($h/b = 0.1$, $c_y/b = 0.5$, $d/a = 0.5$, $\alpha = 0^\circ$, $\hat{n}=1$)之無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ 收斂性分析

Mode No.	No. of Crack Functions ($\bar{N}$)	order of polynomial ($I \times J$)						Huang et al. (2010)
		4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	
1	0	[4.427] (4.427) {4.427}	[4.427] (4.427) {4.427}	[4.426] (4.426) {4.426}	[4.426] (4.426) {4.426}	[4.426] (4.426) {4.426}	[4.426] (4.426) {4.426}	4.263
	2	[4.304] (4.303) {4.303}	[4.292] (4.292) {4.292}	[4.289] (4.289) {4.289}	[4.284] (4.284) {4.284}	[4.283] (4.823) {4.283}	[4.281] (4.280) {4.280}	
	4	[4.275] (4.275) {4.275}	[4.273] (4.273) {4.273}	[4.273] (4.273) {4.273}	[4.272] (4.272) {4.272}	[4.272] (4.271) {4.271}	[4.271] (4.271) {4.271}	
	5	[4.274] (4.273) {4.273}	[4.271] (4.271) {4.271}	[4.271] (4.271) {4.271}	[4.271] (4.271) {4.271}	[4.271] (4.270) {4.270}	[4.270] (4.270) {4.270}	
	6	[4.272] (4.272) {4.272}	[4.271] (4.271) {4.271}	[4.271] (4.270) {4.270}	[4.270] (4.270) {4.270}	[4.270] (4.270) {4.270}	[4.270] (4.270) {4.270}	

Note: []: results from $\hat{N}_z = 4$; (): results from $\hat{N}_z = 5$; { }: results from $\hat{N}_z = 6$

表 3.2(續上頁)

Mode No.	No. of Crack Functions ($\bar{N}$)	order of polynomial ($I \times J$)						Huang et al. (2010)
		4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	
2	0	[12.49] (12.49) {12.49}	[10.66] (10.66) {10.66}	[10.66] (10.66) {10.66}	[10.63] (10.63) {10.63}	[10.63] (10.63) {10.63}	[10.63] (10.63) {10.63}	9.973
	2	[10.36] (10.36) {10.36}	[10.16] (10.15) {10.15}	[10.12] (10.12) {10.12}	[10.10] (10.10) {10.10}	[10.08] (10.08) {10.08}	[10.08] (10.08) {10.07}	
	4	[9.994] (9.994) {9.993}	[9.987] (9.986) {9.986}	[9.978] (9.977) {9.976}	[9.974] (9.973) {9.973}	[9.970] (9.969) {9.969}	[9.969] (9.968) {9.968}	
	5	[9.981] (9.980) {9.980}	[9.977] (9.976) {9.975}	[9.971] (9.970) {9.970}	[9.969] (9.968) {9.968}	[9.967] (9.966) {9.965}	[9.966] (9.965) {9.965}	
	6	[9.972] (9.972) {9.971}	[9.970] (9.970) {9.969}	[9.968] (9.967) {9.966}	[9.966] (9.965) {9.965}	[9.965] (9.964) {9.963}	[9.964] (9.963) {9.963}	
3	0	[12.49] (12.49) {12.49}	[10.66] (10.66) {10.66}	[10.66] (10.66) {10.66}	[10.63] (10.63) {10.63}	[10.63] (10.63) {10.63}	[10.63] (10.63) {10.63}	10.31
	2	[10.77] (10.77) {10.77}	[10.39] (10.39) {10.39}	[10.38] (10.38) {10.38}	[10.36] (10.36) {10.36}	[10.36] (10.36) {10.36}	[10.35] (10.35) {10.35}	
	4	[10.36] (10.35) {10.35}	[10.35] (10.35) {10.35}	[10.34] (10.34) {10.34}	[10.34] (10.34) {10.34}	[10.34] (10.34) {10.34}	[10.34] (10.34) {10.34}	
	5	[10.35] (10.35) {10.35}	[10.34] (10.34) {10.34}	[10.34] (10.34) {10.34}	[10.34] (10.34) {10.34}	[10.34] (10.34) {10.34}	[10.34] (10.34) {10.34}	
	6	[10.34] (10.34) {10.34}	[10.34] (10.34) {10.34}	[10.34] (10.34) {10.34}	[10.34] (10.34) {10.34}	[10.34] (10.34) {10.34}	[10.34] (10.34) {10.34}	

表 3.2(續上頁)

Mode No.	No. of Crack Functions ($\bar{N}$)	order of polynomial ($I \times J$)						Huang et al. (2010)
		4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	
4	0	[16.20] (16.20) {16.20}	[16.20] (16.20) {16.20}	[16.20] (16.20) {16.20}	[16.20] (16.20) {16.20}	[16.20] (16.20) {16.20}	[16.20] (16.20) {16.20}	13.94
	2	[14.02] (14.02) {14.02}	[14.01] (14.01) {14.01}	[14.00] (14.00) {14.00}	[14.00] (14.00) {14.00}	[13.99] (13.99) {13.99}	[13.99] (13.99) {13.99}	
	4	[13.96] (13.96) {13.96}	[13.95] (13.95) {13.95}	[13.95] (13.95) {13.95}	[13.95] (13.95) {13.95}	[13.95] (13.95) {13.95}	[13.95] (13.95) {13.95}	
	5	[13.95] (13.95) {13.95}	[13.95] (13.95) {13.95}	[13.95] (13.95) {13.95}	[13.95] (13.95) {13.95}	[13.95] (13.95) {13.95}	[13.95] (13.95) {13.95}	
	6	[13.95] (13.95) {13.95}	[13.95] (13.95) {13.95}	[13.95] (13.95) {13.95}	[13.95] (13.95) {13.95}	[13.95] (13.95) {13.95}	[13.95] (13.95) {13.95}	
5	0	[16.20] (16.20) {16.20}	[16.20] (16.20) {16.20}	[16.20] (16.20) {16.20}	[16.20] (16.20) {16.20}	[16.20] (16.20) {16.20}	[16.20] (16.20) {16.20}	14.44
	2	[16.20] (16.20) {16.20}	[14.95] (14.95) {14.95}	[14.88] (14.88) {14.88}	[14.83] (14.83) {14.83}	[14.79] (14.79) {14.79}	[14.78] (14.78) {14.78}	
	4	[14.51] (14.51) {14.50}	[14.49] (14.49) {14.49}	[14.48] (14.48) {14.47}	[14.47] (14.46) {14.46}	[14.46] (14.46) {14.46}	[14.46] (14.46) {14.46}	
	5	[14.48] (14.48) {14.48}	[14.47] (14.47) {14.47}	[14.46] (14.46) {14.46}	[14.46] (14.46) {14.45}	[14.45] (14.45) {14.45}	[14.45] (14.45) {14.45}	
	6	[14.46] (14.46) {14.46}	[14.46] (14.46) {14.46}	[14.46] (14.45) {14.45}	[14.45] (14.45) {14.45}	[14.45] (14.45) {14.45}	[14.45] (14.45) {14.45}	

表 3.3 具邊緣裂縫四邊自由端之 Al/Al₂O₃ FGM 方形薄板($h/b = 0.02$, $c_y/b = 0.5$, $d/a = 0.5$, $\alpha = 30^\circ$, $\hat{n} = 10$)之無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ 收斂性分析

Mode No.	No. of Crack Functions ($\bar{N}$)	order of polynomial ($I \times J$)					
		5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	10×10
1	0	[2.646] (2.627) {2.627}	[2.591] (2.589) {2.589}	[2.591] (2.589) {2.589}	[2.587] (2.584) {2.584}	[2.587] (2.584) {2.584}	[2.584] (2.580) {2.580}
	3	[1.691] (1.689) {1.689}	[1.685] (1.683) {1.683}	[1.684] (1.682) {1.682}	[1.682] (1.680) {1.680}	[1.682] (1.679) {1.679}	[1.680] (1.677) {1.677}
	6	[1.680] (1.678) {1.678}	[1.679] (1.677) {1.677}	[1.678] (1.675) {1.675}	[1.676] (1.673) {1.673}	[1.675] (1.672) {1.672}	[1.674] (1.671) {1.671}
	7	[1.678] (1.676) {1.676}	[1.677] (1.674) {1.674}	[1.676] (1.673) {1.673}	[1.674] (1.671) {1.671}	[1.674] (1.671) {1.671}	[1.672] (1.669) {1.669}
	8	[1.676] (1.673) {1.673}	[1.675] (1.672) {1.672}	[1.675] (1.671) {1.671}	[1.674] (1.671) {1.671}	[1.673] (1.670) {1.670}	[1.671] (1.668) {1.668}

Note: []: results from $\hat{N}_z = 3$; (): results from $\hat{N}_z = 4$; { }: results from $\hat{N}_z = 5$

表 3.3(續上頁)

Mode No.	No. of Crack Functions ($\bar{N}$)	order of polynomial ($I \times J$)					
		5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	10×10
2	0	[3.870] (3.798) {3.798}	[3.798] (3.797) {3.797}	[3.774] (3.773) {3.773}	[3.774] (3.773) {3.773}	[3.774] (3.773) {3.773}	[3.774] (3.773) {3.773}
	3	[3.089] (3.084) {3.084}	[3.085] (3.080) {3.080}	[3.079] (3.073) {3.073}	[3.076] (3.071) {3.071}	[3.072] (3.066) {3.066}	[3.069] (3.062) {3.062}
	6	[3.068] (3.062) {3.062}	[3.065] (3.059) {3.059}	[3.063] (3.056) {3.056}	[3.062] (3.054) {3.054}	[3.060] (3.053) {3.053}	[3.059] (3.052) {3.052}
	7	[3.065] (3.059) {3.059}	[3.063] (3.056) {3.056}	[3.061] (3.054) {3.054}	[3.060] (3.052) {3.052}	[3.057] (3.050) {3.050}	[3.055] (3.048) {3.048}
	8	[3.062] (3.055) {3.055}	[3.060] (3.053) {3.053}	[3.059] (3.051) {3.051}	[3.057] (3.049) {3.049}	[3.055] (3.048) {3.048}	[3.054] (3.046) {3.046}
3	0	[5.349] (4.724) {4.724}	[4.723] (4.721) {4.721}	[4.673] (4.672) {4.672}	[4.673] (4.672) {4.672}	[4.673] (4.671) {4.671}	[4.673] (4.671) {4.671}
	3	[3.902] (3.898) {3.898}	[3.883] (3.879) {3.879}	[3.870] (3.865) {3.865}	[3.864] (3.859) {3.859}	[3.863] (3.857) {3.857}	[3.860] (3.854) {3.854}
	6	[3.858] (3.853) {3.853}	[3.855] (3.849) {3.849}	[3.853] (3.847) {3.847}	[3.852] (3.846) {3.846}	[3.850] (3.843) {3.843}	[3.847] (3.840) {3.840}
	7	[3.856] (3.850) {3.850}	[3.854] (3.847) {3.847}	[3.852] (3.845) {3.845}	[3.849] (3.842) {3.842}	[3.847] (3.840) {3.840}	[3.845] (3.838) {3.838}
	8	[3.852] (3.846) {3.846}	[3.850] (3.844) {3.844}	[3.848] (3.842) {3.842}	[3.846] (3.839) {3.839}	[3.845] (3.838) {3.838}	[3.844] (3.837) {3.837}

表 3.3(續上頁)

Mode No.	No. of Crack Functions ($\bar{N}$)	order of polynomial ($I \times J$)					
		5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	10×10
4	0	[7.063] (6.833) {6.833}	[6.775] (6.767) {6.767}	[6.683] (6.675) {6.675}	[6.680] (6.671) {6.671}	[6.673] (6.663) {6.663}	[6.671] (6.660) {6.660}
	3	[4.600] (4.595) {4.595}	[4.583] (4.577) {4.577}	[4.559] (4.554) {4.554}	[4.556] (4.550) {4.550}	[4.554] (4.548) {4.548}	[4.549] (4.543) {4.543}
	6	[4.547] (4.540) {4.540}	[4.544] (4.538) {4.537}	[4.543] (4.536) {4.536}	[4.542] (4.535) {4.535}	[4.541] (4.534) {4.534}	[4.538] (4.531) {4.531}
	7	[4.544] (4.537) {4.537}	[4.542] (4.535) {4.535}	[4.541] (4.534) {4.534}	[4.539] (4.532) {4.532}	[4.537] (4.530) {4.530}	[4.536] (4.529) {4.529}
	8	[4.541] (4.534) {4.534}	[4.539] (4.532) {4.532}	[4.538] (4.531) {4.531}	[4.536] (4.529) {4.529}	[4.535] (4.528) {4.528}	[4.535] (4.528) {4.528}
5	0	[7.063] (6.833) {6.833}	[6.775] (6.767) {6.767}	[6.683] (6.675) {6.675}	[6.680] (6.671) {6.671}	[6.673] (6.663) {6.663}	[6.671] (6.660) {6.660}
	3	[5.994] (5.986) {5.986}	[5.960] (5.951) {5.951}	[5.912] (5.903) {5.903}	[5.908] (5.899) {5.898}	[5.902] (5.891) {5.891}	[5.898] (5.886) {5.886}
	6	[5.905] (5.895) {5.894}	[5.898] (5.887) {5.887}	[5.895] (5.883) {5.883}	[5.892] (5.880) {5.880}	[5.890] (5.878) {5.878}	[5.888] (5.876) {5.876}
	7	[5.897] (5.886) {5.886}	[5.894] (5.882) {5.882}	[5.892] (5.880) {5.880}	[5.889] (5.887) {5.887}	[5.887] (5.875) {5.875}	[5.883] (5.871) {5.871}
	8	[5.892] (5.881) {5.881}	[5.889] (5.877) {5.877}	[5.887] (5.875) {5.875}	[5.885] (5.873) {5.873}	[5.883] (5.871) {5.871}	[5.882] (5.869) {5.869}

表 3.4 具邊緣裂縫四邊自由端之 Al/Al₂O₃ FGM 方形厚板($h/b = 0.3$, $c_y/b = 0.5$, $d/a = 0.2$, $\alpha = 30^\circ$, $\hat{n}=10$)之無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ 收斂性分析

Mode No.	No. of Crack Functions ($\bar{N}$)	order of polynomial ($I \times J$)					
		4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9
1	0	[1.985] (1.984) {1.983}	[1.984] (1.982) {1.981}	[1.971] (1.970) {1.969}	[1.971] (1.969) {1.968}	[1.970] (1.969) {1.968}	[1.970] (1.969) {1.968}
	2	[1.900] (1.898) {1.897}	[1.896] (1.894) {1.893}	[1.887] (1.886) {1.885}	[1.886] (1.885) {1.884}	[1.886] (1.884) {1.884}	[1.885] (1.883) {1.883}
	4	[1.888] (1.886) {1.886}	[1.886] (1.884) {1.883}	[1.884] (1.882) {1.882}	[1.884] (1.882) {1.882}	[1.884] (1.882) {1.881}	[1.884] (1.882) {1.881}
	5	[1.886] (1.884) {1.883}	[1.884] (1.883) {1.882}	[1.884] (1.882) {1.882}	[1.884] (1.882) {1.881}	[1.884] (1.882) {1.881}	[1.883] (1.882) {1.881}
	6	[1.884] (1.882) {1.882}	[1.884] (1.882) {1.882}	[1.884] (1.882) {1.881}	[1.884] (1.882) {1.881}	[1.883] (1.882) {1.881}	[1.883] (1.882) {1.881}

Note: []: results from $\hat{N}_z = 4$; (): results from $\hat{N}_z = 6$; { }: results from $\hat{N}_z = 7$

表 3.4(續上頁)

Mode No.	No. of Crack Functions ($\bar{N}$)	order of polynomial ($I \times J$)					
		4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9
2	0	[3.115] (3.114) {3.114}	[2.904] (2.901) {2.901}	[2.895] (2.892) {2.892}	[2.892] (2.890) {2.889}	[2.892] (2.890) {2.889}	[2.892] (2.890) {2.889}
	2	[2.821] (2.819) {2.818}	[2.750] (2.747) {2.747}	[2.745] (2.743) {2.743}	[2.743] (2.740) {2.740}	[2.742] (2.740) {2.739}	[2.742] (2.739) {2.739}
	4	[2.744] (2.742) {2.741}	[2.742] (2.739) {2.739}	[2.741] (2.739) {2.738}	[2.741] (2.738) {2.738}	[2.740] (2.738) {2.738}	[2.740] (2.738) {2.738}
	5	[2.742] (2.739) {2.739}	[2.741] (2.739) {2.738}	[2.741] (2.738) {2.738}	[2.740] (2.738) {2.738}	[2.740] (2.738) {2.738}	[2.740] (2.738) {2.738}
	6	[2.741] (2.739) {2.738}	[2.741] (2.738) {2.738}	[2.740] (2.738) {2.738}	[2.740] (2.738) {2.738}	[2.740] (2.738) {2.738}	[2.740] (2.738) {2.738}
3	0	[3.919] (3.915) {3.914}	[3.499] (3.494) {3.493}	[3.479] (3.474) {3.474}	[3.472] (3.468) {3.467}	[3.472] (3.468) {3.467}	[3.472] (3.468) {3.467}
	2	[3.436] (3.434) {3.434}	[3.315] (3.312) {3.311}	[3.305] (3.301) {3.301}	[3.301] (3.298) {3.297}	[3.300] (3.297) {3.297}	[3.300] (3.297) {3.296}
	4	[3.310] (3.306) {3.306}	[3.302] (3.299) {3.298}	[3.300] (3.297) {3.297}	[3.299] (3.296) {3.295}	[3.299] (3.296) {3.295}	[3.299] (3.295) {3.295}
	5	[3.303] (3.299) {3.299}	[3.300] (3.296) {3.296}	[3.299] (3.296) {3.295}	[3.299] (3.295) {3.295}	[3.299] (3.295) {3.295}	[3.299] (3.295) {3.295}
	6	[3.300] (3.297) {3.296}	[3.299] (3.296) {3.295}	[3.299] (3.295) {3.295}	[3.299] (3.295) {3.295}	[3.299] (3.295) {3.295}	[3.299] (3.295) {3.295}

表 3.4(續上頁)

Mode No.	No. of Crack Functions ($\bar{N}$)	order of polynomial ($I \times J$)					
		4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9
4	0	[4.654] (4.650) {4.649}	[4.276] (4.267) {4.266}	[4.260] (4.252) {4.251}	[4.251] (4.244) {4.243}	[4.251] (4.244) {4.243}	[4.250] (4.243) {4.242}
	2	[3.607] (3.603) {3.603}	[3.459] (3.455) {3.455}	[3.447] (3.443) {3.443}	[3.443] (3.439) {3.439}	[3.441] (3.438) {3.437}	[3.441] (3.437) {3.437}
	4	[3.452] (3.448) {3.448}	[3.443] (3.439) {3.439}	[3.441] (3.437) {3.437}	[3.440] (3.436) {3.436}	[3.439] (3.436) {3.435}	[3.439] (3.435) {3.435}
	5	[3.443] (3.440) {3.439}	[3.441] (3.437) {3.436}	[3.440] (3.436) {3.436}	[3.439] (3.436) {3.435}	[3.439] (3.435) {3.435}	[3.439] (3.435) {3.435}
	6	[3.441] (3.437) {3.437}	[3.440] (3.436) {3.436}	[3.439] (3.436) {3.435}	[3.439] (3.435) {3.435}	[3.439] (3.435) {3.435}	[3.439] (3.435) {3.435}
5	0	[4.654] (4.650) {4.649}	[4.276] (4.267) {4.266}	[4.260] (4.252) {4.251}	[4.251] (4.244) {4.243}	[4.251] (4.244) {4.243}	[4.250] (4.243) {4.242}
	2	[4.120] (4.112) {4.111}	[3.961] (3.952) {3.951}	[3.946] (3.938) {3.937}	[3.939] (3.931) {3.930}	[3.937] (3.929) {3.928}	[3.935] (3.928) {3.927}
	4	[3.943] (3.933) {3.932}	[3.936] (3.926) {3.925}	[3.930] (3.921) {3.920}	[3.929] (3.919) {3.919}	[3.928] (3.919) {3.918}	[3.927] (3.918) {3.917}
	5	[3.934] (3.925) {3.924}	[3.931] (3.922) {3.921}	[3.929] (3.920) {3.918}	[3.928] (3.919) {3.918}	[3.927] (3.918) {3.917}	[3.927] (3.918) {3.917}
	6	[3.931] (3.922) {3.921}	[3.929] (3.920) {3.918}	[3.928] (3.919) {3.918}	[3.927] (3.918) {3.917}	[3.927] (3.918) {3.917}	[3.927] (3.918) {3.917}

表 3.5 具邊緣裂縫四邊自由端之 Al/Al₂O₃ FGM 方形厚板($h/b = 0.3$, $c_y/b = 0.5$, $d/a = 0.5$, $\alpha = 30^\circ$, $\hat{n}=10$)之無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ 收斂性分析

Mode No.	No. of Crack Functions ($\bar{N}$)	order of polynomial ($I \times J$)					
		5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	10×10
1	0	[1.984] (1.982) {1.982}	[1.971] (1.970) {1.969}	[1.971] (1.969) {1.969}	[1.970] (1.969) {1.968}	[1.970] (1.969) {1.968}	[1.970] (1.969) {1.968}
	3	[1.095] (1.094) {1.094}	[1.087] (1.086) {1.086}	[1.085] (1.084) {1.084}	[1.084] (1.083) {1.083}	[1.084] (1.082) {1.082}	[1.083] (1.082) {1.082}
	5	[1.086] (1.085) {1.085}	[1.084] (1.083) {1.083}	[1.083] (1.082) {1.082}	[1.083] (1.082) {1.082}	[1.083] (1.082) {1.082}	[1.083] (1.082) {1.082}
	6	[1.084] (1.083) {1.083}	[1.084] (1.083) {1.082}	[1.083] (1.082) {1.082}	[1.083] (1.082) {1.082}	[1.083] (1.082) {1.082}	[1.083] (1.082) {1.081}
	7	[1.083] (1.082) {1.082}	[1.083] (1.082) {1.082}	[1.083] (1.082) {1.082}	[1.083] (1.082) {1.082}	[1.083] (1.082) {1.081}	[1.083] (1.082) {1.081}

Note: []: results from $\hat{N}_z = 4$; (): results from $\hat{N}_z = 6$; { }: results from $\hat{N}_z = 7$

表 3.5(續上頁)

Mode No.	No. of Crack Functions ($\bar{N}$)	order of polynomial ($I \times J$)					
		5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	10×10
2	0	[2.904] (2.901) {2.901}	[2.893] (2.892) {2.892}	[2.892] (2.890) {2.889}	[2.892] (2.890) {2.889}	[2.892] (2.890) {2.889}	[2.892] (2.890) {2.889}
	3	[1.242] (1.241) {1.240}	[1.241] (1.239) {1.239}	[1.239] (1.238) {1.237}	[1.239] (1.237) {1.237}	[1.238] (1.237) {1.236}	[1.238] (1.236) {1.236}
	5	[1.238] (1.236) {1.235}	[1.237] (1.235) {1.235}	[1.237] (1.235) {1.234}	[1.236] (1.234) {1.234}	[1.236] (1.234) {1.234}	[1.236] (1.234) {1.234}
	6	[1.237] (1.235) {1.234}	[1.237] (1.234) {1.234}	[1.236] (1.234) {1.234}	[1.236] (1.234) {1.234}	[1.236] (1.234) {1.233}	[1.236] (1.234) {1.233}
	7	[1.236] (1.234) {1.234}	[1.236] (1.234) {1.234}	[1.236] (1.234) {1.233}	[1.236] (1.234) {1.233}	[1.236] (1.234) {1.233}	[1.236] (1.234) {1.233}
3	0	[3.499] (3.494) {3.493}	[3.479] (3.474) {3.474}	[3.472] (3.468) {3.467}	[3.472] (3.468) {3.467}	[3.472] (3.468) {3.467}	[3.472] (3.468) {3.467}
	3	[1.992] (1.990) {1.990}	[1.989] (1.987) {1.986}	[1.986] (1.984) {1.984}	[1.986] (1.984) {1.983}	[1.985] (1.983) {1.983}	[1.985] (1.983) {1.982}
	5	[1.987] (1.984) {1.984}	[1.985] (1.983) {1.983}	[1.985] (1.983) {1.982}	[1.984] (1.982) {1.982}	[1.984] (1.982) {1.982}	[1.984] (1.982) {1.982}
	6	[1.985] (1.983) {1.983}	[1.985] (1.983) {1.982}	[1.984] (1.982) {1.982}	[1.984] (1.982) {1.982}	[1.984] (1.982) {1.981}	[1.984] (1.982) {1.981}
	7	[1.985] (1.982) {1.982}	[1.984] (1.982) {1.982}	[1.984] (1.982) {1.982}	[1.984] (1.982) {1.981}	[1.984] (1.982) {1.981}	[1.984] (1.982) {1.981}

表 3.5 (續上頁)

Mode No.	No. of Crack Functions ($\bar{N}$)	order of polynomial ($I \times J$)					
		5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	10×10
4	0	[4.276] (4.267) {4.266}	[4.260] (4.252) {4.251}	[4.251] (4.244) {4.243}	[4.251] (4.244) {4.243}	[4.250] (4.243) {4.242}	[4.250] (4.243) {4.242}
	3	[2.601] (2.598) {2.597}	[2.597] (2.593) {2.593}	[2.595] (2.592) {2.591}	[2.594] (2.591) {2.591}	[2.594] (2.591) {2.590}	[2.593] (2.590) {2.590}
	5	[2.593] (2.589) {2.589}	[2.592] (2.588) {2.588}	[2.592] (2.588) {2.587}	[2.591] (2.588) {2.587}	[2.591] (2.588) {2.587}	[2.591] (2.587) {2.587}
	6	[2.592] (2.588) {2.588}	[2.592] (2.588) {2.587}	[2.591] (2.587) {2.587}	[2.591] (2.587) {2.587}	[2.591] (2.587) {2.587}	[2.591] (2.587) {2.587}
	7	[2.592] (2.588) {2.587}	[2.591] (2.587) {2.587}	[2.591] (2.587) {2.587}	[2.591] (2.587) {2.587}	[2.591] (2.587) {2.586}	[2.591] (2.587) {2.586}
5	0	[4.276] (4.267) {4.266}	[4.260] (4.252) {4.251}	[4.251] (4.244) {4.243}	[4.251] (4.244) {4.243}	[4.250] (4.243) {4.242}	[4.250] (4.243) {4.242}
	3	[3.072] (3.069) {3.068}	[3.069] (3.066) {3.065}	[3.066] (3.063) {3.063}	[3.066] (3.063) {3.062}	[3.065] (3.062) {3.062}	[3.065] (3.062) {3.062}
	5	[3.066] (3.063) {3.062}	[3.065] (3.062) {3.061}	[3.065] (3.061) {3.061}	[3.064] (3.061) {3.061}	[3.064] (3.061) {3.061}	[3.064] (3.061) {3.061}
	6	[3.065] (3.062) {3.061}	[3.065] (3.061) {3.061}	[3.064] (3.061) {3.061}	[3.064] (3.061) {3.060}	[3.064] (3.061) {3.060}	[3.064] (3.061) {3.060}
	7	[3.064] (3.061) {3.061}	[3.064] (3.061) {3.061}	[3.064] (3.061) {3.060}	[3.064] (3.061) {3.060}	[3.064] (3.061) {3.060}	[3.064] (3.061) {3.060}

表 3.6 具頂部裂縫懸臂之 Al/Al₂O₃ FGM 矩形薄板($a/b = 2.0, h/b = 0.02, c_y/b = 1.0, d/a = 0.5, \alpha = 90^\circ, \hat{n} = 0.2$)之無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ 收斂性分析

Mode No.	No. of Crack Functions ($\bar{N}$)	order of polynomial ($I \times J$)					
		5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	10×10
1	0	[0.245]	[0.244]	[0.243]	[0.243]	[0.242]	[0.242]
		(0.245)	(0.244)	(0.243)	(0.243)	(0.242)	(0.242)
		{0.245}	{0.244}	{0.243}	{0.243}	{0.242}	{0.242}
	3	[0.232]	[0.231]	[0.231]	[0.230]	[0.230]	[0.230]
		(0.232)	(0.231)	(0.231)	(0.230)	(0.230)	(0.230)
		{0.232}	{0.231}	{0.231}	{0.230}	{0.230}	{0.230}
	6	[0.230]	[0.230]	[0.230]	[0.230]	[0.230]	[0.230]
		(0.230)	(0.230)	(0.230)	(0.230)	(0.230)	(0.230)
		{0.230}	{0.230}	{0.230}	{0.230}	{0.230}	{0.230}
	7	[0.230]	[0.230]	[0.230]	[0.230]	[0.230]	[0.230]
		(0.230)	(0.230)	(0.230)	(0.230)	(0.230)	(0.230)
		{0.230}	{0.230}	{0.230}	{0.230}	{0.230}	{0.230}
	8	[0.230]	[0.230]	[0.230]	[0.230]	[0.230]	[0.230]
		(0.230)	(0.230)	(0.230)	(0.230)	(0.230)	(0.230)
		{0.230}	{0.230}	{0.230}	{0.230}	{0.230}	{0.230}

Note: []: results from $\hat{N}_z = 3$; (): results from $\hat{N}_z = 4$; { }: results from $\hat{N}_z = 5$

表 3.6(續上頁)

Mode No.	No. of Crack Functions ($\bar{N}$)	order of polynomial ($I \times J$)					
		5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	10×10
2	0	[1.047] (1.047) {1.047}	[1.043] (1.043) {1.043}	[1.042] (1.041) {1.041}	[1.040] (1.040) {1.040}	[1.039] (1.039) {1.039}	[1.038] (1.037) {1.037}
	3	[0.881] (0.881) {0.881}	[0.878] (0.878) {0.878}	[0.877] (0.877) {0.877}	[0.876] (0.876) {0.876}	[0.876] (0.875) {0.875}	[0.875] (0.875) {0.875}
	6	[0.876] (0.875) {0.875}	[0.875] (0.875) {0.875}	[0.875] (0.875) {0.875}	[0.874] (0.874) {0.874}	[0.874] (0.873) {0.873}	[0.873] (0.873) {0.873}
	7	[0.875] (0.875) {0.875}	[0.875] (0.874) {0.874}	[0.874] (0.874) {0.874}	[0.874] (0.873) {0.873}	[0.874] (0.873) {0.873}	[0.873] (0.872) {0.872}
	8	[0.874] (0.874) {0.874}	[0.874] (0.874) {0.874}	[0.874] (0.873) {0.873}	[0.873] (0.873) {0.873}	[0.873] (0.873) {0.873}	[0.872] (0.872) {0.872}
3	0	[1.539] (1.539) {1.539}	[1.518] (1.518) {1.518}	[1.514] (1.514) {1.514}	[1.512] (1.512) {1.512}	[1.510] (1.510) {1.510}	[1.509] (1.509) {1.509}
	3	[1.313] (1.313) {1.313}	[1.309] (1.309) {1.309}	[1.306] (1.306) {1.306}	[1.305] (1.304) {1.304}	[1.303] (1.303) {1.303}	[1.302] (1.301) {1.301}
	6	[1.303] (1.302) {1.302}	[1.302] (1.302) {1.302}	[1.301] (1.300) {1.300}	[1.300] (1.299) {1.299}	[1.299] (1.299) {1.299}	[1.298] (1.298) {1.298}
	7	[1.301] (1.300) {1.300}	[1.300] (1.300) {1.300}	[1.300] (1.299) {1.299}	[1.299] (1.298) {1.298}	[1.298] (1.297) {1.297}	[1.297] (1.297) {1.297}
	8	[1.300] (1.299) {1.299}	[1.300] (1.298) {1.298}	[1.298] (1.297) {1.297}	[1.298] (1.297) {1.297}	[1.297] (1.296) {1.296}	[1.297] (1.296) {1.296}

表 3.6(續上頁)

Mode No.	No. of Crack Functions ($\bar{N}$)	order of polynomial ($I \times J$)					
		5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	10×10
4	0	[3.428] (3.427) {3.427}	[3.395] (3.394) {3.394}	[3.391] (3.390) {3.390}	[3.385] (3.384) {3.384}	[3.383] (3.382) {3.382}	[3.379] (3.377) {3.377}
	3	[2.938] (2.937) {2.937}	[2.928] (2.927) {2.927}	[2.921] (2.920) {2.920}	[2.916] (2.915) {2.915}	[2.913] (2.912) {2.912}	[2.910] (2.909) {2.909}
	6	[2.914] (2.912) {2.912}	[2.912] (2.911) {2.911}	[2.910] (2.908) {2.908}	[2.907] (2.905) {2.905}	[2.905] (2.903) {2.903}	[2.902] (2.910) {2.901}
	7	[2.910] (2.909) {2.909}	[2.909] (2.907) {2.907}	[2.907] (2.905) {2.905}	[2.904] (2.902) {2.902}	[2.903] (2.900) {2.900}	[2.900] (2.899) {2.899}
	8	[2.906] (2.905) {2.905}	[2.905] (2.903) {2.903}	[2.904] (2.902) {2.902}	[2.902] (2.900) {2.900}	[2.901] (2.899) {2.899}	[2.899] (2.897) {2.897}
5	0	[4.419] (4.418) {4.418}	[4.394] (4.393) {4.393}	[4.244] (4.243) {4.243}	[4.239] (4.238) {4.238}	[4.234] (4.234) {4.234}	[4.231] (4.231) {4.231}
	3	[3.674] (3.673) {3.673}	[3.660] (3.659) {3.659}	[3.633] (3.632) {3.632}	[3.630] (3.628) {3.628}	[3.626] (3.625) {3.625}	[3.623] (3.621) {3.621}
	6	[3.623] (3.621) {3.621}	[3.620] (3.618) {3.618}	[3.616] (3.615) {3.615}	[3.615] (3.613) {3.613}	[3.614] (3.612) {3.612}	[3.612] (3.610) {3.610}
	7	[3.617] (3.616) {3.616}	[3.616] (3.614) {3.614}	[3.615] (3.613) {3.613}	[3.613] (3.611) {3.611}	[3.611] (3.609) {3.609}	[3.609] (3.606) {3.606}
	8	[3.615] (3.913) {3.613}	[3.614] (3.612) {3.612}	[3.612] (3.610) {3.610}	[3.610] (3.608) {3.608}	[3.609] (3.606) {3.606}	[3.608] (3.605) {3.605}

表 3.7 具頂部裂縫懸臂之 Al/Al₂O₃ FGM 矩形厚板($a/b = 2.0$, $h/b = 0.3$, $c_y/b = 1.0$, $d/b = 0.2$, $\alpha = 90^\circ$, $\hat{n} = 0.2$)之無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ 收斂性分析

Mode No.	No. of Crack Functions ($\bar{N}$)	order of polynomial ($I \times J$)					
		4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9
1	0	[0.240] (0.240) {0.240}	[0.238] (0.238) {0.238}	[0.238] (0.238) {0.238}	[0.237] (0.237) {0.237}	[0.237] (0.237) {0.237}	[0.237] (0.237) {0.237}
	2	[0.236] (0.236) {0.236}	[0.235] (0.235) {0.235}	[0.234] (0.234) {0.234}	[0.234] (0.234) {0.234}	[0.234] (0.234) {0.234}	[0.234] (0.234) {0.234}
	4	[0.234] (0.234) {0.234}	[0.234] (0.234) {0.234}	[0.234] (0.234) {0.234}	[0.234] (0.234) {0.234}	[0.234] (0.234) {0.234}	[0.234] (0.234) {0.234}
	5	[0.234] (0.234) {0.234}	[0.234] (0.234) {0.234}	[0.234] (0.234) {0.234}	[0.234] (0.234) {0.234}	[0.234] (0.234) {0.234}	[0.234] (0.234) {0.234}
	6	[0.234] (0.234) {0.234}	[0.234] (0.234) {0.234}	[0.234] (0.234) {0.234}	[0.234] (0.234) {0.234}	[0.234] (0.234) {0.234}	[0.234] (0.234) {0.234}

Note: []: results from $\hat{N}_z = 4$; (): results from $\hat{N}_z = 5$; { }: results from $\hat{N}_z = 6$

表 3.7(續上頁)

Mode No.	No. of Crack Functions ($\bar{N}$)	order of polynomial ($I \times J$)					
		4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9
2	0	[0.701] (0.701) {0.701}	[0.698] (0.698) {0.698}	[0.696] (0.696) {0.696}	[0.695] (0.695) {0.695}	[0.694] (0.694) {0.694}	[0.694] (0.694) {0.694}
	2	[0.674] (0.674) {0.674}	[0.671] (0.671) {0.671}	[0.669] (0.669) {0.669}	[0.668] (0.668) {0.668}	[0.668] (0.668) {0.668}	[0.667] (0.667) {0.667}
	4	[0.670] (0.670) {0.670}	[0.669] (0.669) {0.669}	[0.668] (0.668) {0.668}	[0.668] (0.668) {0.668}	[0.667] (0.667) {0.667}	[0.667] (0.667) {0.667}
	5	[0.669] (0.669) {0.669}	[0.668] (0.668) {0.668}	[0.668] (0.668) {0.668}	[0.667] (0.667) {0.667}	[0.667] (0.667) {0.667}	[0.667] (0.667) {0.667}
	6	[0.668] (0.668) {0.668}	[0.668] (0.668) {0.668}	[0.668] (0.667) {0.667}	[0.667] (0.667) {0.667}	[0.667] (0.667) {0.667}	[0.667] (0.667) {0.667}
3	0	[0.876] (0.876) {0.876}	[0.874] (0.874) {0.874}	[0.867] (0.867) {0.867}	[0.867] (0.866) {0.866}	[0.866] (0.866) {0.866}	[0.865] (0.865) {0.865}
	2	[0.856] (0.856) {0.856}	[0.854] (0.854) {0.854}	[0.849] (0.849) {0.849}	[0.848] (0.848) {0.848}	[0.847] (0.847) {0.847}	[0.847] (0.847) {0.847}
	4	[0.851] (0.851) {0.851}	[0.849] (0.849) {0.848}	[0.847] (0.847) {0.847}	[0.847] (0.847) {0.846}	[0.846] (0.846) {0.846}	[0.846] (0.846) {0.846}
	5	[0.848] (0.848) {0.848}	[0.847] (0.847) {0.847}	[0.847] (0.847) {0.846}	[0.846] (0.846) {0.846}	[0.846] (0.846) {0.846}	[0.846] (0.846) {0.846}
	6	[0.847] (0.847) {0.846}	[0.847] (0.846) {0.846}	[0.846] (0.846) {0.846}	[0.846] (0.846) {0.846}	[0.846] (0.846) {0.846}	[0.846] (0.846) {0.846}

表 3.7(續上頁)

Mode No.	No. of Crack Functions ($\bar{N}$)	order of polynomial ($I \times J$)					
		4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9
4	0	[1.382] (1.382) {1.382}	[1.363] (1.363) {1.363}	[1.356] (1.356) {1.356}	[1.354] (1.354) {1.354}	[1.353] (1.353) {1.353}	[1.352] (1.352) {1.352}
	2	[1.317] (1.317) {1.317}	[1.309] (1.309) {1.309}	[1.305] (1.305) {1.305}	[1.304] (1.303) {1.303}	[1.302] (1.302) {1.302}	[1.301] (1.301) {1.301}
	4	[1.303] (1.303) {1.303}	[1.301] (1.301) {1.301}	[1.301] (1.301) {1.300}	[1.300] (1.300) {1.300}	[1.300] (1.299) {1.299}	[1.299] (1.299) {1.299}
	5	[1.301] (1.301) {1.301}	[1.300] (1.300) {1.300}	[1.300] (1.300) {1.299}	[1.300] (1.299) {1.299}	[1.299] (1.299) {1.299}	[1.299] (1.299) {1.298}
	6	[1.300] (1.300) {1.299}	[1.300] (1.299) {1.299}	[1.299] (1.299) {1.299}	[1.299] (1.299) {1.299}	[1.299] (1.299) {1.298}	[1.299] (1.298) {1.298}
5	0	[2.527] (2.527) {2.527}	[2.520] (2.520) {2.520}	[2.517] (2.517) {2.517}	[2.515] (2.515) {2.515}	[2.514] (2.514) {2.514}	[2.514] (2.513) {2.513}
	2	[2.264] (2.263) {2.263}	[2.255] (2.255) {2.255}	[2.251] (2.251) {2.251}	[2.248] (2.248) {2.248}	[2.247] (2.247) {2.247}	[2.246] (2.246) {2.246}
	4	[2.252] (2.252) {2.252}	[2.250] (2.250) {2.250}	[2.248] (2.248) {2.248}	[2.247] (2.247) {2.246}	[2.246] (2.246) {2.246}	[2.246] (2.245) {2.245}
	5	[2.250] (2.250) {2.250}	[2.249] (2.249) {2.249}	[2.247] (2.247) {2.247}	[2.246] (2.246) {2.246}	[2.246] (2.246) {2.246}	[2.246] (2.245) {2.245}
	6	[2.249] (2.248) {2.248}	[2.248] (2.247) {2.247}	[2.247] (2.246) {2.246}	[2.246] (2.246) {2.246}	[2.246] (2.245) {2.245}	[2.245] (2.245) {2.245}

表 3.8 具頂部裂縫懸臂之 Al/Al₂O₃ FGM 矩形厚板($a/b = 2.0$, $h/b = 0.3$, $c_y/b = 1.0$, $d/b = 0.5$, $\alpha = 90^\circ$, $\hat{n} = 0.2$)之無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ 收斂性分析

Mode No.	No. of Crack Functions ($\bar{N}$)	order of polynomial ($I \times J$)					
		5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	10×10
1	0	[0.238] (0.238) {0.238}	[0.238] (0.238) {0.238}	[0.237] (0.237) {0.237}	[0.237] (0.237) {0.237}	[0.237] (0.237) {0.237}	[0.237] (0.237) {0.237}
	3	[0.220] (0.220) {0.220}	[0.220] (0.220) {0.220}	[0.219] (0.219) {0.219}	[0.219] (0.219) {0.219}	[0.219] (0.219) {0.219}	[0.219] (0.219) {0.219}
	5	[0.219] (0.219) {0.219}	[0.219] (0.219) {0.219}	[0.219] (0.219) {0.219}	[0.219] (0.219) {0.219}	[0.219] (0.219) {0.219}	[0.219] (0.219) {0.219}
	6	[0.219] (0.219) {0.219}	[0.219] (0.219) {0.219}	[0.219] (0.219) {0.219}	[0.219] (0.219) {0.219}	[0.219] (0.219) {0.219}	[0.219] (0.219) {0.219}
	7	[0.219] (0.219) {0.219}	[0.219] (0.219) {0.219}	[0.219] (0.219) {0.219}	[0.219] (0.219) {0.219}	[0.219] (0.219) {0.219}	[0.219] (0.219) {0.219}

Note: []: results from $\hat{N}_z = 4$; (): results from $\hat{N}_z = 5$; { }: results from $\hat{N}_z = 6$

表 3.8(續上頁)

Mode No.	No. of Crack Functions ($\bar{N}$)	order of polynomial ($I \times J$)					
		5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	10×10
2	0	[0.698] (0.698) {0.698}	[0.696] (0.696) {0.696}	[0.695] (0.695) {0.695}	[0.694] (0.694) {0.694}	[0.694] (0.694) {0.694}	[0.693] (0.693) {0.693}
	3	[0.514] (0.514) {0.514}	[0.513] (0.513) {0.513}	[0.512] (0.512) {0.512}	[0.512] (0.512) {0.512}	[0.512] (0.512) {0.512}	[0.512] (0.512) {0.512}
	5	[0.512] (0.512) {0.512}	[0.512] (0.512) {0.512}	[0.512] (0.512) {0.512}	[0.512] (0.512) {0.512}	[0.512] (0.512) {0.512}	[0.512] (0.511) {0.511}
	6	[0.512] (0.512) {0.512}	[0.512] (0.512) {0.512}	[0.512] (0.512) {0.512}	[0.512] (0.512) {0.512}	[0.512] (0.511) {0.511}	[0.512] (0.511) {0.511}
	7	[0.512] (0.512) {0.512}	[0.512] (0.512) {0.512}	[0.512] (0.512) {0.512}	[0.512] (0.511) {0.511}	[0.512] (0.511) {0.511}	[0.512] (0.511) {0.511}
3	0	[0.874] (0.874) {0.874}	[0.867] (0.867) {0.867}	[0.867] (0.866) {0.866}	[0.866] (0.866) {0.866}	[0.865] (0.865) {0.865}	[0.865] (0.865) {0.865}
	3	[0.729] (0.729) {0.729}	[0.727] (0.727) {0.727}	[0.726] (0.726) {0.726}	[0.726] (0.726) {0.726}	[0.726] (0.726) {0.726}	[0.726] (0.726) {0.725}
	5	[0.726] (0.726) {0.726}	[0.726] (0.726) {0.725}	[0.726] (0.725) {0.725}	[0.725] (0.725) {0.725}	[0.725] (0.725) {0.725}	[0.725] (0.725) {0.725}
	6	[0.726] (0.726) {0.725}	[0.725] (0.725) {0.725}	[0.725] (0.725) {0.725}	[0.725] (0.725) {0.725}	[0.725] (0.725) {0.725}	[0.725] (0.725) {0.725}
	7	[0.725] (0.725) {0.725}	[0.725] (0.725) {0.725}	[0.725] (0.725) {0.725}	[0.725] (0.725) {0.725}	[0.725] (0.725) {0.725}	[0.725] (0.725) {0.725}

表 3.8(續上頁)

Mode No.	No. of Crack Functions ($\bar{N}$)	order of polynomial ($I \times J$)					
		5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	10×10
4	0	[1.363] (1.363) {1.363}	[1.356] (1.356) {1.356}	[1.354] (1.354) {1.354}	[1.353] (1.353) {1.353}	[1.352] (1.352) {1.352}	[1.352] (1.351) {1.351}
	3	[1.135] (1.135) {1.134}	[1.132] (1.132) {1.132}	[1.130] (1.130) {1.130}	[1.129] (1.129) {1.129}	[1.129] (1.129) {1.128}	[1.128] (1.128) {1.128}
	5	[1.129] (1.129) {1.129}	[1.129] (1.129) {1.128}	[1.128] (1.128) {1.128}	[1.128] (1.128) {1.128}	[1.128] (1.128) {1.127}	[1.128] (1.127) {1.127}
	6	[1.129] (1.128) {1.128}	[1.128] (1.128) {1.128}	[1.128] (1.128) {1.127}	[1.128] (1.128) {1.127}	[1.128] (1.127) {1.127}	[1.128] (1.127) {1.127}
	7	[1.128] (1.128) {1.128}	[1.128] (1.128) {1.127}	[1.128] (1.127) {1.127}	[1.128] (1.127) {1.127}	[1.128] (1.127) {1.127}	[1.127] (1.127) {1.127}
5	0	[2.520] (2.520) {2.520}	[2.517] (2.517) {2.517}	[2.515] (2.515) {2.515}	[2.514] (2.514) {2.514}	[2.514] (2.513) {2.513}	[2.513] (2.513) {2.513}
	3	[1.458] (1.458) {1.458}	[1.455] (1.455) {1.455}	[1.453] (1.453) {1.453}	[1.452] (1.452) {1.452}	[1.451] (1.451) {1.451}	[1.451] (1.451) {1.451}
	5	[1.454] (1.454) {1.454}	[1.453] (1.453) {1.453}	[1.452] (1.452) {1.452}	[1.451] (1.451) {1.451}	[1.451] (1.451) {1.451}	[1.451] (1.450) {1.450}
	6	[1.453] (1.453) {1.453}	[1.452] (1.452) {1.452}	[1.452] (1.451) {1.451}	[1.451] (1.451) {1.451}	[1.451] (1.451) {1.451}	[1.451] (1.450) {1.450}
	7	[1.452] (1.452) {1.452}	[1.452] (1.451) {1.451}	[1.451] (1.451) {1.451}	[1.451] (1.451) {1.451}	[1.451] (1.450) {1.450}	[1.451] (1.450) {1.450}

表 3.9 具頂部裂縫兩端自由端，兩端固定端之 Al/ ZrO₂ FGM 矩形薄板($a/b = 2.0, h/b = 0.02, c_y/b = 0.5, d/b = 0.5, \alpha = 135^\circ, \hat{n} = 5$)之無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ 收斂性分析

Mode No.	No. of Crack Functions ($\bar{N}$)	order of polynomial ($I \times J$)					
		5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	10×10
1	0	[1.591] (1.591) {1.591}	[1.591] (1.590) {1.590}	[1.580] (1.580) {1.580}	[1.580] (1.578) {1.578}	[1.575] (1.575) {1.575}	[1.575] (1.574) {1.574}
	3	[1.458] (1.458) {1.458}	[1.456] (1.456) {1.456}	[1.449] (1.449) {1.449}	[1.448] (1.448) {1.448}	[1.443] (1.442) {1.442}	[1.442] (1.442) {1.442}
	6	[1.443] (1.442) {1.442}	[1.441] (1.441) {1.441}	[1.440] (1.439) {1.439}	[1.439] (1.439) {1.439}	[1.438] (1.437) {1.437}	[1.437] (1.437) {1.437}
	7	[1.440] (1.440) {1.440}	[1.439] (1.439) {1.439}	[1.438] (1.438) {1.438}	[1.438] (1.437) {1.437}	[1.437] (1.436) {1.436}	[1.436] (1.435) {1.435}
	8	[1.438] (1.437) {1.437}	[1.438] (1.437) {1.437}	[1.437] (1.437) {1.437}	[1.436] (1.436) {1.436}	[1.436] (1.435) {1.435}	[1.435] (1.435) {1.435}

Note: []: results from $\hat{N}_z = 3$; (): results from $\hat{N}_z = 4$; { }: results from $\hat{N}_z = 5$

表 3.9(續上頁)

Mode No.	No. of Crack Functions ($\bar{N}$)	order of polynomial ($I \times J$)					
		5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	10×10
2	0	[2.587] (2.586) {2.586}	[2.579] (2.577) {2.577}	[2.569] (2.567) {2.567}	[2.566] (2.564) {2.564}	[2.560] (2.559) {2.559}	[2.558] (2.556) {2.556}
	3	[2.338] (2.337) {2.337}	[2.334] (2.333) {2.333}	[2.326] (2.325) {2.325}	[2.323] (2.322) {2.322}	[2.318] (2.317) {2.317}	[2.316] (2.314) {2.314}
	6	[2.320] (2.318) {2.318}	[2.317] (2.315) {2.315}	[2.315] (2.313) {2.313}	[2.313] (2.311) {2.311}	[2.311] (2.309) {2.309}	[2.309] (2.307) {2.307}
	7	[2.316] (2.314) {2.314}	[2.314] (2.312) {2.311}	[2.312] (2.310) {2.310}	[2.311] (2.309) {2.309}	[2.310] (2.307) {2.307}	[2.308] (2.306) {2.306}
	8	[2.313] (2.311) {2.311}	[2.312] (2.310) {2.310}	[2.311] (2.308) {2.308}	[2.309] (2.307) {2.307}	[2.308] (2.305) {2.305}	[2.307] (2.304) {2.304}
3	0	[4.580] (4.577) {4.577}	[4.365] (4.364) {4.364}	[4.362] (4.361) {4.361}	[4.347] (4.346) {4.346}	[4.346] (4.344) {4.344}	[4.336] (4.334) {4.334}
	3	[4.024] (4.021) {4.021}	[3.994] (3.992) {3.992}	[3.978] (3.976) {3.976}	[3.968] (3.966) {3.966}	[3.964] (3.962) {3.962}	[3.955] (3.953) {3.953}
	6	[3.961] (3.959) {3.959}	[3.957] (3.955) {3.955}	[3.953] (3.951) {3.951}	[3.950] (3.947) {3.947}	[3.947] (3.945) {3.945}	[3.945] (3.942) {3.942}
	7	[3.954] (3.951) {3.951}	[3.952] (3.949) {3.949}	[3.949] (3.946) {3.946}	[3.947] (3.944) {3.944}	[3.945] (3.943) {3.943}	[3.943] (3.940) {3.940}
	8	[3.949] (3.946) {3.946}	[3.947] (3.945) {3.945}	[3.946] (3.943) {3.943}	[3.944] (3.941) {3.941}	[3.942] (3.940) {3.940}	[3.941] (3.938) {3.938}

表 3.9(續上頁)

Mode No.	No. of Crack Functions ($\bar{N}$)	order of polynomial ($I \times J$)					
		5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	10×10
4	0	[6.023] (6.019) {6.019}	[5.894] (5.890) {5.890}	[5.893] (5.889) {5.889}	[5.871] (5.867) {5.867}	[5.871] (5.866) {5.866}	[5.856] (5.851) {5.851}
	3	[5.405] (5.401) {5.401}	[5.344] (5.340) {5.340}	[5.324] (5.320) {5.320}	[5.314] (5.309) {5.309}	[5.307] (5.302) {5.302}	[5.300] (5.294) {5.294}
	6	[5.302] (5.296) {5.296}	[5.294] (5.288) {5.288}	[5.290] (5.284) {5.284}	[5.286] (5.280) {5.280}	[5.282] (5.276) {5.276}	[5.278] (5.271) {5.271}
	7	[5.292] (5.287) {5.287}	[5.289] (5.283) {5.283}	[5.284] (5.278) {5.278}	[5.280] (5.273) {5.273}	[5.277] (5.270) {5.270}	[5.274] (5.267) {5.267}
	8	[5.287] (5.281) {5.281}	[5.283] (5.277) {5.277}	[5.278] (5.271) {5.271}	[5.275] (5.269) {5.268}	[5.273] (5.266) {5.266}	[5.270] (5.263) {5.263}
5	0	[7.859] (7.856) {7.856}	[7.856] (7.852) {7.852}	[7.774] (7.770) {7.770}	[7.774] (7.770) {7.770}	[7.766] (7.761) {7.761}	[7.766] (7.761) {7.761}
	3	[5.771] (5.766) {5.766}	[5.731] (5.723) {5.723}	[5.720] (5.714) {5.714}	[5.704] (5.698) {5.698}	[5.696] (5.689) {5.689}	[5.685] (5.678) {5.678}
	6	[5.695] (5.689) {5.689}	[5.688] (5.681) {5.681}	[5.682] (5.674) {5.674}	[5.673] (5.665) {5.665}	[5.670] (5.662) {5.662}	[5.665] (5.657) {5.657}
	7	[5.686] (5.679) {5.679}	[5.679] (5.672) {5.671}	[5.674] (5.665) {5.665}	[5.667] (5.659) {5.659}	[5.664] (5.656) {5.656}	[5.658] (5.649) {5.649}
	8	[5.674] (5.666) {5.666}	[5.671] (5.663) {5.663}	[5.666] (5.658) {5.658}	[5.662] (5.653) {5.653}	[5.657] (5.649) {5.649}	[5.655] (5.645) {5.645}

表 3.10 具頂部裂縫兩端自由端，兩端固定端之 Al/ ZrO₂ FGM 矩形厚板($a/b = 2.0$, $h/b = 0.3$, $c_y/b = 0.5$, $d/b = 0.2$, $\alpha = 135^\circ$, $\hat{n} = 5$)之無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ 收斂性分析

Mode No.	No. of Crack Functions ($\bar{N}$)	order of polynomial ($I \times J$)					
		4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9
1	0	[1.362] (1.362) {1.361}	[1.348] (1.347) {1.347}	[1.345] (1.344) {1.344}	[1.342] (1.341) {1.341}	[1.340] (1.340) {1.339}	[1.339] (1.338) {1.338}
	2	[1.342] (1.342) {1.342}	[1.335] (1.334) {1.334}	[1.333] (1.332) {1.332}	[1.330] (1.329) {1.329}	[1.329] (1.329) {1.328}	[1.328] (1.327) {1.327}
	4	[1.332] (1.331) {1.331}	[1.330] (1.330) {1.329}	[1.329] (1.329) {1.328}	[1.329] (1.327) {1.327}	[1.328] (1.327) {1.326}	[1.328] (1.326) {1.326}
	5	[1.330] (1.329) {1.329}	[1.329] (1.328) {1.328}	[1.329] (1.328) {1.327}	[1.328] (1.327) {1.326}	[1.328] (1.327) {1.326}	[1.327] (1.326) {1.325}
	6	[1.329] (1.328) {1.327}	[1.328] (1.327) {1.327}	[1.328] (1.327) {1.326}	[1.328] (1.326) {1.326}	[1.328] (1.326) {1.326}	[1.327] (1.326) {1.325}

Note: []: results from $\hat{N}_z = 4$; (): results from $\hat{N}_z = 5$; { }: results from $\hat{N}_z = 6$

表 3.10(續上頁)

Mode No.	No. of Crack Functions ($\bar{N}$)	order of polynomial ($I \times J$)					
		4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9
2	0	[1.934] (1.934) {1.934}	[1.925] (1.924) {1.924}	[1.913] (1.913) {1.913}	[1.911] (1.910) {1.910}	[1.909] (1.908) {1.908}	[1.909] (1.907) {1.907}
	2	[1.902] (1.902) {1.901}	[1.896] (1.895) {1.895}	[1.886] (1.886) {1.885}	[1.884] (1.883) {1.882}	[1.882] (1.881) {1.881}	[1.881] (1.879) {1.879}
	4	[1.890] (1.889) {1.888}	[1.885] (1.884) {1.884}	[1.883] (1.882) {1.881}	[1.882] (1.880) {1.880}	[1.881] (1.880) {1.879}	[1.881] (1.879) {1.878}
	5	[1.885] (1.883) {1.883}	[1.883] (1.882) {1.881}	[1.882] (1.881) {1.880}	[1.881] (1.880) {1.879}	[1.881] (1.879) {1.878}	[1.880] (1.879) {1.878}
	6	[1.882] (1.881) {1.880}	[1.882] (1.880) {1.880}	[1.881] (1.880) {1.879}	[1.881] (1.879) {1.878}	[1.880] (1.879) {1.878}	[1.880] (1.878) {1.877}
3	0	[2.420] (2.420) {2.420}	[2.407] (2.407) {2.407}	[2.401] (2.401) {2.401}	[2.398] (2.398) {2.398}	[2.397] (2.397) {2.397}	[2.396] (2.396) {2.396}
	2	[2.398] (2.398) {2.398}	[2.387] (2.387) {2.387}	[2.381] (2.381) {2.381}	[2.379] (2.379) {2.379}	[2.377] (2.377) {2.377}	[2.376] (2.376) {2.376}
	4	[2.390] (2.389) {2.389}	[2.383] (2.383) {2.383}	[2.379] (2.379) {2.379}	[2.377] (2.377) {2.377}	[2.376] (2.376) {2.376}	[2.375] (2.375) {2.375}
	5	[2.385] (2.385) {2.385}	[2.381] (2.381) {2.381}	[2.379] (2.378) {2.378}	[2.377] (2.377) {2.377}	[2.376] (2.376) {2.376}	[2.375] (2.375) {2.375}
	6	[2.381] (2.381) {2.381}	[2.379] (2.379) {2.379}	[2.378] (2.378) {2.378}	[2.377] (2.376) {2.376}	[2.376] (2.375) {2.375}	[2.375] (2.375) {2.375}

表 3.10(續上頁)

Mode No.	No. of Crack Functions ($\bar{N}$)	order of polynomial ($I \times J$)					
		4×4	5×5	6×6	7×7	8×8	9×9
4	0	[3.280] (3.277) {3.277}	[3.214] (3.212) {3.212}	[3.194] (3.191) {3.190}	[3.189] (3.187) {3.186}	[3.186] (3.182) {3.182}	[3.185] (3.181) {3.180}
	2	[3.181] (3.178) {3.178}	[3.152] (3.150) {3.149}	[3.144] (3.140) {3.140}	[3.139] (3.137) {3.135}	[3.137] (3.133) {3.132}	[3.135] (3.132) {3.130}
	4	[3.143] (3.139) {3.138}	[3.139] (3.136) {3.134}	[3.136] (3.133) {3.132}	[3.135] (3.132) {3.130}	[3.134] (3.130) {3.128}	[3.133] (3.129) {3.127}
	5	[3.138] (3.134) {3.133}	[3.136] (3.132) {3.131}	[3.135] (3.131) {3.129}	[3.134] (3.130) {3.128}	[3.134] (3.129) {3.127}	[3.133] (3.129) {3.126}
	6	[3.135] (3.131) {3.130}	[3.135] (3.130) {3.128}	[3.134] (3.130) {3.128}	[3.133] (3.129) {3.127}	[3.133] (3.128) {3.126}	[3.133] (3.128) {3.126}
5	0	[4.045] (4.041) {4.041}	[4.013] (4.010) {4.010}	[3.987] (3.983) {3.983}	[3.982] (3.979) {3.978}	[3.979] (3.974) {3.973}	[3.977] (3.973) {3.971}
	2	[3.983] (3.980) {3.979}	[3.962] (3.959) {3.959}	[3.942] (3.938) {3.937}	[3.937] (3.934) {3.933}	[3.934] (3.929) {3.928}	[3.932] (3.928) {3.926}
	4	[3.952] (3.948) {3.948}	[3.944] (3.940) {3.939}	[3.936] (3.931) {3.930}	[3.934] (3.929) {3.928}	[3.932] (3.927) {3.926}	[3.931] (3.927) {3.925}
	5	[3.944] (3.940) {3.939}	[3.937] (3.932) {3.931}	[3.934] (3.929) {3.928}	[3.933] (3.928) {3.926}	[3.931] (3.926) {3.925}	[3.931] (3.926) {3.924}
	6	[3.936] (3.931) {3.930}	[3.934] (3.929) {3.927}	[3.933] (3.928) {3.926}	[3.932] (3.927) {3.925}	[3.931] (3.926) {3.924}	[3.931] (3.925) {3.923}

表 3.11 具頂部裂縫兩端自由端，兩端固定端之 Al/ ZrO₂ FGM 矩形厚板($a/b = 2.0$, $h/b = 0.3$, $c_y/b = 0.5$, $d/b = 0.5$, $\alpha = 135^\circ$, $\hat{n}=5$)之無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ 收斂性分析

Mode No.	No. of Crack Functions ($\bar{N}$)	order of polynomial ($I \times J$)					
		5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	10×10
1	0	[1.348] (1.347) {1.347}	[1.345] (1.344) {1.344}	[1.342] (1.341) {1.341}	[1.340] (1.340) {1.339}	[1.339] (1.338) {1.338}	[1.339] (1.338) {1.337}
	3	[1.210] (1.209) {1.209}	[1.207] (1.207) {1.207}	[1.206] (1.205) {1.205}	[1.205] (1.204) {1.204}	[1.204] (1.203) {1.203}	[1.204] (1.203) {1.202}
	5	[1.205] (1.204) {1.204}	[1.204] (1.203) {1.203}	[1.204] (1.203) {1.202}	[1.203] (1.202) {1.202}	[1.203] (1.202) {1.201}	[1.203] (1.202) {1.201}
	6	[1.204] (1.203) {1.202}	[1.203] (1.203) {1.202}	[1.203] (1.202) {1.201}	[1.203] (1.202) {1.201}	[1.202] (1.201) {1.201}	[1.202] (1.201) {1.201}
	7	[1.203] (1.202) {1.202}	[1.203] (1.202) {1.201}	[1.203] (1.202) {1.201}	[1.203] (1.201) {1.201}	[1.202] (1.201) {1.201}	[1.202] (1.201) {1.200}

Note: []: results from $\hat{N}_z = 4$; (): results from $\hat{N}_z = 5$; { }: results from $\hat{N}_z = 6$

表 3.11(續上頁)

Mode No.	No. of Crack Functions ($\bar{N}$)	order of polynomial ($I \times J$)					
		5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	10×10
2	0	[1.925] (1.924) {1.924}	[1.913] (1.913) {1.913}	[1.911] (1.910) {1.910}	[1.909] (1.908) {1.908}	[1.909] (1.907) {1.907}	[1.908] (1.907) {1.906}
	3	[1.752] (1.751) {1.750}	[1.745] (1.744) {1.744}	[1.743] (1.742) {1.742}	[1.742] (1.741) {1.741}	[1.742] (1.740) {1.740}	[1.741] (1.740) {1.739}
	5	[1.743] (1.742) {1.742}	[1.742] (1.741) {1.741}	[1.741] (1.740) {1.740}	[1.741] (1.740) {1.739}	[1.741] (1.739) {1.739}	[1.740] (1.739) {1.738}
	6	[1.742] (1.741) {1.740}	[1.741] (1.740) {1.740}	[1.741] (1.740) {1.739}	[1.741] (1.739) {1.739}	[1.740] (1.739) {1.738}	[1.740] (1.739) {1.738}
	7	[1.741] (1.740) {1.739}	[1.741] (1.740) {1.739}	[1.741] (1.739) {1.738}	[1.741] (1.739) {1.738}	[1.740] (1.739) {1.738}	[1.740] (1.739) {1.738}
3	0	[2.407] (2.407) {2.407}	[2.401] (2.401) {2.401}	[2.398] (2.398) {2.398}	[2.397] (2.397) {2.397}	[2.396] (2.396) {2.396}	[2.395] (2.395) {2.395}
	3	[2.183] (2.183) {2.183}	[2.179] (2.179) {2.179}	[2.176] (2.176) {2.176}	[2.175] (2.175) {2.175}	[2.174] (2.174) {2.174}	[2.174] (2.173) {2.173}
	5	[2.180] (2.179) {2.179}	[2.177] (2.176) {2.176}	[2.175] (2.175) {2.175}	[2.174] (2.174) {2.174}	[2.174] (2.173) {2.173}	[2.173] (2.173) {2.173}
	6	[2.178] (2.177) {2.177}	[2.176] (2.176) {2.175}	[2.175] (2.174) {2.174}	[2.174] (2.173) {2.173}	[2.173] (2.173) {2.173}	[2.173] (2.173) {2.172}
	7	[2.176] (2.176) {2.176}	[2.175] (2.175) {2.175}	[2.175] (2.174) {2.174}	[2.174] (2.173) {2.173}	[2.173] (2.173) {2.173}	[2.173] (2.172) {2.172}

表 3.11(續上頁)

Mode No.	No. of Crack Functions ($\bar{N}$)	order of polynomial ($I \times J$)					
		5×5	6×6	7×7	8×8	9×9	10×10
4	0	[3.214] (3.212) {3.212}	[3.194] (3.191) {3.190}	[3.189] (3.187) {3.186}	[3.186] (3.182) {3.182}	[3.185] (3.181) {3.180}	[3.184] (3.179) {3.178}
	3	[2.964] (2.962) {2.961}	[2.959] (2.957) {2.956}	[2.956] (2.954) {2.953}	[2.955] (2.952) {2.951}	[2.954] (2.951) {2.949}	[2.953] (2.949) {2.948}
	5	[2.956] (2.953) {2.952}	[2.955] (2.952) {2.951}	[2.954] (2.951) {2.950}	[2.953] (2.949) {2.948}	[2.953] (2.949) {2.948}	[2.952] (2.948) {2.947}
	6	[2.954] (2.951) {2.950}	[2.954] (2.950) {2.949}	[2.953] (2.950) {2.948}	[2.953] (2.949) {2.948}	[2.952] (2.949) {2.947}	[2.952] (2.948) {2.946}
	7	[2.953] (2.949) {2.948}	[2.953] (2.949) {2.948}	[2.953] (2.949) {2.947}	[2.952] (2.948) {2.947}	[2.952] (2.948) {2.946}	[2.952] (2.948) {2.946}
5	0	[4.013] (4.010) {4.010}	[3.987] (3.983) {3.983}	[3.982] (3.979) {3.978}	[3.979] (3.974) {3.973}	[3.977] (3.973) {3.971}	[3.977] (3.971) {3.970}
	3	[3.529] (3.526) {3.525}	[3.520] (3.517) {3.516}	[3.517] (3.513) {3.512}	[3.514] (3.510) {3.509}	[3.512] (3.508) {3.506}	[3.510] (3.507) {3.504}
	5	[3.512] (3.508) {3.506}	[3.509] (3.505) {3.503}	[3.508] (3.054) {3.501}	[3.507] (3.502) {3.500}	[3.506] (3.501) {3.499}	[3.506] (3.501) {3.498}
	6	[3.509] (3.504) {3.502}	[3.508] (3.503) {3.500}	[3.056] (3.502) {3.499}	[3.506] (3.501) {3.498}	[3.505] (3.500) {3.498}	[3.505] (3.500) {3.497}
	7	[3.507] (3.502) {3.499}	[3.506] (3.501) {3.499}	[3.056] (3.501) {3.498}	[3.505] (3.500) {3.497}	[3.505] (3.500) {3.497}	[3.505] (3.500) {3.497}

表 4.1 具不同水平邊緣裂縫簡支之 Al/Al₂O₃ 方形 FGM 薄板無因次化頻率

$$\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c} \ (h/b = 0.05)$$

α	$\hat{n}$	c_y/b	d/a	Mode				
				1	2	3	4	5
0°	0	0.5	0	5.921	14.62	14.62	23.11	28.66
			0.1	5.921	14.60	14.61	23.06	28.63
			0.2	5.905	14.56	14.57	22.95	28.35
			0.3	5.849	14.41	14.44	22.36	27.61
			0.4	5.730	13.92	14.25	20.54	26.55
			0.5	5.548	12.46	14.16	18.78	25.35
	0.2	0.5	0	5.536	13.81	13.81	22.06	27.54
			0.1	5.497	13.57	13.58	21.44	26.63
			0.2	5.483	13.53	13.53	21.34	26.37
			0.3	5.431	13.39	13.42	20.80	25.68
			0.4	5.321	12.95	13.24	19.11	24.70
			0.5	5.152	11.59	13.15	17.46	23.58
	1	0.5	0	4.525	11.19	11.19	17.70	21.97
			0.1	4.524	11.17	11.18	17.67	21.95
			0.2	4.512	11.14	11.15	17.59	21.74
			0.3	4.469	11.03	11.06	17.15	21.17
			0.4	4.379	10.67	10.90	15.76	20.36
			0.5	4.241	9.565	10.83	14.39	19.43
	5	0.5	0	3.889	9.572	9.572	15.09	18.68
			0.1	3.888	9.558	9.568	15.05	18.66
			0.2	3.878	9.530	9.533	14.98	18.47
			0.3	3.840	9.435	9.447	14.58	17.99
			0.4	3.761	9.099	9.325	13.40	17.40
			0.5	3.641	8.133	9.267	12.27	16.52
	10	0.5	0	3.763	9.252	9.252	14.57	18.02
			0.1	3.763	9.237	9.248	14.53	18.00
			0.2	3.752	9.211	9.212	14.46	17.82
			0.3	3.716	9.119	9.126	14.07	17.36
			0.4	3.639	8.782	9.012	12.92	16.69
			0.5	3.522	7.841	8.957	11.85	15.94

表 4.2 具不同水平邊緣裂縫簡支之 Al/Al₂O₃ 方形 FGM 薄板無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($h/b = 0.05$)

α	$\hat{n}$	c_y/b	d/a	Mode				
				1	2	3	4	5
0°	0	0.5	0.1	0.00	0.14	0.07	0.22	0.10
			0.2	0.27	0.41	0.34	0.69	1.08
			0.3	1.22	1.44	1.23	3.25	3.66
			0.4	3.23	4.79	2.53	11.12	7.36
			0.5	6.30	14.77	3.15	18.74	11.55
	0.2	0.5	0.1	0.70	1.74	1.59	2.81	3.30
			0.2	0.96	2.03	1.96	3.26	4.25
			0.3	1.90	3.04	2.75	5.71	6.75
			0.4	3.88	6.23	4.06	13.37	10.31
			0.5	6.94	16.08	4.71	20.85	14.38
	1	0.5	0.1	0.02	0.18	0.09	0.17	0.09
			0.2	0.29	0.45	0.36	0.62	1.05
			0.3	1.24	1.43	1.16	3.11	3.64
			0.4	3.23	4.65	2.59	10.96	7.33
			0.5	6.28	14.52	3.22	18.70	11.56
	5	0.5	0.1	0.03	0.15	0.04	0.27	0.11
			0.2	0.28	0.44	0.41	0.73	1.12
			0.3	1.26	1.43	1.31	3.38	3.69
			0.4	3.29	4.94	2.58	11.20	6.85
			0.5	6.38	15.03	3.19	18.69	11.56
	10	0.5	0.1	0.00	0.16	0.04	0.27	0.11
			0.2	0.29	0.44	0.43	0.75	1.11
			0.3	1.25	1.44	1.36	3.43	3.66
			0.4	3.30	5.08	2.59	11.32	7.38
			0.5	6.40	15.25	3.19	18.67	11.54

表 4.3 具不同水平邊緣裂縫簡支之 Al/Al₂O₃ 方形 FGM 厚板無因次化頻率

$$\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c} \ (h/b = 0.1)$$

α	$\hat{n}$	c_y/b	d/a	Mode				
				1	2	3	4	5
0°	0	0.5	0	5.777	13.81	13.81	19.48	19.48
			0.1	5.775	13.78	13.80	19.25	19.48
			0.2	5.758	13.72	13.74	18.57	19.48
			0.3	5.697	13.54	13.60	17.64	19.48
			0.4	5.572	12.90	13.43	16.79	18.66
			0.5	5.385	11.40	13.35	16.19	17.35
	0.2	0.5	0	5.371	12.86	12.86	18.56	18.56
			0.1	5.369	12.83	12.86	18.34	18.56
			0.2	5.353	12.78	12.80	17.69	18.56
			0.3	5.297	12.62	12.67	16.81	18.56
			0.4	5.181	12.03	12.52	15.99	17.42
			0.5	5.007	10.64	12.44	15.42	16.19
	1	0.5	0	4.426	10.63	10.63	16.20	16.20
			0.1	4.425	10.60	10.62	16.01	16.20
			0.2	4.411	10.56	10.58	15.44	16.20
			0.3	4.365	10.43	10.46	14.67	15.74
			0.4	4.270	9.963	10.34	13.95	14.45
			0.5	4.127	8.819	10.28	13.34	13.51
	5	0.5	0	3.772	8.927	8.927	12.64	12.64
			0.1	3.771	8.908	8.924	12.49	12.64
			0.2	3.759	8.867	8.885	12.05	12.64
			0.3	3.719	8.743	8.791	11.45	12.64
			0.4	3.636	8.316	8.687	10.89	11.97
			0.5	3.513	7.334	8.635	10.49	11.18
	10	0.5	0	3.641	8.587	8.587	11.52	11.52
			0.1	3.640	8.567	8.583	11.39	11.52
			0.2	3.629	8.526	8.546	10.98	11.52
			0.3	3.590	8.401	8.456	10.44	11.52
			0.4	3.510	7.977	8.356	9.929	11.47
			0.5	3.391	7.025	8.307	9.573	10.73

表 4.4 具不同水平邊緣裂縫簡支之 Al/Al₂O₃ 方形 FGM 厚板無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($h/b = 0.1$)

α	$\hat{n}$	c_y/b	d/a	Mode				
				1	2	3	4	5
0°	0	0.5	0.1	0.03	0.22	0.07	1.18	0.00
			0.2	0.33	0.65	0.51	4.67	0.00
			0.3	1.38	1.96	1.52	9.45	0.00
			0.4	3.55	6.59	2.75	13.81	4.21
			0.5	6.79	17.45	3.33	16.89	10.93
	0.2	0.5	0.1	0.04	0.23	0.00	1.19	0.00
			0.2	0.34	0.62	0.47	4.69	0.00
			0.3	1.38	1.87	1.48	9.43	0.00
			0.4	3.54	6.45	2.64	13.85	6.14
			0.5	6.78	17.26	3.27	16.92	12.77
	1	0.5	0.1	0.02	0.28	0.09	1.17	0.00
			0.2	0.34	0.66	0.47	4.69	0.00
			0.3	1.38	1.88	1.60	9.44	2.84
			0.4	3.52	6.27	2.73	13.89	10.80
			0.5	6.76	17.04	3.29	17.65	16.60
	5	0.5	0.1	0.03	0.21	0.03	1.19	0.00
			0.2	0.34	0.67	0.47	4.67	0.00
			0.3	1.41	2.06	1.52	9.41	0.00
			0.4	3.61	6.84	2.69	13.84	5.30
			0.5	6.87	17.84	3.27	17.01	11.55
	10	0.5	0.1	0.03	0.23	0.05	1.13	0.00
			0.2	0.33	0.71	0.48	4.69	0.00
			0.3	1.40	2.17	1.53	9.38	0.00
			0.4	3.60	7.10	2.69	13.81	0.43
			0.5	6.87	18.19	3.26	16.90	6.86

表 4.5 具不同水平邊緣裂縫簡支之 Al/Al₂O₃ 方形 FGM 厚板無因次化頻率

$$\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c} \ (h/b = 0.2)$$

α	$\hat{n}$	c_y/b	d/a	Mode				
				1	2	3	4	5
0°	0	0.5	0	5.304	9.742	9.742	11.65	11.65
			0.1	5.302	9.627	9.742	11.62	11.64
			0.2	5.285	9.289	9.742	11.54	11.59
			0.3	5.225	8.827	9.742	11.30	11.47
			0.4	5.104	8.397	9.742	10.58	11.33
			0.5	4.927	8.095	9.228	9.742	11.27
	0.2	0.5	0	4.950	9.280	9.280	10.92	10.92
			0.1	4.948	9.171	9.280	10.89	10.92
			0.2	4.932	8.849	9.280	10.82	10.87
			0.3	4.876	8.408	9.280	10.61	10.75
			0.4	4.763	7.999	9.280	9.933	10.62
			0.5	4.598	7.711	8.670	9.280	10.56
	1	0.5	0	4.099	8.089	8.089	9.107	9.107
			0.1	4.098	7.994	8.089	9.084	9.103
			0.2	4.084	7.713	8.089	9.027	9.063
			0.3	4.038	7.330	8.089	8.854	8.961
			0.4	3.944	6.972	8.089	8.309	8.848
			0.5	3.805	6.715	7.265	8.089	8.788
	5	0.5	0	3.405	6.296	6.296	7.343	7.343
			0.1	3.404	6.222	6.296	7.325	7.341
			0.2	3.393	6.005	6.296	7.276	7.310
			0.3	3.355	5.708	6.296	7.123	7.232
			0.4	3.277	5.430	6.296	6.652	7.144
			0.5	3.163	5.227	5.811	6.296	7.082
	10	0.5	0	3.264	5.749	5.749	6.975	6.975
			0.1	3.263	5.682	5.749	6.958	6.973
			0.2	3.253	5.483	5.749	6.910	6.945
			0.3	3.217	5.211	5.749	6.759	6.874
			0.4	3.143	4.957	5.749	6.298	6.794
			0.5	3.035	4.776	5.494	5.749	6.689

表 4.6 具不同水平邊緣裂縫簡支之 Al/Al₂O₃ 方形 FGM 厚板無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($h/b = 0.2$)

α	$\hat{n}$	c_y/b	d/a	Mode				
				1	2	3	4	5
0°	0	0.5	0.1	0.04	1.18	0.00	0.26	0.09
			0.2	0.36	4.65	0.00	0.94	0.52
			0.3	1.49	9.39	0.00	3.00	1.55
			0.4	3.77	13.81	0.00	9.18	2.75
			0.5	7.11	16.91	5.28	16.38	3.26
	0.2	0.5	0.1	0.04	1.17	0.00	0.27	0.00
			0.2	0.36	4.64	0.00	0.92	0.46
			0.3	1.49	9.40	0.00	2.84	1.56
			0.4	3.78	13.80	0.00	9.04	2.75
			0.5	7.11	16.91	6.57	15.02	3.30
	1	0.5	0.1	0.02	1.17	0.00	0.25	0.04
			0.2	0.37	4.65	0.00	0.88	0.48
			0.3	1.49	9.38	0.00	2.78	1.60
			0.4	3.78	13.81	0.00	8.76	2.84
			0.5	7.17	16.99	10.19	11.18	3.50
	5	0.5	0.1	0.03	1.18	0.00	0.25	0.03
			0.2	0.35	4.62	0.00	0.91	0.45
			0.3	1.47	9.34	0.00	3.00	1.51
			0.4	3.76	13.75	0.00	9.41	2.71
			0.5	7.11	16.98	7.70	14.26	3.55
	10	0.5	0.1	0.03	1.17	0.00	0.24	0.03
			0.2	0.34	4.63	0.00	0.93	0.43
			0.3	1.44	9.36	0.00	3.10	1.45
			0.4	3.71	13.78	0.00	9.71	2.59
			0.5	7.02	16.92	4.44	17.58	4.10

表 4.7 具不同邊緣裂縫四邊自由端之 Al/Al₂O₃ 方形 FGM 薄板無因次化頻率
 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($h/b = 0.02$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/a	Mode				
				1	2	3	4	5
0°	0	0.5	0	4.054	5.922	7.332	10.47	10.47
			0.1	4.002	5.857	7.264	10.26	10.27
			0.2	3.825	5.666	7.098	9.635	9.918
			0.3	3.479	5.334	6.900	8.543	9.688
			0.4	2.987	4.887	6.739	7.531	9.585
			0.5	2.474	4.409	6.629	6.906	9.574
	0	0.75	0.1	4.017	5.897	7.309	10.27	10.40
			0.2	3.899	5.805	7.201	9.479	10.29
			0.3	3.638	5.543	6.875	8.335	10.17
			0.4	3.168	5.029	6.508	7.797	10.07
			0.5	2.591	4.581	6.367	7.536	9.967
30°	0	0.5	0.1	4.013	5.870	7.279	10.29	10.31
			0.2	3.881	5.723	7.153	9.800	9.975
			0.3	3.615	5.475	6.961	8.704	9.663
			0.4	3.169	5.134	6.584	7.573	9.407
			0.5	2.606	4.809	6.017	7.123	9.237
	0	0.75	0.1	4.021	5.894	7.308	10.30	10.39
			0.2	3.918	5.748	7.201	9.686	10.21
			0.3	3.707	5.315	7.006	8.679	9.984
			0.4	3.331	4.612	6.828	7.907	9.801
			0.5	2.810	4.054	6.682	7.456	9.713
45°	0	0.5	0.1	4.024	5.884	7.294	10.33	10.36
			0.2	3.935	5.762	7.201	9.979	10.03
			0.3	3.758	5.600	7.074	8.989	9.723
			0.4	3.411	5.355	6.608	7.674	9.342
			0.5	2.840	4.978	5.876	7.137	8.962
	0	0.75	0.1	4.030	5.899	7.312	10.35	10.41
			0.2	3.954	5.553	7.112	9.521	10.16
			0.3	3.807	5.373	7.070	8.967	9.962
			0.4	3.541	4.707	6.908	8.078	9.705
			0.5	3.067	4.064	6.694	7.494	9.513

表 4.7 具不同邊緣裂縫四邊自由端之 Al/Al₂O₃ 方形 FGM 薄板無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=1$ 、 $h/b=0.02$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/a	Mode				
				1	2	3	4	5
0°	0	0.5	0.1	1.28	1.10	0.93	2.01	1.91
			0.2	5.65	4.32	3.19	7.98	5.27
			0.3	14.18	9.93	5.89	18.40	7.47
			0.4	26.32	17.48	8.09	28.07	8.45
			0.5	38.97	25.55	9.59	34.04	8.56
	0	0.75	0.1	0.91	0.42	0.31	1.91	0.67
			0.2	3.82	1.98	1.79	9.47	1.72
			0.3	10.26	6.40	6.23	20.39	2.87
			0.4	21.85	15.08	11.24	25.53	3.82
			0.5	36.09	22.64	13.16	28.02	4.80
30°	0	0.5	0.1	1.01	0.88	0.72	1.72	1.53
			0.2	4.27	3.36	2.44	6.40	4.73
			0.3	10.83	7.55	5.06	16.87	7.71
			0.4	21.83	13.31	10.20	27.67	10.15
			0.5	35.72	18.79	17.94	31.97	11.78
	0	0.75	0.1	0.81	0.47	0.33	1.62	0.76
			0.2	3.35	2.94	1.79	7.49	2.48
			0.3	8.56	10.25	4.45	17.11	4.64
			0.4	17.83	22.12	6.87	24.48	6.39
			0.5	30.69	31.54	8.87	28.79	7.23
45°	0	0.5	0.1	0.74	0.64	0.52	1.34	1.05
			0.2	2.94	2.70	1.79	4.69	4.20
			0.3	7.30	5.44	3.52	14.15	7.13
			0.4	15.86	9.57	9.87	26.70	10.77
			0.5	29.95	15.94	19.86	31.83	14.40
	0	0.75	0.1	0.59	0.39	0.27	1.15	0.57
			0.2	2.47	6.23	3.00	9.06	2.96
			0.3	6.09	9.27	3.57	14.36	4.85
			0.4	12.65	20.52	5.78	22.85	7.31
			0.5	24.35	31.37	8.70	28.42	9.14

表 4.7 具不同邊緣裂縫四邊自由端之 Al/Al₂O₃ 方形 FGM 薄板無因次化頻率

$$\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c} \quad (a/b=1, h/b=0.02)$$

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/a	Mode				
				1	2	3	4	5
0°	0.2	0.5	0	3.763	5.496	6.805	9.718	9.718
			0.1	3.715	5.436	6.743	9.523	9.538
			0.2	3.551	5.260	6.588	8.946	9.209
			0.3	3.230	4.953	6.405	7.932	8.995
			0.4	2.773	4.538	6.253	6.993	8.899
			0.5	2.297	4.094	6.153	6.413	8.889
	0.2	0.75	0.1	3.729	5.473	6.784	9.534	9.659
			0.2	3.620	5.389	6.684	8.801	9.557
			0.3	3.378	5.146	6.382	7.739	9.445
			0.4	2.941	4.670	6.041	7.238	9.345
			0.5	2.405	4.254	5.910	6.996	9.254
30°	0.2	0.5	0.1	3.725	5.449	6.756	9.554	9.575
			0.2	3.603	5.312	6.639	9.098	9.262
			0.3	3.356	5.083	6.462	8.082	8.972
			0.4	2.947	4.781	6.118	7.039	8.742
			0.5	2.436	4.450	5.601	6.607	8.570
	0.2	0.75	0.1	3.733	5.470	6.783	9.567	9.649
			0.2	3.638	5.336	6.684	8.993	9.481
			0.3	3.442	4.934	6.504	8.059	9.270
			0.4	3.094	4.293	6.342	7.344	9.103
			0.5	2.611	3.770	6.203	6.922	9.018
45°	0.2	0.5	0.1	3.736	5.461	6.770	9.590	9.614
			0.2	3.654	5.363	6.692	9.274	9.340
			0.3	3.489	5.199	6.566	8.348	9.028
			0.4	3.171	4.953	6.169	7.089	8.684
			0.5	2.635	4.621	5.452	6.625	8.320
	0.2	0.75	0.1	3.740	5.475	6.787	9.606	9.656
			0.2	3.671	5.355	6.708	9.177	9.487
			0.3	3.535	4.988	6.562	8.326	9.250
			0.4	3.284	4.331	6.407	7.483	9.006
			0.5	2.848	3.774	6.215	6.958	8.832

表 4.7 具不同邊緣裂縫四邊自由端之 Al/Al₂O₃ 方形 FGM 薄板無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=1$ 、 $h/b=0.02$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/a	Mode				
				1	2	3	4	5
0°	0.2	0.5	0.1	1.28	1.09	0.91	2.01	1.85
			0.2	5.63	4.29	3.19	7.94	5.24
			0.3	14.16	9.88	5.88	18.38	7.44
			0.4	26.31	17.43	8.11	28.04	8.43
			0.5	38.96	25.51	9.58	34.01	8.53
	0.2	0.75	0.1	0.90	0.42	0.31	1.89	0.61
			0.2	3.80	1.95	1.78	9.44	1.66
			0.3	10.23	6.37	6.22	20.36	2.81
			0.4	21.84	15.03	11.23	25.52	3.84
			0.5	36.09	22.60	13.15	28.01	4.77
30°	0.2	0.5	0.1	1.01	0.86	0.72	1.69	1.47
			0.2	4.25	3.35	2.44	6.38	4.69
			0.3	10.82	7.51	5.04	16.83	7.68
			0.4	21.68	13.01	10.10	27.57	10.04
			0.5	35.26	19.03	17.69	32.01	11.81
	0.2	0.75	0.1	0.80	0.47	0.32	1.55	0.71
			0.2	3.32	2.91	1.78	7.46	2.44
			0.3	8.53	10.23	4.42	17.07	4.61
			0.4	17.78	21.89	6.80	24.43	6.33
			0.5	30.61	31.40	8.85	28.77	7.20
45°	0.2	0.5	0.1	0.72	0.64	0.51	1.32	1.07
			0.2	2.90	2.42	1.66	4.57	3.89
			0.3	7.28	5.40	3.51	14.10	7.10
			0.4	15.73	9.88	9.35	27.05	10.64
			0.5	29.98	15.92	19.88	31.83	14.39
	0.2	0.75	0.1	0.61	0.38	0.26	1.15	0.64
			0.2	2.44	2.57	1.43	5.57	2.38
			0.3	6.06	9.24	3.57	14.32	4.82
			0.4	12.73	21.20	5.85	23.00	7.33
			0.5	24.32	31.33	8.67	28.40	9.12

表 4.7 具不同邊緣裂縫四邊自由端之 Al/Al₂O₃ 方形 FGM 薄板無因次化頻率

$$\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c} \quad (a/b=1, h/b=0.02)$$

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/a	Mode				
				1	2	3	4	5
0°	1	0.5	0	3.096	4.520	5.597	7.996	7.996
			0.1	3.057	4.471	5.546	7.836	7.848
			0.2	2.922	4.327	5.419	7.360	7.579
			0.3	2.658	4.075	5.268	6.523	7.402
			0.4	2.282	3.734	5.144	5.755	7.323
			0.5	1.891	3.370	5.061	5.278	7.314
	1	0.75	0.1	3.069	4.501	5.579	7.845	7.948
			0.2	2.979	4.432	5.498	7.242	7.864
			0.3	2.780	4.234	5.250	6.367	7.772
			0.4	2.421	3.843	4.969	5.954	7.690
			0.5	1.980	3.501	4.861	5.756	7.615
30°	1	0.5	0.1	3.065	4.481	5.557	7.862	7.879
			0.2	2.965	4.370	5.461	7.486	7.622
			0.3	2.761	4.181	5.316	6.651	7.383
			0.4	2.423	3.916	5.033	5.785	7.184
			0.5	1.986	3.675	4.592	5.441	7.057
	1	0.75	0.1	3.072	4.499	5.579	7.872	7.939
			0.2	2.993	4.389	5.498	7.400	7.802
			0.3	2.832	4.059	5.350	6.631	7.627
			0.4	2.545	3.520	5.212	6.040	7.486
			0.5	2.147	3.097	5.101	5.696	7.420
45°	1	0.5	0.1	3.074	4.492	5.568	7.892	7.910
			0.2	3.005	4.379	5.487	7.590	7.649
			0.3	2.871	4.276	5.401	6.869	7.430
			0.4	2.590	4.089	5.008	5.857	7.123
			0.5	2.173	3.804	4.491	5.453	6.849
	1	0.75	0.1	3.078	4.503	5.582	7.908	7.949
			0.2	3.022	4.453	5.548	7.629	7.861
			0.3	2.908	4.103	5.398	6.852	7.611
			0.4	2.706	3.599	5.275	6.175	7.415
			0.5	2.343	3.105	5.112	5.725	7.267

表 4.7 具不同邊緣裂縫四邊自由端之 Al/Al₂O₃ 方形 FGM 薄板無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=1$ 、 $h/b=0.02$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/a	Mode				
				1	2	3	4	5
0°	1	0.5	0.1	1.26	1.08	0.91	2.00	1.85
			0.2	5.62	4.27	3.18	7.95	5.22
			0.3	14.15	9.85	5.88	18.42	7.43
			0.4	26.29	17.39	8.09	28.03	8.42
			0.5	38.92	25.44	9.58	33.99	8.53
	1	0.75	0.1	0.87	0.42	0.32	1.89	0.60
			0.2	3.78	1.95	1.77	9.43	1.65
			0.3	10.21	6.33	6.20	20.37	2.80
			0.4	21.80	14.98	11.22	25.54	3.83
			0.5	36.05	22.54	13.15	28.01	4.76
30°	1	0.5	0.1	1.00	0.86	0.71	1.68	1.46
			0.2	4.23	3.32	2.43	6.38	4.68
			0.3	10.82	7.50	5.02	16.82	7.67
			0.4	21.74	13.36	10.08	27.65	10.16
			0.5	35.85	18.69	17.96	31.95	11.74
	1	0.75	0.1	0.78	0.46	0.32	1.55	0.71
			0.2	3.33	2.90	1.77	7.45	2.43
			0.3	8.53	10.20	4.41	17.07	4.61
			0.4	17.80	22.12	6.88	24.46	6.38
			0.5	30.65	31.48	8.86	28.76	7.20
45°	1	0.5	0.1	0.71	0.62	0.52	1.30	1.08
			0.2	2.94	3.12	1.97	5.08	4.34
			0.3	7.27	5.40	3.50	14.09	7.08
			0.4	16.34	9.54	10.52	26.75	10.92
			0.5	29.81	15.84	19.76	31.80	14.34
	1	0.75	0.1	0.58	0.38	0.27	1.10	0.59
			0.2	2.39	1.48	0.88	4.59	1.69
			0.3	6.07	9.23	3.56	14.31	4.81
			0.4	12.60	20.38	5.75	22.77	7.27
			0.5	24.32	31.31	8.67	28.40	9.12

表 4.7 具不同邊緣裂縫四邊自由端之 Al/Al₂O₃ 方形 FGM 薄板無因次化頻率

$$\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c} \quad (a/b=1, h/b=0.02)$$

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/a	Mode				
				1	2	3	4	5
0°	5	0.5	0	2.665	3.896	4.824	6.881	6.881
			0.1	2.631	3.853	4.779	6.738	6.752
			0.2	2.514	3.726	4.668	6.332	6.516
			0.3	2.287	3.506	4.538	5.614	6.366
			0.4	1.963	3.210	4.431	4.947	6.299
			0.5	1.627	2.896	4.361	4.536	6.292
	5	0.75	0.1	2.641	3.880	4.808	6.750	6.837
			0.2	2.563	3.819	4.737	6.228	6.764
			0.3	2.392	3.644	4.521	5.479	6.684
			0.4	2.082	3.304	4.280	5.127	6.613
			0.5	1.703	3.009	4.188	4.955	6.549
30°	5	0.5	0.1	2.638	3.862	4.789	6.761	6.779
			0.2	2.551	3.764	4.705	6.440	6.553
			0.3	2.376	3.600	4.578	5.718	6.348
			0.4	2.080	3.369	4.325	4.971	6.176
			0.5	1.710	3.157	3.952	4.681	6.069
	5	0.75	0.1	2.642	3.877	4.807	6.772	6.829
			0.2	2.575	3.781	4.737	6.364	6.710
			0.3	2.437	3.494	4.608	5.702	6.560
			0.4	2.189	3.028	4.490	5.196	6.439
			0.5	1.847	2.662	4.394	4.900	6.383
45°	5	0.5	0.1	2.645	3.871	4.799	6.787	6.806
			0.2	2.584	3.759	4.721	6.495	6.575
			0.3	2.470	3.683	4.652	5.905	6.387
			0.4	2.202	3.520	4.253	5.023	6.113
			0.5	1.865	3.271	3.860	4.692	5.889
	5	0.75	0.1	2.649	3.881	4.811	6.803	6.839
			0.2	2.600	3.824	4.772	6.543	6.742
			0.3	2.502	3.533	4.651	5.891	6.546
			0.4	2.326	3.084	4.543	5.303	6.377
			0.5	2.015	2.670	4.402	4.925	6.252

表 4.7 具不同邊緣裂縫四邊自由端之 Al/Al₂O₃ 方形 FGM 薄板無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=1$ 、 $h/b=0.02$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/a	Mode				
				1	2	3	4	5
0°	5	0.5	0.1	1.28	1.10	0.93	2.08	1.87
			0.2	5.67	4.36	3.23	7.98	5.30
			0.3	14.18	10.01	5.93	18.41	7.48
			0.4	26.34	17.61	8.15	28.11	8.46
			0.5	38.95	25.67	9.60	34.08	8.56
	5	0.75	0.1	0.90	0.41	0.33	1.90	0.64
			0.2	3.83	1.98	1.80	9.49	1.70
			0.3	10.24	6.47	6.28	20.37	2.86
			0.4	21.88	15.20	11.28	25.49	3.89
			0.5	36.10	22.77	13.18	27.99	4.82
30°	5	0.5	0.1	1.01	0.87	0.73	1.74	1.48
			0.2	4.28	3.39	2.47	6.41	4.77
			0.3	10.84	7.60	5.10	16.90	7.75
			0.4	21.95	13.53	10.34	27.76	10.25
			0.5	35.83	18.97	18.08	31.97	11.80
	5	0.75	0.1	0.86	0.49	0.35	1.58	0.76
			0.2	3.38	2.95	1.80	7.51	2.49
			0.3	8.56	10.32	4.48	17.13	4.67
			0.4	17.86	22.28	6.92	24.49	6.42
			0.5	30.69	31.67	8.91	28.79	7.24
45°	5	0.5	0.1	0.75	0.64	0.52	1.37	1.09
			0.2	3.04	3.52	2.14	5.61	4.45
			0.3	7.32	5.47	3.57	14.18	7.18
			0.4	17.37	9.65	11.84	27.00	11.16
			0.5	30.02	16.04	19.98	31.81	14.42
	5	0.75	0.1	0.60	0.39	0.27	1.13	0.61
			0.2	2.44	1.85	1.08	4.91	2.02
			0.3	6.12	9.32	3.59	14.39	4.87
			0.4	12.72	20.84	5.83	22.93	7.32
			0.5	24.39	31.47	8.75	28.43	9.14

表 4.7 具不同邊緣裂縫四邊自由端之 Al/Al₂O₃ 方形 FGM 薄板無因次化頻率

$$\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c} \quad (a/b=1, h/b=0.02)$$

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/a	Mode				
				1	2	3	4	5
0°	10	0.5	0	2.580	3.773	4.671	6.660	6.660
			0.1	2.546	3.731	4.627	6.521	6.536
			0.2	2.433	3.607	4.520	6.129	6.305
			0.3	2.213	3.393	4.393	5.432	6.160
			0.4	1.900	3.107	4.290	4.786	6.096
			0.5	1.574	2.802	4.223	4.389	6.090
	10	0.75	0.1	2.556	3.757	4.656	6.533	6.617
			0.2	2.481	3.698	4.586	6.027	6.546
			0.3	2.315	3.528	4.376	5.303	6.468
			0.4	2.015	3.197	4.144	4.964	6.400
			0.5	1.648	2.912	4.056	4.797	6.338
30°	10	0.5	0.1	2.553	3.740	4.637	6.543	6.561
			0.2	2.469	3.644	4.555	6.233	6.341
			0.3	2.300	3.485	4.432	5.532	6.143
			0.4	2.013	3.265	4.185	4.813	5.979
			0.5	1.658	3.054	3.827	4.531	5.873
	10	0.75	0.1	2.558	3.755	4.655	6.554	6.610
			0.2	2.493	3.661	4.587	6.158	6.494
			0.3	2.358	3.382	4.462	5.518	6.349
			0.4	2.118	2.932	4.348	5.029	6.233
			0.5	1.787	2.577	4.255	4.742	6.178
45°	10	0.5	0.1	2.560	3.749	4.647	6.568	6.587
			0.2	2.503	3.665	4.584	6.338	6.371
			0.3	2.390	3.566	4.504	5.713	6.181
			0.4	2.153	3.407	4.170	4.868	5.932
			0.5	1.804	3.166	3.735	4.541	5.698
	10	0.75	0.1	2.564	3.758	4.659	6.585	6.619
			0.2	2.517	3.732	4.641	6.369	6.573
			0.3	2.421	3.420	4.503	5.700	6.335
			0.4	2.250	2.983	4.398	5.130	6.171
			0.5	1.950	2.584	4.262	4.767	6.051

表 4.7 具不同邊緣裂縫四邊自由端之 Al/Al₂O₃ 方形 FGM 薄板無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=1$ 、 $h/b=0.02$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/a	Mode				
				1	2	3	4	5
0°	10	0.5	0.1	1.32	1.11	0.94	2.09	1.86
			0.2	5.70	4.40	3.23	7.97	5.33
			0.3	14.22	10.07	5.95	18.44	7.51
			0.4	26.36	17.65	8.16	28.14	8.47
			0.5	38.99	25.74	9.59	34.10	8.56
	10	0.75	0.1	0.93	0.42	0.32	1.91	0.65
			0.2	3.84	1.99	1.82	9.50	1.71
			0.3	10.27	6.49	6.32	20.38	2.88
			0.4	21.90	15.27	11.28	25.47	3.90
			0.5	36.12	22.82	13.17	27.97	4.83
30°	10	0.5	0.1	1.05	0.87	0.73	1.76	1.49
			0.2	4.30	3.42	2.48	36.44	4.79
			0.3	10.85	7.63	5.12	16.94	7.76
			0.4	21.98	13.46	10.40	27.73	10.23
			0.5	35.74	19.06	18.07	31.97	11.82
	10	0.75	0.1	0.85	0.48	0.34	1.59	0.75
			0.2	3.37	2.97	1.80	7.54	2.49
			0.3	8.60	10.36	4.47	17.15	4.67
			0.4	17.91	22.29	6.92	24.49	6.41
			0.5	30.74	31.70	8.91	28.80	7.24
45°	10	0.5	0.1	0.78	0.64	0.51	1.38	1.10
			0.2	2.98	2.86	1.86	4.83	4.34
			0.3	7.36	5.49	3.58	14.22	7.19
			0.4	16.55	9.70	10.73	26.91	10.93
			0.5	30.08	16.09	20.04	31.82	14.44
	10	0.75	0.1	0.62	0.40	0.26	1.13	0.62
			0.2	2.44	1.09	0.64	4.37	1.31
			0.3	6.16	9.36	3.60	14.41	4.88
			0.4	12.79	20.94	5.84	22.97	7.34
			0.5	24.42	31.51	8.76	28.42	9.14

表 4.8 具不同邊緣裂縫四邊自由端之 Al/Al₂O₃ 方形 FGM 厚板無因次化頻率

$$\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c} \quad (a/b=1, h/b=0.1)$$

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/a	Mode				
				1	2	3	4	5
0°	0	0.5	0	3.851	5.736	7.065	9.673	9.673
			0.1	3.806	5.651	6.980	9.450	9.514
			0.2	3.631	5.420	6.796	8.883	9.131
			0.3	3.289	5.042	6.605	7.804	8.949
			0.4	2.819	4.578	6.467	6.871	8.662
			0.5	2.336	4.104	6.300	6.378	6.450
	0	0.75	0.1	3.821	5.701	7.032	9.483	9.612
			0.2	3.708	5.578	6.886	8.702	9.490
			0.3	3.450	5.229	6.513	7.779	9.362
			0.4	2.991	4.675	6.215	7.364	7.730
			0.5	2.441	4.260	5.655	6.105	7.087
30°	0	0.5	0.1	3.816	5.671	6.999	9.489	9.549
			0.2	3.683	5.497	6.853	9.024	9.182
			0.3	3.415	5.215	6.632	7.929	8.907
			0.4	2.870	4.855	6.047	6.991	8.019
			0.5	2.461	4.447	5.482	5.628	6.659
	0	0.75	0.1	3.824	5.699	7.034	9.518	9.606
			0.2	3.721	5.521	6.910	8.885	9.428
			0.3	3.507	5.020	6.706	7.981	9.220
			0.4	3.138	4.325	6.549	7.336	9.080
			0.5	2.640	3.795	6.399	6.932	7.665
45°	0	0.5	0.1	3.826	5.690	7.019	9.535	9.584
			0.2	3.736	5.569	6.918	9.194	9.269
			0.3	3.553	5.369	6.736	8.149	8.945
			0.4	3.215	5.068	6.169	7.092	7.839
			0.5	2.635	4.216	4.600	5.458	6.645
	0	0.75	0.1	3.830	5.707	7.041	9.561	9.619
			0.2	3.757	5.560	6.947	9.097	9.450
			0.3	3.601	5.103	6.781	8.197	9.211
			0.4	3.329	4.393	6.614	7.432	8.994
			0.5	2.867	3.813	6.375	6.970	7.997

表 4.8 具不同邊緣裂縫四邊自由端之 Al/Al₂O₃ 方形 FGM 厚板無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=1$ 、 $h/b=0.1$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/a	Mode				
				1	2	3	4	5
0°	0	0.5	0.1	1.17	1.48	1.20	2.31	1.64
			0.2	5.71	5.51	3.81	8.17	5.60
			0.3	14.59	12.10	6.51	19.32	7.48
			0.4	26.80	20.19	8.46	28.97	10.45
			0.5	39.34	28.45	10.83	34.06	33.32
	0	0.75	0.1	0.78	0.61	0.47	1.96	0.63
			0.2	3.71	2.75	2.53	10.04	1.89
			0.3	10.41	8.84	7.81	19.58	3.22
			0.4	22.33	18.50	12.03	23.87	20.09
			0.5	36.61	25.73	19.96	36.89	26.73
30°	0	0.5	0.1	0.91	1.13	0.93	1.90	1.28
			0.2	4.36	4.17	3.00	6.71	5.08
			0.3	11.32	9.08	6.13	18.03	7.92
			0.4	25.47	15.36	14.41	27.73	17.10
			0.5	36.09	22.47	22.41	41.82	31.16
	0	0.75	0.1	0.70	0.65	0.44	1.60	0.69
			0.2	3.38	3.75	2.19	8.15	2.53
			0.3	8.93	12.48	5.08	17.49	4.68
			0.4	18.51	24.60	7.30	24.16	6.13
			0.5	31.45	33.84	9.43	28.34	20.76
45°	0	0.5	0.1	0.65	0.80	0.65	1.43	0.92
			0.2	2.99	2.91	2.08	4.95	4.18
			0.3	7.74	6.40	4.66	15.76	7.53
			0.4	16.52	11.65	12.68	26.68	18.96
			0.5	31.58	26.50	34.89	43.57	31.30
	0	0.75	0.1	0.55	0.51	0.34	1.16	0.56
			0.2	2.44	3.07	1.67	5.95	2.31
			0.3	6.49	11.04	4.02	15.26	4.78
			0.4	13.55	23.41	6.38	23.17	7.02
			0.5	25.55	33.53	9.77	27.94	17.33

表 4.8 具不同邊緣裂縫四邊自由端之 Al/Al₂O₃ 方形 FGM 厚板無因次化頻率

$$\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c} \quad (a/b=1, h/b=0.1)$$

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/a	Mode				
				1	2	3	4	5
0°	0.2	0.5	0	3.580	5.328	6.565	9.003	9.003
			0.1	3.539	5.250	6.487	8.795	8.854
			0.2	3.376	5.037	6.316	8.268	8.498
			0.3	3.059	4.687	6.139	7.266	8.328
			0.4	2.622	4.257	6.010	6.398	8.240
			0.5	2.172	3.816	5.866	5.926	6.146
	0.2	0.75	0.1	3.553	5.297	6.535	8.827	8.946
			0.2	3.447	5.183	6.401	8.100	8.832
			0.3	3.208	4.862	6.056	7.236	8.713
			0.4	2.781	4.350	5.777	6.847	7.364
			0.5	2.271	3.963	5.387	5.674	6.591
30°	0.2	0.5	0.1	3.548	5.268	6.505	8.832	8.887
			0.2	3.425	5.107	6.370	8.399	8.546
			0.3	3.176	4.847	6.165	7.383	8.289
			0.4	2.778	4.512	5.751	6.522	7.813
			0.5	2.291	4.142	5.223	5.238	6.197
	0.2	0.75	0.1	3.555	5.295	6.537	8.859	8.940
			0.2	3.459	5.130	6.422	8.272	8.774
			0.3	3.262	4.668	6.233	7.430	8.580
			0.4	2.918	4.023	6.087	6.826	8.449
			0.5	2.456	3.530	5.947	6.449	7.303
45°	0.2	0.5	0.1	3.557	5.286	6.523	8.874	8.920
			0.2	3.474	5.174	6.430	8.558	8.627
			0.3	3.304	4.989	6.263	7.589	8.324
			0.4	2.984	4.700	5.729	6.581	7.412
			0.5	2.453	4.013	4.276	5.078	6.176
	0.2	0.75	0.1	3.561	5.301	6.544	8.898	8.951
			0.2	3.490	5.161	6.456	8.445	8.792
			0.3	3.349	4.744	6.302	7.631	8.571
			0.4	3.094	4.077	6.147	6.913	8.368
			0.5	2.668	3.546	5.926	6.485	7.619

表 4.8 具不同邊緣裂縫四邊自由端之 Al/Al₂O₃ 方形 FGM 厚板無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=1$ 、 $h/b=0.1$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/a	Mode				
				1	2	3	4	5
0°	0.2	0.5	0.1	1.15	1.46	1.19	2.31	1.66
			0.2	5.70	5.46	3.79	8.16	5.61
			0.3	14.55	12.03	6.49	19.29	7.50
			0.4	26.76	20.10	8.45	28.93	8.47
			0.5	39.33	28.38	10.65	34.18	31.73
	0.2	0.75	0.1	0.75	0.58	0.46	1.95	0.63
			0.2	3.72	2.72	2.50	10.03	1.90
			0.3	10.39	8.75	7.75	19.63	3.22
			0.4	22.32	18.36	12.00	23.95	18.21
			0.5	36.56	25.62	17.94	36.98	26.79
30°	0.2	0.5	0.1	0.89	1.13	0.91	1.90	1.29
			0.2	4.33	4.15	2.97	6.71	5.08
			0.3	11.28	9.03	6.09	17.99	7.93
			0.4	22.40	15.32	12.40	27.56	13.22
			0.5	36.01	22.26	20.44	41.82	31.17
	0.2	0.75	0.1	0.70	0.62	0.43	1.60	0.70
			0.2	3.38	3.72	2.18	8.12	2.54
			0.3	8.88	12.39	5.06	17.47	4.70
			0.4	18.49	24.49	7.28	24.18	6.15
			0.5	31.40	33.75	9.41	28.37	18.88
45°	0.2	0.5	0.1	0.64	0.79	0.64	1.43	0.92
			0.2	2.96	2.89	2.06	4.94	4.18
			0.3	7.71	6.36	4.60	15.71	7.54
			0.4	16.65	11.79	12.73	26.90	17.67
			0.5	31.48	24.68	34.87	43.60	31.40
	0.2	0.75	0.1	0.53	0.51	0.32	1.17	0.58
			0.2	2.51	3.13	1.66	6.20	2.34
			0.3	6.45	10.96	4.01	15.24	4.80
			0.4	13.58	23.48	6.37	23.21	7.05
			0.5	25.47	33.45	9.73	27.97	15.37

表 4.8 具不同邊緣裂縫四邊自由端之 Al/Al₂O₃ 方形 FGM 厚板無因次化頻率

$$\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c} \quad (a/b=1, h/b=0.1)$$

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/a	Mode				
				1	2	3	4	5
0°	1	0.5	0	2.951	4.380	5.401	7.422	7.422
			0.1	2.916	4.316	5.337	7.251	7.298
			0.2	2.782	4.143	5.197	6.817	7.006
			0.3	2.522	3.857	5.051	5.996	6.863
			0.4	2.162	3.504	4.943	5.281	6.810
			0.5	1.791	3.142	4.843	4.874	5.372
	1	0.75	0.1	2.928	4.354	5.377	7.277	7.374
			0.2	2.841	4.263	5.269	6.681	7.280
			0.3	2.644	4.004	4.987	5.961	7.179
			0.4	2.293	3.586	4.753	5.631	6.417
			0.5	1.873	3.267	4.644	4.716	5.436
30°	1	0.5	0.1	2.924	4.331	5.352	7.280	7.325
			0.2	2.822	4.200	5.241	6.925	7.045
			0.3	2.618	3.987	5.075	6.093	6.831
			0.4	2.177	3.714	4.606	5.346	6.572
			0.5	1.889	3.400	4.317	4.564	5.105
	1	0.75	0.1	2.931	4.356	5.381	7.321	7.370
			0.2	2.851	4.220	5.285	6.823	7.231
			0.3	2.688	3.843	5.129	6.126	7.071
			0.4	2.407	3.315	5.008	5.625	6.960
			0.5	2.026	2.909	4.892	5.312	6.375
45°	1	0.5	0.1	2.931	4.345	5.367	7.315	7.352
			0.2	2.863	4.254	5.291	7.056	7.111
			0.3	2.724	4.103	5.155	6.264	6.861
			0.4	2.466	3.876	4.734	5.433	6.473
			0.5	2.024	3.453	3.582	4.189	5.096
	1	0.75	0.1	2.935	4.358	5.384	7.336	7.379
			0.2	2.879	4.248	5.312	6.984	7.248
			0.3	2.760	3.905	5.185	6.296	7.063
			0.4	2.556	3.385	5.059	5.710	6.894
			0.5	2.201	2.922	4.876	5.343	6.633

表 4.8 具不同邊緣裂縫四邊自由端之 Al/Al₂O₃ 方形 FGM 厚板無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=1$ 、 $h/b=0.1$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/a	Mode				
				1	2	3	4	5
0°	1	0.5	0.1	1.19	1.46	1.18	2.30	1.67
			0.2	5.73	5.41	3.78	8.15	5.60
			0.3	14.54	11.94	6.48	19.21	7.53
			0.4	26.74	20.00	8.48	28.85	8.25
			0.5	39.31	28.26	10.33	34.33	27.62
	1	0.75	0.1	0.78	0.59	0.44	1.95	0.65
			0.2	3.73	2.67	2.44	9.98	1.91
			0.3	10.40	8.58	7.67	19.68	3.27
			0.4	22.30	18.13	12.00	24.13	13.54
			0.5	36.53	25.41	14.02	36.46	26.76
30°	1	0.5	0.1	0.91	1.12	0.91	1.91	1.31
			0.2	4.37	4.11	2.96	6.70	5.08
			0.3	11.28	8.97	6.04	17.91	7.96
			0.4	26.23	15.21	14.72	27.97	11.45
			0.5	35.99	22.37	20.07	38.51	31.22
	1	0.75	0.1	0.68	0.55	0.37	1.36	0.70
			0.2	3.39	3.65	2.15	8.07	2.57
			0.3	8.91	12.26	5.04	17.46	4.73
			0.4	18.43	24.32	7.28	24.21	6.22
			0.5	31.35	33.58	9.42	28.43	14.11
45°	1	0.5	0.1	0.68	0.80	0.63	1.44	0.94
			0.2	2.98	2.88	2.04	4.93	4.19
			0.3	7.69	6.32	4.55	15.60	7.56
			0.4	16.44	11.51	12.35	26.80	12.79
			0.5	31.41	21.16	33.68	43.56	31.34
	1	0.75	0.1	0.54	0.50	0.31	1.16	0.58
			0.2	2.44	3.01	1.65	5.90	2.34
			0.3	6.47	10.84	4.00	15.17	4.84
			0.4	13.39	22.72	6.33	23.07	7.11
			0.5	25.42	33.29	9.72	28.01	10.63

表 4.8 具不同邊緣裂縫四邊自由端之 Al/Al₂O₃ 方形 FGM 厚板無因次化頻率

$$\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c} \quad (a/b=1, h/b=0.1)$$

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/a	Mode				
				1	2	3	4	5
0°	5	0.5	0	2.512	3.746	4.608	6.270	6.270
			0.1	2.484	3.690	4.552	6.125	6.168
			0.2	2.369	3.536	4.431	5.760	5.918
			0.3	2.146	3.285	4.307	5.058	5.800
			0.4	1.839	2.978	4.217	4.455	5.601
			0.5	1.525	2.666	4.085	4.149	4.212
	5	0.75	0.1	2.494	3.723	4.586	6.147	6.230
			0.2	2.420	3.639	4.488	5.642	6.149
			0.3	2.252	3.404	4.242	5.055	6.057
			0.4	1.952	3.040	4.051	4.760	5.031
			0.5	1.593	2.769	3.655	3.987	4.622
30°	5	0.5	0.1	2.490	3.703	4.565	6.150	6.190
			0.2	2.403	3.587	4.468	5.849	5.951
			0.3	2.228	3.400	4.321	5.138	5.772
			0.4	1.948	3.157	4.020	4.549	5.318
			0.5	1.605	2.885	3.573	3.661	4.340
	5	0.75	0.1	2.495	3.722	4.588	6.170	6.227
			0.2	2.428	3.603	4.506	5.758	6.112
			0.3	2.288	3.271	4.372	5.178	5.977
			0.4	2.046	2.816	4.270	4.762	5.881
			0.5	1.722	2.471	4.169	4.497	4.986
45°	5	0.5	0.1	2.496	3.715	4.578	6.180	6.123
			0.2	2.437	3.636	4.511	5.958	6.008
			0.3	2.318	3.503	4.387	5.277	5.794
			0.4	2.108	3.309	4.021	4.613	5.091
			0.5	1.717	2.710	3.010	3.552	4.323
	5	0.75	0.1	2.499	3.727	4.593	6.197	6.235
			0.2	2.452	3.630	4.531	5.898	6.127
			0.3	2.349	3.327	4.422	5.313	5.973
			0.4	2.170	2.860	4.312	4.821	5.831
			0.5	1.869	2.483	4.150	4.528	5.192

表 4.8 具不同邊緣裂縫四邊自由端之 Al/Al₂O₃ 方形 FGM 厚板無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=1$ 、 $h/b=0.1$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/a	Mode				
				1	2	3	4	5
0°	5	0.5	0.1	1.11	1.49	1.22	2.31	1.63
			0.2	5.69	5.61	3.84	8.13	5.61
			0.3	14.57	12.31	6.53	19.33	7.50
			0.4	26.79	20.50	8.49	28.95	10.67
			0.5	39.29	28.83	11.35	33.83	32.82
	5	0.75	0.1	0.72	0.61	0.48	1.96	0.64
			0.2	3.66	2.86	2.60	10.02	1.93
			0.3	10.35	9.13	7.94	19.38	3.40
			0.4	22.29	18.85	12.09	24.08	19.76
			0.5	36.58	26.08	20.68	36.41	26.28
30°	5	0.5	0.1	0.88	1.15	0.93	1.91	1.28
			0.2	4.34	4.24	3.04	6.71	5.09
			0.3	11.31	9.24	6.23	18.05	7.94
			0.4	22.45	15.72	12.76	27.45	15.18
			0.5	36.11	22.98	22.46	41.61	30.78
	5	0.75	0.1	0.68	0.64	0.43	1.59	0.69
			0.2	3.34	3.82	2.21	8.17	2.52
			0.3	8.92	12.68	5.12	17.42	4.67
			0.4	18.55	24.83	7.34	24.05	6.20
			0.5	31.45	34.04	9.53	28.28	20.48
45°	5	0.5	0.1	0.64	0.83	0.65	1.44	2.34
			0.2	2.99	2.94	2.11	4.98	4.18
			0.3	7.72	6.49	4.80	15.84	7.59
			0.4	16.08	11.67	12.74	26.43	18.80
			0.5	31.65	27.66	34.68	43.35	31.05
	5	0.75	0.1	0.52	0.51	0.33	1.16	0.56
			0.2	2.39	3.10	1.67	5.93	2.28
			0.3	6.49	11.19	4.04	15.26	4.74
			0.4	13.61	23.65	6.42	23.11	7.00
			0.5	25.60	33.72	9.94	27.78	17.19

表 4.8 具不同邊緣裂縫四邊自由端之 Al/Al₂O₃ 方形 FGM 厚板無因次化頻率

$$\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c} \quad (a/b=1, h/b=0.1)$$

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/a	Mode				
				1	2	3	4	5
0°	10	0.5	0	2.426	3.627	4.457	6.048	6.048
			0.1	2.398	3.571	4.402	5.908	5.950
			0.2	2.287	3.421	4.284	5.554	5.709
			0.3	2.071	3.176	4.165	4.873	5.596
			0.4	1.775	2.878	4.079	4.290	5.128
			0.5	1.471	2.576	3.824	3.934	4.027
	10	0.75	0.1	2.408	3.604	4.435	5.928	6.010
			0.2	2.337	3.521	4.337	5.438	5.932
			0.3	2.174	3.288	4.098	4.881	5.843
			0.4	1.883	2.932	3.917	4.523	4.674
			0.5	1.537	2.672	3.341	3.853	4.460
30°	10	0.5	0.1	2.404	3.584	4.414	5.932	5.971
			0.2	2.320	3.471	4.320	5.640	5.741
			0.3	2.150	3.288	4.176	4.949	5.568
			0.4	1.940	3.055	3.911	4.406	5.216
			0.5	1.548	2.784	3.258	3.530	4.187
	10	0.75	0.1	2.410	3.603	4.437	5.950	6.007
			0.2	2.345	3.486	4.356	5.550	5.897
			0.3	2.209	3.159	4.227	4.993	5.767
			0.4	1.974	2.718	4.130	4.596	5.673
			0.5	1.661	2.385	4.032	4.338	4.551
45°	10	0.5	0.1	2.410	3.597	4.427	5.961	5.993
			0.2	2.353	3.519	4.362	5.745	5.796
			0.3	2.237	3.389	4.240	5.081	5.590
			0.4	2.026	3.193	3.867	4.434	4.658
			0.5	1.654	2.484	2.891	3.426	4.173
	10	0.75	0.1	2.414	3.608	4.441	5.976	6.015
			0.2	2.368	3.513	4.381	5.687	5.912
			0.3	2.268	3.216	4.276	5.120	5.764
			0.4	2.093	2.761	4.170	4.650	5.628
			0.5	1.802	2.398	4.012	4.371	4.737

表 4.8 具不同邊緣裂縫四邊自由端之 Al/Al₂O₃ 方形 FGM 厚板無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=1$ 、 $h/b=0.1$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/a	Mode				
				1	2	3	4	5
0°	10	0.5	0.1	1.15	1.54	1.23	2.31	1.62
			0.2	5.73	5.68	3.88	8.17	5.61
			0.3	14.63	12.43	6.55	19.43	7.47
			0.4	26.83	20.65	8.48	29.07	15.21
			0.5	39.37	28.98	14.20	34.95	33.42
	10	0.75	0.1	0.74	0.63	0.49	1.98	0.63
			0.2	3.67	2.92	2.69	10.09	1.92
			0.3	10.39	9.35	8.05	19.30	3.39
			0.4	22.38	19.16	12.12	25.21	22.72
			0.5	36.64	26.33	25.04	36.29	26.26
30°	10	0.5	0.1	0.91	1.19	0.96	1.92	1.27
			0.2	4.37	4.30	3.07	6.75	5.08
			0.3	11.38	9.35	6.30	18.17	7.94
			0.4	20.03	15.77	12.25	27.15	13.76
			0.5	36.19	23.24	26.90	41.63	30.77
	10	0.75	0.1	0.66	0.66	0.45	1.62	0.68
			0.2	3.34	3.89	2.27	8.23	2.50
			0.3	8.94	12.90	5.16	17.44	4.65
			0.4	18.63	25.06	7.34	24.01	6.20
			0.5	31.53	34.24	9.54	28.27	24.75
45°	10	0.5	0.1	0.66	0.83	0.67	1.44	0.91
			0.2	3.01	2.98	2.13	5.01	4.17
			0.3	7.79	6.56	4.87	15.99	7.57
			0.4	16.49	11.97	13.24	26.69	22.98
			0.5	31.82	31.51	35.14	43.35	31.00
	10	0.75	0.1	0.49	0.52	0.36	1.19	0.55
			0.2	2.39	3.14	1.71	5.97	2.25
			0.3	6.51	11.33	4.06	15.34	4.70
			0.4	13.73	23.88	6.44	23.12	6.94
			0.5	25.72	33.88	9.98	27.73	21.68

表 4.9 具不同邊緣裂縫四邊自由端之 Al/Al₂O₃ 方形 FGM 厚板無因次化頻率

$$\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c} \quad (a/b=1, h/b=0.3)$$

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/a	Mode				
				1	2	3	4	5
0°	0	0.5	0	3.222	4.738	5.724	7.146	7.146
			0.1	3.184	4.658	5.649	6.992	7.026
			0.2	3.038	4.423	5.445	5.482	6.490
			0.3	2.744	3.929	4.041	5.331	5.575
			0.4	2.343	2.898	3.608	4.916	5.240
			0.5	1.939	2.158	3.199	4.514	5.188
	0	0.75	0.1	3.203	4.697	5.681	6.985	7.109
			0.2	3.119	4.537	5.464	5.498	6.461
			0.3	2.899	3.678	4.124	5.162	5.892
			0.4	2.493	2.591	3.672	4.889	5.441
			0.5	1.895	2.033	3.361	4.536	5.199
30°	0	0.5	0.1	3.191	4.677	5.666	7.020	7.052
			0.2	3.079	4.505	5.518	5.758	6.596
			0.3	2.842	4.024	4.198	5.251	5.686
			0.4	2.458	2.744	3.769	4.684	5.295
			0.5	1.839	2.024	3.275	4.306	5.098
	0	0.75	0.1	3.204	4.698	5.689	7.014	7.111
			0.2	3.124	4.509	5.565	6.163	6.550
			0.3	2.934	4.020	4.540	5.390	5.939
			0.4	2.597	3.404	3.458	5.283	5.456
			0.5	2.171	2.564	3.049	5.063	5.232
45°	0	0.5	0.1	3.200	4.697	5.683	7.053	7.078
			0.2	3.121	4.582	5.570	6.205	6.730
			0.3	2.954	4.228	4.356	5.292	5.804
			0.4	2.635	2.642	3.890	4.663	5.299
			0.5	1.423	2.098	3.203	4.256	4.948
	0	0.75	0.1	3.208	4.708	5.699	7.048	7.119
			0.2	3.148	4.556	4.706	5.610	6.672
			0.3	3.007	4.125	4.944	5.462	6.038
			0.4	2.740	3.516	3.662	5.312	5.521
			0.5	2.333	2.677	3.069	5.020	5.302

表 4.9 具不同邊緣裂縫四邊自由端之 Al/Al₂O₃ 方形 FGM 厚板無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=1$ 、 $h/b=0.3$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/a	Mode				
				1	2	3	4	5
0°	0	0.5	0.1	1.18	1.69	1.31	2.16	1.68
			0.2	5.71	6.65	4.87	23.29	9.18
			0.3	14.84	17.07	29.40	25.40	21.98
			0.4	27.28	38.83	36.97	31.21	26.67
			0.5	39.82	54.45	44.11	36.83	27.40
	0	0.75	0.1	0.59	0.87	0.75	2.25	0.52
			0.2	3.20	4.24	4.54	23.06	9.59
			0.3	10.02	22.37	27.95	27.76	17.55
			0.4	22.63	45.31	35.85	31.58	23.86
			0.5	41.19	57.09	41.28	36.52	27.25
30°	0	0.5	0.1	0.96	1.29	1.01	1.76	1.32
			0.2	4.44	4.92	3.60	19.42	7.70
			0.3	11.79	15.07	26.66	26.52	20.43
			0.4	23.71	42.09	34.15	34.45	25.90
			0.5	42.92	57.28	42.78	39.74	28.66
	0	0.75	0.1	0.56	0.84	0.61	1.85	0.49
			0.2	3.04	4.83	2.78	13.76	8.34
			0.3	8.94	15.15	20.68	24.57	16.89
			0.4	19.40	28.16	39.59	26.07	23.65
			0.5	32.62	45.88	46.73	29.15	26.78
45°	0	0.5	0.1	0.68	0.87	0.72	1.30	0.95
			0.2	3.13	3.29	2.69	13.17	5.82
			0.3	8.32	10.76	23.90	25.94	18.78
			0.4	18.22	44.24	32.04	34.75	25.85
			0.5	55.83	55.72	44.04	40.44	30.76
	0	0.75	0.1	0.43	0.63	0.44	1.37	0.38
			0.2	2.30	3.84	17.78	21.49	6.63
			0.3	6.67	12.94	13.63	23.57	15.51
			0.4	14.96	25.79	36.02	25.66	22.74
			0.5	27.59	43.50	46.38	29.75	25.80

表 4.9 具不同邊緣裂縫四邊自由端之 Al/Al₂O₃ 方形 FGM 厚板無因次化頻率

$$\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c} \quad (a/b=1, h/b=0.3)$$

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/a	Mode				
				1	2	3	4	5
0°	0.2	0.5	0	3.008	4.416	5.345	6.689	6.689
			0.1	2.973	4.341	5.275	6.542	6.578
			0.2	2.837	4.123	5.111	5.196	6.081
			0.3	2.562	3.709	3.806	4.977	5.231
			0.4	2.189	2.759	3.373	4.612	4.890
			0.5	1.812	2.055	2.992	4.235	4.841
	0.2	0.75	0.1	2.990	4.378	5.306	6.540	6.654
			0.2	2.912	4.231	5.133	5.209	6.049
			0.3	2.706	3.500	3.857	4.823	5.516
			0.4	2.329	2.467	3.434	4.574	5.099
			0.5	1.805	1.900	3.143	4.264	4.860
30°	0.2	0.5	0.1	2.980	4.359	5.291	6.569	6.601
			0.2	2.875	4.199	5.151	5.487	6.179
			0.3	2.654	3.815	3.936	4.910	5.331
			0.4	2.305	2.617	3.521	4.393	4.948
			0.5	1.752	1.893	3.070	4.032	4.762
	0.2	0.75	0.1	2.991	4.379	5.314	6.566	6.655
			0.2	2.916	4.205	5.197	5.869	6.135
			0.3	2.740	3.753	4.326	5.034	5.561
			0.4	2.426	3.205	3.269	4.931	5.108
			0.5	2.030	2.441	2.851	4.737	4.885
45°	0.2	0.5	0.1	2.987	4.377	5.307	6.601	6.626
			0.2	2.914	4.271	5.202	5.910	6.303
			0.3	2.759	4.005	4.085	4.952	5.443
			0.4	2.456	2.491	3.618	4.349	4.946
			0.5	1.354	1.965	3.008	3.980	4.623
	0.2	0.75	0.1	2.995	4.388	5.322	6.598	6.664
			0.2	2.938	4.249	5.239	6.242	6.335
			0.3	2.807	3.851	4.708	5.102	5.655
			0.4	2.562	3.286	3.493	4.961	5.169
			0.5	2.182	2.548	2.871	4.694	4.952

表 4.9 具不同邊緣裂縫四邊自由端之 Al/Al₂O₃ 方形 FGM 厚板無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=1$ 、 $h/b=0.3$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/a	Mode				
				1	2	3	4	5
0°	0.2	0.5	0.1	1.16	1.70	1.31	2.20	1.66
			0.2	5.68	6.63	4.38	22.32	9.09
			0.3	14.83	16.01	28.79	25.59	21.80
			0.4	27.23	37.52	36.89	31.05	26.89
			0.5	39.76	53.46	44.02	36.69	27.63
	0.2	0.75	0.1	0.60	0.86	0.73	2.23	0.52
			0.2	3.19	4.19	3.97	22.13	9.57
			0.3	10.04	20.74	27.84	27.90	17.54
			0.4	22.57	44.13	35.75	31.62	23.77
			0.5	39.99	56.97	41.20	36.25	27.34
30°	0.2	0.5	0.1	0.93	1.29	1.01	1.79	1.32
			0.2	4.42	4.91	3.63	17.97	7.62
			0.3	11.77	13.61	26.36	26.60	20.30
			0.4	23.37	40.74	34.13	34.33	26.03
			0.5	41.76	57.13	42.56	39.72	28.81
	0.2	0.75	0.1	0.57	0.84	0.58	1.84	0.51
			0.2	3.06	4.78	2.77	12.26	8.28
			0.3	8.91	15.01	19.06	24.74	16.86
			0.4	19.35	27.42	38.84	26.28	23.64
			0.5	32.51	44.72	46.66	29.18	26.97
45°	0.2	0.5	0.1	0.70	0.88	0.71	1.32	0.94
			0.2	3.13	3.28	2.68	11.65	5.77
			0.3	8.28	9.31	23.57	25.97	18.63
			0.4	18.35	43.59	32.31	34.98	26.06
			0.5	54.99	55.50	43.72	40.50	30.89
	0.2	0.75	0.1	0.43	0.63	0.43	1.36	0.37
			0.2	2.33	3.78	1.98	6.68	5.29
			0.3	6.68	12.79	11.92	23.73	15.46
			0.4	14.83	25.59	34.65	25.83	22.72
			0.5	27.46	42.30	46.29	29.83	25.97

表 4.9 具不同邊緣裂縫四邊自由端之 Al/Al₂O₃ 方形 FGM 厚板無因次化頻率

$$\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c} \quad (a/b=1, h/b=0.3)$$

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/a	Mode				
				1	2	3	4	5
0°	1	0.5	0	2.482	3.612	4.396	5.506	5.506
			0.1	2.453	3.550	4.338	5.373	5.414
			0.2	2.324	3.368	4.193	4.534	5.016
			0.3	2.118	3.022	3.344	4.092	4.333
			0.4	1.812	2.372	2.821	3.824	4.014
			0.5	1.502	1.781	2.488	3.509	3.970
	1	0.75	0.1	2.468	3.581	4.365	5.384	5.472
			0.2	2.403	3.462	4.220	4.517	4.991
			0.3	2.236	2.993	3.225	3.968	4.556
			0.4	1.928	2.138	2.845	3.770	4.219
			0.5	1.564	1.579	2.600	3.544	4.001
30°	1	0.5	0.1	2.459	3.565	4.351	5.400	5.433
			0.2	2.373	3.432	4.228	4.763	5.096
			0.3	2.194	3.136	3.418	4.052	4.415
			0.4	1.902	2.260	2.930	3.635	4.073
			0.5	1.520	1.572	2.554	3.335	3.907
	1	0.75	0.1	2.468	3.582	4.371	5.406	5.475
			0.2	2.406	3.443	4.273	5.030	5.108
			0.3	2.262	3.080	3.765	4.143	4.591
			0.4	2.008	2.624	2.869	4.047	4.217
			0.5	1.683	2.100	2.386	3.909	4.000
45°	1	0.5	0.1	2.465	3.580	4.365	5.429	5.453
			0.2	2.405	3.492	4.274	5.066	5.195
			0.3	2.279	3.280	3.544	4.094	4.512
			0.4	2.043	2.178	3.018	3.616	4.085
			0.5	1.179	1.633	2.502	3.287	3.794
	1	0.75	0.1	2.471	3.589	4.378	5.432	5.483
			0.2	2.425	3.478	4.307	5.145	5.369
			0.3	2.318	3.162	4.058	4.233	4.669
			0.4	2.123	2.706	3.057	4.082	4.266
			0.5	1.809	2.184	2.410	3.872	4.058

表 4.9 具不同邊緣裂縫四邊自由端之 Al/Al₂O₃ 方形 FGM 厚板無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=1$ 、 $h/b=0.3$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/a	Mode				
				1	2	3	4	5
0°	1	0.5	0.1	1.17	1.72	1.32	2.42	1.67
			0.2	6.37	6.76	4.62	17.65	8.90
			0.3	14.67	16.33	23.93	25.68	21.30
			0.4	26.99	34.33	35.83	30.55	27.10
			0.5	39.48	50.69	43.40	36.27	27.90
	1	0.75	0.1	0.56	0.86	0.71	2.22	0.62
			0.2	3.18	4.15	4.00	17.96	9.35
			0.3	9.91	17.14	26.64	27.93	17.25
			0.4	22.32	40.81	35.28	31.53	23.37
			0.5	36.99	56.28	40.86	35.63	27.33
30°	1	0.5	0.1	0.93	1.30	1.02	1.93	1.33
			0.2	4.39	4.98	3.82	13.49	7.45
			0.3	11.60	13.18	22.25	26.41	19.81
			0.4	23.37	37.43	33.35	33.98	26.03
			0.5	38.76	56.48	41.90	39.43	29.04
	1	0.75	0.1	0.56	0.83	0.57	1.82	0.56
			0.2	3.06	4.68	2.80	8.65	7.23
			0.3	8.86	14.73	14.35	24.75	16.62
			0.4	19.10	27.35	34.74	26.50	23.41
			0.5	32.19	41.86	45.72	29.00	27.35
45°	1	0.5	0.1	0.68	0.89	0.71	1.40	0.96
			0.2	3.10	3.32	2.78	7.99	5.65
			0.3	8.18	9.19	19.38	25.64	18.05
			0.4	17.69	39.70	31.35	34.33	25.81
			0.5	52.50	54.79	43.08	40.30	31.09
	1	0.75	0.1	0.44	0.64	0.41	1.34	0.42
			0.2	2.30	3.71	2.02	6.56	2.49
			0.3	6.61	12.46	7.69	23.12	15.20
			0.4	14.46	25.08	30.46	25.86	22.52
			0.5	27.12	39.53	45.18	29.68	26.30

表 4.9 具不同邊緣裂縫四邊自由端之 Al/Al₂O₃ 方形 FGM 厚板無因次化頻率

$$\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c} \quad (a/b=1, h/b=0.3)$$

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/a	Mode				
				1	2	3	4	5
0°	5	0.5	0	2.048	2.985	3.604	4.425	4.425
			0.1	2.024	2.934	3.555	4.302	4.352
			0.2	1.933	2.769	3.395	3.579	4.027
			0.3	1.748	2.388	2.718	3.361	3.468
			0.4	1.494	1.834	2.343	3.061	3.298
			0.5	1.237	1.381	2.059	2.803	3.265
	5	0.75	0.1	2.036	2.958	3.575	4.320	4.398
			0.2	1.985	2.844	3.409	3.532	4.028
			0.3	1.846	2.314	2.641	3.243	3.701
			0.4	1.588	1.656	2.334	3.072	3.412
			0.5	1.216	1.298	2.135	2.832	3.261
30°	5	0.5	0.1	2.029	2.947	3.566	4.330	4.366
			0.2	1.958	2.828	3.443	3.720	4.093
			0.3	1.808	2.470	2.780	3.302	3.554
			0.4	1.562	1.744	2.416	2.932	3.319
			0.5	1.181	1.291	2.080	2.703	3.180
	5	0.75	0.1	2.037	2.959	3.581	4.340	4.402
			0.2	1.988	2.837	3.491	3.919	4.088
			0.3	1.868	2.512	2.936	3.394	3.715
			0.4	1.654	2.085	2.306	3.318	3.417
			0.5	1.383	1.626	1.975	3.169	3.258
45°	5	0.5	0.1	2.034	2.959	3.578	4.359	4.382
			0.2	1.984	2.882	3.490	3.933	4.172
			0.3	1.878	2.600	2.855	3.329	3.633
			0.4	1.659	1.704	2.468	2.927	3.324
			0.5	0.916	1.332	2.019	2.683	3.081
	5	0.75	0.1	2.039	2.966	3.588	4.363	4.408
			0.2	2.001	2.870	3.525	4.111	4.228
			0.3	1.913	2.593	3.157	3.462	3.764
			0.4	1.743	2.177	2.413	3.350	3.444
			0.5	1.483	1.693	1.991	3.162	3.287

表 4.9 具不同邊緣裂縫四邊自由端之 Al/Al₂O₃ 方形 FGM 厚板無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=1$ 、 $h/b=0.3$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/a	Mode				
				1	2	3	4	5
0°	5	0.5	0.1	1.17	1.71	1.36	2.78	1.65
			0.2	5.62	7.24	5.80	19.12	8.99
			0.3	14.65	20.00	24.58	24.05	21.63
			0.4	27.05	38.56	34.99	30.82	25.47
			0.5	39.60	53.74	42.87	36.66	26.21
	5	0.75	0.1	0.59	0.90	0.80	2.37	0.61
			0.2	3.08	4.72	5.41	20.18	8.97
			0.3	9.86	22.48	26.72	26.71	16.36
			0.4	22.46	44.52	35.24	30.58	22.89
			0.5	40.63	56.52	40.76	36.00	26.31
30°	5	0.5	0.1	0.93	1.27	1.05	2.15	1.33
			0.2	4.39	5.26	4.47	15.93	7.50
			0.3	11.72	17.25	22.86	25.38	19.68
			0.4	23.73	41.57	32.96	33.74	24.99
			0.5	42.33	56.75	42.29	38.92	28.14
	5	0.75	0.1	0.54	0.87	0.64	1.92	0.52
			0.2	2.93	4.96	3.14	11.44	7.62
			0.3	8.79	15.85	18.53	23.30	16.05
			0.4	19.24	30.15	36.02	25.02	22.78
			0.5	32.47	45.53	45.20	28.38	26.37
45°	5	0.5	0.1	0.68	0.87	0.72	1.49	0.97
			0.2	3.13	3.45	3.16	11.12	5.72
			0.3	8.30	12.90	20.78	24.77	17.90
			0.4	18.99	42.91	31.52	33.85	24.88
			0.5	55.27	55.38	43.98	39.37	30.37
	5	0.75	0.1	0.44	0.64	0.44	1.40	0.38
			0.2	2.29	3.85	2.19	7.10	4.45
			0.3	6.59	13.13	12.40	21.76	14.94
			0.4	14.89	27.07	33.05	24.29	22.17
			0.5	27.59	43.28	44.76	28.54	25.72

表 4.9 具不同邊緣裂縫四邊自由端之 Al/Al₂O₃ 方形 FGM 厚板無因次化頻率

$$\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c} \quad (a/b=1, h/b=0.3)$$

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/a	Mode				
				1	2	3	4	5
0°	10	0.5	0	1.968	2.889	3.467	4.242	4.242
			0.1	1.945	2.840	3.422	4.117	4.172
			0.2	1.857	2.680	3.192	3.355	3.852
			0.3	1.677	2.250	2.541	3.236	3.305
			0.4	1.431	1.691	2.229	2.917	3.181
			0.5	1.184	1.267	1.966	2.671	3.151
	10	0.75	0.1	1.957	2.863	3.440	4.139	4.217
			0.2	1.907	2.748	3.187	3.336	3.857
			0.3	1.772	2.139	2.516	3.119	3.542
			0.4	1.513	1.527	2.233	2.942	3.263
			0.5	1.113	1.240	2.045	2.686	3.138
30°	10	0.5	0.1	1.950	2.853	3.432	4.149	4.186
			0.2	1.881	2.738	3.295	3.434	3.916
			0.3	1.735	2.316	2.618	3.163	3.394
			0.4	1.494	1.599	2.305	2.799	3.192
			0.5	1.081	1.233	1.981	2.586	3.060
	10	0.75	0.1	1.958	2.864	3.456	4.159	4.222
			0.2	1.911	2.741	3.358	3.611	3.907
			0.3	1.794	2.416	2.691	3.265	3.557
			0.4	1.584	1.960	2.153	3.199	3.271
			0.5	1.323	1.499	1.879	3.033	3.197
45°	10	0.5	0.1	1.954	2.865	3.443	4.179	4.201
			0.2	1.906	2.791	3.358	3.634	3.995
			0.3	1.802	2.436	2.700	3.182	3.466
			0.4	1.540	1.611	2.356	2.798	3.192
			0.5	0.837	1.269	1.922	2.573	2.965
	10	0.75	0.1	1.960	2.871	3.452	4.181	4.228
			0.2	1.925	2.775	3.392	3.863	4.000
			0.3	1.837	2.497	2.903	3.318	3.602
			0.4	1.670	2.072	2.225	3.223	3.302
			0.5	1.417	1.562	1.891	3.032	3.164

表 4.9 具不同邊緣裂縫四邊自由端之 Al/Al₂O₃ 方形 FGM 厚板無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=1$ 、 $h/b=0.3$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/a	Mode				
				1	2	3	4	5
0°	10	0.5	0.1	1.17	1.70	1.30	2.95	1.65
			0.2	5.64	7.23	7.93	20.91	9.19
			0.3	14.79	22.12	26.71	23.72	22.09
			0.4	27.29	41.47	35.71	31.24	25.01
			0.5	39.84	56.14	43.29	37.03	25.72
	10	0.75	0.1	0.56	0.90	0.78	2.43	0.59
			0.2	3.10	4.88	8.08	21.36	9.08
			0.3	9.96	25.96	27.43	26.47	16.50
			0.4	23.12	47.14	35.59	30.65	23.08
			0.5	43.45	57.08	41.02	36.68	26.03
30°	10	0.5	0.1	0.91	1.25	1.01	2.19	1.32
			0.2	4.42	5.23	4.96	19.05	7.69
			0.3	11.84	19.83	24.49	25.44	19.99
			0.4	24.09	44.65	33.52	34.02	24.75
			0.5	45.07	57.32	42.86	39.04	27.86
	10	0.75	0.1	0.51	0.87	0.32	1.96	0.47
			0.2	2.90	5.12	3.14	14.88	7.90
			0.3	8.84	16.37	22.38	23.03	16.15
			0.4	19.51	32.16	37.90	24.59	22.89
			0.5	32.77	48.11	45.80	28.50	24.63
45°	10	0.5	0.1	0.71	0.83	0.69	1.49	0.97
			0.2	3.15	3.39	3.14	14.33	5.82
			0.3	8.43	15.68	22.12	24.99	18.29
			0.4	21.75	44.24	32.04	34.04	24.75
			0.5	57.47	56.07	44.56	39.34	30.10
	10	0.75	0.1	0.41	0.62	0.43	1.44	0.33
			0.2	2.18	3.95	2.16	8.93	5.70
			0.3	6.66	13.57	16.27	21.78	15.09
			0.4	15.14	28.28	35.82	24.02	22.16
			0.5	28.00	45.93	45.46	28.52	25.41

表 4.10 具不同邊緣裂縫懸臂之 Al/Al₂O₃ 矩形 FGM 薄板無因次化頻率

$$\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c} \quad (a/b=2, h/b=0.02)$$

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	0	0.25	0	0.261	1.118	1.626	3.638	4.558
			0.1	0.259	1.108	1.621	3.617	4.525
			0.2	0.254	1.079	1.613	3.559	4.458
			0.3	0.247	1.032	1.597	3.460	4.363
			0.4	0.237	0.965	1.570	3.325	4.253
			0.5	0.225	0.883	1.534	3.181	4.139
	0	0.5	0.1	0.260	1.110	1.611	3.615	4.542
			0.2	0.259	1.089	1.578	3.565	4.497
			0.3	0.256	1.053	1.529	3.486	4.371
			0.4	0.252	1.002	1.466	3.351	4.129
			0.5	0.247	0.939	1.396	3.120	3.883
	0.2	0.25	0	0.242	1.037	1.509	3.377	4.231
			0.1	0.240	1.028	1.505	3.358	4.200
			0.2	0.236	1.002	1.497	3.304	4.138
			0.3	0.229	0.958	1.482	3.212	4.050
			0.4	0.219	0.896	1.457	3.087	3.948
			0.5	0.209	0.820	1.424	2.953	3.842
	0.2	0.5	0.1	0.241	1.030	1.495	3.356	4.216
			0.2	0.240	1.011	1.465	3.310	4.174
			0.3	0.238	0.978	1.420	3.236	4.057
			0.4	0.234	0.930	1.361	3.111	3.833
			0.5	0.230	0.872	1.296	2.897	3.605

表 4.10 具不同邊緣裂縫懸臂之 Al/Al₂O₃ 矩形 FGM 薄板無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.02$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	0	0.25	0.1	0.77	0.89	0.31	0.58	0.72
			0.2	2.68	3.49	0.80	2.17	2.19
			0.3	5.36	7.69	1.78	4.89	4.28
			0.4	9.20	13.69	3.44	8.60	6.69
			0.5	13.79	21.02	5.66	12.56	9.19
	0	0.5	0.1	0.38	0.72	0.92	0.63	0.35
			0.2	0.77	2.59	2.95	2.01	1.34
			0.3	1.92	5.81	5.97	4.18	4.10
			0.4	3.45	10.38	9.84	7.89	9.41
			0.5	5.36	16.01	14.15	14.24	14.81
	0.2	0.25	0.1	0.83	0.87	0.27	0.56	0.73
			0.2	2.48	3.38	0.80	2.16	2.20
			0.3	5.37	7.62	1.79	4.89	4.28
			0.4	9.50	13.60	3.45	8.59	6.69
			0.5	13.64	20.93	5.63	12.56	9.19
	0.2	0.5	0.1	0.41	0.68	0.93	0.62	0.35
			0.2	0.83	2.51	2.92	1.98	1.35
			0.3	1.65	5.69	5.90	4.18	4.11
			0.4	3.31	10.32	9.81	7.88	9.41
			0.5	4.96	15.91	14.12	14.21	14.80

表 4.10 具不同邊緣裂縫懸臂之 Al/Al₂O₃ 矩形 FGM 薄板無因次化頻率

$$\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c} \quad (a/b=2, h/b=0.02)$$

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	1	0.25	0	0.199	0.853	1.241	2.778	3.480
			0.1	0.198	0.846	1.237	2.762	3.455
			0.2	0.194	0.824	1.231	2.718	3.404
			0.3	0.188	0.788	1.219	2.642	3.332
			0.4	0.181	0.737	1.199	2.540	3.248
			0.5	0.172	0.674	1.171	2.429	3.160
	1	0.5	0.1	0.199	0.847	1.230	2.761	3.468
			0.2	0.197	0.831	1.205	2.723	3.433
			0.3	0.196	0.804	1.168	2.663	3.338
			0.4	0.193	0.765	1.120	2.560	3.154
			0.5	0.189	0.717	1.066	2.384	2.967
	5	0.25	0	0.172	0.735	1.070	2.392	3.000
			0.1	0.170	0.729	1.067	2.379	2.977
			0.2	0.167	0.710	1.061	2.340	2.933
			0.3	0.162	0.679	1.051	2.275	2.870
			0.4	0.156	0.635	1.033	2.186	2.797
			0.5	0.148	0.581	1.009	2.091	2.722
	5	0.5	0.1	0.171	0.730	1.060	2.377	2.989
			0.2	0.170	0.716	1.038	2.344	2.958
			0.3	0.169	0.693	1.006	2.292	2.875
			0.4	0.166	0.659	0.964	2.203	2.715
			0.5	0.163	0.618	0.918	2.051	2.553

表 4.10 具不同邊緣裂縫懸臂之 Al/Al₂O₃ 矩形 FGM 薄板無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.02$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	1	0.25	0.1	0.50	0.82	0.32	0.58	0.72
			0.2	2.51	3.40	0.81	2.16	2.18
			0.3	5.53	7.62	1.77	4.90	4.25
			0.4	9.05	13.60	3.38	8.57	6.67
			0.5	13.57	20.98	5.64	12.56	9.20
	1	0.5	0.1	0.00	0.70	0.89	0.61	0.34
			0.2	1.01	2.58	2.90	1.98	1.35
			0.3	1.51	5.74	5.88	4.14	4.08
			0.4	3.02	10.32	9.75	7.85	9.37
			0.5	5.03	15.94	14.10	14.18	14.74
	5	0.25	0.1	1.16	0.82	0.28	0.54	0.77
			0.2	2.91	3.40	0.84	2.17	2.23
			0.3	5.81	7.62	1.78	4.89	4.33
			0.4	9.30	13.61	3.46	8.61	6.77
			0.5	13.95	20.95	5.70	12.58	9.27
	5	0.5	0.1	0.58	0.68	0.93	0.63	0.37
			0.2	1.16	2.59	2.99	2.01	1.40
			0.3	1.74	5.71	5.98	4.18	4.17
			0.4	3.49	10.34	9.91	7.90	9.50
			0.5	5.23	15.92	14.21	14.26	14.90

表 4.10 具不同邊緣裂縫懸臂之 Al/Al₂O₃ 矩形 FGM 薄板無因次化頻率

$$\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c} \quad (a/b=2, h/b=0.02)$$

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	10	0.25	0	0.166	0.711	1.036	2.316	2.904
			0.1	0.165	0.705	1.033	2.303	2.882
			0.2	0.162	0.687	1.028	2.265	2.839
			0.3	0.157	0.657	1.017	2.202	2.778
			0.4	0.151	0.615	1.000	2.116	2.708
			0.5	0.143	0.562	0.977	2.024	2.635
	10	0.5	0.1	0.166	0.707	1.026	2.301	2.894
			0.2	0.165	0.693	1.005	2.269	2.864
			0.3	0.163	0.670	0.974	2.219	2.783
			0.4	0.161	0.638	0.933	2.132	2.628
			0.5	0.158	0.598	0.889	1.985	2.471

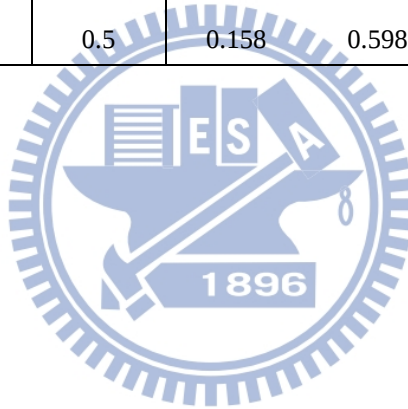


表 4.10 具不同邊緣裂縫懸臂之 Al/Al₂O₃ 矩形 FGM 薄板無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.02$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	10	0.25	0.1	0.60	0.84	0.29	0.56	0.76
			0.2	2.41	3.38	0.77	2.20	2.24
			0.3	5.42	7.59	1.83	4.92	4.34
			0.4	9.04	13.50	3.47	8.64	6.75
			0.5	13.86	20.96	5.69	12.61	9.26
	10	0.5	0.1	0.00	0.56	0.97	0.65	0.34
			0.2	0.60	2.53	2.99	2.03	1.38
			0.3	1.81	5.77	5.98	4.19	4.17
			0.4	3.01	10.27	9.94	7.94	9.50
			0.5	4.82	15.89	14.19	14.29	14.91

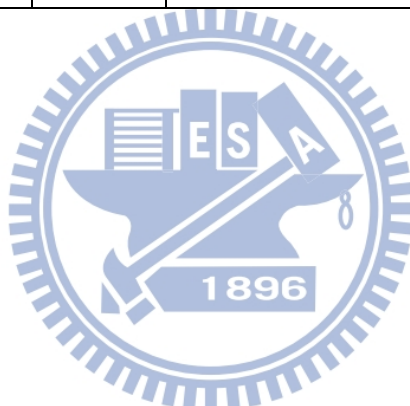


表 4.11 具不同邊緣裂縫懸臂之 Al/Al₂O₃ 矩形 FGM 厚板無因次化頻率

$$\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c} \quad (a/b=2, h/b=0.1)$$

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	0	0.25	0	0.260	1.076	1.601	2.179	3.471
			0.1	0.257	1.067	1.596	2.104	3.449
			0.2	0.251	1.039	1.586	1.921	3.388
			0.3	0.243	0.992	1.565	1.681	3.287
			0.4	0.232	0.925	1.419	1.532	3.158
			0.5	0.219	0.842	1.153	1.490	3.028
	0	0.5	0.1	0.258	1.069	1.583	2.157	3.446
			0.2	0.257	1.049	1.544	2.095	3.394
			0.3	0.254	1.014	1.490	1.987	3.312
			0.4	0.250	0.964	1.424	1.825	3.172
			0.5	0.244	0.901	1.351	1.605	2.929
	0.2	0.25	0	0.241	1.000	1.487	2.076	3.227
			0.1	0.239	0.992	1.483	2.004	3.207
			0.2	0.233	0.966	1.473	1.830	3.151
			0.3	0.226	0.922	1.454	1.602	3.057
			0.4	0.216	0.860	1.352	1.424	2.937
			0.5	0.204	0.783	1.099	1.385	2.816
	0.2	0.5	0.1	0.240	0.994	1.470	2.055	3.204
			0.2	0.239	0.975	1.434	1.996	3.156
			0.3	0.236	0.942	1.384	1.893	3.080
			0.4	0.232	0.896	1.323	1.734	2.950
			0.5	0.227	0.838	1.255	1.530	2.726

表 4.11 具不同邊緣裂縫懸臂之 Al/Al₂O₃ 矩形 FGM 厚板無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b = 2$ 、 $h/b = 0.1$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	0	0.25	0.1	1.15	0.84	0.31	3.44	0.63
			0.2	3.46	3.44	0.94	11.84	2.39
			0.3	6.54	7.81	2.25	22.85	5.30
			0.4	10.77	14.03	11.37	29.69	9.02
			0.5	15.77	21.75	27.98	31.62	12.76
	0	0.5	0.1	0.77	0.65	1.12	1.01	0.72
			0.2	1.15	2.51	3.56	3.85	2.22
			0.3	2.31	5.76	6.93	8.81	4.58
			0.4	3.85	10.41	11.06	16.25	8.61
			0.5	6.15	16.26	15.62	26.34	15.62
	0.2	0.25	0.1	0.83	0.80	0.27	3.47	0.62
			0.2	3.32	3.40	0.94	11.85	2.36
			0.3	6.22	7.80	2.22	22.83	5.27
			0.4	10.37	14.00	9.08	31.41	8.99
			0.5	15.35	21.70	26.09	33.29	12.74
	0.2	0.5	0.1	0.41	0.60	1.14	1.01	0.71
			0.2	0.83	2.50	3.56	3.85	2.20
			0.3	2.07	5.80	6.93	8.82	4.56
			0.4	3.73	10.40	11.03	16.47	8.58
			0.5	5.81	16.20	15.60	26.30	15.53

表 4.11 具不同邊緣裂縫懸臂之 Al/Al₂O₃ 矩形 FGM 厚板無因次化頻率

$$\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c} \quad (a/b=2, h/b=0.1)$$

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	1	0.25	0	0.198	0.824	1.224	1.814	2.661
			0.1	0.196	0.817	1.220	1.751	2.644
			0.2	0.192	0.796	1.213	1.598	2.598
			0.3	0.186	0.759	1.197	1.399	2.520
			0.4	0.177	0.708	1.172	1.181	2.421
			0.5	0.168	0.646	0.960	1.141	2.321
	1	0.5	0.1	0.198	0.819	1.210	1.795	2.642
			0.2	0.196	0.803	1.181	1.743	2.602
			0.3	0.194	0.776	1.140	1.653	2.540
			0.4	0.191	0.738	1.089	1.519	2.433
			0.5	0.186	0.690	1.034	1.336	2.249
	5	0.25	0	0.171	0.703	1.050	1.417	2.264
			0.1	0.169	0.698	1.047	1.367	2.250
			0.2	0.165	0.679	1.040	1.249	2.210
			0.3	0.160	0.648	1.025	1.093	2.144
			0.4	0.152	0.604	0.922	1.004	2.060
			0.5	0.144	0.550	0.750	0.975	1.977
	5	0.5	0.1	0.170	0.699	1.038	1.402	2.248
			0.2	0.169	0.686	1.012	1.362	2.213
			0.3	0.167	0.663	0.976	1.292	2.160
			0.4	0.164	0.630	0.932	1.186	2.067
			0.5	0.160	0.589	0.885	1.044	1.907

表 4.11 具不同邊緣裂縫懸臂之 Al/Al₂O₃ 矩形 FGM 厚板無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b = 2$ 、 $h/b = 0.1$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	1	0.25	0.1	1.01	0.85	0.33	3.47	0.64
			0.2	3.03	3.40	0.90	11.91	2.37
			0.3	6.06	7.89	2.21	22.88	5.30
			0.4	10.61	14.08	4.25	34.90	9.02
			0.5	15.15	21.60	21.57	37.10	12.78
	1	0.5	0.1	0.00	0.61	1.14	1.05	0.71
			0.2	1.01	2.55	3.51	3.91	2.22
			0.3	2.02	5.83	6.86	8.88	4.55
			0.4	3.54	10.44	11.03	16.26	8.57
			0.5	6.06	16.26	15.52	26.35	15.48
	5	0.25	0.1	1.17	0.71	0.29	3.53	0.62
			0.2	3.51	3.41	0.95	11.86	2.39
			0.3	6.43	7.82	2.38	22.87	5.30
			0.4	11.11	14.08	12.19	29.15	9.01
			0.5	15.79	21.76	28.57	31.19	12.68
	5	0.5	0.1	0.58	0.57	1.14	1.06	0.71
			0.2	1.17	2.42	3.62	3.88	2.25
			0.3	2.34	5.69	7.05	8.82	4.59
			0.4	4.09	10.38	11.24	16.30	8.70
			0.5	6.43	16.22	15.71	26.32	15.77

表 4.11 具不同邊緣裂縫懸臂之 Al/Al₂O₃ 矩形 FGM 厚板無因次化頻率

$$\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c} \quad (a/b=2, h/b=0.1)$$

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	10	0.25	0	0.165	0.679	1.016	1.291	2.185
			0.1	0.164	0.674	1.012	1.246	2.171
			0.2	0.160	0.656	1.005	1.138	2.133
			0.3	0.154	0.626	0.991	0.996	2.069
			0.4	0.147	0.583	0.841	0.970	1.988
			0.5	0.139	0.531	0.683	0.942	1.908
	10	0.5	0.1	0.165	0.675	1.003	1.278	2.169
			0.2	0.164	0.662	0.978	1.241	2.136
			0.3	0.162	0.640	0.943	1.177	2.084
			0.4	0.159	0.609	0.901	1.081	1.994
			0.5	0.155	0.569	0.855	0.951	1.838

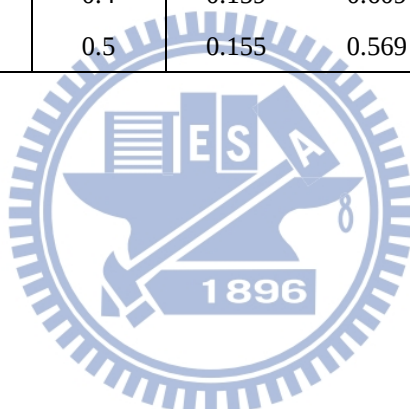


表 4.11 具不同邊緣裂縫懸臂之 $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$ 矩形 FGM 厚板無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b = 2$ 、 $h/b = 0.1$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	10	0.25	0.1	0.61	0.74	0.39	3.49	0.64
			0.2	3.03	3.39	1.08	11.85	2.38
			0.3	6.67	7.81	2.46	22.85	5.31
			0.4	10.91	14.14	17.22	24.86	9.02
			0.5	15.76	21.80	32.78	27.03	12.68
	10	0.5	0.1	0.00	0.59	1.28	1.01	0.73
			0.2	0.61	2.50	3.74	3.87	2.24
			0.3	1.82	5.74	7.19	8.83	4.62
			0.4	3.64	10.31	11.32	16.27	8.74
			0.5	6.06	16.20	15.85	26.34	15.88

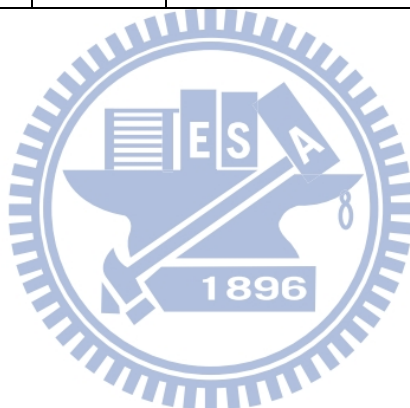


表 4.12 具不同邊緣裂縫懸臂之 Al/Al₂O₃ 矩形 FGM 厚板無因次化頻率

$$\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c} \quad (a/b=2, h/b=0.3)$$

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	0	0.25	0	0.255	0.728	0.926	1.449	2.638
			0.1	0.251	0.703	0.918	1.443	2.594
			0.2	0.244	0.642	0.894	1.427	2.460
			0.3	0.235	0.562	0.850	1.397	2.279
			0.4	0.223	0.475	0.788	1.354	2.083
			0.5	0.208	0.386	0.712	1.304	1.882
	0	0.5	0.1	0.254	0.721	0.921	1.430	2.590
			0.2	0.251	0.700	0.905	1.392	2.357
			0.3	0.248	0.664	0.876	1.338	2.055
			0.4	0.243	0.610	0.832	1.276	1.768
			0.5	0.236	0.537	0.776	1.208	1.522
	0.2	0.25	0	0.237	0.693	0.865	1.351	2.513
			0.1	0.234	0.670	0.858	1.346	2.472
			0.2	0.227	0.612	0.835	1.331	2.344
			0.3	0.218	0.536	0.794	1.304	2.171
			0.4	0.207	0.452	0.736	1.265	1.985
			0.5	0.194	0.368	0.665	1.218	1.793
	0.2	0.5	0.1	0.236	0.687	0.860	1.334	2.467
			0.2	0.233	0.667	0.846	1.298	2.245
			0.3	0.230	0.633	0.818	1.248	1.958
			0.4	0.225	0.581	0.777	1.190	1.684
			0.5	0.219	0.511	0.725	1.127	1.450

表 4.12 具不同邊緣裂縫懸臂之 Al/Al₂O₃ 矩形 FGM 厚板無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b = 2$ 、 $h/b = 0.3$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	0	0.25	0.1	1.57	3.43	0.86	0.41	1.67
			0.2	4.31	11.81	3.46	1.52	6.75
			0.3	7.84	22.80	8.21	3.59	13.61
			0.4	12.55	34.75	14.90	6.56	21.04
			0.5	18.43	46.98	23.11	10.01	28.66
	0	0.5	0.1	0.39	0.96	0.54	1.31	1.82
			0.2	1.57	3.85	2.27	3.93	10.65
			0.3	2.75	8.79	5.40	7.66	22.10
			0.4	4.71	16.21	10.15	11.94	32.98
			0.5	7.45	26.24	16.20	16.63	42.30
	0.2	0.25	0.1	1.27	3.32	0.81	0.37	1.63
			0.2	4.22	11.69	3.47	1.48	6.73
			0.3	8.02	22.66	8.21	3.48	13.61
			0.4	12.66	34.78	14.91	6.37	21.01
			0.5	18.14	46.90	23.12	9.84	28.65
	0.2	0.5	0.1	0.42	0.87	0.58	1.26	1.83
			0.2	1.69	3.75	2.20	3.92	10.66
			0.3	2.95	8.66	5.43	7.62	22.09
			0.4	5.06	16.16	10.17	11.92	32.99
			0.5	7.59	26.26	16.18	16.58	42.30

表 4.12 具不同邊緣裂縫懸臂之 $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$ 矩形 FGM 厚板無因次化頻率

$$\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c} \quad (a/b=2, h/b=0.3)$$

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	1	0.25	0	0.195	0.601	0.722	1.117	2.187
			0.1	0.192	0.581	0.716	1.113	2.155
			0.2	0.187	0.532	0.696	1.101	2.045
			0.3	0.180	0.466	0.661	1.079	1.896
			0.4	0.171	0.394	0.612	1.047	1.734
			0.5	0.160	0.320	0.553	1.009	1.568
	1	0.5	0.1	0.194	0.595	0.718	1.103	2.141
			0.2	0.192	0.579	0.705	1.073	1.955
			0.3	0.190	0.549	0.682	1.032	1.709
			0.4	0.186	0.505	0.647	0.983	1.471
			0.5	0.181	0.445	0.603	0.931	1.268
	5	0.25	0	0.167	0.467	0.601	0.930	1.715
			0.1	0.165	0.452	0.595	0.926	1.685
			0.2	0.160	0.414	0.578	0.915	1.597
			0.3	0.154	0.363	0.548	0.895	1.481
			0.4	0.145	0.307	0.507	0.866	1.355
			0.5	0.136	0.250	0.457	0.833	1.226
	5	0.5	0.1	0.166	0.463	0.597	0.918	1.675
			0.2	0.165	0.450	0.587	0.893	1.525
			0.3	0.162	0.427	0.567	0.859	1.334
			0.4	0.159	0.393	0.538	0.818	1.150
			0.5	0.154	0.346	0.501	0.774	0.992

表 4.12 具不同邊緣裂縫懸臂之 Al/Al₂O₃ 矩形 FGM 厚板無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.3$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	1	0.25	0.1	1.54	3.33	0.83	0.36	1.46
			0.2	4.10	11.48	3.60	1.43	6.49
			0.3	7.69	22.46	8.45	3.40	13.31
			0.4	12.31	34.44	15.24	6.27	20.71
			0.5	17.95	46.76	23.41	9.67	28.30
	1	0.5	0.1	0.51	1.00	0.55	1.25	2.10
			0.2	1.54	3.66	2.35	3.94	10.61
			0.3	2.56	8.65	5.54	7.61	21.86
			0.4	4.62	15.97	10.39	12.00	32.74
			0.5	7.18	25.96	16.48	16.65	42.02
	5	0.25	0.1	1.20	3.21	1.00	0.43	1.75
			0.2	4.19	11.35	3.83	1.61	6.88
			0.3	7.78	22.27	8.82	3.76	13.64
			0.4	13.17	34.26	15.64	6.88	20.99
			0.5	18.56	46.47	23.96	10.43	28.51
	5	0.5	0.1	0.60	0.86	0.67	1.29	2.33
			0.2	1.20	3.64	2.33	3.98	11.08
			0.3	2.99	8.57	5.66	7.63	22.22
			0.4	4.79	15.85	10.48	12.04	32.94
			0.5	7.78	25.91	16.64	16.77	42.16

表 4.12 具不同邊緣裂縫懸臂之 Al/Al₂O₃ 矩形 FGM 厚板無因次化頻率

$$\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c} \quad (a/b=2, h/b=0.3)$$

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	10	0.25	0	0.161	0.428	0.572	0.893	1.563
			0.1	0.159	0.414	0.567	0.889	1.536
			0.2	0.155	0.379	0.551	0.878	1.457
			0.3	0.148	0.332	0.523	0.858	1.350
			0.4	0.140	0.280	0.484	0.830	1.235
			0.5	0.131	0.228	0.436	0.797	1.117
	10	0.5	0.1	0.161	0.424	0.569	0.881	1.531
			0.2	0.159	0.412	0.559	0.857	1.393
			0.3	0.157	0.391	0.541	0.825	1.216
			0.4	0.153	0.360	0.514	0.786	1.048
			0.5	0.149	0.317	0.478	0.743	0.904

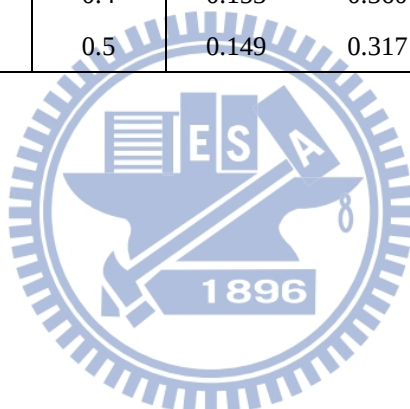


表 4.12 具不同邊緣裂縫懸臂之 Al/Al₂O₃ 矩形 FGM 厚板無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b = 2$ 、 $h/b = 0.3$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	10	0.25	0.1	1.24	3.27	0.87	0.45	1.73
			0.2	3.73	11.45	3.67	1.68	6.78
			0.3	8.07	22.43	8.57	3.92	13.63
			0.4	13.04	34.58	15.38	7.05	20.99
			0.5	18.63	46.73	23.78	10.75	28.53
	10	0.5	0.1	0.00	0.93	0.52	1.34	2.05
			0.2	1.24	3.74	2.27	4.03	10.88
			0.3	2.48	8.64	5.42	7.61	22.20
			0.4	4.97	15.89	10.14	11.98	32.95
			0.5	7.45	25.93	16.43	16.80	42.16

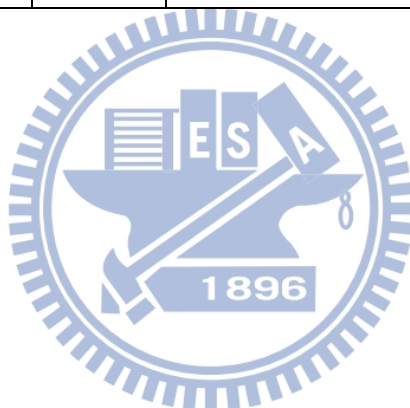


表 4.13 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之 Al/ ZrO₂ 矩形 FGM 薄板
無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.02$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	0	0.25	0	1.675	2.720	4.612	6.228	8.259
			0.1	1.669	2.699	4.576	6.178	8.228
			0.2	1.662	2.645	4.503	6.086	8.146
			0.3	1.644	2.553	4.385	5.991	7.906
			0.4	1.604	2.437	4.234	5.910	7.277
			0.5	1.536	2.332	4.079	5.851	6.568
	0	0.5	0.1	1.661	2.707	4.598	6.173	8.251
			0.2	1.636	2.687	4.555	5.980	8.248
			0.3	1.598	2.667	4.405	5.622	8.247
			0.4	1.550	2.649	4.009	5.294	8.075
			0.5	1.497	2.642	3.465	5.166	7.752
135°	0	0.25	0.1	1.669	2.707	4.585	6.192	8.239
			0.2	1.662	2.677	4.524	6.112	8.176
			0.3	1.642	2.625	4.423	5.998	7.922
			0.4	1.598	2.546	4.298	5.863	7.026
			0.5	1.527	2.453	4.191	5.605	6.012
	0	0.5	0.1	1.665	2.710	4.600	6.196	8.251
			0.2	1.651	2.694	4.569	6.092	8.239
			0.3	1.631	2.669	4.452	5.850	8.179
			0.4	1.608	2.635	4.143	5.493	7.943
			0.5	1.587	2.596	3.625	5.205	7.494

表 4.13 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之 Al/ ZrO₂ 矩形 FGM 薄板
無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b = 2$ 、 $h/b = 0.02$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	0	0.25	0.1	0.36	0.77	0.78	0.80	0.38
			0.2	0.78	2.76	2.36	2.28	1.37
			0.3	1.85	6.14	4.92	3.81	4.27
			0.4	4.24	10.40	8.20	5.11	11.89
			0.5	8.30	14.26	11.56	6.05	20.47
	0	0.5	0.1	0.84	0.48	0.30	0.88	0.10
			0.2	2.33	1.21	1.24	3.98	0.13
			0.3	4.60	1.95	4.49	9.73	0.15
			0.4	7.46	2.61	13.07	15.00	2.23
			0.5	10.63	2.87	24.87	17.05	6.14
135°	0	0.25	0.1	0.36	0.48	0.59	0.58	0.24
			0.2	0.78	1.58	1.91	1.86	1.00
			0.3	1.97	3.49	4.10	3.69	4.08
			0.4	4.60	6.40	6.81	5.86	14.93
			0.5	8.84	9.82	9.13	10.00	27.21
	0	0.5	0.1	0.60	0.37	0.26	0.51	0.10
			0.2	1.43	0.96	0.93	2.18	0.24
			0.3	2.63	1.88	3.47	6.07	0.97
			0.4	4.00	3.13	10.17	11.80	3.83
			0.5	5.25	4.56	21.40	16.43	9.26

表 4.13 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之 Al/ ZrO₂ 矩形 FGM 薄板
無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.02$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	0.2	0.25	0	1.625	2.640	4.475	6.044	8.015
			0.1	1.619	2.619	4.441	5.995	7.985
			0.2	1.613	2.566	4.370	5.901	7.905
			0.3	1.595	2.477	4.256	5.814	7.673
			0.4	1.556	2.365	4.109	5.735	7.063
			0.5	1.491	2.263	3.958	5.678	6.375
	0.2	0.5	0.1	1.612	2.627	4.461	5.991	8.007
			0.2	1.588	2.608	4.420	5.804	8.004
			0.3	1.551	2.588	4.275	5.456	8.003
			0.4	1.504	2.571	3.891	5.138	7.836
			0.5	1.452	2.564	3.363	5.013	7.523
135°	0.2	0.25	0.1	1.620	2.627	4.449	6.009	7.995
			0.2	1.613	2.598	4.390	5.931	7.934
			0.3	1.593	2.547	4.292	5.821	7.688
			0.4	1.551	2.471	4.171	5.690	6.820
			0.5	1.481	2.381	4.067	5.440	5.835
	0.2	0.5	0.1	1.616	2.630	4.464	6.013	8.007
			0.2	1.602	2.614	4.433	5.910	7.995
			0.3	1.583	2.590	4.320	5.678	7.937
			0.4	1.560	2.557	4.021	5.331	7.709
			0.5	1.540	2.519	3.519	5.051	7.273

表 4.13 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之 Al/ ZrO₂ 矩形 FGM 薄板
無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.02$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	0.2	0.25	0.1	0.37	0.80	0.76	0.81	0.37
			0.2	0.74	2.80	2.35	2.37	1.37
			0.3	1.85	6.17	4.89	3.81	4.27
			0.4	4.25	10.42	8.18	5.11	11.88
			0.5	8.25	14.28	11.55	6.06	20.46
	0.2	0.5	0.1	0.80	0.49	0.31	0.88	0.10
			0.2	2.28	1.21	1.23	3.97	0.14
			0.3	4.55	1.97	4.47	9.73	0.15
			0.4	7.45	2.61	13.05	14.99	2.23
			0.5	10.65	2.88	24.85	17.06	6.14
135°	0.2	0.25	0.1	0.31	0.49	0.58	0.58	0.25
			0.2	0.74	1.59	1.90	1.87	1.01
			0.3	1.97	3.52	4.09	3.69	4.08
			0.4	4.55	6.40	6.79	5.86	14.91
			0.5	8.86	9.81	9.12	9.99	27.20
	0.2	0.5	0.1	0.55	0.38	0.25	0.51	0.10
			0.2	1.42	0.98	0.94	2.22	0.25
			0.3	2.58	1.89	3.46	6.06	0.97
			0.4	4.00	3.14	10.15	11.80	3.82
			0.5	5.23	4.58	21.36	16.43	9.26

表 4.13 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之 Al/ ZrO₂ 矩形 FGM 薄板
無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.02$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	1	0.25	0	1.540	2.501	4.240	5.727	7.594
			0.1	1.534	2.481	4.208	5.681	7.566
			0.2	1.528	2.432	4.141	5.597	7.490
			0.3	1.511	2.347	4.033	5.509	7.270
			0.4	1.475	2.241	3.894	5.435	6.693
			0.5	1.413	2.145	3.751	5.381	6.042
	1	0.5	0.1	1.527	2.489	4.227	5.677	7.587
			0.2	1.504	2.471	4.188	5.450	7.584
			0.3	1.470	2.452	4.050	5.170	7.583
			0.4	1.425	2.436	3.687	4.868	7.426
			0.5	1.376	2.429	3.187	4.750	7.129
135°	1	0.25	0.1	1.535	2.489	4.215	5.694	7.576
			0.2	1.528	2.462	4.159	5.620	7.518
			0.3	1.510	2.414	4.067	5.516	7.285
			0.4	1.469	2.341	3.952	5.391	6.463
			0.5	1.404	2.256	3.853	5.155	5.530
	1	0.5	0.1	1.531	2.492	4.229	5.697	7.587
			0.2	1.518	2.477	4.201	5.601	7.576
			0.3	1.497	2.454	4.093	5.380	7.521
			0.4	1.478	2.423	3.810	5.051	7.305
			0.5	1.456	2.387	3.335	4.787	6.892

表 4.13 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之 Al/ ZrO₂ 矩形 FGM 薄板
無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b = 2$ 、 $h/b = 0.02$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	1	0.25	0.1	0.39	0.80	0.75	0.80	0.37
			0.2	0.78	2.76	2.33	2.27	1.37
			0.3	1.88	6.16	4.88	3.81	4.27
			0.4	4.22	10.40	8.16	5.10	11.86
			0.5	8.25	14.23	11.53	6.04	20.44
	1	0.5	0.1	0.84	0.48	0.31	0.87	0.09
			0.2	2.34	1.20	1.23	4.84	0.13
			0.3	4.55	1.96	4.48	9.73	0.14
			0.4	7.47	2.60	13.04	15.00	2.21
			0.5	10.65	2.88	24.83	17.06	6.12
135°	1	0.25	0.1	0.32	0.48	0.59	0.58	0.24
			0.2	0.78	1.56	1.91	1.87	1.00
			0.3	1.95	3.48	4.08	3.68	4.07
			0.4	4.61	6.40	6.79	5.87	14.89
			0.5	8.83	9.80	9.13	9.99	27.18
	1	0.5	0.1	0.58	0.36	0.26	0.52	0.09
			0.2	1.43	0.96	0.92	2.20	0.24
			0.3	2.79	1.88	3.47	6.06	0.96
			0.4	4.03	3.12	10.14	11.80	3.81
			0.5	5.45	4.56	21.34	16.41	9.24

表 4.13 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之 Al/ ZrO₂ 矩形 FGM 薄板
無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.02$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	5	0.25	0	1.574	2.556	4.334	5.851	7.761
			0.1	1.569	2.536	4.301	5.804	7.732
			0.2	1.563	2.485	4.231	5.718	7.654
			0.3	1.545	2.398	4.120	5.628	7.428
			0.4	1.507	2.290	3.978	5.552	6.833
			0.5	1.444	2.191	3.832	5.497	6.167
	5	0.5	0.1	1.561	2.543	4.321	5.780	7.753
			0.2	1.538	2.524	4.281	5.618	7.751
			0.3	1.502	2.506	4.139	5.281	7.749
			0.4	1.456	2.489	3.765	4.974	7.584
			0.5	1.406	2.482	3.253	4.854	7.281
135°	5	0.25	0.1	1.569	2.543	4.309	5.817	7.742
			0.2	1.563	2.516	4.251	5.741	7.682
			0.3	1.543	2.466	4.156	5.635	7.442
			0.4	1.502	2.392	4.039	5.507	6.595
			0.5	1.435	2.304	3.938	5.263	5.645
	5	0.5	0.1	1.565	2.546	4.323	5.821	7.753
			0.2	1.552	2.531	4.294	5.722	7.742
			0.3	1.533	2.508	4.183	5.495	7.685
			0.4	1.511	2.475	3.892	5.159	7.462
			0.5	1.492	2.439	3.405	4.890	7.039

表 4.13 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之 Al/ ZrO₂ 矩形 FGM 薄板
無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b = 2$ 、 $h/b = 0.02$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	5	0.25	0.1	0.32	0.78	0.76	0.80	0.37
			0.2	0.70	2.78	2.38	2.27	1.38
			0.3	1.84	6.18	4.94	3.81	4.29
			0.4	4.26	10.41	8.21	5.11	11.96
			0.5	8.26	14.28	11.58	6.05	20.54
	5	0.5	0.1	0.83	0.51	0.30	1.21	0.10
			0.2	2.29	1.25	1.22	3.98	0.13
			0.3	4.57	1.96	4.50	9.74	0.15
			0.4	7.50	2.62	13.13	14.99	2.28
			0.5	10.67	2.90	24.94	17.04	6.18
135°	5	0.25	0.1	0.32	0.51	0.58	0.58	0.24
			0.2	0.70	1.56	1.92	1.88	1.02
			0.3	1.97	3.52	4.11	3.69	4.11
			0.4	4.57	6.42	6.81	5.88	15.02
			0.5	8.83	9.86	9.14	10.05	27.26
	5	0.5	0.1	0.57	0.39	0.25	0.51	0.10
			0.2	1.40	0.98	0.92	2.20	0.24
			0.3	2.60	1.88	3.48	6.08	0.98
			0.4	4.00	3.17	10.20	11.83	3.85
			0.5	5.21	4.58	21.44	16.42	9.30

表 4.13 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之 Al/ ZrO₂ 矩形 FGM 薄板
無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.02$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	10	0.25	0	1.571	2.551	4.326	5.839	7.745
			0.1	1.566	2.530	4.292	5.792	7.716
			0.2	1.559	2.480	4.223	5.706	7.639
			0.3	1.542	2.394	4.112	5.616	7.412
			0.4	1.504	2.285	3.970	5.541	6.818
			0.5	1.441	2.187	3.824	5.486	6.154
	10	0.5	0.1	1.558	2.538	4.312	5.788	7.737
			0.2	1.535	2.519	4.272	5.606	7.735
			0.3	1.499	2.501	4.130	5.270	7.733
			0.4	1.453	2.483	3.757	4.964	7.568
			0.5	1.404	2.477	3.246	4.845	7.266
135°	10	0.25	0.1	1.566	2.538	4.300	5.805	7.726
			0.2	1.559	2.511	4.243	5.730	7.666
			0.3	1.540	2.461	4.148	5.623	7.426
			0.4	1.499	2.387	4.031	5.496	6.581
			0.5	1.432	2.300	3.930	5.252	5.633
	10	0.5	0.1	1.562	2.541	4.315	5.809	7.737
			0.2	1.549	2.526	4.285	5.710	7.726
			0.3	1.530	2.502	4.175	5.484	7.669
			0.4	1.508	2.470	3.884	5.148	7.446
			0.5	1.489	2.434	3.397	4.880	7.024

表 4.13 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之 Al/ ZrO₂ 矩形 FGM 薄板
無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b = 2$ 、 $h/b = 0.02$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	10	0.25	0.1	0.32	0.82	0.79	0.80	0.37
			0.2	0.76	2.78	2.38	2.28	1.37
			0.3	1.85	6.15	4.95	3.82	4.30
			0.4	4.26	10.43	8.23	5.10	11.97
			0.5	8.27	14.27	11.60	6.05	20.54
	10	0.5	0.1	0.83	0.51	0.32	0.87	0.10
			0.2	2.29	1.25	1.25	3.99	0.13
			0.3	4.58	1.96	4.53	9.74	0.15
			0.4	7.51	2.67	13.15	14.99	2.29
			0.5	10.63	2.90	24.97	17.02	6.18
135°	10	0.25	0.1	0.32	0.51	0.60	0.58	0.25
			0.2	0.76	1.57	1.92	1.87	1.02
			0.3	1.97	3.53	4.11	3.70	4.12
			0.4	4.58	6.43	6.82	5.87	15.03
			0.5	8.85	9.84	9.15	10.05	27.27
	10	0.5	0.1	0.57	0.39	0.25	0.51	0.10
			0.2	1.40	0.98	0.95	2.21	0.25
			0.3	2.61	1.92	3.49	6.08	0.98
			0.4	4.01	3.18	10.22	11.83	3.86
			0.5	5.22	4.59	21.47	16.42	9.31

表 4.14 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之 Al/ ZrO₂ 矩形 FGM 厚板
無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.1$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	0	0.25	0	1.643	2.594	4.429	5.852	7.791
			0.1	1.637	2.576	4.388	5.797	7.769
			0.2	1.628	2.520	4.303	5.705	7.689
			0.3	1.604	2.429	4.177	5.622	7.382
			0.4	1.556	2.321	4.027	5.560	6.666
			0.5	1.479	2.228	3.876	5.511	6.024
	0	0.5	0.1	1.627	2.580	4.412	5.796	7.786
			0.2	1.598	2.560	4.355	5.592	7.654
			0.3	1.557	2.540	4.159	5.254	7.485
			0.4	1.507	2.526	3.720	5.005	7.365
			0.5	1.453	2.521	3.197	4.915	7.206
135°	0	0.25	0.1	1.638	2.583	4.400	5.815	7.776
			0.2	1.629	2.553	4.334	5.737	7.703
			0.3	1.606	2.499	4.232	5.631	7.359
			0.4	1.558	2.422	4.113	5.509	6.352
			0.5	1.483	2.333	4.013	5.177	5.565
	0	0.5	0.1	1.632	2.584	4.416	5.818	7.786
			0.2	1.616	2.568	4.377	5.703	7.770
			0.3	1.595	2.544	4.240	5.451	7.664
			0.4	1.572	2.512	3.897	5.127	7.391
			0.5	1.551	2.475	3.378	4.897	6.960

表 4.14 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之 Al/ ZrO₂ 矩形 FGM 厚板
無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b = 2$ 、 $h/b = 0.1$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	0	0.25	0.1	0.37	0.69	0.93	0.94	0.28
			0.2	0.91	2.85	2.84	2.51	1.31
			0.3	2.37	6.36	5.69	3.93	5.25
			0.4	5.30	10.52	9.08	4.99	14.44
			0.5	9.98	14.11	12.49	5.83	22.68
	0	0.5	0.1	0.97	0.54	0.38	0.96	0.06
			0.2	2.74	1.31	1.67	4.44	1.76
			0.3	5.23	2.08	6.10	10.22	3.93
			0.4	8.28	2.62	16.01	14.47	5.47
			0.5	11.56	2.81	27.82	16.01	7.51
135°	0	0.25	0.1	0.30	0.42	0.65	0.63	0.19
			0.2	0.85	1.58	2.14	1.97	1.13
			0.3	2.25	3.66	4.45	3.78	5.54
			0.4	5.17	6.63	7.13	5.86	18.47
			0.5	9.74	10.06	9.39	11.53	28.57
	0	0.5	0.1	0.67	0.39	0.29	0.58	0.06
			0.2	1.64	1.00	1.17	2.55	0.27
			0.3	2.92	1.93	4.27	6.85	1.63
			0.4	4.32	3.16	12.01	12.39	5.13
			0.5	5.60	4.59	23.73	16.32	10.67

表 4.14 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之 Al/ ZrO₂ 矩形 FGM 厚板
無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.1$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	0.2	0.25	0	1.595	2.522	4.305	5.691	7.574
			0.1	1.590	2.503	4.265	5.638	7.553
			0.2	1.581	2.449	4.182	5.549	7.475
			0.3	1.558	2.361	4.060	5.467	7.180
			0.4	1.511	2.256	3.915	5.407	6.488
			0.5	1.437	2.165	3.768	5.358	5.862
	0.2	0.5	0.1	1.580	2.508	4.288	5.637	7.569
			0.2	1.552	2.488	4.233	5.439	7.565
			0.3	1.512	2.469	4.044	5.110	7.399
			0.4	1.463	2.455	3.618	4.866	7.280
			0.5	1.411	2.450	3.110	4.779	7.010
135°	0.2	0.25	0.1	1.590	2.510	4.276	5.655	7.559
			0.2	1.582	2.481	4.213	5.579	7.489
			0.3	1.560	2.429	4.113	5.476	7.185
			0.4	1.513	2.354	3.998	5.357	6.183
			0.5	1.440	2.267	3.900	5.037	5.413
	0.2	0.5	0.1	1.585	2.512	4.292	5.658	7.570
			0.2	1.570	2.496	4.255	5.547	7.555
			0.3	1.549	2.472	4.122	5.302	7.478
			0.4	1.526	2.441	3.789	4.986	7.189
			0.5	1.506	2.406	3.285	4.762	6.771

表 4.14 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之 Al/ ZrO₂ 矩形 FGM 厚板
無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.1$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	0.2	0.25	0.1	0.31	0.75	0.93	0.93	0.28
			0.2	0.88	2.89	2.86	2.50	1.31
			0.3	2.32	6.38	5.69	3.94	5.20
			0.4	5.27	10.55	9.06	4.99	14.34
			0.5	9.91	14.16	12.47	5.85	22.60
	0.2	0.5	0.1	0.94	0.56	0.39	0.95	0.07
			0.2	2.70	1.35	1.67	4.43	0.12
			0.3	5.20	2.10	6.06	10.21	2.31
			0.4	8.28	2.66	15.96	14.50	3.88
			0.5	11.54	2.85	27.76	16.03	7.45
135°	0.2	0.25	0.1	0.31	0.48	0.67	0.63	0.20
			0.2	0.82	1.63	2.14	1.97	1.12
			0.3	2.19	3.69	4.46	3.78	5.14
			0.4	5.14	6.66	7.13	5.87	18.37
			0.5	9.72	10.11	9.41	11.49	28.53
	0.2	0.5	0.1	0.63	0.40	0.30	0.58	0.05
			0.2	1.57	1.03	1.16	2.53	0.25
			0.3	2.88	1.98	4.25	6.84	1.27
			0.4	4.33	3.21	11.99	12.39	5.08
			0.5	5.58	4.60	23.69	16.32	10.60

表 4.14 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之 Al/ ZrO₂ 矩形 FGM 厚板
無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.1$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	1	0.25	0	1.512	2.392	4.083	5.400	7.184
			0.1	1.507	2.374	4.045	5.350	7.164
			0.2	1.499	2.323	3.967	5.265	7.090
			0.3	1.477	2.239	3.851	5.187	6.812
			0.4	1.433	2.140	3.713	5.130	6.158
			0.5	1.362	2.054	3.574	5.084	5.564
	1	0.5	0.1	1.498	2.378	4.067	5.348	7.179
			0.2	1.471	2.359	4.015	5.161	7.176
			0.3	1.433	2.342	3.837	4.848	7.162
			0.4	1.387	2.328	3.434	4.616	6.916
			0.5	1.338	2.323	2.952	4.533	6.652
135°	1	0.25	0.1	1.508	2.381	4.056	5.366	7.170
			0.2	1.500	2.353	3.996	5.293	7.103
			0.3	1.479	2.304	3.901	5.196	6.792
			0.4	1.435	2.233	3.791	5.082	5.870
			0.5	1.365	2.150	3.699	4.780	5.137
	1	0.5	0.1	1.503	2.382	4.071	5.369	7.180
			0.2	1.488	2.367	4.036	5.263	7.166
			0.3	1.469	2.345	3.910	5.031	7.094
			0.4	1.447	2.315	3.595	4.731	6.821
			0.5	1.428	2.281	3.117	4.517	6.425

表 4.14 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之 Al/ ZrO₂ 矩形 FGM 厚板
無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.1$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	1	0.25	0.1	0.33	0.75	0.93	0.93	0.28
			0.2	0.86	2.88	2.84	2.50	1.31
			0.3	2.31	6.40	5.68	3.94	5.18
			0.4	5.22	10.54	9.06	5.00	14.28
			0.5	9.92	14.13	12.47	5.85	22.55
	1	0.5	0.1	0.93	0.59	0.39	0.96	0.07
			0.2	2.71	1.38	1.67	4.43	0.11
			0.3	5.22	2.09	6.02	10.22	0.31
			0.4	8.27	2.68	15.90	14.52	3.73
			0.5	11.51	2.88	27.70	16.06	7.41
135°	1	0.25	0.1	0.26	0.46	0.66	0.63	0.19
			0.2	0.79	1.63	2.13	1.98	1.13
			0.3	2.18	3.68	4.46	3.78	5.46
			0.4	5.09	6.65	7.15	5.89	18.29
			0.5	9.72	10.12	9.40	11.48	28.49
	1	0.5	0.1	0.60	0.42	0.29	0.57	0.06
			0.2	1.59	1.05	1.15	2.54	0.25
			0.3	2.84	1.96	4.24	6.83	1.25
			0.4	4.30	3.22	11.95	12.39	5.05
			0.5	5.56	4.64	23.66	16.35	10.57

表 4.14 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之 Al/ ZrO₂ 矩形 FGM 厚板
無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.1$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	5	0.25	0	1.539	2.423	4.315	5.450	7.169
			0.1	1.534	2.405	4.096	5.400	7.162
			0.2	1.525	2.353	4.016	5.314	7.139
			0.3	1.502	2.268	3.899	5.237	6.875
			0.4	1.456	2.168	3.759	5.182	6.196
			0.5	1.383	2.082	3.618	5.136	5.601
	5	0.5	0.1	1.524	2.410	4.119	5.398	7.080
			0.2	1.497	2.391	4.064	5.207	6.914
			0.3	1.458	2.373	3.877	4.893	6.761
			0.4	1.411	2.360	3.464	4.666	6.653
			0.5	1.361	2.355	2.977	4.585	6.592
135°	5	0.25	0.1	1.535	2.412	4.107	5.416	7.158
			0.2	1.526	2.384	4.046	5.344	7.105
			0.3	1.505	2.334	3.951	5.247	6.853
			0.4	1.460	2.262	3.841	5.133	5.899
			0.5	1.388	2.179	3.748	4.817	5.181
	5	0.5	0.1	1.529	2.414	4.123	5.419	7.120
			0.2	1.514	2.399	4.086	5.310	7.019
			0.3	1.495	2.376	3.956	5.075	6.924
			0.4	1.473	2.346	3.633	4.775	6.865
			0.5	1.453	2.312	3.148	4.563	6.479

表 4.14 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之 Al/ ZrO₂ 矩形 FGM 厚板
無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.1$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	5	0.25	0.1	0.32	0.74	5.08	0.92	0.10
			0.2	0.91	2.89	6.93	2.50	0.42
			0.3	2.40	6.40	9.64	3.91	4.10
			0.4	5.39	10.52	12.89	4.92	13.57
			0.5	10.14	14.07	16.15	5.76	21.87
	5	0.5	0.1	0.97	0.54	4.54	0.95	1.24
			0.2	2.73	1.32	5.82	4.46	3.56
			0.3	5.26	2.06	10.15	10.22	5.69
			0.4	8.32	2.60	19.72	14.39	7.20
			0.5	11.57	2.81	31.01	15.87	8.05
135°	5	0.25	0.1	0.26	0.45	4.82	0.62	0.15
			0.2	0.84	1.61	6.23	1.94	0.89
			0.3	2.21	3.67	8.44	3.72	4.41
			0.4	5.13	6.64	10.98	5.82	17.72
			0.5	9.81	10.07	13.14	11.61	27.73
	5	0.5	0.1	0.65	0.37	4.45	0.57	0.68
			0.2	1.62	0.99	5.31	2.57	2.09
			0.3	2.86	1.94	8.32	6.88	3.42
			0.4	4.29	3.18	15.81	12.39	4.24
			0.5	5.59	4.58	27.05	16.28	9.62

表 4.14 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之 Al/ ZrO₂ 矩形 FGM 厚板
無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.1$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	10	0.25	0	1.535	2.416	4.123	5.434	7.027
			0.1	1.530	2.399	4.084	5.383	7.020
			0.2	1.521	2.347	4.004	5.297	6.998
			0.3	1.498	2.262	3.887	5.221	6.853
			0.4	1.452	2.162	3.748	5.166	6.175
			0.5	1.379	2.077	3.608	5.121	5.582
	10	0.5	0.1	1.520	2.403	4.107	5.381	6.940
			0.2	1.493	2.384	4.052	5.191	6.777
			0.3	1.455	2.366	3.865	4.878	6.627
			0.4	1.407	2.353	3.452	4.652	6.521
			0.5	1.358	2.348	2.967	4.572	6.462
135°	10	0.25	0.1	1.531	2.405	4.096	5.400	7.016
			0.2	1.523	2.378	4.035	5.328	6.964
			0.3	1.501	2.328	3.940	5.231	6.831
			0.4	1.456	2.256	3.831	5.118	5.877
			0.5	1.385	2.173	3.738	4.801	5.164
	10	0.5	0.1	1.526	2.407	4.111	5.402	6.978
			0.2	1.511	2.392	4.074	5.294	6.880
			0.3	1.491	2.369	3.945	5.058	6.786
			0.4	1.469	2.340	3.622	4.760	6.730
			0.5	1.450	2.306	3.138	4.550	6.459

表 4.14 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之 Al/ ZrO₂ 矩形 FGM 厚板
無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.1$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	10	0.25	0.1	0.33	0.70	0.95	0.94	0.10
			0.2	0.91	2.86	2.89	2.52	0.41
			0.3	2.41	6.37	5.72	3.92	2.48
			0.4	5.41	10.51	9.10	4.93	12.12
			0.5	10.16	14.03	12.49	5.76	20.56
	10	0.5	0.1	0.98	0.54	0.39	0.98	1.24
			0.2	2.74	1.32	1.72	4.47	3.56
			0.3	5.21	2.07	6.26	10.23	5.69
			0.4	8.34	2.61	16.27	14.39	7.20
			0.5	11.53	2.81	28.04	15.86	8.04
135°	10	0.25	0.1	0.26	0.46	0.65	0.63	0.16
			0.2	0.78	1.57	2.13	1.95	0.90
			0.3	2.21	3.64	4.44	3.74	2.79
			0.4	5.15	6.62	7.08	5.82	16.37
			0.5	9.77	10.06	9.34	11.65	26.51
	10	0.5	0.1	0.59	0.37	0.29	0.59	0.70
			0.2	1.56	0.99	1.19	2.58	2.09
			0.3	2.87	1.95	4.32	6.92	3.43
			0.4	4.30	3.15	12.15	12.40	4.23
			0.5	5.54	4.55	23.89	16.27	8.08

表 4.15 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之 Al/ ZrO₂ 矩形 FGM 厚板
無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.3$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	0	0.25	0	1.454	2.090	2.649	3.502	4.384
			0.1	1.449	2.075	2.647	3.474	4.357
			0.2	1.435	2.032	2.639	3.409	4.307
			0.3	1.402	1.964	2.617	3.315	4.262
			0.4	1.344	1.892	2.570	3.205	4.233
			0.5	1.260	1.836	2.496	3.095	4.119
	0	0.5	0.1	1.441	2.082	2.618	3.486	4.336
			0.2	1.415	2.069	2.557	3.420	4.178
			0.3	1.380	2.057	2.501	3.212	3.963
			0.4	1.338	2.049	2.461	2.842	3.842
			0.5	1.294	2.046	2.439	2.465	3.796
135°	0	0.25	0.1	1.450	2.081	2.646	3.484	4.368
			0.2	1.440	2.058	2.627	3.442	4.328
			0.3	1.417	2.017	2.579	3.376	4.271
			0.4	1.372	1.962	2.501	3.301	4.201
			0.5	1.303	1.901	2.403	3.234	3.855
	0	0.5	0.1	1.446	2.085	2.632	3.492	4.355
			0.2	1.433	2.076	2.595	3.454	4.259
			0.3	1.415	2.061	2.560	3.331	4.072
			0.4	1.395	2.042	2.539	3.041	3.872
			0.5	1.377	2.020	2.533	2.651	3.747

表 4.15 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之 Al/ ZrO₂ 矩形 FGM 厚板
無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.3$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	0	0.25	0.1	0.34	0.72	0.08	0.80	0.62
			0.2	1.31	2.78	0.38	2.66	1.76
			0.3	3.58	6.03	1.21	5.34	2.78
			0.4	7.57	9.47	2.98	8.48	3.44
			0.5	13.34	12.15	5.78	11.62	6.04
	0	0.5	0.1	0.89	0.38	1.17	0.46	1.09
			0.2	2.68	1.00	3.47	2.34	4.70
			0.3	5.09	1.58	5.59	8.28	9.60
			0.4	7.98	1.96	7.10	18.85	12.36
			0.5	11.00	2.11	7.93	29.61	13.41
135°	0	0.25	0.1	0.28	0.43	0.11	0.51	0.36
			0.2	0.96	1.53	0.83	1.71	1.28
			0.3	2.54	3.49	2.64	3.60	2.58
			0.4	5.64	6.12	5.59	5.74	4.17
			0.5	10.39	9.04	9.29	7.65	12.07
	0	0.5	0.1	0.55	0.24	0.64	0.29	0.66
			0.2	1.44	0.67	2.04	1.37	2.85
			0.3	2.68	1.39	3.36	4.88	7.12
			0.4	4.06	2.30	4.15	13.16	11.68
			0.5	5.30	3.35	4.38	24.30	14.53

表 4.15 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之 Al/ ZrO₂ 矩形 FGM 厚板
無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.3$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	0.2	0.25	0	1.418	2.044	2.619	3.429	4.296
			0.1	1.413	2.030	2.617	3.402	4.270
			0.2	1.400	1.987	2.609	3.338	4.220
			0.3	1.368	1.920	2.587	3.244	4.175
			0.4	1.312	1.849	2.541	3.136	4.146
			0.5	1.230	1.794	2.468	3.028	4.072
	0.2	0.5	0.1	1.406	2.036	2.588	3.414	4.250
			0.2	1.381	2.024	2.528	3.349	4.094
			0.3	1.346	2.011	2.472	3.146	3.883
			0.4	1.305	2.004	2.433	2.783	3.764
			0.5	1.262	2.001	2.411	2.413	3.719
135°	0.2	0.25	0.1	1.415	2.035	2.616	3.412	4.280
			0.2	1.405	2.013	2.597	3.370	4.240
			0.3	1.382	1.973	2.550	3.305	4.183
			0.4	1.338	1.918	2.472	3.230	4.114
			0.5	1.271	1.859	2.376	3.163	3.778
	0.2	0.5	0.1	1.411	2.039	2.602	3.419	4.268
			0.2	1.397	2.030	2.566	3.382	4.174
			0.3	1.380	2.015	2.531	3.262	3.990
			0.4	1.361	1.997	2.510	2.977	3.794
			0.5	1.343	1.974	2.504	2.594	3.671

表 4.15 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之 Al/ ZrO₂ 矩形 FGM 厚板
無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.3$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	0.2	0.25	0.1	0.35	0.68	0.08	0.79	0.61
			0.2	1.27	2.79	0.38	2.65	1.77
			0.3	3.53	6.07	1.22	5.40	2.82
			0.4	7.48	9.54	2.98	8.54	3.49
			0.5	13.26	12.23	5.77	11.69	5.21
	0.2	0.5	0.1	0.85	0.39	1.18	0.44	1.07
			0.2	2.61	0.98	3.47	2.33	4.70
			0.3	5.08	1.61	5.61	8.25	9.61
			0.4	7.97	1.96	7.10	18.84	12.38
			0.5	11.00	2.10	7.94	29.63	13.43
135°	0.2	0.25	0.1	0.21	0.44	0.11	0.50	0.37
			0.2	0.92	1.52	0.84	1.72	1.30
			0.3	2.54	3.47	2.63	3.62	2.63
			0.4	5.64	6.16	5.61	5.80	4.24
			0.5	10.37	9.05	9.28	7.76	12.06
	0.2	0.5	0.1	0.49	0.24	0.65	0.29	0.65
			0.2	1.48	0.68	2.02	1.37	2.84
			0.3	2.68	1.42	3.36	4.87	7.12
			0.4	4.02	2.30	4.16	13.18	11.69
			0.5	5.29	3.42	4.39	24.35	14.55

表 4.15 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之 Al/ ZrO₂ 矩形 FGM 厚板
無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.3$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	1	0.25	0	1.348	1.945	2.536	3.268	4.095
			0.1	1.344	1.932	2.534	3.241	4.070
			0.2	1.331	1.892	2.526	3.180	4.021
			0.3	1.301	1.828	2.505	3.091	3.978
			0.4	1.248	1.760	2.460	2.987	3.950
			0.5	1.170	1.707	2.389	2.884	3.924
	1	0.5	0.1	1.336	1.938	2.506	3.253	4.051
			0.2	1.312	1.926	2.448	3.192	3.903
			0.3	1.279	1.914	2.394	3.000	3.701
			0.4	1.241	1.907	2.356	2.653	3.587
			0.5	1.199	1.904	2.300	2.335	3.544
135°	1	0.25	0.1	1.345	1.938	2.533	3.251	4.080
			0.2	1.336	1.916	2.515	3.210	4.041
			0.3	1.314	1.878	2.469	3.148	3.986
			0.4	1.273	1.826	2.394	3.076	3.920
			0.5	1.209	1.769	2.300	3.012	3.602
	1	0.5	0.1	1.341	1.941	2.520	3.258	4.069
			0.2	1.328	1.932	2.484	3.223	3.979
			0.3	1.312	1.918	2.451	3.108	3.804
			0.4	1.293	1.900	2.430	2.837	3.617
			0.5	1.276	1.878	2.424	2.472	3.499

表 4.15 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之 Al/ ZrO₂ 矩形 FGM 厚板
無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.3$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	1	0.25	0.1	0.30	0.67	0.08	0.83	0.61
			0.2	1.26	2.72	0.39	2.69	1.81
			0.3	3.49	6.02	1.22	5.42	2.86
			0.4	7.42	9.51	3.00	8.60	3.54
			0.5	13.20	12.24	5.80	11.75	4.18
	1	0.5	0.1	0.89	0.36	1.18	0.46	1.07
			0.2	2.67	0.98	3.47	2.33	4.69
			0.3	5.12	1.59	5.60	8.20	9.62
			0.4	7.94	1.95	7.10	18.82	12.41
			0.5	11.05	2.11	9.31	28.55	13.46
135°	1	0.25	0.1	0.22	0.36	0.12	0.52	0.37
			0.2	0.89	1.49	0.83	1.77	1.32
			0.3	2.52	3.44	2.64	3.67	2.66
			0.4	5.56	6.12	5.60	5.88	4.27
			0.5	10.31	9.05	9.31	7.83	12.04
	1	0.5	0.1	0.52	0.21	0.63	0.31	0.63
			0.2	1.48	0.67	2.05	1.38	2.83
			0.3	2.67	1.39	3.35	4.90	7.11
			0.4	4.08	2.31	4.18	13.19	11.67
			0.5	5.34	3.44	4.42	24.36	14.55

表 4.15 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之 Al/ ZrO₂ 矩形 FGM 厚板
無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.3$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	5	0.25	0	1.337	1.906	2.395	3.178	3.970
			0.1	1.333	1.893	2.393	3.153	3.948
			0.2	1.319	1.854	2.386	3.096	3.905
			0.3	1.289	1.793	2.365	3.012	3.865
			0.4	1.234	1.729	2.323	2.915	3.836
			0.5	1.156	1.680	2.256	2.817	3.718
	5	0.5	0.1	1.326	1.900	2.367	3.163	3.926
			0.2	1.303	1.888	2.312	3.102	3.783
			0.3	1.271	1.878	2.261	2.914	3.591
			0.4	1.234	1.871	2.225	2.581	3.483
			0.5	1.194	1.868	2.205	2.243	3.441
135°	5	0.25	0.1	1.334	1.898	2.392	3.162	3.956
			0.2	1.325	1.877	2.375	3.125	3.923
			0.3	1.303	1.841	2.332	3.069	3.873
			0.4	1.262	1.791	2.260	3.003	3.813
			0.5	1.200	1.738	2.172	2.945	3.496
	5	0.5	0.1	1.331	1.902	2.379	3.168	3.943
			0.2	1.318	1.894	2.346	3.133	3.856
			0.3	1.302	1.881	2.315	3.023	3.687
			0.4	1.285	1.865	2.295	2.765	3.508
			0.5	1.268	1.846	2.289	2.418	3.395

表 4.15 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之 Al/ ZrO₂ 矩形 FGM 厚板
無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.3$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	5	0.25	0.1	0.30	0.68	0.08	0.79	0.55
			0.2	1.35	2.73	0.38	2.58	1.64
			0.3	3.59	5.93	1.25	5.22	2.64
			0.4	7.70	9.29	3.01	8.28	3.38
			0.5	13.54	11.86	5.80	11.36	6.35
	5	0.5	0.1	0.82	0.31	1.17	0.47	1.11
			0.2	2.54	0.94	3.47	2.39	4.71
			0.3	4.94	1.47	5.59	8.31	9.55
			0.4	7.70	1.84	7.10	18.79	12.27
			0.5	10.70	1.99	7.93	29.42	13.32
135°	5	0.25	0.1	0.22	0.42	0.13	0.50	0.35
			0.2	0.90	1.52	0.84	1.67	1.18
			0.3	2.54	3.41	2.63	3.43	2.44
			0.4	5.61	6.03	5.64	5.51	3.95
			0.5	10.25	8.81	9.31	7.33	11.94
	5	0.5	0.1	0.45	0.21	0.67	0.31	0.68
			0.2	1.42	0.63	2.05	1.42	2.87
			0.3	2.62	1.31	3.34	4.88	7.13
			0.4	3.89	2.15	4.18	13.00	11.64
			0.5	5.16	3.15	4.43	23.91	14.48

表 4.15 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之 Al/ ZrO₂ 矩形 FGM 厚板
無因次化頻率 $\omega(b^2/h)\sqrt{\rho_c/E_c}$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.3$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	10	0.25	0	1.331	1.895	2.347	3.156	3.942
			0.1	1.326	1.882	2.345	3.132	3.921
			0.2	1.313	1.843	2.338	3.075	3.878
			0.3	1.282	1.783	2.318	2.993	3.839
			0.4	1.228	1.719	2.277	2.897	3.800
			0.5	1.150	1.670	2.211	2.800	3.646
	10	0.5	0.1	1.320	1.889	2.319	3.141	3.899
			0.2	1.297	1.878	2.265	3.081	3.757
			0.3	1.266	1.867	2.216	2.893	3.566
			0.4	1.228	1.860	2.180	2.563	3.459
			0.5	1.189	1.858	2.161	2.228	3.418
135°	10	0.25	0.1	1.328	1.887	2.344	3.141	3.929
			0.2	1.318	1.866	2.327	3.104	3.896
			0.3	1.297	1.830	2.285	3.049	3.848
			0.4	1.256	1.781	2.215	2.985	3.788
			0.5	1.194	1.728	2.129	2.927	3.470
	10	0.5	0.1	1.324	1.891	2.332	3.147	3.916
			0.2	1.312	1.883	2.299	3.112	3.829
			0.3	1.296	1.871	2.268	3.003	3.661
			0.4	1.279	1.855	2.249	2.746	3.484
			0.5	1.262	1.835	2.244	2.402	3.372

表 4.15 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之 Al/ ZrO₂ 矩形 FGM 厚板
無因次化頻率折減量 $\Delta\omega(\%)$ ($a/b=2$ 、 $h/b=0.3$)

α	$\hat{n}$	c_y/a	d/b	Mode				
				1	2	3	4	5
90°	10	0.25	0.1	0.38	0.69	0.09	0.76	0.53
			0.2	1.35	2.74	0.38	2.57	1.62
			0.3	3.68	5.91	1.24	5.16	2.61
			0.4	7.74	9.29	2.98	8.21	3.60
			0.5	13.60	11.87	5.79	11.28	7.51
	10	0.5	0.1	0.83	0.32	1.19	0.48	1.09
			0.2	2.55	0.90	3.49	2.38	4.69
			0.3	4.88	1.48	5.58	8.33	9.54
			0.4	7.74	1.85	7.12	18.79	12.25
			0.5	10.67	1.95	7.93	29.40	13.29
135°	10	0.25	0.1	0.23	0.42	0.13	0.48	0.33
			0.2	0.98	1.53	0.85	1.65	1.17
			0.3	2.55	3.43	2.64	3.39	2.38
			0.4	5.63	6.02	5.62	5.42	3.91
			0.5	10.29	8.81	9.29	7.26	11.97
	10	0.5	0.1	0.53	0.21	0.64	0.29	0.66
			0.2	1.43	0.63	2.05	1.39	2.87
			0.3	2.63	1.27	3.37	4.85	7.13
			0.4	3.91	2.11	4.18	12.99	11.62
			0.5	5.18	3.17	4.39	23.89	14.46

表 4.16 具不同邊緣裂縫簡支方形均質板之厚度效應($c_y/b = 0.5$ 、 $\alpha = 0^\circ$)

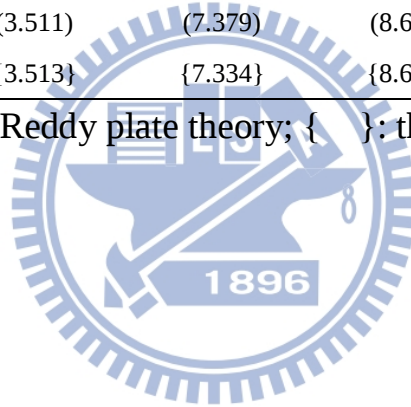
d/a	h/b	Mode				
		1	2	3	4	5
0.2	0.002	[5.961]	[14.89]	[14.93]	[23.84]	[29.62]
		(5.961)	(14.89)	(14.92)	(23.84)	(29.62)
		{5.961}	{14.88}	{14.93}	{23.84}	{29.62}
	0.05	[5.961]	[14.89]	[14.93]	[23.84]	[29.62]
		(5.900)	(14.54)	(14.55)	(22.91)	(28.29)
		{5.905}	{14.56}	{14.57}	{22.95}	{28.35}
	0.1	[5.961]	[14.89]	[14.93]	[23.84]	[29.62]
		(5.750)	(13.66)	(13.69)	(20.87)	(25.41)
		{5.758}	{13.72}	{13.74}	{20.99}	{25.57}
0.4	0.002	[5.810]	[14.46]	[14.60]	[21.57]	[27.91]
		(5.810)	(14.46)	(14.60)	(21.56)	(27.91)
		{5.810}	{14.47}	{14.60}	{21.57}	{27.91}
	0.05	[5.810]	[14.46]	[14.60]	[21.57]	[27.91]
		(5.725)	(13.90)	(14.23)	(20.48)	(26.49)
		{5.730}	{13.92}	{14.25}	{20.54}	{26.55}
	0.1	[5.810]	[14.46]	[14.60]	[21.57]	[27.91]
		(5.562)	(12.84)	(13.39)	(18.54)	(23.83)
		{5.572}	{12.90}	{13.43}	{18.66}	{23.97}

Note: []; classical thin plate theory; (): Mindlin plate theory; { }: the present solution

表 4.17 具不同邊緣裂縫簡支方形FGM板($\hat{n}=5$)之不同理論比較($c_y/b = 0.5$ 、 $\alpha = 0^\circ$)

h/b	d/a	Mode				
		1	2	3	4	5
0.1	0	(3.768) {3.772}	(8.909) {8.927}	(8.909) {8.927}	(12.64) {12.64}	(12.64) {12.64}
	0.1	(3.767) {3.771}	(8.889) {8.908}	(8.905) {8.924}	(12.48) {12.49}	(12.64) {12.64}
	0.2	(3.756) {3.759}	(8.851) {8.867}	(8.867) {8.885}	(12.04) {12.05}	(12.64) {12.64}
	0.3	(3.716) {3.719}	(8.738) {8.743}	(8.774) {8.791}	(11.44) {11.45}	(12.64) {12.64}
	0.4	(3.633) {3.636}	(8.336) {8.316}	(8.672) {8.687}	(10.88) {10.89}	(11.99) {11.97}
	0.5	(3.511) {3.513}	(7.379) {7.334}	(8.621) {8.635}	(10.49) {10.49}	(11.17) {11.18}

Note: (): Reddy plate theory; { }: the present solution



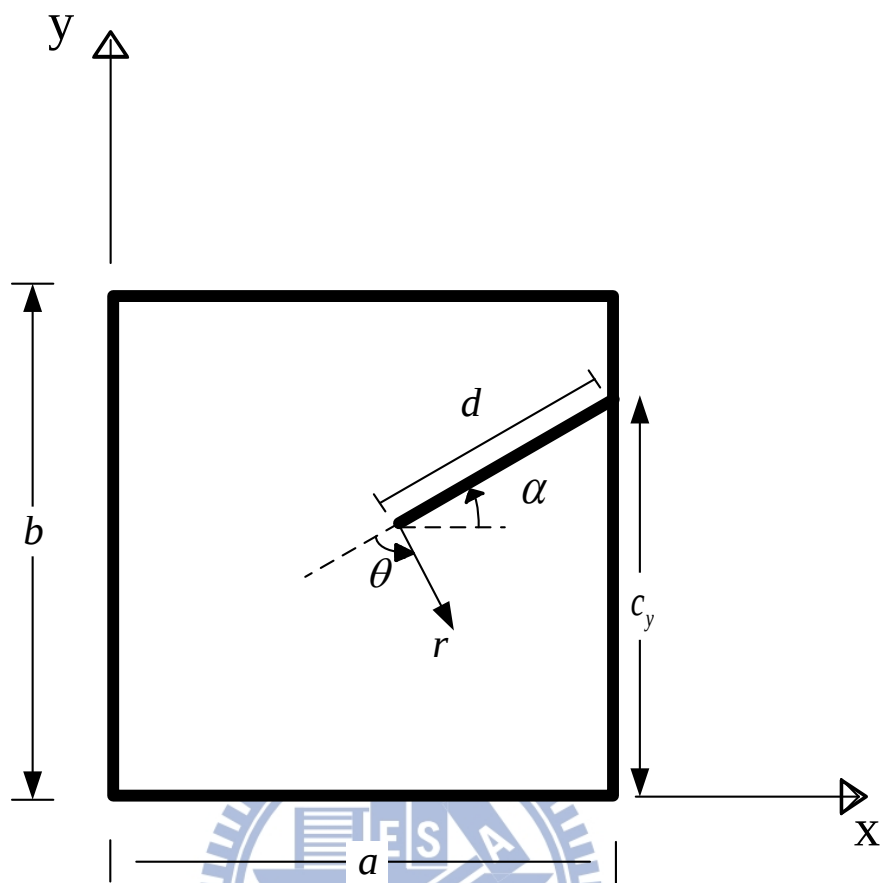


圖 2.1 具邊緣裂縫方形板示意圖（裂縫與 $x = a$ 軸相交）

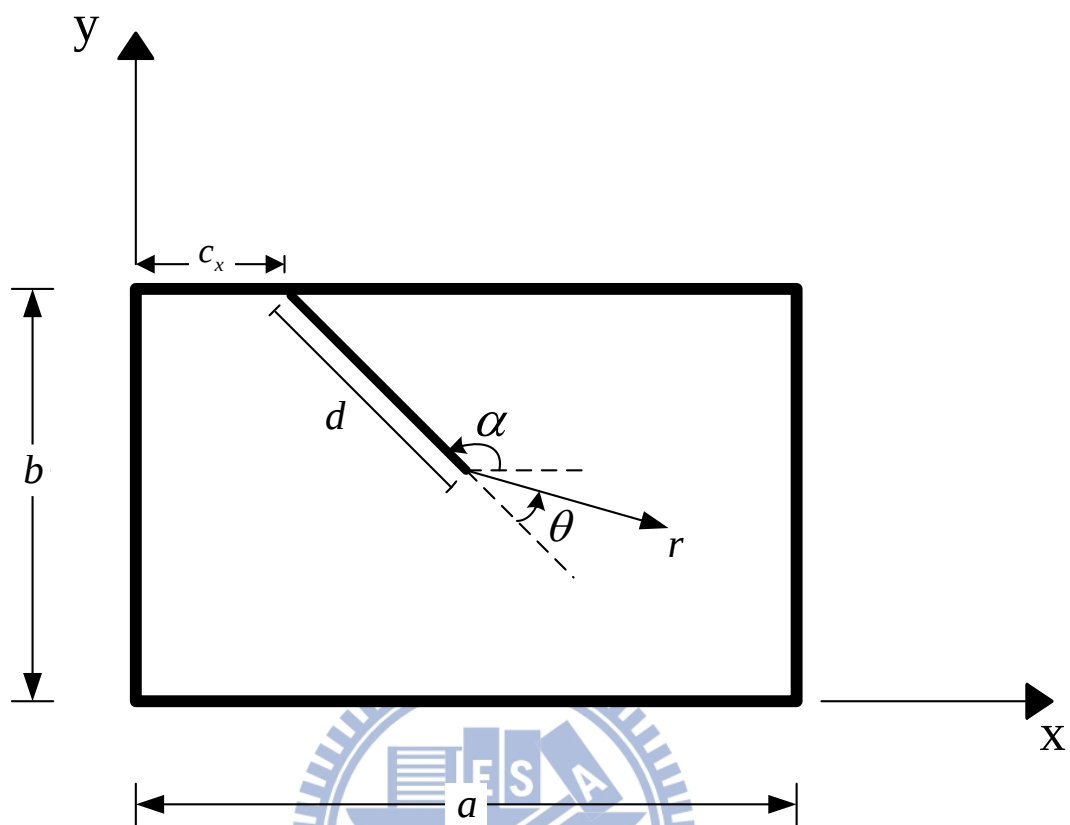


圖 2.2 具頂部裂縫矩形板示意圖（裂縫與 $y=b$ 軸相交）

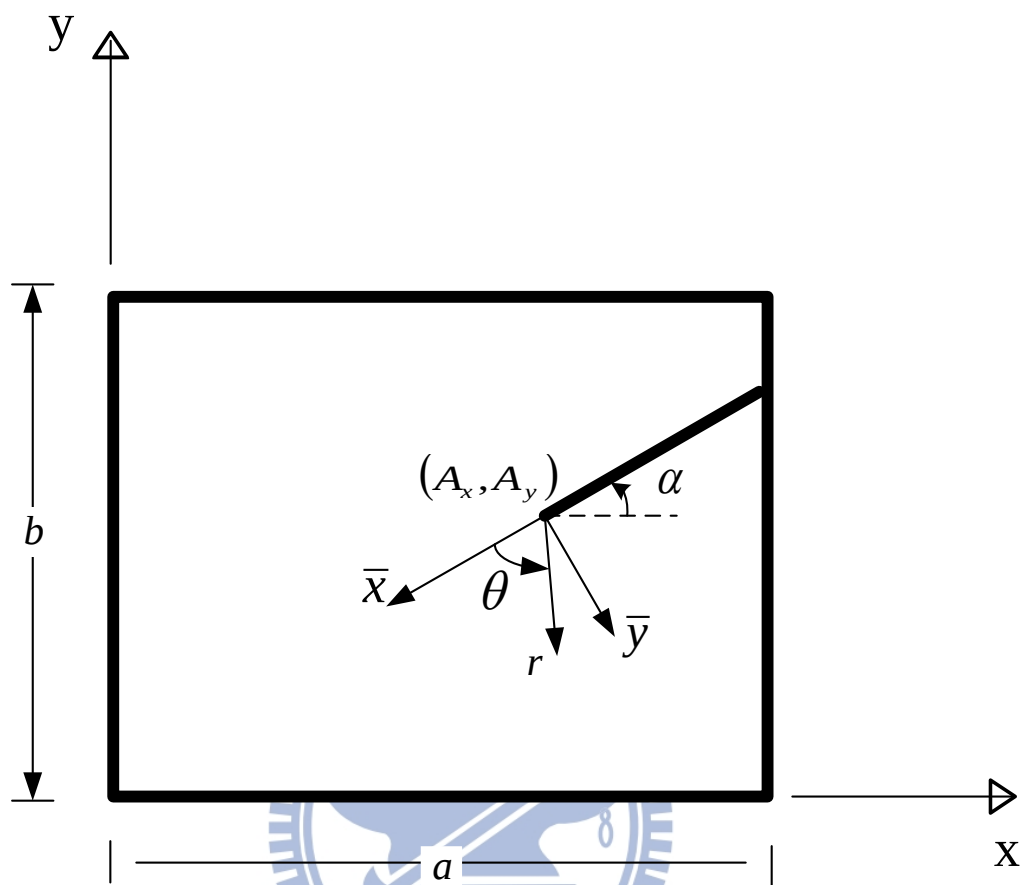


圖 2.3 座標轉換示意圖

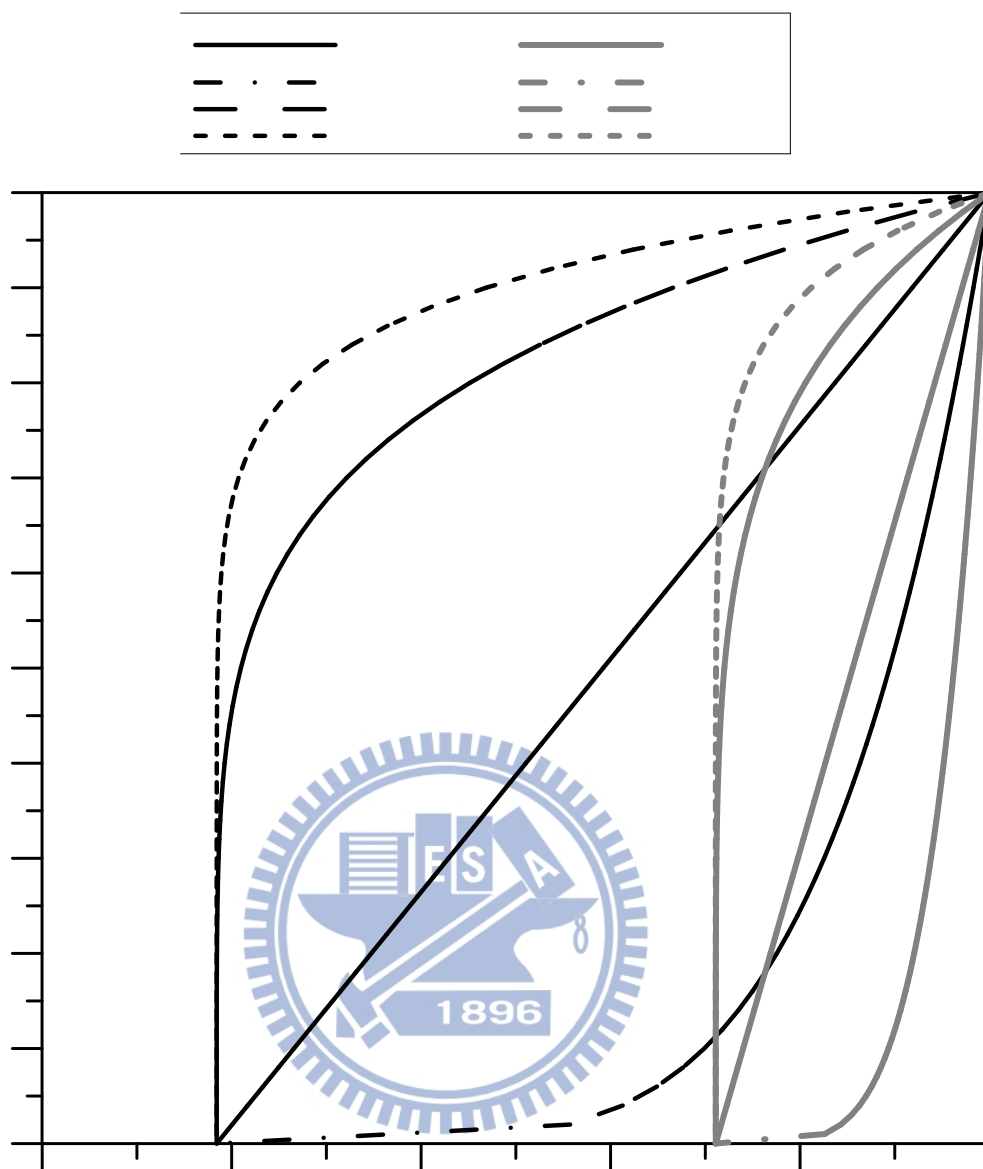


圖 4.1 Al/Al₂O₃功能梯度材料參數 $E(z)$ 和 $\rho(z)$ 沿厚度變化圖根據式(2.1)

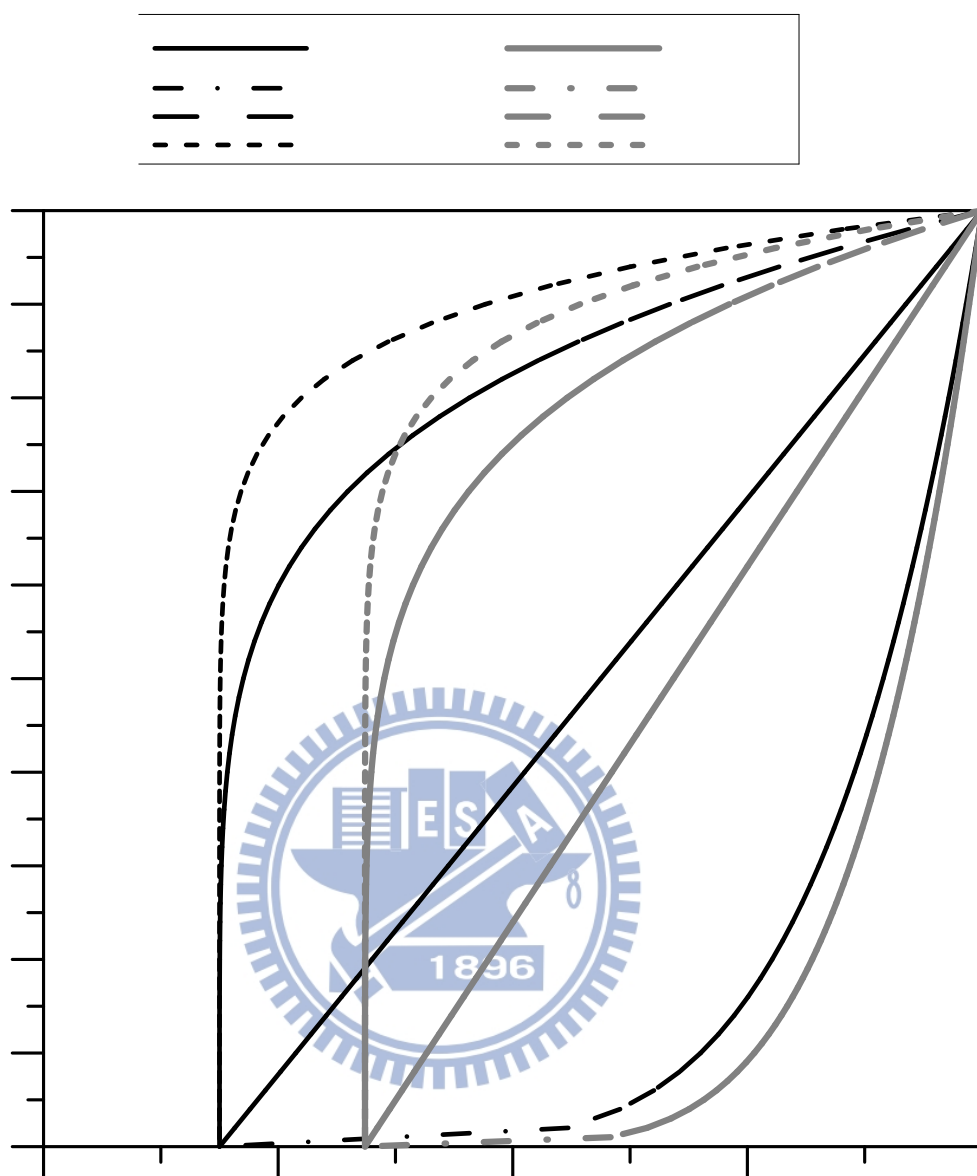


圖 4.2 Al/ZrO₂ 功能梯度材料參數 $E(z)$ 和 $\rho(z)$ 沿厚度變化圖根據式(2.1)

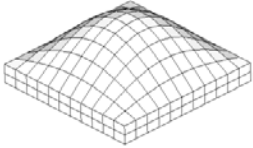
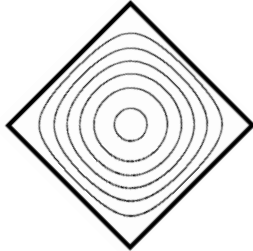
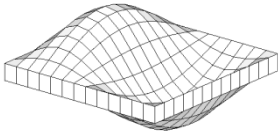
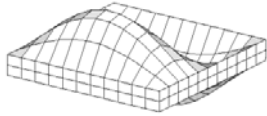
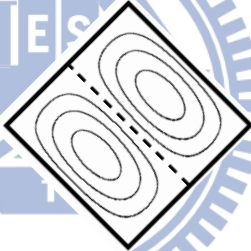
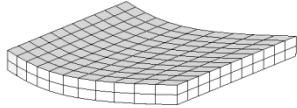
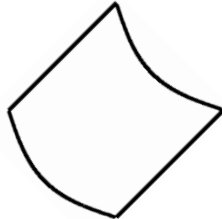
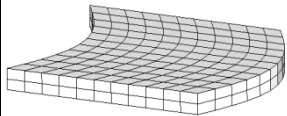
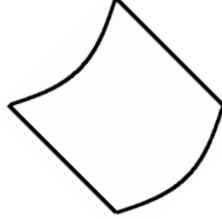
$\hat{n}$	d/b	Mode				
		1	2	3	4	5
0	0	 (5.777) 	 (13.81) 	 (13.81) 	 (19.48) 	 (19.48) 

圖 4.3 具不同水平邊緣裂縫簡支之方形均質厚板模態圖($h/b=0.1$)

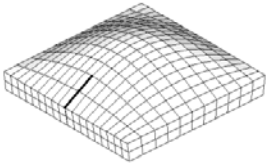
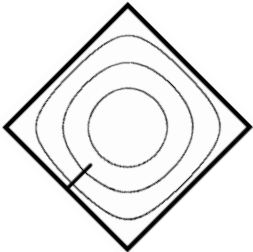
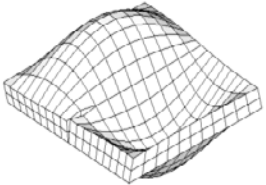
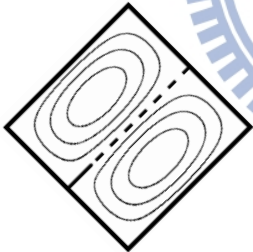
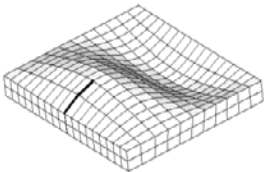
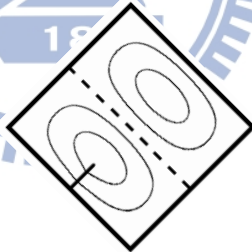
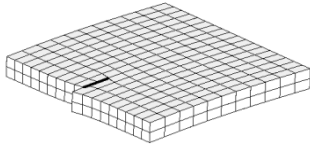
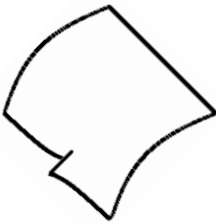
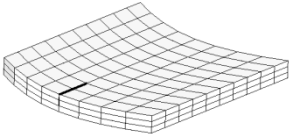
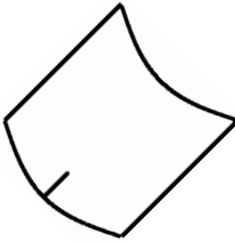
$\hat{n}$	d/b	Mode				
		1	2	3	4	5
0	0.2	 (5.758) 	 (13.72) 	 (13.74) 	 (18.57) 	 (19.48) 

圖 4.3 (續上頁)

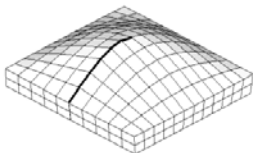
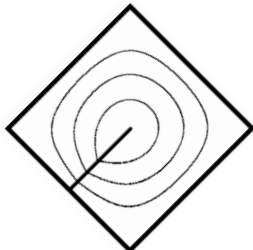
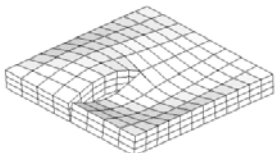
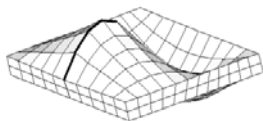
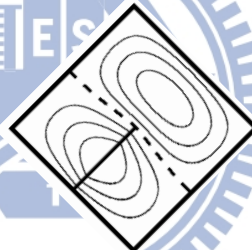
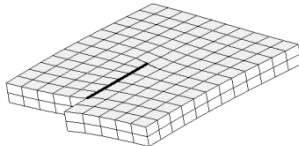
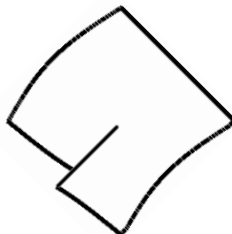
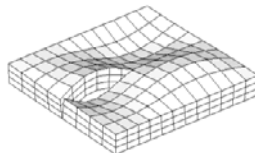
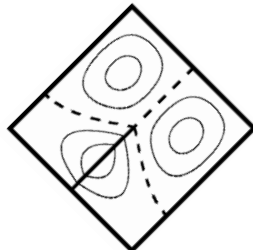
$\hat{n}$	d/b	Mode				
		1	2	3	4	5
0	0.5	 (5.385) 	 (11.40) 	 (13.35) 	 (16.19) 	 (17.35) 

圖 4.3 (續上頁)

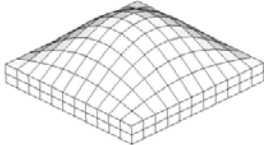
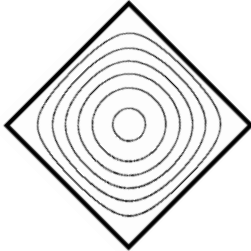
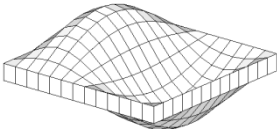
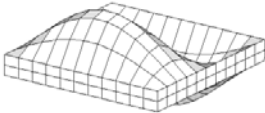
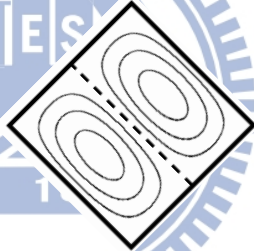
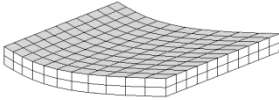
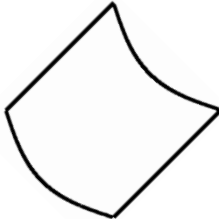
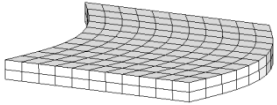
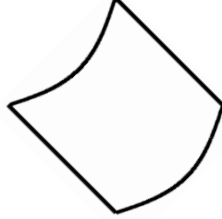
$\hat{n}$	d/b	Mode				
		1	2	3	4	5
5	0	 (3.772) 	 (8.927) 	 (8.927) 	 (12.64) 	 (12.64) 

圖 4.4 具不同水平邊緣裂縫簡支之 Al/Al₂O₃ 方形 FGM 厚板模態圖($\hat{n}=5, h/b=0.1$)

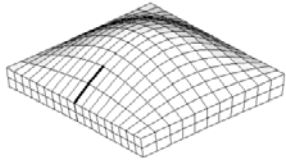
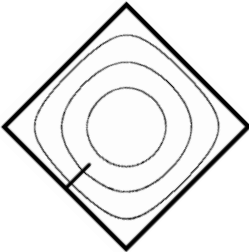
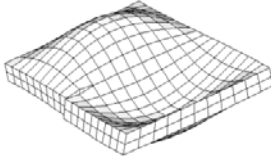
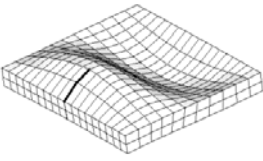
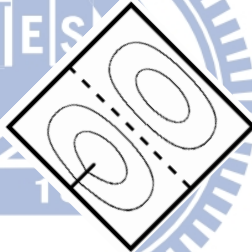
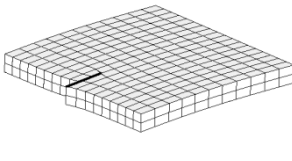
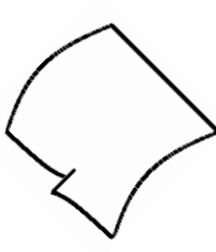
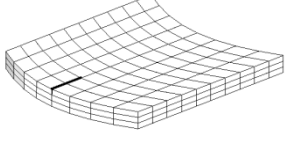
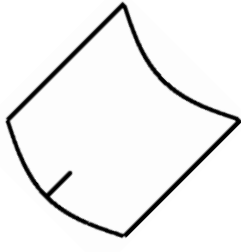
$\hat{n}$	d/b	Mode				
		1	2	3	4	5
5	0.2	 (3.759) 	 (8.867) 	 (8.885) 	 (12.05) 	 (12.64) 

圖 4.4 (續上頁)

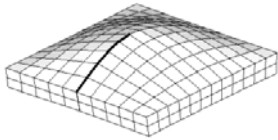
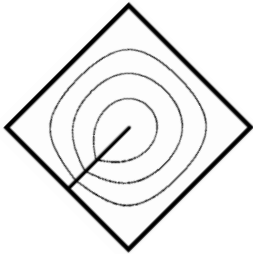
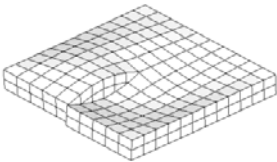
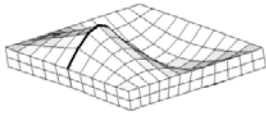
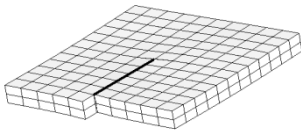
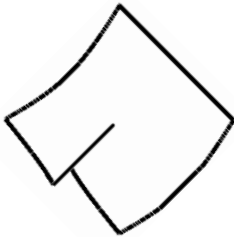
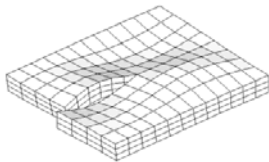
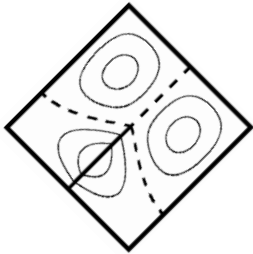
$\hat{n}$	d/b	Mode				
		1	2	3	4	5
5	0.5	 (3.513) 	 (7.334) 	 (8.635) 	 (10.49) 	 (11.18) 

圖 4.4 (續上頁)

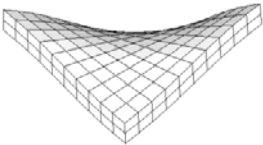
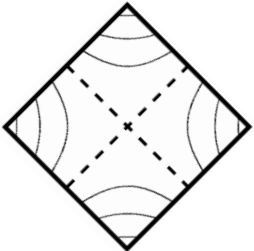
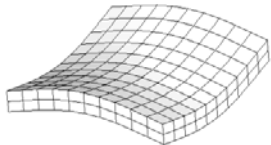
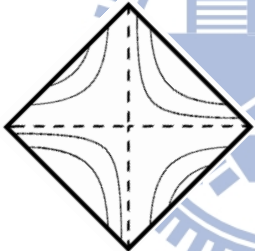
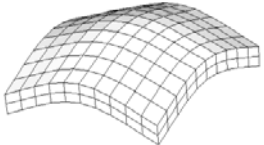
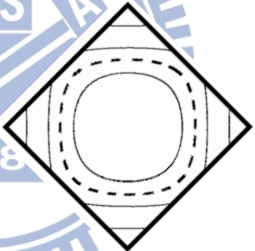
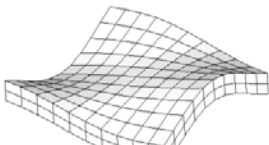
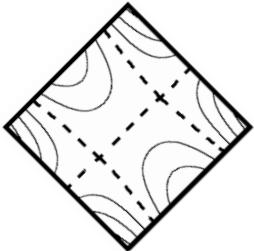
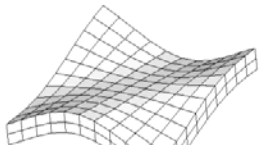
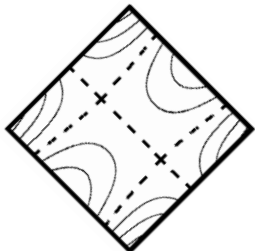
c_x / a	α	d / b	Mode				
			1	2	3	4	5
		0	 (2.512) 	 (3.746) 	 (4.608) 	 (6.270) 	 (6.270) 

圖 4.5 具不同邊緣裂縫四邊自由端之 Al/Al₂O₃ 方形 FGM 厚板模態圖($\hat{n}=5, h/b=0.1$)

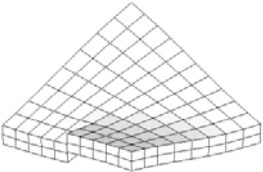
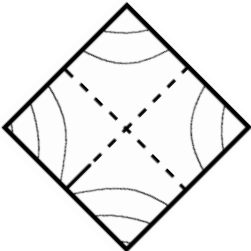
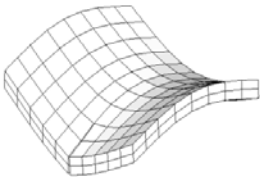
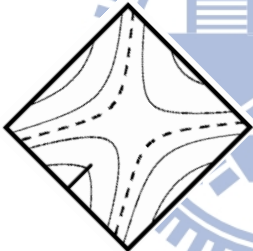
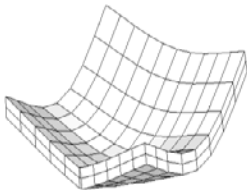
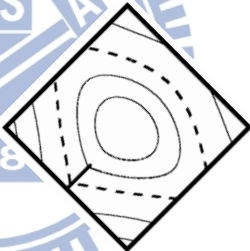
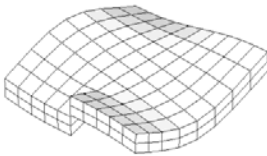
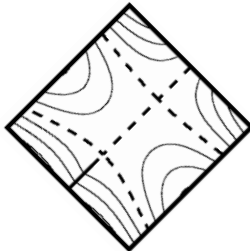
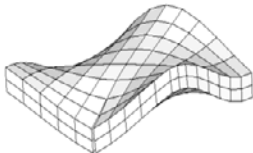
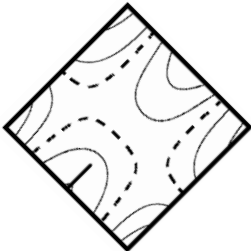
c_x / a	α	d / b	Mode				
			1	2	3	4	5
0.5	0°	0.2	 (2.369) 	 (3.536) 	 (4.431) 	 (5.760) 	 (5.918) 

圖 4.5 (續上頁)

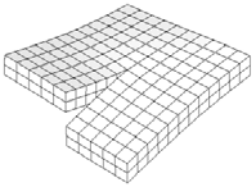
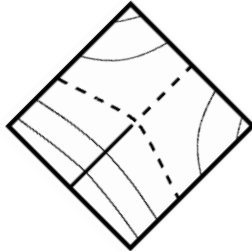
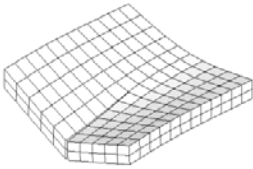
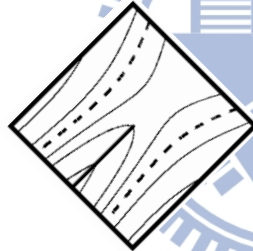
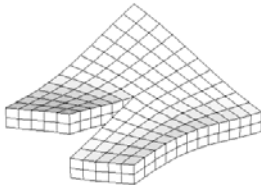
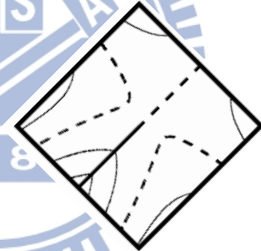
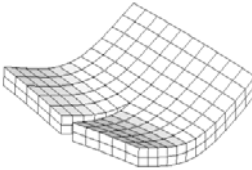
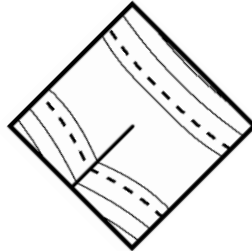
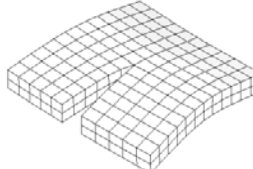
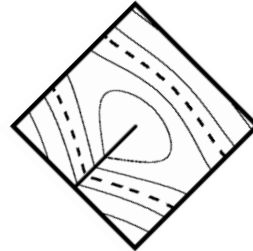
c_x / a	α	d / b	Mode				
			1	2	3	4	5
0.5	0°	0.5	 (1.525) 	 (2.666) 	 (4.085) 	 (4.149) 	 (4.212) 

圖 4.5 (續上頁)

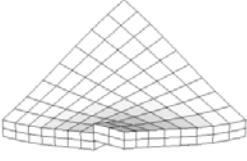
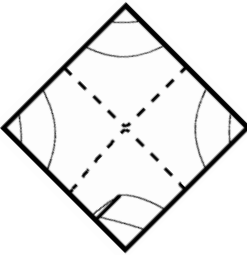
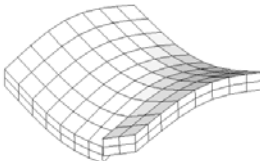
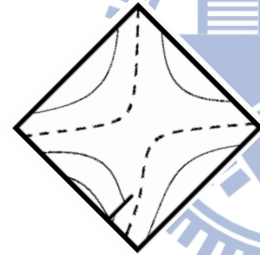
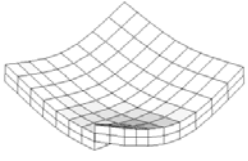
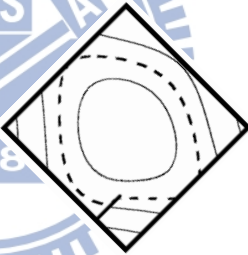
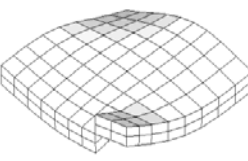
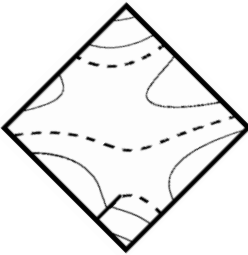
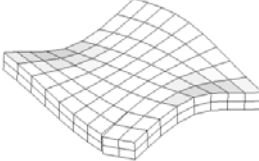
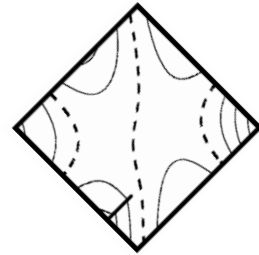
c_x / a	α	d / b	Mode				
			1	2	3	4	5
0.75	0°	0.2	 (2.420) 	 (3.639) 	 (4.488) 	 (5.642) 	 (6.149) 

圖 4.5 (續上頁)

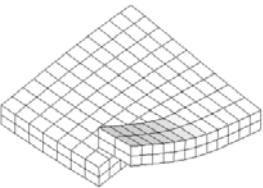
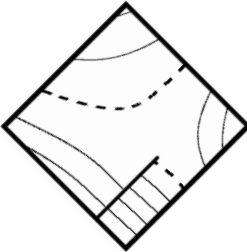
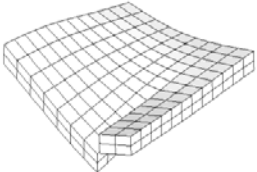
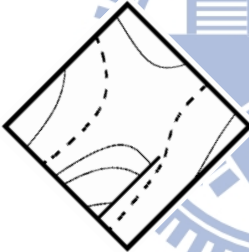
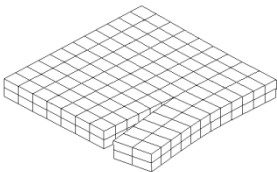
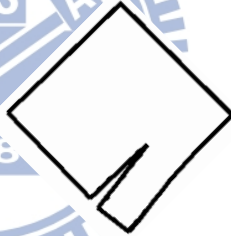
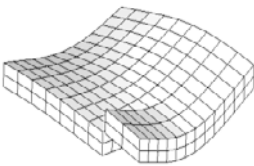
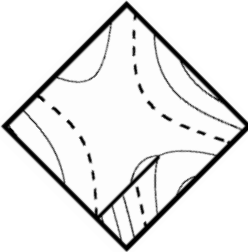
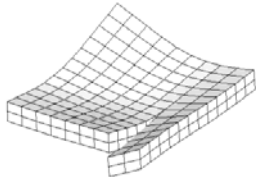
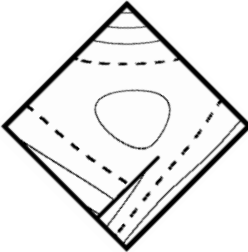
c_x / a	α	d / b	Mode				
			1	2	3	4	5
0.75	0°	0.5	 (1.593) 	 (2.769) 	 (3.655) 	 (3.987) 	 (4.622) 

圖 4.5 (續上頁)

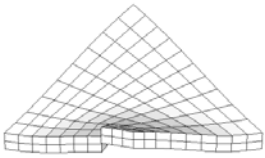
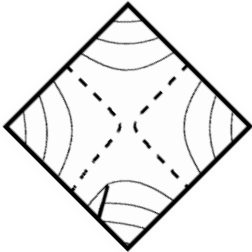
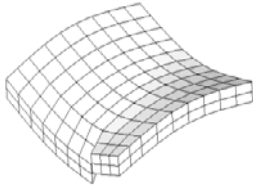
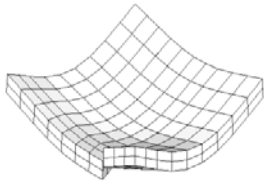
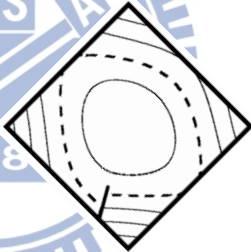
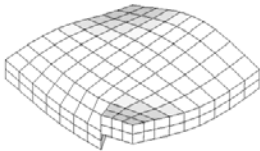
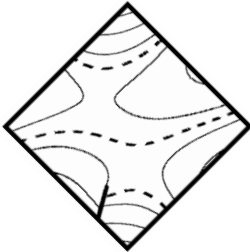
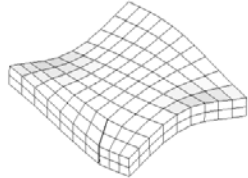
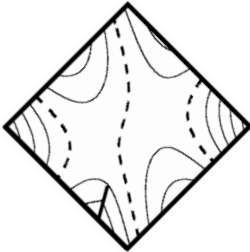
c_x / a	α	d / b	Mode				
			1	2	3	4	5
0.75	30°	0.2	 (2.428) 	 (3.603) 	 (4.506) 	 (5.758) 	 (6.112) 

圖 4.5 (續上頁)

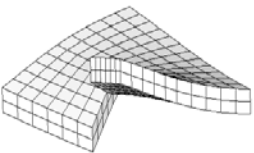
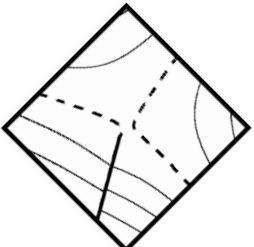
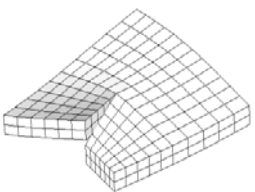
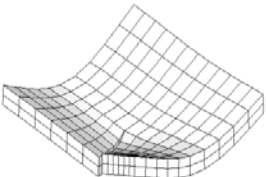
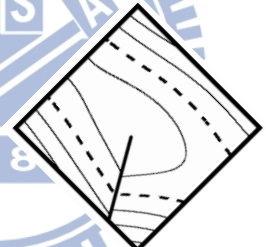
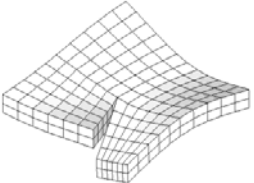
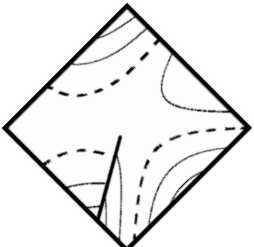
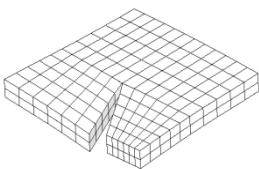
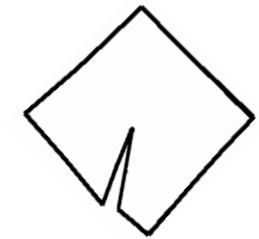
c_x / a	α	d / b	Mode				
			1	2	3	4	5
0.75	30°	0.5	 (1.722) 	 (2.471) 	 (4.169) 	 (4.497) 	 (4.986) 

圖 4.5 (續上頁)

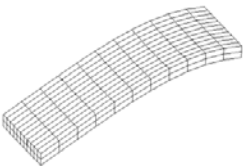
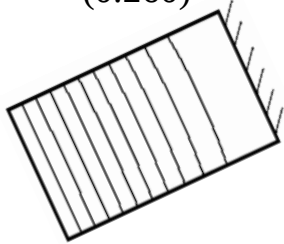
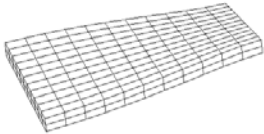
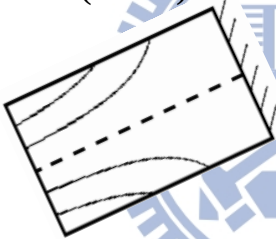
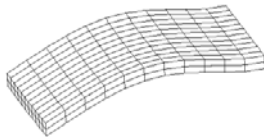
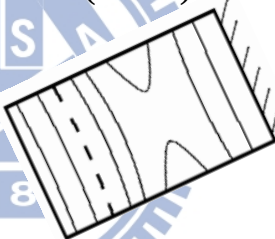
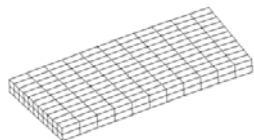
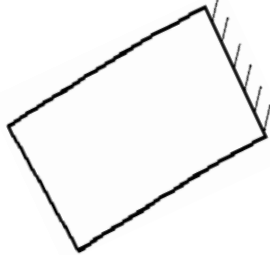
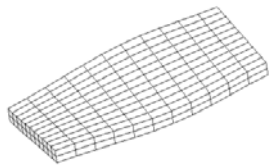
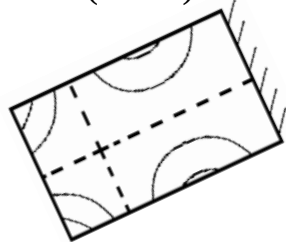
α	c_x / a	d / b	Mode				
			1	2	3	4	5
90°	0.25	0	 (0.260) 	 (1.076) 	 (1.601) 	 (2.179) 	 (3.471) 

圖 4.6 具不同邊緣裂縫懸臂之矩形均質厚板模態圖($a/b=2, h/b=0.1$)

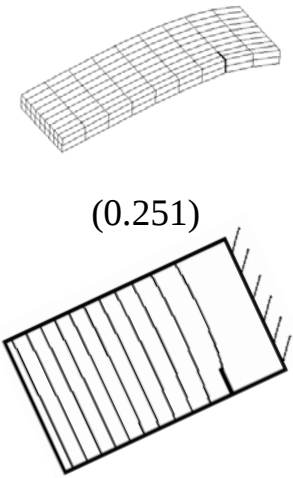
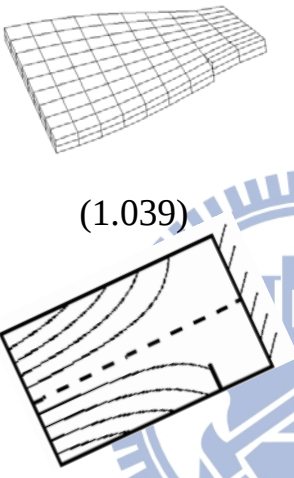
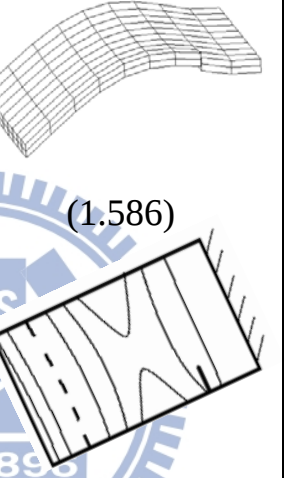
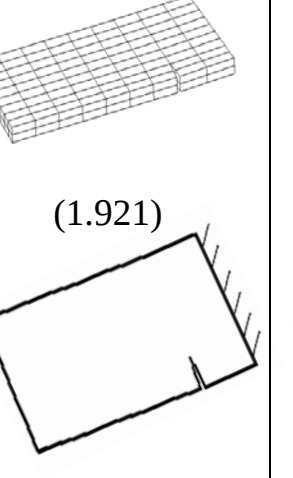
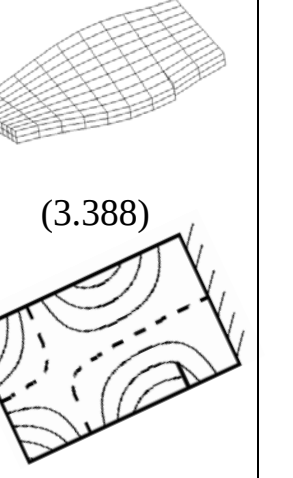
α	c_x / a	d / b	Mode				
			1	2	3	4	5
90°	0.25	0.2	 (0.251)	 (1.039)	 (1.586)	 (1.921)	 (3.388)

圖 4.6 (續上頁)

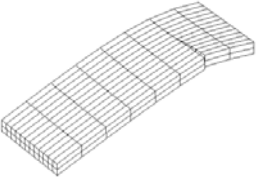
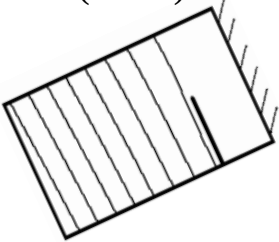
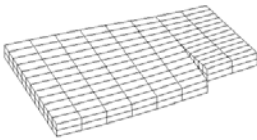
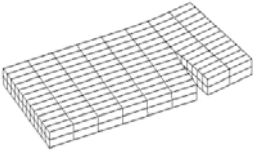
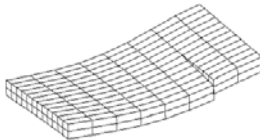
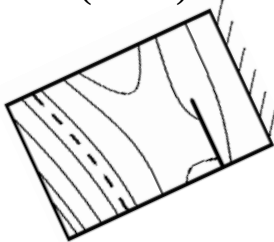
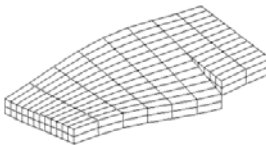
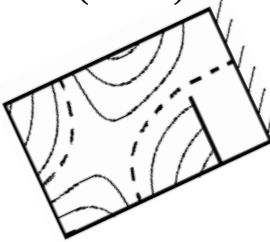
α	c_x / a	d / b	Mode				
			1	2	3	4	5
90°	0.25	0.5	  (0.219)	  (0.842)	  (1.153)	  (1.490)	  (3.028)

圖 4.6 (續上頁)

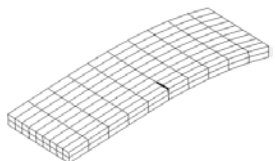
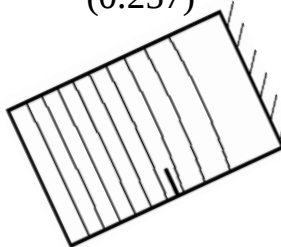
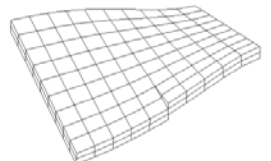
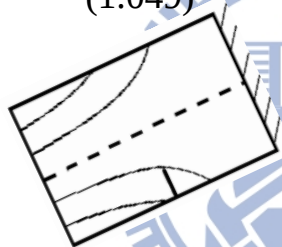
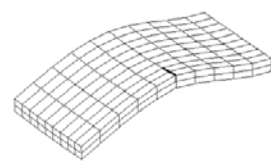
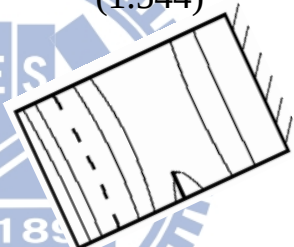
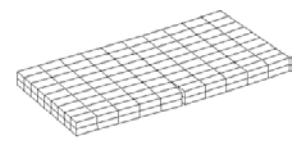
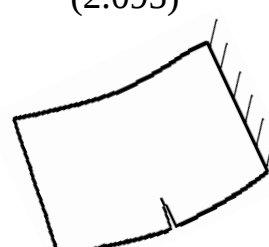
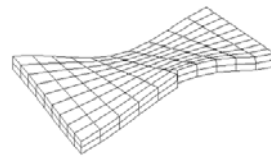
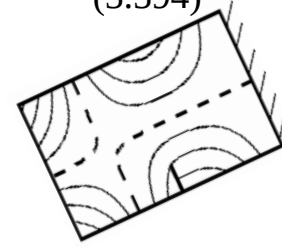
α	c_x / a	d / b	Mode				
			1	2	3	4	5
90°	0.5	0.2	 (0.257) 	 (1.049) 	 (1.544) 	 (2.095) 	 (3.394) 

圖 4.6 (續上頁)

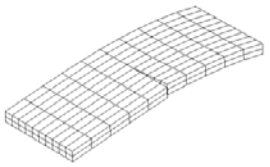
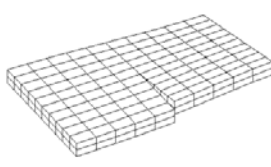
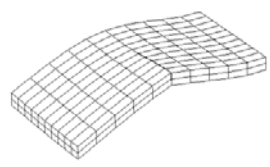
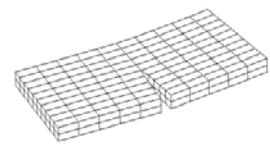
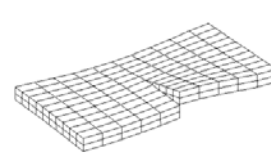
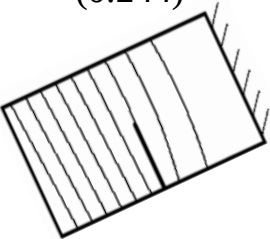
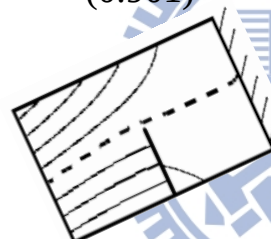
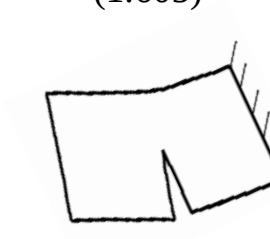
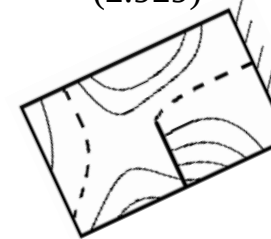
α	c_x / a	d / b	Mode				
			1	2	3	4	5
90°	0.5	0.5	 (0.244)	 (0.901)	 (1.351)	 (1.605)	 (2.929)
							

圖 4.6 (續上頁)

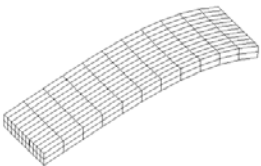
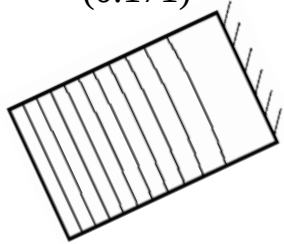
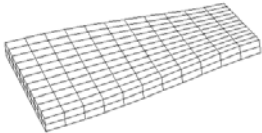
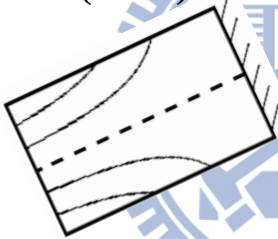
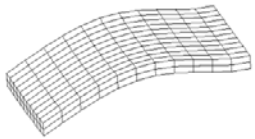
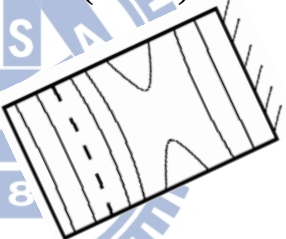
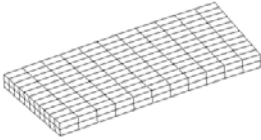
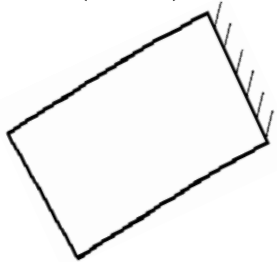
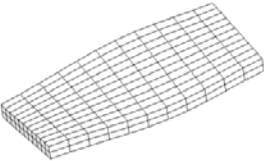
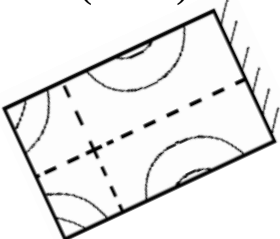
α	c_x / a	d / b	Mode				
			1	2	3	4	5
90°	0.25	0	  (0.171)	  (0.703)	  (1.050)	  (1.417)	  (2.264)

圖 4.7 具不同邊緣裂縫懸臂之 Al/Al₂O₃ 矩形 FGM 厚板模態圖($\hat{n}=5$) ($a/b=2$, $h/b=0.1$)

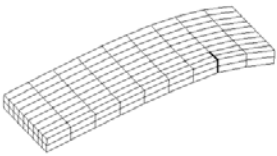
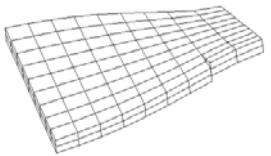
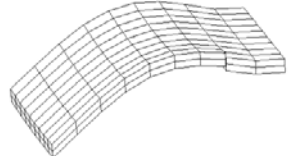
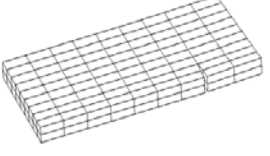
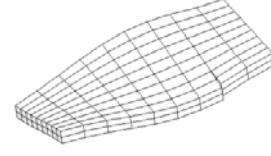
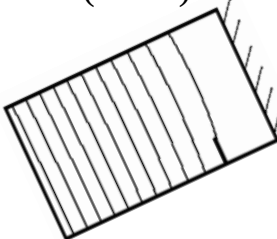
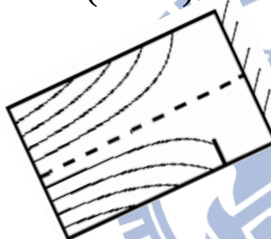
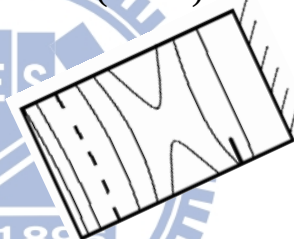
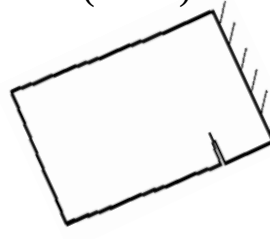
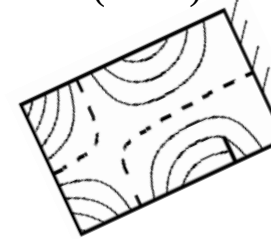
α	c_x / a	d / b	Mode				
			1	2	3	4	5
90°	0.25	0.2	 (0.165)	 (0.679)	 (1.040)	 (1.249)	 (2.210)
							

圖 4.7 (續上頁)

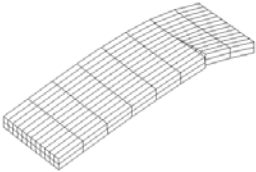
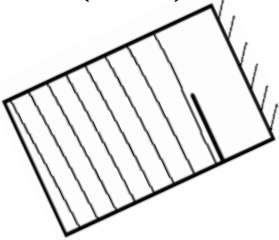
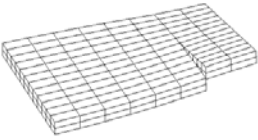
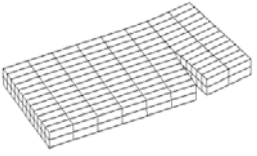
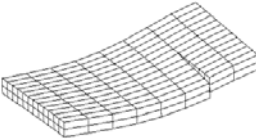
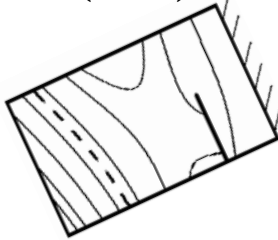
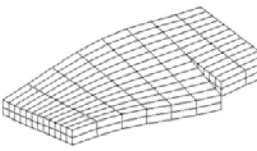
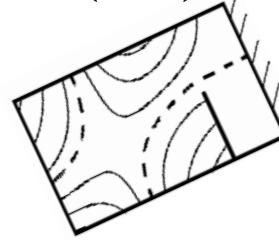
α	c_x / a	d / b	Mode				
			1	2	3	4	5
90°	0.25	0.5	 (0.144) 	 (0.550) 	 (0.750) 	 (0.975) 	 (1.977) 

圖 4.7(續上頁)

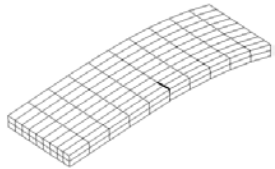
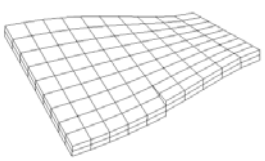
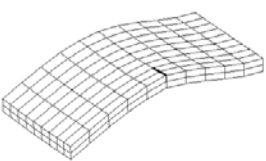
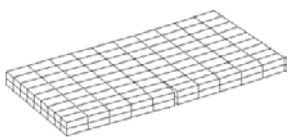
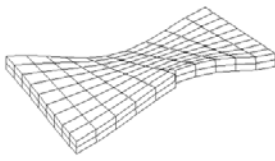
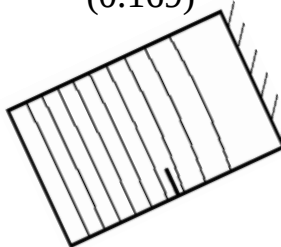
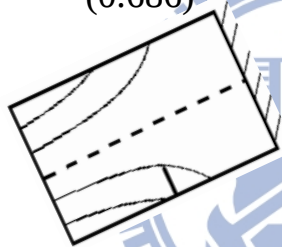
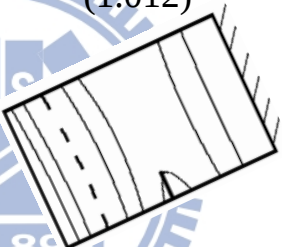
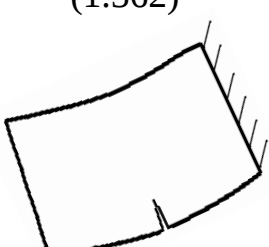
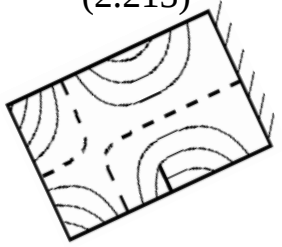
α	c_x / a	d / b	Mode				
			1	2	3	4	5
90°	0.5	0.2	 (0.169)	 (0.686)	 (1.012)	 (1.362)	 (2.213)
							

圖 4.7 (續上頁)

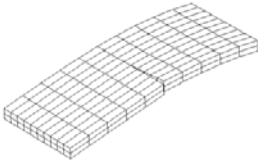
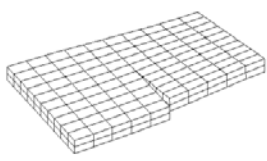
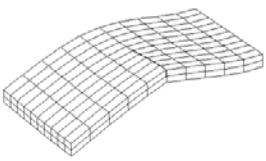
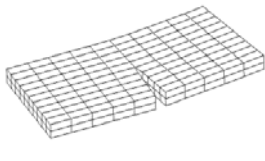
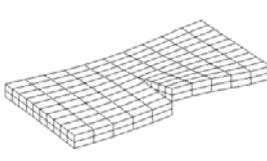
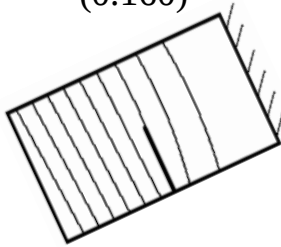
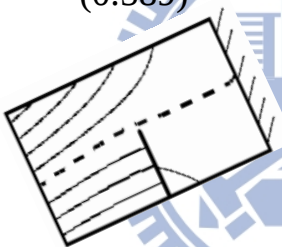
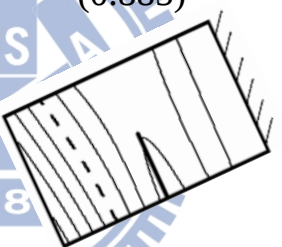
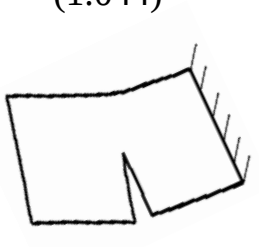
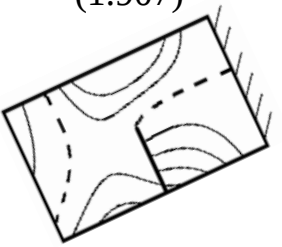
α	c_x / a	d / b	Mode				
			1	2	3	4	5
90°	0.5	0.5	 (0.160)	 (0.589)	 (0.885)	 (1.044)	 (1.907)
							

圖 4.7 (續上頁)

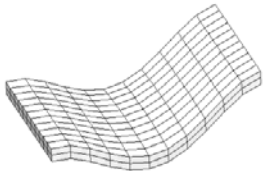
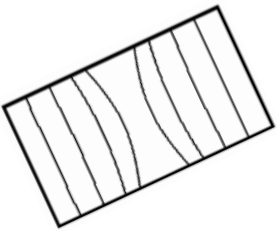
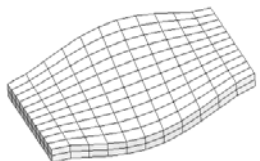
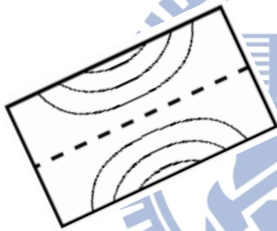
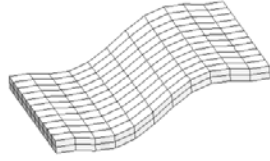
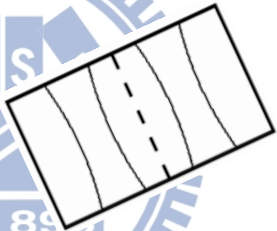
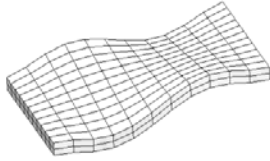
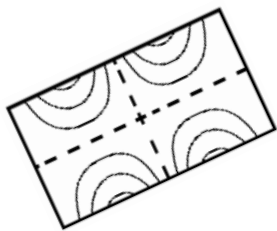
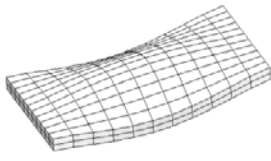
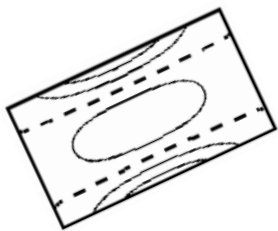
α	c_x / a	d / b	Mode				
			1	2	3	4	5
90°	0.25	0	 (1.643) 	 (2.594) 	 (4.429) 	 (5.852) 	 (7.791) 

圖 4.8 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之矩形均質厚板模態圖($a/b=2$, $h/b=0.1$)

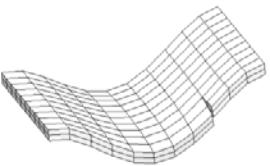
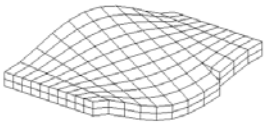
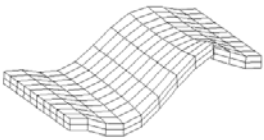
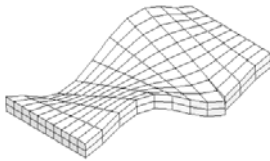
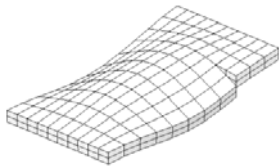
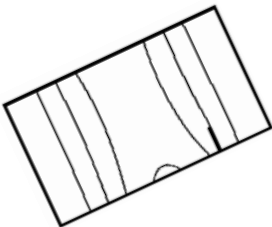
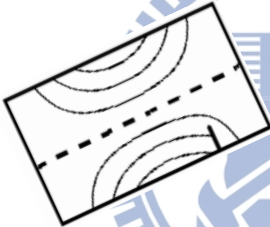
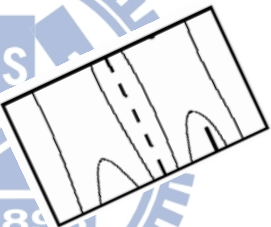
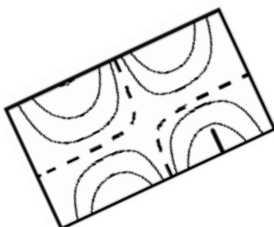
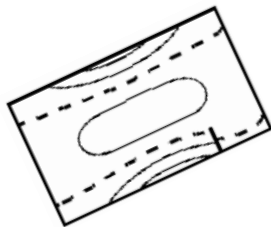
α	c_x / a	d / b	Mode				
			1	2	3	4	5
90°	0.25	0.2	 (1.628)	 (2.520)	 (4.303)	 (5.705)	 (7.689)
							

圖 4.8 (續上頁)

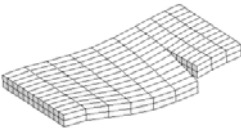
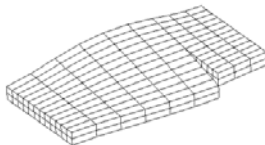
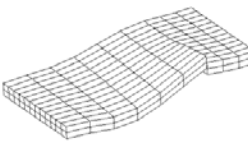
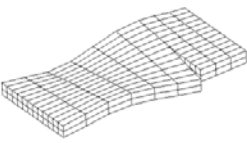
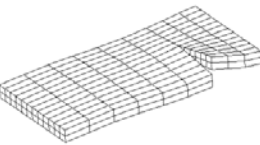
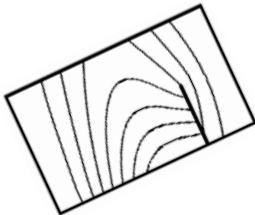
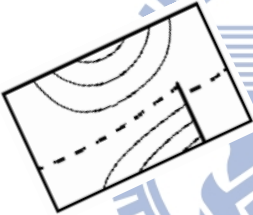
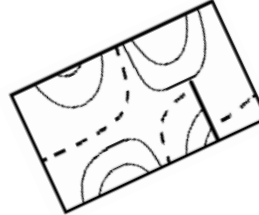
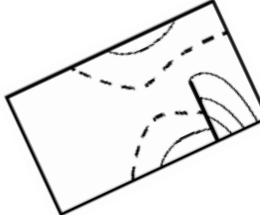
α	c_x / a	d / b	Mode				
			1	2	3	4	5
90°	0.25	0.5	 (1.479)	 (2.228)	 (3.876)	 (5.511)	 (6.024)
							

圖 4.8 (續上頁)

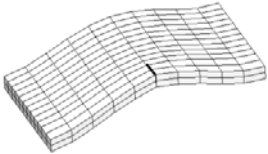
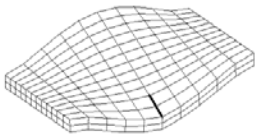
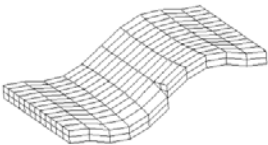
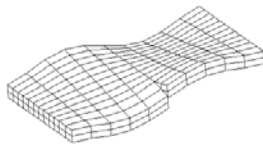
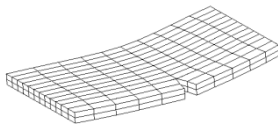
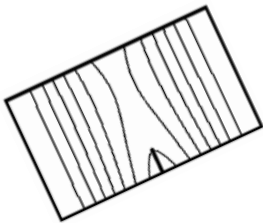
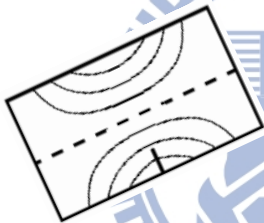
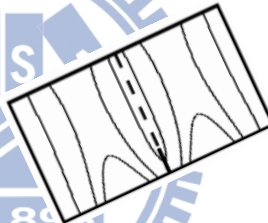
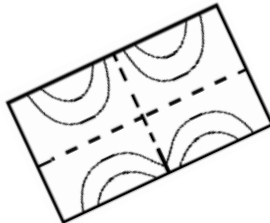
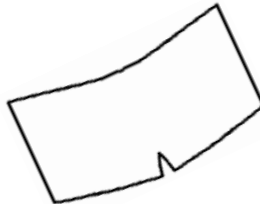
α	c_x / a	d / b	Mode				
			1	2	3	4	5
90°	0.5	0.2	 (1.598)	 (2.560)	 (4.355)	 (5.592)	 (7.654)
							

圖 4.8 (續上頁)

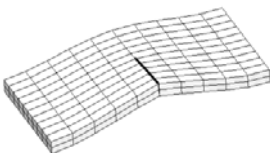
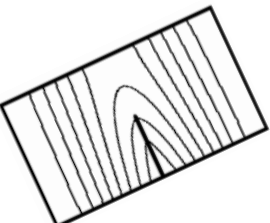
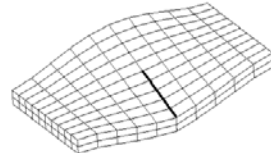
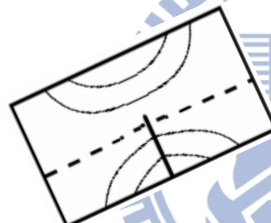
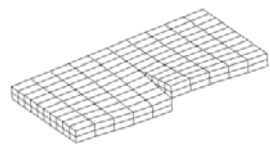
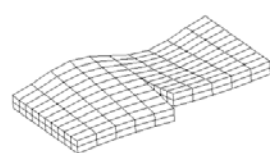
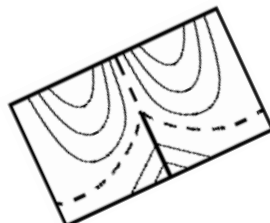
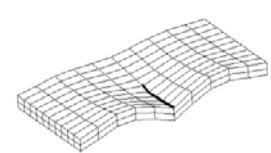
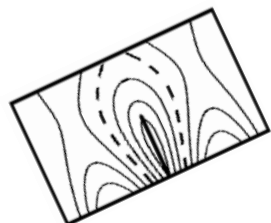
α	c_x / a	d / b	Mode				
			1	2	3	4	5
90°	0.5	0.5	 (1.453) 	 (2.521) 	 (3.197) 	 (4.915) 	 (7.206) 

圖 4.8 (續上頁)

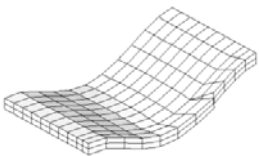
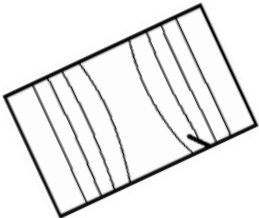
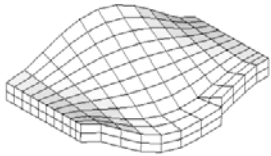
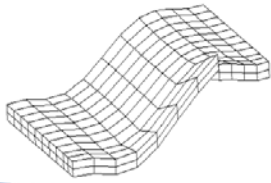
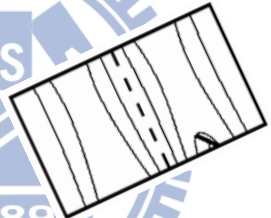
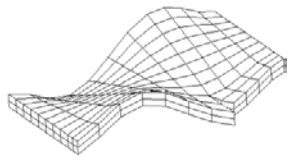
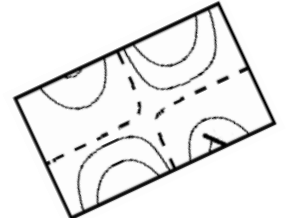
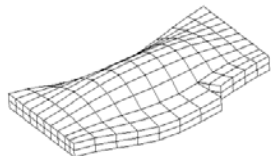
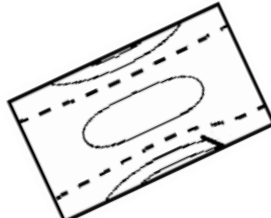
α	c_x / a	d / b	Mode				
			1	2	3	4	5
135°	0.25	0.2	 (1.629) 	 (2.553) 	 (4.334) 	 (5.737) 	 (7.703) 

圖 4.8 (續上頁)

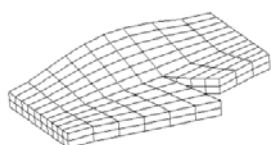
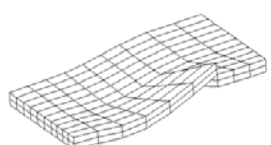
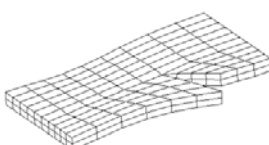
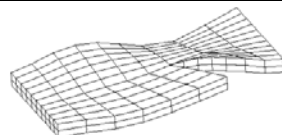
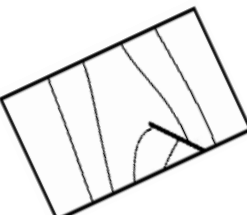
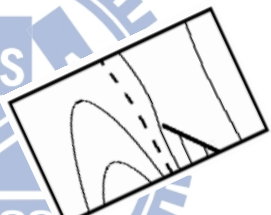
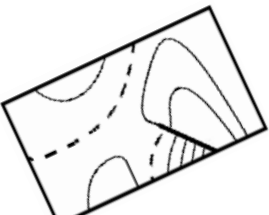
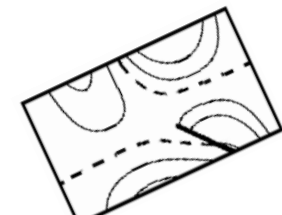
α	c_x / a	d / b	Mode				
			1	2	3	4	5
135°	0.25	0.5	 (1.483)	 (2.333)	 (4.013)	 (5.177)	 (5.565)
							

圖 4.8 (續上頁)

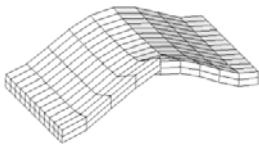
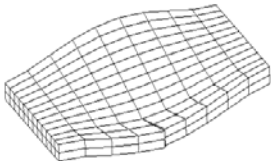
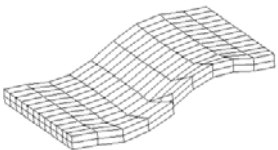
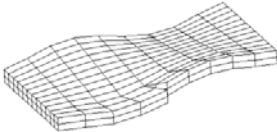
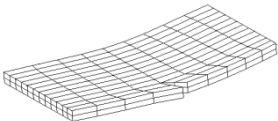
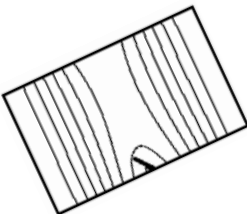
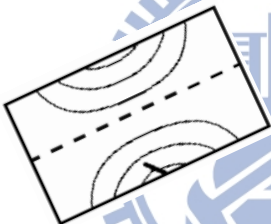
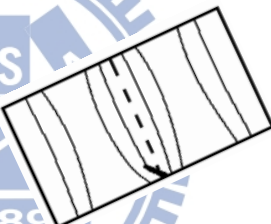
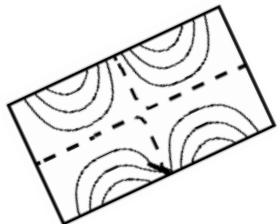
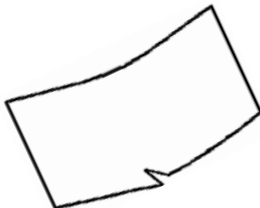
α	c_x / a	d / b	Mode				
			1	2	3	4	5
135°	0.5	0.2	 (1.616)	 (2.568)	 (4.377)	 (5.703)	 (7.770)
							

圖 4.8 (續上頁)

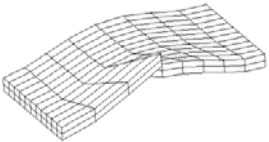
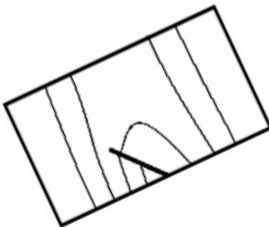
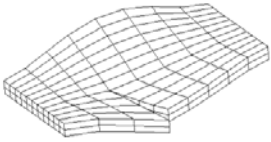
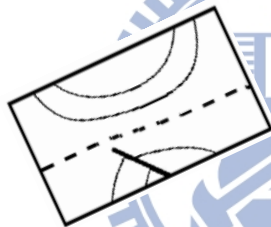
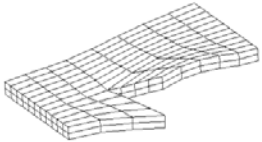
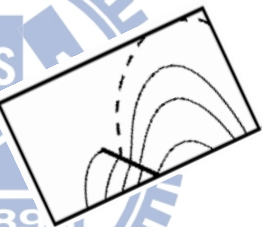
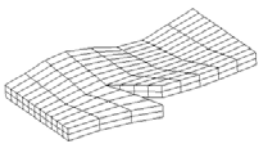
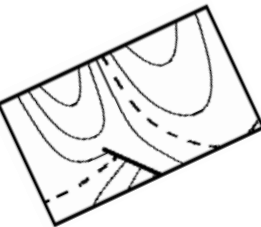
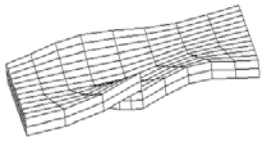
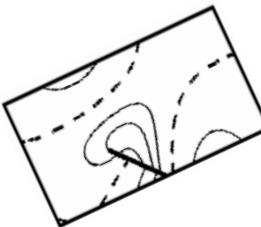
α	c_x / a	d / b	Mode				
			1	2	3	4	5
135°	0.5	0.5	 (1.551) 	 (2.475) 	 (3.378) 	 (4.897) 	 (6.960) 

圖 4.8 (續上頁)

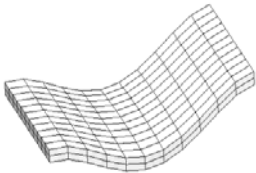
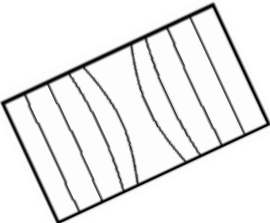
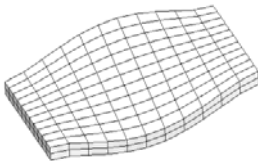
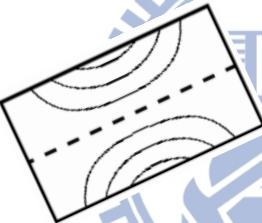
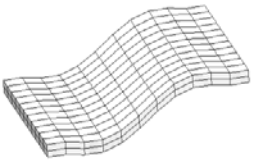
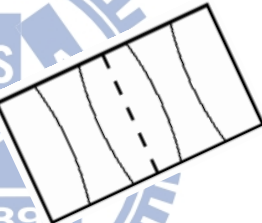
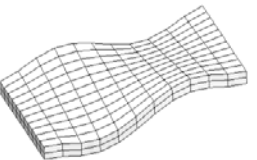
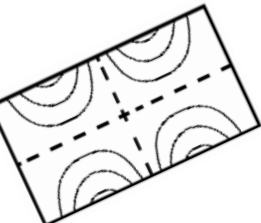
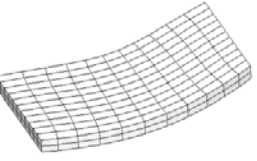
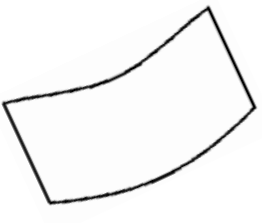
α	c_x/a	d/b	Mode				
			1	2	3	4	5
90°	0.25	0	 (1.539) 	 (2.423) 	 (4.315) 	 (5.450) 	 (7.169) 

圖 4.9 具不同邊緣裂縫兩端固定端，兩端自由端之 Al/ ZrO₂ 矩形 FGM 厚板模態圖($\hat{n}=5$) ($a/b=2$, $h/b=0.1$)

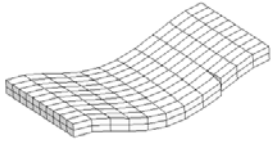
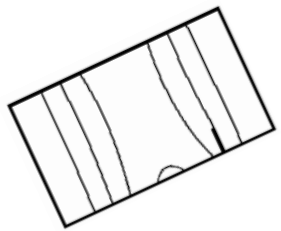
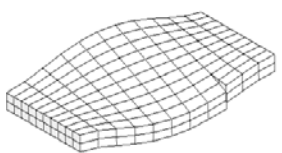
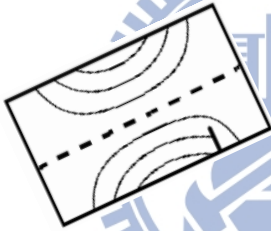
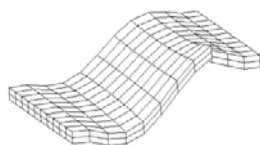
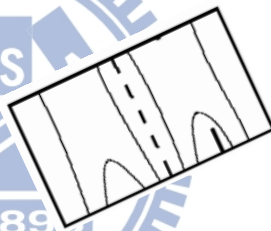
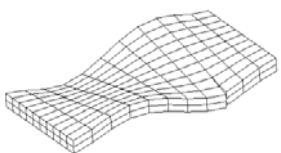
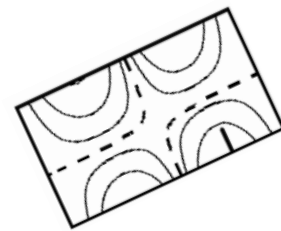
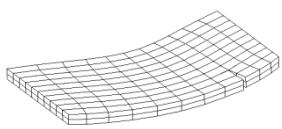
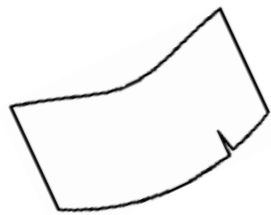
α	c_x/a	d/b	Mode				
			1	2	3	4	5
90°	0.25	0.2	 (1.525) 	 (2.353) 	 (4.016) 	 (5.314) 	 (7.139) 

圖 4.9 (續上頁)

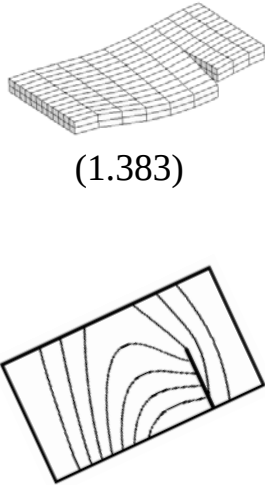
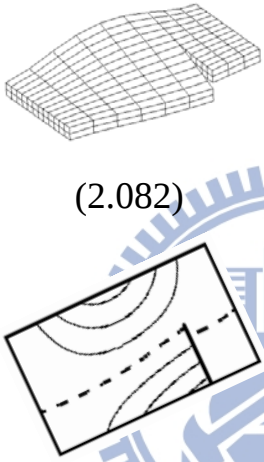
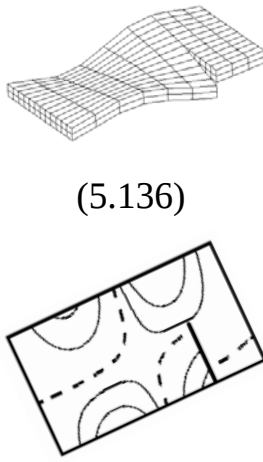
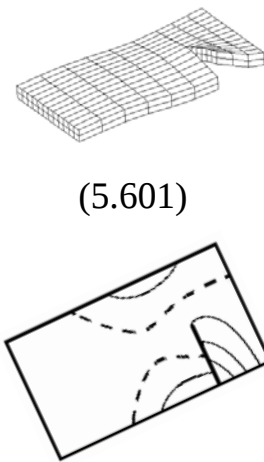
α	c_x/a	d/b	Mode				
			1	2	3	4	5
90°	0.25	0.5	 (1.383)	 (2.082)	 (3.618)	 (5.136)	 (5.601)

圖 4.9 (續上頁)

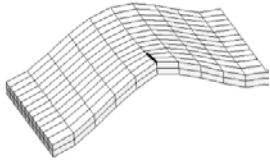
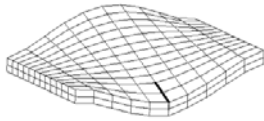
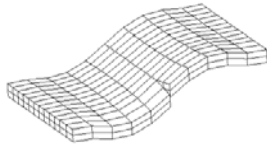
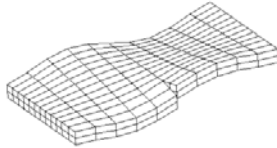
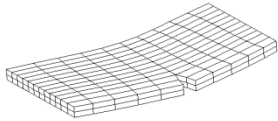
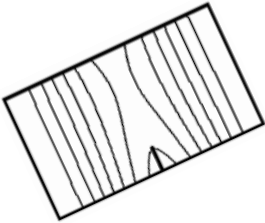
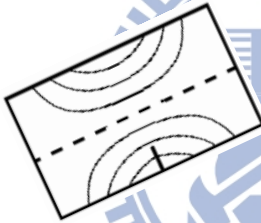
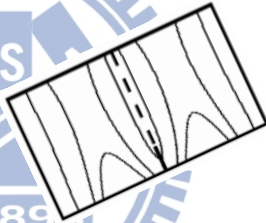
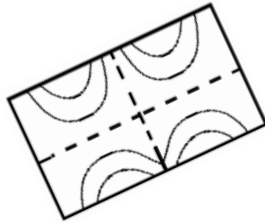
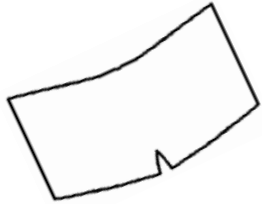
α	c_x/a	d/b	Mode				
			1	2	3	4	5
90°	0.5	0.2	 (1.497)	 (2.391)	 (4.064)	 (5.207)	 (6.914)
							

圖 4.9 (續上頁)

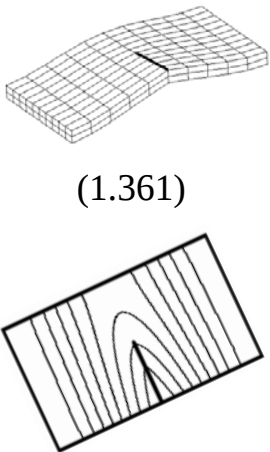
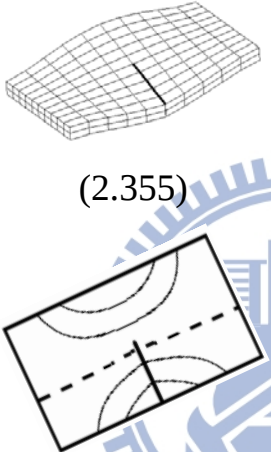
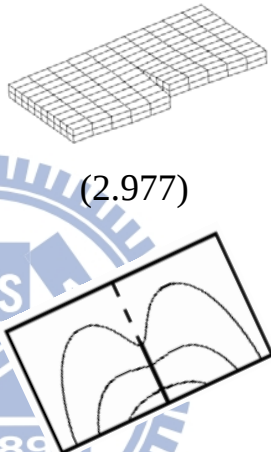
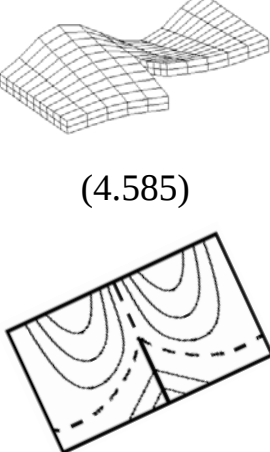
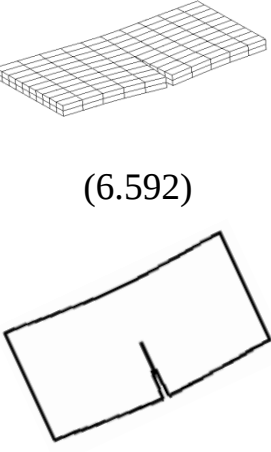
α	c_x/a	d/b	Mode				
			1	2	3	4	5
90°	0.5	0.5	 (1.361)	 (2.355)	 (2.977)	 (4.585)	 (6.592)

圖 4.9 (續上頁)

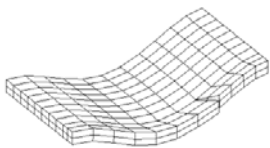
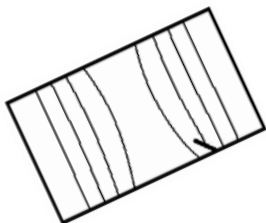
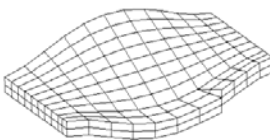
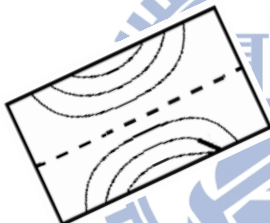
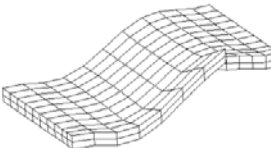
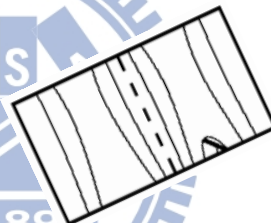
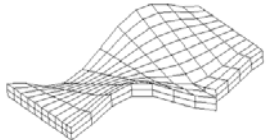
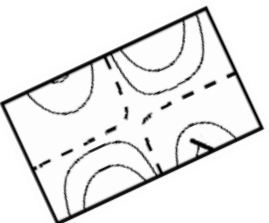
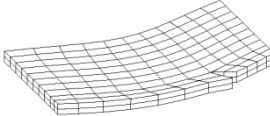
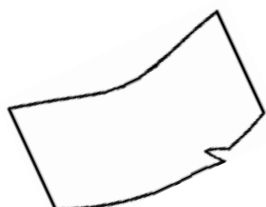
α	c_x / a	d / b	Mode				
			1	2	3	4	5
135°	0.25	0.2	 (1.526) 	 (2.384) 	 (4.046) 	 (5.344) 	 (7.105) 

圖 4.9 (續上頁)

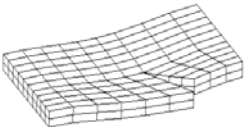
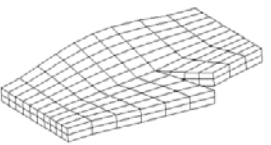
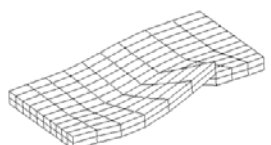
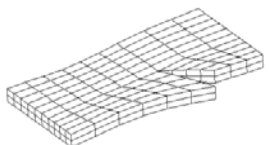
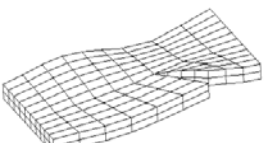
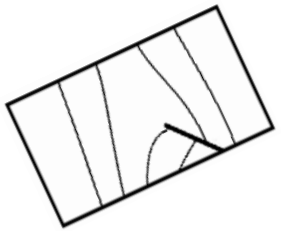
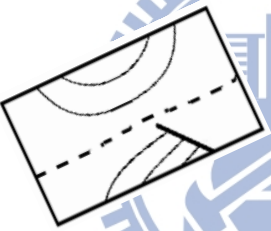
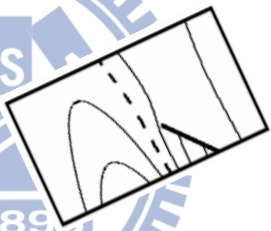
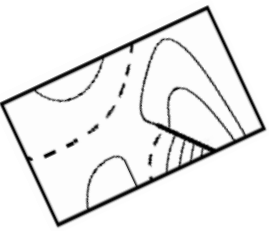
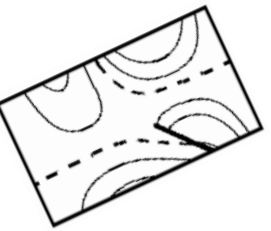
α	c_x / a	d / b	Mode				
			1	2	3	4	5
135°	0.25	0.5	 (1.388)	 (2.179)	 (3.748)	 (4.817)	 (5.181)
							

圖 4.9 (續上頁)

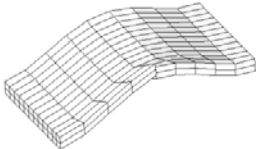
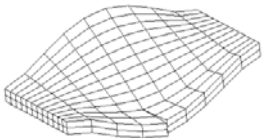
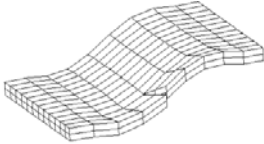
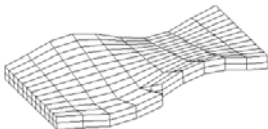
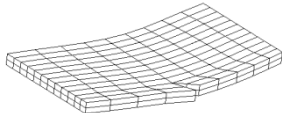
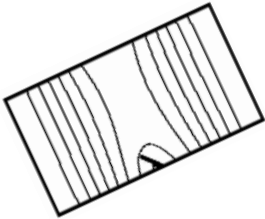
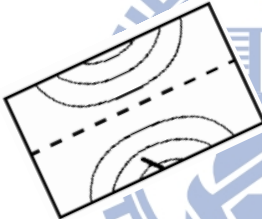
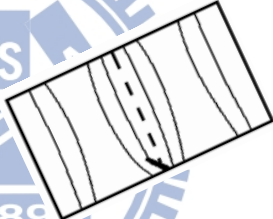
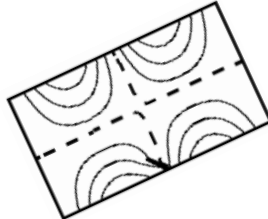
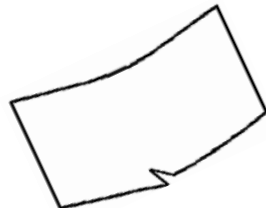
α	c_x / a	d / b	Mode				
			1	2	3	4	5
135°	0.5	0.2	 (1.514)	 (2.399)	 (4.086)	 (5.310)	 (7.019)
							

圖 4.9 (續上頁)

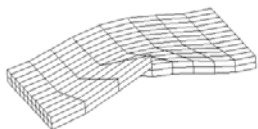
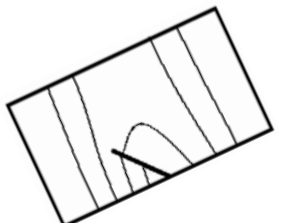
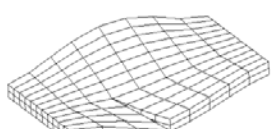
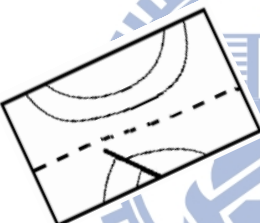
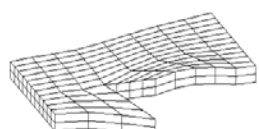
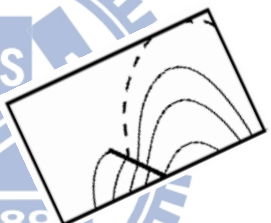
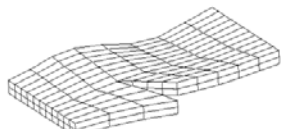
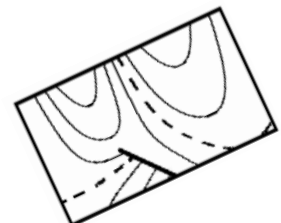
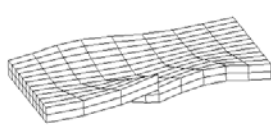
α	c_x / a	d / b	Mode				
			1	2	3	4	5
135°	0.5	0.5	 (1.453) 	 (2.312) 	 (3.148) 	 (4.563) 	 (6.479) 

圖 4.9 (續上頁)