

國立交通大學

電機與控制工程學系

碩士論文

使用週期靜態方法之擴充式演算法估計  
在無線電通道之頻率偏移及符號時間



Generalized Algorithms Using Cyclostationary  
Approach for Frequency Offset and Symbol Timing  
Recovery in Wireless Channel

研究生：陳逸帆

指導教授：鄭木火博士

中華民國九十三年七月

# 使用週期靜態方法之擴充式演算法估計在無線電通道之頻率偏移及符號時間

研究生: 陳逸帆

指導教授: 鄭木火博士

國立交通大學電機與控制工程學系

## 摘要

在數位通訊系統, 如何估計訊號中的頻率偏移 (frequency offset) 及時間偏移 (timing offset) 是一個很重要的課題。文獻中有許多方法發展來估測這兩個參數, 這些方法大致上可區分為資料輔助 (data-aided) 與非資料輔助 (nondata-aided) 兩類, 資料輔助主要是利用領航符號 (pilot symbols) 或訓練序列 (training sequences) 來進行估測; 而非資料輔助的方法, 除了利用循環前置 (cyclic prefix) 外, 近年來, 也有許多文獻探討利用週期靜態性 (cyclostationary) 的特性來做非資料輔助的估測此二參數。本論文研究的課題也是在此。週期靜態的方法主要是利用訊號相關度 (correlation) 具有的統計特性, 來找出正確的頻率偏移與時間誤差。現有的方法中有 F. Gini 和 G. B. Giannakis 以週期靜態性的特性估計單載波系統之頻率偏移及時間偏移; 而 H. Bolcskei 則是用來估計正交頻率多重傳輸 (OFDM) 系統之頻率偏移及時間偏移。不過此二方法在推導時忽略一些條件, 以致在使用上的有限制。如前一種演算法, 只能在脈衝整型濾波器 (pulse sharpening filter) 之頻寬小至符合一些條件下才可正確的估測; 而後者所提的演算法則由於對非整數的時間延遲推導有一些瑕疵, 只能適用於估測整數倍取樣週期的時間偏移誤差。本論文中針對這些受限的情形, 重新推導出一更完整的系統模型, 並提出一個擴充式的演算法可適用於更廣泛的環境中。並利用電腦模擬驗證舊有演算法的瑕疵與測試新演算法在無線電通道上的估測表現。

**關鍵詞:** 週期靜態、正交頻率多重傳輸、無線電通道。

# Generalized Algorithms Using Cyclostationary Approach for Frequency Offset and Symbol Timing Recovery in Wireless Channels

Student: YI-FAN CHEN      Advisor: Dr. Mu-Huo Cheng

Institute of Electrical and Control Engineering  
National Chiao-Tung University

## Abstract

It is important to estimate the frequency offset and timing offset in a digital communication system. Many approaches have been developed in literature. These approaches can be roughly categorized into two classes, data-aided and nondata-aided categories. The data-aided scheme uses preamble information such as pilot symbols or training sequences while the nondata-aided scheme may use cyclic prefix or use the property of cyclostationarity for estimation. This thesis focuses on the cyclostationary approach. The cyclostationary approach uses the statistic auto-correlation of received signal to estimate both frequency offset and time offset. One well-known algorithm developed by F. Gini and G. B. Giannakis is to estimate timing and frequency offsets in a single carrier system and the other popular algorithm, proposed by H. Bolcskei, is used in orthogonal frequency division multiplexing (OFDM) systems. But in these two algorithms there exists some pitfalls. The first algorithm only can work if the bandwidth of the pulse shaping filter is narrow enough to satisfy certain constraint which is derived in this thesis; the second algorithm can only work when the time offset is an integer. In this thesis, we formulate exactly the model and derive the conditions under which these existing algorithms can be applied; we further develop new generalized algorithms for estimating frequency offset and timing offset in single carrier systems as well as OFDM systems; these algorithms are general because the restrictions of two existing methods can be alleviated. Computer simulations are also performed to illustrate the pitfalls of existing approaches and advantages of presented algorithms.

**Keywords:** cyclostationary, OFDM, wireless channel.

# 誌謝

此論文能順利完成，要特別真誠地感謝我的指導教授鄭木火教授，在這短短的兩年研究生涯中，無論是待人接物的誠懇真摯或治學態度的嚴謹細心，均使我在生活及學識上獲益良多。因此在本論文付梓之際，對於辛勤傳道授業的老師致上最誠摯的謝意。

在口試期間承蒙林清安教授、林心宇教授和李祖添教授撥空指正並提供許多寶貴的意見。在此感謝你們的辛勞。同時感謝畢業學長再生、家弘、昌男、哲毅等的加油打氣，以及實驗室的所有成員：琪展、鈞哲、政衛、立峰、國偉、振杰、天貴、嘉富、佩樺在課業上的切磋討論及生活上的歡聲笑語，為平靜單調的研究生活增添不少色彩。

最後要感謝我的雙親及家人，由於他們的付出和不斷地鼓勵，讓我能無後顧之憂的從事研究，順利完成學業，並且有能力面對下一波的困難與挑戰。



# 目錄

中文摘要	i
英文摘要	ii
誌謝	iii
圖目錄	vi
<b>1 緒論</b>	<b>1</b>
1.1 簡介	1
1.2 研究目的與文獻回顧	1
1.3 論文架構	2
<b>2 單載波系統的估測方法</b>	<b>3</b>
2.1 簡介	3
2.2 系統模型	3
2.3 週期靜態特性	4
2.4 特殊案例與算式簡化	7
2.5 計算循環相關度	9
2.6 模擬結果	10
2.6.1 使用升餘弦脈衝整形濾波器的估測	10
2.6.2 使用大頻寬的脈衝整形濾波器時的估測	10
<b>3 正交頻率多重傳輸系統的估測方法</b>	<b>17</b>
3.1 簡介	17

3.2	系統模型	17
3.3	週期靜態特性	18
3.4	估測方法	19
3.5	與 H.Bolcskei 所提出的方法比較	20
3.6	特殊案例	21
3.7	估算循環相關度	21
3.8	模擬結果	22
4	結論	29
A	附錄	30
	參考文獻	33



## 圖目錄

圖 2.1 $G_c(f)$ 示意圖 . . . . .	7
圖 2.2 $G_c(\beta)$ 及 $G_c(\beta - (k - P)/T)$ 示意圖 . . . . .	8
圖 2.3 $G_c(\beta)$ 及 $G_c(\beta - (k + P)/T)$ 示意圖 . . . . .	9
圖 2.4 (a) Bias and (b) MSE of $\hat{f}_e$ versus SNR , 使用升餘弦脈衝整形, $f_e = 0.3$ , $\epsilon = 0.3$ .	10
圖 2.5 (a) Bias and (b) MSE of $\hat{f}_e$ versus $f_e$ , 使用升餘弦脈衝整形, SNR = 16dB . . . .	11
圖 2.6 (a) Bias and (b) MSE of $\hat{\epsilon}$ versus SNR , 使用升餘弦脈衝整形, $f_e = 0.3$ , $\epsilon = 0.3$ .	11
圖 2.7 (a) Bias and (b) MSE of $\hat{\epsilon}$ versus $\epsilon$ , 使用升餘弦脈衝整形, SNR = 16dB . . . . .	12
圖 2.8 (a) Bias and (b) MSE of $\hat{\epsilon}$ versus SNR , 使用升餘弦脈衝整形, 使用 [1]的方法 . . . .	12
圖 2.9 (a) Bias and (b) MSE of $\hat{\epsilon}$ versus $\epsilon$ , 使用升餘弦脈衝整形, 使用 [1]的方法 . . . . .	13
圖 2.10 (a) Bias and (b) MSE of $\hat{f}_e$ versus SNR , 使用大頻寬的升餘弦脈衝整形濾波器, $f_e = 0.3$ , $\epsilon = 0.3$ . . . . .	13
圖 2.11 (a) Bias and (b) MSE of $\hat{f}_e$ versus $f_e$ , 使用大頻寬的升餘弦脈衝整形濾波器, SNR = 16dB . . . . .	14
圖 2.12 (a) Bias and (b) MSE of $\hat{\epsilon}$ versus SNR , 使用大頻寬的升餘弦脈衝整形濾波器, $f_e = 0.3$ , $\epsilon = 0.3$ . . . . .	14
圖 2.13 (a) Bias and (b) MSE of $\hat{\epsilon}$ versus $\epsilon$ , 使用大頻寬的升餘弦脈衝整形濾波器, SNR = 16dB . . . . .	15
圖 2.14 (a) Bias and (b) MSE of $\hat{\epsilon}$ versus SNR , 使用大頻寬的升餘弦脈衝整形濾波器, 使用 [1]的方法, $f_e = 0.3$ , $\epsilon = 0.3$ . . . . .	15
圖 2.15 (a) Bias and (b) MSE of $\hat{\epsilon}$ versus $\epsilon$ , 使用大頻寬的升餘弦脈衝整形濾波器, 使用 [1]的方法, SNR = 16dB . . . . .	16
圖 3.1 升餘弦脈衝整形濾波器 . . . . .	22

圖 3.2 (a) Bias and (b) MSE of $\hat{n}_e$ versus SNR , 使用升餘弦脈衝整形,512符號 $n_e = 3.3$ , $\theta_e = 0.1$ . . . . .	23
圖 3.3 (a) Bias and (b) MSE of $\hat{f}_e$ versus SNR , 使用升餘弦脈衝整形,512符號 $n_e = 3.3$ , $\theta_e = 0.1$ . . . . .	23
圖 3.4 (a) Bias and (b) MSE of $\hat{n}_e$ versus SNR , 使用升餘弦脈衝整形,512符號, 使用 [2], $n_e = 3.3$ , $\theta_e = 0.1$ . . . . .	24
圖 3.5 (a) Bias and (b) MSE of $\hat{f}_e$ versus SNR , 使用升餘弦脈衝整形,512符號, 使用 [2] $n_e = 3.3$ , $\theta_e = 0.1$ . . . . .	24
圖 3.6 (a) Bias and (b) MSE of $\hat{n}_e$ versus SNR , 使用升餘弦脈衝整形,512符號, $n_e = 5$ , $\theta_e = -0.2$ . . . . .	25
圖 3.7 (a) Bias and (b) MSE of $\hat{f}_e$ versus SNR , 使用升餘弦脈衝整形,512符號, $n_e = 5$ , $\theta_e = -0.2$ . . . . .	25
圖 3.8 (a) Bias and (b) MSE of $\hat{n}_e$ versus SNR , 使用升餘弦脈衝整形,512符號, 使用 [2], $n_e = 5$ , $\theta_e = -0.2$ . . . . .	26
圖 3.9 (a) Bias and (b) MSE of $\hat{f}_e$ versus SNR , 使用升餘弦脈衝整形,512符號, 使用 [2], $n_e = 5$ , $\theta_e = -0.2$ . . . . .	26
圖 3.10 (a) Bias and (b) MSE of $\hat{n}_e$ versus SNR , 使用升餘弦脈衝整形,128符號, $n_e = 3.3$ , $\theta_e = 0.3$ . . . . .	27
圖 3.11 (a) Bias and (b) MSE of $\hat{f}_e$ versus SNR , 使用升餘弦脈衝整形,128符號, $n_e = 3.3$ , $\theta_e = 0.3$ . . . . .	27
圖 3.12 (a) Bias and (b) MSE of $\hat{n}_e$ versus SNR , 多重路徑通道, 使用升餘弦脈衝整形,512 符號, $n_e = 3.3$ , $\theta_e = 0.3$ . . . . .	28
圖 3.13 (a) Bias and (b) MSE of $\hat{f}_e$ versus SNR , 多重路徑通道, 使用升餘弦脈衝整形,512 符號, $n_e = 3.3$ , $\theta_e = 0.3$ . . . . .	28



# 第 1 章

## 緒論

### 1.1 簡介

數位通訊系統由於受到傳遞 (propagation)、都普勒效應 (Doppler effect) 及傳輸端與接收端震盪器的不匹配等等因素造成未知的時間偏移 (timing offset) 以及頻率偏移 (frequency offset), 爲了可以正確的解調出原本的資料, 必須要準確的估測出這兩個效應的大小, 才可確實的補償它。許多的估測方法已經被提出, 包括資料輔助 (data-aided) 或者是非資料輔助 (nondata-aided) 的形式。大部分的估測方法需要領航符號 (pilot symbols) 或訓練序列 (training sequences)。使用這些輔助的資料可以減輕估測的複雜度, 但同時會降低資料率 (data rate); 或者某些時候根本無法獲得這些資訊時, 因此必須要使用盲目的估測方法 (blind estimation)。研讀很多相關文獻[1][2][3][4]後發現週期靜態的特性可拿來做盲目的估測, 所以論文中以週期靜態特性爲基礎, 分別探討單載波 (single carrier) 與正交頻率多重傳輸 (OFDM) 系統的估測方法。

### 1.2 研究目的與文獻回顧

一開始研究重點放在正交頻率頻率多重傳輸系統的不同步上, 因爲頻率誤差對正交頻率頻率多重傳輸系統較其它單載波系統有更大的影響,[5][6][7][8][9]中提出了許多不同的估測方式, 不過皆爲有加訓練序列的形況來估測, 而 [2][3][4][10]做的是盲目的估測。[10]利用的是加上循環前置 (cyclic prefix) 後衍生出來的重複特性來做估測, 而[2][3][4]則是利用週期靜態的特性。由於對週期靜態有很大的興趣, 參考 H.Bölcskei[2]的文章裡面介紹了利用週期靜態來估測正交頻率頻率多重傳輸系統頻率偏移與時間偏移的演算法, 不過由於此方法推導中有一些錯誤, 因此更正這些錯誤並重新推導出正確的演算法變是我們研究的目標之一。爲了更了解週期靜態的特性, 繼續研究單載波系統下的估測, 跟隨 F.Gini 與 G.B. Giannakis[1]的理論並提出修改過的估測演算法以突破一些舊有演算法的限制。

### 1.3 論文架構

本論文架構如下：第二章介紹單載波系統的估測包含演算法及模擬結果，第三章介紹正交頻率頻率多重傳輸系統的估測包含演算法及模擬結果，第四章為整篇論文的討論，附錄中包含所有第三張中算式的推導。



## 第 2 章

### 單載波系統的估測方法

#### 2.1 簡介

這個章節裡介紹無線數位通訊系統如何利用接收到訊號自身的相關度 (correlation) 透過過度取樣 (oversampling) 引出週期靜態 (cyclostationary) 特性來做頻率偏移 (frequency offset) 與時間偏移 (timing offset) 的估測, 不需要額外的訓練符號 (training symbols) 或者是資料輔助 (data-aided) 的幫助便可進行一個有效的盲目估測 (blind estimation), 且可抵抗平坦衰減 (flat fading) 對訊號的破壞。此外與 F. Gini 和 G. B. Giannakis[1] 論文中所提到的方法做比較, 並利用電腦模擬驗證整個演算法的正確性。

#### 2.2 系統模型

線性調變的訊號經過平坦衰減 (flat fading) 的通道後, 可表示為 [1]

$$r_c(t) = \mu_c(t)e^{j(2\pi f_e t + \theta)} \sum_l w(l)g_c^{(tr)}(t - \epsilon T - lT) + n_c(t) \quad (2.1)$$

其中  $\mu_c(t)$  為衰減產生的倍數雜訊,  $T$  為符號的週期,  $g_c^{(tr)}(t)$  為傳輸端的訊號脈衝形式,  $n_c(t)$  為雜訊,  $w(l)$  為複數的資料符號,  $f_e$  為頻率偏移,  $\theta$  是起始的角度,  $\epsilon T$  為傳輸延遲且  $0 \leq \epsilon < 1$ 。經過接收端的匹配濾波器 (matched filter)  $g_c^{(rec)}(t)$  後, 訊號  $x_c(t) = r_c(t) * g_c^{(rec)}(t)$  如下

$$x_c(t) = e^{j(2\pi f_e t + \theta)} \sum_l w(l) \{ [\mu_c(t)g_c^{(tr)}(t - \epsilon T - lT)] * [g_c^{(rec)}(t)e^{-j2\pi f_e t}] \} \quad (2.2)$$

假設  $\mu_c(t)$  在一個符號週期 (symbol period) 時間內近似一個常數, 換句話說, 都普勒擴散 (Doppler spread)  $B_\mu T$  很小, 其中  $B_\mu$  代表  $\mu_c(t)$  的頻寬。且假設頻率偏移  $f_e$  相對於符號率 (symbol rate) 小的多, 此時由頻率偏移造成的  $g_c^{(rec)}(t)$  不匹配情形可忽略, 一般來說  $f_e T \leq 0.2$  為合理的假設 [1]。則經由過度取樣 (oversampling), 其取樣頻率為  $P/T$ ,  $P$  為一整數, 可獲得近似的離散時間資料:

$$x(n) = \mu(n)e^{j(\frac{2\pi}{P}f_e T n + \theta)} \sum_l w(l)g(n - lP) + v(n) \quad (2.3)$$

其中  $x(n) := x_c(t)|_{t=nT/P}$  ,  $\mu(n) := \mu_c(t)|_{t=nT/P}$  ,  $v(n) := n_c(t)*g_c^{(rec)}(t)|_{t=nT/P}$  , 又  $g(n) := g_c(t - \epsilon T)|_{t=nT/P}$  ,  $g_c(t)$  為傳輸端與接收端濾波器的結合  $g_c(t) := g_c^{(tr)}(t)*g_c^{(rec)}(t)$ 。(2.3) 中的參數我們做了一些假設:

- $w(n)$  為平均值為零的 i.i.d 序列, 其值是從有限符號 (finite-alphabet) 複數星座圖 (constellation) 中挑選出來, 又變異量 (variance) 為  $\sigma_w^2$ 。
- $\mu(n)$  為靜態 (stationary) 的複數程序其自相關度定義為  $m_{2\mu}(\tau) := E\{\mu(n)\mu^*(n + \tau)\}$  ,  $m_{2\mu}(\tau)$  的傅立葉轉換稱做都普勒頻譜 (Doppler spectrum)。
- $v(n)$  是一廣義靜態性 (wide-sense stationary) 的複數程序。

### 2.3 週期靜態特性

$x(n)$  的相關度會隨著時間改變, 定義  $m_{2x}(n; \tau) := E\{x(n)x^*(n + \tau)\}$  , 其中  $\tau$  是一個整數的延遲。如果  $m_{2x}(n; \tau) = m_{2x}(n + kP; \tau) \forall n, k$  , 則稱訊號  $x(n)$  具有週期靜態的特性。計算 (2.3) 的相關度可得

$$m_{2x}(n; \tau) = \sigma_w^2 m_{2\mu}(\tau) e^{-j(\frac{2\pi}{P})f_e T \tau} \sum_l g(n - lP) g^*(n + \tau - lP) + m_{2v}(\tau) \quad (2.4)$$

為了確認是否具有週期靜態的特性, 將 (2.4) 中的  $n$  以  $n + kP$  代入

$$\begin{aligned} m_{2x}(n + kP; \tau) &= \sigma_w^2 m_{2\mu}(\tau) e^{-j(\frac{2\pi}{P})f_e T \tau} \sum_l g(n + kP - lP) g^*(n + kP + \tau - lP) + m_{2v}(\tau) \\ &= \sigma_w^2 m_{2\mu}(\tau) e^{-j(\frac{2\pi}{P})f_e T \tau} \sum_i g(n - iP) g^*(n + \tau - iP) + m_{2v}(\tau) \\ &= m_{2x}(n; \tau) \end{aligned} \quad (2.5)$$

對一個固定的  $\tau$  而言, (2.5) 可證明  $m_{2x}(n; \tau)$  對  $n$  是以一個  $P$  的週期在變化, 因此可計算出它的傅立葉級數的係數為  $\mathcal{M}_{2x}(k; \tau) := (1/P) \sum_{n=0}^{P-1} m_{2x}(n; \tau) \exp(-j(2\pi/P)kn)$  對  $k$  有一個週期  $P$  ,  $\mathcal{M}_{2x}(k; \tau)$  被稱循環相關度 (cyclic correlation) 且  $\{2\pi k/P, k = -P/2, \dots, P/2 - 1\}$  稱為循環頻率 (cyclic frequencies) 。從 (2.4) 可推導出

$$\mathcal{M}_{2x}(k; \tau) = \frac{\sigma_w^2}{P} m_{2\mu}(\tau) e^{-j(\frac{2\pi}{P})f_e T \tau} \sum_n g(n) g^*(n + \tau) e^{-j(\frac{2\pi}{P})kn} + m_{2v}(\tau) \delta(k) \quad (2.6)$$

由於  $\epsilon$  這個參數在當我們將 (2.1) 轉為 (2.3) 時已經被  $g(n)$  所包含, 爲了重新顯示出  $\mathcal{M}_{2x}(k; \tau)$  與  $\epsilon$  的關係, 用  $G(f) := \sum_n g(n) \exp(-j2\pi fn)$  代表  $g(n)$  的傅立葉轉換並利用 Parseval's relation

$$\sum_n g(n)g^*(n + \tau)e^{-j(\frac{2\pi}{P})kn} = \int_{-0.5}^{0.5} G^* \left( \beta - \frac{k}{P} \right) G(\beta)e^{2\pi\beta\tau} d\beta \quad (2.7)$$

回顧  $g(n) := g_c(t - \epsilon T)|_{t=nT/P}$ , 並假設  $g_c(t)$  的頻寬  $B_g$  小於  $P/(2T)$ ; 也就是說取樣頻率  $P/T$  滿足 Nyquist 取樣定理, 不會產生交疊 (aliasing), 根據取樣理論可得

$$\begin{aligned} G(f) &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_c \left( \frac{f}{T_s} - \frac{k}{T_s} \right) e^{-j2\pi(\frac{f}{T_s} - \frac{k}{T_s})\epsilon T} \\ &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_c \left( \frac{f-k}{T_s} \right) e^{-j2\pi(f-k)\epsilon P} \end{aligned} \quad (2.8)$$

其中  $G_c(f) := \int_{-\infty}^{\infty} g_c(t)e^{-j2\pi ft} dt$ , 又  $T_s = T/P$  爲取樣週期。當沒有交疊時, (2.8) 在  $|f| \leq 0.5$  的範圍內可簡化爲

$$G(f) = \frac{1}{T_s} G_c \left( \frac{f}{T_s} \right) e^{-j2\pi f \epsilon P}, \quad \text{for } |f| \leq 0.5 \quad (2.9)$$

將 (2.9) 代入 (2.7), 然後 (2.7) 代入 (2.6), 當  $0 \leq k \leq P/2 - 1$ , 可得

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{2x}(k; \tau) &= \frac{\sigma_w^2}{P} m_{2\mu}(\tau) e^{-j(\frac{2\pi}{P})f_e T \tau} \int_{-0.5}^{0.5} G^* \left( \beta - \frac{k}{P} \right) G(\beta) e^{2\pi\beta\tau} d\beta + m_{2v}(\tau) \delta(k) \\ &= \frac{\sigma_w^2}{P} m_{2\mu}(\tau) e^{-j(\frac{2\pi}{P})f_e T \tau} \left\{ \int_{-0.5+k/P}^{0.5} G^* \left( \beta - \frac{k}{P} \right) G(\beta) e^{2\pi\beta\tau} d\beta \right. \\ &\quad \left. + \int_{-0.5}^{-0.5+k/P} G^* \left( \beta - \frac{k}{P} + 1 \right) G(\beta) e^{2\pi\beta\tau} d\beta \right\} + m_{2v}(\tau) \delta(k) \\ &= \frac{\sigma_w^2}{PT_s^2} m_{2\mu}(\tau) e^{-j(\frac{2\pi}{P})f_e T \tau} e^{-j2\pi k \epsilon} \left\{ \int_{-0.5+k/P}^{0.5} G_c^* \left( \frac{\beta - k/P}{T_s} \right) G_c \left( \frac{\beta}{T_s} \right) e^{2\pi\beta\tau} d\beta \right. \\ &\quad \left. + e^{j2\pi \epsilon P} \int_{-0.5}^{-0.5+k/P} G_c^* \left( \frac{\beta - k/P + 1}{T_s} \right) G_c \left( \frac{\beta}{T_s} \right) e^{2\pi\beta\tau} d\beta \right\} + m_{2v}(\tau) \delta(k) \\ &= \frac{\sigma_w^2}{PT_s^2} m_{2\mu}(\tau) e^{-j(\frac{2\pi}{P})f_e T \tau} e^{-j2\pi k \epsilon} \left\{ \int_{-0.5}^{0.5} G_c^* \left( \frac{\beta - k/P}{T_s} \right) G_c \left( \frac{\beta}{T_s} \right) e^{2\pi\beta\tau} d\beta \right. \\ &\quad \left. + e^{j2\pi \epsilon P} \int_{-0.5}^{0.5} G_c^* \left( \frac{\beta - k/P + 1}{T_s} \right) G_c \left( \frac{\beta}{T_s} \right) e^{2\pi\beta\tau} d\beta \right\} + m_{2v}(\tau) \delta(k) \end{aligned} \quad (2.10)$$

另一方面, 當  $-P/2 \leq k < 0$  時,

$$\mathcal{M}_{2x}(k; \tau) = \frac{\sigma_w^2}{P} m_{2\mu}(\tau) e^{-j(\frac{2\pi}{P})f_e T \tau} \int_{-0.5}^{0.5} G^* \left( \beta - \frac{k}{P} \right) G(\beta) e^{2\pi\beta\tau} d\beta + m_{2v}(\tau) \delta(k)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sigma_w^2}{P} m_{2\mu}(\tau) e^{-j(\frac{2\pi}{P})f_e T \tau} \left\{ \int_{-0.5}^{0.5+k/P} G^* \left( \beta - \frac{k}{P} \right) G(\beta) e^{2\pi\beta\tau} d\beta \right. \\
 &\quad \left. + \int_{0.5+k/P}^{0.5} G^* \left( \beta - \frac{k}{P} - 1 \right) G(\beta) e^{2\pi\beta\tau} d\beta \right\} + m_{2v}(\tau) \delta(k) \\
 &= \frac{\sigma_w^2}{PT_s^2} m_{2\mu}(\tau) e^{-j(\frac{2\pi}{P})f_e T \tau} e^{-j2\pi k \epsilon} \left\{ \int_{-0.5}^{0.5+k/P} G_c^* \left( \frac{\beta - k/P}{T_s} \right) G_c \left( \frac{\beta}{T_s} \right) e^{2\pi\beta\tau} d\beta \right. \\
 &\quad \left. + e^{-j2\pi\epsilon P} \int_{0.5+k/P}^{0.5} G_c^* \left( \frac{\beta - k/P - 1}{T_s} \right) G_c \left( \frac{\beta}{T_s} \right) e^{2\pi\beta\tau} d\beta \right\} + m_{2v}(\tau) \delta(k) \\
 &= \frac{\sigma_w^2}{PT_s^2} m_{2\mu}(\tau) e^{-j(\frac{2\pi}{P})f_e T \tau} e^{-j2\pi k \epsilon} \left\{ \int_{-0.5}^{0.5} G_c^* \left( \frac{\beta - k/P}{T_s} \right) G_c \left( \frac{\beta}{T_s} \right) e^{2\pi\beta\tau} d\beta \right. \\
 &\quad \left. + e^{-j2\pi\epsilon P} \int_{-0.5}^{0.5} G_c^* \left( \frac{\beta - k/P - 1}{T_s} \right) G_c \left( \frac{\beta}{T_s} \right) e^{2\pi\beta\tau} d\beta \right\} + m_{2v}(\tau) \delta(k) \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

定義  $G_2(k; \tau) := (P/T) \int_{-P/2T}^{P/2T} G_c^*(\beta - k/T) G_c(\beta) e^{j2\pi\beta\tau T/P} d\beta$  , 則 (2.10),(2.11) 可簡寫為

$$\mathcal{M}_{2x}(k; \tau) = \begin{cases} \frac{\sigma_w^2}{P} m_{2\mu}(\tau) e^{-j(\frac{2\pi}{P})f_e T \tau} e^{-j2\pi k \epsilon} (G_2(k; \tau) + e^{j2\pi\epsilon P} G_2(k - P; \tau)) & , 0 < k \leq \frac{P}{2} - 1 \\ \frac{\sigma_w^2}{P} m_{2\mu}(\tau) e^{-j(\frac{2\pi}{P})f_e T \tau} e^{-j2\pi k \epsilon} (G_2(k; \tau) + e^{-j2\pi\epsilon P} G_2(k + P; \tau)) & , -\frac{P}{2} \leq k < 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

接下來將問題限定在慢衰減 (slow fading) 的狀況, 則對足夠小的  $\tau$  (範圍由都普勒擴散 (Doppler spread) 決定),  $m_{2\mu}(\tau) \approx m_{2\mu}(0)$  為一實數的常數, 稱它為  $\sigma_\mu^2$ 。選取  $k = K$ ,  $K$  為一正整數, 且  $K$  小於  $P/2$ , 因為  $G_2(-k; \tau) = G_2^*(k, \tau)$ , 所以  $\mathcal{M}_{2x}(-K; \tau)$  可改寫成如下:

$$\mathcal{M}_{2x}(-K; \tau) = \frac{\sigma_w^2 \sigma_\mu^2}{P} e^{-j(\frac{2\pi}{P})f_e T \tau} \left\{ e^{-j2\pi K \epsilon} (G_2(K; \tau) + e^{j2\pi\epsilon P} G_2(K - P; \tau)) \right\}^* \quad (2.13)$$

同時

$$\mathcal{M}_{2x}(K; \tau) = \frac{\sigma_w^2 \sigma_\mu^2}{P} e^{-j(\frac{2\pi}{P})f_e T \tau} e^{-j2\pi K \epsilon} (G_2(K; \tau) + e^{j2\pi\epsilon P} G_2(K - P; \tau)) \quad (2.14)$$

所以藉著 (2.13) 及 (2.14) 可以估測出

$$\hat{f}_e = -\frac{P}{4\pi T \tau} \arg\{\mathcal{M}_{2x}(K; \tau) \mathcal{M}_{2x}(-K; \tau)\} \quad (2.15)$$

但是  $\epsilon$  的估測方法就比較複雜, 首先引用估測出的  $\hat{f}_e$ , 定義

$$\mathcal{M}(K; \tau) = \frac{P}{\sigma_w^2} e^{j(\frac{2\pi}{P})\hat{f}_e T \tau} \mathcal{M}_{2x}(K; \tau) \quad (2.16)$$

利用兩個不同的  $\tau$ , 然後可導出

$$\begin{bmatrix} G_2(K; \tau_1) & G_2(K - P; \tau_1) \\ G_2(K; \tau_2) & G_2(K - P; \tau_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_\mu^2 e^{-j2\pi\epsilon k} \\ \sigma_\mu^2 e^{j2\pi\epsilon(P-k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}(K; \tau_1) \\ \mathcal{M}(K; \tau_2) \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

接下來定義一個比例係數  $\eta$  如下

$$\eta = \begin{cases} 1, & \text{if } G_2(K-P; \tau_1) = G_2(K-P; \tau_2) = 0 \\ \frac{G_2(K-P; \tau_1)}{G_2(K-P; \tau_2)}, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (2.18)$$

利用 (2.17) 與  $\eta$  可以估測出

$$\hat{\epsilon} = -\frac{1}{2\pi k} \angle \left\{ \frac{\mathcal{M}(K, \tau_1) - \eta \mathcal{M}(K, \tau_2)}{G_2(K; \tau_1) - \eta G_2(K; \tau_2)} \right\} \quad (2.19)$$

## 2.4 特殊案例與算式簡化

當選取的  $k$  與  $P$  滿足某些限制時,  $\mathcal{M}_{2x}(k; \tau)$  可以被簡化成簡單的形式, 在 (2.12) 中, 比較討厭的是多了  $e^{j2\pi\epsilon P} G_2(k-P; \tau)$  與  $e^{-j2\pi\epsilon P} G_2(k+P; \tau)$  這兩項, 所以探討何時這兩項的效果等於零, 便可以將算式簡化許多, 如此便可以大幅降低計算的複雜度。

從頻譜上看, 假設  $G_c(f)$  有一個頻寬為  $B_g$ , 圖2.1為  $G_c(f)$  的示意圖

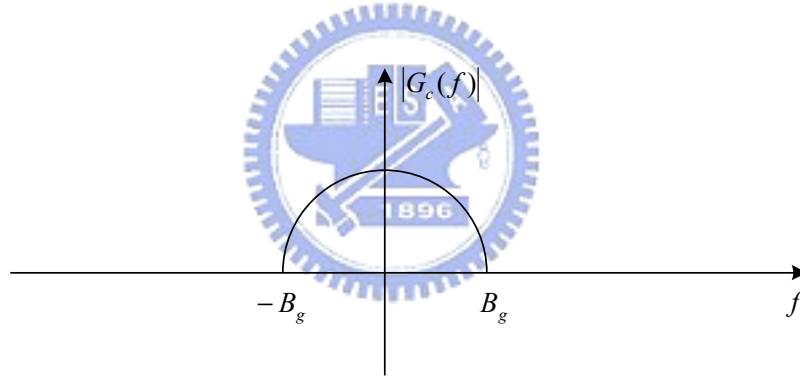
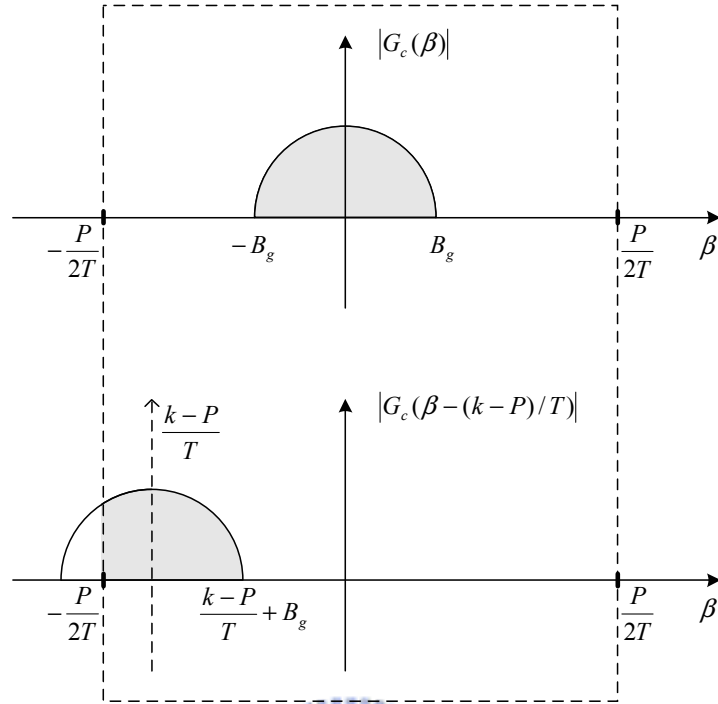


圖 2.1:  $G_c(f)$  示意圖

先探討  $0 < k \leq P/2 - 1$  情形, 為了省略 (2.12) 中的  $e^{j2\pi\epsilon P} G_2(k-P; \tau)$ , 所以必須讓  $G_2(k-P; \tau)$  等於零, 又  $G_2(k-P; \tau) = (P/T) \int_{-P/2T}^{P/2T} G_c^*(\beta - (k-P)/T) G_c(\beta) e^{-j2\pi\beta\tau T/P} d\beta$ , 其中的  $G_c^*(\beta - (k-P)/T)$  與  $G_c(\beta)$  的圖形如圖2.2所示

仔細觀察圖2.2即可發現, 當  $(k-P)/T + B_g \leq -B_g$  時,  $G_2(k-P; \tau)$  就會等於零, 由於  $k$  的最大值為  $P/2 - 1$ , 整理後可得  $P \geq 4B_g T - 2$ 。

再看  $-P/2 \leq k < 0$  的部份, 我們的目標是讓  $G_2(k+P; \tau)$  等於零, 因為  $G_2(k+P; \tau) = (P/T) \int_{-P/2T}^{P/2T} G_c^*(\beta - (k+P)/T) G_c(\beta) e^{-j2\pi\beta\tau T/P} d\beta$ , 觀察圖2.3, 可發現當  $(k+P)/T - B_g \geq B_g$  時即可, 由於  $k$  最小值為  $-P/2$ , 因此所要滿足的條件為  $P \geq 4B_g T$ 。所以結合整個  $k$  的範圍得到最後的


 圖 2.2:  $G_c(\beta)$  及  $G_c(\beta - (k - P)/T)$  示意圖

條件為

$$P \geq 4B_g T \quad (2.20)$$

總結上面的結果可以歸納出只要  $P$  滿足 (2.20), 就可以省略掉  $e^{j2\pi\epsilon P} G_2(k - P; \tau)$  與  $e^{-j2\pi\epsilon P} G_2(k + P; \tau)$  這兩項, 最後 (2.12) 就變成

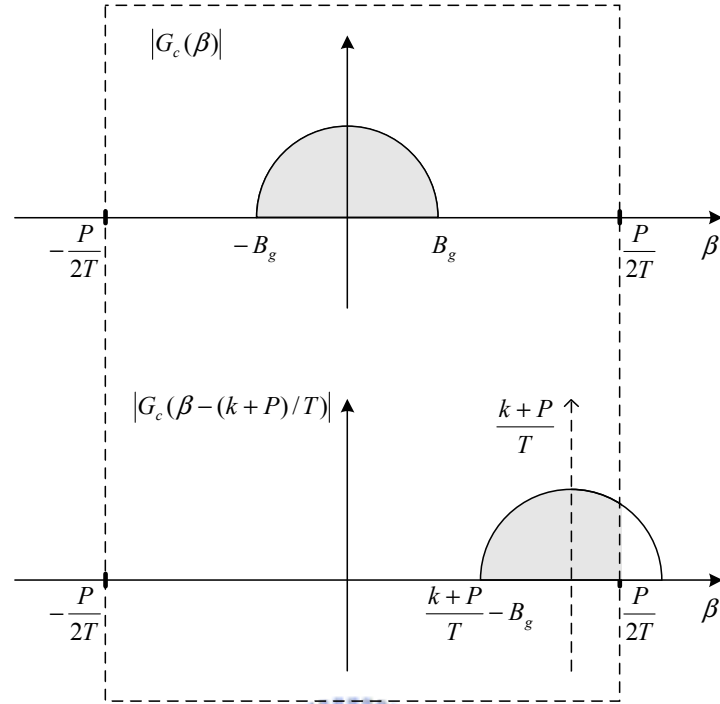
$$\mathcal{M}_{2x}(k; \tau) = \frac{\sigma_w^2}{P} m_{2\mu}(\tau) e^{-j(\frac{2\pi}{P})f_e T \tau} e^{-j2\pi k \epsilon} G_2(k; \tau) \quad , \quad -\frac{P}{2} < k \leq \frac{P}{2} - 1 \quad (2.21)$$

所以當  $P$  選擇的夠大時,  $\mathcal{M}_{2x}(k; \tau)$  便會是一個較簡單的格式, 且這個格式與 Gini and Giannakis[1] 推導的結果一樣, 但是他們的推導過程中有些錯誤, 沒有注意到需要滿足 (2.20) 的條件才能成立, 不過只要選的  $P$  足夠大滿足 (2.20), 便可以用 Gini and Giannakis[1] 論文中提到的方法來估測而不會錯誤, 方法如下

$$\hat{f}_e = -\frac{P}{4\pi T \tau} \arg \left\{ \frac{\mathcal{M}_{2x}(k; \tau) \mathcal{M}_{2x}(-k; \tau)}{G_2(k; \tau) G_2(-k; \tau)} \right\} \quad (2.22)$$

$$\hat{\epsilon} = -\frac{1}{2\pi k} \arg \left\{ \frac{\mathcal{M}_{2x}(k; \tau) e^{j(2\pi/P)\hat{f}_e T \tau}}{G_2(k; \tau)} \right\} \quad (2.23)$$




 圖 2.3:  $G_c(\beta)$  及  $G_c(\beta - (k+P)/T)$  示意圖

或者我們可以把條件稍微放寬一點，只要  $|k| \leq P - 2B_g T$ ，便可以省略  $e^{j2\pi\epsilon P} G_2(k-P; \tau)$  與  $e^{-j2\pi\epsilon P} G_2(k+P; \tau)$  這兩項。對於這個範圍內的  $k$  就可以使用 (2.22) 及 (2.23) 來估測  $f_e$  與  $\epsilon$ 。

## 2.5 計算循環相關度

回顧  $m_{2x}(n; \tau) = E\{x(n)x^*(n+\tau)\}$ ，不過我們只能用有限的取樣平均 (sample mean) 來近似，假設我們有  $L$  比資料

$$\hat{m}_{2x}(n; \tau) = \frac{P}{L} \sum_{l=0}^{L/P-1} x(n+lP)x^*(n+\tau+lP) \quad , \quad n = 0, 1, \dots, P-1 \quad (2.24)$$

則

$$\hat{\mathcal{M}}_{2x}(k; \tau) = \frac{1}{P} \sum_{n=0}^{P-1} \hat{m}_{2x}(n; \tau) e^{-j\frac{2\pi kn}{P}} \quad (2.25)$$

或者直接計算

$$\hat{\mathcal{M}}_{2x}(k; \tau) = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} x(n)x^*(n+\tau) e^{-j\frac{2\pi kn}{P}} \quad (2.26)$$

顯而易見，如果  $L$  不夠大，那便會有大的誤差產生。

## 2.6 模擬結果

### 2.6.1 使用升餘弦脈衝整形濾波器的估測

選擇  $\alpha = 0.5$  的升餘弦 (raised cosine) 來做脈衝整形 (pulse shaping), 並利用 512 個符號來計算  $\mathcal{M}_{2x}$ , 挑選  $P = 4$  也就是四倍取樣頻率來取樣, 因為濾波器的頻寬為  $0.75/T$ , 所以  $P = 4$  即可滿足 (2.20) 的條件, 分別利用我們提出的方法與 [1] 中的方法來測試, 模擬結果是從四百次模擬的平均情形來獲得, 測試用的  $f_e$  為 0.3,  $\epsilon$  也是 0.3, 先看採用我們的方法的模擬結果, 圖 2.4 與圖 2.5 為頻率偏移的估測結果, 圖 2.6 及圖 2.7 展示時間偏移的估測情形。接下來看使用 [1] 提出方法的估測結果, 頻率偏移估測由於方法一

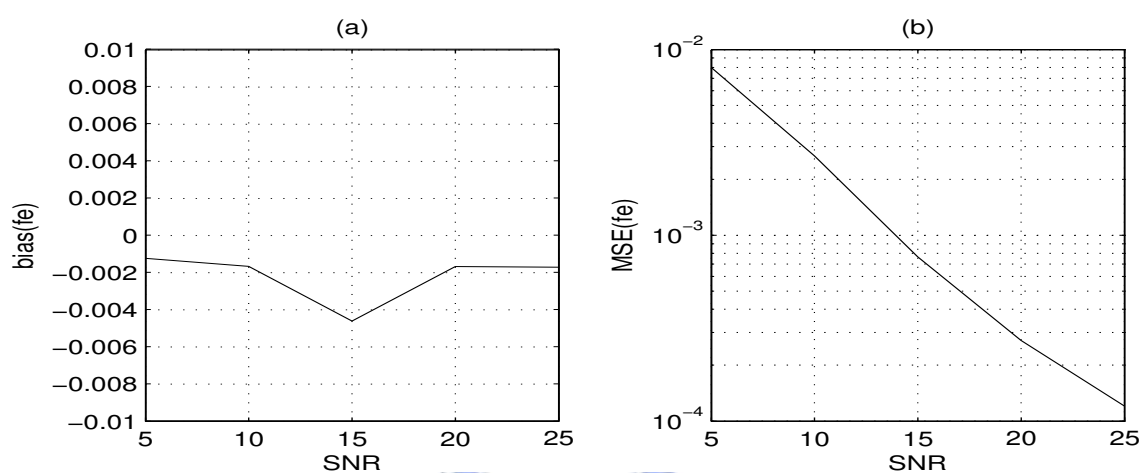


圖 2.4: (a) Bias and (b) MSE of  $\hat{f}_e$  versus SNR, 使用升餘弦脈衝整形,  $f_e = 0.3$ ,  $\epsilon = 0.3$

樣, 所以結果也一樣, 便不加以展示, 圖 2.8 與圖 2.9 表示時間偏移的估測結果

### 2.6.2 使用大頻寬的脈衝整型濾波器時的估測

爲了要模擬濾波器頻寬不符合 (2.20) 的情形, 必須要先產生一個頻寬較大的脈衝整形 (pulse shaping) 濾波器, 所以利用一個在時域上壓密兩倍的升餘弦濾波器來模擬, 如此便可將頻寬放大兩倍, 選的  $\alpha = 1$ , 所以整個頻寬為  $2/T$ , 不滿足 (2.20), 分別利用我們提出的方法與 [1] 中的方法來估測  $f_e$  與  $\epsilon$ 。

先看利用我們提出的方法估測的結果, 圖 2.10 與圖 2.11 顯示頻率偏移估測的模擬結果, 圖 2.14 顯示時間偏移估測的模擬結果。接下來看利用 [1] 所提方法估測的情形, 由於頻率偏移的估測方式是一樣的, 所以我們只看時間偏移的部份, 圖 2.12 與圖 2.13 分別表示  $\epsilon$  估測值對 SNR 與  $\epsilon$  的變化情形。

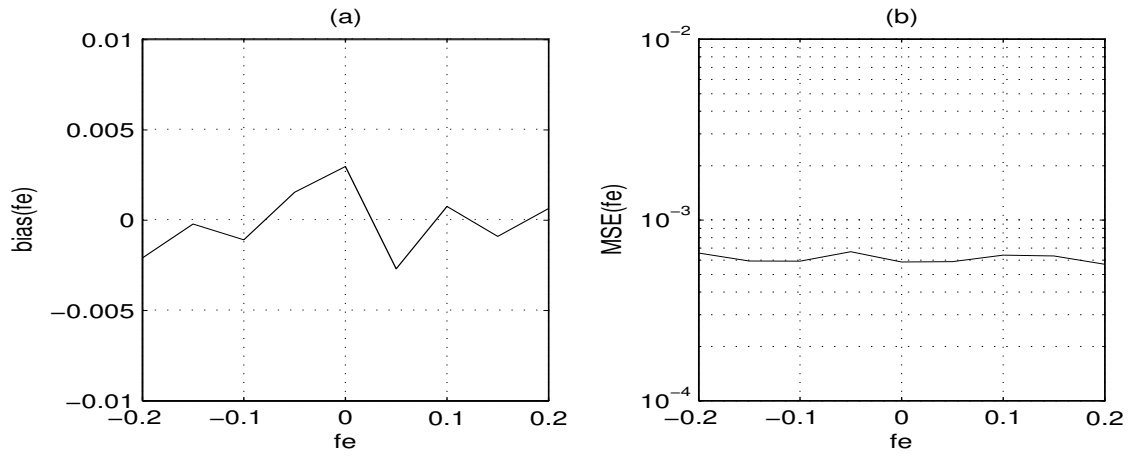


圖 2.5: (a) Bias and (b) MSE of  $\hat{f}_e$  versus  $f_e$  , 使用升餘弦脈衝整形, SNR = 16dB

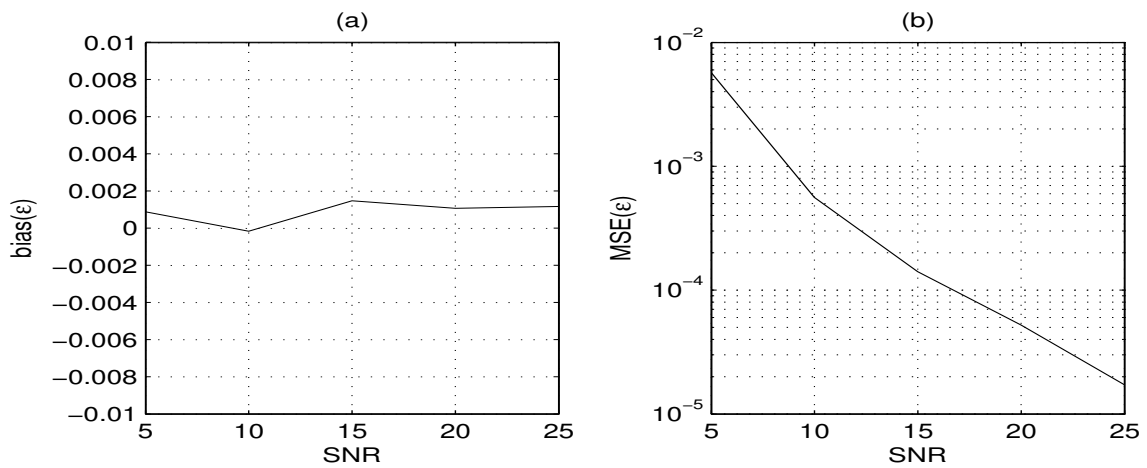


圖 2.6: (a) Bias and (b) MSE of  $\hat{\epsilon}$  versus SNR , 使用升餘弦脈衝整形,  $f_e = 0.3$  ,  $\epsilon = 0.3$

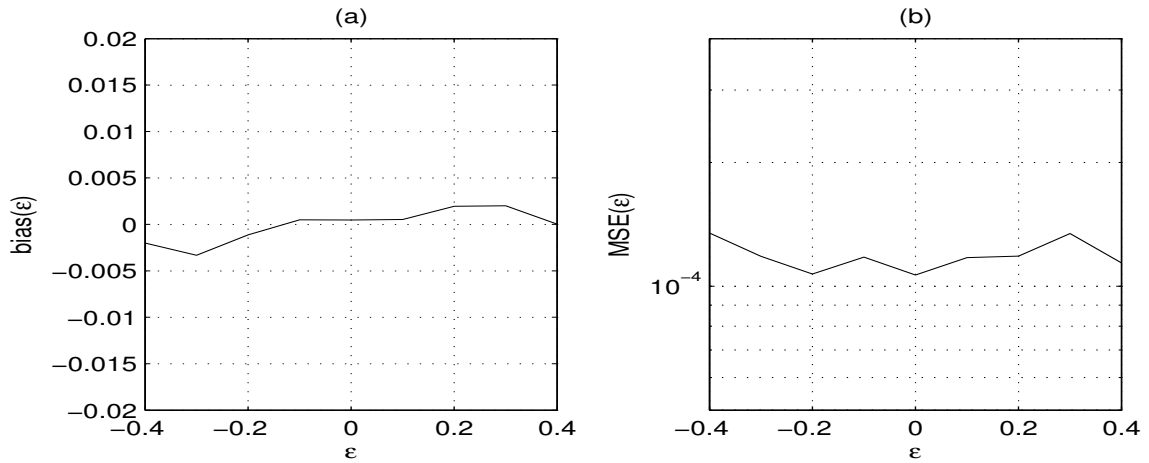


圖 2.7: (a) Bias and (b) MSE of  $\hat{\epsilon}$  versus  $\epsilon$  , 使用升餘弦脈衝整形, SNR = 16dB

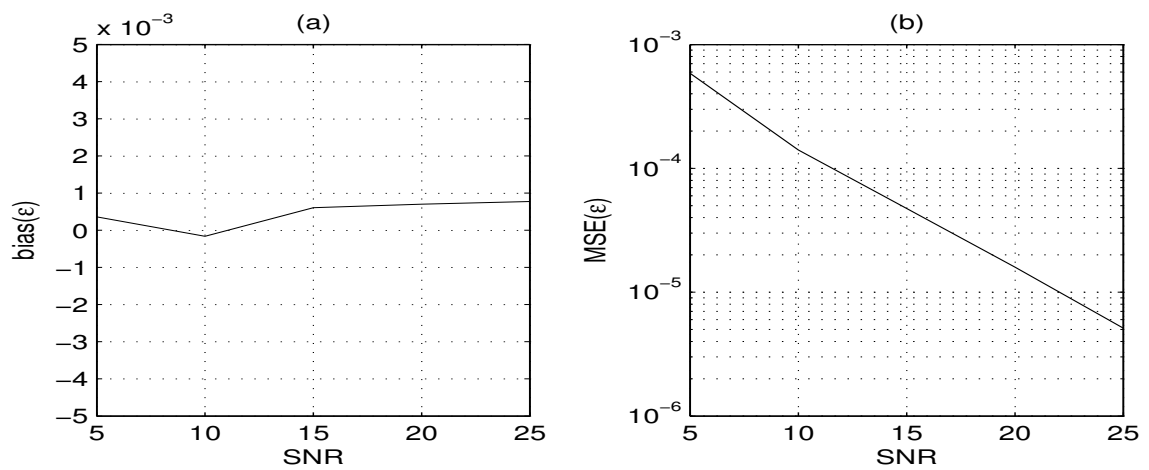


圖 2.8: (a) Bias and (b) MSE of  $\hat{\epsilon}$  versus SNR , 使用升餘弦脈衝整形, 使用 [1]的方法

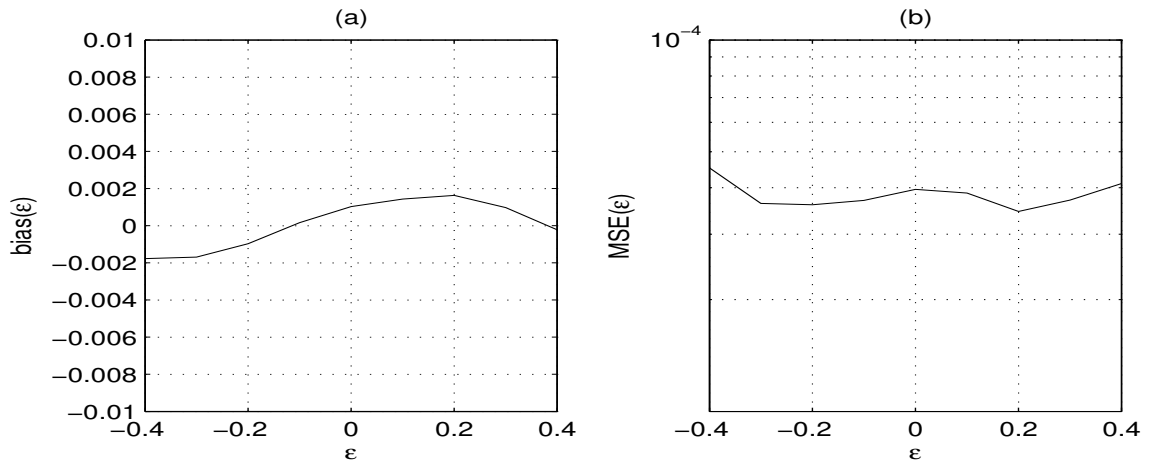


圖 2.9: (a) Bias and (b) MSE of  $\hat{\epsilon}$  versus  $\epsilon$  , 使用升餘弦脈衝整形, 使用 [1]的方法

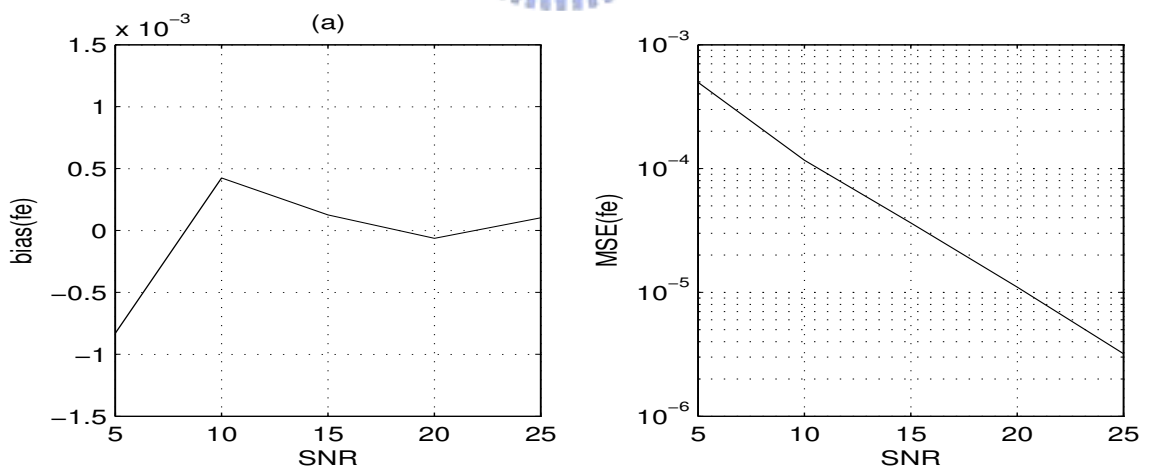


圖 2.10: (a) Bias and (b) MSE of  $\hat{f}_e$  versus SNR , 使用大頻寬的升餘弦脈衝整形濾波器,  $f_e = 0.3$  ,  $\epsilon = 0.3$

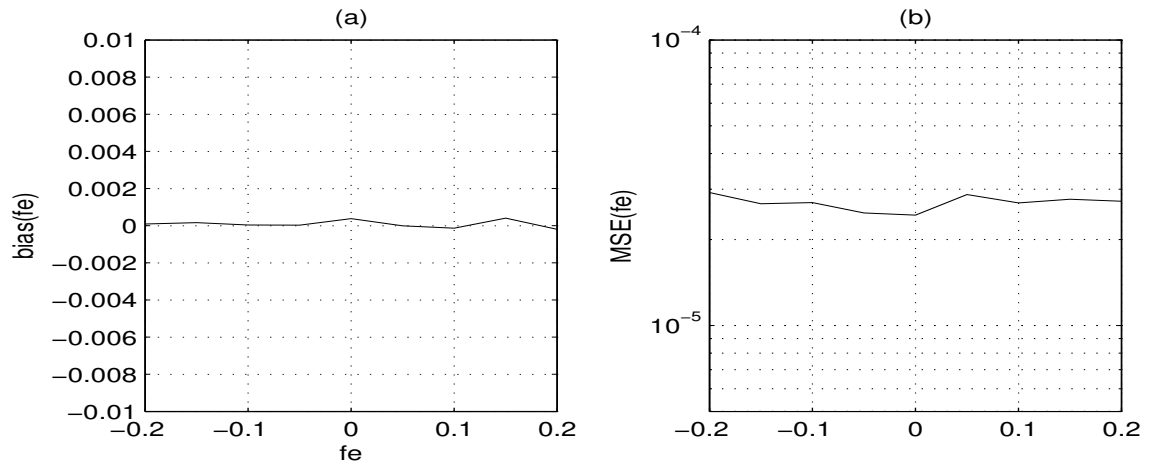


圖 2.11: (a) Bias and (b) MSE of  $\hat{f}_e$  versus  $f_e$  , 使用大頻寬的升餘弦脈衝整形濾波器, SNR = 16dB

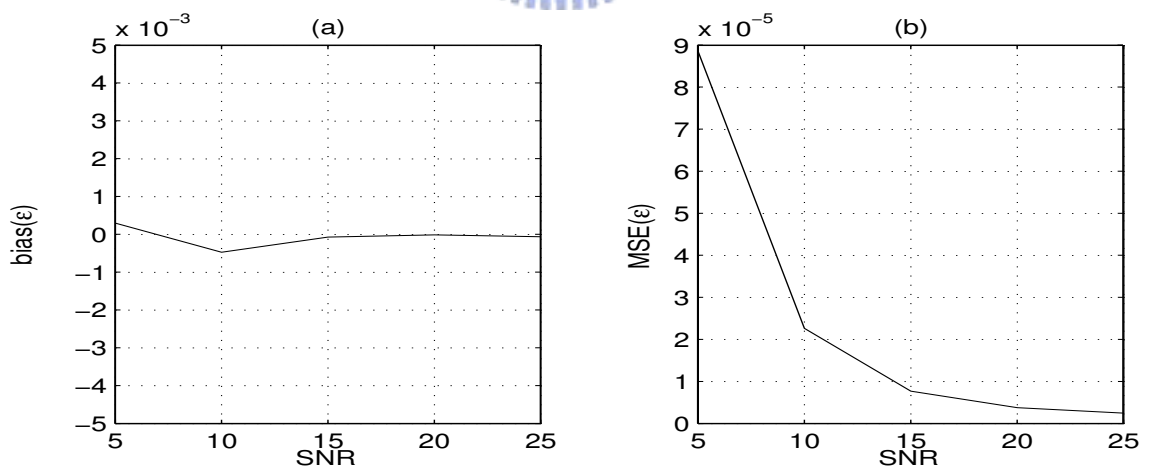


圖 2.12: (a) Bias and (b) MSE of  $\hat{\epsilon}$  versus SNR , 使用大頻寬的升餘弦脈衝整形濾波器,  $f_e = 0.3$  ,  $\epsilon = 0.3$

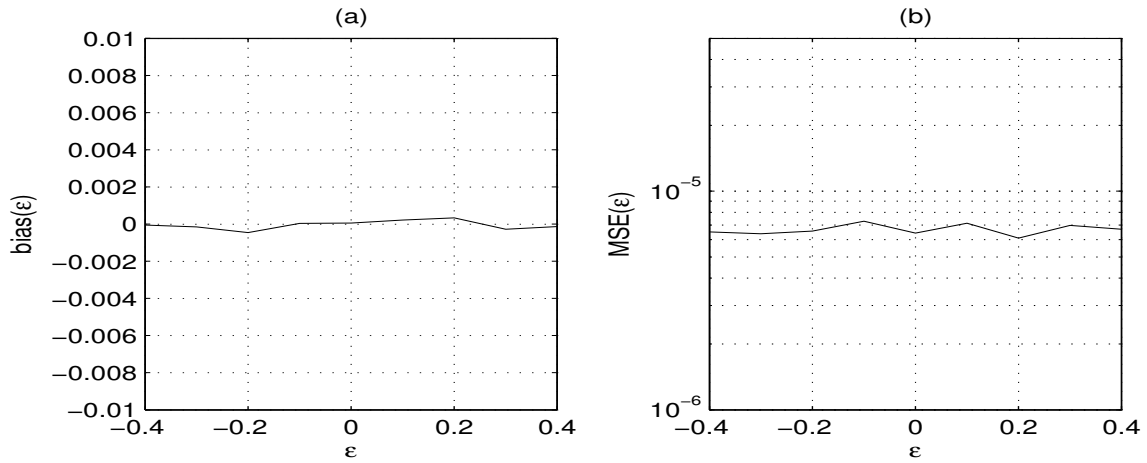


圖 2.13: (a) Bias and (b) MSE of  $\hat{\epsilon}$  versus  $\epsilon$  , 使用大頻寬的升餘弦脈衝整形濾波器, SNR = 16dB

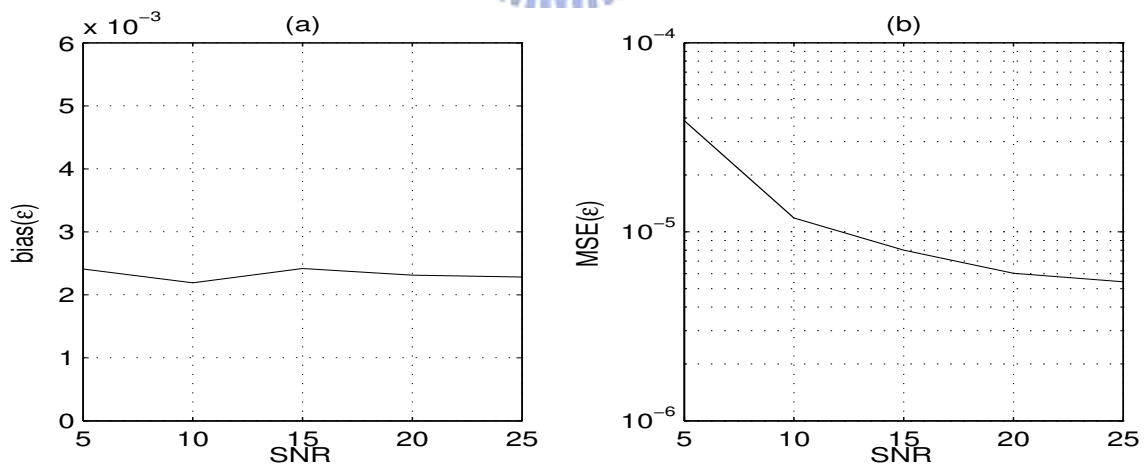


圖 2.14: (a) Bias and (b) MSE of  $\hat{\epsilon}$  versus SNR , 使用大頻寬的升餘弦脈衝整形濾波器, 使用 [1]的方法,  $f_e = 0.3$  ,  $\epsilon = 0.3$

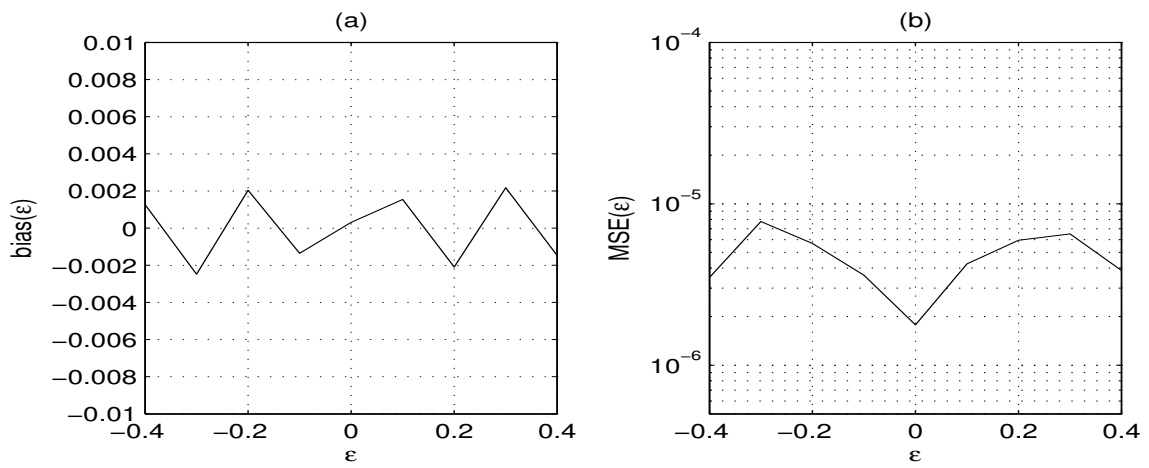


圖 2.15: (a) Bias and (b) MSE of  $\hat{\epsilon}$  versus  $\epsilon$ , 使用大頻寬的升餘弦脈衝整形濾波器, 使用 [1]的方法,  $\text{SNR} = 16\text{dB}$



## 第 3 章

# 正交頻率多重傳輸系統的估測方法

### 3.1 簡介

近年來，正交頻率多重傳輸系統漸漸受到重視，也廣泛的應用在許多應用上，像是數位電視、數位用戶端迴路 (DSL) 及一些寬頻的無線裝置上。正交頻率多重傳輸系統對於多重路徑 (multipath) 的影響有好的抵抗力，藉由將資料分成數個小的次載波 (subcarrier) 來傳送，使得每個次載波皆受到頻率平坦衰減 (flat fading) 而不是頻率選擇衰減 (frequency selective fading)，如此簡化了等化器的設計。可惜的是正交頻率多重傳輸系統對同步的誤差較一般單載波系統敏感許多，所以頻率偏移及時間誤差的估測便相形重要。本章節利用收到訊號相關度及其隱含的週期靜態 (cyclostationary) 特性來進行盲目的估測 (blind estimation)，主要架構是跟隨 H.Bolcskei[2]的方法，不過因為[2]中的推導有許多錯誤，不適用於非整數的時間偏移，所以我們重新推導出一個正確的模型並提供一個新的演算法來進行估測，並利用電腦模擬來驗證結果。

### 3.2 系統模型

對於包含脈衝整形 (pulse shaping) 的正交頻率多重傳輸系統，等效基頻 (baseband) 訊號可表示為

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{k,l} g[n - lM] e^{j(2\pi/N)k(n-lM)} \quad (3.1)$$

其中  $N$  為次載波 (subcarriers) 的數量， $M$  是符號的長度， $g[n]$  表示傳輸端 pulse shaping 濾波器， $c_{k,l}$  表示資料符號。當  $M > N$  時便代表這個系統包含了循環延伸 (cyclic extension)。

在接收端收到的訊號會帶有未知的時間偏移與頻率偏移，因此我們可以把接收到的訊號表示為

$$r[n] = e^{j(2\pi\theta_e n + \phi)} \int_{-0.5}^{0.5} X(e^{j2\pi\nu}) e^{j2\pi\nu(n-n_e)} d\nu + \rho[n] \quad (3.2)$$

其中  $X(e^{j2\pi\nu})$  為  $x[n]$  的離散時間傅立葉轉換 (DTFT),  $n_e \in \mathbb{R}$  為時間偏移,  $\theta_e \in [-1/2, 1/2)$  表示載波頻率偏移,  $\phi$  是起始的角度, 而  $\rho[n]$  是廣義穩定 (wide-sense stationary) 雜訊程序, 且與資料符號  $c_{k,l}$  互相獨立, 要注意到,  $n_e$  並沒有限定為整數, 當  $n_e \in \mathbb{Z}$ , 則 (3.2) 可以簡化

$$r[n] = e^{j(2\pi\theta_e n + \phi)} x[n - n_e] + \rho[n] \quad (3.3)$$

雜訊程序的相關性函數為  $c_\rho[\tau] = E\{\rho[n]\rho^*[n - \tau]\}$ , 符號  $c_{p,l}$  是從有限符號系統 (finite-alphabet) 複數星座圖 (constellation) 中獲取, 滿足  $E\{c_{k,l}c_{k',l'}^*\} = \sigma_c^2 \delta[k - k']\delta[l - l']$ 。接下來我們假設每個次載波 (subcarrier) 是以不同的能量在傳遞, 或者說我們有使用次載波加權 (subcarrier weighting), 給定加權函數  $w[k]$ 。因此傳送的訊號改寫為

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{k,l} w[k] g[n - lM] e^{j(2\pi/N)k(n-lM)} \quad (3.4)$$

### 3.3 週期靜態特性

如同之前所提到, 週期靜態 (cyclostationarity) 是盲目的同步方法的關鍵, 先定義非時恆相關度 (correlation) 函數為  $c_r[n, \tau] = E\{r[n]r^*[n - \tau]\}$ ,  $\tau$  是一個整數的延遲參數, 參照附錄的推導, 加權 OFDM 訊號 (3.4) 的相關度為

$$c_r[n, \tau] = \frac{\sigma_c^2 e^{j2\pi\theta_e \tau}}{M} \sum_{m=0}^{N-1} |w[m]|^2 \left\{ \sum_{s=0}^{M-1} \int_{-0.5}^{0.5 - \frac{s}{M}} e^{j\frac{2\pi s}{M}(n-n_e)} e^{j2\pi\nu\tau} G\left(e^{j2\pi(\nu + \frac{s}{M} - \frac{m}{N})}\right) G^*\left(e^{j2\pi(\nu - \frac{m}{N})}\right) d\nu \right. \\ \left. + \sum_{s=-M+1}^{-1} \int_{-0.5 - \frac{s}{M}}^{0.5} e^{j\frac{2\pi s}{M}(n-n_e)} e^{j2\pi\nu\tau} G\left(e^{j2\pi(\nu + \frac{s}{M} - \frac{m}{N})}\right) G^*\left(e^{j2\pi(\nu - \frac{m}{N})}\right) d\nu \right\} + c_\rho[\tau] \quad (3.5)$$

其中  $G(e^{j2\pi\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n]e^{-j2\pi n\theta}$ , 仔細觀察可看出  $c_r[n, \tau]$  對  $n$  是以週期  $M$  在變化, 換句話說  $c_r[n, \tau] = c_r[n + M, \tau]$ , 因此具有循環穩定性的特性。接著計算它的傅立葉級數係數, 根據定義:

$$C_r[k, \tau] = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} c_r[n, \tau] e^{-j(2\pi/M)kn}, \quad k = 0, 1, \dots, M-1. \quad (3.6)$$

參照附錄的證明可得, 當  $0 \leq k \leq M-1$

$$C_r[k, \tau] = \frac{\sigma_c^2}{M} e^{j2\pi\theta_e \tau} e^{-j\frac{2\pi k}{M}n_e} \sum_{m=0}^{N-1} |w[m]|^2 \left\{ \int_{-0.5}^{0.5 - k/M} e^{j2\pi\nu\tau} G\left(e^{j2\pi(\nu + \frac{k}{M} - \frac{m}{N})}\right) G^*\left(e^{j2\pi(\nu - \frac{m}{N})}\right) d\nu \right. \\ \left. + e^{j2\pi n_e} \int_{0.5 - k/M}^{0.5} e^{j2\pi\nu\tau} G\left(e^{j2\pi(\nu + \frac{k}{M} - \frac{m}{N})}\right) G^*\left(e^{j2\pi(\nu - \frac{m}{N})}\right) d\nu \right\} + c_\rho[\tau]\delta[k] \quad (3.7)$$

然後我們將 (3.7) 中的積分式展開來，並且稍做整理後可得

$$\begin{aligned}
 C_r[k, \tau] &= \frac{\sigma_c^2}{M} e^{j2\pi\theta_e\tau} e^{-j\frac{2\pi k}{M}n_e} \left\{ \Gamma_N[\tau] A^{(g,g)} \left[ \tau, \frac{k}{M} \right] \left( 1 + \frac{k}{M} (e^{j2\pi n_e} - 1) \right) \right. \\
 &\quad \left. + (e^{j2\pi n_e} - 1) \sum_{\substack{\gamma=-\infty \\ \gamma \neq \tau}}^{\infty} \Gamma_N[\gamma] A^{(g,g)} \left[ \gamma, \frac{k}{M} \right] \frac{(-1)^{\tau-\gamma}}{j2\pi(\tau-\gamma)} \left( 1 - e^{-j2\pi(\tau-\gamma)\frac{k}{M}} \right) \right\} + c_\rho[\tau] \delta[k]
 \end{aligned} \quad (3.8)$$

其中  $\Gamma_N[\tau] := \sum_{k=0}^{N-1} |w[k]|^2 e^{j(2\pi/N)k\tau}$ ，而  $A^{(g,h)}[k, \theta] := \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n]h[n-k]e^{-j2\pi n\theta}$ 。

### 3.4 估測方法

利用  $C_r[k, \tau]$  可以估測出頻率偏移與時間偏移，首先定義一個輔助的參數

$$\Phi[k, \tau] = \frac{k}{M} + \frac{\sum_{\substack{\gamma=-\infty \\ \gamma \neq \tau}}^{\infty} \Gamma_N[\gamma] A^{(g,g)} \left[ \gamma, \frac{k}{M} \right] \frac{(-1)^{\tau-\gamma}}{j2\pi(\tau-\gamma)} \left( 1 - e^{-j2\pi(\tau-\gamma)\frac{k}{M}} \right)}{\Gamma_N[\tau] A^{(g,g)} \left[ \tau, \frac{k}{M} \right]} \quad (3.9)$$

這個參數的值是可以事先計算出來的，只要挑選的  $\tau$  及  $k$  滿足  $\Gamma_N[\tau] A^{(g,g)} \left[ \tau, \frac{k}{M} \right] \neq 0$ ，因為  $\Gamma_N[\tau]$  跟  $A^{(g,g)} \left[ \tau, \frac{k}{M} \right]$  可利用已知的  $w[k]$  與  $g[n]$  求得，利用 (3.8) 可得

$$C_r[k, \tau] = \frac{\sigma_c^2}{M} e^{j2\pi\theta_e\tau} e^{-j\frac{2\pi k}{M}n_e} \Gamma_N[\tau] A^{(g,g)} \left[ \tau, \frac{k}{M} \right] \left( 1 + (e^{j2\pi n_e} - 1) \Phi[k, \tau] \right) + c_\rho[\tau] \delta[k] \quad (3.10)$$

接下來再定義  $C[k, \tau]$ ，是將原本的  $C_r[k, \tau]$  正規化 (normalize) 所產生，如下

$$\begin{aligned}
 C[k, \tau] &= \frac{C_r[k, \tau]}{\frac{\sigma_c^2}{M} \Gamma_N[\tau] A^{(g,g)} \left[ \tau, \frac{k}{M} \right]} \\
 &= e^{j2\pi\theta_e\tau} e^{-j\frac{2\pi k}{M}n_e} \left( 1 + (e^{j2\pi n_e} - 1) \Phi[k, \tau] \right) + \frac{c_\rho[\tau] \delta[k]}{\frac{\sigma_c^2}{M} \Gamma_N[\tau] A^{(g,g)} \left[ \tau, \frac{k}{M} \right]}
 \end{aligned} \quad (3.11)$$

接下來開始估測：

#### 1. 估測 $n_e$ ：

先把  $\theta_e$  的影響去掉，所以挑選  $\tau = 0$ ，則  $C[k, 0] = e^{-j\frac{2\pi k}{M}n_e} (1 + (e^{j2\pi n_e} - 1) \Phi[k, 0])$  只含有  $n_e$  一個參數是未知的，接下來考慮  $C[k, 0]$  與  $C[M-k, 0]$  的乘積，可得

$$\begin{aligned}
 C[k, 0]C[M-k, 0] &= e^{-j2\pi n_e} (1 + (e^{j2\pi n_e} - 1) \Phi[k, 0]) (1 + (e^{j2\pi n_e} - 1) \Phi[M-k, 0]) \\
 &= e^{j2\pi n_e} \Phi[k, 0] \Phi[M-k, 0] + (\Phi[k, 0] + \Phi[M-k, 0] - 2\Phi[k, 0] \Phi[M-k, 0]) \\
 &\quad + e^{-j2\pi n_e} (1 + \Phi[k, 0] \Phi[M-k, 0] - \Phi[k, 0] - \Phi[M-k, 0])
 \end{aligned} \quad (3.12)$$

令  $x = e^{j2\pi n_e}$  代入 (3.12) 可得一個二次式  $Ax^2 + Bx + C = 0$  , 其中

$$A = \Phi[k, 0]\Phi[M - k, 0] \quad (3.13)$$

$$B = \Phi[k, 0] + \Phi[M - k, 0] - 2\Phi[k, 0]\Phi[M - k, 0] - C[k, 0]C[M - k, 0] \quad (3.14)$$

$$C = 1 + \Phi[k, 0]\Phi[M - k, 0] - \Phi[k, 0] - \Phi[M - k, 0] \quad (3.15)$$

此二次式的會有兩個解, 其中的一個為  $x$  的估計值, 不過要分別把這個值估測出的  $n_e$  代入  $x$  才可知道哪個值才是正確的,  $n_e$  的估計方法如下

$$\hat{n}_e = -\frac{M}{2\pi k} \angle \left\{ \frac{C[k, 0]}{1 + (x - 1)\Phi[k, 0]} \right\} \quad (3.16)$$

2. 估測  $\theta_e$  :

$$\hat{\theta}_e = \frac{1}{2\pi\tau} \angle \left( \frac{C[k, \tau]}{e^{-j\frac{2\pi k}{M}\hat{n}_e} (1 + (e^{j2\pi\hat{n}_e} - 1)\Phi[k, \tau])} \right) \quad (3.17)$$

### 3.5 與 H.Bolcskei 所提出的方法比較

回顧之前所導出的算式,

$$C[k, \tau] = e^{j2\pi\theta_e\tau} e^{-j\frac{2\pi k}{M}n_e} (1 + (e^{j2\pi n_e} - 1)\Phi[k, 0]) \quad (3.18)$$

可與 H.Bolcskei 推導的結果做比較, 下式為其推導結果

$$C[k, \tau] = e^{j2\pi\theta_e\tau} e^{-j\frac{2\pi k}{M}n_e} \quad (3.19)$$

比較後可看出針對  $n_e \in \mathbb{Z}$  的情況,  $e^{j2\pi n_e} = 1$  ,(3.18) 與 (3.19) 會變相等, 所以這時 H.Bolcskei 提出的模型會是正確的。又他提出的估測方法如下:

$$\hat{\theta}_e = \frac{1}{4\pi\tau} \angle \{C[k, \tau]C[M - k, \tau]\} \quad (3.20)$$

$$\hat{n}_e = -\frac{M}{2\pi k} \angle \{C[k, \tau]e^{-j2\pi\hat{\theta}_e\tau}\} \quad (3.21)$$

### 3.6 特殊案例

當一開始使用的  $g[n]$  與  $w[k]$  是某種特殊的格式時，我們可以簡化算式，如此也可以簡化估測的方法，先探討沒有加次載波加權的情形，換句話說， $w[k] = 1$  對所有的  $k$ ，如此一來  $\Gamma_N[\tau] = N \sum_{s=-\infty}^{\infty} \delta[\tau - sN]$ ，重新改寫 (3.8)，且挑選  $\tau = N$  來計算

$$C_r[k, N] = \frac{N\sigma_c^2}{M} e^{j2\pi\theta_e N} e^{-j\frac{2\pi k}{M} n_e} \left\{ A^{(g, g)} \left[ N, \frac{k}{M} \right] \left( 1 + \frac{k}{M} (e^{j2\pi n_e} - 1) \right) \right. \\ \left. + (e^{j2\pi n_e} - 1) \sum_{\substack{s=-\infty \\ s \neq 1}}^{\infty} A^{(g, g)} \left[ sN, \frac{k}{M} \right] \frac{(-1)^{N-sN}}{j2\pi(N-sN)} \left( 1 - e^{-j2\pi(N-sN)\frac{k}{M}} \right) \right\} \quad (3.22)$$

然後取  $k = M - k$

$$C_r[M - k, N] = \frac{N\sigma_c^2}{M} e^{j2\pi\theta_e N} e^{-j\frac{2\pi(M-k)}{M} n_e} \left\{ A^{(g, g)} \left[ N, \frac{M-k}{M} \right] \left( 1 + \frac{M-k}{M} (e^{j2\pi n_e} - 1) \right) \right. \\ \left. + (e^{j2\pi n_e} - 1) \sum_{\substack{s=-\infty \\ s \neq 1}}^{\infty} A^{(g, g)} \left[ sN, \frac{M-k}{M} \right] \frac{(-1)^{N-sN}}{j2\pi(N-sN)} \left( 1 - e^{-j2\pi(N-sN)\frac{M-k}{M}} \right) \right\} \\ = \frac{N\sigma_c^2}{M} e^{j2\pi\theta_e N} e^{j\frac{2\pi k}{M} n_e} \left\{ A^{*(g, g)} \left[ N, \frac{k}{M} \right] \left( 1 + \frac{k}{M} (e^{-j2\pi n_e} - 1) \right) \right. \\ \left. + (e^{-j2\pi n_e} - 1) \sum_{\substack{s=-\infty \\ s \neq 1}}^{\infty} A^{*(g, g)} \left[ sN, \frac{k}{M} \right] \left( -\frac{(-1)^{N-sN}}{j2\pi(N-sN)} \right) \left( 1 - e^{j2\pi(N-sN)\frac{k}{M}} \right) \right\} \\ = C_r^*[k, N] e^{j4\pi\theta_e N} \quad (3.23)$$

利用 (3.23) 可以直接估測  $\theta_e$ ，不用像之前的方法要先將估出來的  $n_e$  代入來求  $\theta_e$ ，所以可以提高準確度，方法如下

$$\hat{\theta}_e = \frac{1}{4\pi N} \angle C_r[k, N] C_r[M - k, N] \quad (3.24)$$

### 3.7 估算循環相關度

回顧  $c_r[n; \tau] = E\{r[n]r^*[n - \tau]\}$ ，不過我們只能用有限的取樣平均 (sample mean) 來近似，假設我們有  $L$  比資料

$$\hat{c}_r[n; \tau] = \frac{M}{L} \sum_{l=0}^{L/M-1} r[n + lM] r^*[n - \tau + lM] \quad , \quad n = 0, 1, \dots, M - 1 \quad (3.25)$$

則

$$\hat{C}_r[k; \tau] = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} \hat{c}_r[n; \tau] e^{-j \frac{2\pi k n}{M}} \quad (3.26)$$

或者直接計算

$$\hat{C}_r[k; \tau] = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} r[n] r^*[n - \tau] e^{-j \frac{2\pi k n}{M}} \quad (3.27)$$

顯而易見, 如果  $L$  不夠大, 那便會有大的誤差產生。

### 3.8 模擬結果

模擬升餘弦脈衝整形濾波器加次載波加權加循環延伸的狀況, 選擇次載波數  $N = 8$ , 符號長度  $M = 16$ ,  $g[n]$  為  $\alpha = 0.5$  的升餘弦函數如圖 (3.1), 外加次載波加權為  $w = [1.1 \ 2.0 \ 1.4 \ 1.33 \ 1.0 \ 0.6 \ 0.8 \ 1.2]$ 。分別使用上述所提的方法及 H.Bolcskei[2]的方法經由 400 次獨立測試結果的統計資料做分析, 又測試用的通道為附加白雜訊 (AWGN) 通道與多重路徑 (multipath) 通道。

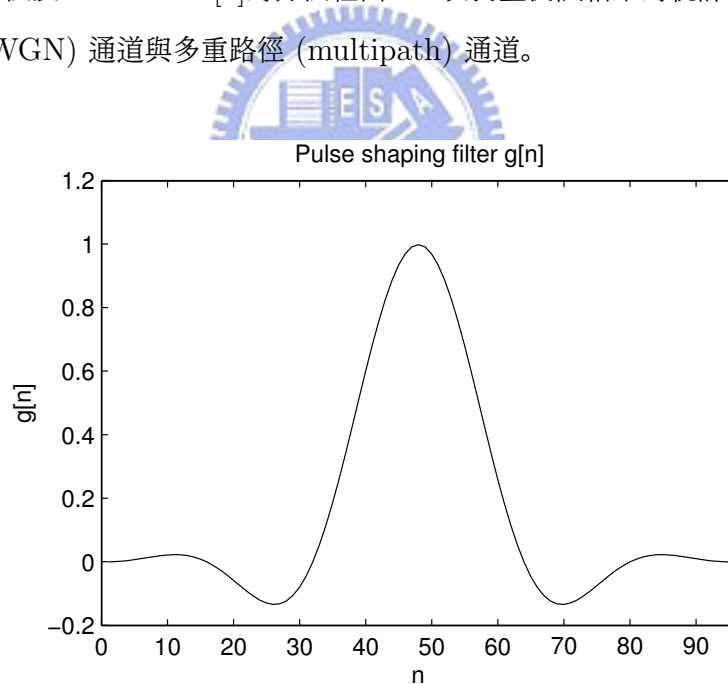


圖 3.1: 升餘弦脈衝整形濾波器

1. 附加白雜訊 (AWGN) 通道使用 (3.16)(3.17) 估測, 利用 512 個符號, 且  $n_e \in \mathbb{R}$  :

(設定  $n_e = 3.3$ ,  $\theta_e = 0.1$ , 圖 3.2 表示時間偏移  $n_e$  的估測, 圖 3.3 表示頻率偏移  $\theta_e$  的估測)

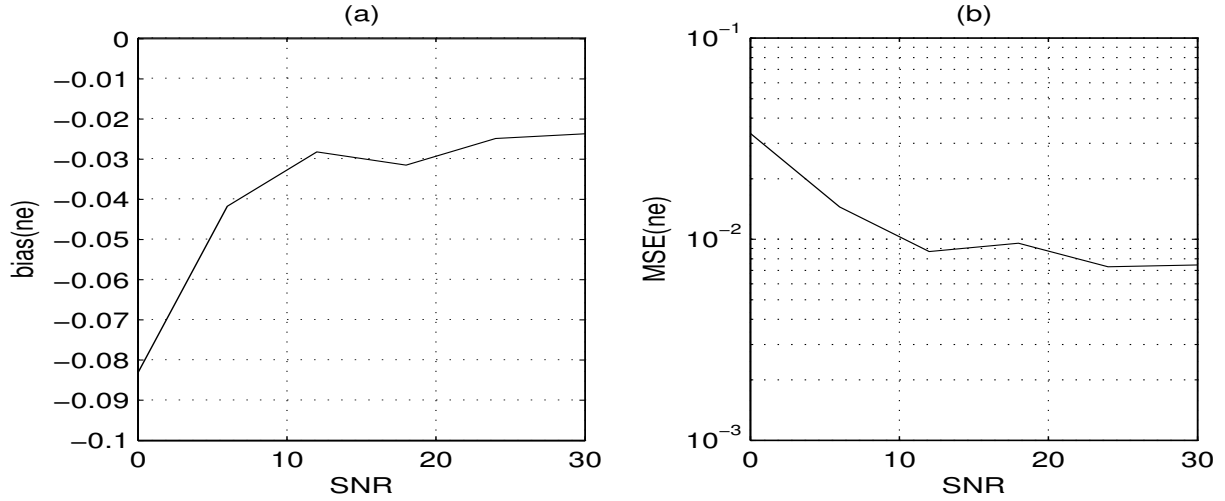


圖 3.2: (a) Bias and (b) MSE of  $\hat{n}_e$  versus SNR, 使用升餘弦脈衝整形, 512 符號  $n_e = 3.3$ ,  $\theta_e = 0.1$

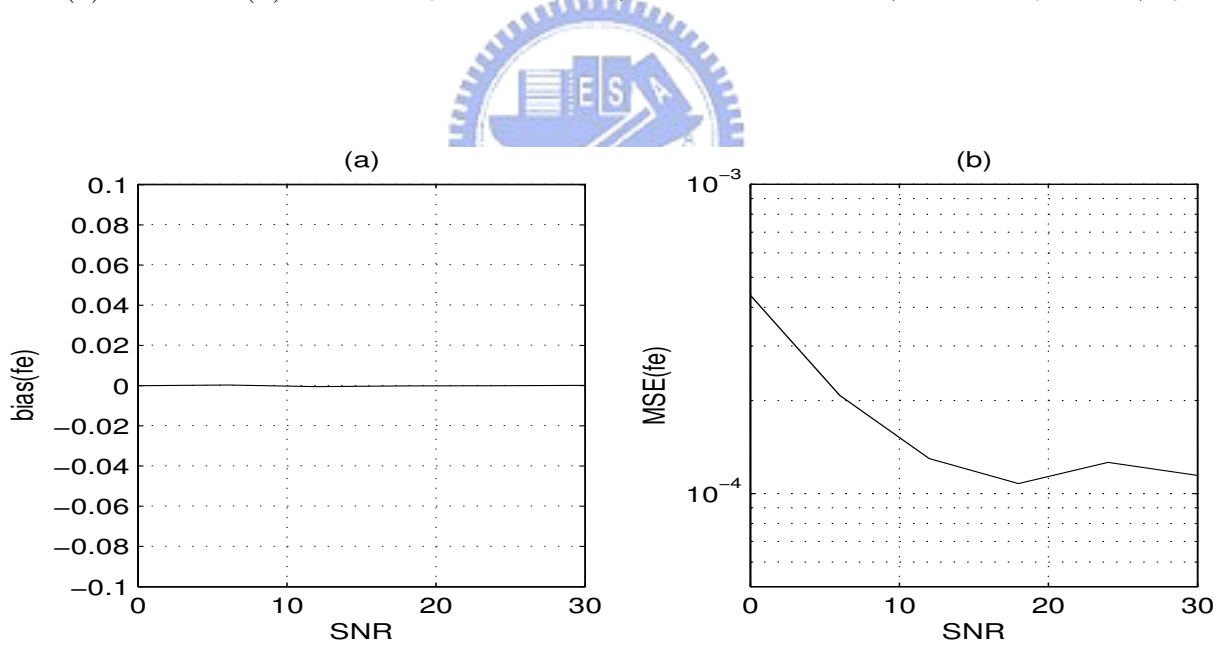


圖 3.3: (a) Bias and (b) MSE of  $\hat{f}_e$  versus SNR, 使用升餘弦脈衝整形, 512 符號  $n_e = 3.3$ ,  $\theta_e = 0.1$

2. 附加白雜訊通道使用 H.Bölcskei[2]估測, 利用512個符號, 且  $n_e \in \mathbb{R}$  :

(設定  $n_e = 3.3$  ,  $\theta_e = 0.1$  , 圖3.4表示時間偏移  $n_e$  的估測, 圖3.5表示頻率偏移  $\theta_e$  的估測)

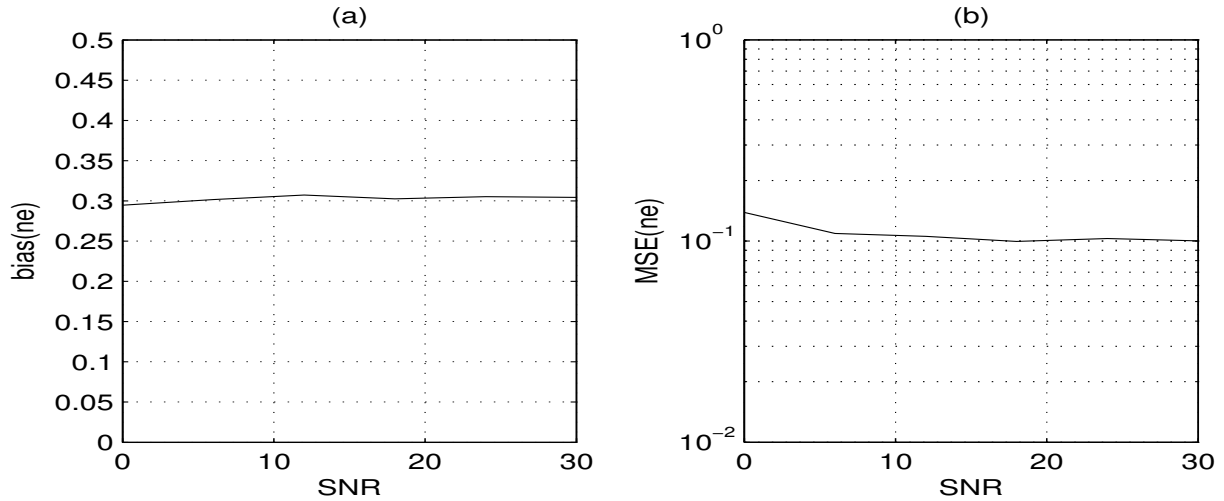


圖 3.4: (a) Bias and (b) MSE of  $\hat{n}_e$  versus SNR , 使用升餘弦脈衝整形,512符號, 使用 [2],  $n_e = 3.3$  ,  $\theta_e = 0.1$

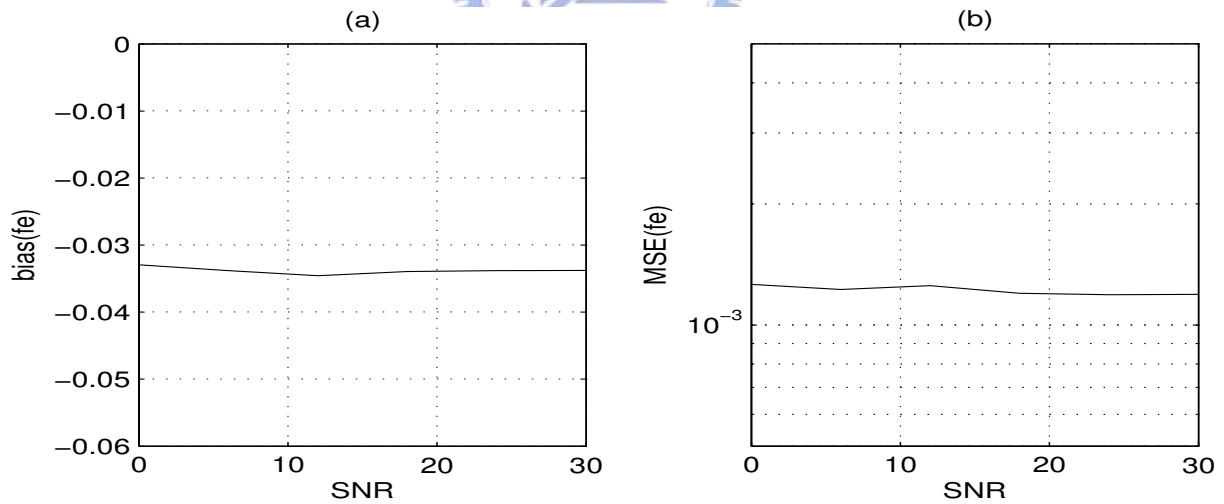


圖 3.5: (a) Bias and (b) MSE of  $\hat{f}_e$  versus SNR , 使用升餘弦脈衝整形,512符號, 使用 [2]  $n_e = 3.3$  ,  $\theta_e = 0.1$



3. 附加白雜訊通道使用 (3.16)(3.17) 估測, 利用 512 個符號, 且  $n_e \in \mathbb{Z}$  :

(設定  $n_e = 5$ ,  $\theta_e = -0.2$ , 圖 3.6 表示時間偏移  $n_e$  的估測, 圖 3.7 表示頻率偏移  $\theta_e$  的估測)

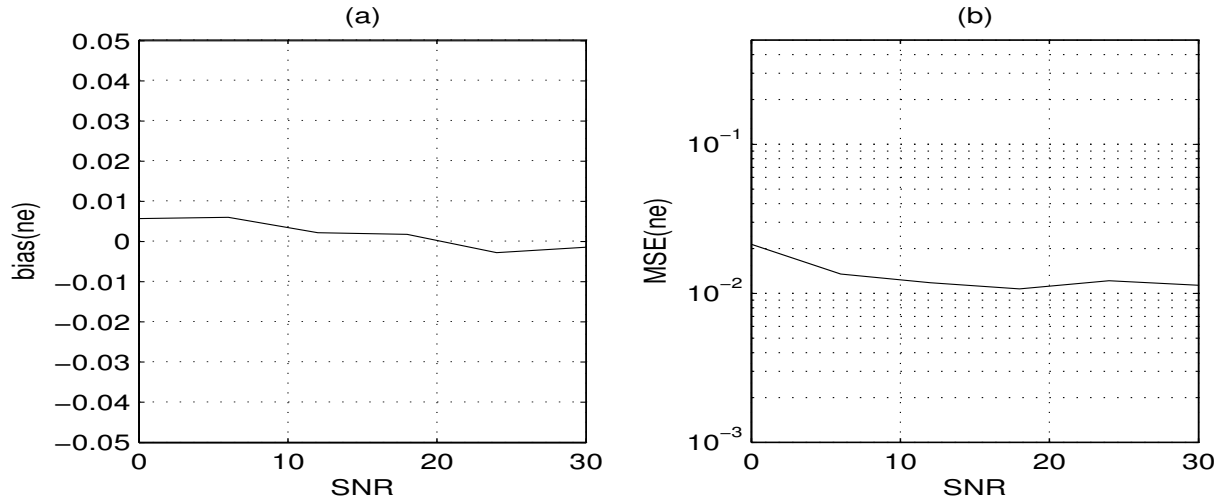


圖 3.6: (a) Bias and (b) MSE of  $\hat{n}_e$  versus SNR, 使用升餘弦脈衝整形, 512 符號,  $n_e = 5$ ,  $\theta_e = -0.2$

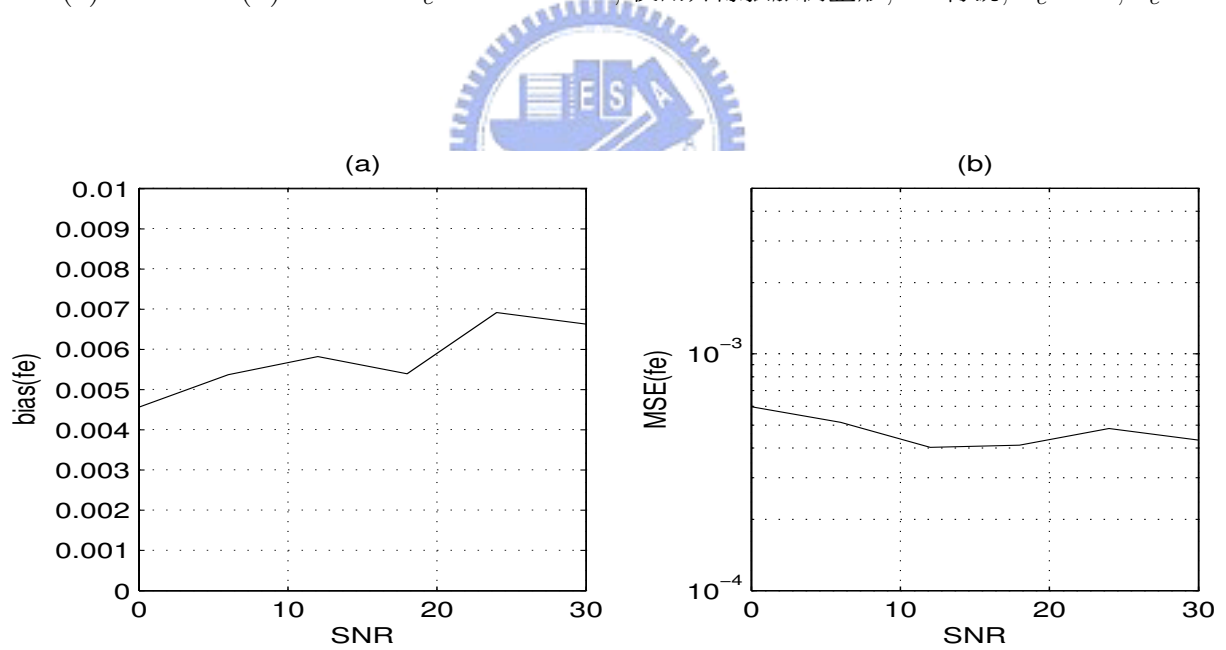


圖 3.7: (a) Bias and (b) MSE of  $\hat{f}_e$  versus SNR, 使用升餘弦脈衝整形, 512 符號,  $n_e = 5$ ,  $\theta_e = -0.2$

4. 附加白雜訊通道使用 H.Bölcskei[2]估測, 利用512個符號, 且  $n_e \in \mathbb{Z}$  :

(設定  $n_e = 5$  ,  $\theta_e = -0.2$  , 圖3.8表示時間偏移  $n_e$  的估測, 圖3.9表示頻率偏移  $\theta_e$  的估測)

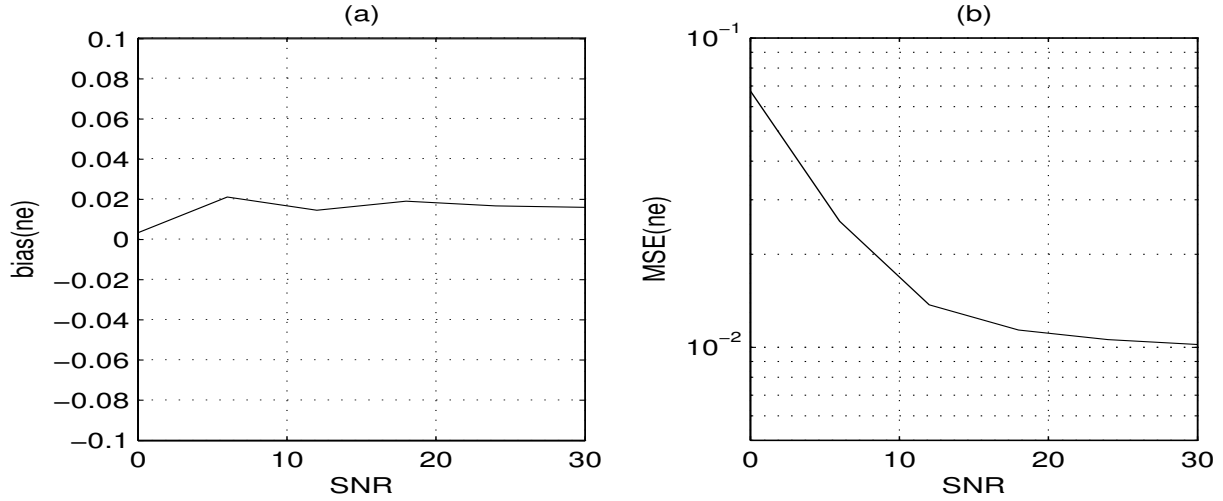


圖 3.8: (a) Bias and (b) MSE of  $\hat{n}_e$  versus SNR , 使用升餘弦脈衝整形,512符號, 使用 [2],  $n_e = 5$  ,  $\theta_e = -0.2$

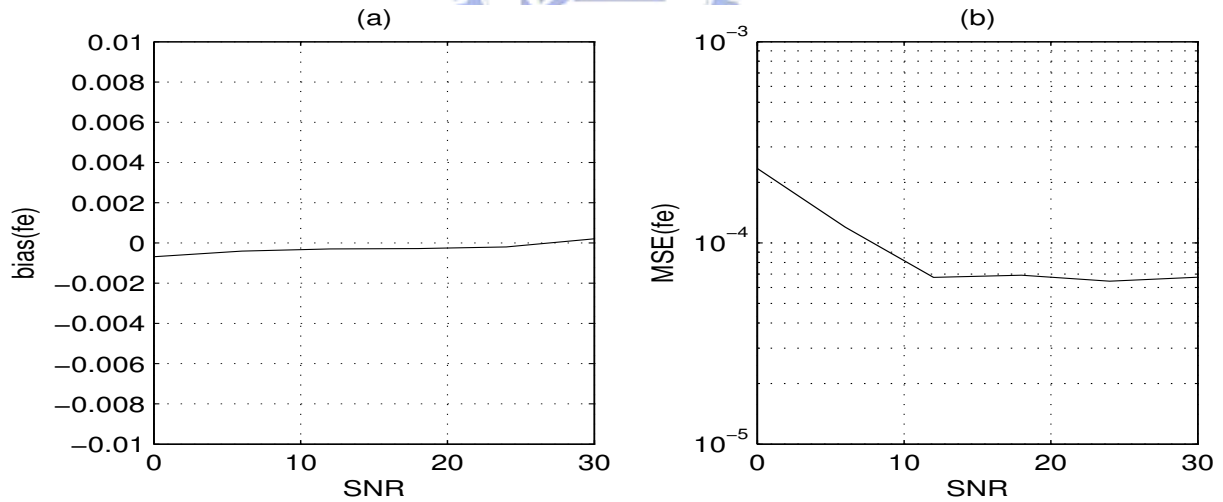


圖 3.9: (a) Bias and (b) MSE of  $\hat{f}_e$  versus SNR , 使用升餘弦脈衝整形,512符號, 使用 [2],  $n_e = 5$  ,  $\theta_e = -0.2$

5. 附加白雜訊通道使用 (3.16)(3.17) 估測, 利用 128 個符號:

(設定  $n_e = 3.3$ ,  $\theta_e = 0.3$ , 圖 3.10 表示時間偏移  $n_e$  的估測, 圖 3.11 表示頻率偏移  $\theta_e$  的估測)

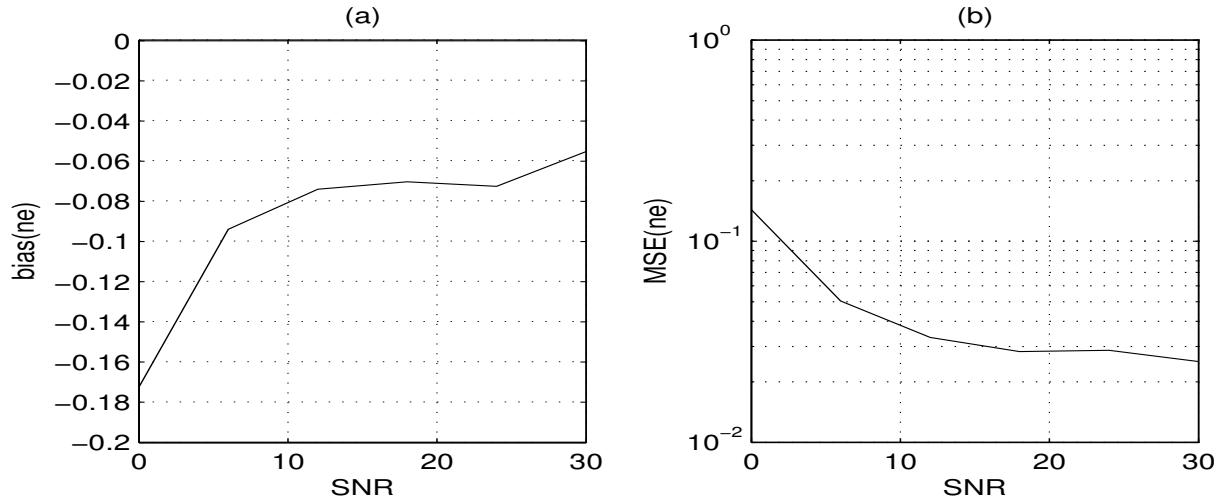


圖 3.10: (a) Bias and (b) MSE of  $\hat{n}_e$  versus SNR, 使用升餘弦脈衝整形, 128 符號,  $n_e = 3.3$ ,  $\theta_e = 0.3$

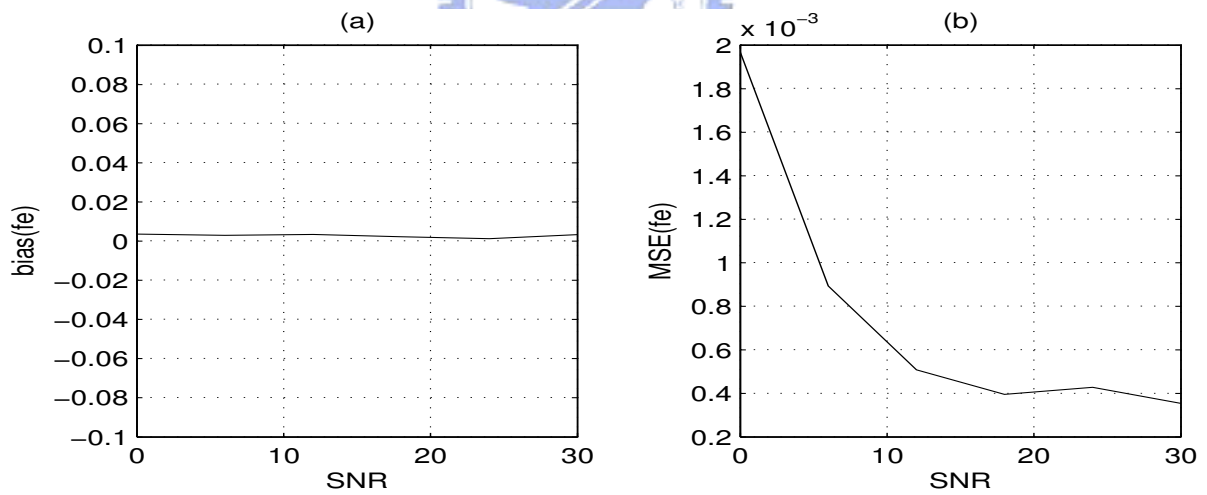


圖 3.11: (a) Bias and (b) MSE of  $\hat{\theta}_e$  versus SNR, 使用升餘弦脈衝整形, 128 符號,  $n_e = 3.3$ ,  $\theta_e = 0.3$

6. 多重路徑通道 (multipath) 使用 (3.16)(3.17) 估測, 利用 512 個符號:

(設定  $n_e = 3.3$ ,  $\theta_e = 0.3$ , 圖 3.12 表示時間偏移  $n_e$  的估測, 圖 3.13 表示頻率偏移  $\theta_e$  的估測)

使用的是四階的多重路徑 Rayleigh-fading 通道, 其中  $\sigma_h^2 = [0.9502 \ 0.0473 \ 0.0024 \ 0.0001]$ 。

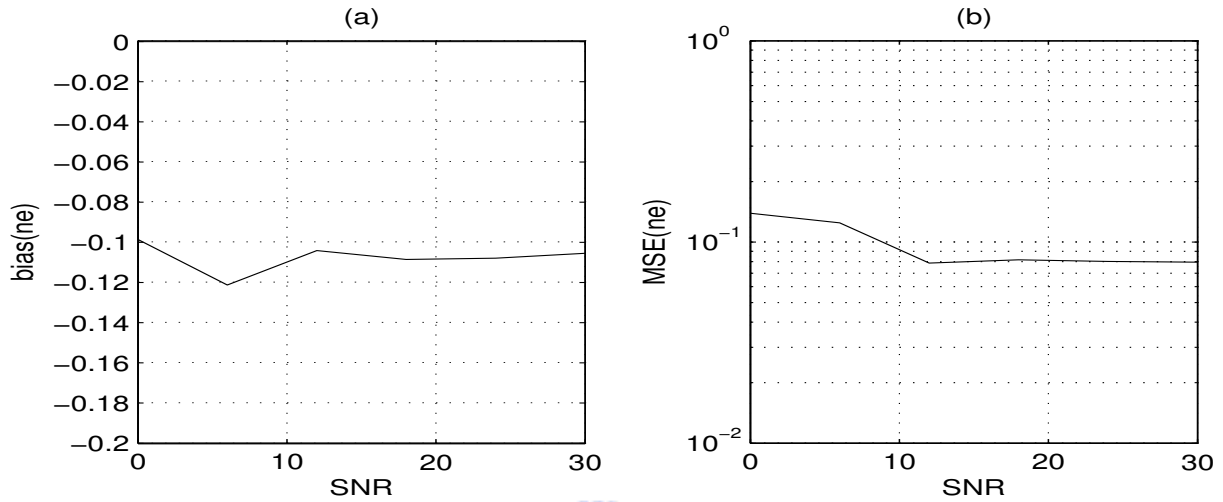


圖 3.12: (a) Bias and (b) MSE of  $\hat{n}_e$  versus SNR, 多重路徑通道, 使用升餘弦脈衝整形, 512 符號,  $n_e = 3.3$ ,  $\theta_e = 0.3$

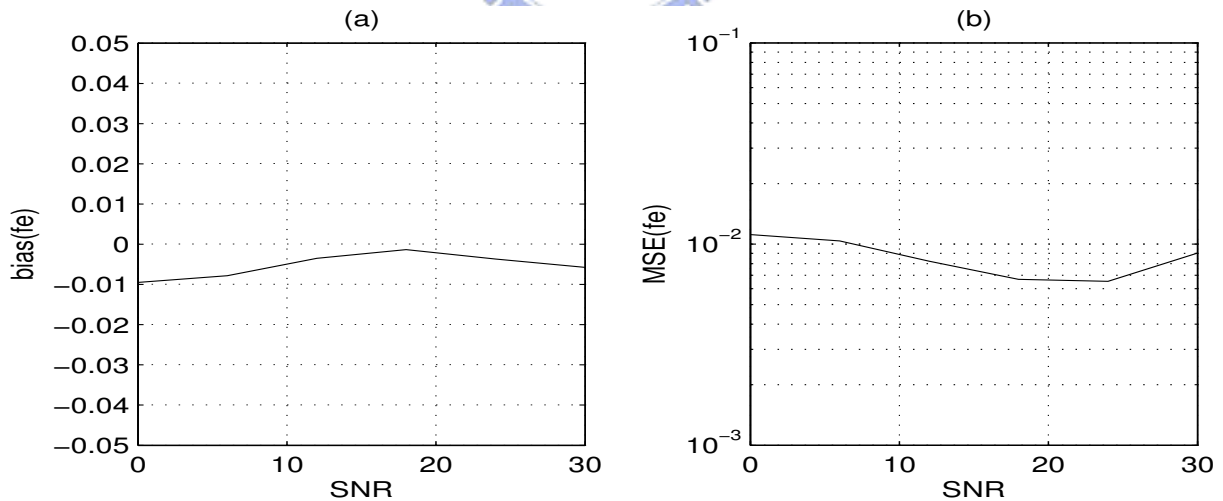


圖 3.13: (a) Bias and (b) MSE of  $\hat{f}_e$  versus SNR, 多重路徑通道, 使用升餘弦脈衝整形, 512 符號,  $n_e = 3.3$ ,  $\theta_e = 0.3$

## 第 4 章

### 結論

這篇論文的重點在於更正系統的模型並重新推導新的演算法利用週期靜態的特性來估測頻率偏移與時間偏移，針對單載波系統，可藉著過度取樣來獲得具有週期靜態特性的相關度，相較於 OFDM 系統本身便具有此特性。優點為不需到取得傳輸資料的訊息或是額外的訓練符號便可進行估測，缺點則是計算相對的複雜且需要大量的資料來估算統計特性。主要的誤差是由於以取樣平均來近似期望值時所造成，所以如果想要提高準確度，便需要提高用來計算的取樣點數，計算量便會加大，且也會延後取得估計值的時間，所以其中的取捨是很重要的。

對於單載波系統，本論文中提出的方法可以修正當脈衝整形濾波器的頻寬較大時的估計結果，而對正交頻率頻率多重傳輸系統可以修正非整數的時間偏移時的估計結果，對於多重路徑的 Rayleigh 衰減通道也可正確的估測。



## 第 A 章 附錄

首先推導  $c_r[n, \tau]$

$$\begin{aligned}
 c_r[n, \tau] &= E\{r[n]r^*[n - \tau]\} \\
 &= E\left\{e^{j2\pi\theta_e\tau} \int_{-0.5}^{0.5} X(e^{j2\pi\mu})e^{j2\pi\mu(n-n_e)}d\mu \int_{-0.5}^{0.5} X^*(e^{j2\pi\nu})e^{-j2\pi\nu(n-\tau-n_e)}d\nu\right\} + c_\rho[\tau] \\
 &= E\left\{e^{j2\pi\theta_e\tau} \int_{-0.5}^{0.5} \sum_{k=0}^{N-1} w[k]G\left(e^{j2\pi(\mu-\frac{k}{N})}\right) \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{k,l}e^{-j2\pi\mu l M}e^{j2\pi\mu(n-n_e)}d\mu \right. \\
 &\quad \cdot \left. \int_{-0.5}^{0.5} \sum_{p=0}^{N-1} w^*[p]G^*\left(e^{j2\pi(\nu-\frac{p}{N})}\right) \sum_{q=-\infty}^{\infty} c_{p,q}^*e^{j2\pi\nu q M}e^{-j2\pi\nu(n-\tau-n_e)}d\nu\right\} + c_\rho[\tau] \\
 &= \sigma_c^2 e^{j2\pi\theta_e\tau} \sum_{k=0}^{N-1} |w[k]|^2 \int_{-0.5}^{0.5} \int_{-0.5}^{0.5} e^{j2\pi(\mu-\nu)(n-n_e)} e^{j2\pi\nu\tau} G\left(e^{j2\pi(\mu-\frac{k}{N})}\right) G^*\left(e^{j2\pi(\nu-\frac{k}{N})}\right) \\
 &\quad \cdot \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi l M(\nu-\mu)} d\mu d\nu + c_\rho[\tau] \tag{A.1}
 \end{aligned}$$

先假定  $\nu$  是一個常數，可得  $\sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi l M(\nu-\mu)} = \frac{1}{M} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \delta(\mu - \nu - s/M)$  為連續 (continuous) 的  $\delta$  函數，代入 (A.1) 可得

$$\begin{aligned}
 c_r[n, \tau] &= \frac{\sigma_c^2 e^{j2\pi\theta_e\tau}}{M} \sum_{m=0}^{N-1} |w[m]|^2 \left\{ \sum_{s=0}^{M-1} \int_{-0.5}^{0.5-\frac{s}{M}} e^{j(\frac{2\pi s}{M})(n-n_e)} e^{j2\pi\nu\tau} G\left(e^{j2\pi(\nu+\frac{s}{M}-\frac{m}{N})}\right) G^*\left(e^{j2\pi(\nu-\frac{m}{N})}\right) d\nu \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{s=-M+1}^{-1} \int_{-0.5-\frac{s}{M}}^{0.5} e^{j(\frac{2\pi s}{M})(n-n_e)} e^{j2\pi\nu\tau} G\left(e^{j2\pi(\nu+\frac{s}{M}-\frac{m}{N})}\right) G^*\left(e^{j2\pi(\nu-\frac{m}{N})}\right) d\nu \right\} + c_\rho[\tau] \tag{A.2}
 \end{aligned}$$

接下來推導  $C_r[k, \tau]$ ，對於  $0 \leq k \leq M-1$ ，可得

$$\begin{aligned}
 C_r[k, \tau] &= \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} \frac{\sigma_c^2 e^{j2\pi\theta_e\tau}}{M} \sum_{m=0}^{N-1} |w[m]|^2 \left\{ \sum_{s=0}^{M-1} \int_{-0.5}^{0.5-\frac{s}{M}} e^{j(\frac{2\pi s}{M})(n-n_e)} e^{j2\pi\nu\tau} G\left(e^{j2\pi(\nu+\frac{s}{M}-\frac{m}{N})}\right) \right. \\
 &\quad \cdot G^*\left(e^{j2\pi(\nu-\frac{m}{N})}\right) d\nu + \sum_{s=-M+1}^{-1} \int_{-0.5-\frac{s}{M}}^{0.5} e^{j(\frac{2\pi s}{M})(n-n_e)} e^{j2\pi\nu\tau} G\left(e^{j2\pi(\nu+\frac{s}{M}-\frac{m}{N})}\right) G^*\left(e^{j2\pi(\nu-\frac{m}{N})}\right) d\nu \left. \right\} \\
 &\quad \cdot e^{-j\frac{2\pi k}{M}n} + \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} c_\rho[\tau] e^{-j\frac{2\pi k}{M}n} \\
 &= \sum_{n=0}^{M-1} \frac{\sigma_c^2 e^{j2\pi\theta_e\tau}}{M^2} \sum_{m=0}^{N-1} |w[m]|^2 \left\{ \sum_{s=0}^{M-1} e^{j(\frac{2\pi s}{M})(n-n_e)} e^{-j\frac{2\pi k}{M}n} \int_{-0.5}^{0.5-\frac{s}{M}} e^{j2\pi\nu\tau} G\left(e^{j2\pi(\nu+\frac{s}{M}-\frac{m}{N})}\right) \right. \\
 &\quad \cdot G^*\left(e^{j2\pi(\nu-\frac{m}{N})}\right) d\nu + \sum_{s=-M+1}^{-1} e^{j(\frac{2\pi s}{M})(n-n_e)} e^{-j\frac{2\pi k}{M}n} \int_{-0.5-\frac{s}{M}}^{0.5} e^{j2\pi\nu\tau} G\left(e^{j2\pi(\nu+\frac{s}{M}-\frac{m}{N})}\right) \\
 &\quad \cdot G^*\left(e^{j2\pi(\nu-\frac{m}{N})}\right) d\nu \left. \right\} + c_\rho[\tau] \delta[k] \\
 &= \frac{\sigma_c^2 e^{j2\pi\theta_e\tau}}{M^2} \sum_{m=0}^{N-1} |w[m]|^2 \left\{ \sum_{s=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{M-1} e^{-j\frac{2\pi n}{M}(k-s)} e^{-j(\frac{2\pi s}{M})n_e} \int_{-0.5}^{0.5-\frac{s}{M}} e^{j2\pi\nu\tau} G\left(e^{j2\pi(\nu+\frac{s}{M}-\frac{m}{N})}\right) \right. \\
 &\quad \cdot G^*\left(e^{j2\pi(\nu-\frac{m}{N})}\right) d\nu + \sum_{s=-M+1}^{-1} \sum_{n=0}^{M-1} e^{-j\frac{2\pi n}{M}(k-s)} e^{-j(\frac{2\pi s}{M})n_e} \int_{-0.5-\frac{s}{M}}^{0.5} e^{j2\pi\nu\tau} G\left(e^{j2\pi(\nu+\frac{s}{M}-\frac{m}{N})}\right) \\
 &\quad \cdot G^*\left(e^{j2\pi(\nu-\frac{m}{N})}\right) d\nu \left. \right\} + c_\rho[\tau] \delta[k] \tag{A.3}
 \end{aligned}$$

其中  $\sum_{n=0}^{M-1} e^{-j\frac{2\pi n}{M}(k-s)} = M\delta[k-s+LM]$  為離散 (discrete) 的  $\delta$  函數，代入 (A.3)，先計算  $1 \leq k \leq M-1$  的情形，得

$$\begin{aligned}
 C_r[k, \tau] &= \frac{\sigma_c^2 e^{j2\pi\theta_e\tau}}{M} \sum_{m=0}^{N-1} |w[m]|^2 \left\{ e^{-j(\frac{2\pi k}{M})n_e} \int_{-0.5}^{0.5-\frac{k}{M}} e^{j2\pi\nu\tau} G\left(e^{j2\pi(\nu+\frac{k}{M}-\frac{m}{N})}\right) G^*\left(e^{j2\pi(\nu-\frac{m}{N})}\right) d\nu \right. \\
 &\quad \left. + e^{-j(\frac{2\pi}{M})(k-M)n_e} \int_{-0.5-\frac{k-M}{M}}^{0.5} e^{j2\pi\nu\tau} G\left(e^{j2\pi(\nu+\frac{k-M}{M}-\frac{m}{N})}\right) G^*\left(e^{j2\pi(\nu-\frac{m}{N})}\right) d\nu \right\} \\
 &= \frac{\sigma_c^2 e^{j2\pi\theta_e\tau}}{M} \sum_{m=0}^{N-1} |w[m]|^2 e^{-j(\frac{2\pi k}{M})n_e} \left\{ \int_{-0.5}^{0.5-\frac{k}{M}} e^{j2\pi\nu\tau} G\left(e^{j2\pi(\nu+\frac{k}{M}-\frac{m}{N})}\right) G^*\left(e^{j2\pi(\nu-\frac{m}{N})}\right) d\nu \right. \\
 &\quad \left. + e^{j2\pi n_e} \int_{0.5-\frac{k}{M}}^{0.5} e^{j2\pi\nu\tau} G\left(e^{j2\pi(\nu+\frac{k}{M}-\frac{m}{N})}\right) G^*\left(e^{j2\pi(\nu-\frac{m}{N})}\right) d\nu \right\} \tag{A.4}
 \end{aligned}$$

另外計算

$$C_r[0, \tau] = \frac{\sigma_c^2 e^{j2\pi\theta_e\tau}}{M} \sum_{m=0}^{N-1} |w[m]|^2 \left\{ \int_{-0.5}^{0.5} e^{j2\pi\nu\tau} G\left(e^{j2\pi(\nu-\frac{m}{N})}\right) G^*\left(e^{j2\pi(\nu-\frac{m}{N})}\right) d\nu + c_\rho[\tau] \right\} \tag{A.5}$$

合併 (A.4) 與 (A.5) 可得, 對於  $k = 0, 1, \dots, M - 1$

$$C_r[k, \tau] = \frac{\sigma_c^2}{M} e^{j2\pi\theta_e\tau} e^{-j\frac{2\pi k}{M}n_e} \sum_{m=0}^{N-1} |w[m]|^2 \left\{ \int_{-0.5}^{0.5-k/M} e^{j2\pi\nu\tau} G\left(e^{j2\pi(\nu+\frac{k}{M}-\frac{m}{N})}\right) G^*\left(e^{j2\pi(\nu-\frac{m}{N})}\right) d\nu \right. \\ \left. + e^{j2\pi n_e} \int_{0.5-k/M}^{0.5} e^{j2\pi\nu\tau} G\left(e^{j2\pi(\nu+\frac{k}{M}-\frac{m}{N})}\right) G^*\left(e^{j2\pi(\nu-\frac{m}{N})}\right) d\nu \right\} + c_\rho[\tau]\delta[k] \quad (\text{A.6})$$

接下來計算 (A.6) 中的積分部分

$$\int_{-0.5}^{0.5-k/M} e^{j2\pi\nu\tau} G\left(e^{j2\pi(\nu+\frac{k}{M}-\frac{m}{N})}\right) G^*\left(e^{j2\pi(\nu-\frac{m}{N})}\right) d\nu \\ = \int_{-0.5}^{0.5-k/M} e^{j2\pi\nu\tau} \left( \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} g[\alpha] e^{-j2\pi(\nu+\frac{k}{M}-\frac{m}{N})\alpha} \right) \left( \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} g[\beta] e^{j2\pi(\nu-\frac{m}{N})\beta} \right) d\nu \\ = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} g[\alpha]g[\beta] e^{j\frac{2\pi m}{N}(\alpha-\beta)} e^{-j\frac{2\pi k}{M}\alpha} \int_{-0.5}^{0.5-k/M} e^{j2\pi(\beta-\alpha+\tau)\nu} d\nu \\ = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} g[\alpha]g[\alpha-\gamma] e^{j\frac{2\pi m}{N}\gamma} e^{-j\frac{2\pi k}{M}\alpha} \int_{-0.5}^{0.5-k/M} e^{j2\pi(\tau-\gamma)\nu} d\nu \\ = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} g[\alpha]g[\alpha-\tau] e^{j\frac{2\pi m}{N}\tau} e^{-j\frac{2\pi k}{M}\alpha} \left(1 + \frac{k}{M}\right) \\ + \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{\gamma=-\infty \\ \gamma \neq \tau}}^{\infty} g[\alpha]g[\alpha-\gamma] e^{j\frac{2\pi m}{N}\gamma} e^{-j\frac{2\pi k}{M}\alpha} \frac{(-1)^{\tau-\gamma}}{2\pi(\tau-\gamma)} \left( e^{j\frac{2\pi k}{M}(\tau-\gamma)} - 1 \right) \quad (\text{A.7})$$

同理可證

$$\int_{0.5-k/M}^{0.5} e^{j2\pi\nu\tau} G\left(e^{j2\pi(\nu+\frac{k}{M}-\frac{m}{N})}\right) G^*\left(e^{j2\pi(\nu-\frac{m}{N})}\right) d\nu \\ = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} g[\alpha]g[\alpha-\tau] e^{j\frac{2\pi m}{N}\tau} e^{-j\frac{2\pi k}{M}\alpha} \frac{k}{M} \\ + \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \sum_{\substack{\gamma=-\infty \\ \gamma \neq \tau}}^{\infty} g[\alpha]g[\alpha-\gamma] e^{j\frac{2\pi m}{N}\gamma} e^{-j\frac{2\pi k}{M}\alpha} \frac{(-1)^{\tau-\gamma}}{2\pi(\tau-\gamma)} \left( 1 - e^{j\frac{2\pi k}{M}(\tau-\gamma)} \right) \quad (\text{A.8})$$

將 (A.7) 與 (A.8) 代入 (A.6) 可得到最後結果

$$C_r[k, \tau] = \frac{\sigma_c^2}{M} e^{j2\pi\theta_e\tau} e^{-j\frac{2\pi k}{M}n_e} \left\{ \Gamma_N[\tau] A^{(g,g)}\left[\tau, \frac{k}{M}\right] \left(1 + \frac{k}{M}(e^{j2\pi n_e} - 1)\right) \right. \\ \left. + (e^{j2\pi n_e} - 1) \sum_{\substack{\gamma=-\infty \\ \gamma \neq \tau}}^{\infty} \Gamma_N[\gamma] A^{(g,g)}\left[\gamma, \frac{k}{M}\right] \frac{(-1)^{\tau-\gamma}}{j2\pi(\tau-\gamma)} \left(1 - e^{-j2\pi(\tau-\gamma)\frac{k}{M}}\right) \right\} + c_\rho[\tau]\delta[k] \quad (\text{A.9})$$

其中  $\Gamma_N[\tau] := \sum_{k=0}^{N-1} |w[k]|^2 e^{j(2\pi/N)k\tau}$ , 而  $A^{(g,h)}[k, \theta] := \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n]h[n-k]e^{-j2\pi n\theta}$ 。



## 參考文獻

- [1] F. Gini and G.B. Giannakis, "Frequency offset and symbol timing recovery in flat-fading channels: a cyclostationary approach," *IEEE Trans. Commun.*, Vol. 46, pp. 400 - 411, Mar 1998.
- [2] H. Bolcskei, "Blind estimation of symbol timing and carrier frequency offset in wireless OFDM systems," *IEEE Trans. Commun.*, Vol. 49, pp. 988-999, June 2001.
- [3] B. Park, H. Cheon, and E. Ko, "A blind OFDM synchronization algorithm based on cyclic correlation ," *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 11, pp. 83-85, Feb. 2004.
- [4] Y.Ma and Y. Huang, "Blind estimation of carrier frequency offset for OFDM in unknown multipath channels," *IEE Electronics Letters*, Vol. 39, NO. 1, pp. 128-130 Jan. 2003.
- [5] Y.H. Kim, I. Song, S. Yoon, and S.R. Park, "An efficient frequency offset estimator for OFDM systems and its performance characteristics," *IEEE Trans. Vehicular Technology*, Vol. 50, pp. 1307-1312, Sept. 2001.
- [6] J. Li, G. Liu, and G.B. Giannakis, "Carrier frequency offset estimation for OFDM-based WLANs," *IEEE Signal Processing Letters*, Vol. 8, pp. 80-82, Mar 2001.
- [7] S. Chang and E.J. Powers, "Efficient frequency-offset estimation in OFDM-based WLAN systems," *IEE Electronics Letters*, Vol. 39, pp. 1554-1555, Oct. 2003.
- [8] M. Morelli, A.N. D'Andrea, and U. Mengali, "Feedback frequency synchronization for OFDM applications," *IEEE Communications Letters*, Vol. 5, pp. 28-30, Jan. 2001.

- [9] Z. Zhang, M. Zhao, H. Zhou, Y. Liu, and J. Gao, "Frequency offset estimation with fast acquisition in OFDM system," *IEEE Communications Letters*, Vol. 8, pp. 171-173, Mar 2004.
- [10] J.J. van de Beek, M. Sandell, and P.O. Borjesson, "ML estimation of time and frequency offset in OFDM systems," *IEEE Trans. on Signal Processing*, Vol. 45, No. 7, pp. 1800-1805, Jul. 1997.

