

國立交通大學

土木工程學系

碩士論文

加權基本不震盪法結合類神經網路與遺傳  
演算法應用於一維淺水波方程式之求解

**Applying Weighted Essentially Non-oscillatory  
Schemes combined with Artificial Neural  
Network and Genetic Algorithm to Solving 1-D  
Shallow Water Equations**

學生：李勁頤

指導教授：葉克家 博士

中華民國九十九年八月

# 加權基本不震盪法結合類神經網路與遺傳

## 演算法應用於一維淺水波方程式之求解

學生：李勁頤

指導教授：葉克家

國立交通大學土木工程學系

### 摘要

本研究以原始高階 WENO5 算則(Jiang and Shu 1996)為基礎所提出在強震波區域的改進方法：修正平滑指示器 WENO5 算則(Zhang and Shu 2007)，將之應用於求解一維淺水波方程式，發現在某些情況下，會產生較不好的模擬結果。為改善此模擬結果，本研究以修正平滑指示器 WENO5 算則的收斂理念為基礎，結合類神經網路(ANN)與遺傳演算法(GA)的原理，透過學習嘗試發展出一套以類神經網路來判斷收斂程度，間接決定 WENO 算則權重的新算則。最後以一簡單之平滑曲線的微分案例與各種一維明渠流案例進行模擬，比較新算則與各式 WENO5 算則所得之結果，以評估新算則模擬之收斂性與精確性。

關鍵詞：

加權基本不震盪法、類神經網路、遺傳演算法、一維淺水波方程式

# Applying Weighted Essentially Non-oscillatory Schemes combined with Artificial Neural Network and Genetic Algorithm to Solving 1-D Shallow Water Equations

Student: Chin-I Li

Advisor: Keh-Chia Yeh

Institute of Civil Engineering  
National Chiao Tung University

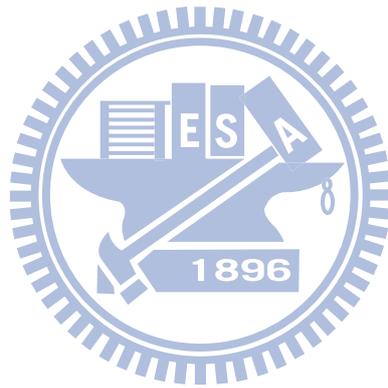
## Abstract

The WENO5 scheme with the modified smoothness indicators (Zhang and Shu 2007) derived from the original WENO5 scheme (Jiang and Shu 1996), is a correction method used in the region where shock waves happen. By applying this scheme to solving 1-D shallow water equations, we can find that the simulations are not precise enough under some situations. For the more precise result, this study uses the convergent theory based on the WENO5 scheme with the modified smoothness indicators, and combines the principles of artificial neural network (ANN) and genetic algorithm (GA). Through the learning process, we try to develop a new scheme using ANN for determining convergent degrees, and deciding weight distributions of the WENO5 scheme at second hand. Finally, by testing a simple differential case of a smooth curve and some cases of 1-D open-channel flow, we can compare the simulation results of using the new scheme with those of using various WENO5 schemes, as a way to evaluate the convergence and accuracy of the new scheme applied to the simulations.

Keywords : WENO, ANN, GA, 1D shallow-water equations.

## 謝誌

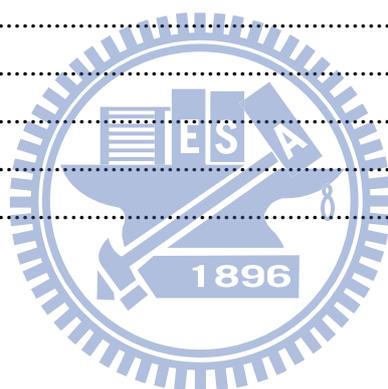
首先要感謝我的父母能養育我至今，並支持我走完這段求學生涯；而在研究所的這段日子裡，無論是教授、學長、同學、學弟妹與朋友們，我非常幸運地能遇到一群有趣又心地善良的人們，在此就祝福各位好人都有個幸福快樂的未來囉。最後就容小弟我說一聲：謝謝啦！



# 目錄

摘要 .....	I
Abstract .....	II
謝誌 .....	III
目錄 .....	IV
表目錄 .....	VI
圖目錄 .....	VII
符號說明 .....	IX
第一章 緒論 .....	1
1-1 研究動機與目的 .....	1
1-2 文獻回顧 .....	3
1-2-1 類神經網路與遺傳演算法 .....	3
1-2-2 高解析算則的發展 .....	4
1-2-3 守恆定律的探討 .....	8
1-3 研究方法與流程 .....	9
第二章 理論基礎 .....	12
2-1 ENO 算則 .....	12
2-1-1 一維數值通量的建構與近似模擬 .....	12
2-1-2 各計算元的數值通量 .....	16
2-1-3 推展與通量分離 .....	18
2-2 WENO 算則 .....	20
2-2-1 上風中央算則與理想權重 .....	20
2-2-2 平滑指示器 .....	22
2-2-3 WENO5 算則 .....	23
2-3 差分式 WENO 算則 .....	25
2-4 Mapped WENO 算則 .....	25
2-5 修正平滑指示器 WENO 算則 .....	27
第三章 WENO 運用於一維淺水波方程式 .....	31
3-1 統御方程式 .....	31
3-2 數值方法 .....	32
3-2-1 時間離散 .....	32
3-2-2 空間離散 .....	33
3-2-3 守恆形式差分式 WENO 算則 .....	34
3-3 乾溼交界處理 .....	40
3-4 稀疏波 .....	41
第四章 模式建置 .....	44
4-1 理論依據 .....	44

4-2 模式架構 .....	52
4-2-1 水理模式 .....	52
4-2-2 類神經網路模式 .....	52
4-3 學習案例 .....	55
4-3-1 案例選擇 .....	55
4-3-2 參數設定 .....	57
第五章 模式驗證與結果分析 .....	61
5-1 學習結果 .....	61
5-2 無劇烈通量變化之試驗案例 .....	67
5-2-1 簡單平滑曲線微分案例 .....	67
5-2-2 穩態流流經障礙物案例 .....	69
5-2-3 潮汐波案例 .....	72
5-3 水面分離案例 .....	74
5-4 潰壩案例 .....	80
第六章 結論與建議 .....	84
6-1 結論 .....	84
6-2 建議 .....	86
參考文獻 .....	88
附錄 A. 類神經網路 .....	97
附錄 B. 遺傳演算法 .....	103



## 表目錄

表 2-1 重建常數表(k=1-4) .....	18
表 4-1 JSWENO 與 ZSWENO 算則結果誤差表.....	49
表 4-2 方案 A~C 選用常數與代表誤差表.....	58
表 5-1 類神經網路學習結果誤差表 .....	61
表 5-2 100 格網數誤差表 .....	67
表 5-3 500 格網數誤差表 .....	67
表 5-4 1000 格網數誤差表 .....	68
表 5-5 2000 格網數誤差表 .....	68
表 5-6 案例 A 與案例 B 之誤差表.....	70
表 5-7 潮汐波案例之誤差表 .....	73



## 圖目錄

圖 1-1 研究流程圖 .....	11
圖 2-1 各計算元 $i+1/2$ 處三階精度通量示意圖 .....	17
圖 2-2 上風中央算則之近似 $i+1/2$ 通量示意圖 .....	21
圖 2-3 原始權重經 Mapped 函數轉換值圖 .....	26
圖 2-4 階梯函數圖 .....	29
圖 2-5 階梯函數的一次微分與二次微分項圖 .....	29
圖 2-6 一維尤拉方程式駐波案例圖 .....	30
圖 2-7 駐波案例之 P1、P2 與合值分佈圖 .....	30
圖 3-1 計算格網示意圖 .....	32
圖 3-2 有限體積法之數值通量示意圖 .....	33
圖 3-3 數值通量示意圖。 .....	37
圖 3-4 源項通量示意圖 .....	37
圖 3-5 乾溼交界示意圖 .....	41
圖 3-6 一維潰壩案例示意圖 .....	43
圖 4-1 初始條件示意圖 .....	45
圖 4-2 JSWENO 模擬水位結果圖 .....	46
圖 4-3 ZSWENO 模擬水位結果圖 .....	47
圖 4-4 初始條件設定圖 .....	48
圖 4-5 JSWENO 模擬水位與解析解之比較圖 .....	49
圖 4-6 JSWENO 模擬 $q$ 與解析解之比較圖 .....	50
圖 4-7 ZSWENO 模擬水位與解析解之比較圖 .....	50
圖 4-8 ZSWENO 模擬 $q$ 與解析解之比較圖 .....	51
圖 4-9 網路概念圖 .....	54
圖 4-10 穩態時 $(v + -\omega+)(1)$ 分佈圖 .....	55
圖 4-11 穩態時 $(v + -\omega+)(2)$ 分佈圖 .....	56
圖 4-12 穩態時 $(v - -\omega-)(1)$ 分佈圖 .....	56
圖 4-13 穩態時 $(v - -\omega-)(2)$ 分佈圖 .....	56
圖 4-14 類神經網路架構圖 .....	57
圖 5-1 方案 A(1) 模擬水位與解析解之比較圖 .....	62
圖 5-2 方案 A(1) 模擬 $q$ 與解析解之比較圖 .....	62
圖 5-3 方案 A(2) 模擬水位與解析解之比較圖 .....	63
圖 5-4 方案 A(2) 模擬 $q$ 與解析解之比較圖 .....	63
圖 5-5 方案 B(1) 模擬水位與解析解之比較圖 .....	63
圖 5-6 方案 B(1) 模擬 $q$ 與解析解之比較圖 .....	64
圖 5-7 方案 B(2) 模擬水位與解析解之比較圖 .....	64
圖 5-8 方案 B(2) 模擬 $q$ 與解析解之比較圖 .....	64

圖 5-9 方案 C (1)模擬水位與解析解之比較圖 .....	65
圖 5-10 方案 C(1) 模擬 $q$ 與解析解之比較圖 .....	65
圖 5-11 方案 C (2)模擬水位與解析解之比較圖 .....	65
圖 5-12 方案 C(2) 模擬 $q$ 與解析解之比較圖 .....	66
圖 5-13 代表誤差收斂圖 .....	66
圖 5-14 簡單平滑曲線 $f(x), f'(x)$ 圖 .....	69
圖 5-15 案例 A 水位模擬結果圖 .....	70
圖 5-16 案例 A 單寬流量模擬結果圖 .....	71
圖 5-17 案例 B 水位模擬結果圖 .....	71
圖 5-18 案例 B 單寬流量模擬結果圖 .....	72
圖 5-19 潮汐波案例水深模擬結果圖 .....	73
圖 5-20 潮汐波案例速度模擬結果圖 .....	74
圖 5-21 AWENO 模擬水位結果圖 .....	76
圖 5-22 水面分離處模擬水位結果圖 .....	76
圖 5-23 底床高起處模擬水位結果圖 .....	77
圖 5-24 水面分離案例模擬水位結果圖( $t = 25 \text{ sec}$ ) .....	77
圖 5-25 水面分離案例模擬水位結果圖( $t = 45 \text{ sec}$ ) .....	78
圖 5-26 平滑曲線處模擬水位結果圖( $t = 25 \text{ sec}$ ) .....	78
圖 5-27 上游邊界處模擬水位結果圖( $t = 45 \text{ sec}$ ) .....	79
圖 5-28 5000 格網數模擬水位結果圖( $t = 15\text{sec}$ ) .....	81
圖 5-29 各式 WENO 算則模擬水位結果圖( $t = 15\text{sec}$ ) .....	81
圖 5-30 水位變化處模擬水位圖( $t = 15\text{sec}$ ) .....	82
圖 5-31 5000 格網數模擬水位結果圖( $t = 60\text{sec}$ ) .....	82
圖 5-32 各式 WENO 算則模擬水位結果圖( $t = 60\text{sec}$ ) .....	83
圖 5-33 水位變化處模擬水位圖( $t = 60\text{sec}$ ) .....	83

# 符號說明

$c_{rj}$ ：重建常數

$E_h$ ：水深總絕對值誤差

$E_q$ ：單寬流量總絕對值誤差

$E_r$ ：代表誤差

$f$ ：數值通量

$f_{max}$ ：構成平滑指示器五點絕對值之最大值

$Fit$ ：適合度值

$g$ ：重力加速度

$g_r(\omega_r)$ ：mapped 函數

$h$ ：水深

$h_d$ ：最小水深容忍值

$k$ ：精度

$L$ ：基因長度

$\ell$ ：左特徵向量

$\mathcal{L}(u, x)$ ：空間運算子

Ma\_Rate：交配機率

Ma\_N：每一學習循環交配數

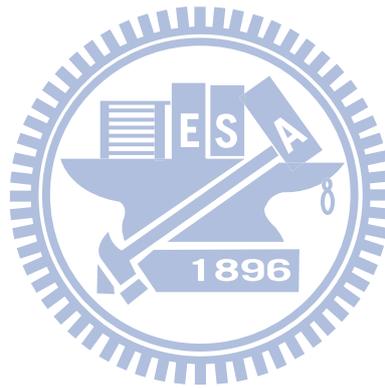
Mu\_Rate：突變機率

$max_{e_q}$ ：單寬流量最大絕對值誤差

$max_{e_h}$ ：水深最大絕對值誤差

$n$ ：曼寧糙度

$P_2$ ：平滑指示器含二次微分項部份



$P_1$  : 平滑指示器含一次、三次微分項部份

$q$  : 單寬流量

$r$  : 右特徵向量

$S$  : 源項通量

$t$  : 時間

$v$  : 流速

$W$  : 連結加權值

$x_u$  : 上限值

$x_l$  : 下限值

$z$  : 底床高程

$\Delta x$  : 空間間距

$\alpha_r$  : 修正係數

$\beta_r$  : 平滑指示器

$\epsilon$  : 一微小數值

$\theta$  : 門閥值

$\lambda$  : 特徵速度

$\omega_r$  : 權重

$\bar{\omega}_r$  : 理想權



# 第一章 緒論

## 1-1 研究動機與目的

淺水波方程式(shallow-water equations)，亦稱為聖凡南方程式(Saint-Venant equations)，在數值模擬上已被廣泛地應用於河川水流變化、河口潮汐流況、波浪傳遞等流體運動的模擬；而淺水波方程式屬非線性雙曲線型方程式，在震波的傳遞時可能有陡峭且劇烈的變化，其解亦可能有不連續面的產生。

加權基本不震盪法(WENO - weighted essentially non-oscillatory)在求解雙曲型方程式，對於震波等不連續面之傳遞分辨率高，且易於推廣至高維度情況和帶有複雜源項之問題，故已成為在求解非線性雙曲線型方程式經常選用的高解析算則之一。後續陸續發展出一些改善原始 WENO 算則之收斂性與解析度的修正法，如守恆 WENO 法(Vukovic and Sopta 2002)、結合 exact C (conservation)性質(Xing and Shu 2005)、Mapped WENO 法(Henrick et al. 2005)、修正平滑指示器(MSI - modified smoothness indicator)WENO 法(Zhang and Shu 2007)、逆擴散通量修正(anti-diffusive flux corrections)WENO 法(Xu and Shu 2005)等算則。

而在上述的修正平滑指示器 WENO 算則，是透過定義之修正平

滑指示器，改進在強震波區域的收斂性，因此吾人將此算則應用於水面分離與穩態流經障礙物形成水躍。經模擬結果發現在水面分離的案例中，對於乾濕點交界上的處理有很好的效果，但對於另一穩態流經障礙物案例有較差的模擬結果，依據文獻(Zhang and Shu 2007)中的數值案例測試，修正平滑指示器 WENO 算則應用在受邊界條件影響較大的案例上會有較不好的結果，推測是由於受其上游邊界的影響，造成在不連續面上過度收斂而影響了附近水面的連接與流量的守恆性。

為改善此結果與增加修正平滑指示器的適用性，吾人提出一個理論想法，以修正平滑指示器 WENO 算則的理論為基礎，設計一套與組合平滑指示器五點值有其相關性的修正係數(此部份詳細介紹請見 4-1 節)藉以改進平滑指示器，希望在保持其收斂性的同時，亦能盡量保持數值解的精確度與不受邊界之影響。另假設修正係數與五點值的相關性能由一未知的函數式來代表，故本文應用類神經網路類神經網路(ANN - artificial neural network)的黑盒分析概念，結合遺傳演算法(GA - genetic algorithm)的優選特性，以穩態流經障礙物案例為學習案例，建構類神經網路以擬合此假設的函數式，之後應用建構完成之類神經網路於試驗案例，作為驗證結果並與各 WENO 算則模擬之結果比較分析。

## 1-2 文獻回顧

### 1-2-1 類神經網路與遺傳演算法

類神經網路是一種以電腦的邏輯運算模擬人類腦神經細胞網路的學問。McCulloch and Pitts (1943)提出神經元數學模型，利用數學模式對人類神經系統中的神經元運作建立數學模型，把生物神經單元視同一個邏輯決策單元；Werbos (1974)在其博士論文中提出了隱藏層的學習演算法，這是首次有人提出倒傳遞網路(back-propagation network)的概念。之後 Parker (1985)再次提出倒傳遞網路，同年 Rumelhart et al. (1985)發表了一篇倒傳遞網路的文章，倒傳遞類神經網路才使其廣為人知，而倒傳遞類神經網路模式是目前類神經網路學習模式中最具代表性，應用最普遍的模式。經過近數十年的努力，類神經網路的理論基礎逐漸完善，現已被視為極有效的非線性模型建構工具，因其理論單純、結構單純，容易建立所需的特定模式，因此大量被應用於各領域上。

遺傳演算法的理論基礎可回溯自 1859 年達爾文(Charles Darwin)的「物種演化」(On the Origin of Species by Means of Nature Selection)書中的「物競天擇，適者生存」的演化及淘汰觀念。將這種自然界的選擇方法系統化並發展為可用之模式，最早是由密西根大學的

Holland (1975)發展出遺傳演算法搜尋技術的基本架構，並且由其學生 Goldberg (1989)成功地運用在工程問題上。而利用此法來搜索演化類神經網路的架構，此即為混合遺傳演算法(HGA - hybrid genetic algorithm)，在許多研究上，相對於倒傳遞類神經網路有不易陷入局部最小值的優點，在預測上亦能有較佳的穩定性與誤差。

類神經網路與遺傳演算法在水利方面的應用上，國內外的相關研究自然也不少。諸如應用於降雨與逕流，或結合地形條件做預測模擬 (French 1992, Sajikumar and Thandaveswara 1992, Lorrai and Sechi 1995, Loke et al. 1997, Zhang and Rao 2000)，(陳昶憲等 1996、孫建平 1997)、地下水位預報 (Shigidi and Garcia 2003, Daliakopoulos et al. 2005,)、水質分析 (郭異銘 1999、范正成等 2006)、土石流災害預警 (李心平和張斐章 1995、張東炯 2000、曾國源 2003)與水庫系統操作 (Jain et al. 1999, Chaves and Chang 2008)等，應用的範圍可說是相當地廣泛。

## 1-2-2 高解析算則的發展

由於雙曲線方程式存在著不連續解，這些不連續解在使用許多傳統數值方法模擬時，易產生 spurious oscillations 的震盪問題，為了處理震盪的問題，Harten (1983) 以 Van Leer (1974, 1979) 提出的通量修正法為基礎建構二階 TVD (total-variation diminishing)算則，通過限制

函數(limiter)來限制守恆量或通量的梯度變化，來減低數值傳遞產生的震盪，而後許多高階(指超過一階精度) TVD 算則被陸續發展出來，廣泛的介紹與文獻回顧可參考 Roe (1986)、Yee (1989)及 LeVeque (1990)，高階精度的 TVD 算則發展提升了雙曲線型方程式數值解的品質，也正式開啟了高解析算則的時代。

Harten et al. (1987)提出 ENO (essentially non-oscillatory)算則，該算則的特點是依據所定義的平滑指示器(indicator of smoothness)，選取出最為平滑代表的計算元(stencil)進行差分，得到均勻高階精確度且具有基本不震盪的特性，計算元是指求某一點差分值時，其所包含之相關點的集合， $r$  階精度 ENO 算則採用  $r$  組計算元做為差分選擇的候選，例如計算  $i+1/2$  介面的數值通量正的部份， $i$  為自身的點位，以三階精度為例，使用三點差分而有三組計算元可選擇，分別為： $[i-2, i-1, i]$ 、 $[i-1, i, i+1]$ 、 $[i, i+1, i+2]$ 。此算則是屬於守恆變數型態(variables version)，其所使用的重建(reconstruction)計算是擴充 Harten and Osher (1987)所發展的二階重建模式，此外 Shu and Osher (1988, 1989)進一步發展逐點式(pointwise)的 ENO 算則來取代原先單元平均的計算，在二維或是更高維度的計算上能獲得較佳的效率。ENO 算則特別適用於包含震波及複雜的平滑流場結構，如紊流與震波交互作用、渦漩流與震波交互作用等流場。ENO 算則已被應用及擴展在許

多方面，如在選取計算元的過程加入偏量(bias)以加強穩定及精度 (Fatemi et al. 1991, Shu 1990)、利用 sub-cell resolution 使接觸面更為陡峭(Harten 1989)、多維的三角網格分析 (Abgrall 1994)等。

Liu et al. (1994)針對 ENO 算則的缺點，提出了加權型基本不振盪(WENO)算則，取代 ENO 算則僅選取一組計算元來近似數值通量的作法，以定義的平滑指示器來決定各計算元的代表平滑程度，依此分配每組計算元一個加權係數，將所有採用的計算元全部組合起來。而有關配置的原則，在平滑區儘量使其最佳化藉以達到高階準確度的要求，而在不連續面附近則令含有不連續面之計算元的加權係數盡量減小，最後再以外凸組合(convex combination)的方式來近似數值通量，在單調平滑的區域， $r$  階精度 ENO 算則經由組合後在能提高為 $(r + 1)$  階精度的 WENO 算則，然而無法達到最理想 $(2r - 1)$ 的精度。之後 Jiang & Shu (1996)以上述之 WENO 算則為基礎，重新定義了新的平滑指示器，發展了 WENO5 算則，使用了三階精度的 ENO 算則組合之 WENO 算則，在特定條件下能保持五階的精度，震波的傳遞計算也依然能維持基本不振盪的原則。自 Jiang and Shu 在 1996 年發表新式 WENO 算則以來，此篇文章在 SCI 資料庫中廣被引用，其應用包括：算則發展有關(Gerritsen and Olsson 1998, Liu and Osher 1998, Choi and Liu 1998, Suresh and Huynh 1997, Jiang and Yu 1998, Jiang and

Tadmor 1998) ，應用在二維非結構性網格 (Friedrich 1998, Ollivier-Gooch 1997) ，應用在不可壓縮流 (Minion and Brown 1997, Yang et al. 1998, Chen et al. 1999) ，應用在可壓縮流 (Yang et al. 1998, Yang et al. 1992, Hsieh et al. 2008) ，與 Shallow-water 有關 (Kuo and Polvani 1999, Liska and Wendroff 1999) 等。

WENO 算則由於加權係數的值是由流場的物理量運算後所求得，不需如 ENO 算則用到邏輯判斷平滑度來選擇使用之計算元，因此電腦程式的計算方式可以向量化處理，而數值通量不再因為計算元的選取而有跳動現象，相對地也改善了收斂的效率，WENO 算則除了保持 ENO 算則的均勻高階的優點，同時改善了 ENO 算則的收斂性。

近年來有一些研究針對原始 WENO 算則，提高其收斂性與解析的精度。Despres and Lagoutiere (2001) 首先提出一階限制函數下風算則 (limited downwind scheme)，可有效的避免流場中不連續接觸面的模糊化 (smearing) 並同時保有非線性的穩定性，之後 Bouchut (2004) 修正此算則使其滿足熵條件且提出一簡化的顯式逆擴散通量公式，在前兩項研究的基礎下，Xu and Shu (2005) 提出了高階有限差分逆擴散通量修正之 WENO 算則，此一算則不僅在流場平滑區可維持高階精度外，在流場不連續區域也可保持不震盪的特性與不連續接觸面陡峭的高解析度；Henrick et al. (2005) 提出了 Mapped WENO 算則，此一

算則改善了原始 WENO 算則在臨界點處的精確度；Zhang and Shu (2007)針對高階 WENO 算則提出了修正平滑指示器的觀念，依據數值試驗的測試結果，顯示在邊界無震波穿越的影響下，一維與二維的高強度震波問題使用此一修正算則可改進其收斂性至機械零點 (machine zero)。

### 1-2-3 守恆定律的探討

長久以來，許多文章探討數學模型之守恆律 (conservation law)，即流體在某一控制體積之物理量需守恆。Bermúdez and Vázquez (1994)於推求淺水波方程數學差分過程中，使用 Q-scheme 與源項採上風法 (upwinding)，考慮質量及動量守恆之觀念來計算通量梯度與源項，故當求解問題為穩態靜止時，所得解皆能符合守恆律，此稱之為 exact C (conservation) 性質，Hubbard and Garcia-Navarro (2000)則延伸其數值方法發展出二階 MUSCL 有限體積法。其它另有針對源項及數值通量作守恆性質探討，如：Greenberg and LeRoux (1996)提出 well-balanced 算則、LeVeque (1998)發展出準穩態 (quasi-steady) 波傳的運算法則、Jenny and Muller (1998)針對源項採用 Rankine-Hugoniot 黎曼解來做修正、Chinnayya and LeRoux (1999)發展出一套新的黎曼求解方式，運用於一維淺水波方程式、Botchorishvili et al. (2000)結合 Engquist-Osher 算則與源項上風法、Jin (2001)針對源項採用 Godunov

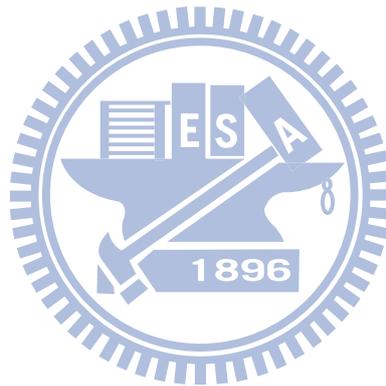
或 Roe 型態的分離與上風法，建構出一個補抓穩定型態的方法、Zhou et al. (2001)在源項的處理上，有別於一般所提倡的上風法，而引用 surface gradient method (SGM)的概念等。

Gosse (2001)則進一步提出加權基本不震盪法之守恆法則，Vukovic and Sopta (2002)則利用 Goss 所得之法則，求解一維淺水波方程，Crnjacic-Zic et al. (2004)推導求解守恆型式一維輸砂方程式，兩者運算法則之概念皆為加權基本不震盪法，輔以高階數值通量、有限體積法為基礎，以減少數值通量進出控制體積之誤差，以達質量及動量守恆之要求。

### 1-3 研究方法與流程

本研究在數模計算上主要分水理計算與類神經網路兩大部份，在水理計算上引用守恆 WENO 法(Vukovic & Sopta 2002)，搭配有限體積法求解一維淺水波方程式，類神經網路架構採取前饋式網路(forward networks)。圖 1-1 為本研究流程圖，首先將類神經網路各單元之網路加權值與門限值，以二進位作為基因組的編碼，並產生初始基因組群集。在學習過程中，各基因組透過類神經網路與運算，可以決定在 1-1 節中所定義之修正係數，將之代入平滑指示器的運算以決定 WENO 算則的權重，並回歸水理的計算中。將計算後各基因組所

得之解與解析解做誤差比較，應用遺傳演算法的優選概念，誤差小的基因組給予較佳的適應度(在複製時擁有較大的機率被選取)，誤差大則對應較差的適應度，而後經過複製選取、基因交配與基因突變等機制以產生下一子代的基因組，以上整個流程稱為一次學習循環；在經過數千或數萬次學習循環後，理論可得一組基因組以有效架構類神經網路，使計算結果能更接近學習案例之解析解，之後使用架構之類神經網路運用於其他案例，作為驗證結果並與各式 WENO 算則所模擬之結果做比較分析。



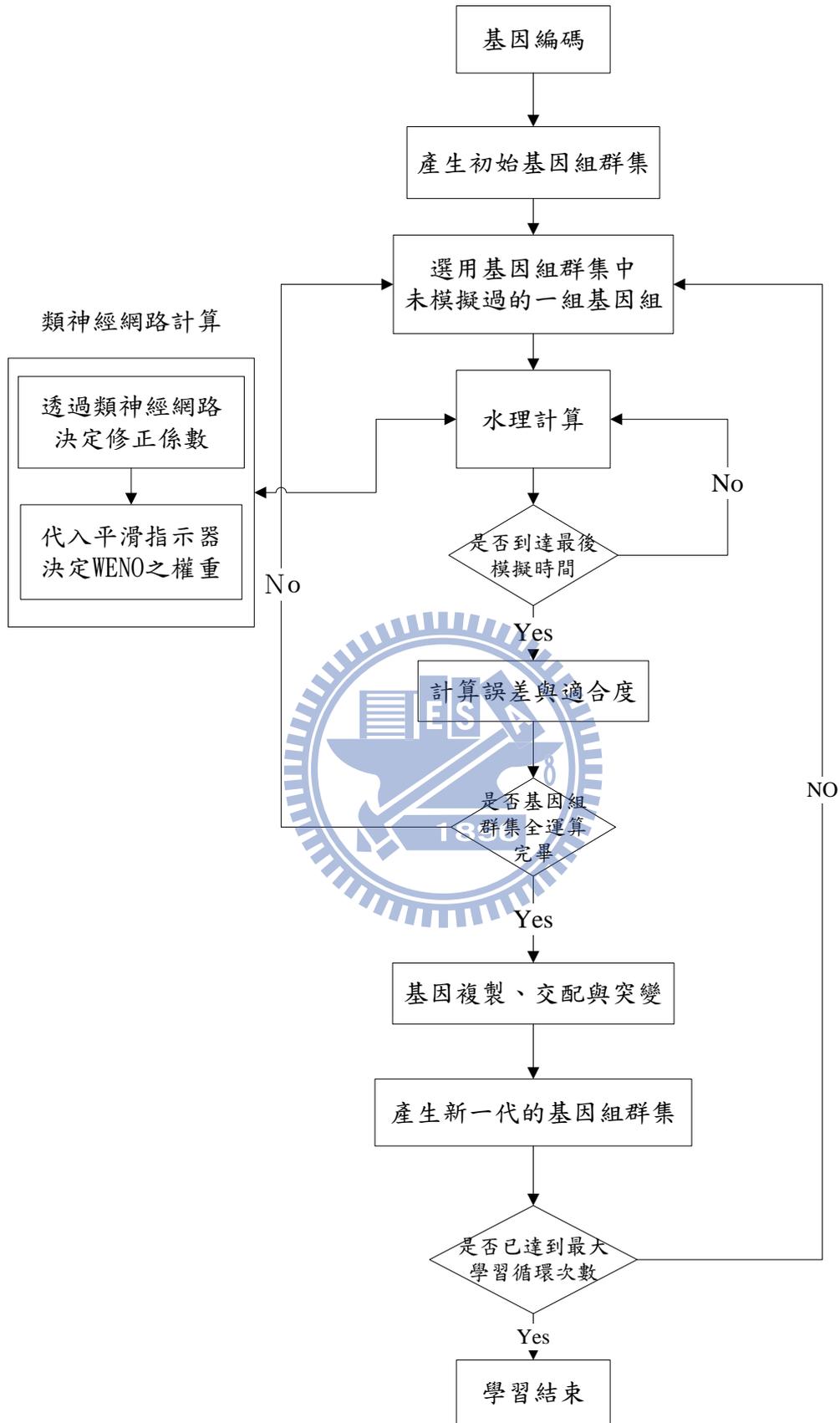


圖 1-1 研究流程圖

## 第二章 理論基礎

有關類神經網路與遺傳演算法的介紹請見本文附錄 A 與附錄 B。  
本章針對前述基本不震盪相關算則，逐一介紹 ENO 算則、WENO 算則、差分式 WENO 算則，並以差分式 WENO 算則為基礎分別說明 Mapped WENO 法、修正平滑指示器 WENO 法等算則。

### 2-1 ENO 算則

Harten et al. (1983)提出了 ENO (essentially non-oscillatory)算則，ENO 算則是均勻高階，且基本不震盪的解析包含不連續的流場。ENO 算則設計的特點在尋求最平滑的計算元進行高階差分，故可避免在極值點附近降階以及在不連續點附近產生非物理性的大震盪現象。

#### 2-1-1 一維數值通量的建構與近似模擬

假設一維格點分佈如下：

$$a = x_{1/2} < x_{3/2} < \dots < x_{N-1/2} < x_{N+1/2} = b \quad (2-1)$$

定義單元(cell)，單元中心(cell centers)，單元大小(cell size)如下：

$$I_i \equiv \left[ x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right], \quad x_i \equiv \frac{1}{2} \left( x_{i-\frac{1}{2}} + x_{i+\frac{1}{2}} \right),$$
$$\Delta x_i \equiv x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2-2)$$

給定單元內的平均值函數為  $f(x)$ ：

$$\bar{f}_i = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(\zeta) d\zeta \quad (2-3)$$

求解一多項式  $p_i(x)$ ，其最多為  $k-1$  階，使其滿足

$$p_i(x) = f(x) + O(\Delta x^k), \quad x \in I_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (2-4)$$

求解上述問題首先定義原函數(primitive function)  $F(x)$  如下：

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(\zeta) d\zeta \quad (2-5)$$

上式積分下限依需要可改成某個固定值，利用(2-3)式的單元平均值的定義，可計算如下：

$$F\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) = \int_{-\infty}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f(\zeta) d\zeta = \sum_{j=-\infty}^i \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} f(\zeta) d\zeta = \sum_{j=-\infty}^i \bar{f}_j \Delta x_j \quad (2-6)$$

如此，若已知單元平均值  $\{\bar{f}_j\}$ ，則可得到原函數在每個單元邊界點(cell boundary)的值；給定單元  $I_i$  的位置及精度  $k$ ，我們選定計算元(stencil)  $S(i)$  包括：左邊  $r$  個單元，右邊  $s$  個單元及本身  $I_i$ ，其中  $r+s+1=k$ ：

$$S(i) \equiv \{I_{i-r}, \dots, I_{i+s}\} \quad (2-7)$$

若定義  $P(x)$  滿足

$$P\left(x_{j+\frac{1}{2}}\right) = F\left(x_{j+\frac{1}{2}}\right), \quad j = i-r-1, \dots, i+s \quad (2-8)$$

$P(x)$  的微分表示為  $p(x)$

$$p(x) \equiv P'(x) \quad (2-9)$$

而在計算元內每一個單元平均值皆可表示為

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x_j} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} p(\zeta) d\zeta &= \frac{1}{\Delta x_j} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} P'(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{1}{\Delta x_j} \left( P\left(x_{j+\frac{1}{2}}\right) - P\left(x_{j-\frac{1}{2}}\right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Delta x_i} \left( F \left( x_{j+\frac{1}{2}} \right) - F \left( x_{j-\frac{1}{2}} \right) \right) \\
&= \frac{1}{\Delta x_i} \left( \int_{-\infty}^{x_{j+\frac{1}{2}}} f(\zeta) d\zeta - \int_{-\infty}^{x_{j-\frac{1}{2}}} f(\zeta) d\zeta \right) \\
&= \frac{1}{\Delta x_j} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} f(\zeta) d\zeta = \bar{f}_j, \quad j = i - r, \dots, r + s \quad (2-10)
\end{aligned}$$

上式顯示  $p(x)$  就是所尋找的函數。

一般而言，前述重建問題大多用來計算單元邊界點的重建量，再以此重建量計算單元邊界位置的通量，此計算如下：

$$f_{i+\frac{1}{2}}^- = p_i(x_{i+1/2}), \quad f_{i-\frac{1}{2}}^+ = p_i(x_{i-1/2}), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2-11)$$

又由於前述由單元平均量  $\bar{f}_j$  映射至單元邊界點的重建量  $f_{i+1/2}^-$  及  $f_{i-1/2}^+$  的過程是線性的，故存在常係數  $c_{rj}$  及  $\widetilde{c}_{rj}$  使得

$$f_{i+\frac{1}{2}}^- = \sum_{j=0}^{k-1} c_{rj} \bar{f}_{i-r+j}, \quad f_{i-\frac{1}{2}}^+ = \sum_{j=0}^{k-1} \widetilde{c}_{rj} \bar{f}_{i-r+j} \quad (2-12)$$

其中  $c_{rj}$  及  $\widetilde{c}_{rj}$  與計算元內包含的左邊單元數  $r$ 、內差階數  $k$  與單元大小  $\Delta x_i$  有關，與函數值  $f$  無關。上式在相同位置  $x_{i+1/2}$  得到  $\pm$  兩個不同的重建量，分別來自於單元  $I_i$  與  $I_{i+1}$ 。前述兩重建量相同，依據對稱的概念得到下列關係式：

$$\widetilde{c}_{rj} = c_{r-1,j} \quad (2-13)$$

總結以上的推導，另一組常數  $c_{rj}$  重新構造單元邊界上  $x_{i+1/2}$  的值：

$$f_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{j=0}^{k-1} c_{rj} \bar{f}_{i-r+j} \quad (2-14)$$

以一維簡單雙曲線方程式為例

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (2-15)$$

假設為均勻格網，則該方程式在空間離散為

$$\frac{du_i(t)}{dt} = -\frac{1}{\Delta x} \left( \hat{f}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{i-\frac{1}{2}} \right) \quad (2-16)$$

其中  $\hat{f}_{i+1/2}$  與  $\hat{f}_{i-1/2}$  為數值通量。若

$$\frac{1}{\Delta x} \left( \hat{f}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{f}_{i-\frac{1}{2}} \right) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_i) + O(\Delta x^k) \quad (2-17)$$

若存在函數  $h(x)$  使得

$$f(x) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} h(\zeta) d\zeta \quad (2-18)$$

則  $\frac{\partial f}{\partial x}$  可寫作

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x} [h(x + \Delta x/2) - h(x - \Delta x/2)] \quad (2-19)$$

故若

$$\hat{f}_{i+\frac{1}{2}} = h\left(x_{i+\frac{1}{2}}\right) + O(\Delta x^k) \quad (2-20)$$

為  $k$  階精度算則。

## 2-1-2 各計算元的數值通量

參照(2-20)式，各計算元之  $\hat{f}^r(x)$  以三階精度近似函數  $h(x)$ ， $r$  為計算元內，以本身  $I_i$  為基準，所採用的左邊單元數目，以多項式表示為

$$h(x) \approx \hat{f}^r(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad (2-21)$$

將上式代入(2-18)式，可推得各計算元之  $a_0$ 、 $a_1$ 、 $a_2$ ；依據採用不同的計算元，所得到不同的三階精度多項式表示如下：

$$\begin{aligned} \hat{f}^0(x) &= \frac{23f_i + 2f_{i+1} - f_{i+2}}{24} + \left( \frac{-3f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}}{2\Delta x} \right) x + \left( \frac{f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2}}{2\Delta x^2} \right) x^2 \\ \hat{f}^1(x) &= \frac{-f_{i-1} + 26f_i - f_{i+1}}{24} + \left( \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} \right) x + \left( \frac{f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1}}{2\Delta x^2} \right) x^2 \\ \hat{f}^2(x) &= \frac{-f_{i-2} + 2f_{i-1} + 23f_i}{24} + \left( \frac{f_{i-2} - 4f_{i-1} + 3f_i}{2\Delta x} \right) x + \left( \frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i}{2\Delta x^2} \right) x^2 \end{aligned} \quad (2-22)$$

上述各多項式近似位於  $i+1/2$  的通量  $\tilde{f}_{i+1/2}^r$ ，如圖 2-1 所示可得

$$\begin{aligned} \hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^0 &= \frac{1}{6}(2f_i + 5f_{i+1} - f_{i+2}) \\ \hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^1 &= \frac{1}{6}(-f_{i-1} + 5f_i + 2f_{i+1}) \\ \hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^2 &= \frac{1}{6}(2f_{i-2} - 7f_{i-1} + 11f_i) \end{aligned} \quad (2-23)$$

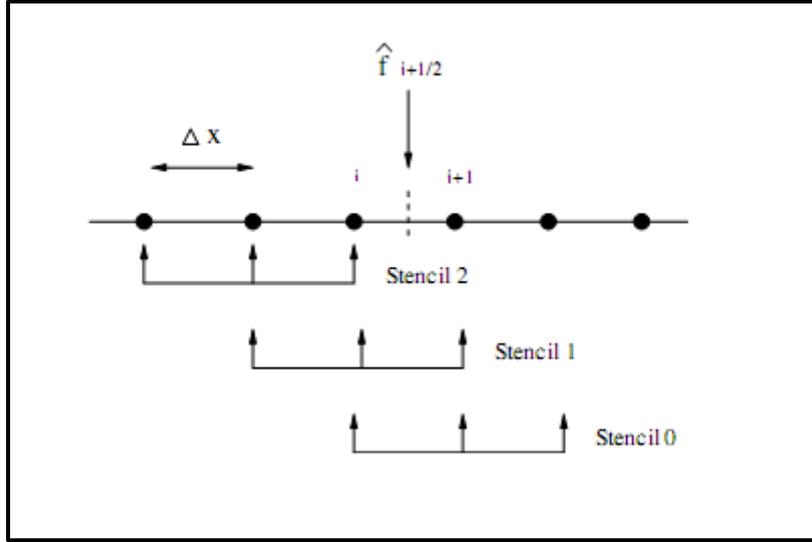


圖 2-1 各計算元  $i+1/2$  處三階精度通量示意圖

求通量  $\hat{f}_{i-1/2}^r$  僅需將所有計算元內單元皆向左移動一格計算，將 (3-23) 式與  $\hat{f}_{i-1/2}^r$  做泰勒展開可表示為

$$\hat{f}_{i+1/2}^0 = h_{i\pm 1/2} - \frac{1}{12} f'''(0) \Delta x^3 + O(\Delta x^4)$$

$$\hat{f}_{i+1/2}^1 = h_{i\pm 1/2} + \frac{1}{12} f'''(0) \Delta x^3 + O(\Delta x^4) \quad (2-24)$$

$$\hat{f}_{i+1/2}^2 = h_{i\pm 1/2} - \frac{1}{4} f'''(0) \Delta x^3 + O(\Delta x^4)$$

通式為

$$\hat{f}_{i\pm 1/2}^r = h_{i\pm 1/2} - A_r \Delta x^3 + O(\Delta x^4), \quad k \in \{0, 1, 2\} \quad (2-25)$$

此三階的誤差  $A_r$  在之後 WENO 算則中，定義平滑指示器與決定權重的部份佔了極為重要的角色。此外空間離散項亦會由於  $\tilde{f}_{i+1/2}^1$  與  $\tilde{f}_{i-1/2}^1$  選擇計算元的不同，而有不同的精度：

$$\frac{1}{\Delta x} \left( \hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^n - \hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^m \right) = \begin{cases} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_j} + O(\Delta x^2), & \text{if } n \neq m \\ \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_j} + O(\Delta x^3), & \text{if } n = m \end{cases} \quad (2-26)$$

(2-23)式為(2-14)式之精度  $k=3$ ，各計算元的展開式子，而依據上述的觀念，同理可得各精度與各選取計算元之重建常數  $c_{rj}$ ，若網格點為均勻分佈 Shu (1997)， $c_{rj}$  如表 2-1：

表 2-1 重建常數  $c_{rj}$  表(k=1-4)

k	r	j=0	j=1	j=2	j=3
1	-1	1			
	0	1			
2	-1	3/2	-1/2		
	0	1/2	1/2		
	1	-1/2	3/2		
3	-1	11/6	-7/6	1/3	
	0	1/3	5/6	-1/6	
	1	-1/6	5/6	1/3	
	2	1/3	-7/6	11/6	
4	-1	25/12	-23/12	13/12	-1/4
	0	1/4	13/12	-5/12	1/12
	1	-1/12	7/12	7/12	-1/12
	2	1/12	-5/12	13/12	1/4
	3	-1/4	13/12	-23/12	25/12

### 2-1-3 推展與通量分離

傳統的二階算則，如 Lax-Wendroff 算則及 Beam-Warming 算則，在不連續點附近產生非物理性的震盪，主要是採用固定的計算元進行

差分，ENO 算則設計則選取最平滑計算元的進行差分，其計算元的選取是隨著流場結構改變，這些改變主要是使數值差分時避開不連續點。

Shu and Osher (1988, 1989)對原始之 ENO 算則做了些修正，在此新的 ENO 算則中，其建構數值通量的方式避免採用單元平均值來重建函數，而改以直接對通量做類似之基本不振盪差值來求取數值通量。另外他們也捨棄了原 ENO 算則中的 Lax-Wendroff 形式時間離散法，改用時間與空間分開考慮之半離散化系統，另行發展了 TVD Runge-Kutta 形式之時間離散法，如此改善了原 ENO 算則不易寫成程式及不易推展到多維問題之缺點，也加強了 ENO 算則的效率。

在實際應用上，除前述的 ENO 差分方式外，一般會加入通量分離(flux splitting)的概念。物理通量正、負的分離方式，有許多分離可供選擇，數值通量則定義如下：

$$f_{i+\frac{1}{2}} = K(f_{i+\frac{1}{2}}^-, f_{i+\frac{1}{2}}^+) \quad (2-27)$$

$K$  為一分離函數，有 Godunov flux 及 Engquist-Osher flux、Lax-Friedrich 等方法可供選擇，在此介紹總體或局部 Lax-Friedrich 之通量分離法來求解流場，以(2-15)式為例，總體 Lax-Friedrich 之通量分離法如下：

$$f^{\pm} = \frac{1}{2}(f(u) \pm \alpha_{max}u) \quad (2-28)$$

其中  $\alpha_{max} = \max|f'(u)|$ ，代表所有計算網格內的最大特徵值。

局部 Lax-Friedrich 之通量分離法為：

$$f^{\pm} = \frac{1}{2}(f(u) \pm \alpha u) \quad (2-29)$$

其中  $\alpha = |f'(u)|$ ，代表局部計算網格內的最大特徵值。

## 2-2 WENO 算則

WENO 算則的基本理念：取代 ENO 算則僅選取一組計算元來近似數值通量的作法，而將所有需要研判平滑度的計算元全部組合起來，並賦予每組計算元一個加權係數，最後再以外凸組合(convex combination)的方式來近似數值通量：

$$\hat{f}_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^2 \omega_r \hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^r \quad (2-30)$$

為了穩定性與一致性，權重  $\omega_r$  須滿足

$$\omega_r \geq 0, \sum_{r=0}^2 \omega_r = 1 \quad (2-31)$$

### 2-2-1 上風中央算則與理想權重

與 2-1-2 節之多項式的推導相同，上風中央算則(Upstream central scheme)源自於實際通量  $h(x)$  五階精度的多項式近似值：

$$h(x) \approx \tilde{f}(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4$$

將上式代入(2-18)式，可展開積分式為

$$f(x) = b_0 + b_1x + b_2\left(x^2 + \frac{\Delta x^2}{12}\right) + b_3\left(x^3 + \frac{\Delta x^2 x}{4}\right) + b_4\left(x^4 + \frac{\Delta x^2 x^2}{2}\right) \quad (2-32)$$

利用計算元內之五個單元  $x_j = x_i + (j - i) \Delta x$ ， $j = i - 2$ 、

$i - 1$ 、 $i$ 、 $i + 1$ 、 $i + 2$ ，可得五組方程式聯立求解  $b_1 \sim b_5$ ，再近似

位於  $i+1/2$  的通量  $\hat{f}_{i+1/2}$ ，如圖 2-2 所示可得

$$\begin{aligned} \hat{f}_{i+1/2} &= \frac{1}{60} (2f_{i-2} - 13f_{i-1} + 47f_i + 27f_{i+1} - 3f_{i+2}) \\ &= h_{i+1/2} - \frac{1}{60} \frac{d^5 y}{dx^5} \Big|_{x=x_i} \Delta x^5 + O(\Delta x^6) \end{aligned} \quad (2-33)$$

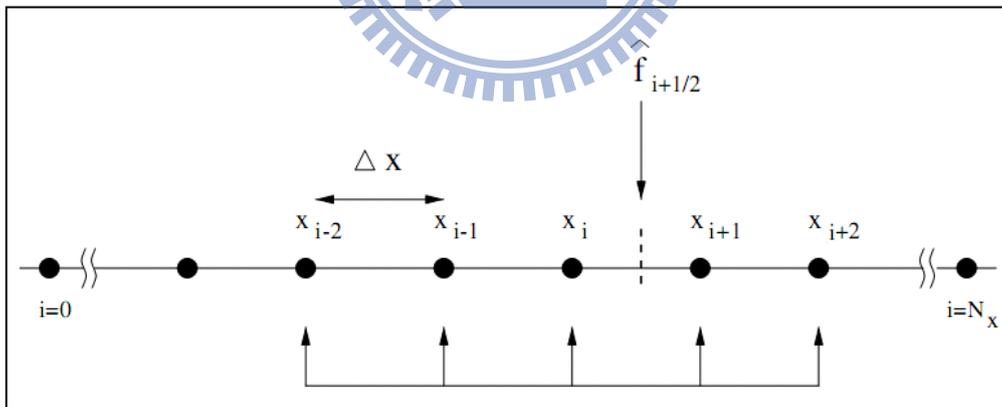


圖 2-2 上風中央算則之近似  $i+1/2$  通量示意圖

同理，在  $x = x_{i-1/2}$  處，通量  $\hat{f}_{i-1/2}$  為

$$\hat{f}_{i-1/2} = \frac{1}{60} (2f_{i-3} - 13f_{i-2} + 47f_{i-1} + 27f_i - 3f_{i+1})$$

$$= h_{i-1/2} - \frac{1}{60} \frac{d^5 y}{dx^5} \Big|_{x=x_i} \Delta x^5 + O(\Delta x^6) \quad (2-34)$$

因此將(2-33)式與(2-34)式代入(2-17)式，可得五階精度空間離散的上風中央算則：

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} \Big|_{x_i} &= \frac{1}{60} (-2f_{i-3} + 15f_{i-2} - 60f_{i-1} + 20f_i + 30f_{i+1} - 3f_{i+2}) \\ &= f' + O(\Delta x^5) \end{aligned} \quad (2-35)$$

而在平滑區域中，數值通量近似解  $\hat{f}_{i+\frac{1}{2}}$  給定一組權重以符合上風中央算則所得的線性組合，藉以達到高階準確度的要求。因此將式(2-23)以式(2-30)的形式組合成式(2-33)，整合得下式(2-36)：

$$\begin{aligned} \hat{f}_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2f_i + 5f_{i+1} - f_{i+2} \\ -f_{i-1} + 5f_i + 2f_{i+1} \\ 2f_{i-2} - 7f_{i-1} + 11f_i \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \bar{\omega}_0 \\ \bar{\omega}_1 \\ \bar{\omega}_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{60} (2f_{i-2} - 13f_{i-1} + 47f_i + 27f_{i+1} - 3f_{i+2}) \end{aligned} \quad (2-36)$$

因此可得到一組常數： $\bar{\omega}_0 = 0.3$ 、 $\bar{\omega}_1 = 0.6$ 、 $\bar{\omega}_2 = 0.1$ ，此又被稱為理想權重(ideal weights)，在平滑區能滿足五階的精度：

$$\hat{f}_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^2 \bar{\omega}_r \hat{f}_{i+\frac{1}{2}}^r = h_{i+\frac{1}{2}} + O(\Delta x^5) \quad (2-37)$$

### 2-2-2 平滑指示器

如果區域內有不連續面的存在，在組合數值通量中，將降低含有不連續面的計算元的權重值，以減少數值震盪的發生與影響；而如何去衡量計算元內的平滑程度，來做權重值的調整與修正，在此

利用定義之平滑指示器(Jiang and Shu 1996)：

$$\beta_r = \sum_{j=1}^2 \Delta x^{2j-1} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left( \frac{d^j \hat{f}^r}{dx^j} \right)^2 dx \quad (2-38)$$

將(2-21)式代入，可得

$$\beta_r = a_1^2 \Delta x^2 + \frac{13a_2^2 \Delta x^4}{3} \quad (2-39)$$

再代入(2-22)式之  $a_1$ 、 $a_2$ ，可得各計算元代表之平滑指示器為

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{13}{12} (f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2})^2 + \frac{1}{4} (3f_i - 4f_{i+1} + f_{i+2})^2 \\ \beta_1 &= \frac{13}{12} (f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1})^2 + \frac{1}{4} (f_{i+1} - f_{i-1})^2 \\ \beta_2 &= \frac{13}{12} (f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i)^2 + \frac{1}{4} (f_{i-2} - 4f_{i-1} + 3f_i)^2 \end{aligned} \quad (2-40)$$

而各計算元權重的修正則為

$$\omega_r = \frac{\alpha_r}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2}, \quad \text{其中 } \alpha_r = \frac{\bar{\omega}_r}{(\epsilon + \beta_r)^2} \quad (2-41)$$

$\epsilon$  為一微小數值，以限制  $\alpha_r$  值有其最大上限值，而不會因

$\beta_r \rightarrow 0$  時， $\alpha_r$  因為無限大值超過程式所能定義數值的最大邊界，

而造成程式的運算中止。

### 2-2-3 WENO5 算則

與 ENO 算則相同，在此導入通量分離的概念將物理通量分離成正、負兩部分，定義出以三組計算元所組合而成的 WENO5 算則 (Jiang and Shu 1996)。以下為 WENO5-LLF-S 算則的說明：

空間離散採用 WENO5-LLF-S 算則，則數值通量正的部分  $f_{i+1/2}^+$

$$f_{i+1/2}^+ = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2f_i^+ + 5f_{i+1}^+ - f_{i+2}^+ \\ -f_{i-1}^+ + 5f_i^+ + 2f_{i+1}^+ \\ 2f_{i-2}^+ - 7f_{i-1}^+ + 11f_i^+ \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \omega_0^+ \\ \omega_1^+ \\ \omega_2^+ \end{pmatrix} \quad (2-42)$$

其中權重  $\omega_r^+$  計算如下

$$\omega_r^+ = \frac{\alpha_r^+}{\alpha_0^+ + \alpha_1^+ + \alpha_2^+}, \quad \alpha_r^+ = \frac{\bar{\omega}_r^+}{(\epsilon + \beta_r^+)^2}, \quad r = 0,1,2$$

$$\bar{\omega}_0^+ = 0.3, \quad \bar{\omega}_1^+ = 0.6, \quad \bar{\omega}_2^+ = 0.1 \quad (2-43)$$

平滑指示器  $\beta_r^+$  定義為

$$\beta_0^+ = \frac{13}{12} (f_i^+ - 2f_{i+1}^+ + f_{i+2}^+)^2 + \frac{1}{4} (3f_i^+ - 4f_{i+1}^+ + f_{i+2}^+)^2$$

$$\beta_1^+ = \frac{13}{12} (f_{i-1}^+ - 2f_i^+ + f_{i+1}^+)^2 + \frac{1}{4} (f_{i+1}^+ - f_{i-1}^+)^2 \quad (2-44)$$

$$\beta_2^+ = \frac{13}{12} (f_{i-2}^+ - 2f_{i-1}^+ + f_i^+)^2 + \frac{1}{4} (f_{i-2}^+ - 4f_{i-1}^+ + 3f_i^+)^2$$

數值通量負的部分  $f_{i+1/2}^-$

$$f_{i+1/2}^- = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 11f_{i+1}^- - 7f_{i+2}^- + 2f_{i+3}^- \\ 2f_i^- + 5f_{i+1}^- - f_{i+2}^- \\ -f_{i-1}^- + 5f_i^- + 2f_{i+1}^- \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \omega_0^- \\ \omega_1^- \\ \omega_2^- \end{pmatrix} \quad (2-45)$$

其中權重  $\omega_r^-$  計算如下

$$\omega_r^- = \frac{\alpha_r^-}{\alpha_0^- + \alpha_1^- + \alpha_2^-}, \quad \alpha_r^- = \frac{\bar{\omega}_r^-}{(\epsilon + \beta_r^-)^2}, \quad r = 0,1,2$$

$$\bar{\omega}_0^- = 0.1, \quad \bar{\omega}_1^- = 0.6, \quad \bar{\omega}_2^- = 0.3 \quad (2-46)$$

平滑指示器  $\beta_r^-$  定義為

$$\beta_0^- = \frac{13}{12} (f_{i+1}^- - 2f_{i+2}^- + f_{i+3}^-)^2 + \frac{1}{4} (3f_{i+1}^- - 4f_{i+2}^- + f_{i+3}^-)^2$$

$$\beta_1^- = \frac{13}{12} (f_i^- - 2f_{i+1}^- + f_{i+2}^-)^2 + \frac{1}{4} (f_{i+2}^- - f_i^-)^2 \quad (2-47)$$

$$\beta_2^- = \frac{13}{12} (f_{i-1}^- - 2f_i^- + f_{i+1}^-)^2 + \frac{1}{4} (f_{i-1}^- - 4f_i^- + 3f_{i+1}^-)^2$$

## 2-3 差分式 WENO 算則

差分式算則將數值通量分為一階及高階通量，各種滿足熵條件的一階算則多可直接應用。差分式算則與 Shu 等所發展的算則主要差異是以通量差值進行分離，原型式則是以通量進行分離。差分式算則如下：

$$\hat{F}_{i+\frac{1}{2}} = \hat{F}_{i+\frac{1}{2}}^L + \hat{F}_{i+\frac{1}{2}}^H \quad (2-48)$$

其中  $\hat{F}^L$  為一階數值通量， $\hat{F}^H$  為高階數值通量。有許多一階算則可供選擇為一階數值通量，如前節所介紹之 Godunov flux 及 Engquist-Osher flux、Roe flux、Lax-Friedrich flux 等算則。之後在第四章會以一維淺水波方程式為例，對差分式 WENO 算則的計算流程，做更詳細的介紹。

## 2-4 Mapped WENO 算則

Henrick et al. (2005) 觀察到了原始 WENO 算則中計算非線性權重所使用的平滑指示器在某些特定的臨界點時可能會失去精確性，因此他們提出了 Mapped WENO 算則，此一算則改善了原始 WENO 算則在臨界點處的精確度，Mapped WENO 算則主要以 Mapped 函數來計算原始 WENO 算則中非線性權重：

$$g_r(\omega_r) = \frac{\omega_r(\bar{\omega}_r + \bar{\omega}_r^2 - 3\bar{\omega}_r\omega_r + \omega_r^2)}{\bar{\omega}_r^2 + (1 - 2\bar{\omega}_r)\omega_r}, \quad r = 0, 1, 2 \quad (2-49)$$

其中  $\omega_r \in [0,1]$ ，為原始 WENO 算則計算所得的權重， $\bar{\omega}_r$  則為上述之理想權重值。此一 Mapped 函數為單調漸增函數，具有有限斜率及下列特性：

$$g_r(0) = 0, \quad g_r(1) = 1, \quad g_r(\bar{\omega}_r) = \bar{\omega}_r, \quad g_r'(\bar{\omega}_r) = 0, \quad g_r''(\bar{\omega}_r) = 0 \quad (2-50)$$

調整後的權重可由下式獲得：

$$\omega_r^M = \frac{\alpha_r^*}{\alpha_1^* + \alpha_2^* + \alpha_3^*}, \quad \alpha_r^* = g_r(\omega_r) \quad (2-51)$$

而經 Mapped 函數轉換所得之  $\alpha_r^*$  值與原始值的相關位置比較如

圖 2-3 所示：

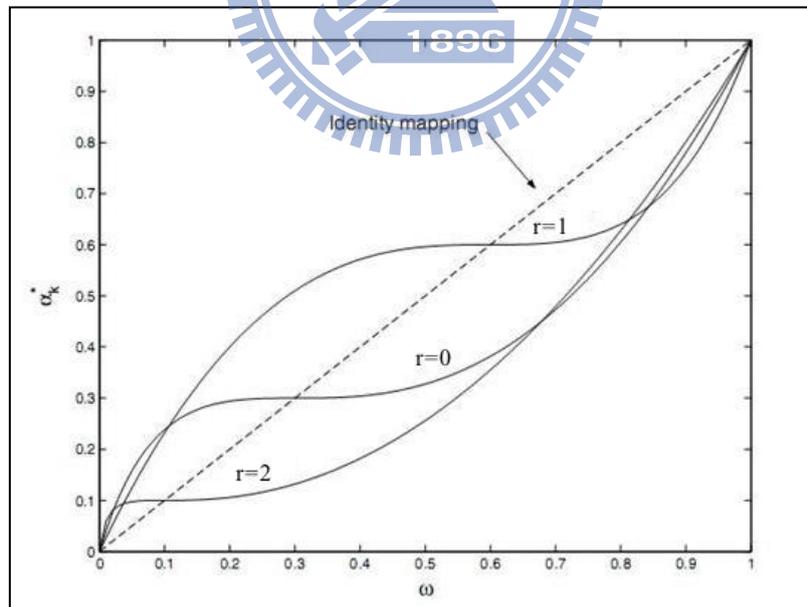


圖 2-3 原始權重經 Mapped 函數轉換值圖

(摘自 Henrick et al. 2005)

根據 Henrick et al. (2005) 分析的結果，此一算則不但可以改善平滑區域的精度，同時受到微小參數值  $\varepsilon$  的影響也大為減少，收斂性則改善許多。

## 2-5 修正平滑指示器 WENO 算則

非線性權重與平滑指示器在震波附近之解析度上扮演很重要的角色，同時兩者均直接影響震波前後之震盪與收斂性。Zhang and Shu (2007) 針對高階 WENO5 算則提出了修正平滑指示器(modified smoothness indicator)的觀念，依據他們測試的結果顯示，在不受邊界條件之影響下的一維與二維強震波無黏性穩態流場問題中，此一修正後的算則可以改進其收斂性。

將(3-40)式採泰勒級數展開：

$$\begin{aligned}\beta_0 &= \frac{1}{4}(2f'\Delta x - \frac{2}{3}f'''\Delta x^3)^2 + \frac{13}{12}(f''\Delta x^2) + O(\Delta x^6) \\ \beta_1 &= \frac{1}{4}(2f'\Delta x + \frac{2}{3}f'''\Delta x^3)^2 + \frac{13}{12}(f''\Delta x^2) + O(\Delta x^6) \\ \beta_2 &= \frac{1}{4}(2f'\Delta x - \frac{2}{3}f'''\Delta x^3)^2 + \frac{13}{12}(f''\Delta x^2) + O(\Delta x^6)\end{aligned}\quad (2-52)$$

可將平滑指示器分為兩部份：

$$\begin{aligned}P_1 &= \frac{1}{4}(2f'\Delta x \pm \frac{2}{3}f'''\Delta x^3)^2, \quad \text{含有一次微分與三次微分項} \\ P_2 &= \frac{13}{12}(f''\Delta x^2), \quad \text{含二次微分項}\end{aligned}\quad (2-53)$$

在極劇的高強度震波傳遞中，以圖 2-4 的階梯函數為例，圖 2-5

為階梯函數的一次微分與二次微分項的大小分佈，可發現越靠近震波的中心點 C 處，一次微分項越大而二次微分項則越小趨近於零，因此若加入二次微分項做為平滑度的判別，對於震波中心兩鄰近點 B、D 會增大其平滑度，而影響震波傳遞在計算上的收斂性。

在原始平滑指示器中， $P_1$  項的大小主決於一次微分項，而  $P_2$  項則為二次微分項，綜合以上的結論。Zhang and Shu (2007)建議在穩定的震波區域捨棄  $P_2$  項使用修正平滑指示器。原始 WENO5 算則之平滑指示器(2-44)式與(2-47)式，經修正後表示如下：

$$\begin{aligned}\beta_0^+ &= (3f_i^+ - 4f_{i+1}^+ + f_{i+2}^+)^2, \beta_0^- = (3f_{i+1}^- - 4f_{i+2}^- + f_{i+3}^-)^2 \\ \beta_1^+ &= (f_{i+1}^+ - f_{i-1}^+)^2, \beta_1^- = (f_{i+2}^- - f_i^-)^2 \\ \beta_2^+ &= (f_{i-2}^+ - 4f_{i-1}^+ + 3f_i^+)^2, \beta_2^- = (f_{i-1}^- - 4f_i^- + 3f_{i+1}^-)^2\end{aligned}\quad (2-54)$$

同理，修正平滑指示器亦適用於差分式 WENO5 算則。

圖 2-6 為 Zhang and Shu (2007)中之一維駐波案例，所使用統御方程式為一維尤拉方程式，數值求解使用 WENO 算則，其流程與計算類似於一維淺水波方程式，此案例相關的設定參數與起始條件詳細請見以上文獻。圖 2-7 為此案例震波中心與鄰近處(2-53)式之  $P_1$ 、 $P_2$  與  $P_1 + P_2$  值，可明顯發現在捨去  $P_2$  項後，計算元之間的相對比例較原來為大，理論會有更好的收斂性。

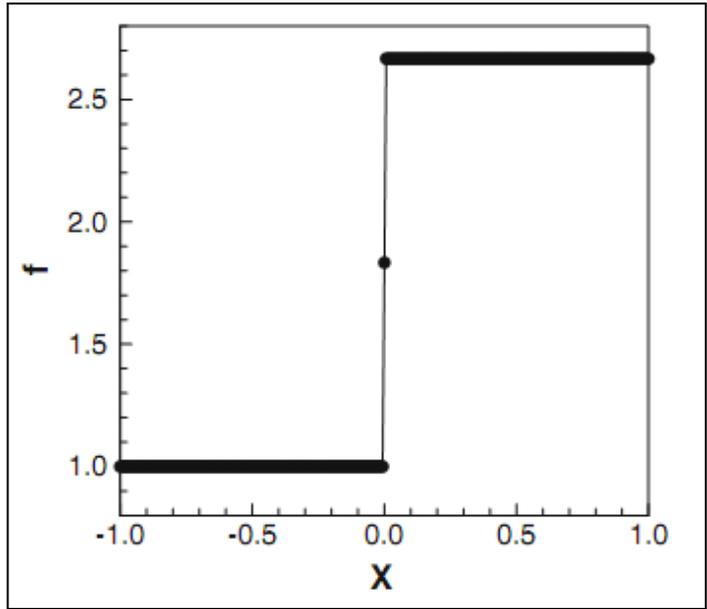


圖 2-4 階梯函數圖

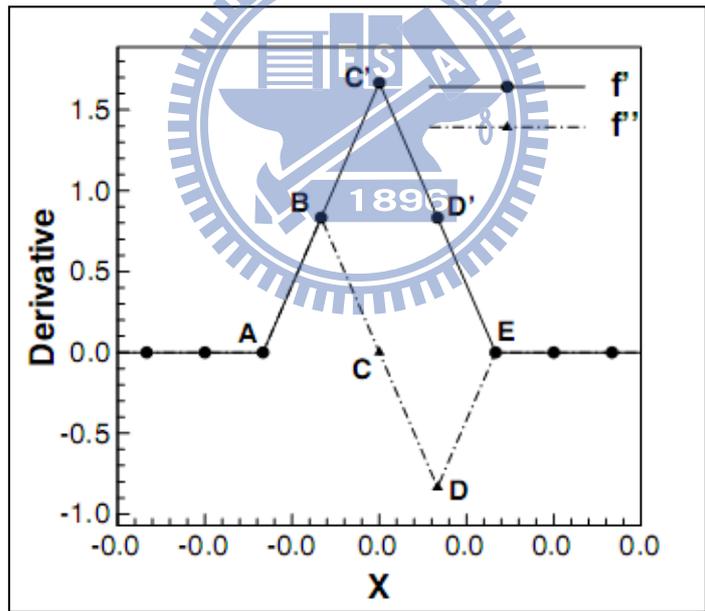


圖 2-5 階梯函數的一次微分與二次微分項圖

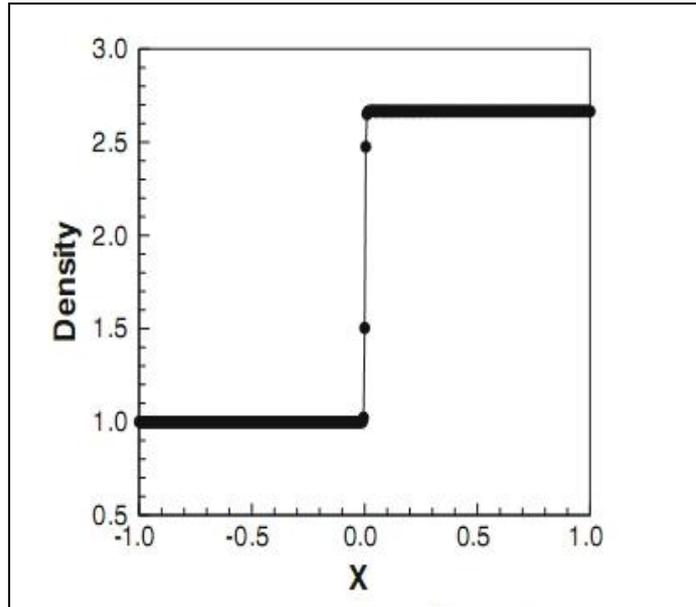


圖 2-6 一維尤拉方程式駐波案例圖

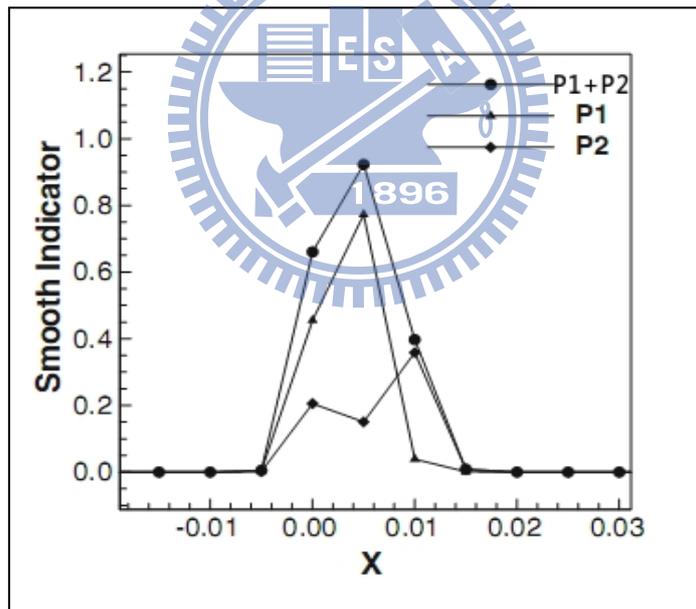


圖 2-7 駐波案例之  $P_1$ 、 $P_2$  與合值分佈圖

(以上四圖皆摘自 Zhang and Shu 2007)

## 第三章 WENO 運用於一維淺水波方程式

本章說明 WENO 算則應用於一維淺水波方程式，數值方法時間離散採用三階時間準度之 TVD Runge-Kutta 積分法，空間離散則採用差分式的守恆形式 WENO 算則(Vukovic and Sopta 2002)，搭配有限體積法求解，並延續 2-3 節對差分式數值通量作更進一步的說明。

### 3-1 統御方程式

淺水波方程式，源自於納維-斯托克斯方程式(navier-stokes equations)採水深積分的形式，並定義以下幾點以作簡化：(1)水平方向的尺度遠大於垂直方向的尺度、(2)不可壓縮流、(3)忽略風力與柯氏力的影響、(4)垂直壓力梯度採靜水壓力分佈、(5)在水平方向的底床坡度變化極小、(6)在垂直方向的速度分佈為定值。

因此一維淺水波方程式守恆形式(conservation form)表示如下：

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = S(u, x) \quad (3-1)$$

$$u = \begin{bmatrix} h \\ q \end{bmatrix}, f(u) = \begin{bmatrix} hv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} 0 \\ -gh(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{n^2 v|v|}{h^{4/3}}) \end{bmatrix} \quad (3-2)$$

其中  $h$  為水深(m)， $q$  為單寬流量(cms)， $v = q/h$  為流速(m/s)， $z$  為底床高程(m)， $n$  為曼寧糙度， $g$  為重力加速度( $m/s^2$ )。另定義 Jacobian 矩陣 A：

$$A = \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -v^2 + gh & 2v \end{bmatrix} \quad (3-3)$$

上式所對應之特徵值有二：

$$\lambda^1 = (v - \sqrt{gh})_{i+1/2}, \quad \lambda^2 = (v + \sqrt{gh})_{i+1/2} \quad (3-4)$$

Jacobian 矩陣 A 的左、右特徵向量依上下式分為  $l_{i+1/2}^{(p)}$ 、 $r_{i+1/2}^{(p)}$ ，上標  $p$  表示為運算矩陣中第  $p$  個位置，下標  $(i+1/2)$  意指格網  $i$  與  $i+1$  之交界面位置，而交界面位置之特徵速度及特徵向量以算數平均求解，圖 3-1 為計算格網示意圖。

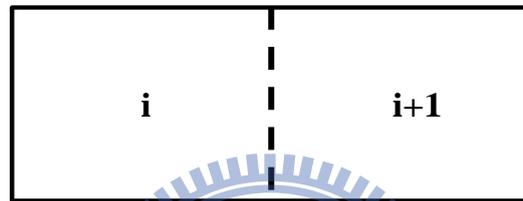


圖 3-1 計算格網示意圖

將(3-1)式中對流項移至等號右側，再以空間運算子  $\mathcal{L}(u, x)$  代表對流項與源項兩項之和，表示如下：

$$\partial_t u = \mathcal{L}(u, x) \quad (3-5)$$

$$\mathcal{L}(u, x) = -\partial_x f(u) + S(u, x) \quad (3-6)$$

## 3-2 數值方法

### 3-2-1 時間離散

利用三階 TVD-Runge-Kutta 積分法，考慮半離散化(semi-discrete)

系統，將(3-5)式表為時間項之離散式後，其積分形式如下：

$$u^{(1)} = u^n + \Delta t \mathcal{L}(u^n, x)$$

$$u^{(2)} = \frac{3}{4}u^n + \frac{1}{4}u^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t \mathcal{L}(u^{(1)}, x) \quad (3-7)$$

$$u^{n+1} = \frac{1}{3}u^n + \frac{2}{3}u^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t \mathcal{L}(u^{(2)}, x)$$

### 3-2-2 空間離散

基於每個網格單元的局部通量平衡，本文採用空間離散與時間離散分開處理的半離散有限體積法(finite volume method)。(3-5)式之空間運算子部分 $\mathcal{L}(u, x)$ ，以有限體積法數值通量之格式表示：

$$\mathcal{L}(u, x) = -\frac{1}{\Delta x} \left( \hat{\mathcal{F}}_{i+\frac{1}{2}} - \hat{\mathcal{F}}_{i-\frac{1}{2}} \right) + S_i \quad (3-8)$$

式中  $S_i$  為源項通量， $\hat{\mathcal{F}}_{i+\frac{1}{2}}$ 、 $\hat{\mathcal{F}}_{i-\frac{1}{2}}$  為數值通量，計算採用五階的差分式守恆形式 WENO 算則。(3-8)式說明格網左右交界面淨通量之和，加上該格網之源項通量即為控制體積內物理量之變化，圖 3-2 為數值通量示意圖。

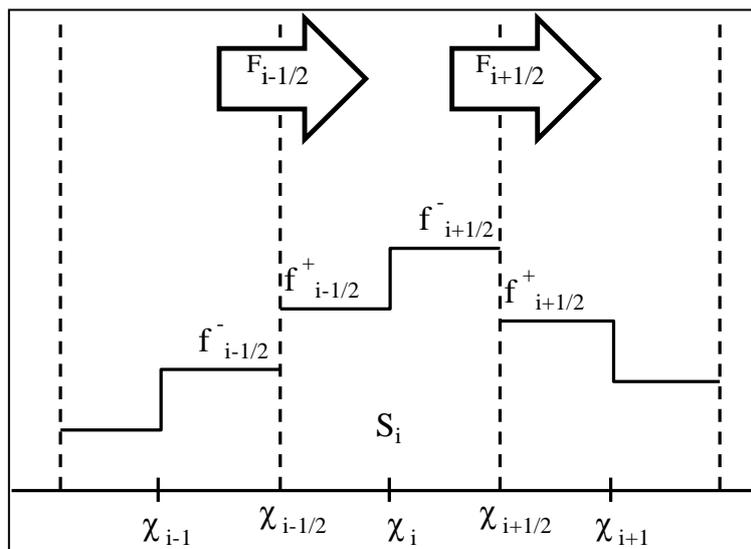


圖 3-2 有限體積法之數值通量示意圖

### 3-2-3 守恆形式差分式 WENO 算則

引用 Vukovic and Sopta (2002)之文獻，說明差分式守恆形式 WENO 算則之理論。依據(2-48)式可知差分型式包含一階與高階數值通量的計算，以下分別介紹 LLF 算則與 RF 算則。

a. Lax-Friedrichs flux(LLF)算則：

一階通量的部份採

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{F}}_{i+\frac{1}{2}}^L &= \frac{1}{2}((f_i + f_{i+1}) - \alpha(u_{i+1} - u_i)) \cdot \ell_{i+\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{p=1}^2 \frac{1}{2}((f_i + f_{i+1}) - \alpha(u_{i+1} - u_i)) \cdot \ell_{i+\frac{1}{2}}^{(p)}\end{aligned}\quad (3-9)$$

$\alpha = \max|f'(u)|$ ，為全計算域最大特徵速度之絕對值

高階通量則定義為

$$\hat{\mathcal{F}}_{i+\frac{1}{2}}^H = (f_{i+\frac{1}{2}}^+ - \frac{1}{2}(f_i + \alpha u_i)) \cdot \ell_{i+\frac{1}{2}} + (f_{i+\frac{1}{2}}^- - \frac{1}{2}(f_{i+1} - \alpha u_{i+1})) \cdot \ell_{i+\frac{1}{2}}\quad (3-10)$$

組合式(3-9)與式(3-10)可得完整之 LLF flux 算則：

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{F}}_{i+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2}((f_i + f_{i+1}) - \alpha(u_{i+1} - u_i)) \cdot \ell_{i+\frac{1}{2}} + \left( f_{i+\frac{1}{2}}^+ - \frac{1}{2}(f_i + \alpha u_i) \right) \\ &\quad \cdot \ell_{i+\frac{1}{2}} + \left( f_{i+\frac{1}{2}}^- - \frac{1}{2}(f_{i+1} - \alpha u_{i+1}) \right) \cdot \ell_{i+\frac{1}{2}}\end{aligned}\quad (3-11)$$

b. Roe flux(RF)算則：

一階通量的部份採

$$\hat{\mathcal{F}}_{i+\frac{1}{2}}^L = \begin{cases} f_i \cdot \ell_{i+\frac{1}{2}} & , \text{ if } \lambda_{i+\frac{1}{2}} \geq 0 \\ f_{i+1} \cdot \ell_{i+\frac{1}{2}} & , \text{ otherwise} \end{cases} \quad (3-12)$$

高階通量則為：

$$\hat{\mathcal{F}}_{i+\frac{1}{2}}^H = \begin{cases} (f_{i+\frac{1}{2}}^+ - f_i) \cdot \ell_{i+\frac{1}{2}} & , \text{ if } \lambda_{i+\frac{1}{2}} \geq 0 \\ (f_{i+\frac{1}{2}}^- - f_{i+1}) \cdot \ell_{i+\frac{1}{2}} & , \text{ otherwise} \end{cases} \quad (3-13)$$

組合式(3-12)與式(3-13) 得完整之 LLF flux 算則：

$$\hat{\mathcal{F}}_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} f_i \cdot \ell_{i+\frac{1}{2}} + (f_{i+\frac{1}{2}}^+ - f_i) \cdot \ell_{i+\frac{1}{2}} & , \text{ if } \lambda_{i+\frac{1}{2}} \geq 0 \\ f_{i+1} \cdot \ell_{i+\frac{1}{2}} + (f_{i+\frac{1}{2}}^- - f_{i+1}) \cdot \ell_{i+\frac{1}{2}} & , \text{ otherwise} \end{cases} \quad (3-14)$$

在數值模擬時因流場特徵速度傳遞方向不同，而選擇不同的數值通量分離方法，分別為 LLF flux 及 RF flux formulations，以下整理各種情況為：

(a)  $\lambda_i^{(p)} \lambda_{i+1}^{(p)} \leq 0$  (LLF flux formulations)

$$\hat{\mathcal{F}}_{i+\frac{1}{2}}^{(p)} = \frac{1}{2} \left( (f_i + f_{i+1}) - \alpha(u_{i+1} - u_i) \right) \cdot \ell_{i+\frac{1}{2}}^{(p)} + \mathcal{P}_{i+\frac{1}{2}}^+ + \mathcal{P}_{i+\frac{1}{2}}^- \quad (3-15)$$

(b)  $\lambda_i^{(p)} \lambda_{i+1}^{(p)} > 0$  (RF flux formulations)

$$\hat{\mathcal{F}}_{i+\frac{1}{2}}^{(p)} = \begin{cases} f_i \cdot \ell_{i+\frac{1}{2}}^{(p)} + \mathcal{P}_{i+\frac{1}{2}}^+ & \text{if } \lambda_{i+\frac{1}{2}}^{(p)} > 0 \\ f_{i+1} \cdot \ell_{i+\frac{1}{2}}^{(p)} + \mathcal{P}_{i+\frac{1}{2}}^- & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (3-16)$$

上兩式中， $\mathcal{P}_{i+\frac{1}{2}}^+$ 、 $\mathcal{P}_{i+\frac{1}{2}}^-$  兩項代表高階之正負數值通量，計算以

WENO 算則格式表示如下：

$$\mathcal{P}_{i+\frac{1}{2}}^\pm = \sum_{r=0}^{k-1} \omega_r \sum_{j=0}^{k-1} C_{r,i-r-1+j} \hat{\mathcal{V}}_{i-r-1+j}^\pm \quad (3-17)$$

上式  $\hat{v}^{\pm}_{i-r-1+j}$  則為：

(a)  $\lambda_i^{(p)} \lambda_{i+1}^{(p)} \leq 0$  (LLF flux formulations)

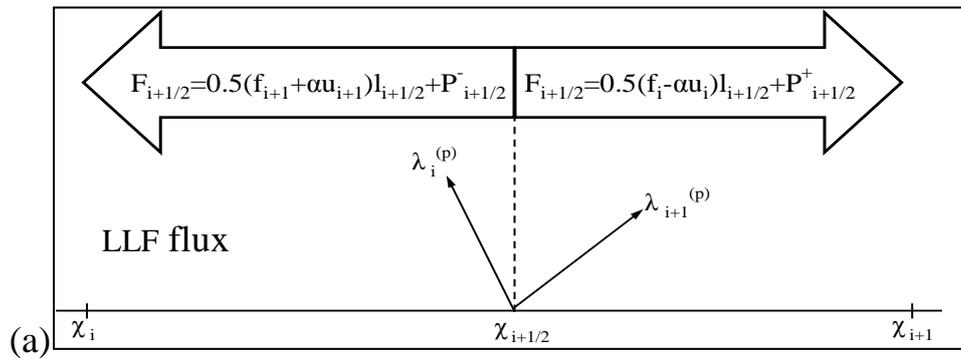
$$\hat{v}^{\pm} = \frac{1}{2} \left( (f \pm \alpha u) - (f_{I^{\pm}} + \alpha u_{I^{\pm}}) \right) \cdot \ell_{i+\frac{1}{2}}^{(p)} \quad (3-18)$$

(b)  $\lambda_i^{(p)} \lambda_{i+1}^{(p)} > 0$  (RF flux formulations)

$$\hat{v}^{\pm} = \frac{1 \pm \text{sgn}(\lambda_{i+\frac{1}{2}}^{(p)})}{2} (f - f_{I^{\pm}}) \cdot \ell_{i+\frac{1}{2}}^{(p)} \quad (3-19)$$

其中，下標  $I^+ = i, I^- = i + 1$ 。

(3-15)式說明兩格網間特徵速度之傳遞方向互為反方向時，代表數值通量在  $i+1/2$  位置有進有出，所以高階數值通量應同時考慮  $\mathcal{P}_{i+\frac{1}{2}}^+$ 、 $\mathcal{P}_{i+\frac{1}{2}}^-$  兩項，如圖 3- 3(a)所示；反之 (3-16)式則說明若兩格網間特徵速度之傳遞方向皆為同方向時，代表數值通量在  $i+1/2$  位置只往單一方向傳遞，因此高階數值通量只需依傳遞方向選擇  $\mathcal{P}_{i+\frac{1}{2}}^+$  或  $\mathcal{P}_{i+\frac{1}{2}}^-$ ，示意圖如圖 3- 3(b)及圖 3- 3(c)。



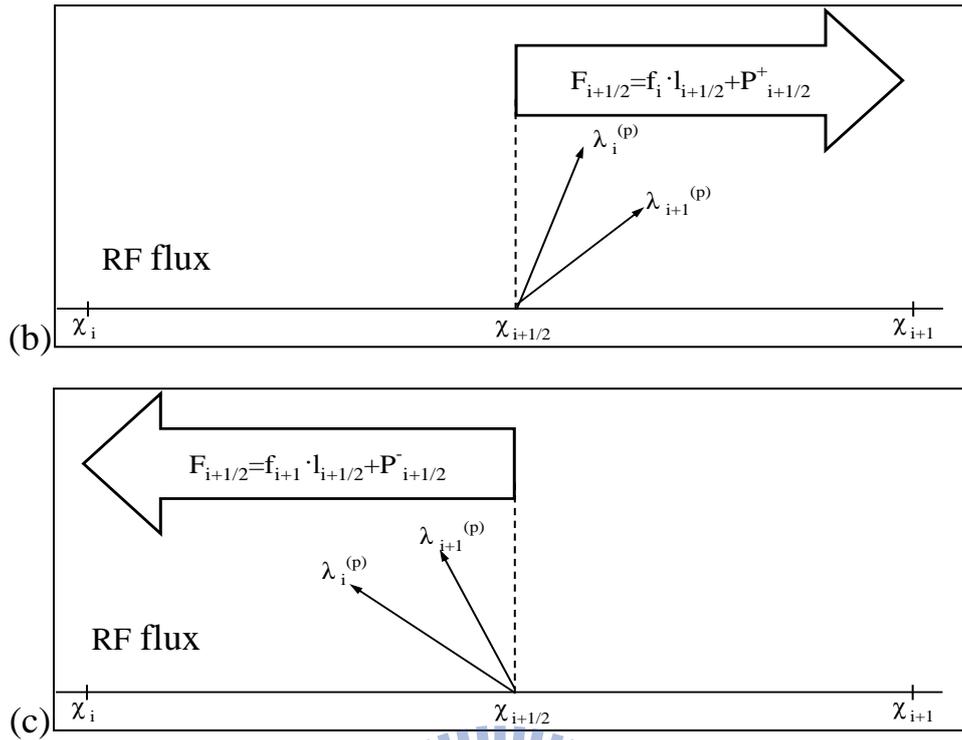


圖 3-3 數值通量示意圖

(a)  $\lambda_i^{(p)} \lambda_{i+1}^{(p)} \leq 0$ , (b)  $\lambda_i^{(p)} \& \lambda_{i+1}^{(p)} > 0$ , (c)  $\lambda_i^{(p)} \& \lambda_{i+1}^{(p)} < 0$

源項部分，同理使用通量分離的概念，將源項影響分為左、右兩部分如所示。

$$S_i = S_{i+\frac{1}{2},L} + S_{i-\frac{1}{2},R} \quad (3-20)$$

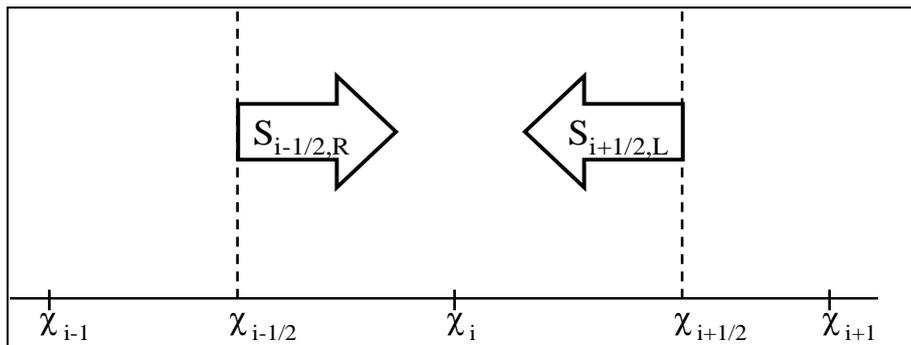


圖 3-4 源項通量示意圖

同理依據特徵速度傳遞方向不同，分別選擇 LLF flux 及 RF flux 的數值通量分離方法，將  $S_{i+\frac{1}{2},L}$ 、 $S_{i+\frac{1}{2},R}$  分離表示如下：

(a)  $\lambda_i^{(p)}\lambda_{i+1}^{(p)} \leq 0$  (LLF flux formulations)

$$\begin{aligned} S_{i+\frac{1}{2},L} &= \frac{1-\text{sgn}\left(\lambda_{i+\frac{1}{2}}^{(p)}\right)}{2\Delta x} G(u_i, u_{i+1}) + \frac{1}{\Delta x} \left(Q_{i+\frac{1}{2}}^+ + Q_{i+\frac{1}{2}}^-\right) \\ S_{i+\frac{1}{2},R} &= \frac{1+\text{sgn}\left(\lambda_{i+\frac{1}{2}}^{(p)}\right)}{2\Delta x} G(u_i, u_{i+1}) - \frac{1}{\Delta x} \left(Q_{i+\frac{1}{2}}^+ + Q_{i+\frac{1}{2}}^-\right) \end{aligned} \quad (3-22)$$

(b)  $\lambda_i^{(p)}\lambda_{i+1}^{(p)} > 0$  (RF flux formulations)

$$\begin{aligned} S_{i+\frac{1}{2},L} &= \frac{1-\text{sgn}\left(\lambda_{i+\frac{1}{2}}^{(p)}\right)}{2\Delta x} G(u_i, u_{i+1}) + \frac{1}{\Delta x} Q_{i+\frac{1}{2}}^+ \\ S_{i+\frac{1}{2},R} &= \frac{1+\text{sgn}\left(\lambda_{i+\frac{1}{2}}^{(p)}\right)}{2\Delta x} G(u_i, u_{i+1}) - \frac{1}{\Delta x} Q_{i+\frac{1}{2}}^- \end{aligned} \quad (3-23)$$

以上  $G$  為某定義函數， $Q_{i+\frac{1}{2}}^+$  及  $Q_{i+\frac{1}{2}}^-$  計算方法可參考 (3-17) ~

(3-19)式，以 WENO 算則格式表示如下：

$$Q_{i+\frac{1}{2}}^\pm = \sum_{r=0}^{k-1} \omega_r \sum_{j=0}^{k-1} C_{r,i-r-1+j} \hat{\omega}_{i-r-1+j}^\pm \quad (3-24)$$

上式  $\hat{\omega}_{i-r-1+j}^\pm$  則為：

(a)  $\lambda_i^{(p)}\lambda_{i+1}^{(p)} \leq 0$  (LLF flux formulations)

$$\hat{\omega}_{i+\frac{1}{2}}^\pm = \frac{1}{2} \left( G(u_{I^\pm}, u_{i+\frac{1}{2}}) \pm \text{sgn}\left(\lambda_{i+\frac{1}{2}}^{(p)}\right) \beta_{i+\frac{1}{2}} Z(u_{I^\pm}, u_{i+\frac{1}{2}}) \cdot \ell_{i+\frac{1}{2}}^{(p)} \right) \quad (3-25)$$

(b)  $\lambda_i^{(p)}\lambda_{i+1}^{(p)} > 0$  (RF flux formulations)

$$\hat{\omega}_{i+\frac{1}{2}}^\pm = \frac{1 \pm \text{sgn}\left(\lambda_{i+\frac{1}{2}}^{(p)}\right)}{2} G(u_{I^\pm}, u_{i+\frac{1}{2}}) \cdot \ell_{i+\frac{1}{2}}^{(p)} \quad (3-26)$$

其中  $\beta_{i+\frac{1}{2}} = g \frac{(h_i+h_{i+1})}{2}$ ， $G$ 、 $Z$  函數則依守恆律定義為：

$$G(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \frac{h_1+h_2}{2} (z_2 - z_1) \end{pmatrix} \quad (3-27)$$

$$Z(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -(z_2 - z_1) \end{pmatrix} \quad (3-28)$$

(3-27)式與(3-28)式中， $h_1$ 、 $h_2$  與  $z_1$ 、 $z_2$  為對應其點位 1 與 2 之水深與底床高。

在原始的差分式 WENO 算則中，對流項(3-17)式中的權重依據(3-18)與(3-19)式的  $\hat{v}^\pm$  通量計算決定，為  $\omega_r(\hat{v}^\pm)$  形式；源項(3-24)式的權重，則是以(3-25)式與(3-26)式的  $\hat{\omega}^\pm$  通量為依據，為  $\omega_r(\hat{\omega}^\pm)$  形式。

而差分式守恆形式 WENO 算則依據結合 exact C (conservation) 性質，水體靜止時，則必滿足：

$$\hat{v}^\pm - \hat{\omega}^\pm = 0 \quad (3-29)$$

再結合了對流項與源項所對應的通量，權重皆以  $(\hat{v}^\pm - \hat{\omega}^\pm)$  作為新輸入通量計算決定，為  $\omega_r(\hat{v}^\pm - \hat{\omega}^\pm)$  的形式，因此重新定義(3-17)式與(3-24)式：

$$\mathcal{P}_{i+\frac{1}{2}}^\pm = \sum_{r=0}^{k-1} \omega_r (\hat{v}^\pm - \hat{\omega}^\pm) \sum_{j=0}^{k-1} C_{r,i-r-1+j} \hat{v}^\pm_{i-r-1+j} \quad (3-30)$$

$$Q_{i+\frac{1}{2}}^\pm = \sum_{r=0}^{k-1} \omega_r (\hat{v}^\pm - \hat{\omega}^\pm) \sum_{j=0}^{k-1} C_{r,i-r-1+j} \hat{\omega}^\pm_{i-r-1+j} \quad (3-31)$$

### 3-3 乾溼交界處理

淺水波方程式於數值計算中常含有源項，如應用於實際不規則地形之淹水模擬時，對乾、濕交界之處理不可避免。當水流遇到高出水面之地形時，水深變為零，在計算特徵速度時，分母有一水深  $h$  項，計算到水深為零處，會產生發散問題。

本文參考 George (2004) 之推導，其概念為先求解濕鋒之特徵速度，再利用積分曲線推求乾鋒之特徵速度，如此可避免乾鋒水深為零處產生之數值發散問題。

此外定義一最小水深容忍值  $h_d$ ， $h_d$  之值可依模擬案例之尺度加以選擇，由前一時刻計算所得之水深  $h$  與  $h_d$  比較，以判斷計算點之乾溼狀況。若水深  $h$  大於  $h_d$  則該點屬於濕床情況，無須任何處理即可進行數值計算；當計算遇到水深為零或小於  $h_d$  時，則表示該點為乾床狀態，需推求乾鋒之特徵速度。

當溼鋒由左至右傳遞至乾床，如圖 3-5(a) 所示，位置  $i+1/2$  之特徵速度為：

$$\begin{aligned}\lambda_{i+1/2}^1 &= v_{LHS} - \sqrt{gh_{LHS}} \\ \lambda_{i+1/2}^2 &= v_{LHS} + 2\sqrt{gh_{LHS}}\end{aligned}\quad (3-32)$$

反之溼鋒由右至左傳遞至乾床，如圖 3-5(b) 所示時，位置  $i+1/2$  之特徵速度為：

$$\lambda_{i+1/2}^1 = v_{RHS} - 2\sqrt{gh_{RHS}}$$

$$\lambda_{i+1/2}^2 = v_{RHS} + \sqrt{gh_{RHS}} \quad (3-33)$$

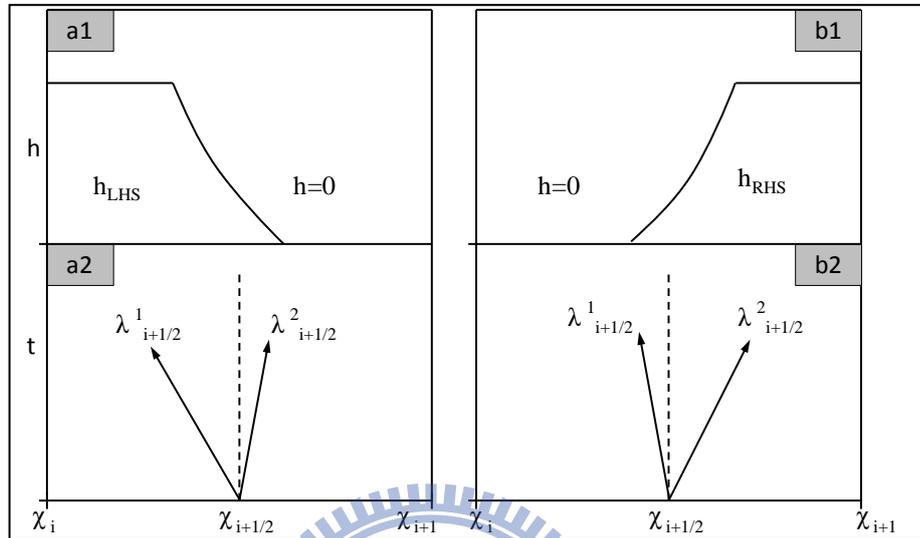


圖 3-5 乾溼交界示意圖

a 為溼鋒由左至右傳遞，a1 為水面線，a2 為特徵速度示意圖。

b 為溼鋒由右至左傳遞，b1 為水面線，b2 為特徵速度示意圖。

### 3-4 稀疏波

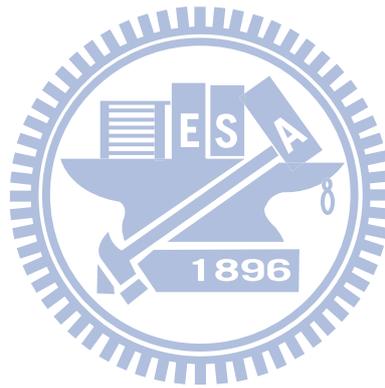
當控制體積內各點之特徵曲線兩兩相互遠離，且無交會之可能，該現象稱稀疏波(rarefaction wave)。

以潰壩案件為例，當潰壩發生時，在潰壩水體前端會產生一個震波(compression wave)，並迅速形成一陡直不連續面向前移動，同時於潰壩水體後方產生一稀疏波往後方移動，如觀察特徵曲線圖則可發現稀疏波會在特徵曲線圖上形成一扇形區域，如圖 3-6 所示；模式模

擬之數值解可分為兩組弱解，分為稀疏波解及震波解，兩解皆能滿足方程式，這個不唯一性乃守恆律方程式的一個缺陷。因此本文參考 Einfeldt (1988) 之熵修正概念，將(3-4)式之特徵速度修正如下：

$$\begin{aligned}\lambda_{i+1/2}^1 &= \min(\lambda_i^1, \lambda_{i+1/2}^1, \hat{\lambda}_{i+1/2}^1) \\ \lambda_{i+1/2}^2 &= \max(\lambda_{i+1}^2, \lambda_{i+1/2}^2, \hat{\lambda}_{i+1/2}^2)\end{aligned}\quad (3-34)$$

其中  $\hat{\lambda}_{i+1/2}^1$ 、 $\hat{\lambda}_{i+1/2}^2$  為 Roe Speed，藉由此修正式對震波解附加條件，以篩選出具物理意義之解。



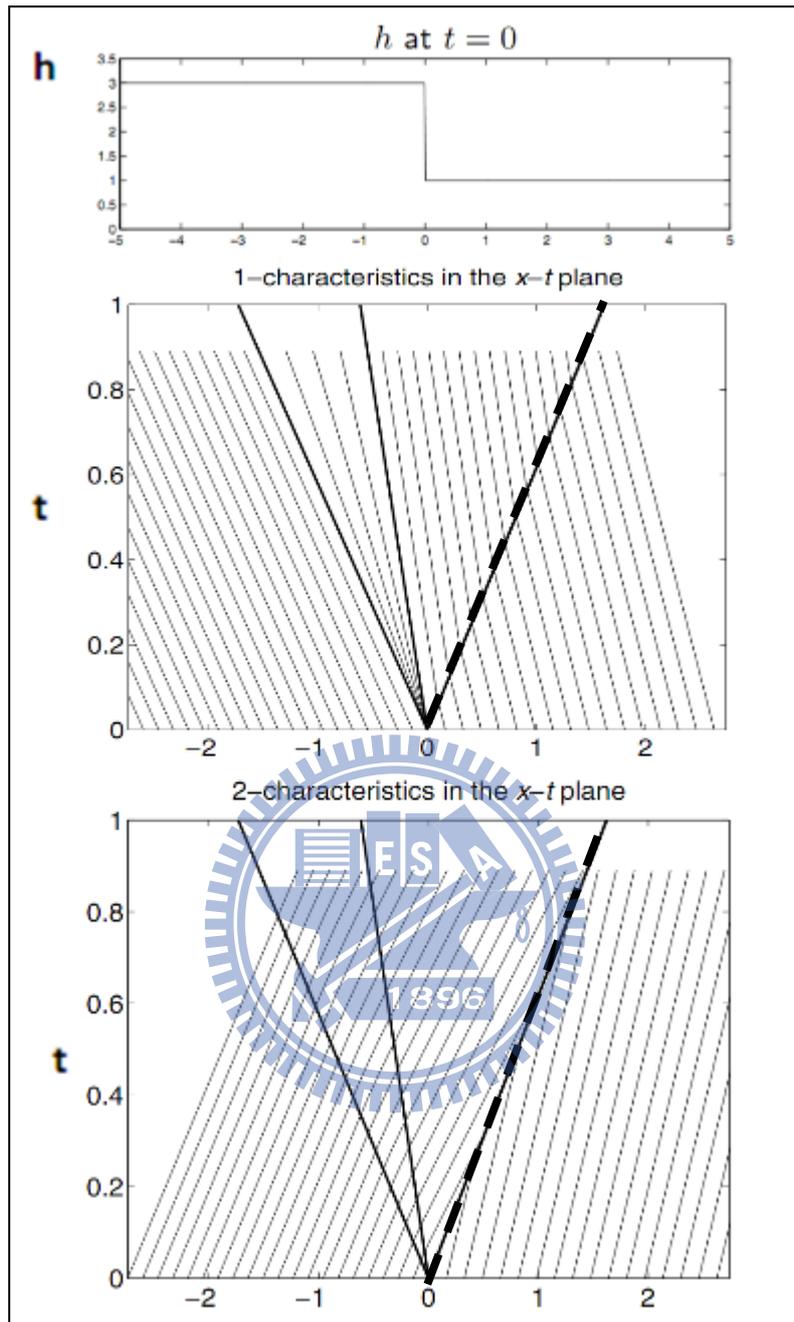


圖 3-6 一維潰壩案例示意圖(上:起始水深、中:特徵速度  $\lambda^1$  曲線群、  
下:特徵速度  $\lambda^2$  曲線群;實線扇形為稀疏波範圍,虛線為震波位置。)

(摘自 LeVeque 2002)

## 第四章 模式建置

由 1-3 節研究方法與流程，可知本文模式的架構主要可分為水理與類神經網路兩大部份。本章除了定義水理與類神經網路的架構設定外，並針對自訂之類神經網路，所參考的理論、輸入參數與學習案例的選擇等，作更詳細的說明。

### 4-1 理論依據

延續 2-5 節的介紹，可知在含高強度震波的不連續面處，捨去原始平滑指示器中含二次微分項的部份，可增大含不連續面的計算元，相對於鄰近計算元不平滑的程度，在線性組合數值通量時，能降低該計算元所代表的權重值，使在震波傳遞的計算上提高其收斂性。以下開始，定義原始 WENO 算則代號為 JSWENO (Jiang and Shu 1996)，修正平滑指示器 WENO 算則為 ZSWENO (Zhang and Shu 2007)。

因此利用 JSWENO 與 ZSWENO 算則分別對兩種含有不連續面解的案例模擬並比較結果：

(a) 水面分離案例：(仿 Bouchut 2004)

底床幾何形狀為：

$$z(x) = \begin{cases} 1 & , \text{if } 2500/3 \leq x \leq 1250 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases} \quad (4-1)$$

$$\text{初始水流條件: } hv(x, 0) = \begin{cases} -350 & , \text{if } x < 5000/3 \\ 350 & , \text{otherwise} \end{cases} \quad (4-2)$$

$$h(x, 0) = 10 \quad (4-3)$$

水流邊界條件為

$$\text{上下游邊界 } \frac{\partial}{\partial x} = 0 \quad (4-4)$$

綜合以上條件，圖 4-1 為初始條件設定圖。

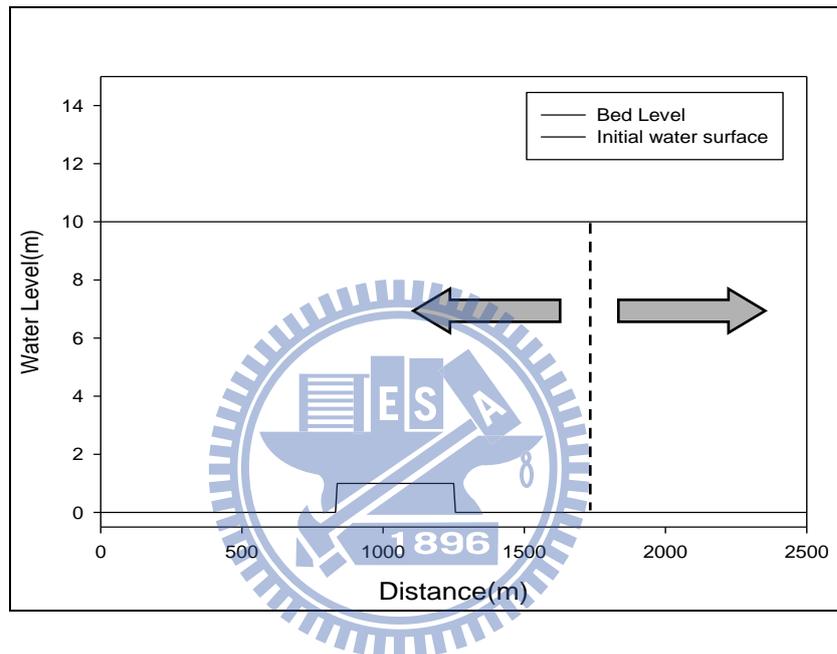


圖 4-1 初始條件示意圖，虛線左側初始流量為-350cms，右側初始流量為 350cms，水流各往左、右流動。

此案例為數模之假設案例，目的為測試模式處理乾濕交界問題的能力。圖 4-2 為 JSWENO 算則採計格網數 400 格( $\Delta x = 6.25 \text{ m}$ )與 8000 格( $\Delta x = 0.3125 \text{ m}$ )，可蘭數採 0.75， $h_d = 1.0 * 10^{-6} \text{ m}$ ，於  $t = 5.0 \text{ sec}$  之水位模擬結果，以下將 JSWENO 8000 格網點之模擬結果假定為解析解以作為討論。由圖可看出 JSWENO 算則在水面分離的中心處，

會有些許的水面震盪發生，推測是由於在計算乾濕床交界近處，若其最小水深  $h_d$  取較小值時，水深在稍大於  $h_d$  時，擁有高單寬流量  $q$ ，一旦水深判斷小於  $h_d$ ，視為乾床其水深與單寬流量都判斷為零值，而使得數值通量變化劇烈，造成通量傳遞計算上的難以收斂，需增加格網點以降低彼此間通量的差異或加大  $h_d$ ，以減低水面震盪的高度與振幅。圖 4- 3 為同等條件下，ZSWENO 採 400 網格數與假定解析解的水位比較圖，可看出透過強化收斂性之修正平滑指示器，可以在水面分離中心處無水面震盪的產生，但也因收斂強化的結果而使水位點位的連接上與 JSWENO 算則的模擬結果有些許的差異。

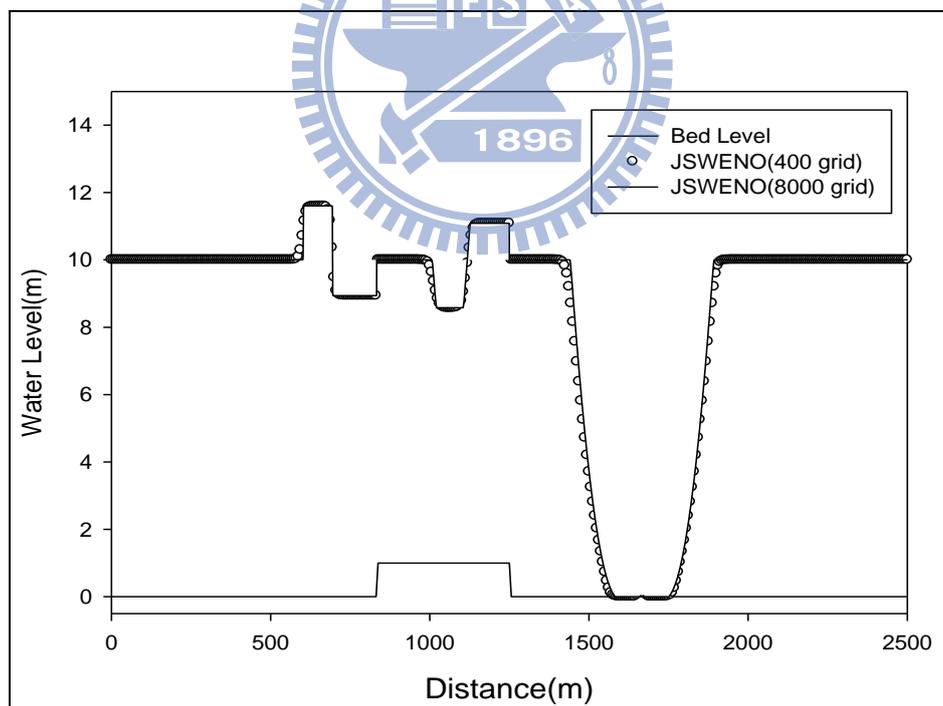


圖 4- 2 JSWENO 模擬水位結果圖  
( $h_d = 1.0 * 10^{-6}m$  ,  $t = 5.0 \text{ sec}$ )

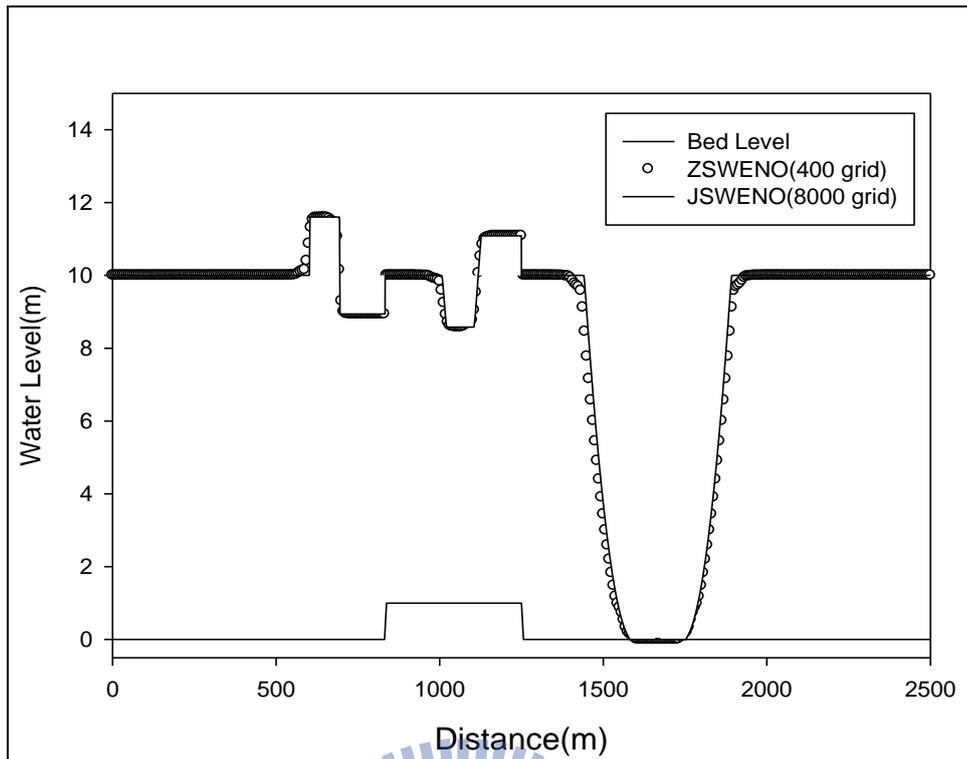


圖 4-3 ZSWENO 模擬水位結果圖

( $h_d = 1.0 * 10^{-6} \text{m}$ ,  $t = 5.0 \text{ sec}$ )

(b) 穩態流流經障礙物之案例：(Vázquez-Cendon 1999)

採用網格數 200，模擬間距  $\Delta x = 0.125 \text{m}$ ，重力加速度為  $9.81 \text{ m/s}^2$ ，可蘭數採 0.75，摩擦損失忽略不計，總模擬時間 200 秒，並假設此時到達穩態。

底床幾何形狀定義如下：

$$z(x) = \begin{cases} 0.2 - 0.05(x - 10)^2, & \text{if } 8 \leq x \leq 12 \\ 0 & \text{, otherwise} \end{cases} \quad (4-4)$$

水流起始條件為

$$\text{起始水深(m)} : h(x, 0) = 0.33 - z(x) \quad (4-5)$$

$$\text{起始單寬流量(m}^2\text{/s)} : q = 0.18。 \quad (4-6)$$

水流邊界條件為

$$\text{上游邊界 } q = 0.18 ; \text{下游邊界 } \frac{\partial}{\partial x} = 0。 \quad (4-7)$$

綜合以上條件，圖 4-4 為初始條件設定圖。

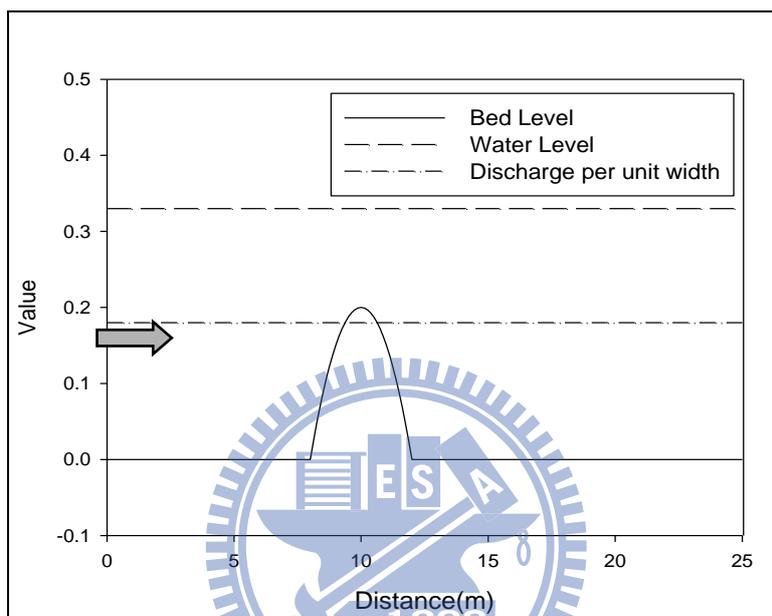


圖 4-4 初始條件設定圖

表 4-1 為 JSWENO 與 ZSWENO 算則結果對於解析解誤差表，圖 4-5 至圖 4-8 分別為 JSWENO 與 ZSWENO 模擬水位與單寬流量和解析解比較圖，其解析解可見 Goutal and Maurel (1997)一書。

由以上的結果可看出，此案例 ZSWENO 相對於 JSWENO 算則，雖然最大單寬流量誤差有一定程度的減小，但也因此降低了

不連續面附近的單寬流量守恆性，此外水深也在水躍前後附近點的連接上，與解析解有較大的差異。

表 4- 1 JSWENO 與 ZSWENO 算則結果誤差表

	JSWENO	ZSWENO
$E_h$	0.123	0.141
$E_q$	0.019	0.024
$max\_e_h$	0.016	0.021
$max\_e_q$	0.018	0.014

註：  $E_h$ ：水深總絕對值誤差； $E_q$ ：單寬流量總絕對值誤差

$max\_e_h$ ：水深最大絕對值誤差； $max\_e_q$ ：單寬流量最大絕對值誤差

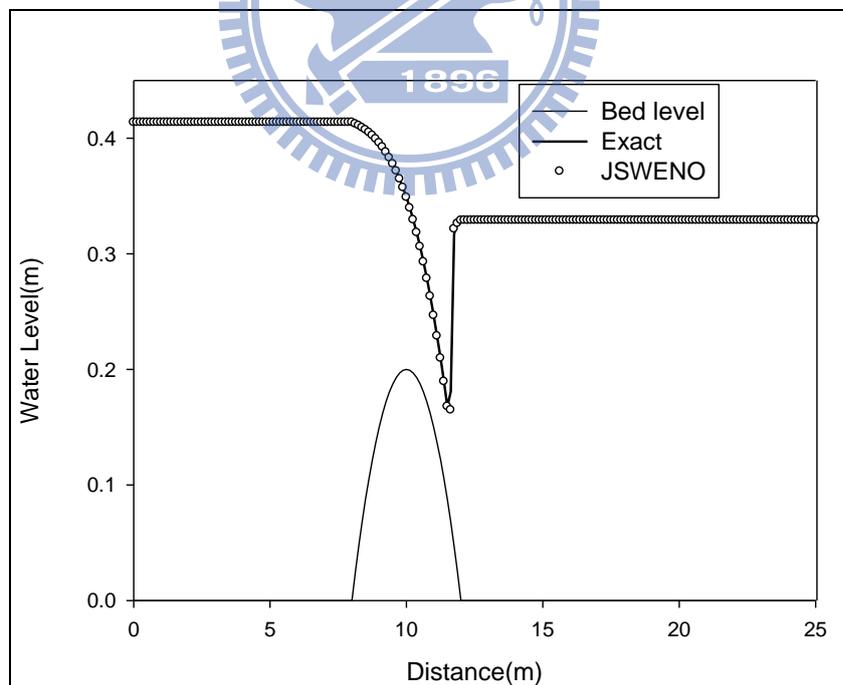


圖 4- 5 JSWENO 模擬水位與解析解之比較圖

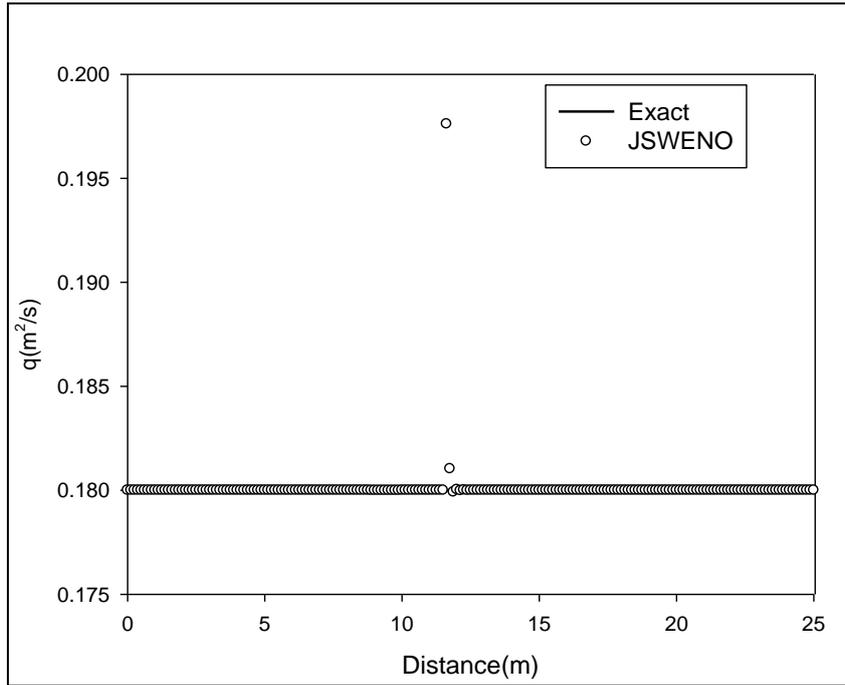


圖 4- 6 JSWENO 模擬  $q$  與解析解之比較圖

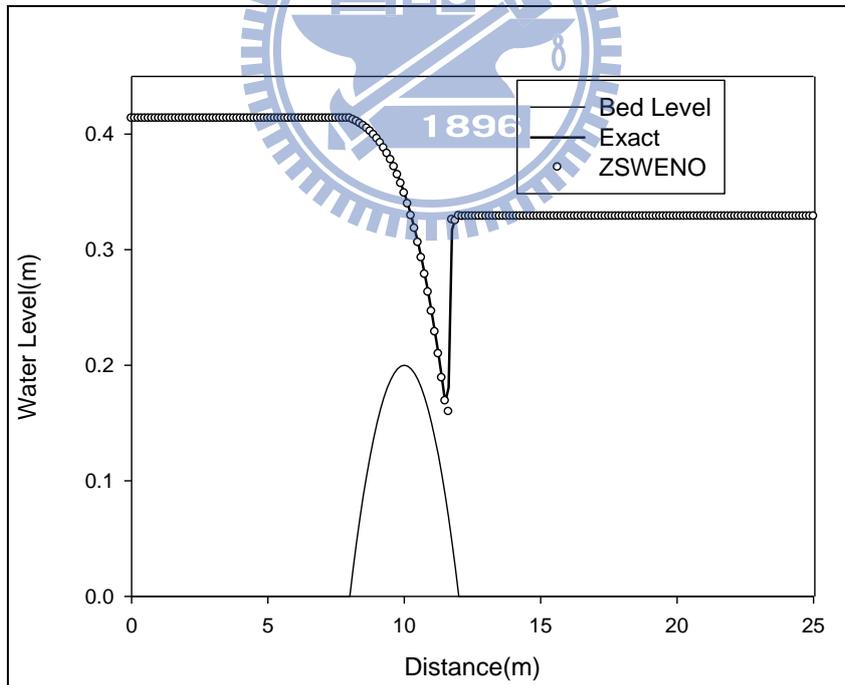


圖 4- 7 ZSWENO 模擬水位與解析解之比較圖

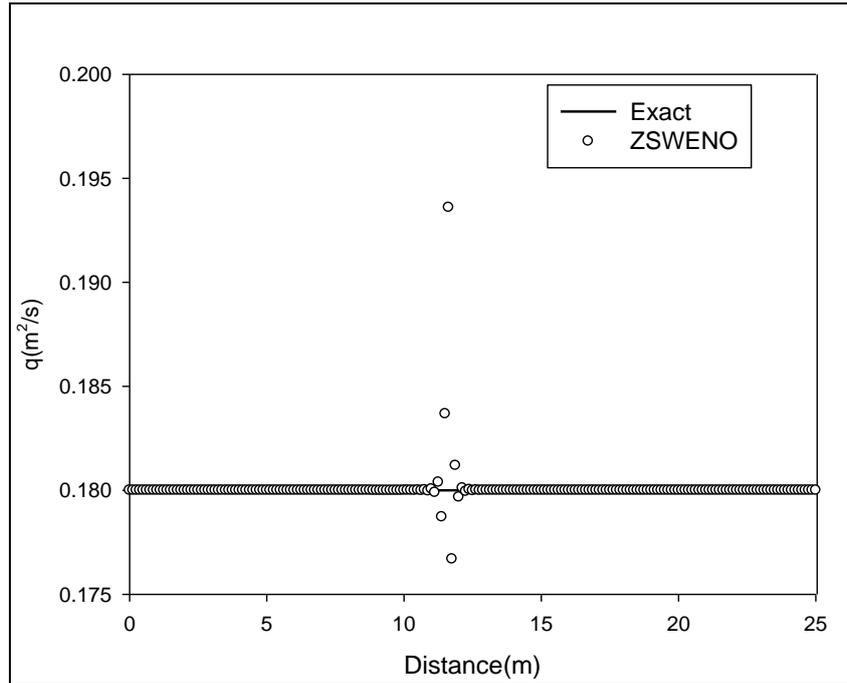


圖 4- 8 ZSWENO 模擬  $q$  與解析解之比較圖

經由以上兩個案例(a)與(b)之結果分析比較，推測 ZSWENO 算則中在(a)這種較不受邊界條件影響的案例中表現較為良好，而對於(b)案例似乎因為上游的流量條件給定，為保持不連續面單寬流量的守恆性，而過度收斂導致不連續面前後的點位連接有較差的模擬結果。

因此吾人提出一個理論想法，對於原始平滑指示器中的二次微分項  $P_2$ ，假設其對於平滑指示器的影響程度，與組合平滑指示器之五點組成的幾何關係有其相關性，存在著一組  $\alpha_r$  使在構築平滑指示器時能在不連續面能保持其強化收斂的特性，又能盡量保持不連續面前後點位數值解的精確度。以此概念將(2-40)式平滑指示器改寫為：

$$\beta_0 = \alpha_0 * \frac{13}{12} (f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2})^2 + \frac{1}{4} (3f_i - 4f_{i+1} + f_{i+2})^2$$

$$\beta_1 = \alpha_1 * \frac{13}{12} (f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1})^2 + \frac{1}{4} (f_{i+1} - f_{i-1})^2 \quad (4-1)$$

$$\beta_2 = \alpha_2 * \frac{13}{12} (f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i)^2 + \frac{1}{4} (f_{i-2} - 4f_{i-1} + 3f_i)^2$$

$\alpha_r \in [0,1]$ ，定義為各計算元  $P_2$  項的修正係數。

另假設  $\alpha_r$  值與五點之幾何組合的相關性，能由一未知的函數式來求解出，本文應用類神經網路類神經網路的黑盒分析概念，以(b) 案例為學習案例來建構類神經網路，以擬合此假設的函數式。

## 4-2 模式架構

本節就模式的架構，分其類神經網路與水理部份分別介紹。

### 4-2-1 水理模式

在水理計算方面，綜合前面第四章的理論介紹，本文水理模式可整理出以下結論：



統御方程式：一維淺水波方程式。

空間離散式：守恆形式差分式 WENO 算則結合有限體積法。

時間離散式：三階 TVD- Runge-Kutta 積分。

### 4-2-2 類神經網路模式

以 4-1 節的理論為基礎，目標以類神經網路建構出一套組合平滑指示器五點組成的幾何關係，與  $\alpha_r$  值相關的函數式，以下分輸入與輸出參數分別討論，網路概念圖如圖 4-9 所示：

(a) 輸入參數：

在計算數值通量為正時依(2-44)式，依序採用(4-2)式五點之值作為輸入；數值通量為負時依(2-47)式，則依序採用(4-3)式五點作為輸入：

$$Input^+ = [f_{i-2}^+, f_{i-1}^+, f_i^+, f_{i+1}^+, f_{i+2}^+] \quad (4-2)$$

$$Input^- = [f_{i-1}^-, f_i^-, f_{i+1}^-, f_{i+2}^-, f_{i+3}^-] \quad (4-3)$$

由於需保證類神經網路的輸入值能位於一固定值域，故在進入類神經網路前，定義  $f_{max} = \max |Input|$ ，為輸入五點絕對值之最大值，將各輸入值除以  $f_{max}$  正規化，以使輸入值值域位於-1 ~ 1 之間，重新定義類神經網路輸入參數為

$$Input^+ = [f_{i-2}^+, f_{i-1}^+, f_i^+, f_{i+1}^+, f_{i+2}^+] / f_{max} \quad (4-4)$$

$$Input^- = [f_{i-1}^-, f_i^-, f_{i+1}^-, f_{i+2}^-, f_{i+3}^-] / f_{max} \quad (4-5)$$

$Input^\pm \in [-1,1]$ 。當  $f_{max} = 0$  時， $Input^\pm$  為 0 除以 0 的型態，此為不定式而可做任意解解釋，但無論代入任何值皆不影響最後平滑指示器皆等於 0，因此定義此情況下  $Input^\pm$  皆為 1 值，以防止程式在分母等於 0 無法運算的狀況。

另外由於空間離散式是採用守恆形式差分式 WENO 算則，由

(3-30)與(3-31)式可知無論在對流項或是源項的計算上，(4-4)與(4-5)式之  $f^\pm = \hat{v}^\pm - \hat{\omega}^\pm$  。

(b) 輸出參數：

輸出值代表修正係數  $\alpha_r$ ，故輸出層採計三個單元。由於本文自訂之類神經網路，處理單元的轉換函數皆採用雙彎曲函數，轉換後之輸出值  $\in [0,1]$ ，符合  $\alpha_r$  的值域，故在輸入值經類神經網路傳遞後，所得之三個輸出值即依序為修正係數  $\alpha_0$ 、 $\alpha_1$ 、 $\alpha_2$ ，不需再另外的處理。

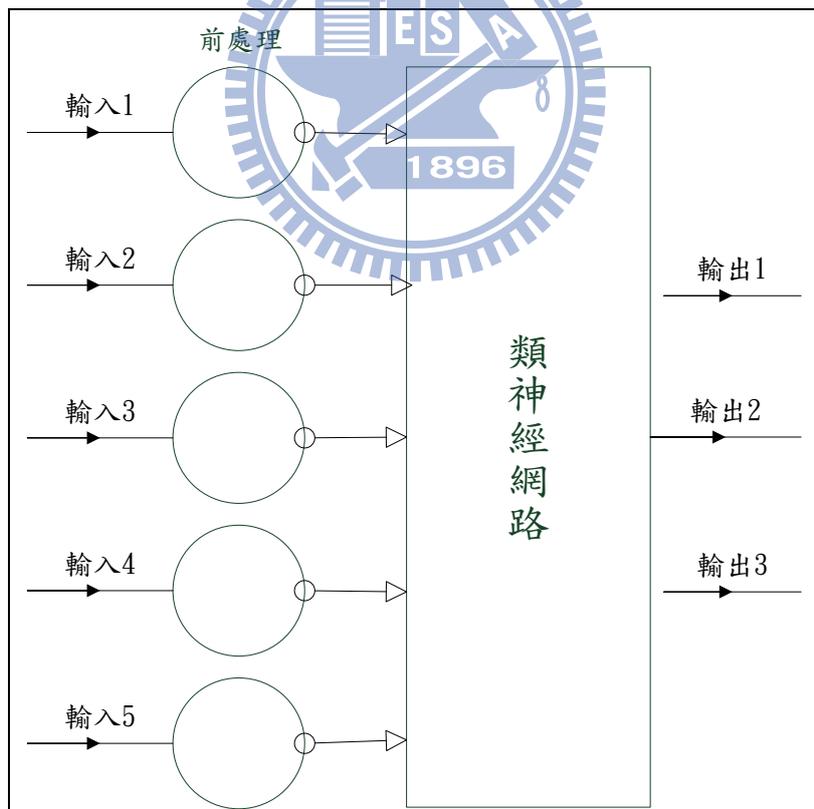


圖 4-9 網路概念圖

## 4-3 學習案例

### 4-3-1 案例選擇

學習案例為前面所介紹之(b)案例。此案例為穿臨界流況，在穩態時有水躍的情形發生，水面線由平滑的漸變段與不連續面所組成。圖 4-10 至圖 4-13 為穩態時(3-30)與(3-31)式之各點位 $(\hat{v}^{\pm} - \hat{\omega}^{\pm})^{(p)}$ 組合的分佈值，上標  $p$  代表運算矩陣中第  $p$  個位置。由前文的介紹中， $(\hat{v}^{\pm} - \hat{\omega}^{\pm})^{(p)}$  每組組合內五點之間的分佈差異，是為其決定 WENO 算則權重的重要因子。由以上圖 4-10 至圖 4-13 可明顯看出震波在通過障礙物時，容易產生較為劇烈的變化與震盪，而如何求取一套計算 WENO 算則的權重法則，使數值模擬在震波的劇烈的變化下，能收斂使其不震盪，並能保持精確性，此乃自訂之類神經網路所希望能學習到的結果。學習過程中所用到之相關參數請見 4-3-2 節說明。

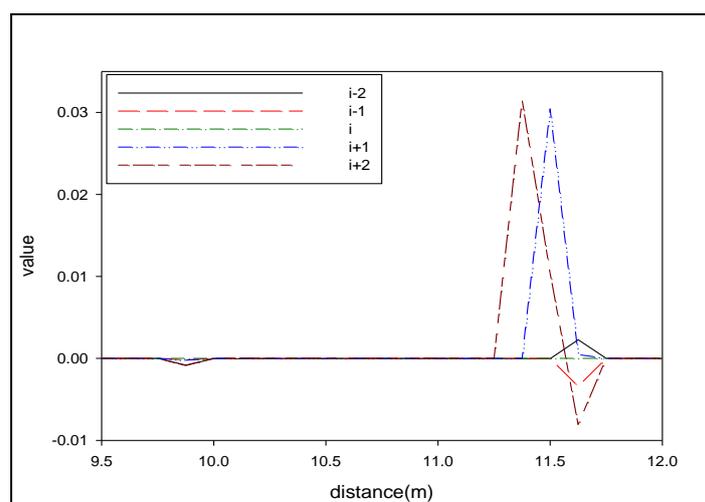


圖 4-10 穩態時 $(\hat{v}^+ - \hat{\omega}^+)^{(1)}$ 分佈圖

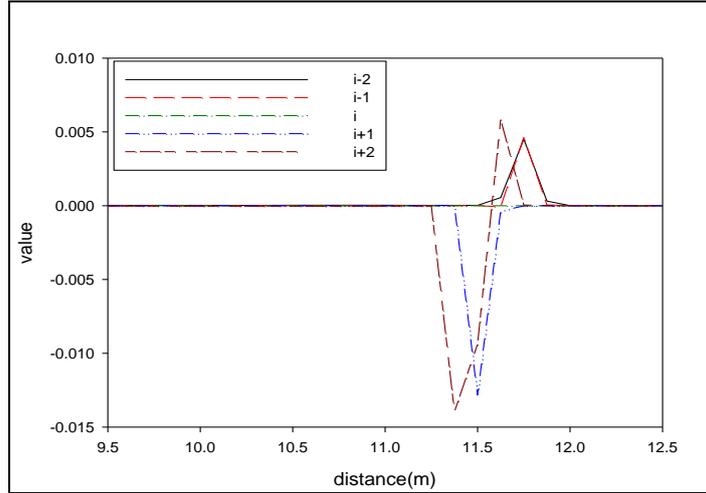


圖 4-11 穩態時 $(\hat{v}^+ - \hat{\omega}^+)^{(2)}$ 分佈圖

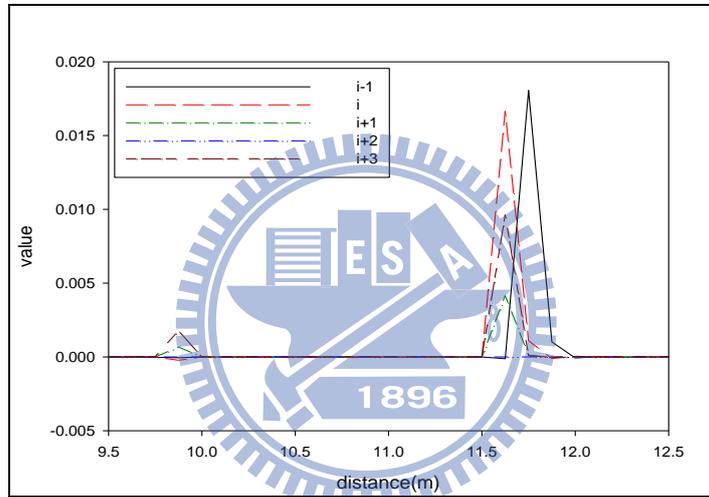


圖 4-12 穩態時 $(\hat{v}^- - \hat{\omega}^-)^{(1)}$ 分佈圖

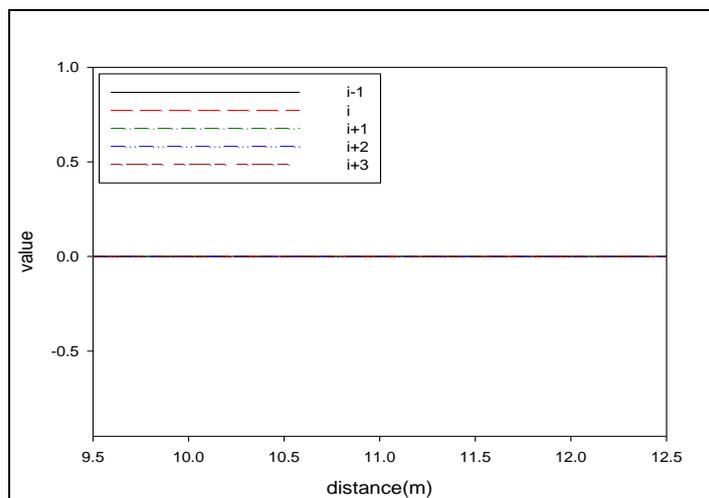


圖 4-13 穩態時 $(\hat{v}^- - \hat{\omega}^-)^{(2)}$ 分佈圖

### 4-3-2 參數設定

模式參數設定分為水理、類神經網路與基因演算法三部份說明。

#### (a) 水理模式：

在 3-3 節中探討了乾濕點交界的處理方法，而其中有定義一最小水深容許值  $h_d$ ，本學習案例雖無處理乾床的問題，但在第六章試驗案例的結果，會對其做更深入的探討。此外定義平滑指示器中一微小數值  $\epsilon = 1.0 * 10^{-6}$ 。

#### (b) 類神經網路：

網路架構如圖 4-14 所示，依葉怡成(2001)書中建議使用單層隱藏層，處理單元數輸入層為 5，隱藏層為 4，輸出層為 3。處理單元之轉換函數則全採取雙彎曲函數  $\in [0,1]$ ，最大循環數 = 1000 次。

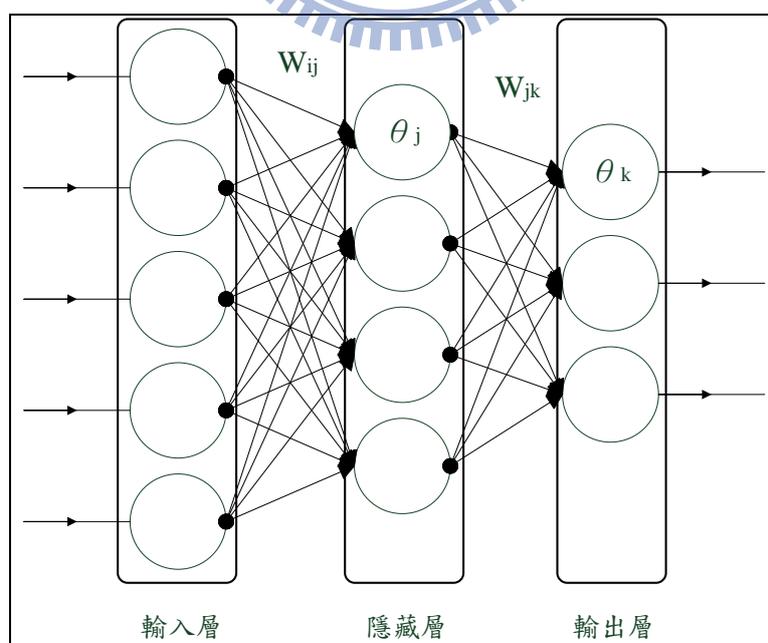


圖 4-14 類神經網路架構圖

(c) 基因演算法：

一開始需給定初始基因組群，本案例使用總基因組數=15。將類神經網路連結加權值  $W$  與門閥值  $\theta$ ，以二進位法轉化為一基因序列的組合，可參考附錄 B 遺傳演算法介紹之編碼部份，定義：

1. 連結加權值  $W$ ：

基因長度  $L=8$ 、上限  $x_u = 15.0$  與下限  $x_l = -15.0$ 。

2. 門閥值  $\theta$ ：

基因長度  $L=8$ 、上限  $x_u = 10.0$  與下限  $x_l = -10.0$ 。

適合度函數主要反應學習案例中，模擬結果與解析解的誤差大小。由於模擬結果有兩組參數為水深  $h$  與單寬流量  $q$ ，兩者之數量級大致差十倍左右，在此採取三種不同的代表誤差，如表 4-2 所示，來測試水深  $h$  與單寬流量  $q$  在學習案例中，哪一個參數影響為大。

$$\text{定義 } E_r(i) = E_h(i) + N * E_q(i) \quad (4-6)$$

$E_r(i)$ ：第  $i$  組基因組代表誤差；

$E_h(i)$ ：第  $i$  組基因組水深總絕對值誤差；

$E_q(i)$ ：第  $i$  組基因組單寬流量總絕對值誤差； $N$  為一常數。

表 4-2 方案 A~C 選用常數與代表誤差表

	Type A	Type B	Type C
常數 $N$	1	10	100
代表誤差	$Eh+Eq$	$Eh+10 \times Eq$	$Eh+100 \times Eq$

適合度函數定義為：

$$Fit(i) = 10^{(-E_r(i) \cdot 10^{fn})} \quad (4-7)$$

上式中， $Fit(i)$ ：第  $i$  組基因組適合度值。當  $E_r(i) \rightarrow 0$ ， $Fit(i) \rightarrow$  最大值 1；當  $E_r(i) \rightarrow \infty$ ， $Fit(i) \rightarrow 0$ ，而由於對數曲線在極大負值處，數值下降斜率已趨近於 0，為避免所有  $E_r(i)$  皆過大，造成  $Fit(i)$  皆過小造成適合度鑑別率不高的情況，故在此定義一適合度修正係數， $fn = anint(-\log_{10}[\min\{E_r(i)\}])$ ， $anint(x)$  為一數學運算函數，為傳回最接近參數  $x$  的整數值，藉此一修正係數，可以使多數  $Fit(i)$  能位於對數曲線變化斜率較大的值域，以提高優選的作用。

此外若由類神經網路所得的權重，無法使數值穩定傳遞，可能會造成數值震盪與誤差的放大，因而導致程式意外中止，為避免此情形發生，對於學習案例-穩態流流經障礙物問題，設下一中止條件：

當計算至水深  $h < 0$  時，立即中止模式的水理計算，定義此基因組所對應的適應度  $Fit(i) = 0$ ，使用另一組基因組重新開始運算。

後續在基因組交配、突變的流程中，其中所需參數設定如下：

1. 每一學習循環交配數  $Ma\_N = 5$ 。
2. 交配機率  $Ma\_Rate = 0.9$ 。
3. 突變機率  $Mu\_Rate = 0.01$ 。

4. 採用菁英化，將此次學習循環適合度最佳值的基因組直接複製，  
以待下一次循環使用。



## 第五章 模式驗證與結果分析

### 5-1 學習結果

經由表 4-2 方案 A~C，類神經網路各學習測試二次所得之最佳學習結果誤差如下表 5-1，水位與單寬流量與解析解比較圖則如圖 5-1 至圖 5-12 所示。

表 5-1 類神經網路學習結果誤差表

	JSWENO	Type A		Type B		Type C	
		Test_01	Test_02	Test_01	Test_02	Test_01	Test_02
$E_r$		0.117	0.117	0.287	0.287	1.682	1.676
$E_h$	0.123	0.096	0.096	0.101	0.103	0.151	0.151
$E_q$	0.019	0.021	0.021	0.019	0.018	0.015	0.015
$max_{eh}$	0.016	0.013	0.013	0.014	0.015	0.022	0.022
$max_{eq}$	0.018	0.019	0.019	0.018	0.018	0.012	0.012

由誤差表可看出，三種方案的  $E_r$ 、 $E_h$ 、 $E_q$  的值，兩次學習測試大致都會收斂至各自一定的範圍內。從誤差與解析解的比較圖，可知 A 方案雖然在水深  $h$  有較好的模擬結果，但是單寬流量的守恆上，較原本 JSWENO 算則有較差的結果；C 方案所得之模擬結果較類似於 ZSWENO 算則，雖然降低了在不連續面的最大單寬流量誤差，但也造成了在不連續面附近的水位與單寬流量模擬有較差的結果；B 方案所得之學習結果，在水位上無論是總絕對值誤差與單一最大誤差都有其較佳的結果，而在單寬流量的模擬上，雖然最大誤差有些許增加，但由模擬單寬流量圖可發現在不連續面上，與 JSWENO 算則相比有

較好的流量守恆性。故以 B 方案作其學習的最佳方案，並選用其中代表誤差較小之第一次測試，學習所得之類神經網路做為最終學習成果，圖 5-13 為其學習過程中代表誤差的收斂圖。定義其代號為 AWENO(ANN-WENO)算則，以下以此算則針對不同試驗案例做模擬，並與 JSWENO 與 ZSWENO 算則之結果做分析與探討。

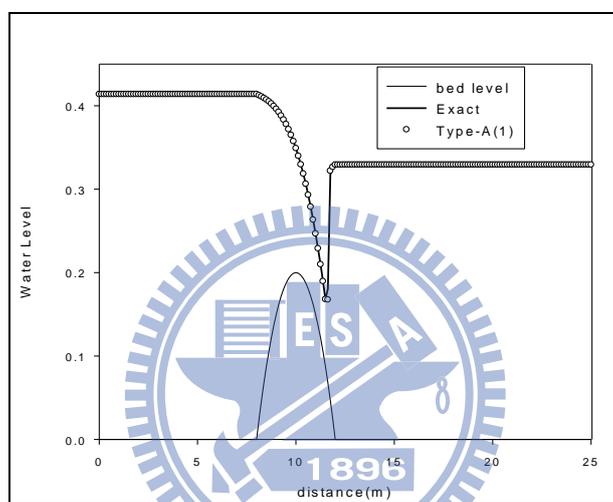


圖 5-1 方案 A (1)模擬水位與解析解之比較圖

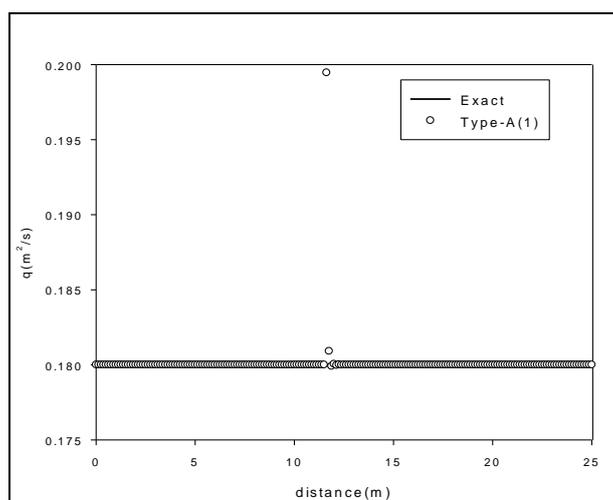


圖 5-2 方案 A (1) 模擬 q 與解析解之比較圖

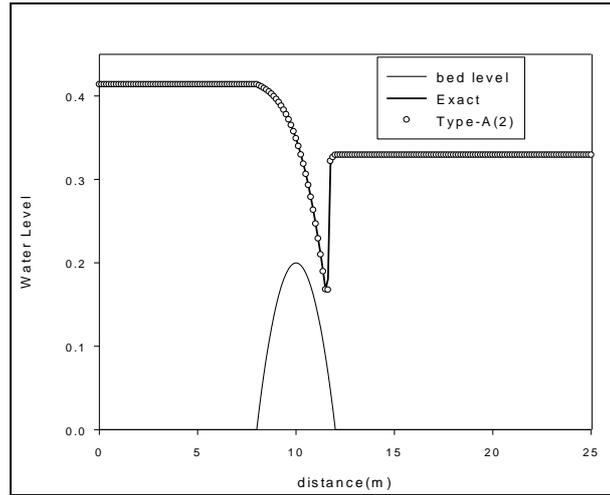


圖 5-3 方案 A (2) 模擬水位與解析解之比較圖

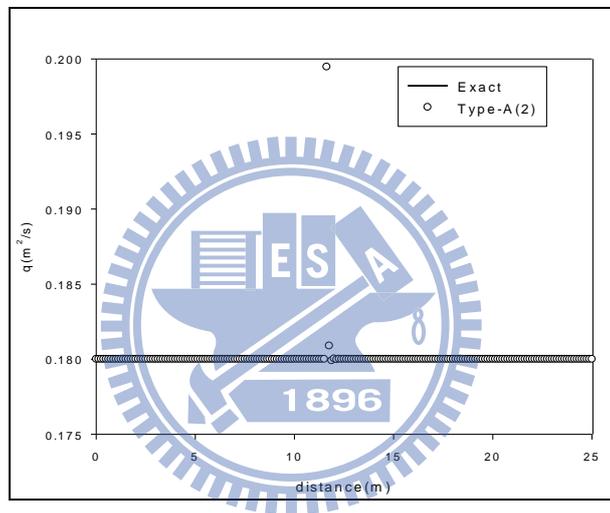


圖 5-4 方案 A (2) 模擬 q 與解析解之比較圖

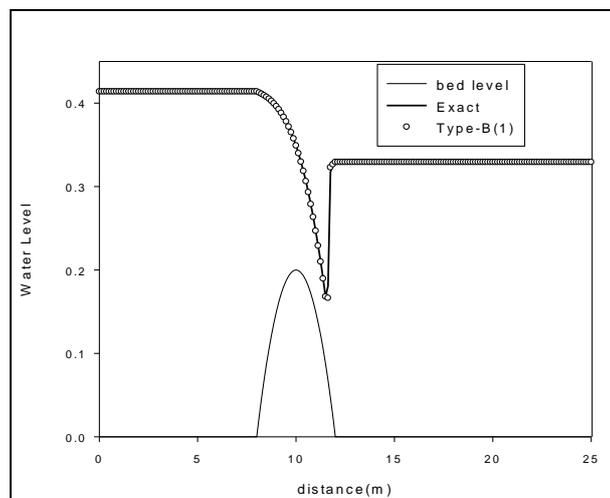


圖 5-5 方案 B (1) 模擬水位與解析解之比較圖

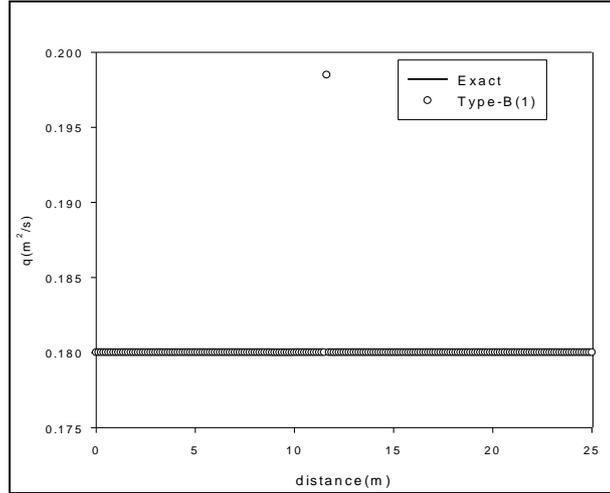


圖 5-6 方案 B (1) 模擬  $q$  與解析解之比較圖

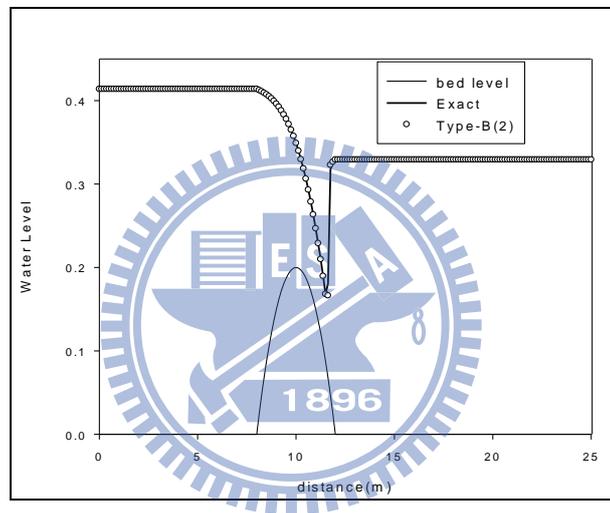


圖 5-7 方案 B (2) 模擬水位與解析解之比較圖

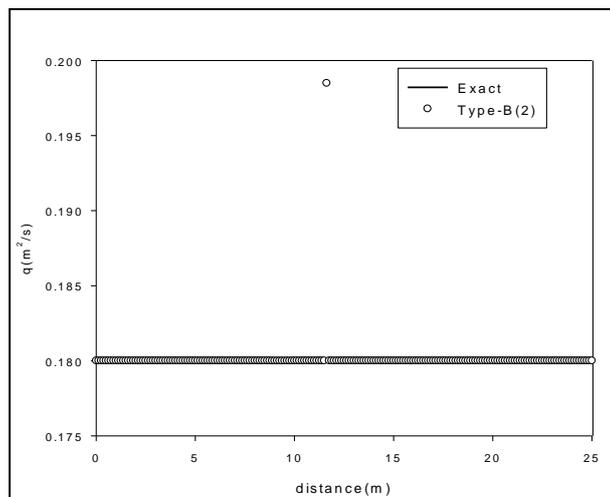


圖 5-8 方案 B (2) 模擬  $q$  與解析解之比較圖

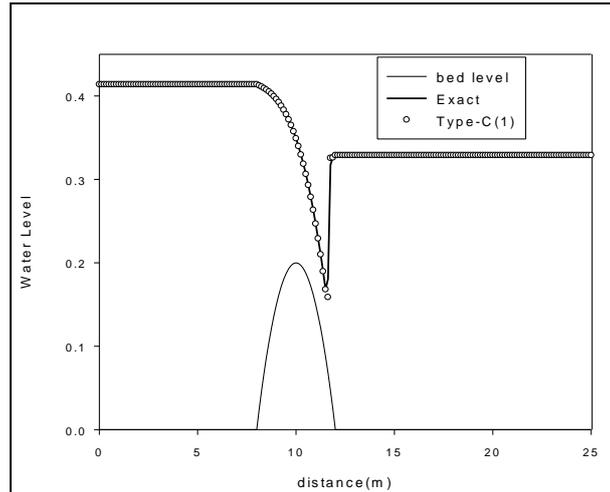


圖 5-9 方案 C (1)模擬水位與解析解之比較圖

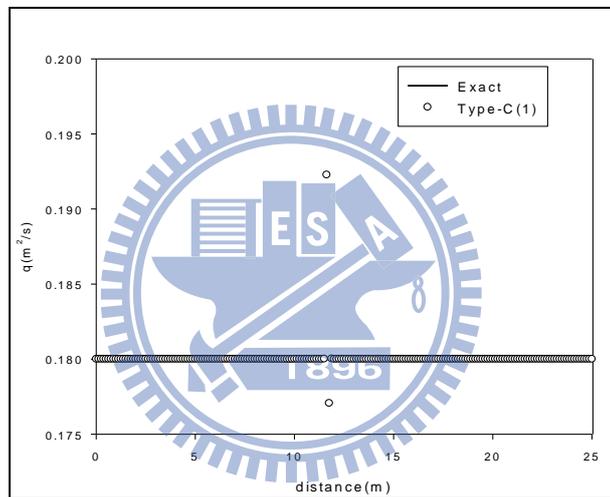


圖 5-10 方案 C(1) 模擬 q 與解析解之比較圖

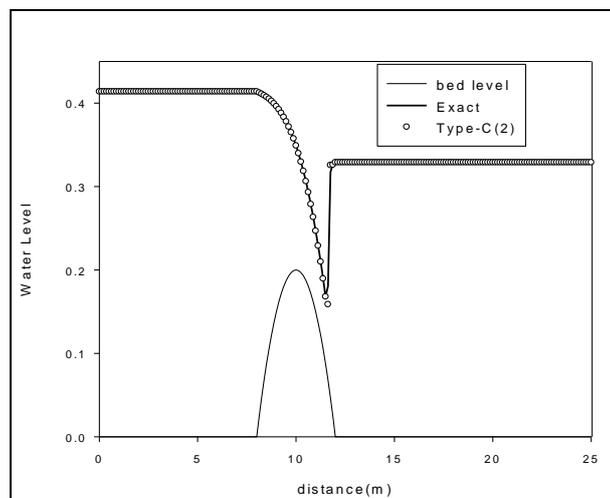


圖 5-11 方案 C (2)模擬水位與解析解之比較圖

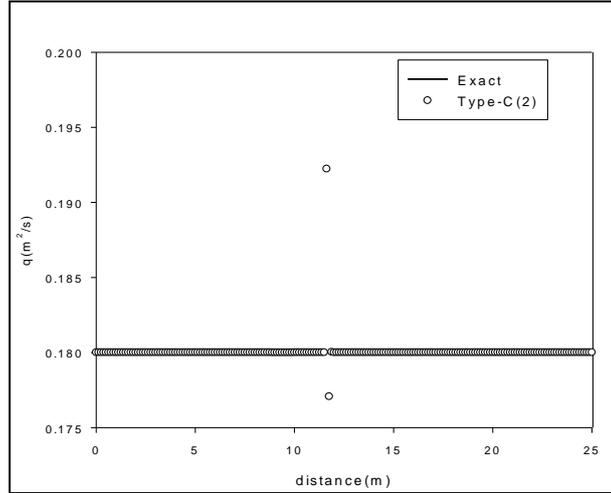


圖 5- 12 方案 C(2) 模擬  $q$  與解析解之比較圖

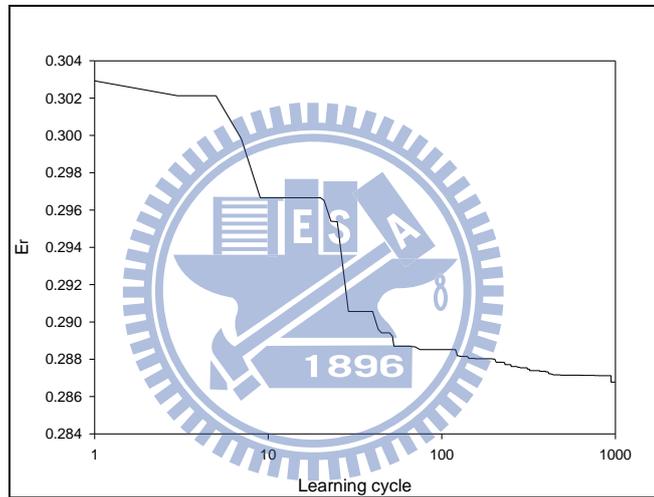


圖 5- 13 代表誤差收斂圖

## 5-2 無劇烈通量變化之試驗案例

### 5-2-1 簡單平滑曲線微分案例

由於 ZSWENO 與 AWENO 算則皆對平滑指示器中包含二次微分項的 P2 項有作其捨棄或更動，故與原先 JSWENO 算則相比，應會有其下降的現象，故仿 Henrick et al. (2005) 以簡單之平滑曲線案例：

$$f(x) = x^3 + \cos(x), x \in [-10,10] \quad (5-1)$$

$f(x)$  與  $f'(x)$  分佈圖如圖 5- 14 所示。取  $\epsilon = 1.0 \times 10^{-40}$ ，分別採取格網數 100、500、1000、2000 格，通量採取差分式型態，再分別使用五階上風中央差分(UP\_CEN)、JSWENO、ZSWENO 與 AWENO 求取平滑曲線之微分值  $f'$ ，表 5- 2 至表 5- 5 為針對不同格網數，各種算則之誤差統計結果。以下定義各式誤差之代號：L1 為平均絕對誤差；L2 為均方根誤差；L3 為最大誤差絕對值。

表 5- 2 100 格網數誤差表

	UP_CEN	JSWENO	ZSWENO	AWENO
L1	3.47E-06	1.99E-03	1.20E-03	2.11E-03
L2	3.84E-06	1.02E-02	5.82E-03	1.04E-02
L3	5.30E-06	8.30E-02	4.33E-02	8.32E-02

表 5- 3 500 格網數誤差表

	UP_CEN	JSWENO	ZSWENO	AWENO
L1	1.12E-09	2.62E-06	7.41E-06	1.58E-05
L2	1.23E-09	2.45E-05	7.07E-05	1.68E-04
L3	1.72E-09	4.14E-04	1.04E-03	2.45E-03

表 5- 4 1000 格網數誤差表

	UP_CEN	JSWENO	ZSWENO	AWENO
L1	3.51E-11	1.21E-07	6.54E-07	1.52E-06
L2	3.90E-11	1.30E-06	9.29E-06	2.64E-05
L3	7.48E-11	2.69E-05	2.08E-04	5.79E-04

表 5- 5 2000 格網數誤差表

	UP_CEN	JSWENO	ZSWENO	AWENO
L1	7.14E-12	6.70E-09	6.92E-08	2.78E-07
L2	1.30E-11	1.02E-07	1.53E-06	5.87E-06
L3	9.38E-11	3.44E-06	4.86E-05	1.47E-04

由以上誤差表看出隨著網格數的增加，各式誤差亦會隨之減小，而針對此案例微分項的精確度高低，依序為五階精度上風中央差分、JSWENO、ZSWENO 與 AWENO。而對於 AWENO 在此平滑曲線微分項的精確度為最低的情形，猜測是自訂之類神經網路在學習過程中，由於學習案例不連續面近處的模擬好壞，佔了誤差量來源的絕大部分，因此學習過程著重於在不連續面近處的修正，平滑區與緩變段的精確度要求，對於類神經網路在學習上的影響性就相對來的低。

接下來 5-2-2 節就以兩個無劇烈通量變化之一維淺水波案例，來測試 AWENO 與 ZSWENO 算則在喪失精度的情況下，與 JSWENO 算則之模擬結果，是否有其影響及差異。

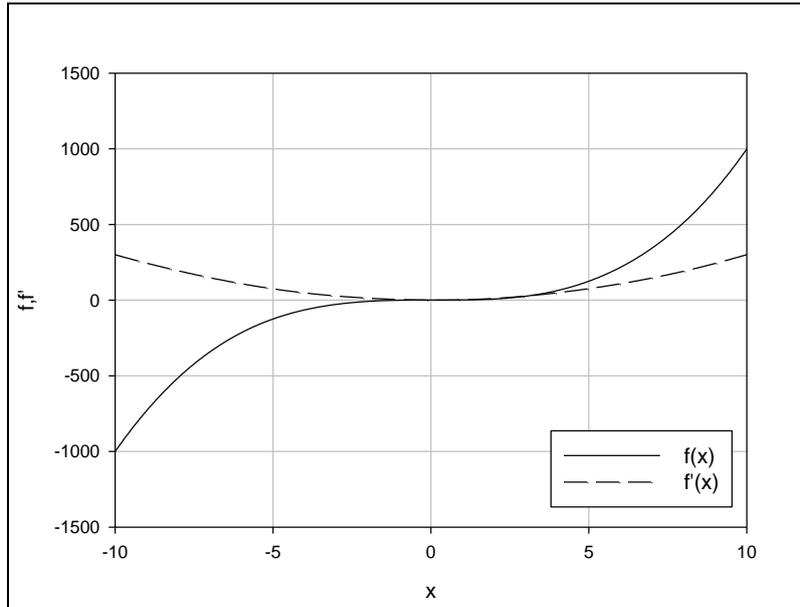


圖 5-14 簡單平滑曲線  $f(x), f'(x)$  圖

### 5-2-2 穩態流流經障礙物案例

參考 Vázquez-Cendon (1999) 中另外兩種穩態流經障礙物案例 A、B，改變學習案例之初始水流狀況，以 JSWENO、ZSWENO 與 AWENO 算則做模擬：

(A) 起始水深(m)： $h(x, 0) = 0.66 - z(x)$ 。 (5-2)

起始單寬流量( $m^2/s$ )： $q = 1.53$ 。 (5-3)

水流邊界條件定義為

上游邊界  $q = 1.53$ ；下游邊界  $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ 。 (5-4)

(B) 起始水深(m)： $h(x, 0) = 2.0 - z(x)$ 。 (5-5)

起始單寬流量( $m^2/s$ )： $q = 4.42$ 。 (5-6)

水流邊界條件定義為

上游邊界  $q = 4.42$ ；下游邊界  $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ 。 (5-7)

A 案例為穿臨界流況，C 案例則為亞臨界流況。網格數比照學習案例採取 200 格，模擬間距  $\Delta x = 0.125\text{m}$ ，可蘭數採 0.75，總模擬時間為 200 秒，並假設此時到達穩態。為三種算則模擬結果與解析解之誤差，圖 5-15 與圖 5-16 為案例 A 水位與單寬流量模擬圖，圖 5-17 與圖 5-18 為案例 B 水位與單寬流量模擬圖。

表 5-6 案例 A 與案例 B 之誤差表

	案例 A			案例 B		
	JSWENO	ZSWENO	AWENO	JSWENO	ZSWENO	AWENO
Eh	0.051	0.051	0.051	0.019	0.018	0.020
Eq	6.419E-05	6.422E-05	6.421E-05	2.813E-05	2.813E-05	2.813E-05
max_eh	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008	0.008
max_eq	4.4E-06	4.4E-06	4.4E-06	1.21E-06	1.21E-06	1.21E-06

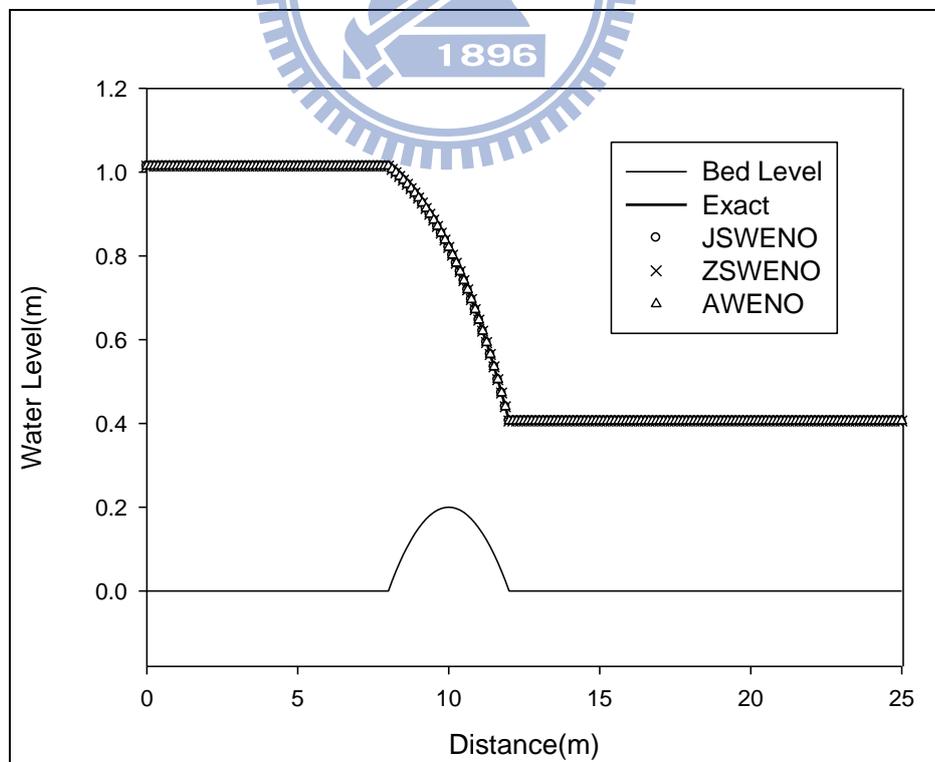


圖 5-15 案例 A 水位模擬結果圖

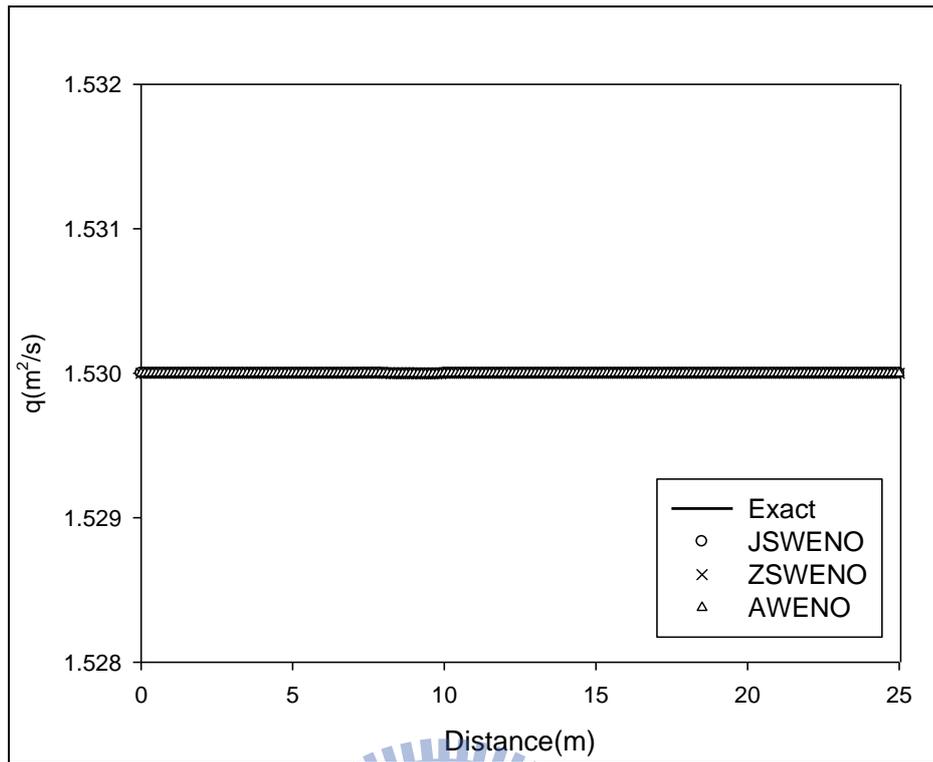


圖 5-16 案例 A 單寬流量模擬結果圖

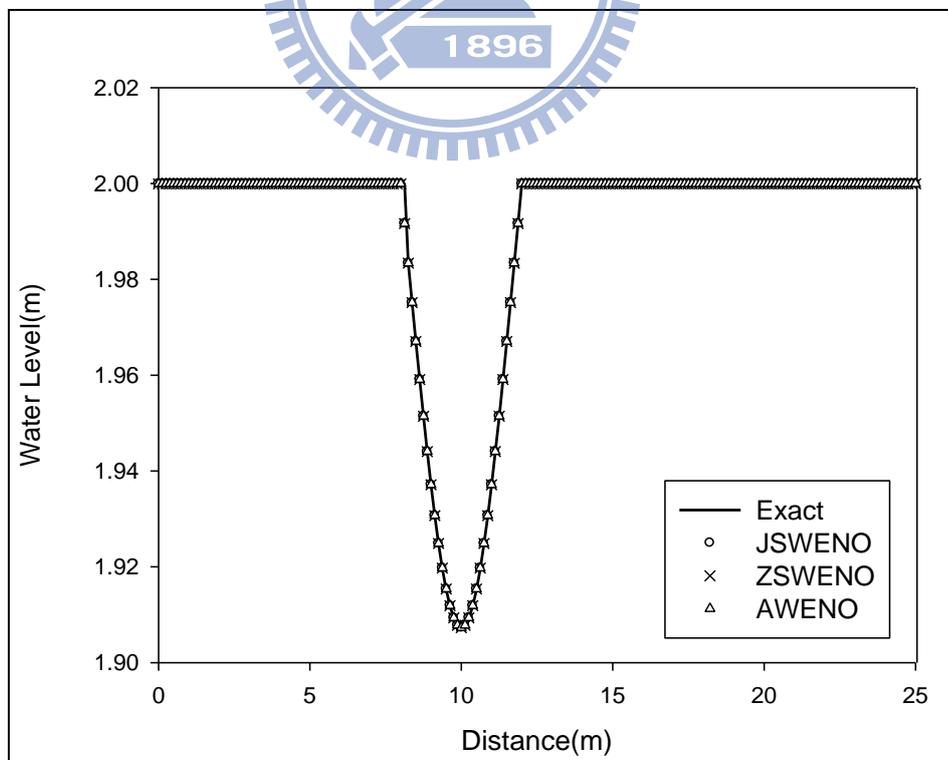


圖 5-17 案例 B 水位模擬結果圖

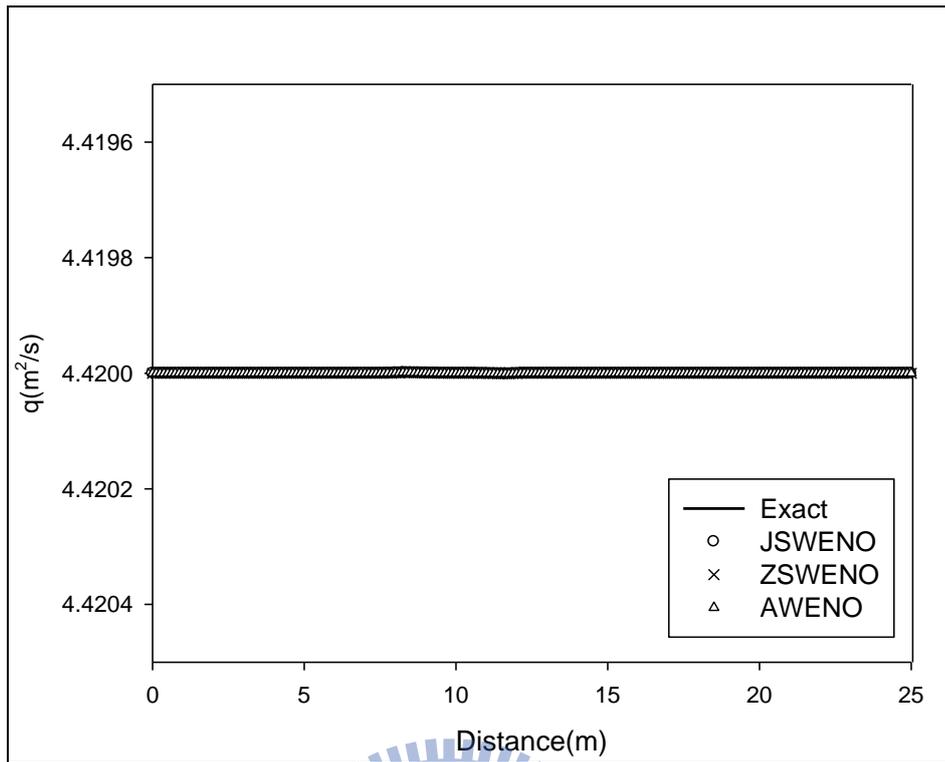


圖 5-18 案例 B 單寬流量模擬結果圖

### 5-2-3 潮汐波案例

此案例運用於 Bermúdez (1994)，其中給定一組透過漸近線分析，近乎等於精確解的值以作為比較。

底床幾何形狀定義如下：

$$z(x) = 10 + \frac{40x}{L} + 10\sin\left(\pi\left(\frac{4x}{L} - \frac{1}{2}\right)\right) \quad (5-8)$$

$L = 14000\text{m}$  為渠道的長度。

水流起始條件為

$$\text{起始水深(m)} : h(x, 0) = 60.5 - z(x) \quad (5-9)$$

$$\text{起始單寬流量(m}^2\text{/s)} : q(x, 0) = 0 \quad (5-10)$$

水流邊界條件為

$$h(0, t) = 64.5 - 4\sin\left(\pi\left(\frac{4t}{86400} + \frac{1}{2}\right)\right); q(L, t) = 0. \quad (5-11)$$

解析解則為

$$h(x, t) = 64.5 - z(x) - 4\sin\left(\pi\left(\frac{4t}{86400} + \frac{1}{2}\right)\right) \quad (5-12)$$

$$q(x, t) = \frac{(x-L)\pi}{5400} \cos\left(\pi\left(\frac{4t}{86400} + \frac{1}{2}\right)\right) \quad (5-13)$$

取 200 格網數，模擬間距  $\Delta x = 70.0\text{m}$ ，可蘭數採 0.75，模擬時間為  $t = 7552.13 \text{ sec}$ ，表 5-7 為潮汐波案例之誤差表，圖 5-19 與圖 5-20 分別為水位與速度模擬結果圖。

表 5-7 潮汐波案例之誤差表

	潮汐波案例		
	JSWENO	ZSWENO	AWENO
Eh	4.097	4.094	4.088
Eq	6.926	6.991	7.006
max_eh	0.040	0.040	0.040
max_eq	0.081	0.086	0.085

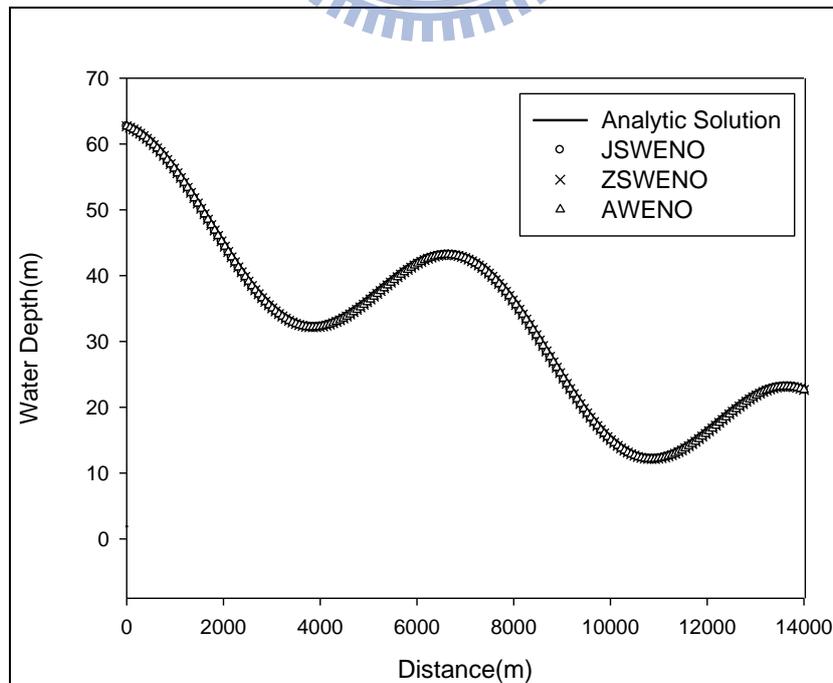


圖 5-19 潮汐波案例水深模擬結果圖

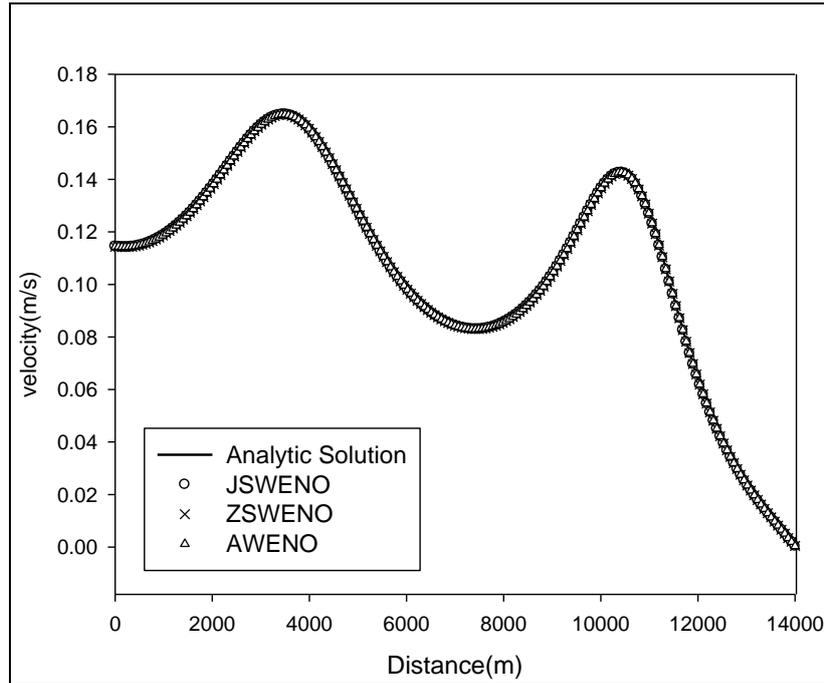


圖 5-20 潮汐波案例速度模擬結果圖

#### 5-2-4 小結

以上兩個案例在計算中，不會遇到如不連續面或乾濕點交界等，有劇烈通量變化的情況，三種算則之模擬結果都能吻合解析解，誤差在數量級上，相對於解析解本值也來得小上許多。因此可推測在平滑區與漸變段的計算上，由於通量的傳遞相對穩定，不易造成數值的震盪，對其 WENO 算則權重變化造成的影響，相對於有劇烈通量變化的區域，來得不敏感許多。

### 5-3 水面分離案例

將所經過學習得到之 AWENO 算則運用於 4-1 節所介紹的水面分離案例(仿 Bouchut 2004)，同樣以 8000 格網點 JSWENO 之模擬結果假定為解析解，各算則採 400 格網點模擬以作討論分析。圖 5-21 為

AWENO 於時間為 5 秒時所模擬的水位結果圖，圖 5- 22 與圖 5- 23 分別為放大水面分離處與底床高起處之模擬水位圖，由此看出 AWENO 模擬之水位線大致介於 JSWENO 與 ZSWENO 模擬水位線之間，對於乾濕點交界處的收斂性較 JSWENO 來得好，較 ZSWENO 來得差；而在對於水位線變化的連接處理上，反之較 ZSWENO 來得好，JSWENO 來得差。圖 5- 24 與圖 5- 25 分別為時間為 25 秒與 45 秒時之水位模擬結果圖，除了有上述水面分離處的收斂與不連續面近處點位的連接問題外，圖 5- 26 與圖 5- 27 的平滑水面線區域中，ZSWENO 與 AWENO 都發生了水位震盪的現象，推測原因是由於此兩個區域都有水面曲線斜率改變量最大的地方，而斜率改變量變動大代表著二次微分項的增加，平滑指示器中 P2 項所佔的影響也隨之增大，而 ZSWENO 與 AWENO 對於 P2 項作其捨棄或更動，使得這兩區域在數值通量傳遞上的計算誤差，造成水位產生波動的情形。

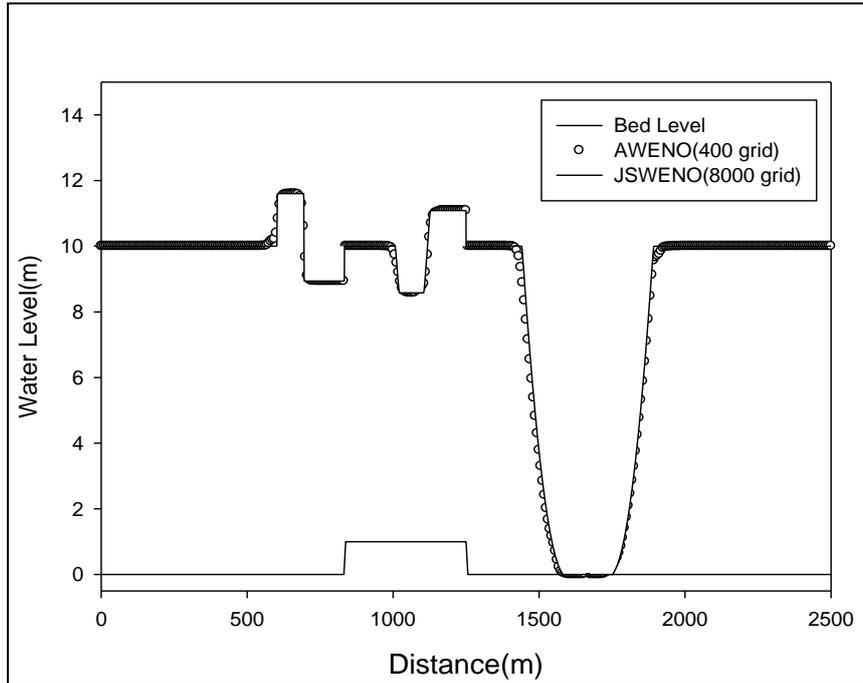


圖 5-21 AWENO 模擬水位結果圖

( $h_d = 1.0 * 10^{-6} \text{m}$ ,  $t = 5.0 \text{ sec}$ )

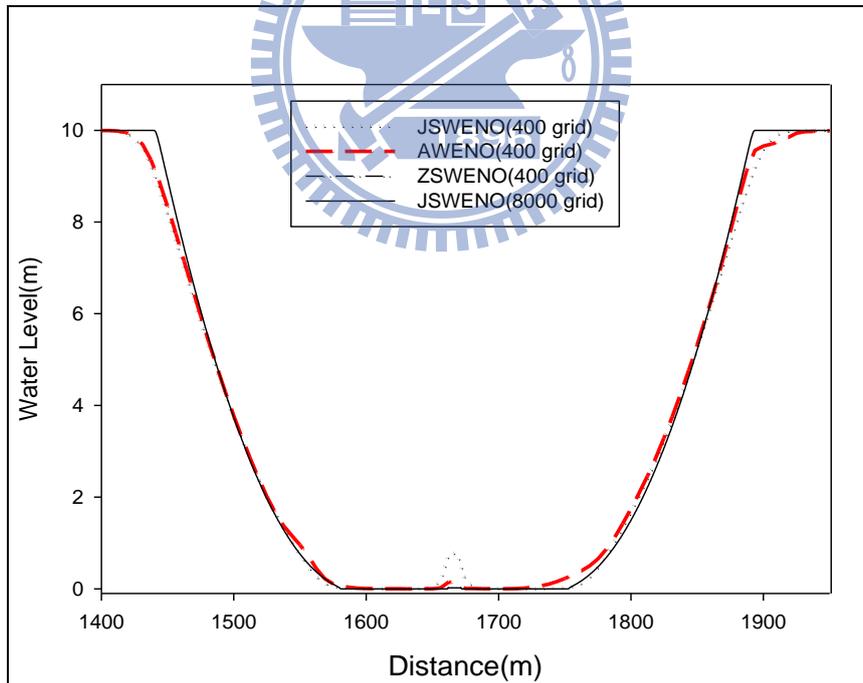


圖 5-22 水面分離處模擬水位結果圖

( $h_d = 1.0 * 10^{-6} \text{m}$ ,  $t = 5.0 \text{ sec}$ )

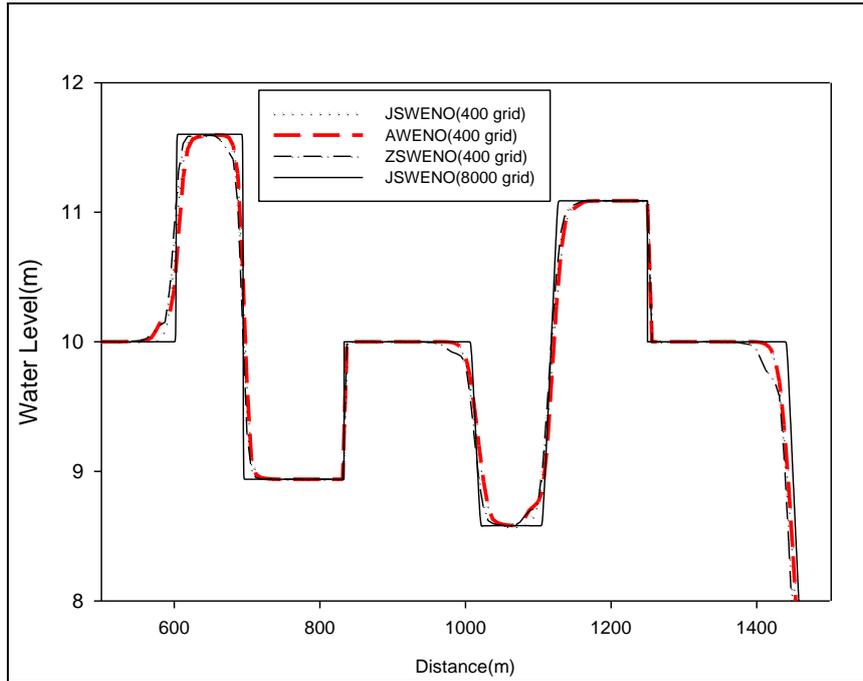


圖 5-23 底床高起處模擬水位結果圖

( $h_d = 1.0 * 10^{-6} \text{m}$ ,  $t = 5.0 \text{ sec}$ )

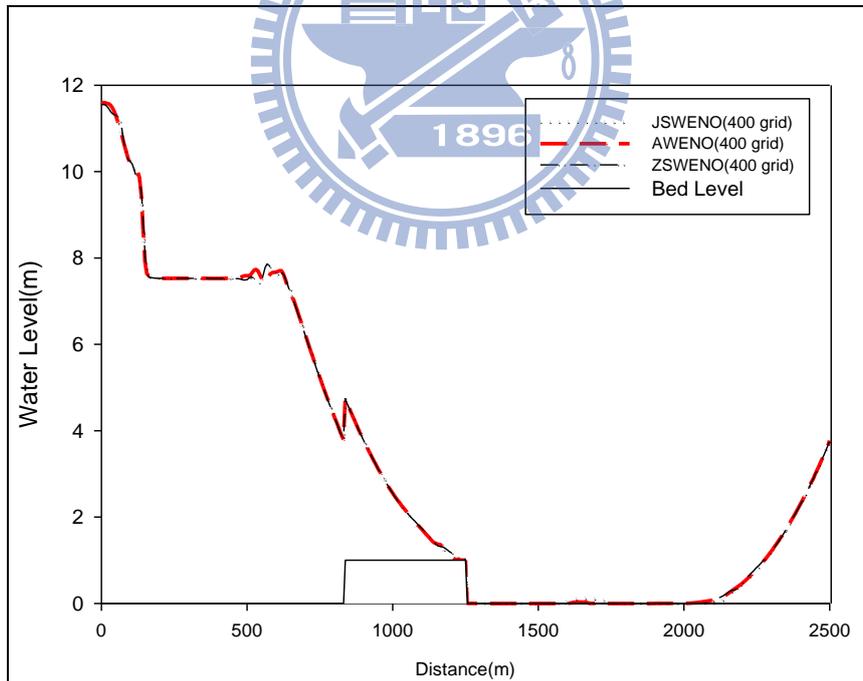


圖 5-24 水面分離案例模擬水位結果圖( $t = 25 \text{ sec}$ )

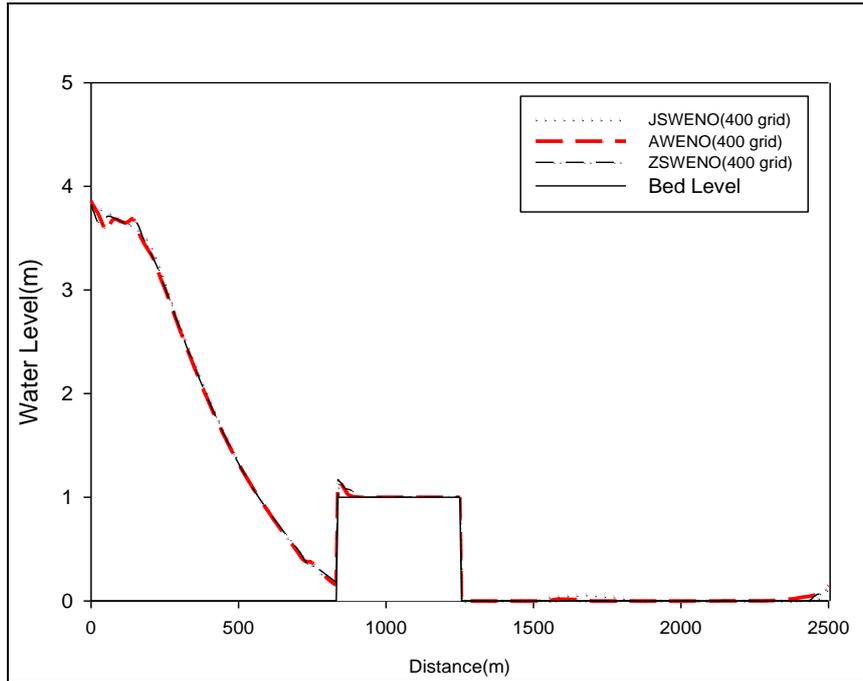


圖 5- 25 水面分離案例模擬水位結果圖( $t = 45$  sec)

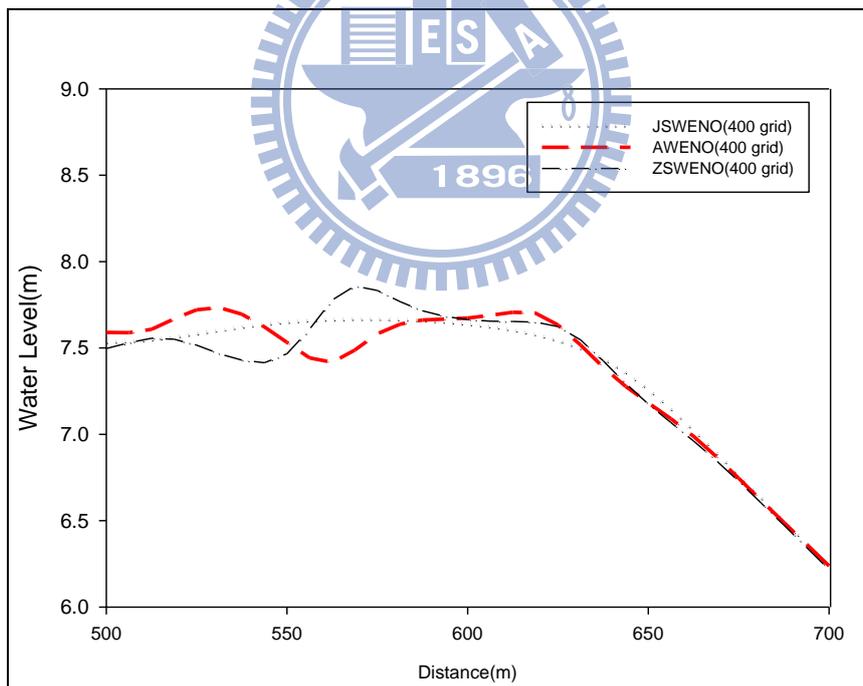


圖 5- 26 平滑曲線處模擬水位結果圖( $t = 25$  sec)

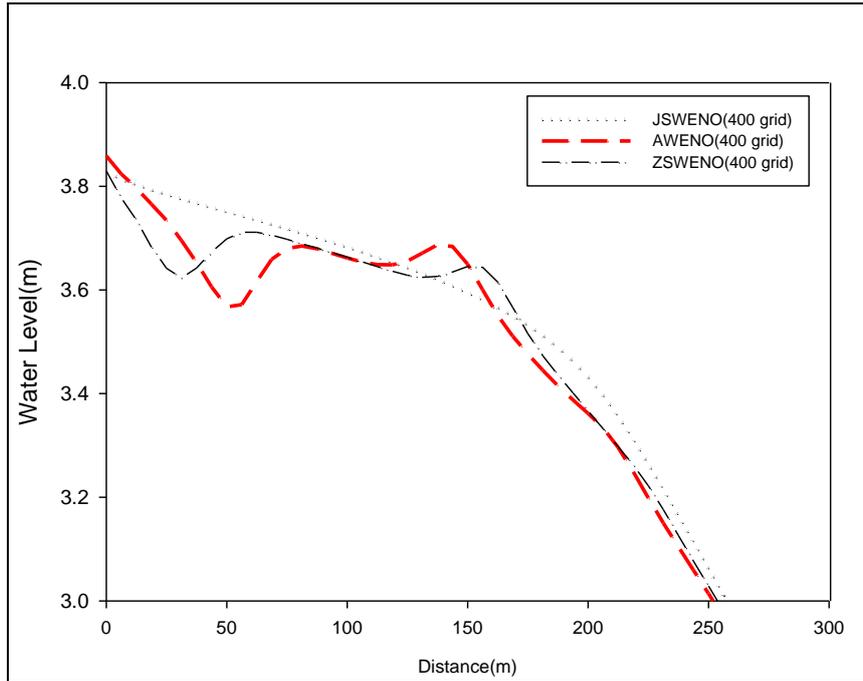


圖 5-27 上游邊界處模擬水位結果圖(t = 45 sec)



## 5-4 潰壩案例

參考 Harten and Osher (1987)之案例，假設發生潰壩之震波傳遞過程中，底床有一不連續面。探討在底床陡變的情況下，三種 WENO 算則在數值通量傳遞的計算上，是否會造成在底床不連續面處之水面線有震盪現象。

底床幾何形狀：

$$z(x) = \begin{cases} 8, & \text{if } |x - 750| \leq 1500/8 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5-14)$$

初始水流條件：

$$h(x, 0) = \begin{cases} 20 - z(x), & \text{if } x \leq 750 \\ 15 - z(x), & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5-15)$$

$$h_v(x, 0) = 0 \quad (5-16)$$

分別採用 500 格網數( $\Delta x = 3.0\text{m}$ )與 5000 格網數( $\Delta x = 0.3\text{m}$ )，可蘭數採 0.75 進行模擬，模擬時間則分為 15 秒與 60 秒，另將 5000 格網數 JSWENO 之模擬結果假定為解析解予以比較。

圖 5-28 與圖 5-31 分別為 15 秒和 60 秒時模擬水位與原始水位的變化差異圖，圖 5-29 與圖 5-32 為三種 WENO 算則在 15 秒和 60 秒時之模擬水位圖，模擬所得水面線未產生數值震盪的現象，並大致能符合假定之解析解，但由圖 5-30 與圖 5-33 放大在水位變化處的水面線，與上 5-3 節水面分離案例所得之結果一樣，對於水位線變化的連接處理上，表現好壞依序為 JSWENO、AWENO 與 ZSWENO 算則。

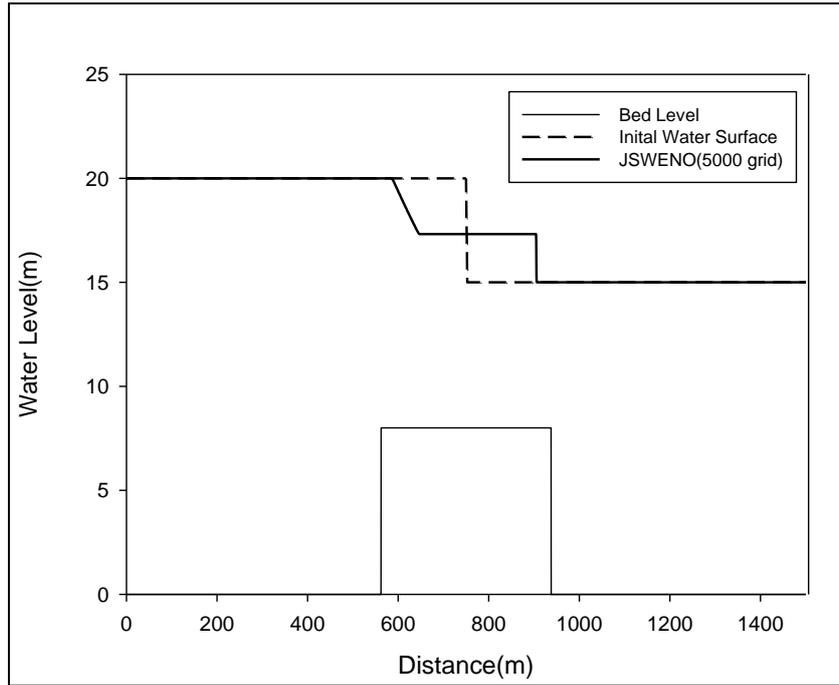


圖 5- 28 5000 格網數模擬水位結果圖(t = 15sec)

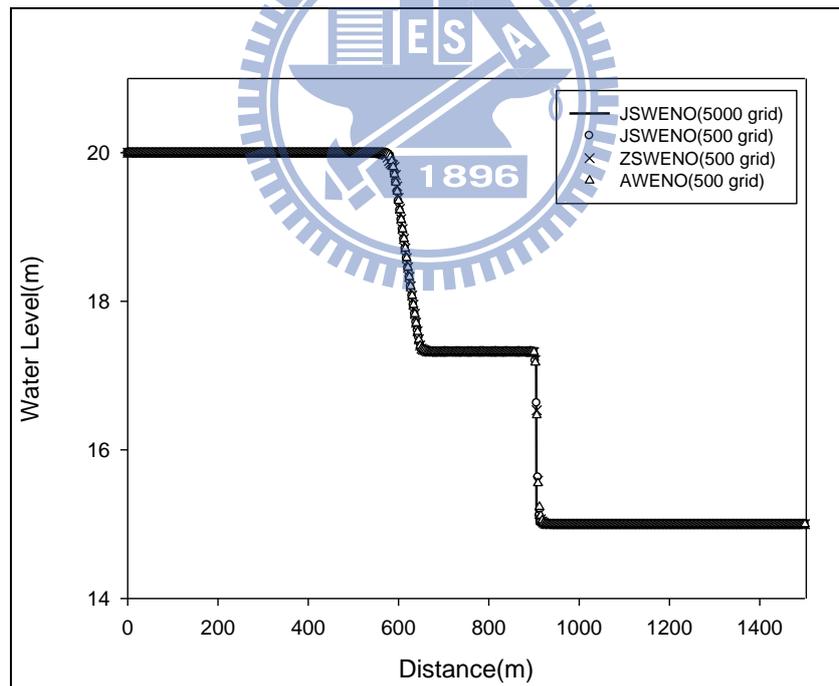


圖 5- 29 各式 WENO 算則模擬水位結果圖(t = 15sec)

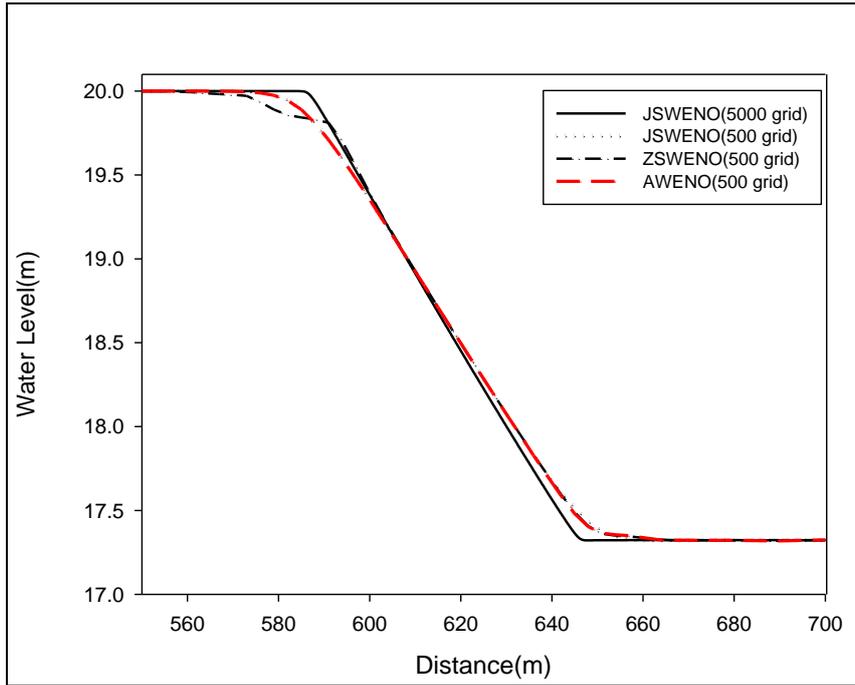


圖 5- 30 水位變化處模擬水位圖(t = 15sec)

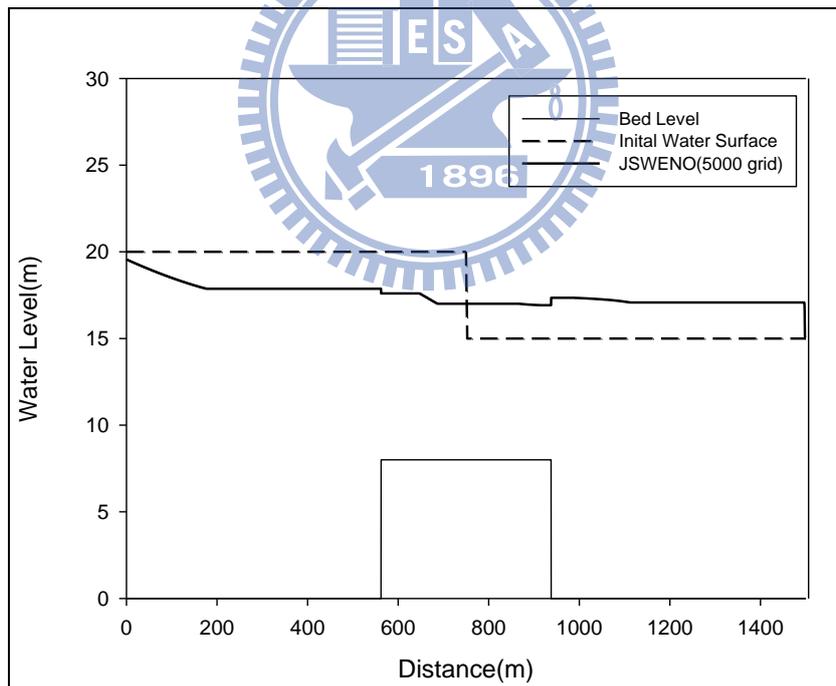


圖 5- 31 5000 格網數模擬水位結果圖(t = 60sec)

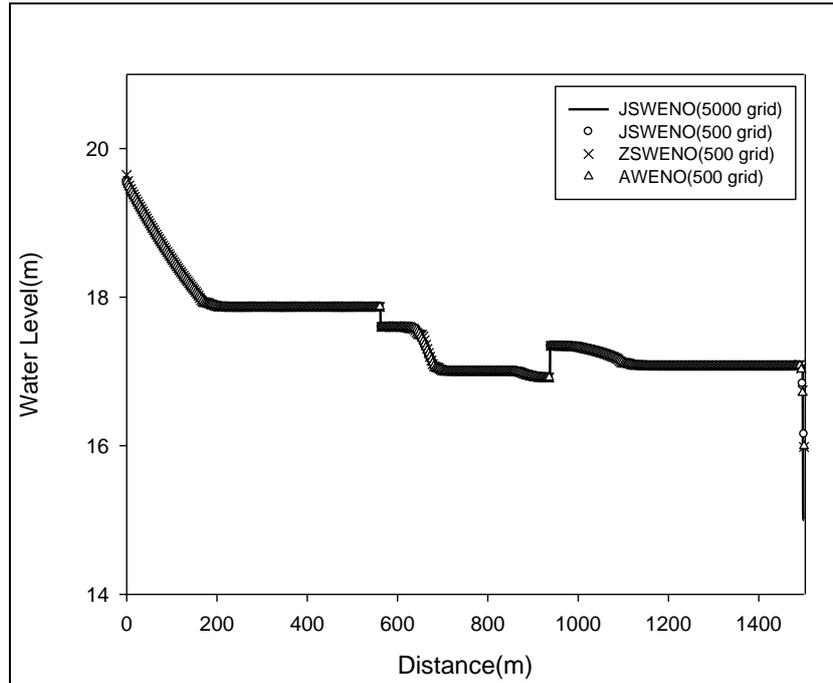


圖 5- 32 各式 WENO 算則模擬水位結果圖(t = 60sec)

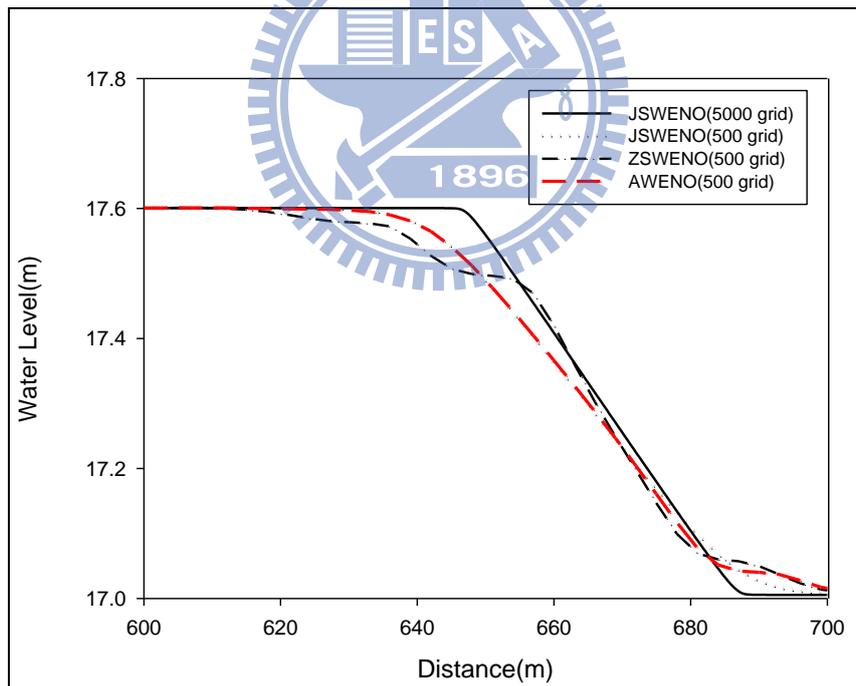


圖 5- 33 水位變化處模擬水位圖(t = 60sec)

## 第六章 結論與建議

JSWENO 算則為 Jiang and Shu 於 1996 年所發表的 WENO5 算則，組合了三階精度的 ENO 算則，以定義之平滑指示器使在通量的計算上，平滑區能盡量保持五階的精度，高震波區則令含有不連續解之計算元的權重盡量減小，以維持數值傳遞不震盪的原則；ZSWENO 算則為 Zhang and Shu 於 2007 年針對 JSWENO 算則於強震波區域的改進方法，捨棄 JSWENO 算則定義之平滑指示器中含二次微分項的部份，作為修正平滑指示器以增強在強震波區域的收斂性；而將 ZSWENO 算則應用於一維淺水波方程式中，發現在某些案例中會有較不好的模擬結果，似乎有過度收斂的情形發生。

因此本研究針對 ZSWENO 算則，加入修正係數  $\alpha_r$  以重新定義平滑指示器，並藉由類神經網路假設其構成平滑指示器之五點與修正係數  $\alpha_r$  間的關係函式，以 ZSWENO 模擬較差的案例作為學習案例(穩態流流經障礙物)、與案例解析解的誤差作為學習好壞的依據，結合遺傳演算法的優選特性來學習，最終得到一 AWENO 的算則。

### 6-1 結論

經過各種一維淺水波方程式的案例試驗，AWENO 算則與 JSWENO 算則、ZSWENO 算則之模擬結果比較分析後，可得以下之結論：

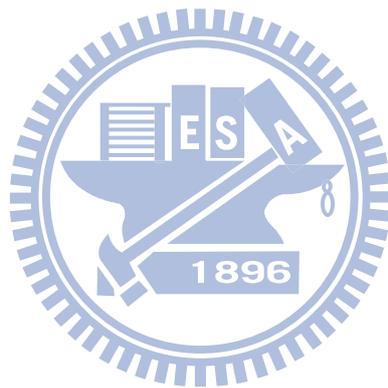
- (1) AWENO 算則之類神經網路只有對穩態流流經障礙物一案例做學習，而此次學習結果，著重於反應其不連續面上的不震盪性，因此經學習之類神經網路，在簡單平滑曲線微分案例的通量計算上，其精度的表現為三種算則中之最低。或許在學習過程中，可加入如簡單平滑曲線微分案例等對通量計算的精度要求較為重要的學習案例，以提昇 AWENO 算則在精度的表現。
- (2) 經無劇烈通量變化之一維淺水波方程試驗案例的測試，三種算則所模擬結果與誤差都大致相同，似乎精度的保持對於無劇烈通量變化一維淺水波方程的數值通量計算上，影響性較不這麼重要。
- (3) 在水面分離與潰壩案例的模擬表現上，AWENO 算則大致介於 JSWENO 與 ZSWENO 算則之間，對於乾濕點交界處的收斂性較 JSWENO 算則來得好，較 ZSWENO 算則來得差；而在對於水位線變化的連接處理上，反之較 ZSWENO 算則來得好，較 JSWENO 算則來得差。
- (4) AWENO 算則在乾濕點交界處的收斂處理上，水面線會有向右方些許偏傾的現象，而就模式的穩定性而言，最好能保持其計算上的對稱性。也因此這不對稱性的收斂，運用於更複雜與更長久時間的案例運算上，或許會出現數值通量傳遞上的誤差，因而產生數值的震盪。

(5)對於一般的明渠案例模擬而言，案例通常是由平滑區、緩變段與震波區組合而成，極少有單一高強度震波的情況，而由模擬的結果可知 JSWENO 算則的應用廣度與穩定性相對來地高，以一般淺水波方程式案例而言，選用 JSWENO 算則模擬通常都可得到不錯之模擬結果。

## 6-2 建議

1. 在學習過程中，除了單純處理類神經網路的運算外，還需合併水理模式的運算，此外一學習循環又包括了  $n$  組的基因組合，這使得在學習上需耗費大量的時間。若能透過平行運算同時處理  $n$  組基因組的計算，應能大幅節省學習所花費的時間使之學習更有效率。
2. 利用類神經網路來擬合所假設未知的關係函式，就理想而言透過無數次案例、無數次反覆的學習，此擬合的關係函式應能漸趨於一常態穩定的型態，自訂類神經網路的應用廣度與穩定性也能更佳；但因類神經網路的不確定性，輸入與輸出中間傳遞的過程難以用物理原則加以解釋，加上要考慮設計網路之架構與規模是否能反應其未知函式的變化、學習需耗費大量時間等缺點，因此在現實面的實行上有一定的難度。故若要繼續探討加權基本不震盪法收斂性之改良，由於類神經網路是假設其構成平滑指示器之五

點與修正係數  $\alpha_r$  間的關係函式，在增加學習案例的同時，或許可以利用類神經所學習之結果，結合物理概念，嘗試建構出一套能以物理解釋之修正算則。



## 參考文獻

1. Abgrall R. (1994), “*On essentially non-oscillatory schemes on unstructured meshes: analysis and implementation.*” J. Comput. Phys., Vol. 114, pp. 45-58.
2. Bermúdez A., Dervieux A., Désidéri J.A., and Vázquez M.E. (1998), “*Upwind schemes for the two-dimensional shallow water equations with variable depth using unstructured meshes.*” Comput.Methods Appl.Mech.Eng.,155, 49.
3. Bermúdez A. and Vázquez M.E. (1994), “*Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms.*” Computers and Fluids., Vol. 23, pp. 1049-1071.
4. Botchorishvili R., Perthame B., and Vasseur A. (2000), “*Equilibrium schemes for scalar conservation laws with stiff sources.*” Mathematics of Computation, Vol. 72, pp. 131-157.
5. Bouchut F. (2004), “*Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws and well-Balanced schemes for sources.*” Birkhauser Verlag, Germany.
6. Chaves P. and Chang F.-J. (2008), “*Intelligent reservoir operation system based on evolving artificial neural networks.*” Advances in Water Resources, Vol. 31, pp. 926-936.
7. Chen K.-H. and Pletcher R.H. (1991), “*Primitive variable, strongly implicit calculation procedure for viscous flows at all speeds.*” AIAA J., Vol. 29(8), AUGUST., pp. 1241-1249.
8. Chinnayya A. and LeRoux A.Y.(1999), “*A new general Riemann solver for the shallow-water equations with friction and topography.*” Available in the conservation law preprint server <http://www.math.ntnu.no/conservation/>.

9. Choi, H. and Liu J.-G. (1998), "*The reconstruction of upwind fluxes for conservation laws: its behavior in dynamic and steady state calculations.*" J. Comput. Fluids., Vol. 144, pp. 237-256.
10. Crnjaric-Zic N., Vukovic S., and Sopta L. (2004), "*Extension of ENO and WENO schemes to one-dimensional sediment transport equations.*" J. Comput. Fluids., Vol. 33, pp. 31-56.
11. Daliakopoulos I.N., Coulibaly P., and Tsanis, I.K. (2005). "*Groundwater level forecasting using artificial neural networks.*" Journal of Hydrology, Vol. 309(1-4), pp. 229-240.
12. Despres B. and Lagoutiere F. (2001), "*Contact discontinuity capturing schemes for linear advection, compressible gas dynamic.*" Journal of Scientific Computing, Vol. 16, pp. 479-524.
13. Einfeldt B. (1988), "*On Godunov-type methods for gas dynamics.*" SIAM J. Numer. Anal., Vol. 25, pp. 294-318.
14. Fatemi E., Jerome J., and Osher S. (1991), "*Solution of the hydrodynamic device model using high order non-oscillatory shock capturing algorithms.*" IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, Vol. 10, pp. 232–244.
15. French M.N., Krajewski W.F., and Cuykendall R.R. (1992), "*Rainfall forecasting in space and time using a neural network.*" Journal of Hydrology, Vol. 137, pp. 1-31.
16. Friedrich O. (1998), "*Weighted essentially non-oscillatory schemes for the interpolation of mean values on unstructured grids.*" J. Comput. Phys., Vol. 144, pp. 194-212.
17. Gerritsen, M. and Olsson, P. (1998), "*Designing an efficient solution strategy for fluid flows.*" J. Comput. Phys., Vol. 147, pp. 293-317.
18. George D.L. (2004), "*Numerical approximation of the nonlinear shallow water equation : a godunov-type scheme, master's thesis.*"

University of Washington, Seattle, WA.

19. Goldberg D.E. (1989), "*Genetic algorithms for search, optimization, and machine learning.*" Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc.
20. Gosse L. (2001), "*A well-balanced scheme using non-conservative products designed for hyperbolic systems of conservation laws with source terms.*" Math. Mod. Meth. Appl. Sci., Vol. 11, pp. 339-356.
21. Goutal N. and Maurel F. (1997), "*Proceedings of the 2nd workshop on dam-breakwave simulation, technical report he-43/97/016/a.*" Electricité de France, Département Laboratoire National d'Hydraulique, Groupe Hydraulique Fluviale.
22. Greenberg J.M. and LeRoux A.Y. (1996), "*A well-balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations.*" SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 33, pp. 1-16.
23. Harten A. (1983), "*High resolution schemes for hyperbolic conservation laws.*" J. Comput. Phys., Vol. 49, pp. 357-393.
24. Harten A. and Osher S. (1987), "*Uniformly high-order accurate non-oscillatory schemes.*" SIAM J. Numer. Anal., Vol. 24, pp. 279-309.
25. Harten A. (1989), "*ENO schemes with subcell resolution.*" J. Comput. Phys., Vol. 83, pp. 148-184.
26. Henrick A.K., Aslam T.D., and Powers J.M. (2005), "*Mapped weighted essentially non-oscillatory schemes.*" J. Comput. Phys., Vol. 207, pp. 542-567.
27. Holland J. (1975), "*Adaptation in natural and artificial systems.*" The University of Michigan Press, Ann.
28. Hsieh T.J., Wang C.-H., and Yang J.-Y. (2008), "*Numerical experiments with several variant WENO schemes for the euler equations.*" International Journal for Numerical Methods in Fluids,

- Vol. 58, pp. 1017-1039.
29. Hubbard M.E. and Garcia-Navarro P. (2000), “*Flux difference splitting and the balancing of source terms and flux gradients.*” J. Comput. Phys., Vol. 165, pp. 89-125.
  30. Jain, S.K., Das A., and Srivastava, D.K. (1999), “*Application of ANN for reservoir inflow prediction and operation.*” J. Water Resour. Plan. Manage., Vol. 125(5), pp. 263-271.
  31. Jenny P. and Muller B. (1998), “*Rankine–Hugoniot–Riemann solver considering source terms and multidimensional effects.*” J. Comput. Phys., Vol. 145, pp. 575-610.
  32. Jiang C.-S. and Shu C.-W. (1996), “*Efficient implementation of weighted ENO schemes.*” J. Comput. Phys., Vol. 126, pp. 202-228.
  33. Jiang G.-S. and Tadmor E. (1998), “*Nonoscillatory central schemes for multidimensional hyperbolic conservation laws.*” SIAM Journal on Scientific Computing, Vol. 19, pp. 1892-1917.
  34. Jin S. (2001), “*A steady-state capturing method for hyperbolic systems with geometrical source terms.*” Mathematical Modelling and Numerical Analysis (M2AN), Vol. 35, pp. 631-645.
  35. Kuo A.-C. and Polvani L.M. (1999), “*Wave vortex interaction in rotating shallow-water- part I.*” Journal of Fluid Mechanics, Vol. 394, pp. 1-27.
  36. LeVeque R.J. (1990), “*Numerical methods for conservation laws.*” Birkhauser Verlag, Basel.
  37. LeVeque R.J. (1998), “*Balancing source terms and flux gradients on high resolution Godunov methods: the quasi-steady wave propagation algorithm.*”, J. Comput. Phys., Vol. 146, pp. 346–365.
  38. LeVeque R.J. (2002), “*Finite volume methods for hyperbolic problems.*” Cambridge University Press, UK.
  39. Liska R. and Wendroff B. (1999), “*2-Dimensional shallow-water*

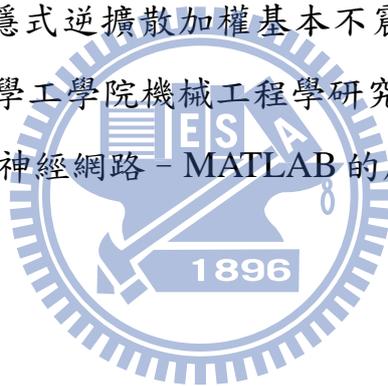
- equations by composite schemes.*” International Journal for Numerical Method in Fluid, Vol. 30, pp. 441-479.
40. Liu X.D., Osher S., and Chan T. (1994), “*Weighted essentially nonoscillatory schemes.*” J. Comput. Phys., Vol. 115, pp. 200-212.
  41. Liu X.D. and Osher S. (1998), “*Conex ENO high order multi-dimensional schemes without field by fiele decomposition orstaggered grids,*” J. Comput. Phys., Vol. 142, pp. 304-330.
  42. Loke E., Warnaars E.A., Jacobson P., Nelen F., and DoC'eu M.A. (1997), “*Artificial neural networks as a tool in urban storm drainage.*” Wat. Sci. Tech., Vol. 36, pp. 101-109.
  43. Lorrai M. and Sechi G.M. (1995). “*Neural nets for modeling rainfall-run transformations.*” Wat. Resour. Man. Vol.9, pp.299-313.
  44. McCulloch W.S. and Pitts W. (1943), “*A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity.*” Bulletin of Mathematical Biophysics, Vol. 5, pp. 115–133.
  45. Minion M.L. and Brown D.L. (1997), “*Performance of under-resolved two-dimensional incompressible flow simulations II.*” J. Comput. Phys., Vol. 138, pp. 734-765.
  46. Ollivier-Gooch C.F. (1997), “*Quasi-ENO schemes for unstructured meshes based on unlimited data-dependent least-squares reconstruction,*” J. Comput. Phys., Vol. 133, pp. 6-17.
  47. Roe P. L. (1986), “*Characteristics-based upwind scheme for the euler equations.*” Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 18, pp. 337-365.
  48. Rumelhart D.E., Hinton G.E., and Williams R.J. (1986), “*Learning internal representations by error propagation.*” in D.E. Rumelhart and J.L. McClelland eds. Parallel Distributed Processing: Explorations in the Microstructure of Cognition, Vol. 1, pp. 318-362.
  49. Sajikumar N. and Thandaveswara B.S. (1992), “*A non-linear*

- rainfall-runoff model using an artificial neural network.*” Journal of Hydrology, Vol. 216(1), pp. 32-55.
50. Shigidi A. and Garcia L.A. (2003), “*Parameter estimation in groundwater hydrology using artificial neural networks.*” Journal of Computing in Civil Engineering, Vol. 17(4), pp. 281-289.
51. Shu C.-W. (1990), “*Numerical experiments on the accuracy of ENO and modified ENO schemes.*” Journal of Scientific Computing, Vol. 5, pp. 127-149.
52. Shu C.-W. (1997), “*Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws.*” Institute for Computer Applications in Science and Engineering NASA Langley Research Center Hampton, VA.
53. Shu C.-W. (1998), “*Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws.*” Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 160, Springer, Berlin/New York.
54. Shu C.-W. and Osher S. (1988), “*Efficient implementation of nonoscillatory shock capturing scheme.*” J. Comput. Phys., Vol. 77, pp. 439-471.
55. Shu C.-W. and Osher S. (1989), “*Efficient Implementation of Nonoscillatory Shock Capturing Schemes II.*” J. Comput. Phys., Vol.83, pp.32-78.
56. Suresh, A. and Huynh (1997), “*Accurate monotonicity-preserving schemes with Runge-Kutta time stepping.*” J. Comput. Phys., Vol. 136, pp. 83-99.
57. V´azquez-Cendon M.E. (1999), “*Improved treatment of source terms in upwind schemes for the shallow water equations in channels with irregular geometry.*” J. Comput. Phys., Vol. 148, pp. 497-526.

58. Van Leer B. (1974), "*Towards the ultimate conservative difference scheme II, monotonicity and conservation combined in a second order scheme.*" J. Comput. Phys., Vol. 14, pp. 361-470.
59. Van Leer B. (1979), "*Towards the ultimate conservative difference scheme V, a second order sequel to Godunov's method.*" J. Comput. Phys., Vol. 32, pp. 101-136.
60. Vukovic S. and Sopta L. (2002), "*ENO and WENO schemes with the exact conservation property for one-dimensional shallow water equations.*" J. Comput. Phys., Vol. 179, pp. 593-621.
61. Werbos P. (1974), "*Beyond regression: new tools for prediction and analysis in the behavioral sciences.*" PHD thesis, Harvard, Cambridge, MA.
62. Xing Y. and Shu C.-W. (2005), "*High order finite difference WENO schemes with the exact conservation property for the shallow water equations.*" J. Comput. Phys., Vol. 208, pp. 206-227.
63. Xu Z. and Shu C.-W. (2005), "*Anti-diffusive flux corrections for high order finite difference WENO schemes.*" J. Comput. Phys., Vol. 205, pp. 458-485.
64. Yang J.-Y. and Hsu. C.-A. (1992), "*High-resolution, nonoscillatory schemes for unsteady compressible flows.*" AIAA Journal, Vol. 30(6), pp. 1570-1575.
65. Yang J.-Y., Yang S.-C., Chen Y.-N., and Hsu C.-A. (1998), "*Weight ENO schemes for the three-dimensional incompressible Navier-Stoke equations.*" J. Comput. Phys., Vol. 146, pp. 464-487.
66. Yee H.-C. (1989), "*A class of high-resolution explicit and implicit shock capturing methods.*" NASA TM-101088.
67. Zhang B. and Rao S.-G. (2000), "*Prediction of watershed runoff using Bayesian concepts and modular neural networks.*" Water

- Resources Research, Vol. 36(3), pp. 753-762.
68. Zhang S. and Shu C.-W. (2007), "A new smoothness indicator for the WENO schemes and its effect on the convergence to steady state solutions." *Journal of Scientific Computing*, Vol. 31, Nos. 1/2.
  69. Zhou J.-G., Causon D.M., Mingham C.G., and Ingram D.M. (2001), "The surface gradient method for the treatment of source terms in the shallow-water equations." *J. Comput. Phys.*, Vol. 168, pp. 1-25.
  70. 王進德、蕭大全(1994),「類神經網路與模糊控制入門」,全華圖書公司。
  71. 林聖鈞(2008),「應用小波分析辨識地下水水位模擬之類神經網路架構」,國立台灣大學土木工程學研究所碩士論文。
  72. 李心平、張斐章(1995),「模糊控制理論應用於土石流預警系統之研究」,中華水土保持學報,第二卷,第二期,第145~154頁。
  73. 范正成、張郁麟、楊文仁、劉哲欣(2006),「倒傳遞類神經網路應用於石門水庫懸浮固體濃度之即時分析與預測」,中華水土保持學報,第三十七卷,第四期,第367~376頁。
  74. 孫建平(1997),「類神經網路及其應用於降雨及逕流過程之研究」,國立臺灣大學農業工程學系碩士論文。
  75. 郭文達(2004),「混合通量分裂式有限體積算則在二維淺水波方程式之研發」,國立台灣大學土木工程學研究所碩士論文。
  76. 郭益銘(1999),「應用多變量統計與類神經網路分析雲林沿海地區地下水水質變化」,國立台灣大學農業工程研究所碩士論文。
  77. 陳昶憲、楊朝仲、王益文(1996),「類神經網路於烏溪流域洪流預報之應用」,中華水土保持學報,第二十七卷,第四期,第267~274頁。
  78. 黃文蔚(2005),「頻散曲線評估地盤剪力波速—有限差分法及類神

- 經網路」，國立台灣大學土木工程學研究所碩士論文。
79. 黃國源(2003)，「類神經網路與圖型識別 第二版」，維科圖書公司。
  80. 張東炯(2000)，「類神經網路於土石流發生預測模式之研究」，台灣水利，第四十八卷，第二期，第 92~98 頁。
  81. 曾國源(2003)，「以類神經網路架構土石流預警系統之研究」，國立台灣大學生物環境系統工程學系暨研究所博士論文。
  82. 葉怡成(2001)，「應用類神經網路 第三版」，儒林圖書公司。
  83. 葉怡成(2001)，「類神經網路模式應用與實作 第七版」，儒林圖書公司。
  84. 謝蒼仁(2009)，「隱式逆擴散加權基本不震盪算則的發展及其應用」，國立台灣大學工學院機械工程學研究所博士論文。
  85. 羅華強(2001)，「類神經網路 - MATLAB 的應用」，清蔚科技公司。



## 附錄 A. 類神經網路

類神經網路一種基於腦與神經系統研究所啟發的資訊處理技術，使用大量的相連人工神經元來模仿生物神經網路的能力，其運算單元由類似生物腦神經元的簡單處理器組成，而處理器間的連結則是模仿神經元間的突觸，反映了生物腦神經系統的基本特性。

### A-1 生物神經元模型

生物神經網路是由巨量的神經細胞(neuron)，或稱神經元所組成，其構造包括(圖 A-1)：

- (1) 神經核(soma)：神經細胞呈核狀的處理機構。
- (2) 軸索(神經軸)(axon)：神經細胞呈軸索狀的輸送機構。
- (3) 樹突(神經樹)(dendrites)：神經細胞呈樹枝狀的輸出入機構。
- (4) 突觸(神經節)(synapse)：神經樹上呈點狀的連結機構。

當生物神經元由樹突接受其他神經元的信號刺激，經各方傳導至細胞本體，若其細胞膜之活化電位超過某一特定的門檻值，則活化電位的脈衝會被激發出來，藉由軸突傳遞至其他相連的神經元，而由軸突末端的突觸產生電位差，完成信號的傳遞。

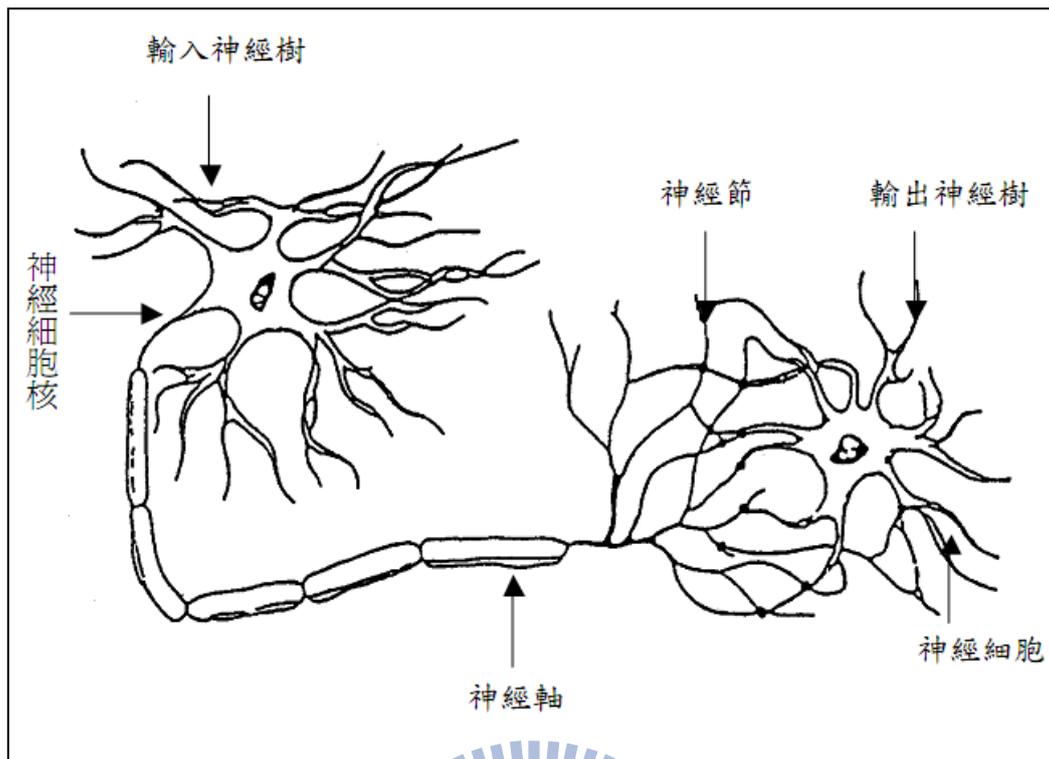


圖 A-1 生物神經元模型

(摘自葉怡成 2001)

## A-2 人工神經元模型

人工神經元模型如圖 A-2，每一個處理單元(processing element)的輸出以扇狀送出，做為其他後續連結處理單元的輸入。

處理單元其輸入值與輸出值的關係式，一般可用輸入值的加權乘積和之函數表示，如式(A-1)：

$$Y_j = f\left(\sum_i W_{ij} X_i - \theta_j\right) \quad (\text{A-1})$$

$Y_j$ ：模仿生物神經元的模型的輸出訊號。

f：模仿生物神經元的模型的轉換函數(transfer function)，將從其

他處理單元輸入值的加權乘積和轉換成處理單元輸出值的數

學公式，而一般常用的非線性函數有下列二種：

a. 雙彎曲函數(sigmoid function)

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}, 0 \leq f(x) \leq 1, \text{ 如圖 A-3 之 a.}$$

b. 雙曲線正切函數(hyperbolic tangent function)

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, -1 \leq f(x) \leq 1, \text{ 如圖 A-3 之 b.}$$

$W_{ij}$ ：模仿生物神經元的模型的神經強度，又稱連結加權值。

$X_i$ ：模仿生物神經元的模型的輸入訊號。

$\Theta_j$ ：模仿生物神經元的模型的閾值，又稱偏權值。

介於處理單元間的訊息傳遞路徑稱為連結(connection)。每一個連結上有一個數值的加權值  $W_{ij}$ ，表示第  $i$  個處理單元對第  $j$  個處理單元影響程度。

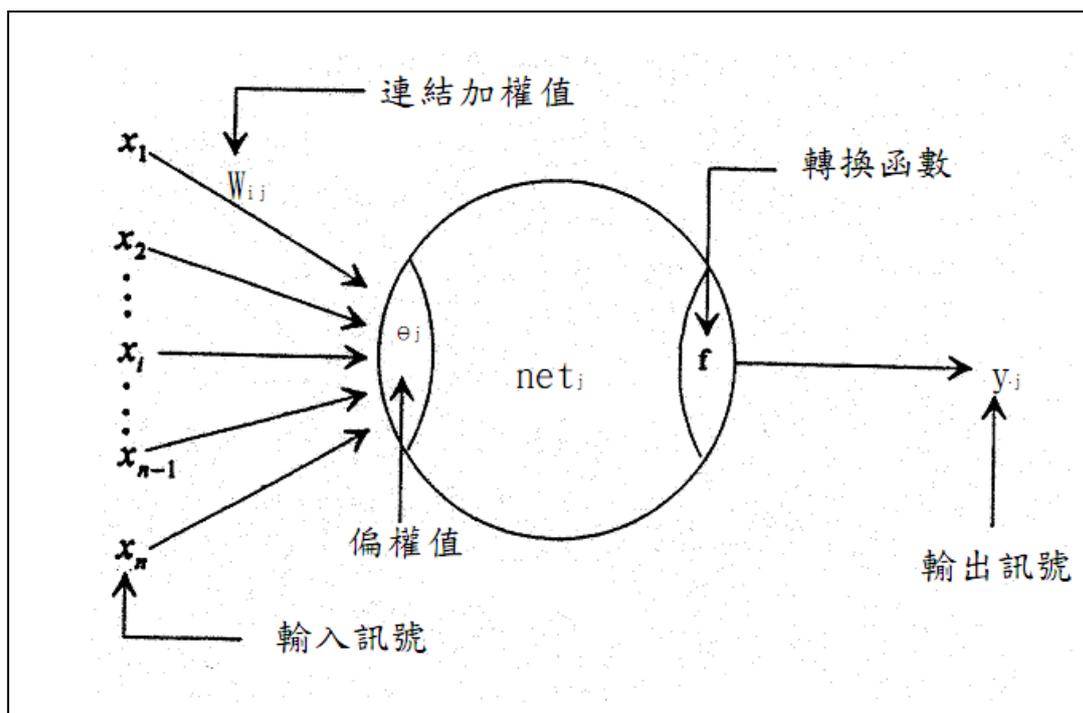


圖 A-2 人工神經元模型

(摘自葉怡成 2001)

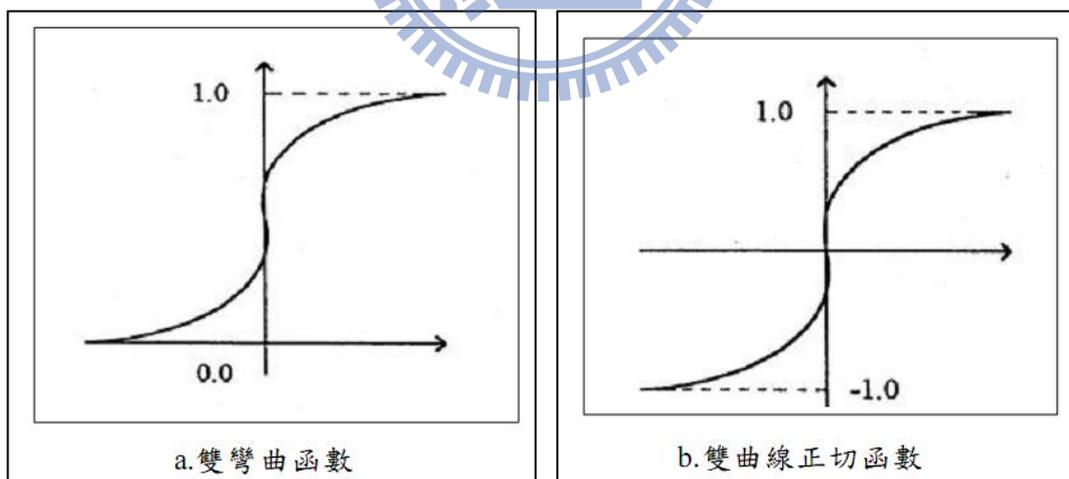


圖 A-3 常用之非線性轉換函數

(摘自葉怡成 2001)

### A-3 網路架構

一個類神經網路是由許多個人工神經元與其連結所組成，結構包含許多層(layer)，而每一層又包含若干個處理單元，以組成各種網路拓撲(topology)。其中以前饋式網路(forward networks)應用最為普遍，此類網路之神經元為階層式排列，順序為輸入層、若干層隱藏層(hidden layer)與輸出層，而同一層中每個神經元彼此不相連接，且每一層只接受前一層的輸出，如圖 A- 4 所示。前述之倒傳遞類神經網路即屬於此類網路架構。

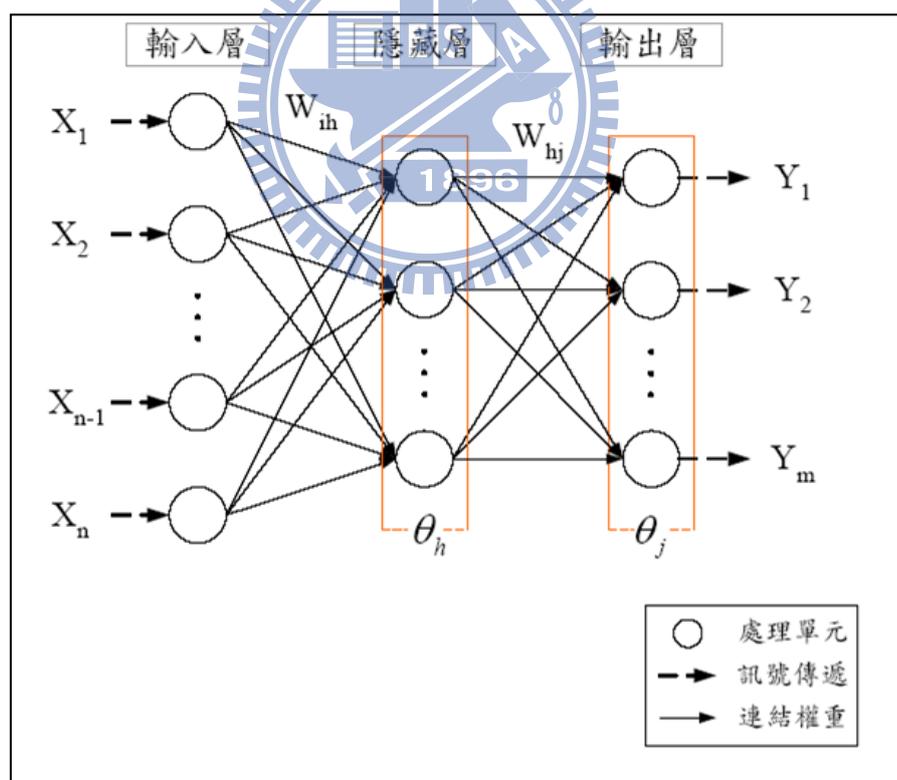


圖 A- 4 前饋式類神經網路圖

(摘自葉怡成 2001)

前饋式類神經網路之主要架構及概念說明如下：

(1)輸入層：用以表現網路的輸入變數，其處理單元數目依問題而定，網路之訊號便是由此輸入。

(2)隱藏層：提供類神經網路表現處理單元間的交互作用，與問題的內在結構的能力，其處理單元數目並無標準方法可以決定，經常需要以試誤法決定其最佳數目。

(3)輸出層：用以表現網路的輸出變數，其處理單元數目依問題而定，網路最終訊號便是由此輸出。

(4)連結加權值：一般而言，訓練類神經網路的最終目的，就在於求出這些加權值的最佳值，使類神經網路系統的輸入及輸出能形成某種特定的函數關係。

而在如何修正連結中的加權值，以逐漸逼近最佳值解，學習演算法(learning algorithm)的選用佔了很重要的地位。倒傳遞類神經網路基本原理是利用最陡坡降法(gradient steepest descent method)的觀念，將能量函數予以最小化，而網路的學習過程即能量函數最小化的過程。

## 附錄 B. 遺傳演算法

在自然選擇的演化機制中，生物界中的每個個體會把它們的特徵傳遞到下一代，而生物的特徵是由生物細胞內的染色體來決定的（染色體即是由基因所組成的基因鏈），由於每個個體的特徵都不大相同，因此不同特徵的個體對環境的適應力也不大一樣，同時生物的突變及交配也會使得上下代個體之特徵不相同，而適應力較高的個體，即它們的特徵較適合於目前的環境，在後代的數目上由於競爭的緣故，適應力較高的個體的後代數目會比適應力較低的後代數目多，因此這會把整個族群的特徵引導向更適合生存於自然環境的方向發展，在長時間中，這種引導所發生的變異會越來越累積，最後演變至產生一個特徵能適應於特別生態環境下的種族。

本研究在類神經網路的學習演算法上，採用的為混合遺傳演算法，將網路中各處理單元之連結加權值與門限值以二進位編碼，形成許多基因組序列的組合，以與實際值誤差的大小當做適合度判斷的依據，經比較、優選來搜尋各連結加權值與門限值的最佳組合。接下來本節說明基因演算法之優點與主要運算步驟。

### B-1 遺傳演算法之優點

遺傳演算法為其最佳化觀念就是源自於上述自然界演化中「物競

天擇，適者生存」的原理，以基因間的選擇、交換及突變等步驟模擬自然界的演化過程，以達到最佳化的目的，其有以下優點；

1. 其可優選連續(continuous)及不連續(discrete)的參數。
2. 在優選的過程中，不要求得目標函數的導數。
3. 搜尋的方式不同於以往的單點搜尋方式，而是採用多點搜尋，因此不容易掉入局部解(local optimum)。
4. 可以處理多參數的優選問題。
5. 具隱平行運算的能力，配合平行電腦運算可大量節省時間。
6. 在優選複雜非線性的問題中，其演算機制可跳脫局部最佳解(local optimum)。
7. 演算優選的結果，可提供一組最佳解，而非只有單一最佳解。
8. 參數優選需經由解碼的過程，而整個演算的機制是在解碼後的參數集合中進行，不是在參數集合本身，因此演算的機制不受問題函數型態的影響。

## B-2 遺傳演算法之運算步驟

基因演算法主要步驟之操作與功用詳述如下：

### 1. 編碼(encoding)

每一個試算參數都可經由編碼過程，將參數值編成一組基因序列，以二進位編碼為例，其編碼方程式如下：

$$b_i = \begin{cases} 1, & \text{if } L_i \leq 2^{n-1} - 1 \\ 0, & \text{if } L_i > 2^{n-1} - 1 \end{cases}, i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (\text{B-1})$$

$$L_i = (x - x_l) \frac{(2^n - 1)}{x_u - x_l} - \sum_{j=1}^{i-1} b_j 2^{n-j} \quad (\text{B-1})$$

其中  $x_u$ 、 $x_l$  分別代表參數值之上限(upper bound)與下限(lower bound)， $b_i$  代表第  $i$  個基因位元(bit)，經由上式便可將參數  $x$  編寫成一組基因碼(染色體)。

## 2. 產生初始群集(initial population)

以隨機的方式產生多條染色體作為初始群集。

## 3. 選擇(selection) 或複製(reproduction)

為演化出更優良的個體，必須從原來族群中篩選出較佳的個體，組成下一代的族群，這就是選擇。藉由誤差經適合度函數(fitness function)轉換而出的適合度作為評估標準，擁有較高適合度的染色體，便有較高的機率被選擇出來進行複製，而適合函數必須由使用者針對各種不同最佳化問題自行訂定。下列為兩種常用的選擇方法說明：

### a. 輪盤法(roulette wheel)

所謂輪盤法是假設一個可轉動的輪盤，在輪盤上劃分許多扇

形區塊，區塊的面積大小正比於個體(基因組)被複製的機率，其公式為：

$$P_i = \frac{f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} \quad (\text{B-3})$$

其中， $P_i$  為第  $i$  組基因組之被選擇機率， $n$  為基因組總數， $f_i$  為第  $i$  組基因組計算所得的合適度， $\sum_{i=1}^n f_i$  則為所有群組合適度之和。因此個體的適合度越高，所佔有族群適合度總和的比例也越高，在輪盤上所佔的面積也越大，而被選上的機率也越大。詳細步驟則如下所示：

- (1) 計算總合適度：為第一組基因組合的適合度至最後一組合適度之總和。
- (2) 求各組合適度所佔的份量：各組合適度除以適合度總和。
- (3) 繪製輪盤：在盤上劃分扇形區塊，區塊大小正比於各組合適度所佔的份量。
- (4) 射靶：隨機亂數產生 0 至 1 的數字，此數落於何區，則該區基因組被選擇複製一次。
- (5) 重複 4，直到複製總數等於族群大小。

#### b. 競爭法(tournament selection)

比較選取法，即是模仿自然界的生物彼此競爭情形，當某一個

體的適應值愈高，其經由比較選取後，存活下來而被複製的機會愈高，此選取法有一好處，即是染色體被複製下來的機率與染色體間適合度的相對值大小無關而是取決於相對大小，因此較適合於個體間適合度值相對變化很大之問題，一般做法如下：

- (1) 依每代總數，設定一個合理的比較個數，假設為 2 個。
- (2) 每次從母代隨機選取 2 個染色體，比較其適合度較優者複製至子代。
- (3) 重複 2，直到複製總數等於族群大小。

#### 4. 交換(crossover)或重組(recombination)

進行完複製的步驟之後，便接著要進行交配的程序。在遺傳演算法運作的過程中，程式會隨機產生一個交配的機率值，若是此值小於所定義的交配率，染色體便會進行交配的程序。將再前一步驟中所選取的個體，依亂數任意取出兩個置入交換池(mating pool)中，再經由交換步驟將其基因排列作重新的組合。常見的交配方式有三種，分別是單點交配、雙點交配和均一化交配，以下面分別對這三種方式作介紹。

##### a. 單點交配

在進行單點交配時，程式會先依亂數決定一個切斷點，利用這個切斷點，將原先挑選出欲進行交配兩個的染色體切成兩部分，再將切開的

部分重新組成一對新的染色體，如

圖 B-1 所示。

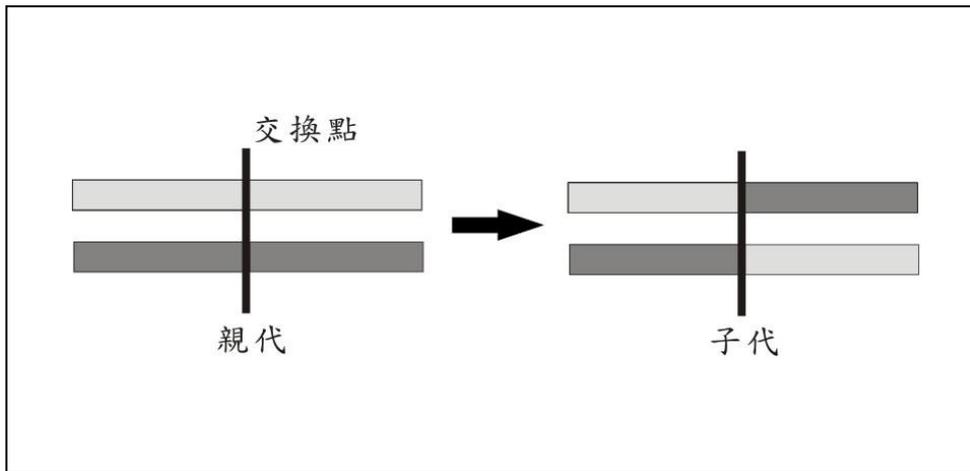


圖 B-1 單點交配示意圖

b. 雙點交配

雙點交配的步驟與單點交配類似，唯一的不同處是在進行雙點交配時，程式會先依亂數決定兩個切斷點，利用這兩個切斷點，將原先挑選出欲進行交配的染色體切成三部分，再將切開的部分重新組合成新的染色體，如圖 B-2 所示。

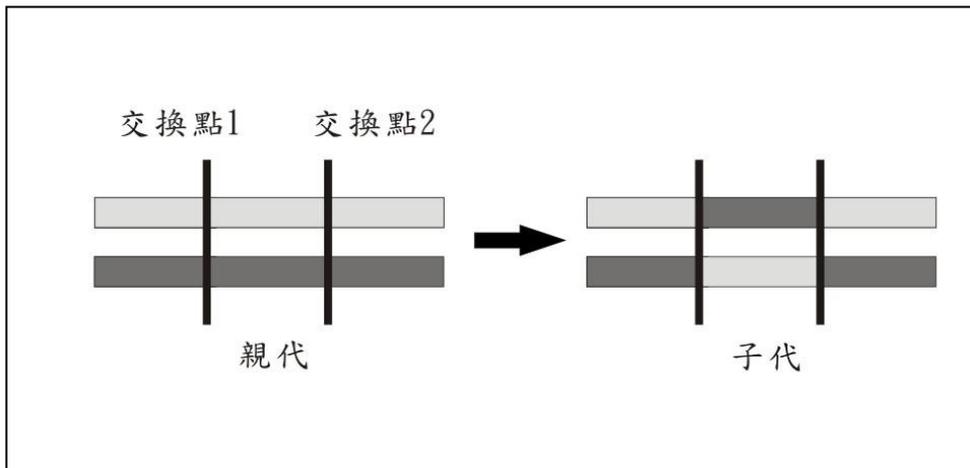


圖 B-2 雙點交配示意圖

c. 均一化交配

使用均一化方式進行交配時，首先會產生一個和染色體長度相等的二進位陣列，在這個二進位陣列中，每一個位元均會依亂數決定此位元的值為 0 或 1，如此一個完整的二進位陣列稱之為模具(mask)。利用這個模具，可以決定染色體交配的位置，若是在模具中的位元值為 1 時，就進行染色體在此位元的互換；反之模具中的位元值為 0 時，則不進行互換。如圖 B-3 所示。

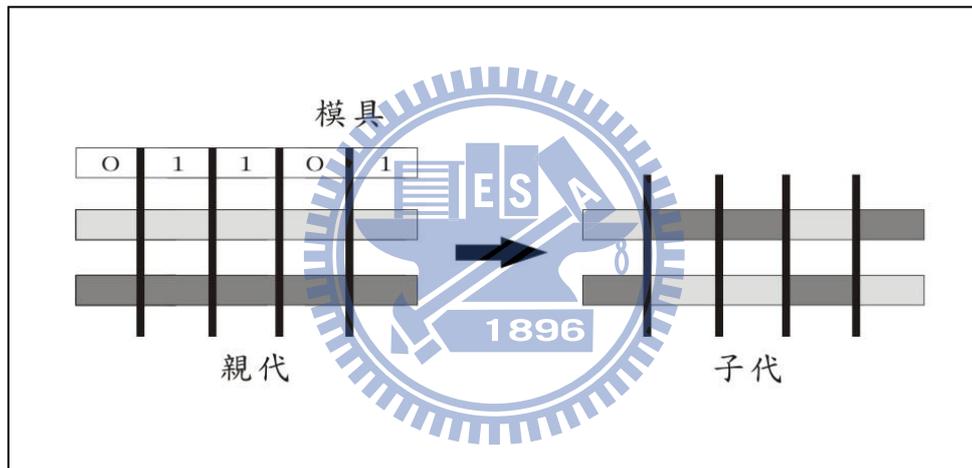


圖 B-3 均一化交配示意圖

## 5. 突變(mutation)

在遺傳演算法的運作過程中程式會隨機產生一個突變的機率值，若是此值低於所定義的突變率，染色體便會進行突變的程序。而所謂突變，是隨機選定染色體的某些位元，將此些位元的值作 0 與 1 的互換，此步驟對染色體上的每個位元皆存在有突變的機率，

可對染色體上各分段所代表的基因進行突變，將染色體的體質作一立即的改變，使搜尋的點更為零散，以防止過早收斂於局部最佳值，而無法獲得整體最佳解。突變示意則如圖 B-4 所示。

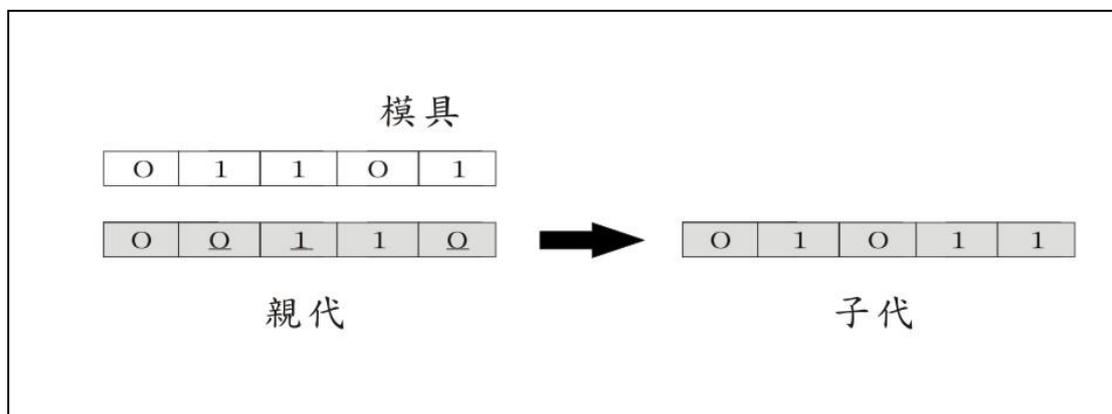


圖 B-4 突變示意圖

## 6. 菁英化(elitism)

將上一代中表現最好的一組基因直接複製到下一代，以避免因為交換過程受到破壞而失去原有的最佳值。此種做法可確保下一代的表現不至於會有退步的情形出現。

## 7. 解碼(decoding)

最後一個步驟，即是將基因解碼，使其成為變數值。解碼的方式如下所示：

$$x = x_l + \frac{(x_u - x_l)}{2^n - 1} \times \sum_{i=1}^n b_i 2^{n-i} \quad (\text{B-4})$$