

# A 2D Flow Visualization User Study Based on Eye Tracking Analysis

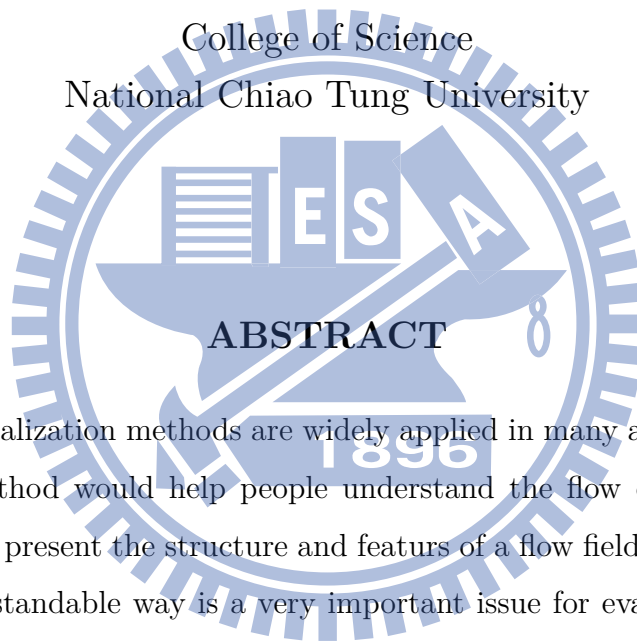
Student: Shia-Yang Ho

Advisor: Dr. Chih-Wen Weng  
Dr. Wen-Chieh Lin

Institute of Applied Mathematics

College of Science

National Chiao Tung University



## ABSTRACT

The flow visualization methods are widely applied in many areas. A good flow visualization method would help people understand the flow quickly and accurately, so how to present the structure and features of a flow field in a much clearer and more understandable way is a very important issue for evaluating a flow visualization method. Previous user studies on flow visualization methods compared the effectiveness of different methods by analyzing the users' response to questions. In this thesis, we propose an eye-movement-based user study methodology to analyze and evaluate flow visualization methods. We observe some phenomena that were not found in the previous questionnaire-based evaluation studies on flow visualization methods. Our experimental results help us understand human subjects' visual behavior when they view the flow images, and the presentation efficiency of different flow visualization methods. We compared five 2D flow visualization methods in our experiments, including a direct flow visualization method,

two geometric flow visualization methods and two texture-based flow visualization methods. According to fluid dynamics experts' suggestions and previous flow visualization evaluation studies, display of critical points and flow trajectory prediction are two important functions of flow visualization. In order to evaluate these two aspects, we designed the following four tasks: (1) Free-viewing: we analyze the correlation of fixations with flow velocity, and the fixations with location of critical points while the user is not performing any tasks. We also develop a model to predict the location of the eye gaze under free-viewing. (2) Advection predicting: compare subject's advection predicting performance on different visualization methods. (3) Flow features locating: compare subject's flow feature finding performance on different visualization methods. (4) Flow features identifying: compare subject's flow feature identification performance on different visualization methods. Besides the eye-gaze data, we also compared the result of response time and the location that mouse clicked. Our experiments show that human subjects tend to be attracted by the region where the flow field has large directional variations on all five flow visualization methods. On the other hand, experts attend to the critical points more than non-experts, and the response time of experts is shorter than non-experts, while there are no significant differences in accuracy and correctness between experts and non-experts. Among all the methods used in our experiment, texture-based methods perform well at the correctness and the response time, but their presentation of flow features cannot draw subjects' attention well.



# 應用眼動儀於二維流場可視化方法的使用者研究

研究生： 何昕暘

指導教授： 翁志文 博士

林文杰 博士

國立交通大學

理學院

應用數學系



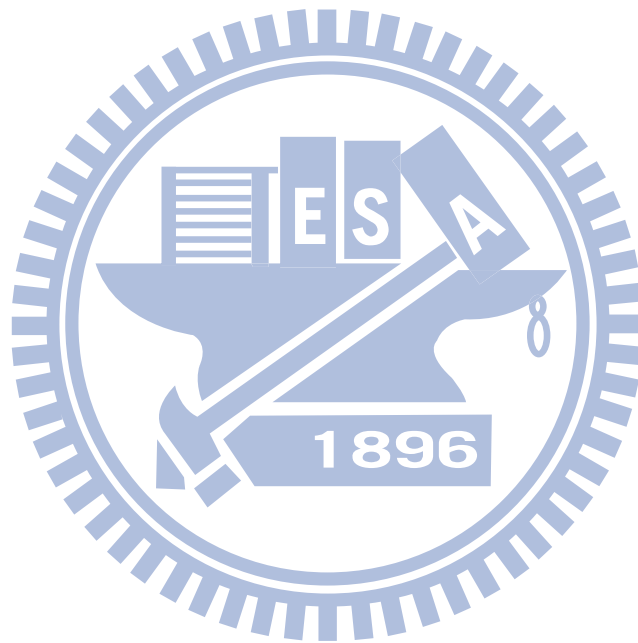
流場可視化方法被廣泛地應用在許多領域裡面，好的視覺化方法可以幫助人們快速且正確的理解流場的內容，因此如何使流場的結構與特徵更容易讓人理解便是一個很重要的課題。過去相關的流場可視化評測使用者研究多以分析根據作答數據來比較不同方法的效率，本論文則提出了一個以眼動儀資料作為基礎的使用者研究方法，從影像對視覺的影響的方向來評測不同流場可視化方法效率。眼動儀實驗的結果讓我們觀察到一些過去的評測方式無法比較到的地方，這讓我們可以從更多面向瞭解人們在觀看流場影像時候的行為，以及不同流場可視化方法在不同目標下的效率。我們一共對 5 種二維流場可視化方法進行比較，這 5 種流場可視化方法包含了 1 種箭頭形式的方法，2 種流線方法以及 2 種材質紋理方法。從流體專家及以前使用者研究所注重的評估項目，我們知道在流場顯示中臨界點顯示與軌跡預測的重要性，為了評估這兩方面的重要性，同時我們想量測在沒有特別指示之下自然注視的反應，所以我們設計了以下 4 個實驗：(1) 自由注視：我們分析在沒有特定指示下，受測者自由注視流場影像時眼睛凝視位置與流場速度、臨界點位置的關係，同時提出一個預測眼睛注視流場

區域的預測模型；(2) 流動路徑預測：由受測者預測流動軌跡，我們比較不同方法之下眼睛軌跡與流場流動軌跡的相似性；(3) 找尋流場特徵：由受測者找尋流場中的特徵，我們根據眼睛凝視點的分布狀態比較不同方法之下流場的特徵是否容易吸引受測者的注意；(4) 分辨流場特徵：由受測者在多個流場中的特徵中分辨出正確的目標，我們分析受測者在找尋正確流場特徵的過程中，在不同待選目標中來回的次數以及目標被找到的順序。除了眼動儀的資料外，我們也對一般作答的結果進行比較。我們將實驗的數據以 2 種分群方式進行分析，第一種是受測者有無流體力學背景，第二種是 5 種流場可視化方法。我們的研究顯示在觀看流場影像的時候，無論是哪種流場可視化方法，人們均會傾向注意到流向變化劇烈的區域。有專業背景的受測者在進行實驗的反應會較快且較注意臨界點，但在判斷的正確性與精準度上面與沒有流體力學背景的受測者沒有差異。而在不同的流場可視化方法之中，材質合成 (texture-base) 的方法在作答的正確性反應速度表現非常優秀，但是在特徵的部分較不容易吸引到受測者的注意。



# 誌謝

我們首先感謝 Greg Turk 教授與 David Banks 提供的 Image-guided streamlines 的原始碼。以及感謝沈漢威教授提供 Unsteady Flow LIC 的原始碼。此外，我們也感謝交通大學機械系陳慶耀教授、博士生黃裕盛對於論文內容與方向的建議，並提供流體模型的資料。我們更感謝交通大學傳播與科技學系陶振超教授與他的研究生，提供眼動儀以及協助進行眼動儀實驗。最後，我們要感謝複雜性流體實驗室、電腦動畫與互動圖學實驗室以及圖學與感知實驗室的研究生們參與此論文的實驗。



---

# 目錄

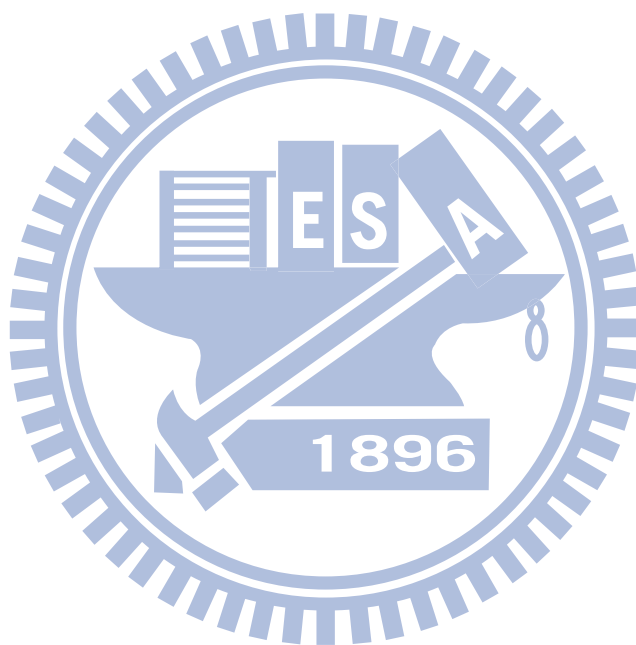
---

<b>1</b>	<b>緒論</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>相關研究</b>	<b>4</b>
2.1	流場可視化方法的評測	4
2.2	眼動儀在視覺化方法中的應用	8
<b>3</b>	<b>背景知識</b>	<b>11</b>
3.1	流場中的幾何與拓樸結構	11
3.2	流場可視化方法與分類	16
3.3	眼動追蹤及分析	17
<b>4</b>	<b>實驗流場與可視化方法</b>	<b>19</b>
4.1	流場資料	19
4.2	流場可視化方法實作	28
4.2.1	Hedgehog Plot(HP)	28
4.2.2	Image-guided Streamlines(IGS)	31
4.2.3	Illustrative Streamlines(IS)	31
4.2.4	Line-Integral Convolution(LIC)	37
4.2.5	Unsteady Flow LIC(UFLIC)	37
<b>5</b>	<b>實驗儀器與設計</b>	<b>41</b>
5.1	實驗儀器	41

5.2	實驗設計	42
5.2.1	實驗 1：自由注視	45
5.2.2	實驗 2：流動路徑預測	45
5.2.3	實驗 3：找尋流場特徵	47
5.2.4	實驗 4：分辨流場特徵	49
<b>6</b>	<b>實驗結果</b>	<b>54</b>
6.1	實驗分群與統計檢定	55
6.2	實驗 1：自由注視	56
6.2.1	流場可視化方法與注視區域	57
6.2.2	流場注視區域預測	60
6.3	實驗 2：流動路徑預測	62
6.4	實驗 3：找尋流場特徵	66
6.5	實驗 4：分辨流場特徵	69
6.6	討論	71
6.6.1	流場可視化方法的分析	71
6.6.2	專家與非專家之間的比較	74
6.6.3	眼動儀資料的資料分析與討論	75
6.6.4	實驗設計檢討	78
<b>7</b>	<b>結論與未來展望</b>	<b>81</b>
7.1	結論	81
7.2	未來展望	82
<b>A</b>	<b>附錄</b>	<b>83</b>
A.1	Tobii Studio 操作範例	83
A.1.1	建立專案檔	83
A.1.2	設置實驗	84
A.1.3	進行實驗	90
A.1.4	閱讀實驗資料與資料匯出	92

A.2 實驗一的流場圖片、流向差圖與凝視點分布 . . . . . 98

參考文獻 . . . . . 107



---

# 圖目錄

---

2.1	Laidlaw 等人 [1] 實驗範例。(a) 找尋臨界點實驗的畫面，受測者點擊畫面中所有臨界點。(b) 分辨臨界點類型實驗畫面，實驗時由左圖切換到右圖，受測者判斷紅點位置的臨界點類型在下面的按鈕點選正確答案。(c) 預測流動路徑的實驗畫面，受測者預測從中心點出發的粒子與外圈的交點。圖片取自 [1]。 . . . . .	5
2.2	Ware[2] 實驗的範例。要比較空間中流線立體表現的能力，畫面上方有一條立體的流線，該流線結構為沿著一個平面震盪的波型。實驗的時候受測者要將下面的平面旋轉到與上方流線波形震盪所在的平面對齊。圖片取自 [2]。 . . . . .	6
2.3	Forsberg 等人 [3] 實驗。(a)3D 顯示方法的時候戴上 3D 眼鏡做實驗，(b) 與 (c) 分別為線狀與管狀的三維流線顯示方法。圖片取自 [3]。 . . . . .	6
2.4	Martin 等人 [4] 實驗的範例。由左至右分別為無背景圖、以行政區疆域邊界圖、等壓線圖以及濕度的顏色投射圖為背景。圖片取自 [4]。 . . . . .	7

2.5	Convertino 等人 [5] 的研究，Dual-View Visualization 方法中畫面中有兩個資料視窗，實驗中比較不同方法組合的影響，圖為實驗中比較的 4 種組合方式。左上：兩個平行座標圖 (parallel coordinate plots)(PP)，右上：左側平行座標圖 + 右側散佈圖 (scatter plot)(PS)，左下：左側平行座標圖 + 右側幾何圖 (geographic map)(PG)，右下：左側散佈圖 + 右側幾何圖 (SG)。圖片引自 [5]。	9
2.6	Burch 等人 [6] 的研究中，比較 (a)TimelineTrees (TLT) 與 (b)TimeRadarTrees(TRT) 兩種類型的階層式資料視覺化工具。圖片引自 [6]。	9
2.7	Goldberg 與 Helfman[7] 的研究中，比較雷達圖、折線圖與長條圖 3 種圖表的表現能力。圖片引自 [7]。	10
2.8	Pohl 等人 [8] 的研究中，比較以垂直水平線 (orthogonal) 連接、直線連接 (force-directed) 以及階層式 (hierarchical) 這 3 種不同圖構成 (graph layouts) 連接方式的表現能力。圖片引自 [8]。	10
3.1	流線示意圖。流線 (黃色線) 上一點的向量 (藍色箭頭) 與該點切線 (綠色直線) 平行。	12
3.2	徑線示意圖。圖中同個顏色的粒子表示該粒子在不同時刻中的位置，藍色虛線表示線上該粒子的流動軌跡，藍色實線表示點 $p$ 上該粒子的流動軌跡同時也是該時刻通過點 $p$ 的徑線。在 $t = n$ 時，在點 $p$ 釋放一個粒子，該粒子的流動軌跡即為在 $t = n$ 時通過點 $p$ 的徑線。在穩態流場 (a) 中，每個時刻通過點 $p$ 的徑線不會變動，因此釋放出來的粒子會沿著同樣的軌跡前進。在非穩態的流場 (b) 中，通過點 $p$ 的徑線會隨著時間而變動。	13
3.3	煙線示意圖。圖中藍色虛線表示線上該粒子的流動軌跡，藍色實線表示點 $p$ 上該粒子的流動軌跡同時也是該時刻通過點 $p$ 的徑線。紅色實線表示該時刻通過點 $p$ 的煙線。在 $t = n$ 時，連接所有從點 $p$ 釋放的粒子形成的曲線，即為在 $t = n$ 時通過點 $p$ 的煙線。在穩態流場 (a) 中，煙線不會變動且與徑線一致。在非穩態的流場 (b) 中，煙線會隨著時間變動。	14



3.4	臨界點分類。	15
3.5	同一張圖片在 7 種不同指示之下，7 種不同的眼睛軌跡。(圖片出自 [9]，引用自維基百科 <a href="http://en.wikipedia.org/wiki/File:Yarbus_The_Visitor.jpg">http://en.wikipedia.org/wiki/File:Yarbus_The_Visitor.jpg</a> )。	18
4.1	不同特徵值與特徵向量的範例。紅線與綠線分別為兩特徵向量的方向，數字表示對應的特徵值。(a) 與 (b) 特徵值不同，其他參數都一樣。(a) 與 (c) 特徵向量不同，其他參數都一樣。	22
4.2	特徵向量相同時，特徵值正負號不同時臨界點也不同。紅線與綠線分別為兩特徵向量的方向，數字表示對應的特徵值。	22
4.3	focus sink 與 focus source 臨界點的合成。	23
4.4	第一組流場資料合成：在流場空間中放置數個隨機的控制點，黃色點代表控制點位置。(a) 為每個單一控制點的流場結構，(b) 為所有控制點加起來之後的流場結構，(c) 為經過調整流速分布的速度調整後的流場結構。	25
4.5	第二組流場資料合成：以正五邊形的方式，在距離原點 200 畫素的地方放置 5 種類型臨界點的控制點各 1 個，黃色點代表控制點位置。(a) 為速度轉換前的流場結構，(b) 為經過調整流速分布的速度調整後的流場結構。	27
4.6	以物理模擬得到的四個流場資料。	29
4.7	實驗所使用的 5 種流場可視化方法範例。UFLIC 為動畫中一個影格 (frame)。	30
4.8	Hedgehog Plot 不同密度參數的範例。	32
4.9	Image-guided Streamline 程式不同密度參數的範例。	33
4.10	Image-guided Streamline 程式內建的 5 種箭頭模式。	34

4.11	Illustrative Streamlines 方法中局部相異度的計算方式。(a) 為一流場中的一流線以及流場中某一點的向量 (綠色箭頭)。(b) 為二維平面對流線的距離場，顏色越深表示距離流線越遠。(c) 為由距離場計算得出的梯度場。(a) 中該點的梯度場向量為圖中藍色箭頭，該向量轉 90 度後為該點的漸進向量 (桃紅色箭頭)。(d) 為該點向量 (綠色箭頭) 與漸進向量 (桃紅色箭頭) 的比較。 . . . . .	35
4.12	Illustrative Streamlines 不同參數下的畫面範例。 . . . . .	38
4.13	LIC 演算的過程。(圖片引用自 [10] 的圖 1) 第一張為要求顏色的點與該點的向量方向，第二張為沿著向量向兩側積分出來的流線。第三張為輸入畫面，通常是隨機產生的雜訊圖。將第二張的流線與輸入畫面對應，對沿著流線的畫素做加權平均，可以得到輸出的顏色。 . . . . .	39
4.14	UFLIC 演算的過程。 . . . . .	39
5.1	實驗的環境。圖中的螢幕為 Tobii T120。 . . . . .	41
5.2	實驗整體流程圖。 . . . . .	44
5.3	實驗一 (自由注視) 流程圖。 . . . . .	46
5.4	實驗二 (流動軌跡) 影像範例。圖片中心有 1 個黃色的圓點，外圈直徑 200 畫素。實驗的時候預測從中心黃色點釋放的粒子，會與外圈在何處相交，在預測的位置用滑鼠點擊。 . . . . .	47
5.5	實驗二 (流動軌跡) 流程圖。 . . . . .	48
5.6	實驗三 (尋找流場特徵) 流程圖。 . . . . .	50
5.7	實驗四 (分辨流場特徵) 影像範例。5 種臨界點各 1 個，分別放置在正五邊形的 5 個頂點上。該正五邊形中心在畫面正中央，5 個頂點與中心距離 200 畫素。同時用半徑為 100 畫素的圓圈將每個臨界點標示出來。 . . . . .	51
5.8	實驗四 (分辨流場特徵) 流程圖。 . . . . .	52

6.1	NSS score 範例。(a) 為一張影像以及一位受測者的眼睛軌跡，(b) 為圖預測模型所預測出在圖 (a) 向量場的凝視強度分布與受測者的眼睛軌跡；紅色越深代表該點的值越高。(c) 為做完 z-score 正規化之後預測模型數值分布表，此時平均為 0，標準差為 1；藍色線表示圖 (b) 中受測者凝視點對應的值的加權平均。在這個例子中，凝視點位置對應的 NSS score 平均值大於 0，代表凝視點的分布趨向於預測的區域。	58
6.2	速度場的 NSS Score。(a) $p = 0.001$ 。(b) $F = 14.33$ ， $p < 0.001$ 。	59
6.3	凝視點與臨界點距離場的 NSS Score。(a) $p = 0.005$ 。(b) $F = 9.36$ ， $p < 0.001$ 。	59
6.4	流向差範例。(a) 與 (c) 為兩個流場圖，(b) 與 (d) 流向差與流場的關係，紅色越深表示流向差的值越高。	61
6.5	流向差。(a) $p < 0.001$ 。(b) $F = 10.31$ ， $p < 0.001$ 。	62
6.6	流動路徑實驗的反應時間。(a) $p < 0.001$ 。(b) $F = 4.62$ ， $p = 0.003$ 。	63
6.7	點擊誤差量測的範例。(a) 為滑鼠的點擊點以及正確的流動軌跡，(b) 中滑鼠點擊的點與圓心連線，以及正確點與圓心連線的夾角，即為點擊的誤差角度。	63
6.8	流動路徑實驗的位置判斷的誤差。(a) $p = 0.225$ 。(b) $F = 1.55$ ， $p = 0.200$ 。	64
6.9	眼睛軌跡差異性的計算方式。計算 (a) 中兩條軌跡中的凝視點座標，與另外一條軌跡中所有凝視點座標的距離，凝視點之間的關係可以寫成 (b) 的這個矩陣 $M$ 。將 (b) 每個矩陣元素與下方、右下方以及右方連接，利用 Dijkstra 演算法求出從圖的點 1 到點 6 的最短路徑。軌跡差即為最短路徑上的數值平均。	65
6.10	流動路徑實驗的眼睛軌跡與流動軌跡差異。(a) $p = 0.329$ 。(b) $F = 16.00$ ， $p < 0.001$ 。	66
6.11	流場特徵觀察實驗的反應時間。(a) $p < 0.001$ 。(b) $F = 2.34$ ， $p = 0.054$ 。	67

6.12 流場特徵觀察實驗的正確率。(a) $p = 0.254$ 。(b) $F = 13.48$ ， $p < 0.001$ 。	68
6.13 流場特徵觀察實驗的位置判斷的誤差。(a) $p = 0.790$ 。(b) $F = 53.17$ ， $p < 0.001$ 。	68
6.14 流場特徵觀察實驗的凝視點分布。(a) $p = 0.009$ 。(b) $F = 3.71$ ， $p = 0.005$ 。	69
6.15 分辨流場特徵實驗的反應時間。(a) $p < 0.001$ 。(b) $F = 44.21$ ， $p < 0.001$ 。	70
6.16 分辨流場特徵實驗的反應時間。(a) $p = 0.008$ 。(b) $F = 15.87$ ， $p < 0.001$ 。	71
6.17 分辨流場特徵實驗中第一個看到的臨界點即為目標臨界點的比率。(a) $p = 0.386$ 。(b) $F = 1.00$ ， $p = 0.390$ 。	72
6.18 分辨流場特徵實驗中初次注意到目標時的找尋次數(綠)與全部的找尋次數(紅)。(a)First check： $p = 0.628$ 。Total check： $p < 0.001$ 。(b)First check： $F = 4.29$ ， $p = 0.005$ 。Total check： $F = 13.87$ ， $p < 0.001$ 。	72
6.19 分辨流場特徵實驗中初次注意到目標時的找尋次數(綠)與全部的找尋次數(紅)。(a)First check： $p = 0.457$ 。Total check： $p = 0.002$ 。(b)First check： $F = 3.32$ ， $p = 0.011$ 。Total check： $F = 13.82$ ， $p < 0.001$ 。	73
6.20 受測者對三個實驗中每種方法難度的評分，分數越高表示覺得越容易。	74
6.21 流動軌跡的例子。(a) 眼睛幾乎沿著流動軌跡前進，(b) 在流動軌跡附近來回多次掃視，(c) 眼睛會在追蹤的途中跑到離流動軌跡較遠的地方，(d) 與 (e) 眼睛先到圖中其他地方找到箭頭的資訊之後，再開始追蹤流動軌跡。	76
6.22 較早版本的實驗四(分辨流場特徵)流程圖。	79

6.23	分辨流場特徵的例子。左下角的臨界點，受測者在進入 AOI 之後，因為看不到箭頭的方向資訊，因此跑出 AOI 找尋箭頭，找到箭頭後重新回到 AOI 區內完成確認。 . . . . .	80
A.1	流場 01 的 5 個流場影像與流向差圖以及所有受測者凝視點分布。	99
A.2	流場 02 的 5 個流場影像與流向差圖以及所有受測者凝視點分布。	100
A.3	流場 03 的 5 個流場影像與流向差圖以及所有受測者凝視點分布。	101
A.4	流場 04 的 5 個流場影像與流向差圖以及所有受測者凝視點分布。	102
A.5	流場 05 的 5 個流場影像與流向差圖以及所有受測者凝視點分布。	103
A.6	流場 06 的 5 個流場影像與流向差圖以及所有受測者凝視點分布。	104
A.7	流場 07 的 5 個流場影像與流向差圖以及所有受測者凝視點分布。	105
A.8	流場 08 的 5 個流場影像與流向差圖以及所有受測者凝視點分布。	106



---

# 表目錄

---

4.1	第一組流場的設定參數。 . . . . .	26
4.2	第二組流場的設定參數。 . . . . .	26
5.1	實驗內容簡表。 . . . . .	43
5.2	實驗 4 中 5 個實驗的順序。編號 1 為 saddle，2 為 node sink，3 為 node source，4 為 focus sink，5 為 focus source。受測者編號個位數為 1 ~ 5 的受測者用一組 $5 \times 5$ 的拉丁方陣，編號個位數為 6 ~ 10 的受測者用第二組 $5 \times 5$ 的拉丁方陣。 . . . . .	53
6.1	實驗總資料數。 . . . . .	55

# CHAPTER 1

## 緒論

視覺化方法 (visualization) 是以視覺的方式，如圖文、圖片或動畫等，將資訊呈現出來的工具。流場可視化方法 (flow visualization) 則是視覺化方法裡面的一個分支。透過流場可視化方法，人們可以理解流場的結構與現象，因此流場可視化方法被廣泛地應用在許多領域裡面，例如流體力學、熱力學、氣象學、航太工程等。在過往的研究中，發展出了許多種類的流場可視化方法，不同的方法在不同的應用上有各自的優點與缺點。好的視覺化方法可以幫助人們快速且正確的理解流場的內容，因此如何使流場的結構與特徵更容易讓人理解便是一個很重要的課題。

然而要如何客觀的評測不同方法的視覺化表達能力呢？過往針對流場做評測的方式大致有三個方式。第一種方式是經由設計實驗，根據受測者作答的結果，例如：反應時間、作答的正確率或精確度，來分析比較不同方法在不同目標下的效率 [11][1][3][12]。這種方法有最客觀的作答反應數據，但無法評估圖像對視覺行為的影響。第二種是經由問卷作答，由受測者給予評分與意見的方式來進行方法的比較 [13]。這種方法可以分析流場可視化方法在主觀視覺上與心理上是否易於將流向、流場特性表現出來，讓人理解流場的結構，但同時也可能會受到評分者自身經驗與偏見的影響。第三種是針對流場的圖像設計出量化度量 (quantitative metric) 的模型來進行評測 [14][15]。這種方式能夠分析不同流場可



視化方法在圖片特性上對於呈現流場主要特徵、重現流場結構的能力。但是不容易更深入的比較對於流場內容的認知，例如流場特徵辨別的能力，同時也不容易將方法延伸到三維與非穩態流場上。

在本篇論文，我們對過往使用者研究的方法做改進，在過往使用者研究實驗的基礎上，加入了眼動儀 (eye tracker) 進行實驗。經由眼動儀，我們可以得到眼睛觀看流場圖片與影片時的眼睛軌跡 (scanpath) 的資訊，再透過分析眼睛凝視點 (fixation) 及眼睛觀看軌跡等視覺相關資訊來評測流場可視化方法的效率，讓評測流場視覺的使用者研究實驗除了根據作答的結果來分析比較之外，也能從圖像對視覺行為的影響方面來比較。

我們的實驗共分成四個部分。在第一個部分的實驗裡面，我們讓受測者在沒有特定指示下，自由注視流場圖片與影像。在第二個部分的實驗，我們經由讓受測者判斷流動路徑的方式，來比較不同方法表現流場流動軌跡的能力。在第三個部分的實驗，我們讓受測者找出流場中的特徵 (臨界點) 所在的位置，藉此來比較不同方法表示流場特徵的能力。在最後一個實驗，我們讓受測者從流場畫面上數個特徵中選出正確的目標，比較觀看不同方法影像時分辨特徵的能力。

這些結果讓我們觀察到一些過去的評測方式無法比較到的地方，包括：

- 我們透過眼動資料比較在自由注視時，人們會注意的流場區域與流場速度、臨界點位置的關係。同時我們假設人們會優先注意流向變化劇烈的區域，並且提出一個預測模型驗證這個假設。
- 我們比較在不同的流場可視化方法下，眼睛軌跡跟隨流動路徑的能力：我們透過 Jarodzka 與 Chen[16] 的眼睛軌跡相似性比較方法，分析眼睛軌跡與流場流動軌跡的相似性。與過去的方法 [1] 相比，可以知道流場可視化方法是否容易讓受測者順著流動軌跡觀察流向，也能探討眼睛追蹤流動路徑時的移動模式。
- 比較不同的流場可視化方法下，流場特徵的是否容易吸引受測者的注意：在流場特徵表現能力上，過去的方法 [1] 比較了辨識流場特徵的正確性與速度。而透過眼動資料，經由比較眼睛注視位置與流場特徵的相關性，我們可以知道在不同方法中流場的特徵是否容易吸引到人們的注意。



- 比較不同的流場可視化方法下，流場特徵的是否容易被受測者分辨：透過分析眼睛在數個流場特徵中找出正確目標的眼睛移動過程，我們可以知道受測者在找尋正確流場特徵的過程中，在不同待選目標中來回的次數以及目標被找到的順序。

這些結果讓我們可以從更多面向瞭解人在觀看流場影像時候的行為，以及不同流場可視化方法在不同目標下的效率，這也是我們論文最主要的貢獻。

這篇論文後面章節的組織如下：第二章，我們回顧過去流場可視化評測以及眼動儀應用在可視化方法上相關的研究。第三章，我們概述相關的背景知識，包含流場、流場可視化方法與眼動儀資料。第四章，我們詳述實驗用的流場資料與流場可視化方法的實作內容。第五章，我們詳述實驗設計的內容與流程。在第六章，我們對實驗的結果做分析與討論。第七章，我們對整個論文做總結以及展望未來的發展方向。



## 相關研究

本論文主要是以過去的使用者研究實驗為基礎，加上眼動儀所得到的視覺記錄資料做流場可視化方法的比較分析，因此本章的內容為回顧評測流場可視化方法的相關研究以及眼動儀應用在可視化方法上的研究。

### 2.1 流場可視化方法的評測

在流場可視化方法的領域裡面，早期 Leeuw 與 Liere [17] 曾經對 Line-Integral Convolution(LIC)[10] 與 spot noise [18] 進行比較。他們的研究將 LIC 與 spot noise 的材質紋路長度調整到相似的狀態後比較兩種方法的圖片，他們的結論指出 LIC 有較佳的畫面品質但無法表現速度資訊，相反的 spot noise 能表現出速度的資訊。Leeuw 與 Liere 雖然比較了流場方法，但他們僅針對畫面的表現做出結論，並沒有提出量化的評分模型對兩方法進行比較。

要量化評量視覺化方法，傳統上最主要的方式是經由使用者研究 (user study)[19] 來進行：設定要比較的目標，然後針對個別目標設計實驗，最後根據使用者的作答結果來比較不同方法在不同目標下的效率。流場可視化的使用者研究，最早由 Laidlaw 等人 [11] 做了相關的使用者研究，並且在之後的研究 [1] 中做了改良。他們針對了 6 種二維流場可視化方法 (包含 3 種方向符號、2 種幾何流線與 1 種材質紋理) 進行比較。他們的研究中設計了 3 個部分的實驗，分別

從流動路徑顯示能力、特徵顯示能力與特徵辨別能力這 3 個方向來比較不同方法的表現能力 (圖2.1)。他們的結論指出有向量符號、有流線結構以及能清楚呈現臨界點的方法有較好的表現。

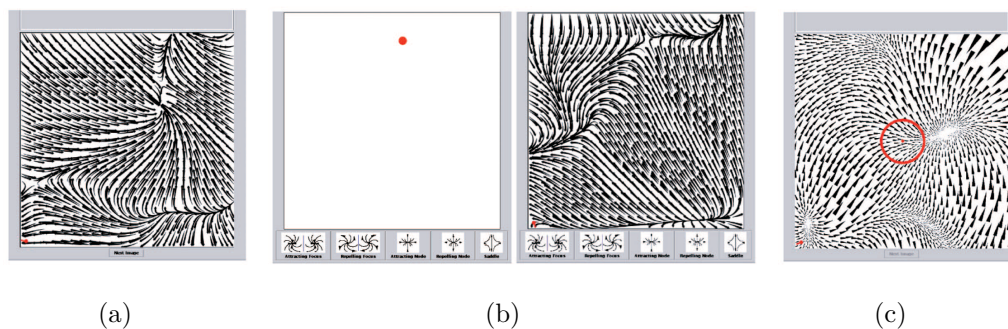


圖 2.1: Laidlaw 等人 [1] 實驗範例。(a) 找尋臨界點實驗的畫面，受測者點擊畫面中所有臨界點。(b) 分辨臨界點類型實驗畫面，實驗時由左圖切換到右圖，受測者判斷紅點位置的臨界點類型在下面的按鈕點選正確答案。(c) 預測流動路徑的實驗畫面，受測者預測從中心點出發的粒子與外圈的交點。圖片取自 [1]。

Liu 等人 [12] 除了比較不同類型的流場結構圖形外，也比較了不同方式的顏色對映 (color mapping)。在他們的實驗中，以 1 種方向符號、1 種幾何流線，分別結合方向與速度 2 種顏色對映方式得到  $(1+1) \times 2 = 4$  種方法，加上 3 種材質紋理方法結合速度的顏色對映，總共比較 7 種二維流場可視化方法。他們的實驗從特徵顯示、特徵辨別與流場結構表現三個方向來比較流場的表現能力。他們的結論指出材質合成同時又強調流場紋路的流場顯示方式最能讓人直覺地理解流場，同時他們也指出結合顏色對映，對於流場的表現有負面影響。

除了二維的流場可視化方法，也有人針對三維的流場可視化方法進行研究。Ware[2] 的研究比較了不同的流線上色方式、視差立體感、運動立體感對於三維流線立體結構判斷的影響。他的實驗將流線分成 4 種上色方式，有 3D 立體顯示與無 3D 立體顯示，流線固定不動以及以固定周期來回移動，總共  $4 \times 2 \times 2 = 16$  種不同狀況進行比較。他們的實驗中將一個平面上的流線放到空間中，經由要求受測者判斷該平面的方向的方式來比較不同條件下受測者對流線立體結構判斷能力 (圖2.2)。他們的結論指出視差立體感與運動立體感對於三維流線的判斷有很大的助益，不過對於判斷精確度影響最大的因子是流線外型，管狀線條

的表現會比線狀來得好。

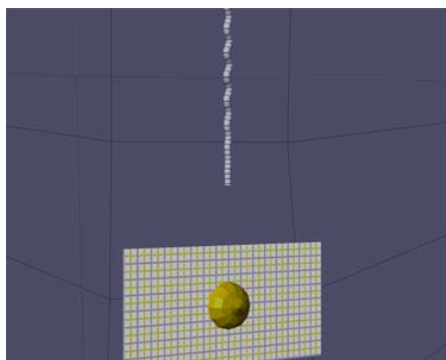


圖 2.2: Ware[2] 實驗的範例。要比較空間中流線立體表現的能力，畫面上方有一條立體的流線，該流線結構為沿著一個平面震盪的波型。實驗的時候受測者要將下面的平面旋轉到與上方流線波形震盪所在的平面對齊。圖片取自 [2]。

Ware[2] 的研究僅比較了單條流線的立體結構，而 Forsberg 等人 [3] 的研究則比較了整個三維流場中的流線，在他們的實驗中比較了線狀與管狀兩種不同的三維流線外型，以及 3D 立體顯示與非 3D 立體顯示兩種不同的螢幕顯示模式，總共  $2 \times 2 = 4$  種不同狀況下的流線顯示能力 (圖 2.3)。他們從流動路徑顯示、特徵顯示與特徵辨別、流速比較的方向，來比較不同流線外型的流場表現能力。他們的結論指出三維立體顯示與線狀的流線表示方式有較好的表現。

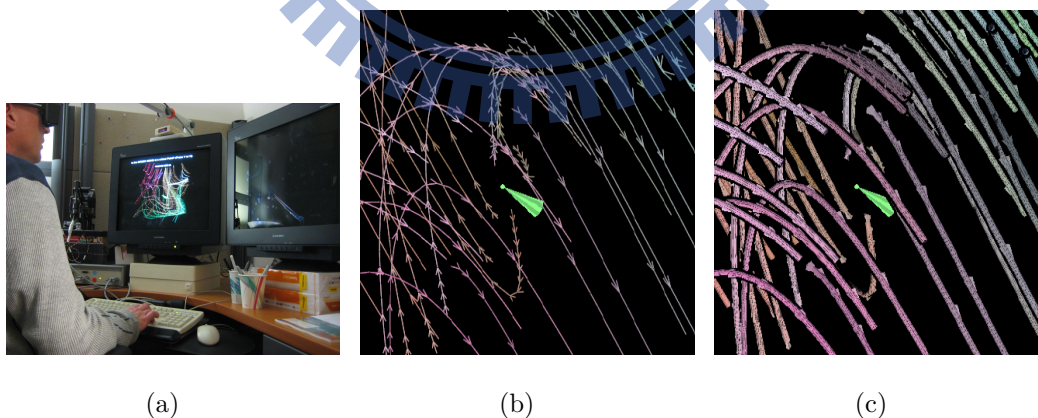


圖 2.3: Forsberg 等人 [3] 實驗。(a) 3D 顯示方法的時候戴上 3D 眼鏡做實驗，(b) 與 (c) 分別為線狀與管狀的三維流線顯示方法。圖片取自 [3]。

除了不同流場可視化方法之間的比較之外，也有人針對背景圖像對向量符號

的影響做研究。在 Martin 等人 [4] 的使用者研究實驗中，他們將一個颶風的風向場的向量圖，與不同的背景做組合。背景包含了行政區疆域邊界圖、等壓線圖以及濕度的顏色投射圖 3 種 (圖2.4)，每一種分成使用與不使用，因此總共有  $2 \times 2 \times 2 = 8$  種組合。他們的實驗比較了受測者在 8 種模式下，對於風勢強度與風向的判斷能力。他們的結論指出多層的背景資訊會增加判斷時間但不會影響判斷準確度，受測者在判斷上會傾向於低估速度，方向的誤差上則會傾向於偏向逆時針的方向。

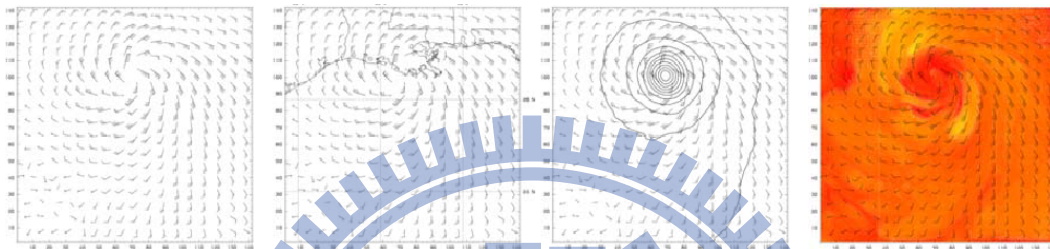


圖 2.4: Martin 等人 [4] 實驗的範例。由左至右分別為無背景圖、以行政區疆域邊界圖、等壓線圖以及濕度的顏色投射圖為背景。圖片取自 [4]。

以上幾乎所有的使用者研究都是針對穩態的流場進行比較，Andryscio[20] 則針對非穩態的流場顯示方法進行比較。他的實驗比較了 5 種顯示方式，要求受測者對流場的流動軌跡進行預測。在他實驗的結果，5 種方法之間在統計上並沒有差異。

除了以實驗為基礎的使用者研究之外，Acevedo 等人 [13] 以受測者給予評分的方式來做評估。他們的研究將 Laidlaw 等人 [1] 的研究中由受測者進行實驗的部分，讓相關領域的專業人員進行評分。同時將評分的結果與 Laidlaw 等人 [1] 的研究結果進行比較。他們的結果指出專業人員評分的結果，與經由實驗得到的結果呈現高度的相關性。

使用者研究的方法之外，另一種量化比較的方法是設計自動比較的模型來進行量化評分。在流場可視化方法的研究中，主要的評分方式是根據圖像對於呈現流場特徵與流場結構的能力來進行評分。Jänicke 與 Chen[14] 提出了以視覺顯著性 (visual saliency) 為基準的量化評分法，透過比較圖片的顯著性區域表示圖 (saliency map)[21] 與流場中重要特徵位置的相關性來給予評分。Jänicke 等人



[15] 在之後的研究中，又設計出以圖片中方向符號、線條或紋路重建出流場結構的能力作為評分標準的系統。

回顧過去使用者研究中，對流場比較的方式，皆針對作答結果來進行分析，大致包括反應時間、作答正確與否、作答的精確度，還沒有人以量化分析的方式探討流場視覺化圖像對於視覺行為的影響，因此我們在本篇論文中針對這個部分進行研究。

## 2.2 眼動儀在視覺化方法中的應用

近年來有許多研究將眼動儀應用在視覺化方法上。其中一個應用方式是應用眼動儀進行視覺化方法的使用者研究。例如 Convertino 等人 [5] 以眼動儀進行使用者研究的實驗，比較了在雙視格視覺化方法 (Dual-View Visualization) 中，不同的資料視覺化方法組合的影響。他們比較眼睛凝視點的平均時間以及眼睛在兩個圖表之間來回移動的次數 (圖2.5)。Burch 等人 [6] 則將眼動儀應用在比較 2 種不同階層式資料 (information hierarchy) 視覺化工具的實驗中：將同一層資料垂直對齊由左至右階層展開的視覺化工具 TimelineTrees (TLT)，以及由圓心向外輻射展開方式的階層視覺化工具 TimeRadarTrees (TRT) (圖2.6)。他們比較了實驗中兩種方法熱區圖 (heatmap) 的差異。Goldberg 與 Helfman [7] 同樣以眼動儀實驗比較了 3 種不同視覺化工具的差異，他們的實驗中對雷達圖、折線圖與長條圖 3 種圖表的表現能力進行比較 (圖2.7)。他們比較了凝視點第一次進入目標 AOIs (Area of Interesting) 的時間 (即第一次注意到目標的時間)，以及第一次進入目標 AOIs 後到完成作答所花費的時間。Pohl 等人 [8] 在圖構成 (graph layouts) 的使用者研究中應用眼動儀。他們比較以垂直水平線 (orthogonal) 連接、直線連接 (force-directed) 以及階層式 (hierarchical) 這 3 種不同連接方式的可讀性 (圖2.8)。他們嘗試經由分析眼睛的熱區圖來解釋實驗的結果。

另一個眼動儀的應用是用於視覺化方法與使用者的互動上。在流場可視化方法的領域中，Mao 等人 [22] 提出了一個將眼動儀應用在流場可視化方法上面的互動式系統。他們的方法藉由眼動儀捕捉使用者的注視區域，能即時將該區域局部變形放大。讓使用者能夠更詳細的觀察流場細部的結構。

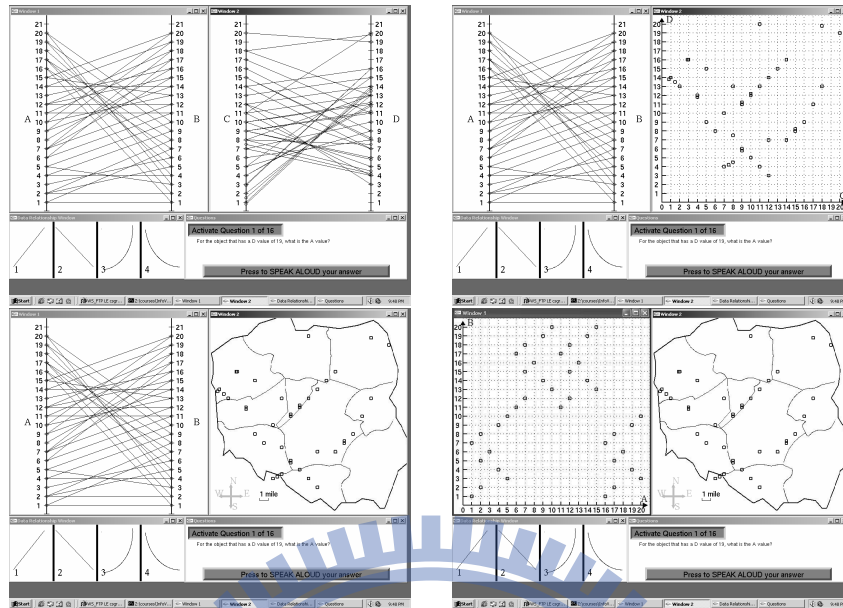


圖 2.5: Convertino 等人 [5] 的研究，Dual-View Visualization 方法中畫面中有兩個資料視窗，實驗中比較不同方法組合的影響，圖為實驗中比較的 4 種組合方式。左上：兩個平行座標圖 (parallel coordinate plots)(PP)，右上：左側平行座標圖 + 右側散佈圖 (scatter plot)(PS)，左下：左側平行座標圖 + 右側幾何圖 (geographic map)(PG)，右下：左側散佈圖 + 右側幾何圖 (SG)。圖片引自 [5]。

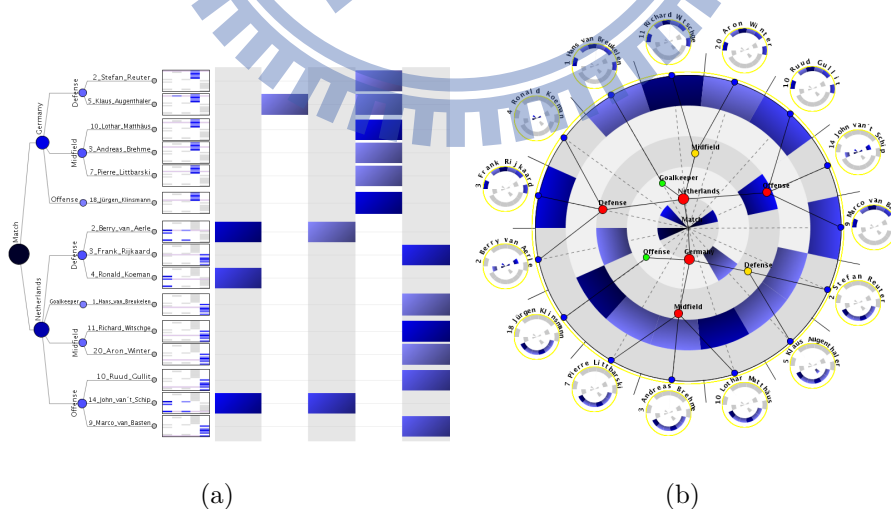


圖 2.6: Burch 等人 [6] 的研究中，比較 (a)TimelineTrees (TLT) 與 (b)TimeRadarTrees(TRT) 兩種類型的階層式資料視覺化工具。圖片引自 [6]。

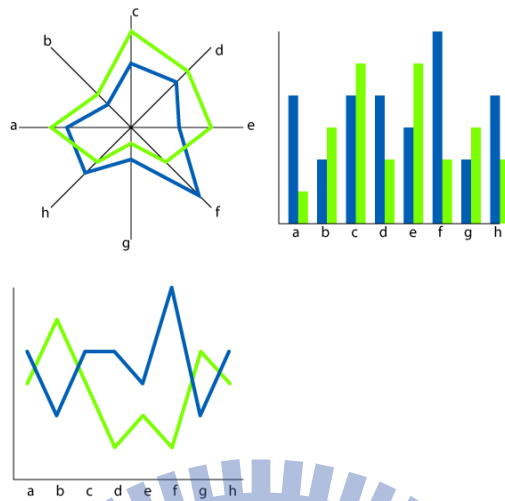


圖 2.7: Goldberg 與 Helfman[7] 的研究中，比較雷達圖、折線圖與長條圖 3 種圖表的表現能力。圖片引自 [7]。

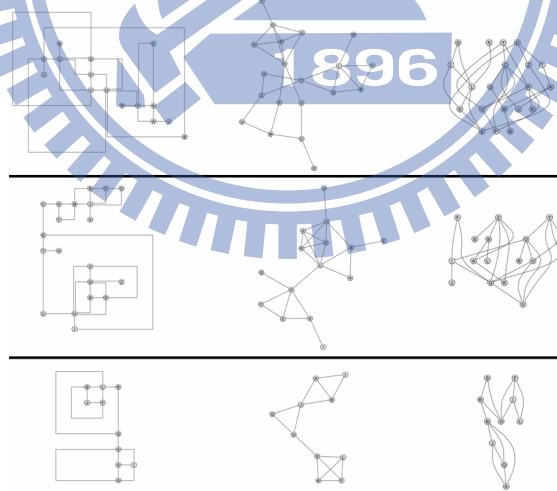


圖 2.8: Pohl 等人 [8] 的研究中，比較以垂直水平線 (orthogonal) 連接、直線連接 (force-directed) 以及階層式 (hierarchical) 這 3 種不同圖構成 (graph layouts) 連接方式的表現能力。圖片引自 [8]。



## 背景知識

## 3.1 流場中的幾何與拓樸結構

對於一個流場的動態系統，我們可以透過微分方程的數學式來表示 [23][24]：

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t), \quad (3.1)$$

在這個系統中，若向量場  $\mathbf{v}$  與變數  $t$  無相關性，也就是不會隨著時間的推移而產生變化，則此系統為穩態 (steady/autonomous/time-independent)。反之，若會隨著時間而變化，則稱為非穩態 (unsteady/non-autonomous/time-dependent)。

在流場的結構的表示上，有三種最常用來表示流場結構的軌跡曲線，分別是流線 (streamline)、徑線 (pathline) 與煙線 (streakline) (圖3.1、3.2、3.3)。流線是流場中的軌跡曲線，表示了某一特定時間點上的流場狀態，該線上任一點切線方向均與該點上的向量平行 (圖3.1)。當  $t = t_0$  時，通過點  $\mathbf{x}(t_0)$  的流線為一階微分方程式

$$\dot{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(s), t_0), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.2)$$

的解曲線。其中  $s$  是對於流場  $\mathbf{v}$  的積分時間 (integration time)，與  $t$  無關。圖3.1為流線的示意圖。黃色曲線表示流場中的一條流線，藍色箭頭為流線上其中一點的向量，綠色直線為該點的切線，該點上向量的方向會與該點切線平行。

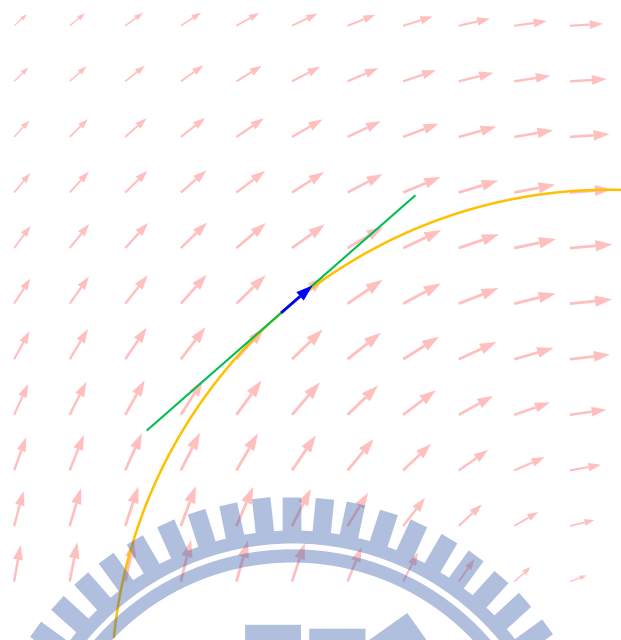


圖 3.1: 流線示意圖。流線 (黃色線) 上一點的向量 (藍色箭頭) 與該點切線 (綠色直線) 平行。

徑線是當一個粒子從一固定點  $\mathbf{x}(t_0)$  釋放後，隨著時間經過所畫出來的流動軌跡曲線 (圖3.2)。用數學式來表示，是一階微分方程式

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.3)$$

的解。圖3.2為徑線的示意圖。圖中同個顏色的粒子表示該粒子在不同時刻中的位置，藍色虛線表示線上該粒子的流動軌跡，藍色實線表示點  $\mathbf{p}$  上該粒子的流動軌跡，同時也是該時刻通過點  $\mathbf{p}$  的徑線。在  $t = n$  時，在點  $\mathbf{p}$  釋放一個粒子，該粒子的流動軌跡即為在  $t = n$  時通過點  $\mathbf{p}$  的徑線。圖3.2(a)為穩態流場，每個時刻通過點  $\mathbf{p}$  的徑線不會變動，因此釋放出來的粒子會沿著同樣的軌跡前進。圖3.2(b)為非穩態流場，通過點  $\mathbf{p}$  的徑線會隨著時間而變動。

煙線表示了當一連串粒子隨著時間依序從點  $\mathbf{x}(t_0)$  出發，經過一段時間後，連接這些粒子所形成的軌跡 (圖3.3)。定義為

$$\mathbf{x}_t(\tau) = \mathbf{x}_\tau(t), \quad (3.4)$$

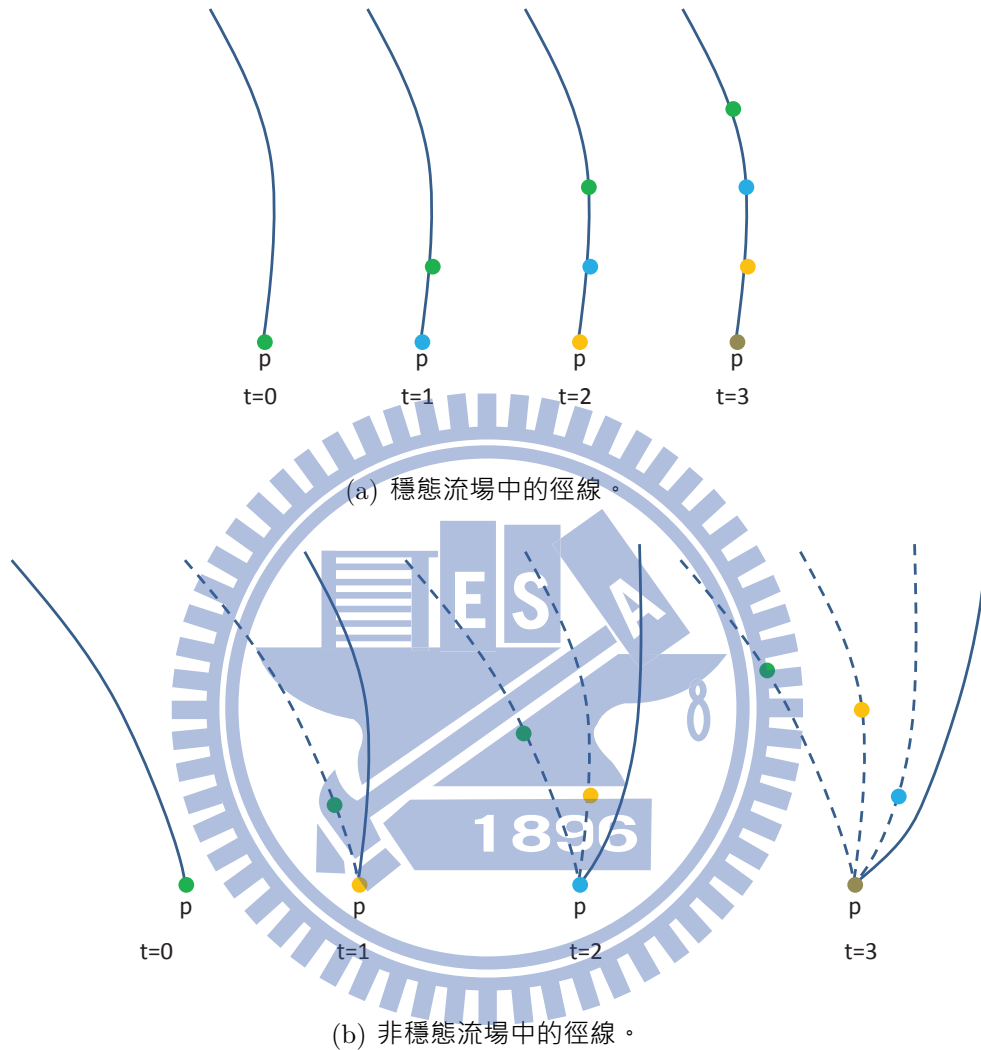


圖 3.2: 徑線示意圖。圖中同個顏色的粒子表示該粒子在不同時刻中的位置，藍色虛線表示線上該粒子的流動軌跡，藍色實線表示點  $p$  上該粒子的流動軌跡同時也是該時刻通過點  $p$  的徑線。在  $t = n$  時，在點  $p$  釋放一個粒子，該粒子的流動軌跡即為在  $t = n$  時通過點  $p$  的徑線。在穩態流場 (a) 中，每個時刻通過點  $p$  的徑線不會變動，因此釋放出來的粒子會沿著同樣的軌跡前進。在非穩態的流場 (b) 中，通過點  $p$  的徑線會隨著時間而變動，

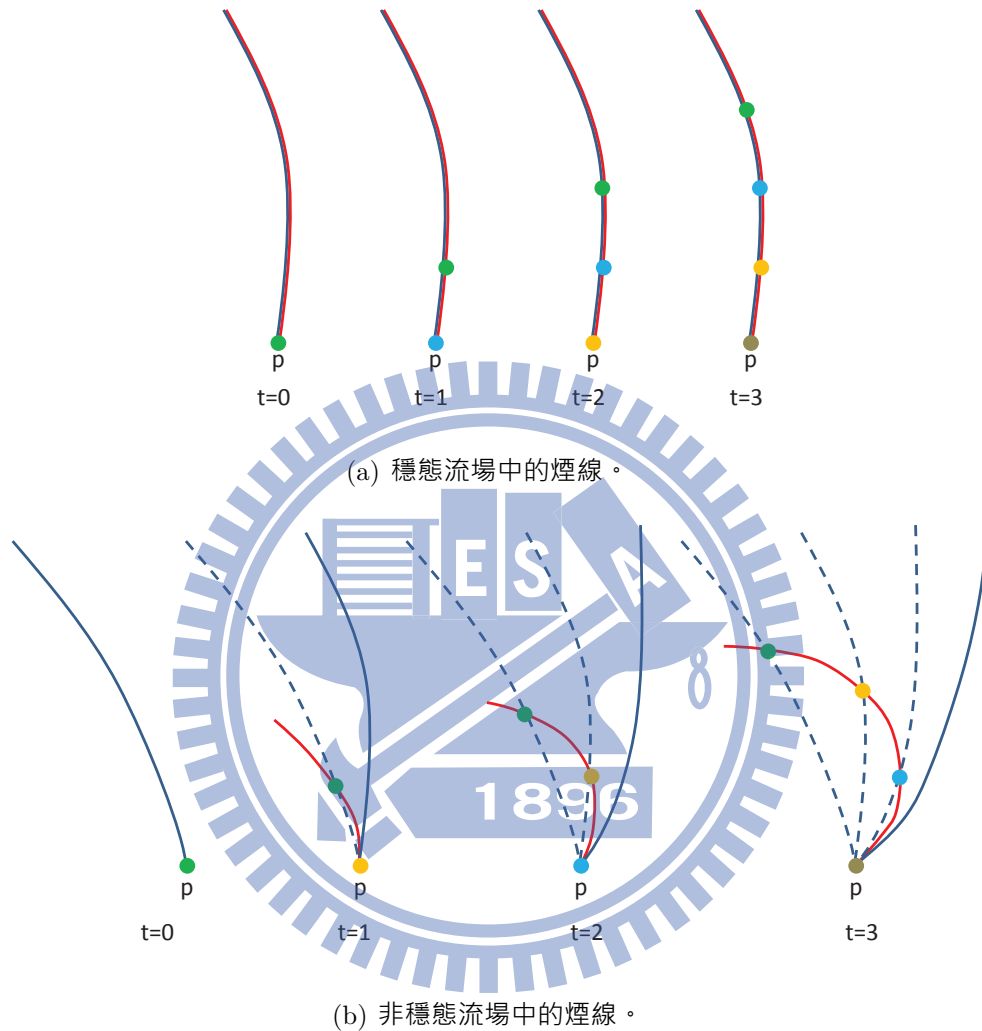


圖 3.3: 煙線示意圖。圖中藍色虛線表示線上該粒子的流動軌跡，藍色實線表示點  $p$  上該粒子的流動軌跡同時也是該時刻通過點  $p$  的徑線。紅色實線表示該時刻通過點  $p$  的煙線。在  $t = n$  時，連接所有從點  $p$  釋放的粒子形成的曲線，即為在  $t = n$  時通過點  $p$  的煙線。在穩態流場 (a) 中，煙線不會變動且與徑線一致。在非穩態的流場 (b) 中，煙線會隨著時間變動。

其中  $\mathbf{x}_\tau$  是一階微分方程式

$$\dot{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(s), s), \mathbf{x}(\tau) = \mathbf{x}_0 \quad (3.5)$$

在  $s = t$  的解。圖3.3為煙線的示意圖，圖中的流場與徑線同圖3.2。紅色實線表示該時刻通過點  $\mathbf{p}$  的煙線。在  $t = n$  時，連接所有從點  $\mathbf{p}$  釋放的粒子形成的曲線，即為在  $t = n$  時通過點  $\mathbf{p}$  的煙線。圖3.3(a)為穩態的流場，煙線不會變動且與徑線（藍色實線）一致。圖3.3(b)為非穩態的流場，煙線會隨著時間變動。

以上三種軌跡線中，流線表示了某一特定時刻的流場狀態，徑線與煙線則顯示了流場隨著時間變化的情況，其中徑線表示了一個粒子的流動軌跡，煙線則表示通過一點所有粒子連接起來的軌跡。而當系統是穩態的時候，流線、徑線與煙線三者的形狀是一樣的。

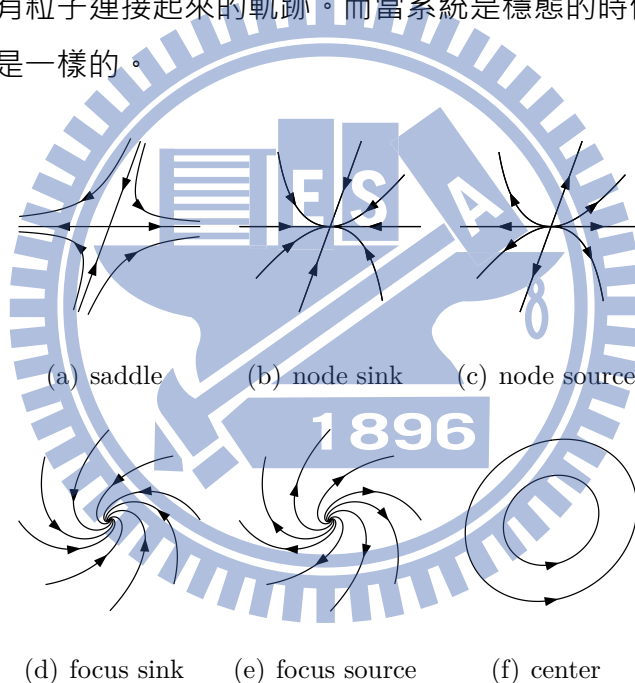


圖 3.4: 臨界點分類。

流場中速度為 0 的獨立點稱為臨界點 (critical point/stationary point)。在二維的流場中可以粗略分成六種臨界點類型，如圖3.4所示。對一臨界點所在的線性系統  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ， $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 。令  $\mathbf{A}$  的兩特徵值為

$$\lambda_2 = a_2 + b_2i,$$

$$\lambda_1 = a_1 + b_1i.$$

6 種臨界點類型與對應的特徵值關係為

$$\text{saddle: } a_1 a_2 < 0, \quad b_1 = b_2 = 0.$$

$$\text{node sink: } a_1 < 0, \quad a_2 < 0, \quad b_1 = b_2 = 0.$$

$$\text{node source: } a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad b_1 = b_2 = 0.$$

$$\text{focus sink: } a_1 < 0, \quad a_2 < 0, \quad b_1 \neq 0, \quad b_2 \neq 0.$$

$$\text{focus source: } a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad b_1 \neq 0, \quad b_2 \neq 0.$$

$$\text{center: } a_1 = a_2 = 0, \quad b_1 \neq 0, \quad b_2 \neq 0.$$

## 3.2 流場可視化方法與分類

流場可視化方法根據表現方式可以大略分成 4 類 [25] [26]。

1. 方向符號 (direction): 以方向的符號來表示流場的流向、速度變化。典型的方式是在畫面中的離散點上放置箭頭表示該點的方向，以箭頭大小或以背景顏色的方式來表示速度。
2. 幾何線條 (geometry-base): 以幾何線條來表示流場的狀態。主要有流線、徑線、煙線。其中徑線、煙線應用在非穩態的流場中，因此在穩態的方法中以流線為主。在流線的流場可視化方法中，隨著流線設置方式 (streamline placement) 的不同，畫面表現的結果也不同。最簡單的方式就是在網格點上設置種子 (seed)，從種子出發往順流與逆流兩個方向積分出流線。這種方法容易產生局部的過大空曠區域或出現局部流線過於密集的狀況。為了改善這個問題，過去發展出了許多將流線設置最佳化的方法，大部分的方法將流線均勻分布在畫面中，例如 Image-Guided Streamline[27]、另外也有將流線密集放在流場變化明顯區域的演算法 [28]。
3. 紋理線條 (texture-base)[26]: 以材質紋理的方式來表現流場的結構。最知名的方法為 Line-Integral Convolution(LIC) [10]，以及許多從 LIC 衍生出的方法 [26]，例如結構介在流線與 LIC 之間的 PLIC[29]，應用在二維非穩態流場中的 UFLIC [30] 等各種方法。除了 LIC 與相關延伸的方法之外，二維穩態還有 Spot Noise[18]，以及非穩態的 IBFV[31]、LEA[32] 等合成方

法。

4. 流場特徵 (feature-base)[25] [23][24]: 又稱為拓樸基準流場可視化方法 (topology-base flow visualization)。相對於前面三種方法，這種方法著重在表現更抽象的結構。以顯現流場中主要拓樸結構，包含臨界點 (critical point)、separatrices(連接臨界點與臨界點的流線)、periodic orbit(流場中自成一個封閉圈的流線) 等為重點，讓人從數學上特徵的角度去了解流場結構。

### 3.3 眼動追蹤及分析

眼睛觀看畫面的過程並不是一個平滑的軌跡，而是以不斷在「停頓」與「快速移動」之間交替的形式進行。眼睛停頓下來注視的地方稱為凝視點 (fixation)，而凝視點與凝視點之間快速移動的過程稱為掃視 (saccade)。眼睛的軌跡就是由一系列不斷交替的凝視點與掃視所組成。而同一個畫面，同一受測者在進行不同視覺工作 (visual tasks) 時，眼睛軌跡 (scanpath) 可能會完全不同 [9](圖 3.5)。所以用來作為評量標準的指標，也可能會隨著不同實驗而不一樣。眼睛的凝視點軌跡可以用來評估眼睛行為的效率，評估的方式一般以凝視點與掃視為主，包含凝視點數量、凝視點平均時間、掃視路徑總長度等 [33] 除了眼睛軌跡的數據之外，也有許多工具可以用來做眼睛軌跡的分析以及比對，例如 AOI(Area of Interesting)、熱區圖等不同的方法。AOI 是將影像切割成不同區域，包含用網格狀切割，或是由分析者自行定義。然後紀錄眼睛軌跡在不同區域之間移動的過程，可以得到一串區域的序列。藉由這個序列可以分析眼睛開始注意到目標的時間，以及在觀看過程看到目標區域多少次，也能經由比對觀看區域順序的方式來比較兩條眼睛軌跡的相似性。熱區圖是以顏色表示強度將眼睛注視的區域表現出來，眼睛注視越久的區域則強度越高。我們可以藉由熱區圖來分析影像容易被注意區域的分佈狀態。

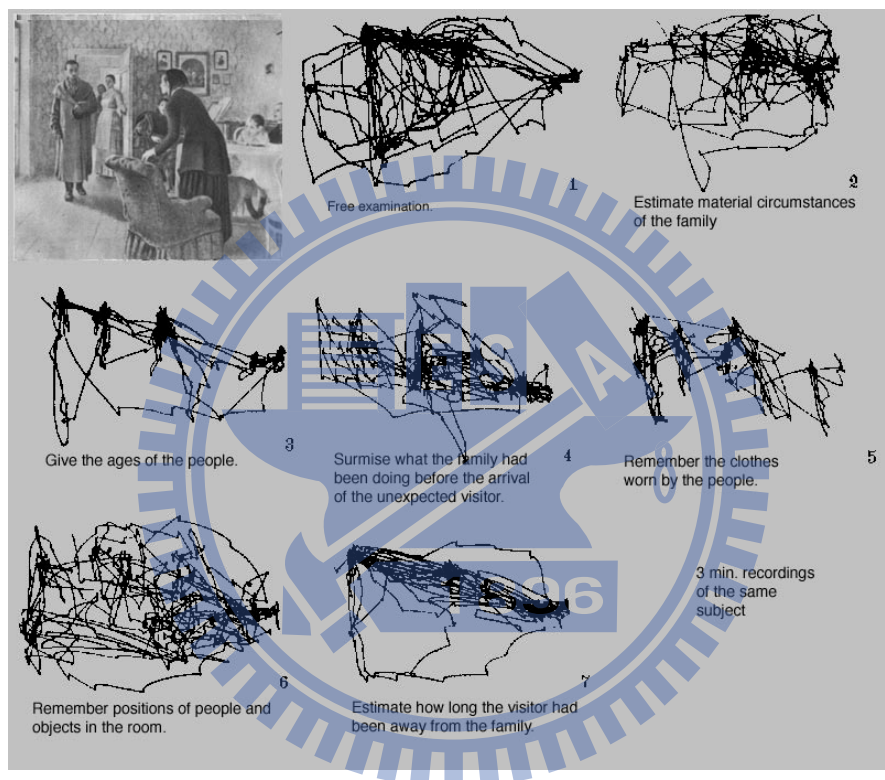


圖 3.5: 同一張圖片在 7 種不同指示之下, 7 種不同的眼睛軌跡。(圖片出自 [9], 引用自維基百科 <http://en.wikipedia.org/wiki/File:YarbusTheVisitor.jpg>)。



# 實驗流場與可視化方法

本章詳述本論文的實驗中流場資料的產生方法，以及流場可視化方法的實作。

## 4.1 流場資料

我們實驗用的流場資料的來源有兩部分。一種是以數學式計算得到的數據，一種是根據物理模擬得到的數據。流場的資料均為穩態的二維流場。在數學式產生的流場模型部份，我們將 Zhang 等人 [34] 的方法做一些調整後進行實作。以下簡述 Zhang 等人的方法：

假設在二維平面上有一臨界點  $\mathbf{p}_0 = [x_0, y_0]^T$  的向量場  $\mathbf{v}$ ，使得二維平面上任一點  $\mathbf{p} = [x, y]^T$  的向量值為

$$\mathbf{v}(\mathbf{p}) = ce^{-d\|\mathbf{p}-\mathbf{p}_0\|^2}\mathbf{M}(\mathbf{p}-\mathbf{p}_0), \quad (4.1)$$

其中  $c$  為一常數， $d$  為一個距離衰退的常數， $\mathbf{M}$  為一  $2 \times 2$  矩陣。臨界點的類型由  $\mathbf{M}$  的特徵值來決定，根據3.1節中對於臨界點類型的分類，當  $\mathbf{M}$  的兩特徵值  $\lambda_1 = a_1 + b_1i$  與  $\lambda_2 = a_2 + b_2i$  為實數的時候 ( $b_1 = b_2 = 0$ )，此臨界點為 saddle( $a_1a_2 < 0$ )、node sink( $a_1, a_2 < 0$ ) 或 node source( $a_1, a_2 > 0$ )；當  $\lambda_1$  與  $\lambda_2$  為複數時 ( $b_1 \neq 0, b_2 \neq 0$ )，此臨界點為 focus sink( $a_1, a_2 < 0$ )、focus

source( $a_1, a_2 > 0$ ) 或 center( $a_1 = a_2 = 0$ )。因此可以經由控制  $\mathbf{M}$  中的數值來控制點  $\mathbf{p}_0$  的臨界點類型。

當二維向量場同時存在多個臨界點  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$  時，點  $\mathbf{p}$  的向量值為多個有單臨界點的流場疊合起來

$$\mathbf{v}(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n c_i e^{-d_i \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_i\|^2} \mathbf{M}_i (\mathbf{p} - \mathbf{p}_i) \circ \quad (4.2)$$

我們採用這種將多個單一臨界點向量場疊合起來的方式來生成流場。

在4.1式中， $\mathbf{M}$  的臨界點類型控制，若不需要更進一步設定特徵值與特徵向量來調整臨界點結構的時候，可以直接給定  $\mathbf{M}$  矩陣內各元素的數值，例如

$$k \neq 0 \cdot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix} \text{ 時，} \mathbf{p} \text{ 為一個 saddle 臨界點；}$$

$$k > 0 \cdot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix} \text{ 時，} \mathbf{p} \text{ 為一個 node sink 界點；}$$

$$k > 0 \cdot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \text{ 時，} \mathbf{p} \text{ 為一個 node source 臨界點；}$$

$$k_1 > 0 \cdot k_2 \neq 0 \cdot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ -k_2 & k_1 \end{pmatrix} \text{ 時，} \mathbf{p} \text{ 為一個 focus sink 臨界點；}$$

$$k_1 > 0 \cdot k_2 \neq 0 \cdot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} -k_1 & k_2 \\ -k_2 & -k_1 \end{pmatrix} \text{ 時，} \mathbf{p} \text{ 為一個 focus source 臨界點；}$$

$$k > 0 \cdot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix} \text{ 時，} \mathbf{p} \text{ 為一個 clockwise center 臨界點；}$$

$$k > 0 \cdot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix} \text{ 時，} \mathbf{p} \text{ 為一個 counter-clockwise center 臨界點。}$$

而若我們已知特徵值  $\lambda_1, \lambda_2$  與特徵向量  $u_1, u_2$ ，要由特徵值與特徵向量計算得

$$\text{到 } \mathbf{M} \text{，令 } \mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \text{，} u_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \text{，} u_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{，則}$$

$$\begin{cases} (\mathbf{M} - \lambda_1 \mathbf{I})u_1 = 0 \\ (\mathbf{M} - \lambda_2 \mathbf{I})u_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} m_{11} - \lambda_1 & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} m_{11} - \lambda_2 & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (m_{11} - \lambda_1)x_1 + m_{12}y_1 = 0 \\ m_{21}x_1 + (m_{22} - \lambda_1)y_1 = 0 \\ (m_{11} - \lambda_2)x_2 + m_{12}y_2 = 0 \\ m_{21}x_2 + (m_{22} - \lambda_2)y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_{11}x_1 + m_{12}y_1 = \lambda_1 x_1 \\ m_{21}x_1 + m_{22}y_1 = \lambda_1 y_1 \\ m_{11}x_2 + m_{12}y_2 = \lambda_2 x_2 \\ m_{21}x_2 + m_{22}y_2 = \lambda_2 y_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m_{21} \\ m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_1 y_1 \\ \lambda_2 x_2 \\ \lambda_2 y_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m_{21} \\ m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_1 y_1 \\ \lambda_2 x_2 \\ \lambda_2 y_2 \end{pmatrix}$$

即可求得  $M$ 。

我們在實作的時候希望可以比較直觀的調整特徵值與特徵向量，而當特徵值與特徵向量為實數的時候，特徵向量為 saddle、node sink 與 node source 這三種臨界點兩組直線方向的向量，特徵值為這兩個向量的強度 (圖4.1, 4.2) 但是當  $M$  的特徵值為複數時，我們無法以直接設定二維空間中向量與向量強度的方式進行參數設定調整，所以我們不直接用特徵值與特徵向量來計算 focus sink、focus source 或 center 這三種臨界點的  $M$ 。對於 focus sink 與 focus source 的生成，根據亥姆霍茲定理 (Helmholtz's theorem) 可以將向量場拆解成一個保守向

量場 (irrotational vector field) 和一個螺線向量場 (solenoidal vector field) 的和，在大部分狀況下，一個 focus sink 可以拆成一個 node sink 與 center，一個 focus source 可以拆成一個 node source 與 center，因此我們反過來，以 node sink + center = focus sink 與 node source + center = focus source (圖4.3) 的方式來生成 focus sink 與 focus source 這兩種流場，而不設置時 node sink 與 node source 時就是一個 center 臨界點。

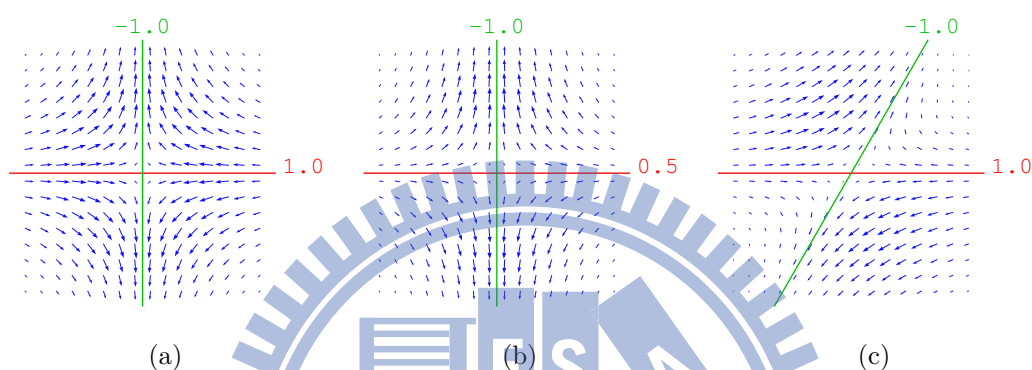


圖 4.1: 不同特徵值與特徵向量的範例。紅線與綠線分別為兩特徵向量的方向，數字表示對應的特徵值。(a) 與 (b) 特徵值不同，其他參數都一樣。(a) 與 (c) 特徵向量不同，其他參數都一樣。

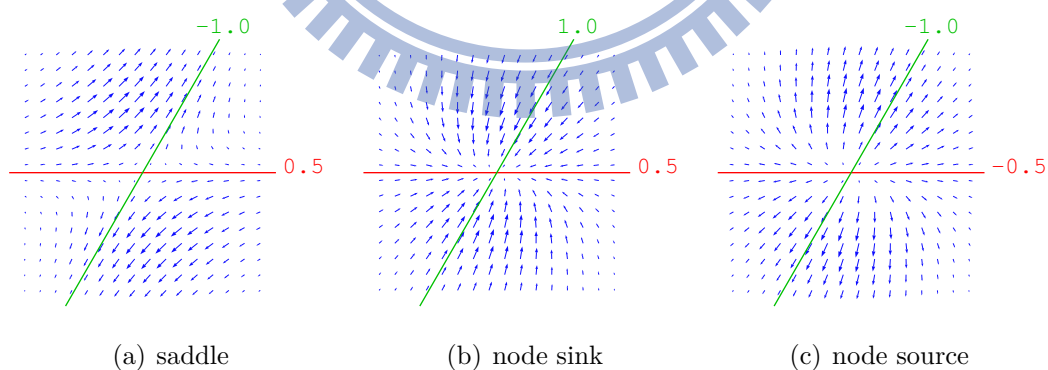
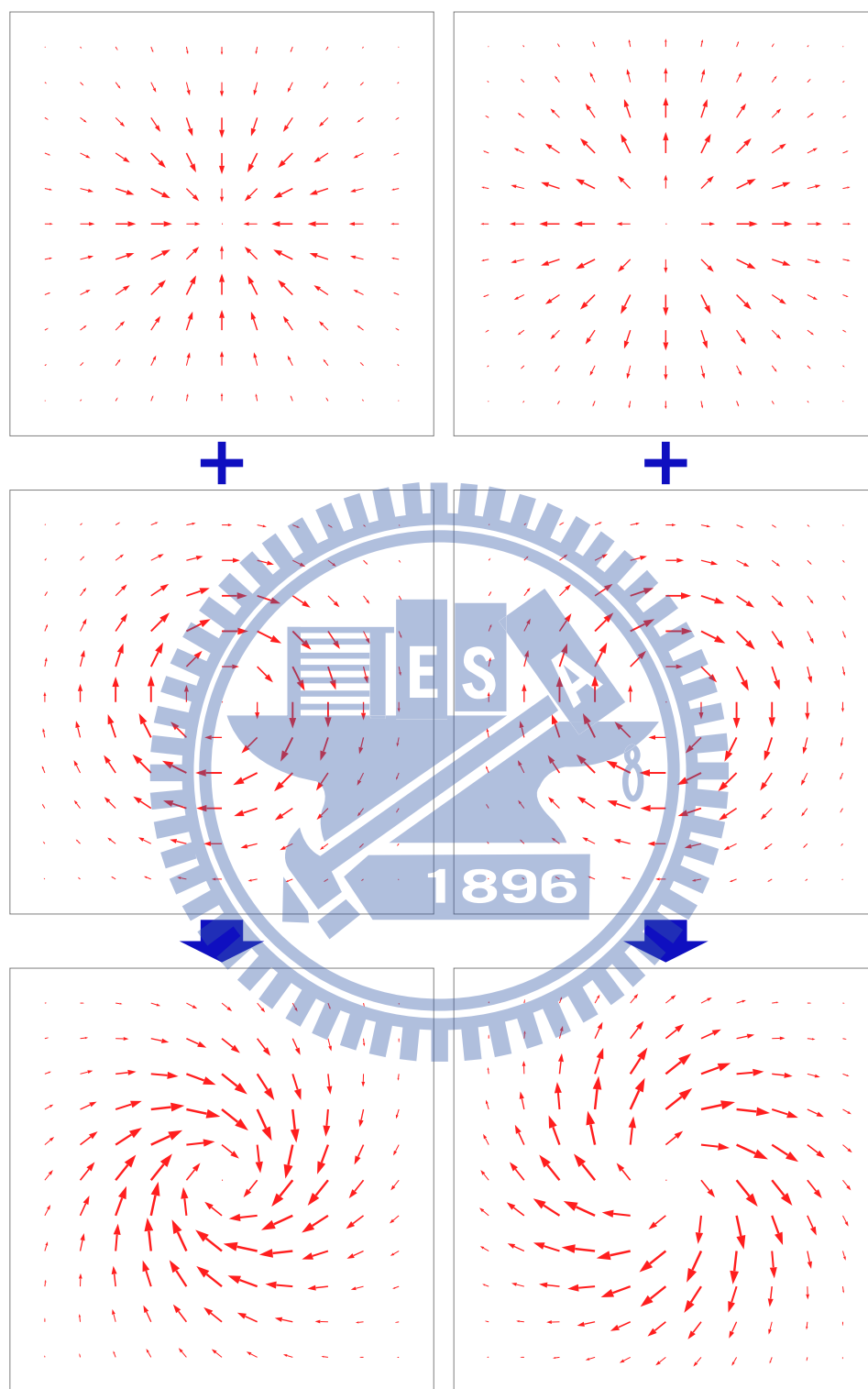


圖 4.2: 特徵向量相同時，特徵值正負號不同時臨界點也不同。紅線與綠線分別為兩特徵向量的方向，數字表示對應的特徵值。

在實作上，我們定義「控制點」來控制臨界點的生成，每一個控制點由兩個



(a) node sink + center = focus sink ◦ (b) node source + center = focus source ◦

圖 4.3: focus sink 與 focus source 臨界點的合成。

相同位置的臨界點組成，對於一個控制點  $\mathbf{p}_i = [x_i, y_i]^T$  生成的二維向量場，二維平面上的任一點  $\mathbf{p} = [x, y]^T$  的向量為

$$\mathbf{v}(\mathbf{p}) = c_{i_1} e^{-d_{i_1} \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_i\|^2} \mathbf{M}_{i_1} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_i) + c_{i_2} e^{-d_{i_2} \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_i\|^2} \mathbf{M}_{i_2} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_i), \quad (4.3)$$

其中  $\mathbf{M}_{i_1}$  為計算實數特徵值與特徵向量得到的矩陣，而  $\mathbf{M}_{i_2}$  的部分，因為我們實驗中不會進行 center 臨界點的辨識，因此對 center 以比較簡化的方式來設置，直接定  $\mathbf{M}_{i_2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  或  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 。當  $c_{i_1} = 0$  且  $c_{i_2} \neq 0$  時，

$$\mathbf{v}(\mathbf{p}) = c_{i_2} e^{-d_{i_2} \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_i\|^2} \mathbf{M}_{i_2} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_i),$$

此時  $\mathbf{p}_i$  為一個 center 臨界點且此臨界點為正圓形。而當  $c_{i_1} \neq 0$  且  $c_{i_2} = 0$  時，

$$\mathbf{v}(\mathbf{p}) = c_{i_1} e^{-d_{i_1} \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_i\|^2} \mathbf{M}_{i_1} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_i).$$

此時  $\mathbf{p}_i$  為一個 saddle 或 node sink 或 node source 臨界點。當  $c_{i_1} \neq 0$  且  $c_{i_2} \neq 0$  時，可以合成出 focus sink (node sink + center) 與 focus source (node source + center) 這兩種臨界點。以這個方式，我們就能在控制點上生成出 6 種類型的臨界點。接著再以設置多個控制點，即疊合多個臨界點流場的方式來產生實驗用的流場資料。

根據不同的實驗內容，我們需要臨界點隨機放置以及固定臨界點位置這兩種不同類型的流場，因此我們以上述的數學模型生成了 2 組資料庫，再從資料庫中找合適的流場來進行實驗。我們將數學模型流場的大小設定為長寬各 20 單位 (每距離單位  $800 \div 20 = 40$  畫素)。第一組流場，我們在流場範圍長與寬中間 70% 的區域內隨機放置 3 ~ 7 個隨機類型的控制點，如圖 4.4。控制點的參數部分，先以隨機的方式決定  $c_{i_2} = 0$  或  $c_{i_2} \neq 0$ ，若  $c_{i_2} = 0$  則採用表 4.1 的第一組參數，若  $c_{i_2} \neq 0$  則用第二組參數。表中的  $r(a, b)$  表示以隨機的方式取一個  $a \sim b$  之間的值，加  $\pm$  號表示該數隨機乘以 1 或  $-1$ 。兩特徵向量與 x 軸的夾角  $\theta_1$  與  $\theta_2$  分別為  $\theta_1 = r(0, 2\pi)$ ， $\theta_2 = \theta_1 + \pm r(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ ，即兩特徵向量夾角在 60 到 120 之間。流場速度的部分，我們儘量將所有的流場速度控制在相近的狀態。將所有流場最高速統一設為 400 畫素/秒，並且透過非線性轉換讓圖片區域內 90% 以上區域的流速大於最高速的 40%。

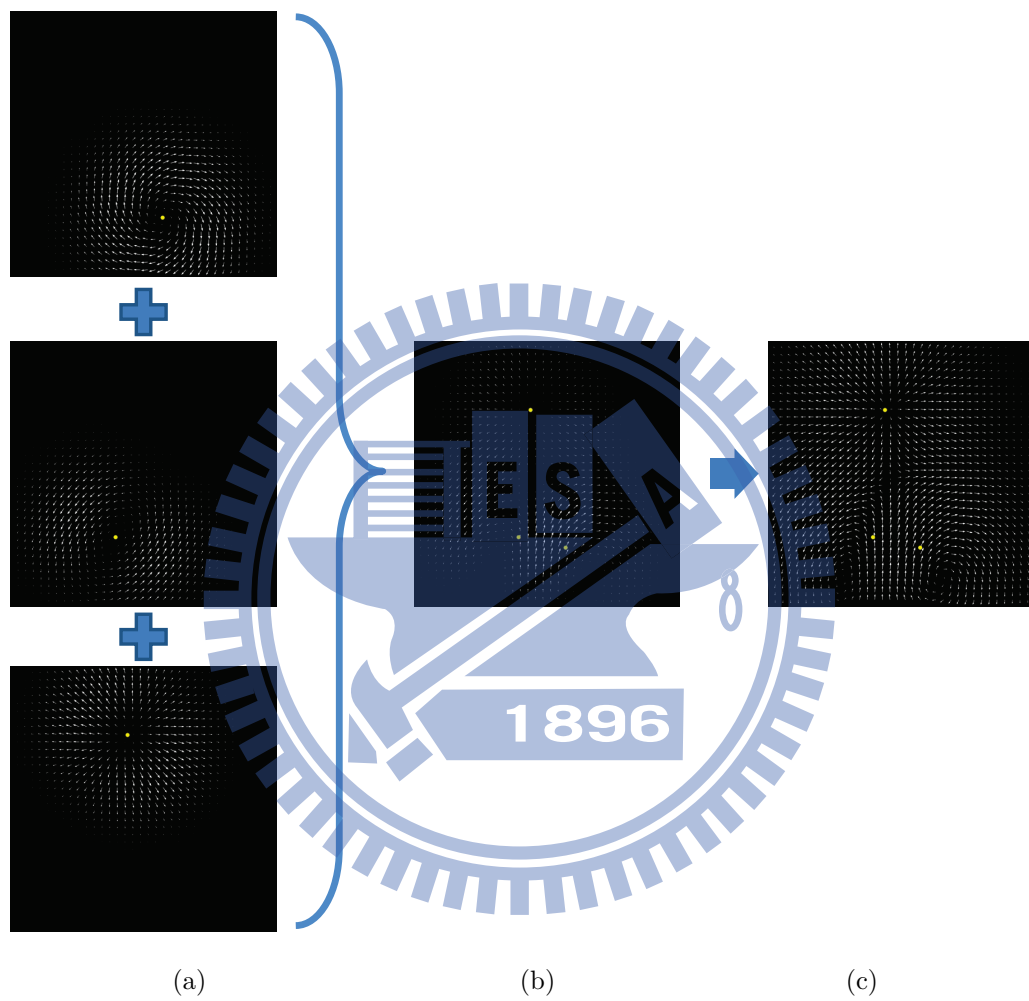


圖 4.4: 第一組流場資料合成：在流場空間中放置數個隨機的控制點，黃色點代表控制點位置。(a) 為每個單一控制點的流場結構，(b) 為所有控制點加起來之後的流場結構，(c) 為經過調整流速分布的速度調整後的流場結構。



表 4.1: 第一組流場的設定參數。

$c_{i_1}$	第一組	第二組
$c_{i_1}$	$r(0.8, 1.2)$	$r(0.8, 1.2)$
$d_{i_1}$	$r(0.036, 0.044)$	$r(0.036, 0.044)$
$c_{i_2}$	0	$r(1.2, 1.8)$
$d_{i_2}$		$r(0.036, 0.044)$
$\mathbf{M}_{i_1}$ 的 $\lambda_1$	$\pm r(0.8, 1.2)$	$\pm r(0.8, 1.2)$
$\mathbf{M}_{i_1}$ 的 $\lambda_2$	$\pm r(0.8, 1.2)$	$\pm r(0.8, 1.2)$

第二組流場我們要製造以畫面正中央為中心，以正五邊形的方式，在距離原點 200 畫素的地方放置 5 種類型臨界點的控制點各 1 個的流場 (如圖4.5)。在設定上，我們定流場的長寬分別為 20 單位，五個臨界點參數分別為

表 4.2: 第二組流場的設定參數。

	saddle	node sink	node source	focus sink	focus source
$c_{i_1}$	$r(0.8, 1.2)$	$r(0.8, 1.2)$	$r(0.8, 1.2)$	$r(0.3, 0.4)$	$r(0.3, 0.4)$
$d_{i_1}$	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
$c_{i_2}$	0	0	0	$r(0.6, 0.8)$	$r(0.6, 0.8)$
$d_{i_2}$				0.2	0.2
$\mathbf{M}_{i_1}$ 的 $\lambda_1$	$r(0.8, 1.2)$	$r(0.8, 1.2)$	$r(-1.2, -0.8)$	$r(0.8, 1.2)$	$r(-1.2, -0.8)$
$\mathbf{M}_{i_1}$ 的 $\lambda_2$	$r(-1.2, -0.8)$	$r(0.8, 1.2)$	$r(-1.2, -0.8)$	$r(0.8, 1.2)$	$r(-1.2, -0.8)$

$\mathbf{M}_{i_1}$  的兩特徵向量與 x 軸的夾角  $\theta_1$  與  $\theta_2$  分別為  $\theta_1 = r(0, 2\pi)$ 、 $\theta_2 = \theta_1 + \pm r(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ 。相對於第一組流場，因為這組流場中我們要固定臨界點位置，因此在設定控制點參數的時候，距離衰退常數  $d_{i_1}$  與  $d_{i_2}$  設定的較第一組流場的距離衰退常數大，這樣控制點影響的範圍會小於任兩控制點的距離，用這種方法來確保五個臨界點都在要求的位置上而沒有被其他控制點產生的流場影響而造成臨界點的位置移動。最後再調整流速，將流場最高速設為 10 單位/秒 (400 畫素/秒)，並且讓圖片區域內 80% 以上區域的流速大於最高速的 10%。

在物理模擬的流場資料部分，我們應用流體力學輔助軟體 FLUENT(<http://>



圖 4.5: 第二組流場資料合成：以正五邊形的方式，在距離原點 200 畫素的地方放置 5 種類型臨界點的控制點各 1 個，黃色點代表控制點位置。(a) 為速度轉換前的流場結構，(b) 為經過調整流速分布的的速度調整後的流場結構。

www.fluent.com/) 作為計算平台，在紊流及不可壓縮流模式，解二維與三維暫態 Navier-Stokes equation，利用有限體積法以及 SIMPLE 演算法計算暫態流場，並利用 VOF 演算法 [35] 來進行多相流部分的計算，物理變數定義於每個控制容積中心做積分而求得。在模擬條件設置上，流場的模型尺寸會設定得比最後輸出流場的尺寸大，透過設定不同的流體流入與流出時的速度以及方向來達成中央產生不同的流場狀況 (不同特徵點)，在部分的例子中，會在輸出的區域外加設障礙物使得流場狀況更加混亂。在流體的設定上，我們將流場假設為：流場為不可壓縮流，流體帶有黏性，流體性質不隨溫度變化而改變，流場狀況為紊流。其中，流體設定為水 (密度為  $1000\text{kg}/\text{m}^3$ ，黏滯係數為  $0.001\text{ Pa}\cdot\text{s}$ )。最後我們將模擬計算出來的流場的流速做線性轉換，將流場中的最高速度的值定 400 畫素/秒。

## 4.2 流場可視化方法實作

我們一共選了 5 種代表性的流場可視化方法來進行實驗：Hedgehog Plot (HP)，Illustrative streamlines (IS) [28]，Image-guided streamlines (IGS) [27]，Line-integral convolution (LIC) [10]，Unsteady flow LIC (UFLIC) [30]。每種方法的範例如圖 4.7。這 5 種方法裡面，包含了方向符號 1 種、幾何線條 2 種與紋理材質 2 種。其中幾何線條方法的 2 種裡面，1 種是將線條均勻分布在畫面中的方法 (IGS)，另 1 種是以強調畫面中變化劇烈地方為主的方法 (IS)。在紋理材質的部分，我們選擇了最具代表性的 LIC，同時嘗試將動畫方式表現的方法加入比較，因此選擇了 UFLIC。前面 4 種方法我們生成  $800 \times 800$  大小的圖片。最後 1 種，我們以  $800 \times 800$ ，30fps 的 avi 影片檔來播放。為了排除色彩資訊造成的影響，我們所有的圖片都採用灰階的圖片。各種流場可視化方法的參數設定及詳細細節說明如後。

### 4.2.1 Hedgehog Plot(HP)

這是最典型的流場可視化方法之一。在流場中的指定的點放置箭頭 (一般是放在正方形的網格點上)，箭頭方向為該點的向量方向，箭頭大小或長度表示該



圖 4.6: 以物理模擬得到的四個流場資料。

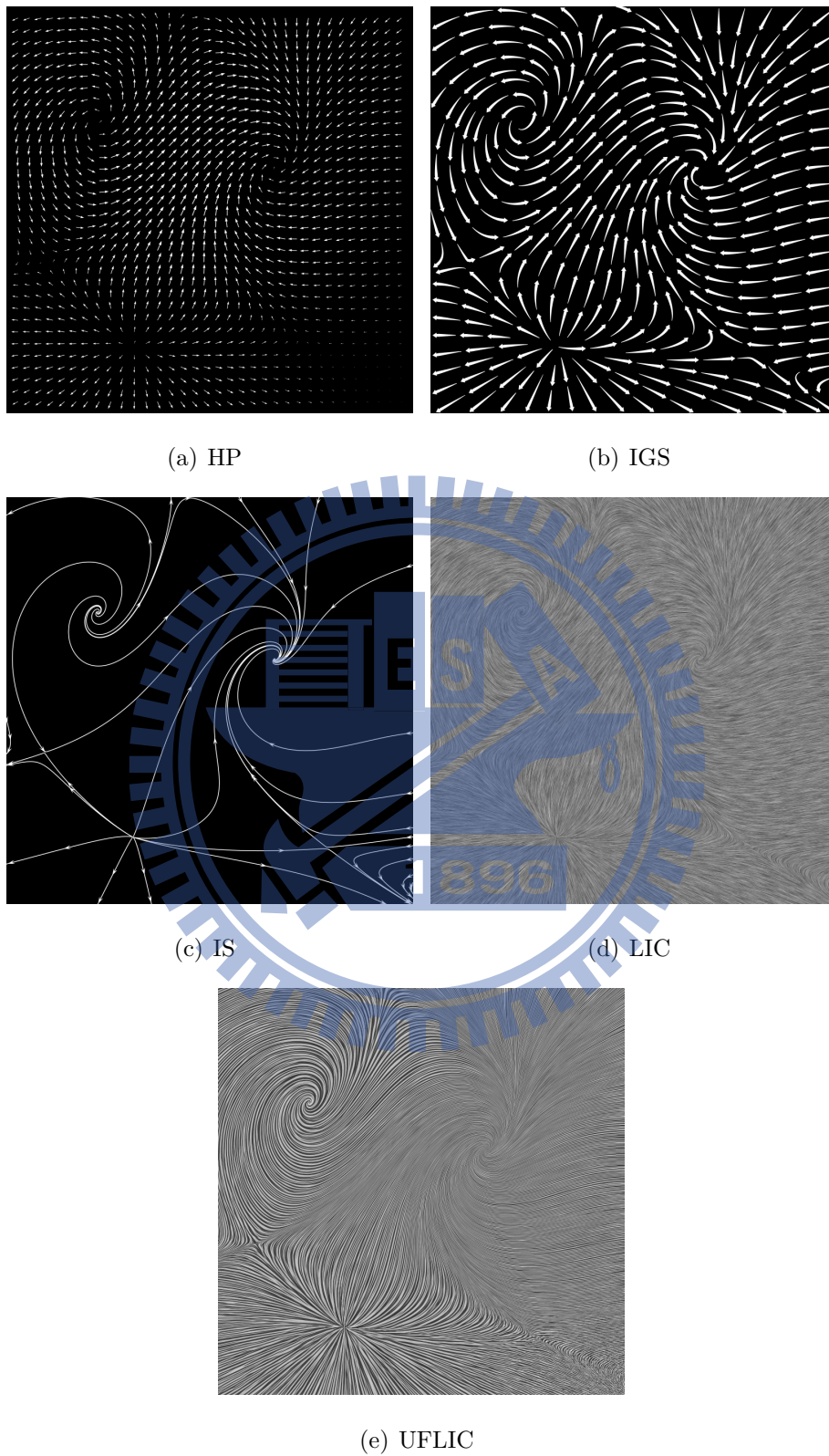


圖 4.7: 實驗所使用的 5 種流場可視化方法範例。UFLIC 為動畫中一個影格 (frame)。

點的向量長度。我們在實作的時候將畫面等分成  $n \times n$  個正方形格子，然後將箭頭的符號放在邊線以外的  $(n - 1) \times (n - 1)$  個網格點上。

在這種方法中，箭頭的位置與大小對於流場狀態的表現影響很大。過於稀疏的箭頭分布會忽略掉太多的流向的資訊，而過小的箭頭則會讓人不容易分辨流向。在嘗試過不同的分布密度之後，我們覺得  $n$  約在 30 ~ 40 之間最合適， $n$  小於 30 的話箭頭分布會太稀疏， $n$  超過 40 的話箭頭會太小，因此最後設定  $n = 35$  (圖4.8)。在箭頭長度的部分，我們儘可能將箭頭放大，同時要避免重疊在一起，因此將箭頭長度的上限定為網格之間距離的 0.95 倍，即  $800 \div 35 \times 0.95 = 21.714$  畫素長。用這個長度表示流場中的最高流速，所有箭頭的大小則依放置點的流速與最高流速的比例做等比例的縮小。

### 4.2.2 Image-guided Streamlines(IGS)

Image-guided Streamlines[27] 是以將流線均勻地呈現在畫面中的一種流場可視化方法。我們以論文作者公布的程式碼來生成實驗用的影像。該程式以一個 optimize separation(opt) 參數來控制流線設置最佳化之後的分布密度。程式容許的 opt 範圍在 0.01 到 0.04 之間，opt 越大則分布越稀疏，越小則分布越密集，如圖4.9。我們將 opt 設在參數範圍正中間的 0.02。

程式中提供流線上繪製箭頭的形式有 5 種，如圖4.10。在選擇箭頭類型時，因為該篇論文 [27] 中唯一一張有箭頭形式的示範圖 (圖 7) 選擇了“fancy”的形式；因此我們最後決定使用“fancy”作為箭頭的形式。其餘設定使用程式碼的預設參數。

### 4.2.3 Illustrative Streamlines(IS)

Illustrative Streamlines[28] 是一種以儘可能將流場變化劇烈處表現出來的流線設置方法。在該方法中，流場變化越劇烈的區域以越多的流線來表示，同時該方法不會切斷流線而是讓流線儘可能延長，因此該方法流線的端點只有臨界點與流場的邊界。我們根據該論文 [28] 的內容實作 Illustrative Streamlines。

我們首先定義一稱為局部相異度 (local dissimilarity) 的函數，用該函數來



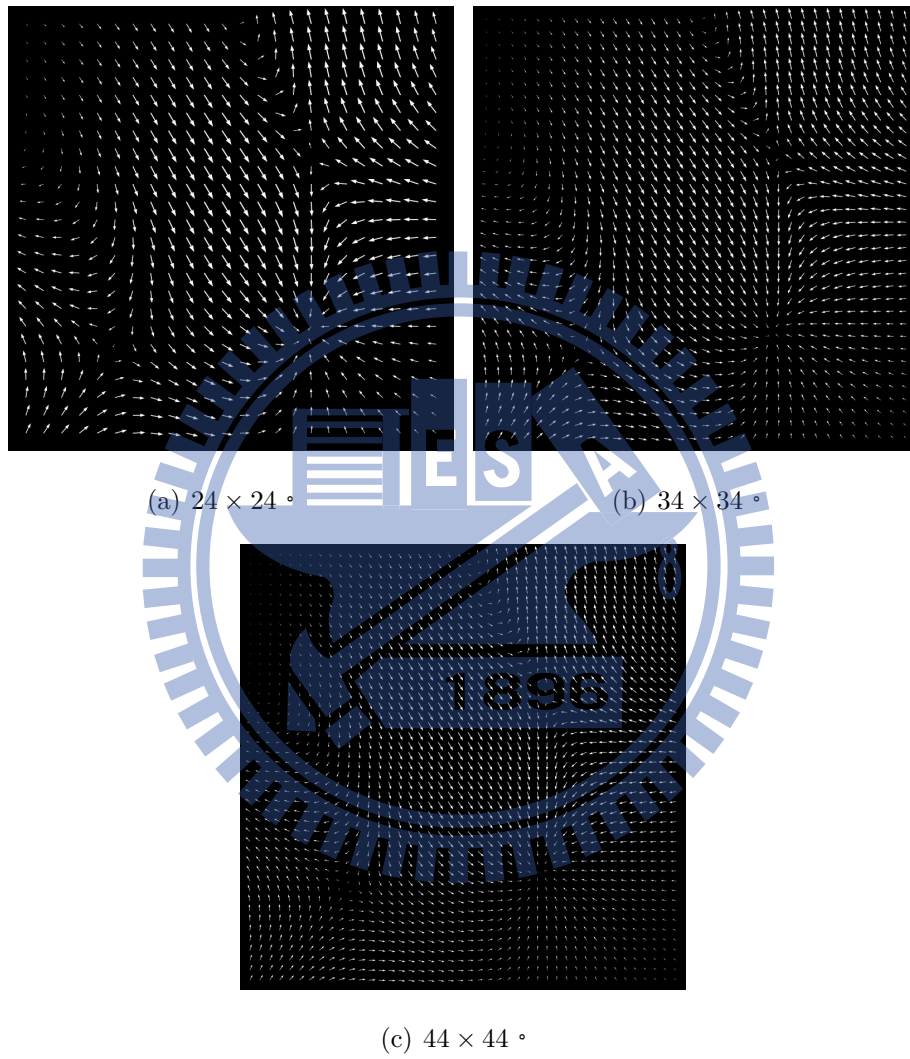


圖 4.8: Hedgehog Plot 不同密度參數的範例。



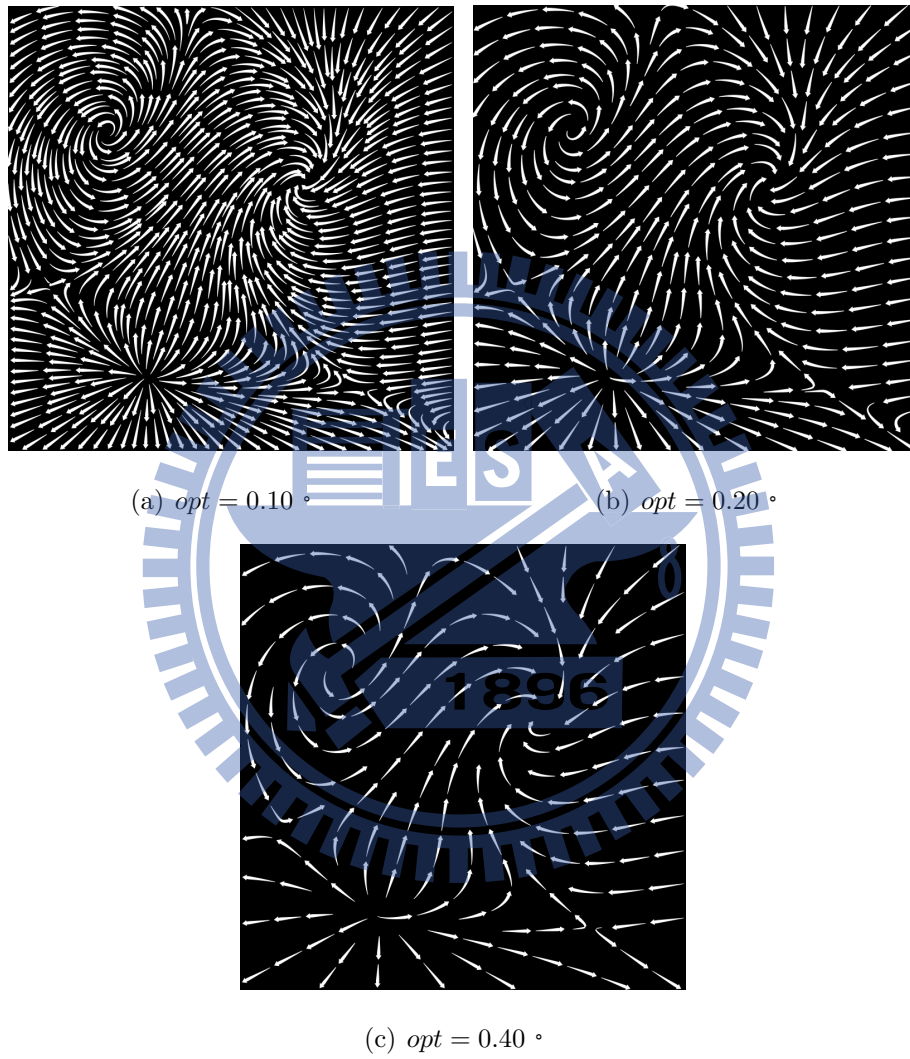


圖 4.9: Image-guided Streamline 程式不同密度參數的範例。

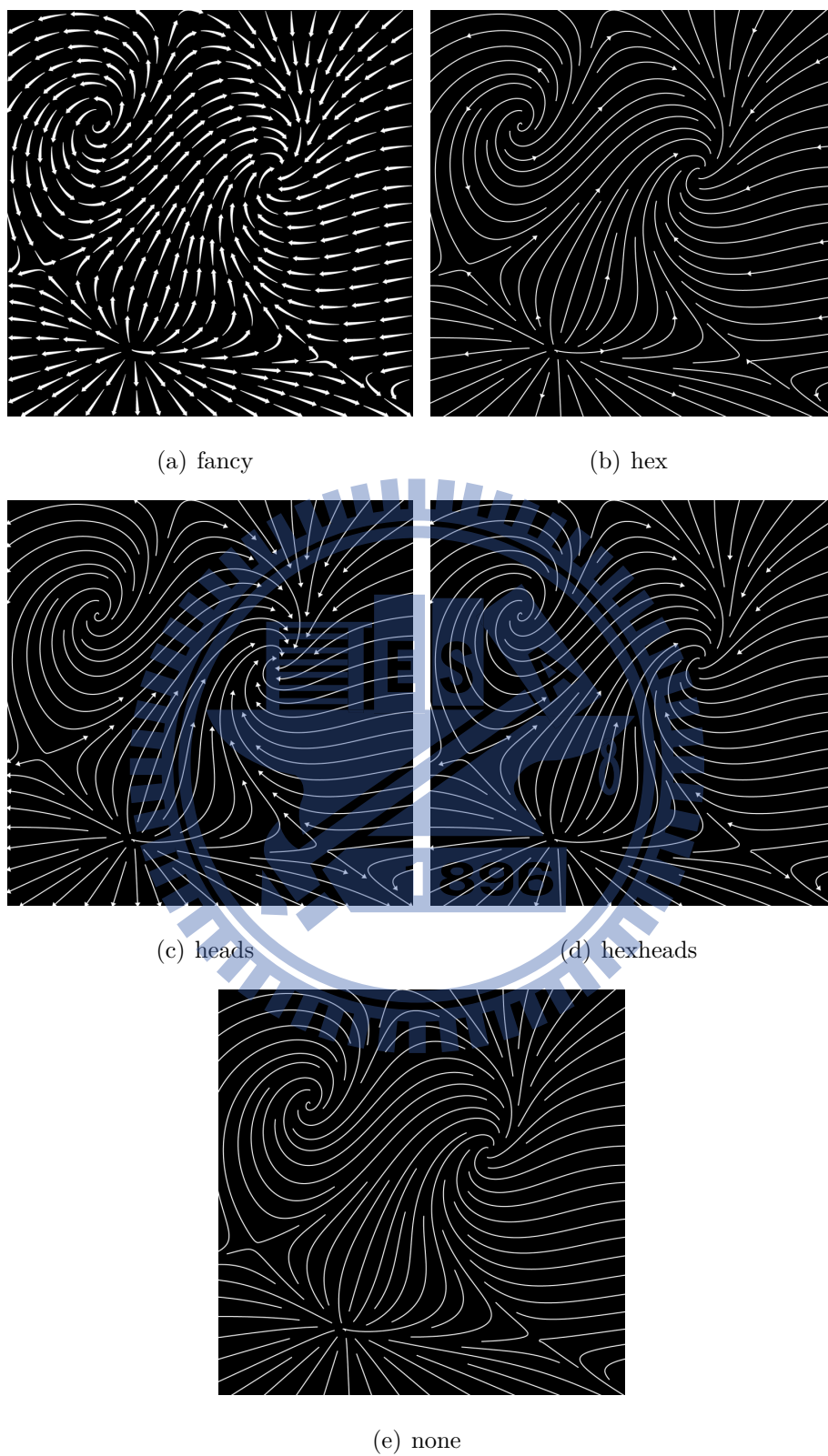


圖 4.10: Image-guided Streamline 程式內建的 5 種箭頭模式。

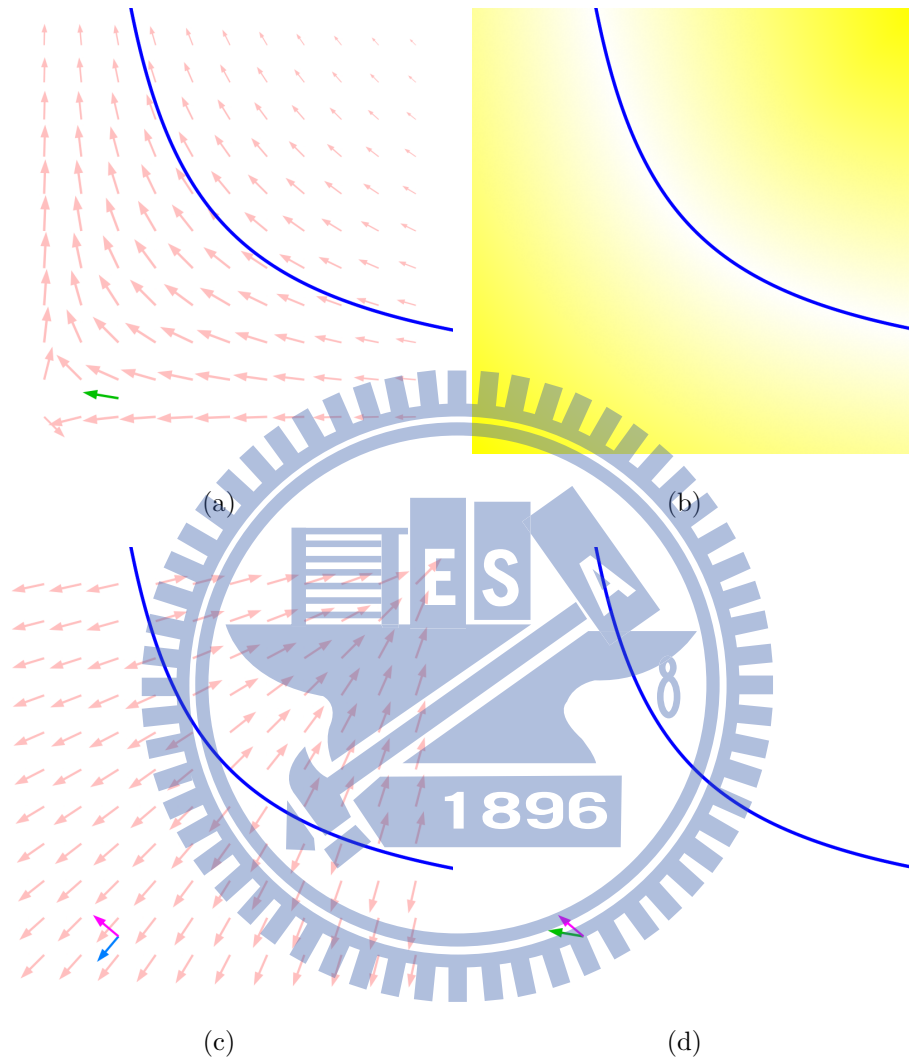


圖 4.11: Illustrative Streamlines 方法中局部相異度的計算方式。(a) 為一流場中的一流線以及流場中某一點的向量 (綠色箭頭)。(b) 為二維平面對流線的距離場，顏色越深表示距離流線越遠。(c) 為由距離場計算得出的梯度場，(a) 中該點的梯度場向量為圖中藍色箭頭，該向量轉 90 度後為該點的漸進向量 (桃紅色箭頭)。(d) 為該點向量 (綠色箭頭) 與漸進向量 (桃紅色箭頭) 的比較。

建立流場中一點與附近流線的關係，方式如下：對一流線  $L$  定義一個距離場 (distance field)，該距離場中任一點  $\mathbf{q}$  的值為點  $\mathbf{q}$  與  $L$  的距離  $d(\mathbf{q}, L)$ ，如圖4.11(b)。之後再利用中心差分算子 (central difference operator) 計算距離場的梯度場 (gradient field)。對梯度場裡的點  $\mathbf{p}$ ，將點  $\mathbf{p}$  上的向量轉 90 度，並定義此向量為點  $\mathbf{p}$  的漸進向量 (approximate vector)，如圖4.11(c)。最後，我們定義點  $\mathbf{p}$  對  $L$  的局部相異度  $D_l(\mathbf{p})$  為

$$D_l(\mathbf{p}) = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\langle \mathbf{v}'(\mathbf{p}), \mathbf{v}(\mathbf{p}) \rangle}{\|\mathbf{v}'(\mathbf{p})\| \|\mathbf{v}(\mathbf{p})\|} + 1 \right) \circ \quad (4.4)$$

其中  $\mathbf{v}'(\mathbf{p})$  是點  $\mathbf{p}$  上面的漸進向量。 $D_l(\mathbf{p})$  的範圍為  $0 \sim 1$ 。因為畫面中會不只有一條流線，故同時比較與多條流線的關係時：

$$D_l(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^M (w_k D_{lk}(\mathbf{p})) \circ \quad (4.5)$$

其中  $D_{lk}$  為點  $\mathbf{p}$  與第  $k$  條流線的局部相異度， $w_k$  為根據點  $\mathbf{p}$  與第  $k$  條流線距離  $d(\mathbf{p}, L_k)$  得到權重值。 $D_l(\mathbf{p})$  越高，代表該點向量與該流線的相異性越高。在該文的實作中  $M = 2$ ，即計算與該點最接近的兩條流線。

在計算  $D_l(\mathbf{p})$  之後，接著要計算全域相異度 (global dissimilarity)。對於點  $\mathbf{p}$ ，全域相異度  $D_g(\mathbf{p})$  為通過點  $\mathbf{p}$  流線上每一點的局部相異度的加權總合，公式為

$$D_g(\mathbf{p}) = \sum_{n=1}^L (u_n D_l(x_n, y_n)) \circ \quad (4.6)$$

其中  $(x_n, y_n)$  為流線上的第  $n$  點。在該文的方法中， $u_n$  均相等，即  $u_n = 1/L$ 。點  $\mathbf{p}$  的全域相異度越高，代表通過點  $\mathbf{p}$  的流線與附近流線的相異性越高。

在 Illustrative Streamlines 的演算法中以兩個參數控制流線的分布：局部相異度門檻 (local dissimilarity threshold)  $T_l$  與全域相異度門檻 (global dissimilarity threshold)  $T_g$ 。整體的演算的流程如下：

1. 計算所有候選種子的局部相異度  $D_l$ ，並進行排序。
2. 選取局部相異度最大的種子點  $\mathbf{p}_s$ 。若  $D_l(\mathbf{p}_s) > T_l$ ，則從  $\mathbf{p}_s$  往順逆流兩個方向積分出流線，並計算  $D_g(\mathbf{p}_s)$ 。若小於  $T_l$ ，則演算的迴圈結束。

3. 若  $D_g(\mathbf{p}_s) > T_g$ ，則接受該種子，將該流線加入輸出中。回到步驟一重新計算所有候選種子的局部相異度。若  $D_g(\mathbf{p}_s) \leq T_g$ ，則將該種子從候選種子之中排除，回到步驟二。

在候選種子的設置上面，該文預設的方式是將候選種子擺放於網格點上面。候選種子越多效果越好，但也越耗時。考量到效果與時間的平衡後，我們將畫面分成  $201 \times 201$  個候選種子。在局部相異度與全域相異度的設定上，我們經過比較畫面效果之後（參考圖4.12）決定將  $T_l$  設為  $0.2$ ， $T_g$  設為  $0.05$ 。在流線的箭頭設置方面，我們以該文 [28] 的圖 9 為範本，在流線靠畫面邊緣處以及流線的長度一半的位置畫上箭頭。

#### 4.2.4 Line-Integral Convolution(LIC)

線積分迴旋法 (LIC)[10] 的方法概述如圖4.13。輸入一個向量場與亂數函數，此函數通常是使用一張灰階雜訊材質影像。對於圖中的每一個點，以一個低通濾波器 (low-pass filter) 對從該畫素中心沿著順逆流兩個方向延伸的流線路徑經過的畫素做旋積 (convolution)。我們在實作時參考 Laidlaw 等人 [1] 實驗中的設定，以一個寬度為 20 畫素的盒型旋積核 (box-shape convolution kernel) 對一張隨機的雜訊圖做旋積。

#### 4.2.5 Unsteady Flow LIC(UFLIC)

與 LIC 中每一點的顏色是沿著流線擷取顏色資訊的方式相反，UFLIC(Unsteady Flow LIC)[30] 的概念則是將每一點顏色資訊往下游的方向釋放擴散出去。在每個時間步驟 (time step) 時，輸入的影像的每個畫素都會釋放一個帶有該點顏色的粒子往下游方向流動。該粒子會記錄存在時間並有設定的生命週期，隨著粒子放出後的存在的時間的增加，粒子顏色資訊的權重也越低，到了生命週期結束的時候權重也降到 0。在該時間步驟裡面，對於每個畫素，將流過該畫素粒子的顏色資訊與權重紀錄下來做加權平均，就是該畫素在該時間步驟的輸出顏色。因為將顏色往下游擴散的過程是一種模糊化的過程，如果未做處理而直接進行下個影格計算的話，後面影像會越來越模糊，因此在進行下個影格的計算之前，

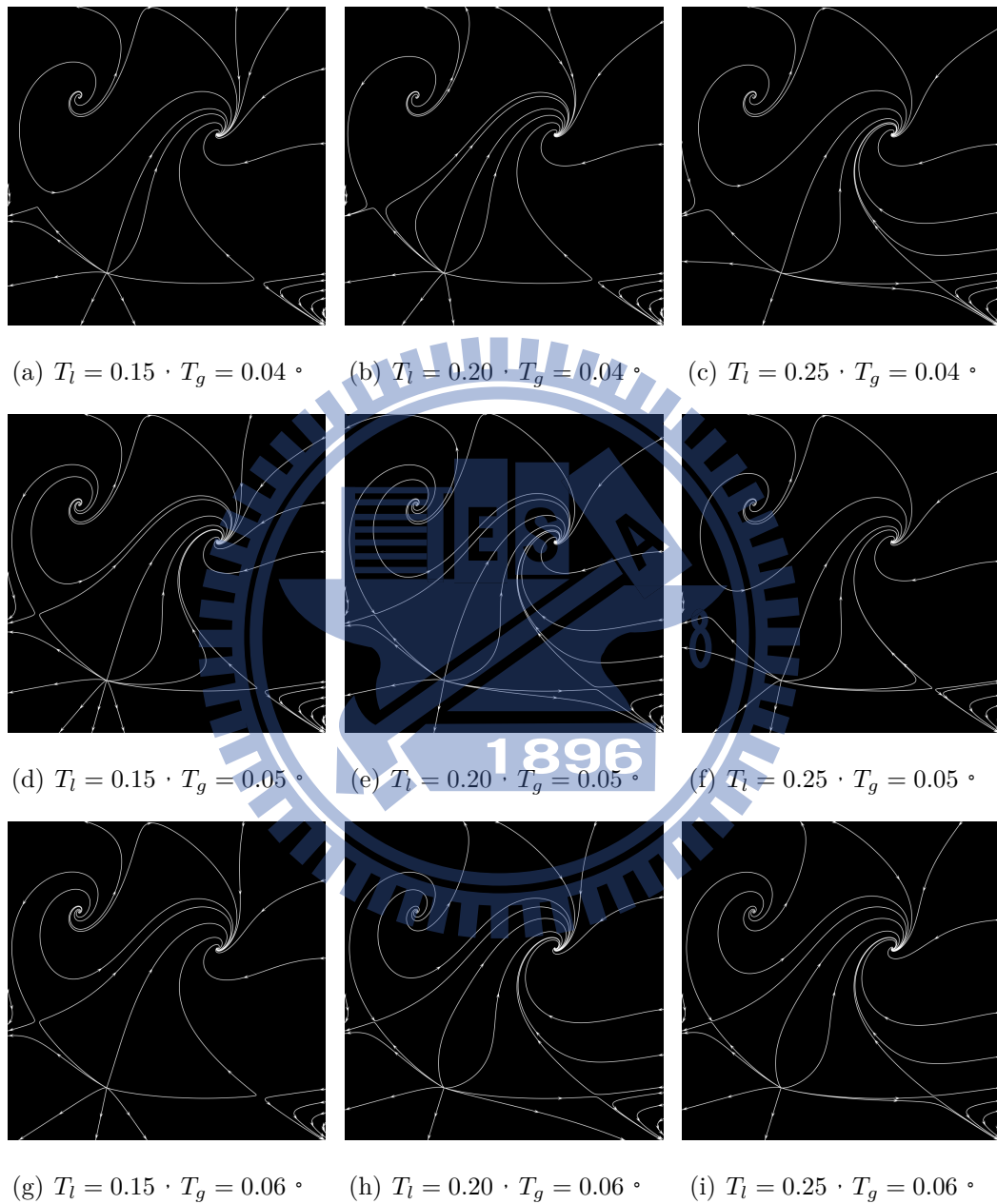


圖 4.12: Illustrative Streamlines 不同參數下的畫面範例。



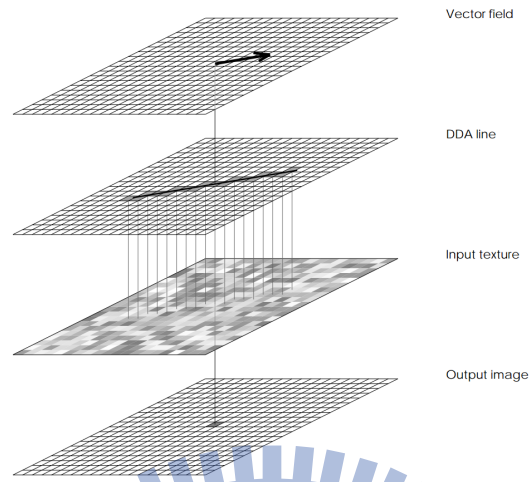


圖 4.13: LIC 演算的過程。(圖片引用自 [10] 的圖 1) 第一張為要求顏色的點與該點的向量方向，第二張為沿著向量向兩側積分出來的流線。第三張為輸入畫面，通常是隨機產生的雜訊圖。將第二張的流線與輸入畫面對應，對沿著流線的畫素做加權平均，可以得到輸出的顏色。

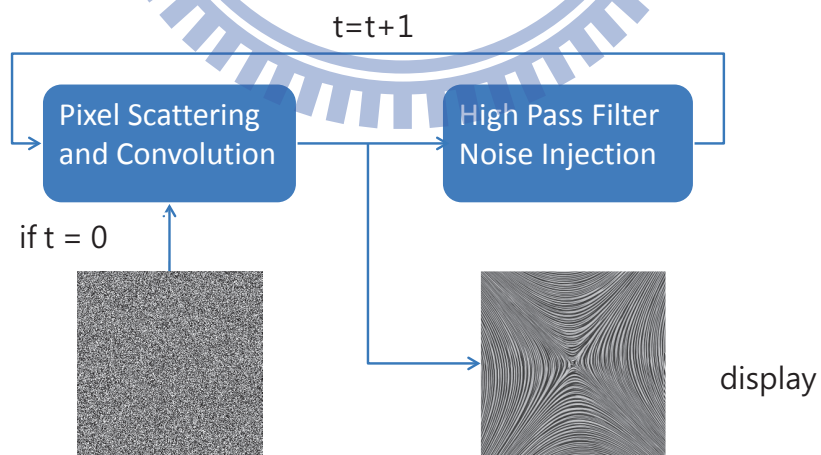


圖 4.14: UFLIC 演算的過程。



需要對該畫面做一次雜訊擾動高通濾波 (noise jitter high-pass filter) 將畫面的銳化，再作為下個時間步驟的輸入影像。流程如圖4.14

我們實作的時候以 UFLIC 作者的程式碼為基礎作修改。因為在穩態的流場中，UFLIC 的畫面會隨著時間趨近一個穩定狀態，因此經過一段時間之後，畫面會像是靜止不動一樣，所以我們對演算法做一些修改：在 UFLIC 的演算法中，我們記錄每個畫素在每個畫格的變化。對於一個畫素，若超過 30 個畫格沒有顏色變化，則將該畫素的顏色改為隨機值讓材質重新流動。UFLIC 的生命週期參數，經過比較不同參數的畫面後，我們最後設定每個粒子生命週期有 120 個畫格 (4 秒)。



## 實驗儀器與設計

### 5.1 實驗儀器

我們的實驗以 Tobii T120 Eye-tracker 來進行。實驗儀器及環境如圖5.1。Tobii T120 eye-tracker 可以接受實驗時頭部有晃動的情況，因此不需要將頭部固定住，可以讓受測者在比較自然與放鬆的狀態下進行實驗。這可以幫助取得受測者更真實的反應結果。

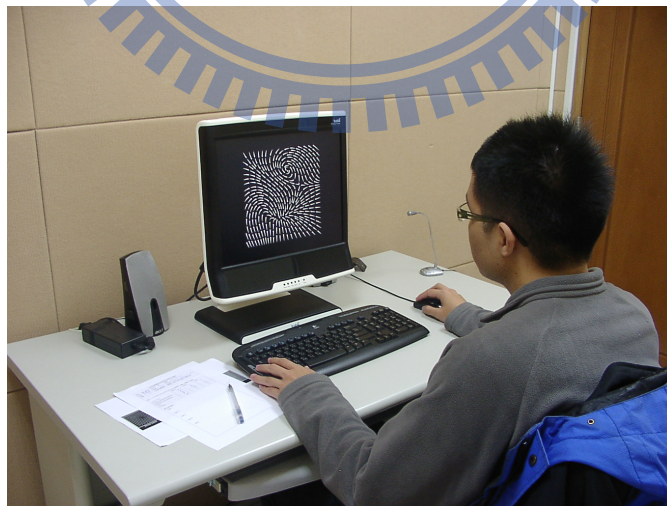


圖 5.1: 實驗的環境。圖中的螢幕為 Tobii T120。

T120 eye-tracker 的基本規格如下：

Data Rate:	120Hz
Accuracy:	typical 0.5 degrees
Head Movement Error:	typical 0.2 degrees
Head Movement Box:	30×22cm at 70cm
Tracking Distance:	50-80 cm
Max Gaze Angles:	35 degrees
Top Head-motion Speed:	25 cm/second
Screen Size:	17" TFT
Screen Resolution:	1280×1024 pixels
Display Colors:	16.7M

實驗使用的軟體為 Tobii Studio 3.0。經由 Tobii Studio 3.0 匯出的資料我們可以得到每個受測者觀看每個刺激物影像時，在每個時間點的凝視位置以及發生每個事件（刺激物影像開始、刺激物影像結束、點擊滑鼠以及敲打鍵盤）的時刻和滑鼠點擊的螢幕座標，經過整理和計算後我們得到反應時間、滑鼠點擊影像的座標與時間，以及凝視點時間及位置的序列來進行數據分析。而計算凝視點的演算法，我們使用 Tobii Studio 預設的演算法 Tobii Fixation Filter，並且使用軟體的預設參數來進行。

## 5.2 實驗設計

在基本的假設中，好的視覺化方法要能將流場中重要的部分表現出來，而那些是重要的部分呢？我們請教過相關領域的人員，以及觀察過去相關的研究中經常被拿來作為實驗流場指標，較重要的部分有流場中的方向與速度、流場特徵、流場結構與流動表現等方面，考量了流場可視化方法的種類以及同時要適合以眼動儀來收集資料，最後我們以流場特徵的表現能力以及流動的表現能力這兩個方向來作為評量的基準。在表現流場特徵的部分，又分成能否分辨出特徵，以及從特徵中分辨出正確的類別。整個實驗的設計上部分參考了 Laidlaw 等人 [1] 的實驗架構，同時加上在沒有給予特別指示，自然注視時的反應。因此實驗共分

成四個部份：

實驗 1 自由注視 (free-viewing)：

在沒有特別指示下自由觀看流場的影像。經由這個實驗來分析人們在一般看到流場影像的時候會注意那些區域。

實驗 2 流動路徑預測 (advection prediction)：

我們要求受測者預測流場的流動軌跡。經由實驗的結果來比較不同方法之間，對於流動表現的呈現能力。

實驗 3 尋找流場特徵 (feature locating)：

我們要求受測者找出流場中所有臨界點。經由實驗的結果來比較不同方法之間，對於呈現流場特徵能力。

實驗 4 分辨流場特徵 (feature identifying)：

我們在流場中放置數個不同類型的臨界點，要求受測者找出指定的臨界點，經由實驗的結果來比較不同方法之間在呈現特徵時，是否易於做出分辨。

表 5.1: 實驗內容簡表。

	實驗 1	實驗 2	實驗 3	實驗 4
內容	自由注視	流動路徑預測	找尋流場特徵	分辨流場特徵
流場數	8 個: 數學方程式 ×4 物理模擬 ×4	8 個	8 個: 2 臨界點流場 ×2 3 臨界點流場 ×2 4 臨界點流場 ×2 5 臨界點流場 ×2	5 個
滑鼠顯示	無	有	有	有
結束方式	定時 5 秒	點擊滑鼠	敲打鍵盤	點擊滑鼠

在實驗的作答方式上，我們不採用看完影像之後選擇正確答案這種作答方式，而是選擇用找尋流場目標並且對正確目標點擊的方式，這種作答方式作答

上較直覺，同時也且能經由滑鼠點擊位置分析對於位置判斷的精確度，以及利於得到眼睛找目標過程中的移動軌跡。

實驗內容概列如表5.1，整體實驗流程如圖5.2所述。實驗開始前，會讓受測者觀看一個教學影片，影片的內容包括介紹流場的基本知識、臨界點的類型、5種流場可視化方法的範例以及4個實驗的細節解說。在實驗一開始的時候會做眼動儀的校正，並且告知受測者實驗時適當的姿勢與位置。每個實驗 (task) 開始的時候，會讓受測者再觀看一次該部分實驗解說的影片，同時讓受測者做一次練習，確定受測者理解實驗內容並且能夠正確執行實驗內容，然後才開始正式實驗。因為第三與第四個實驗是與臨界點類型有關的實驗，所以在第三個實驗開始之前，我們會讓受測者做一次關於臨界點的練習，確認受測者能夠理解每一種臨界點類型。為了減低學習效應帶來的誤差，每個實驗中刺激物 (stimuli) 影像的順序均由 Tobii Studio 設定為隨機排列。以下詳述各實驗設計細節。

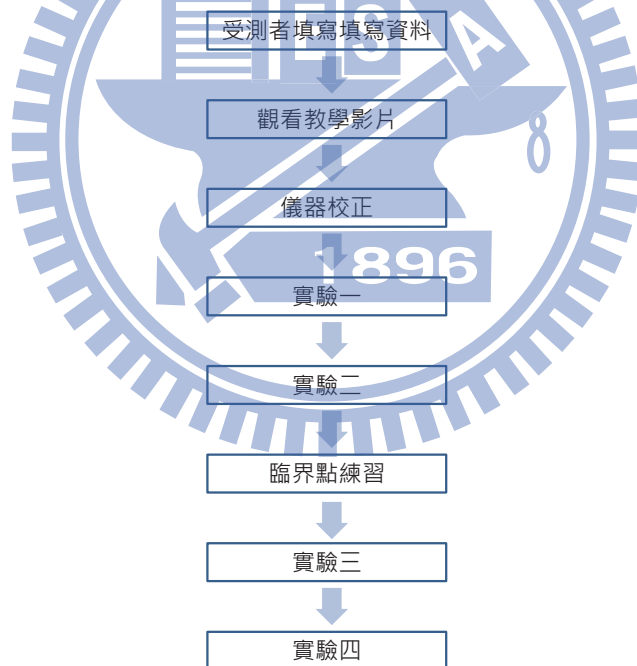


圖 5.2: 實驗整體流程圖。

### 5.2.1 實驗 1：自由注視

這個實驗目的在比較不同方法之間，在自然注視的時候，注視區域的差異，同時也試著觀察專家與非專家之間視覺行為的差異。實驗詳細的過程如圖5.3。一開始受測者觀看一次該部分實驗解說的影片，同時讓受測者做一次練習，確定受測者理解實驗內容並且能夠正確執行實驗內容，然後才開始正式實驗。在實驗中每個刺激物影像會與一個預備畫面一組，每次觀看刺激物影像之前會先出現預備畫面，預備畫面為一個正中心有一個白點其他地方全黑的畫面。在每次開始注視流場畫面之前，受測者先注視預備畫面中心的白點，然後以滑鼠點擊畫面中的白點，這個動作主要的目的是為了儘可能確保實驗一開始的時候眼睛注視的位置都在畫面中心。在滑鼠點擊下去之後，畫面會換成刺激物影像，經過 5 秒鐘後影像會自動結束，跳到下一組的預備畫面。這個實驗一共有 8 個流場 5 種方法總共  $5 \times 8 = 40$  組刺激物影像，實驗的時候以隨機的順序各出現 1 次，40 組全部完成後結束實驗。

### 5.2.2 實驗 2：流動路徑預測

這個實驗的目標在比較不同方法對於判斷流動軌跡的能力。實驗的影像上，中心為有一半徑 200 畫素的圓圈，以及圓圈的中心有一個圓心點 (如圖5.4)。我們要求受測者預測經過圓心的流動軌跡與外圓交會的位置 (即預測徑線與外圓的交點)，並且在該點點擊滑鼠。

實驗的過程如圖5.5。一開始受測者觀看一次該部分實驗解說的影片，同時讓受測者做一次練習，確定受測者理解實驗內容並且能夠正確執行實驗內容，然後才開始正式實驗。在實驗中每個刺激物影像會與一個預備畫面一組，每次觀看刺激物影像之前會先出現預備畫面，預備畫面為一個正中心有一個白點其他地方全黑的畫面。在每次開始注視流場畫面之前，受測者先注視預備畫面中心的白點，然後以滑鼠點擊畫面中的白點。在滑鼠點擊下去之後，畫面會換成刺激物影像，受測者找出預測路徑與圓圈的交點，在該處點擊滑鼠完成這次作答，滑鼠點擊後畫面會跳到下一組的預備畫面。這個實驗一共有 8 個流場 5 種方法總共  $5 \times 8 = 40$  組刺激物影像，實驗的時候以隨機的順序各出現 1 次，40 組全

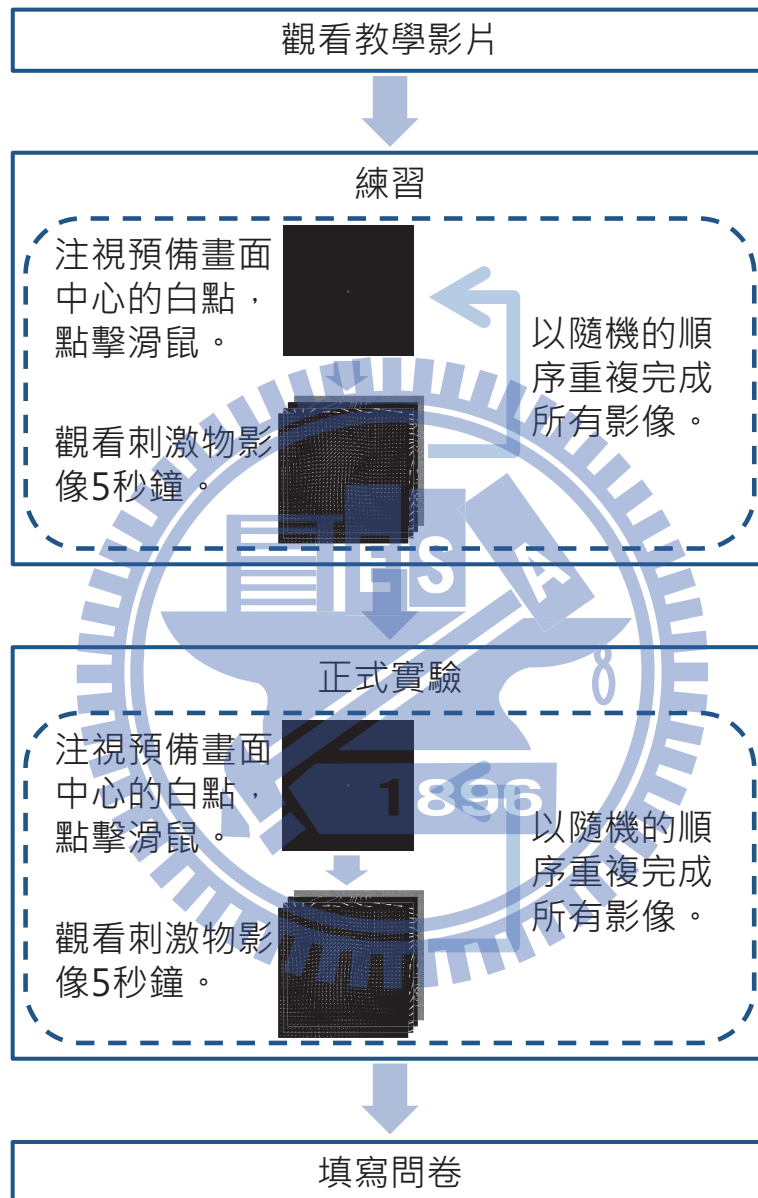


圖 5.3: 實驗一 (自由注視) 流程圖。



部完成後結束實驗。

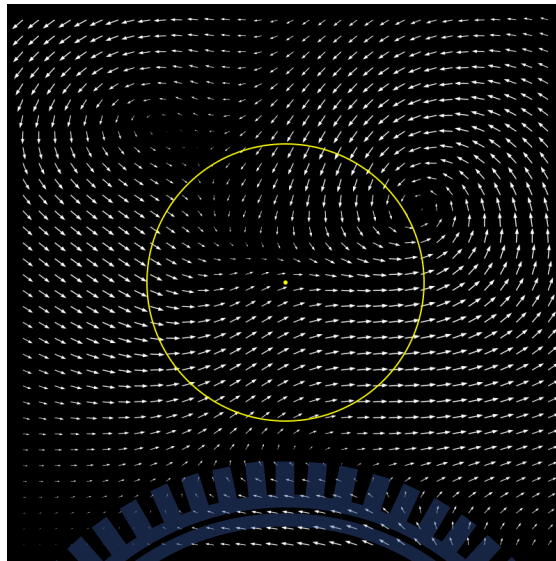


圖 5.4: 實驗二 (流動軌跡) 影像範例。圖片中心有 1 個黃色的圓點，外圈直徑 200 畫素。實驗的時候預測從中心黃色點釋放的粒子，會與外圈在何處相交，在預測的位置用滑鼠點擊。

### 5.2.3 實驗 3：找尋流場特徵 1896

這個實驗要比較流體特徵的表現能力，實驗的內容在比較流場中的特徵是否容易被辨識出來。由於在流場中臨界點是最常用也最明顯的特徵，因此我們選用臨界點來當作實驗的流場特徵。

實驗使用的影像上面會有 2 至 5 個不同的臨界點，為了避免臨界點太接近畫面邊緣讓受測者注視位置跑到畫面之外，所有臨界點的位置均離影像邊緣至少 50 畫素。總計 8 個流場共有 28 個臨界點，其中 saddle 有 8 個，node sink、node source、focus sink、focus source 各有 5 個。

實驗的過程如圖 5.6。一開始受測者觀看一次該部分實驗解說的影片，同時讓受測者做一次練習，確定受測者理解實驗內容並且能夠正確執行實驗內容，然後才開始正式實驗。在實驗中每個刺激物影像會與一個預備畫面一組，每次觀看刺激物影像之前會先出現預備畫面，預備畫面為一個正中心有一個白點其他

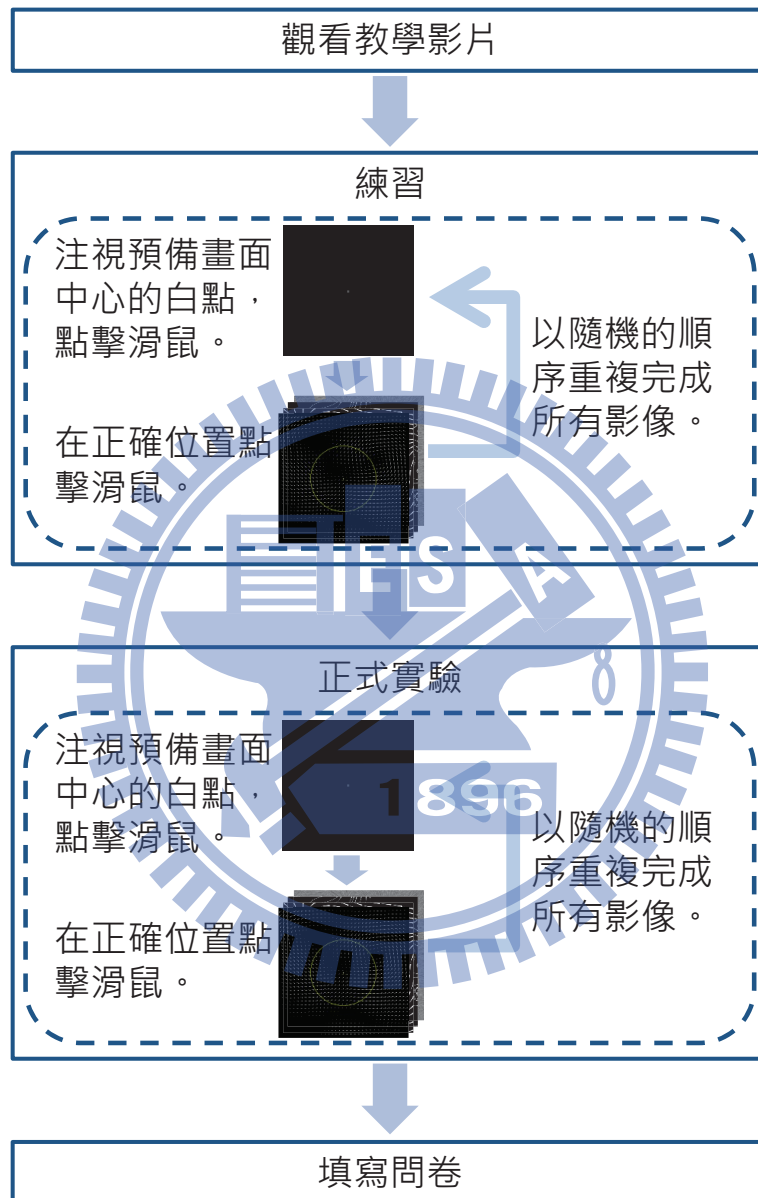


圖 5.5: 實驗二 (流動軌跡) 流程圖。

地方全黑的畫面。在每次開始注視流場畫面之前，受測者先注視預備畫面中心的白點，然後以滑鼠點擊畫面中的白點。在滑鼠點擊下去之後，畫面會換成刺激物影像，受測者找出所有臨界點並且用滑鼠在該處點擊。在確定點擊完所有臨界點後，按下鍵盤完成這次作答，按下鍵盤後畫面會跳到下一組的預備畫面。這個實驗一共有 8 個流場 5 種方法總共  $5 \times 8 = 40$  組刺激物影像，實驗的時候以隨機的順序各出現 1 次，40 組全部完成後結束實驗。

#### 5.2.4 實驗 4：分辨流場特徵

這個實驗與上個實驗一樣是關於流體特徵的表現能力，內容是比較特徵之間是否容易分辨。我們與前個實驗一樣以臨界點作為比較的流場特徵。在 6 種典型的臨界點類型中，因為 center 算是 focus sink 與 focus source 之間的臨界狀態，因此我們在比較的類型中將 center 排除，僅比較其他 5 種類型的臨界點。

實驗使用的影像上面有 5 個臨界點，每種類型各 1 個。為了避免出現無法區分時間是花在「找到臨界點」與「分辨臨界點」的問題，因此我們固定了 5 個臨界點的位置，將臨界點設在距離影像中心 240 畫素的正五邊形頂點上，並且用半徑為 100 畫素的圓圈將臨界點的位置標示出來 (如圖 5.7)。因為有 5 種臨界點類型，因此我們設計這個實驗中一共有 5 個流場，每種類型的臨界點各會出現在每個置上面 1 次。

實驗的過程如圖 5.8。一開始受測者觀看一次該部分實驗解說的影片，同時讓受測者做一次練習，確定受測者理解實驗內容並且能夠正確執行實驗內容，然後才開始正式實驗。實驗分成 5 個部分，每種臨界點各進行 1 次，在五種臨界點實驗的順序上，為了避免固定臨界點的順序對實驗結果造成影響，我們以  $5 \times 5$  的拉丁方陣來決定每位受測者 5 種臨界點的順序，拉丁方陣是一種  $n \times n$  的方陣，在這  $n \times n$  的方陣裡，恰有  $n$  種不同的元素，每一種不同的元素在同一行或同一列裡只出現一次。我們在實驗的時候，每 5 個人一組照順序取拉丁方陣中的一列作為受測者的臨界點實驗順序，如此可以確保每進行完五位受測者，每種臨界點實驗都會在每個順位出現過一次。實驗時的順序如表 5.2。

每種臨界點開始的時候，畫面會先顯示要尋找的臨界點類型，之後開始該次實驗。在實驗中每個刺激物影像會與一個預備畫面一組，每次觀看刺激物影像

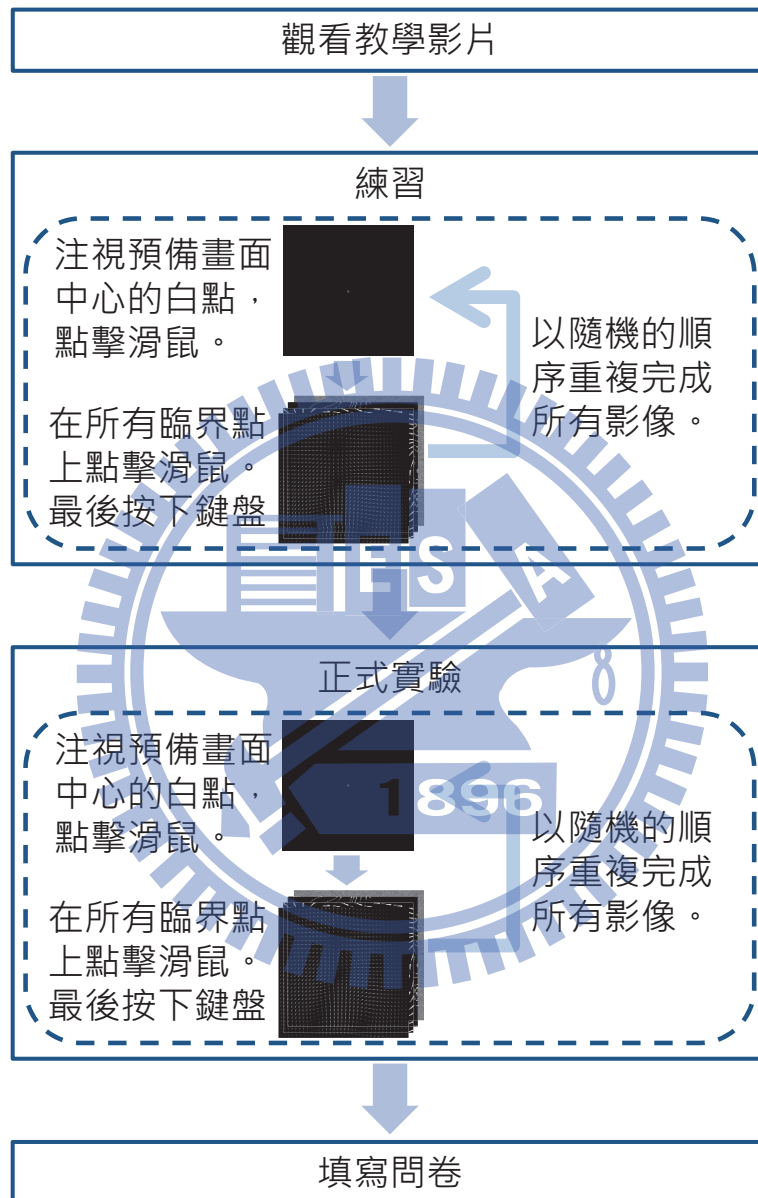


圖 5.6: 實驗三 (尋找流場特徵) 流程圖。

之前會先出現預備畫面，預備畫面為一個正中心有一個白點其他地方全黑的畫面。在每次開始注視流場畫面之前，受測者先注視預備畫面中心的白點，然後以滑鼠點擊畫面中的白點。在滑鼠點擊下去之後，畫面會換成刺激物影像，受測者找出正確的臨界點並且在該圓圈內點擊滑鼠完成這次作答，滑鼠點擊畫面會跳到下一組的預備畫面。這個實驗一共有 5 個流場 5 種方法總共  $5 \times 5 = 25$  組刺激物影像，實驗的時候以隨機的順序各出現 1 次，25 組全部完成後結束一個臨界點的實驗。



圖 5.7: 實驗四 (分辨流場特徵) 影像範例。5 種臨界點各 1 個，分別放置在正五邊形的 5 個頂點上。該正五邊形中心在畫面正中央，5 個頂點與中心距離 200 畫素。同時用半徑為 100 畫素的圓圈將每個臨界點標示出來。

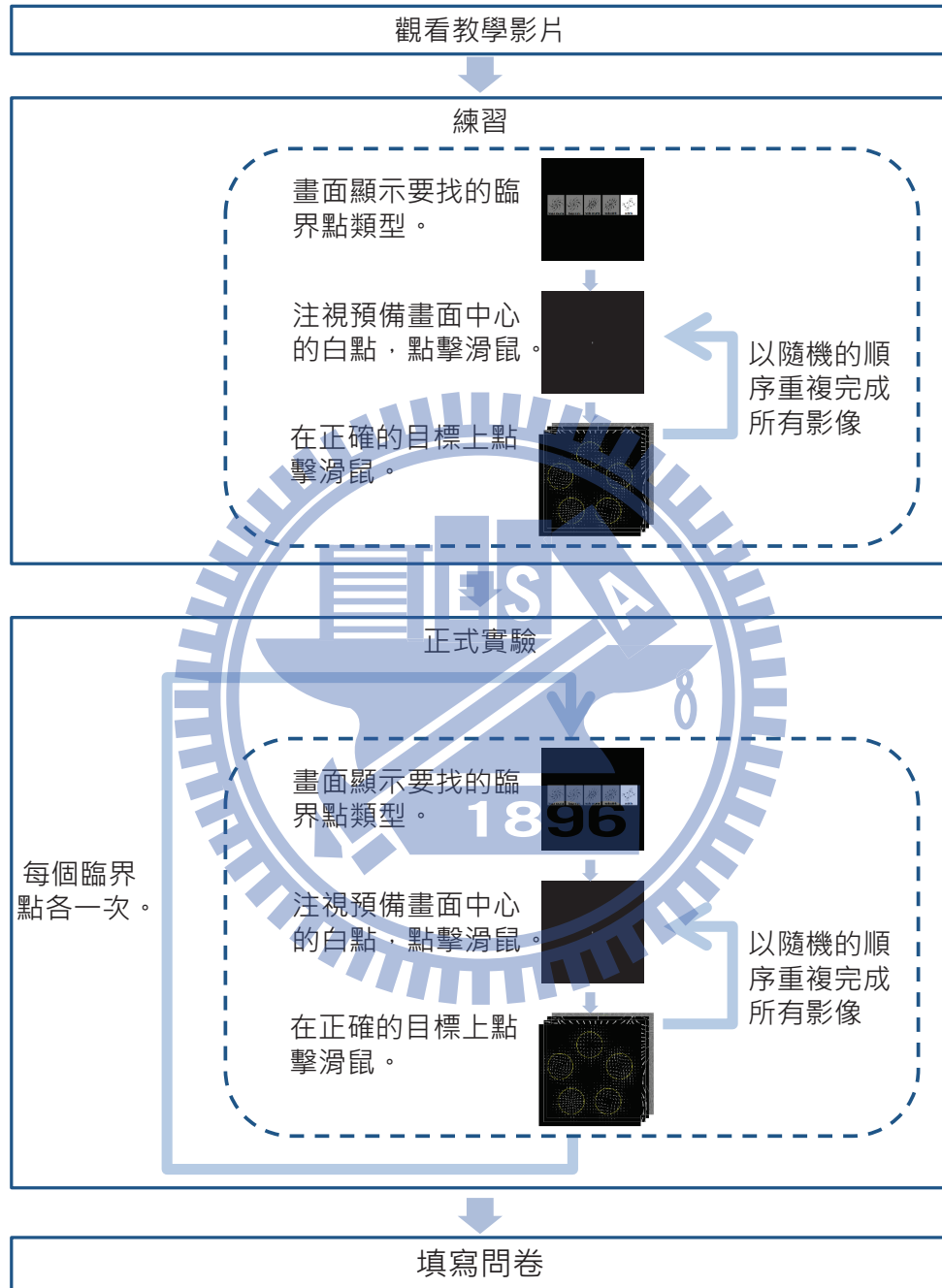


圖 5.8: 實驗四 (分辨流場特徵) 流程圖。

表 5.2: 實驗 4 中 5 個實驗的順序。編號 1 為 saddle，2 為 node sink，3 為 node source，4 為 focus sink，5 為 focus source。受測者編號個位數為 1~5 的受測者用一組  $5 \times 5$  的拉丁方陣，編號個位數為 6~10 的受測者用第二組  $5 \times 5$  的拉丁方陣。

實驗順序	受測者編號
1 2 3 4 5	01、11、21
2 5 1 3 4	02、12、22
3 1 4 5 2	03、13、23
4 3 5 2 1	04、14、24
5 4 2 1 3	05、15
5 4 3 2 1	06、16
4 3 1 5 2	07、17
2 5 4 1 3	08、18
1 2 5 3 4	09、19
3 1 2 4 5	10、20



## CHAPTER 6

# 實驗結果

整個實驗我們一共徵集到 24 位受測者，其中有 4 位受測者實驗數據的品質太差，因此我們將這 4 位受測者的資料排除，留下 20 位受測者進行分析。這些受測者全部都是大學生或研究所學生，其中包含 13 位男性與 7 位女性，年齡分布在 19 到 25 歲間。因為我們想要嘗試比較有相關專業背景的受測者與沒有相關背景的人在反應以及注視習慣上面是否有差異，因此特別去徵集了相關領域的受測者，在這些受測者之中有 5 位有修讀過流體力學相關課程或者是複雜性流體實驗室的研究生，我們將這 5 位受測者分類在專家，其他 15 人為非專家。

在開始分析數據之前，我們先將實驗所收集到的數據之中不合適的資料排除。第一個階段先排除掉前述 4 位受測者的資料，接著再分成兩個部分篩選。第一個部分是針對眼動儀資料的部分，有部分資料中眼動儀捕捉到眼睛凝視點的比例太低，不適合用來做眼動儀資料分析，因此我們將眼動儀捕捉到眼睛資訊比例太低的資料排除。第二個部分是將每個實驗中不符合正常作答範圍的資料排除：在實驗 2 流動路徑實驗中，因為我們要求受測者點擊在外圈上面，所以當點擊的位置與外圈距離過大 (外圓半徑的  $1/10$ ，20 畫素) 的時候，我們認為這是作答失敗或是誤擊，因此將該資料視為無效將該資料排除；在實驗 4 流場特徵辨別的實驗中，若滑鼠點擊的位置不在畫面上的 5 個圓圈內，則排除該筆資

料。實驗得到的資料數概列如表6.1

表 6.1: 實驗總資料數。

	實驗 1	實驗 2	實驗 3	實驗 4	實驗 4(for saddle)
原始資料 (20 人)	800	640	800	2000	500
第一部分刪除後	680	532	530	1724	395
第二部分刪除後	680	524	530	1711	393

在整個實驗的數據分析上，我們評測的指標主要有三大類，包括反應時間、滑鼠點擊位置以及眼睛軌跡。反應時間用來比較作答的速度，滑鼠點擊位置用來比較作答的精準度以及正確性，這兩個方式是過去相關實驗中主要的量測指標，眼睛軌跡的資料則是我們實驗的重點，在實驗的設計上，除了第一個實驗自由注視之外，均設計成要受測者在流場中找尋的目標的方式，以獲得眼睛移動軌跡的資訊。因為每個實驗目標的不同，因此分析眼睛軌跡的方式也不同。在第二個實驗流動路徑預測的部分，我們想要知道流場可視化方法讓受測者的眼睛軌跡跟隨流動路徑的能力，因此我們假設越好的方法眼睛軌跡會與真實流動軌跡越相似，我們應用 Jarodzka 等人 [16] 提出的眼睛軌跡相似性比較方法來比較眼睛軌跡與流動路徑的相似性。在第三個實驗找尋流場特徵的部分，從視覺的角度來看，越好的方法特徵越明顯越容易被注意到，因此我們比較凝視點分布與臨界點的相關性，凝視點分布越接近臨界點的方法表示在這個方法中凝視點越明顯越容易被注意到。在第四個實驗分辨流場特徵的部分，我們假設越好的方法，受測者在不同臨界點之間移動找尋正確臨界點的次數會越少。而唯一一個沒有要求受測者找尋特定目標的實驗—自由注視實驗，我們想分析自由注視的時候眼睛分布與流場結構或數學性質的相關性，並且嘗試提出一個預測模型來預測凝視點的分布。詳細的分析方式會在後面說明。

## 6.1 實驗分群與統計檢定

我們以 minitab 進行實驗數據的統計檢定。我們一共比較兩種不同的群組之間的結果：包括專家與非專家間的比較，以及五種不同方法間的比較。

對於專家與非專家之間的比較，我們採用 t-檢定 (t-test) 來進行統計分析。當 p-值 (p-value) 小於 0.05 時，兩個群體之間有統計上的顯著差異。

對於五種方法的結果，我們用變異數分析 (ANOVA)[36] [37] 來檢定不同方法之間是否有統計上的顯著差異。變異數分析的虛無假設為五種方法的平均皆相等，計算檢定統計量 F

$$F = \frac{MST}{MSE},$$

其中 MST(mean square for treatments) 為組間均方，MSE(mean square for error) 為組內的均方，F 為兩樣本變異數的比值。F 越大，則組間均方大於組內均方，也就是組間變異量大於組內變異量，各組間的差異遠超出總期望值離差，代表各組的平均數存在明顯的差異。由 F 統計量可以計算得到對應的 p-值。當 p-值小於 0.05 時，我們拒絕虛無假設，即五種方法中存在至少兩種方法之間有統計上的顯著差異。為了想要能進一步分析五種方法中任兩種方法否存在統計上的顯著差異，我們用 Tukey 法進行事後檢定 (post hoc tests)，每兩個方法之間可以求得一個 p-值，當 p-值小於 0.05 時，兩個方法之間有統計上的顯著差異。

在我們之後列出的圖表上，如果兩種方法之間沒統計上的顯著差異時，我們將兩種方法標上同個字母標籤。例如圖6.8(b)中的四種方法皆標為 A，代表四種方法之間都沒有統計上的顯著差異；又如圖6.6(b)中，HP、IS、UFLIC 有標 A，代表這三種方法之間都沒有統計上的顯著差異，IGS 與 UFLIC 有標 B，代表這兩種方法之間沒有統計上的顯著差異，而同時標了 A 與 B 的 UFLIC 與其他三種方法皆沒有統計上的顯著差異。因此在圖6.6(b)中，僅 HP、IS 這兩者與 IGS 有統計上的顯著差異，其他的方法之間皆沒有統計上的顯著差異。

## 6.2 實驗 1：自由注視

這個實驗中，我們想瞭解在自由注視的時候，不同方法之間注視區域與流場結構的相關程度，也提出根據流場結構的一個預測眼睛凝視位置的模型。在分析的方法上，我們參考 Peters 等人 [38] 的 NSS(Normalized scanpath salience) 方法，NSS 是一個用來分析凝視點分布與不同視覺顯著區域表示圖 (saliency map)[21] 模型相關性的系統，我們在應用的時候將視覺顯著區域表示圖的部分，

改為流場結構相關的純量場模型。整個方法大致的原理如下。

對於多個經由影像計算而來的純量場，為了降低不同純量場之間數值分布的差異，同時方便進行比較，首先將所有的純量場以 z-score 做正規化，統一將所有純量場的平均調整為 0，標準差為 1。以圖 6.1(b) 為例，圖中純量場的值經由正規化轉為 NSS score 之後，NSS score 數值分布的圖表就如圖 6.1(c) 所示。對於一個受測者，計算該受測者所有凝視點與影像上對應的 NSS score 的時間加權平均，當這個平均值大於 0 時，代表凝視點大部分落在高 NSS score 的區域，也就是會傾向於看到純量場中數值高的區域；當小於 0 的時候，代表會傾向於看向低數值的區域。因此當 NSS score 越高的時候，代表純量場模型越能正確的預測眼睛凝視點位置。以圖 6.1 為例，6.1(a) 表示某位受測者觀看其中一張刺激物影像時候的眼睛軌跡，6.1(b) 為該受者眼睛軌跡對應到純量場模型上。圖 6.1(c) 中藍色的線表示該位受測者凝視點對應的 NSS score 的加權平均。

### 6.2.1 流場可視化方法與注視區域

我們應用 NSS 分別比較了凝視點分布與流場速度的關係，以及凝視點分布與臨界點的關係。速度場的 NSS score 如圖 6.2，所有方法與速度均呈現負相關性。HP 是所有方法中相對會注意到速度較高區域的一種方法。

凝視點對臨界點的距離場計算方式如下，假設影像中有  $n$  個臨界點  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ ，對於影像中任一點  $\mathbf{q}$ ，該點對臨界點的距離  $d(\mathbf{q})$  定義為  $\mathbf{q}$  至所有臨界點的最短距離

$$d(\mathbf{q}) = \min_{1 \leq i \leq n} \{\|\mathbf{p}_i - \mathbf{q}\|\}, \quad (6.1)$$

我們在正規化的時候，將 NSS score 乘以  $-1$ ，因此 NSS score 越高，則凝視點與臨界點的平均距離越近，也就是凝視點的分布越接近臨界點。凝視點對臨界點距離場的 NSS score 如圖 6.3，無論是專家或非專家，以及所有方法均傾向於注意臨界點。而專家相對於非專家更傾向注意到臨界點；在五種方法中，IS 與 LIC 是最容易吸引受測者注意到臨界點的方法，HP 則是相對上最不容易注意臨界點的方法

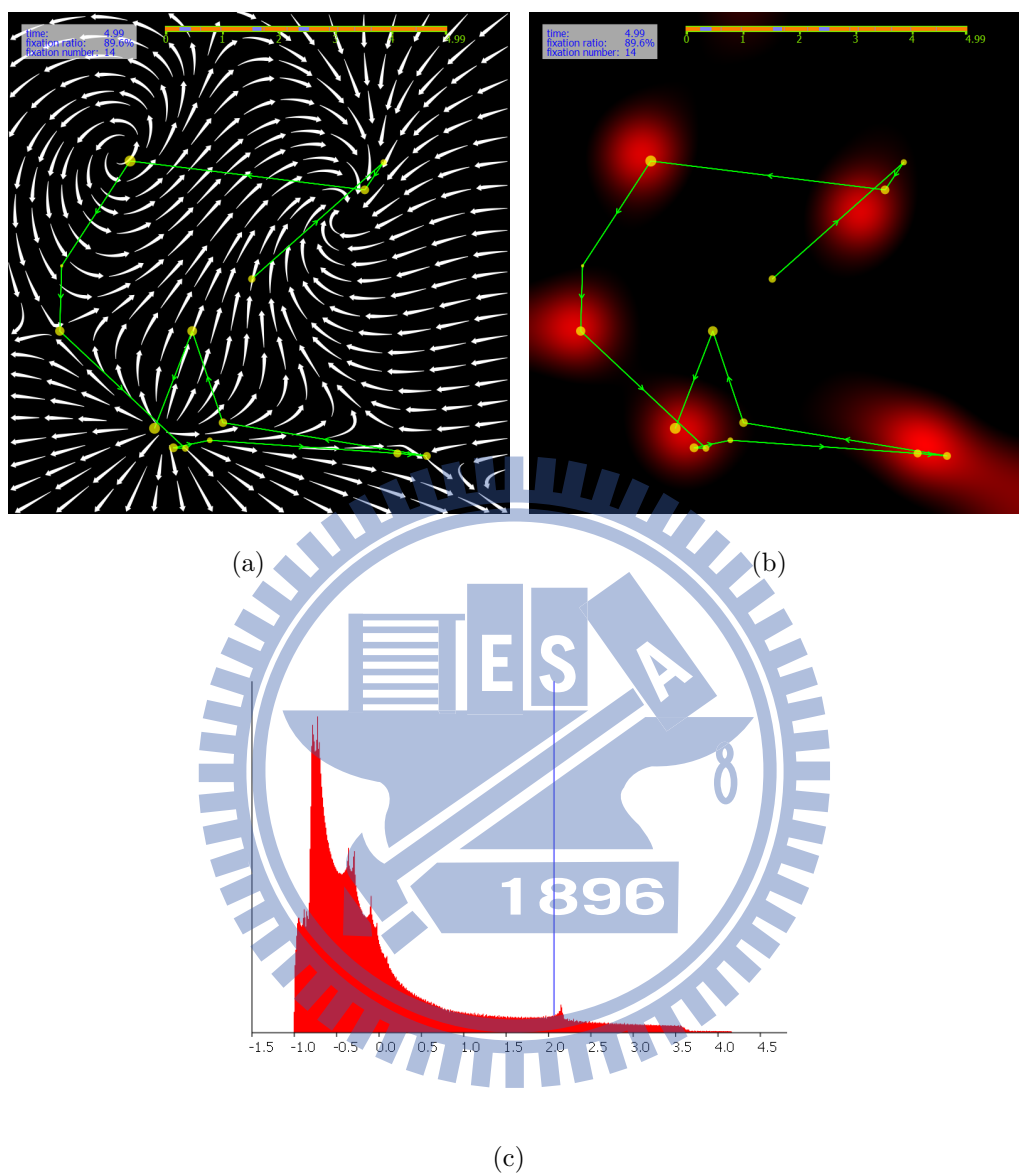


圖 6.1: NSS score 範例。(a) 為一張影像以及一位受測者的眼睛軌跡，(b) 為圖預測模型所預測出在圖 (a) 向量場的凝視強度分布與受測者的眼睛軌跡；紅色越深代表該點的值越高。(c) 為做完 z-score 正規化之後預測模型數值分布表，此時平均為 0，標準差為 1；藍色線表示圖 (b) 中受測者凝視點對應的值的加權平均。在這個例子中，凝視點位置對應的 NSS score 平均值大於 0，代表凝視點的分布趨向於預測的區域。

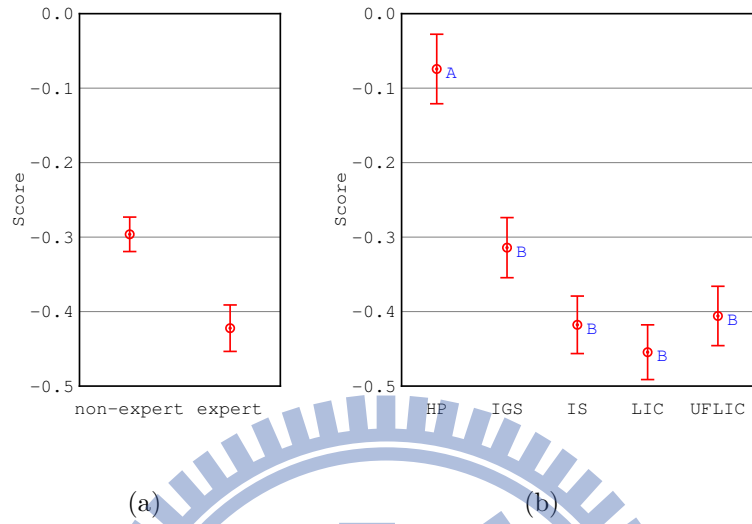


圖 6.2: 速度場的 NSS Score。 (a)  $p = 0.001$ 。 (b)  $F = 14.33$ ,  $p < 0.001$ 。

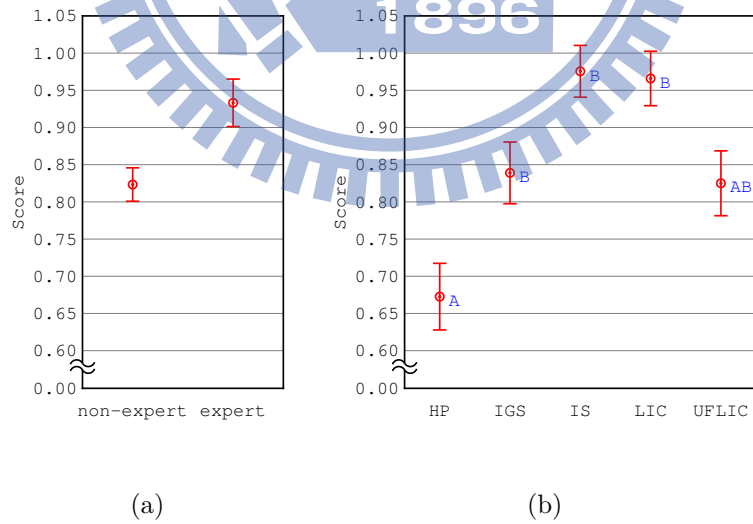


圖 6.3: 凝視點與臨界點距離場的 NSS Score。 (a)  $p = 0.005$ 。 (b)  $F = 9.36$ ,  $p < 0.001$ 。



### 6.2.2 流場注視區域預測

我們假設受測者會傾向於看流場中流向變化劇烈的地方，像是臨界點、亂流區、流線收斂或發散的區域。為了驗證這個假設，我們定義一個流向差圖 (directional difference map) 來預測受測者的注視區域，在流向差圖中，一個點的向量與附近點的向量方向差異越大，則該點流向差的值越大。因此若眼睛凝視的位置集中在高流向差區域，則代表傾向於看流場中流向變化劇烈的地方。

流向差圖的概念為，對於向量場中的兩點，向量夾角越大則兩點間的方向變化越劇烈。同時當兩點距離越近，變化的影響也越大，距離越遠則越小。由這個概念定義一個兩點向量夾角與兩點距離的加權函數  $D_V$  (vector difference)，再由  $D_V$  求得整個流場的流向差。對於向量場中的任兩點  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ，兩點的向量夾角  $D_A$  (angular difference) 為

$$D_A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \cos^{-1} \frac{\langle \mathbf{v}(\mathbf{x}), \mathbf{v}(\mathbf{y}) \rangle}{\|\mathbf{v}(\mathbf{x})\| \|\mathbf{v}(\mathbf{y})\|}, \text{ 對所有 } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2. \quad (6.2)$$

對於  $\mathbf{x}$ ，定義向量場中一點  $\mathbf{y}$  與  $\mathbf{x}$  的變化劇烈程度  $D_V$  (Difference of vector) 為

$$D_V(\mathbf{x}) = \max\{D_A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot G(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|; \mu, \sigma) \mid \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2\}, \quad (6.3)$$

其中  $G(\|\mathbf{x}, \mathbf{y}\|; \mu, \sigma)$  為一高斯函數 (Gaussian function)：

$$G(d; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{d-\mu}{\sigma}\right)^2}. \quad (6.4)$$

在這裡  $\mu = 0$ 、 $\sigma = 33.973$ 。

最後計算整個向量場  $I$  中每個點的  $D_V$  得到純量場  $D_V(I)$ ，最後對  $D_V(I)$  以高斯濾波器 (Gaussian kernel filter,  $\sigma = 33.973$ ) 做一次模糊化：

$$\text{Directional difference map} = D_V(I) * G. \quad (6.5)$$

其中「\*」表示迴旋積 (convolution) 的計算。流向差映射的範例如圖6.4：圖6.4(a)與6.4(c)為流場影像，圖6.4(b)與6.4(d)表示流場與相對應的流向差。

五種方法比較的結果如圖6.5。所有方法的 NSS score 均大於 0，代表不管哪種方法，受測者都會傾向注視流動方向變化較劇烈的地方。而所有方法之中，



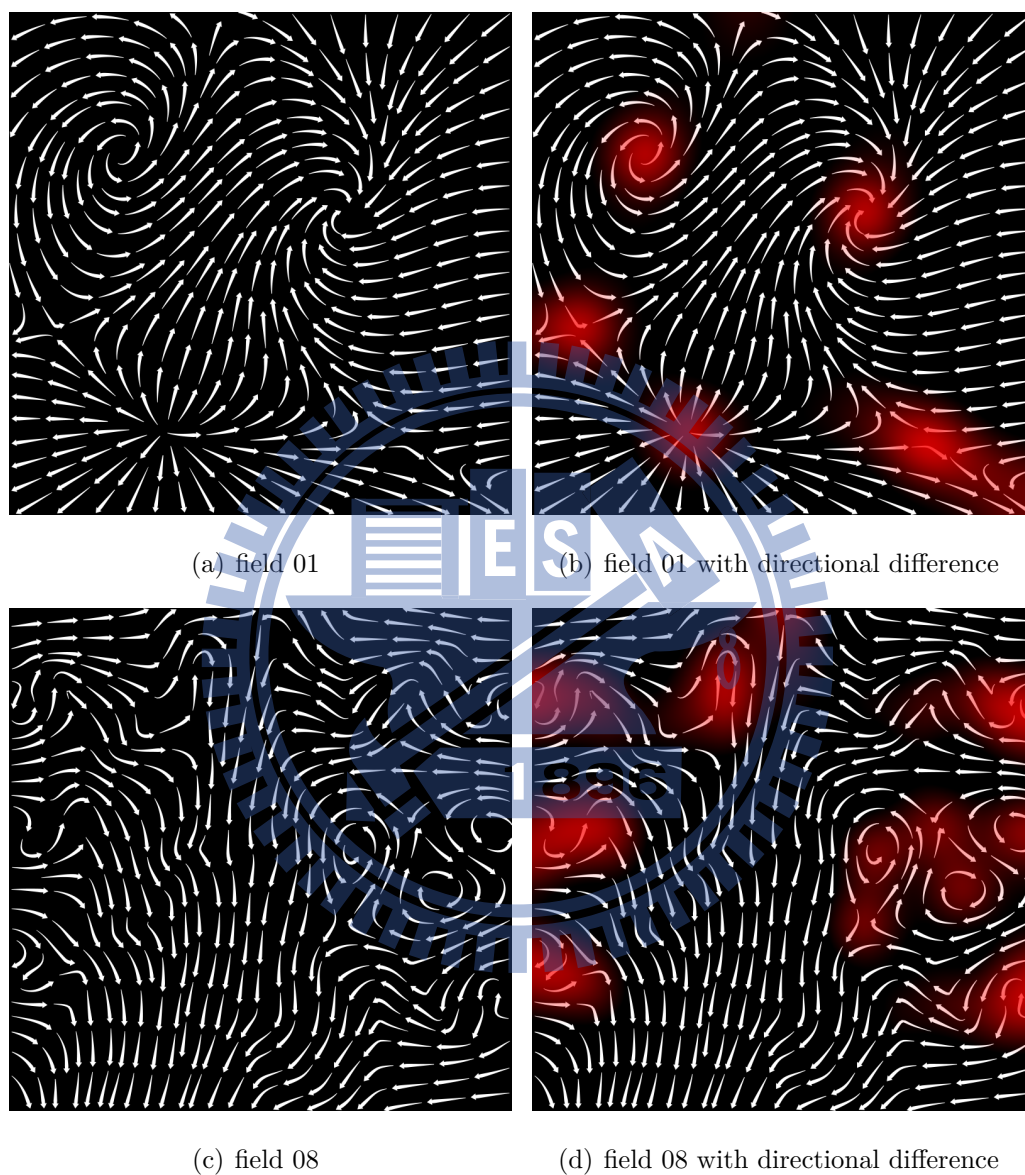


圖 6.4: 流向差範例。(a) 與 (c) 為兩個流場圖，(b) 與 (d) 流向差與流場的關係，紅色越深表示流向差的值越高。

HP 最不傾向注意流動方向變化較劇烈的地方，IS 與 LIC 則是最傾向於注意流動方向變化劇烈處的方法；而專家相較於非專家更傾向於注意到流動方向變化劇烈的區域。更詳細的流場，流向差以及凝視點的關係可以參考附錄A.2。

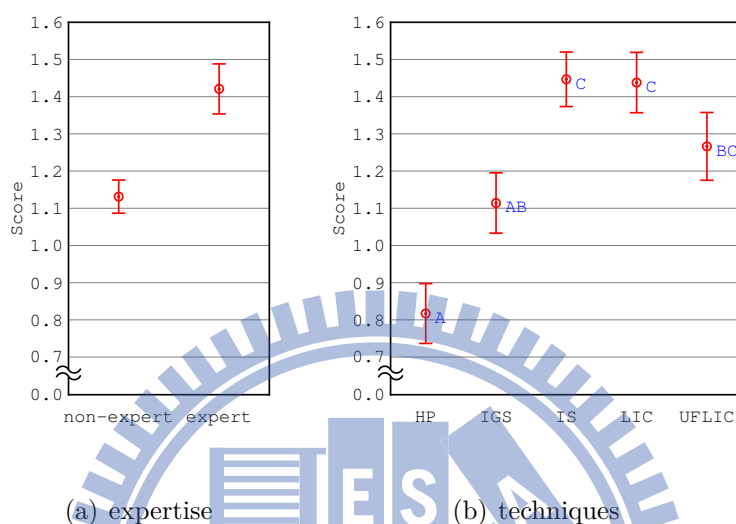


圖 6.5: 流向差。(a) $p < 0.001$ 。(b) $F = 10.31$ ,  $p < 0.001$ 。

## 6.3 實驗 2：流動路徑預測

這個實驗的目標在比較不同方法對於判斷流動軌跡的能力。我們比較了三個數據資料：反應時間、滑鼠點擊位置的誤差以及眼睛的移動軌跡。反應時與滑鼠位置的誤差可以知道對於流動軌跡判斷的速度與的精確度，而眼睛的移動軌跡的部分，我們經由比較眼睛移動軌跡與流場徑線的相似性來分析眼睛追蹤流動路徑的能力。5 種方法中，因為 LIC 沒有方向的資訊，因此我們在評量的時候將 LIC 排除，只對其他四種方法進行比較。

反應時間為從準備畫面點擊滑鼠刺激物影像出現開始算起，到受測者點擊滑鼠為止的時間長度，實驗的結果如圖6.6：專家的反應時間快於非專家；HP 與 IS 大於 IGS，UFLIC 則與所有方法沒有統計上的顯著差異。

滑鼠點擊位置的誤差用來比較不同方法之間對於判斷流動路徑的準確性。將滑鼠點擊的點與圓心連線，同時將正確點與圓心連線，我們將點擊的誤差定義

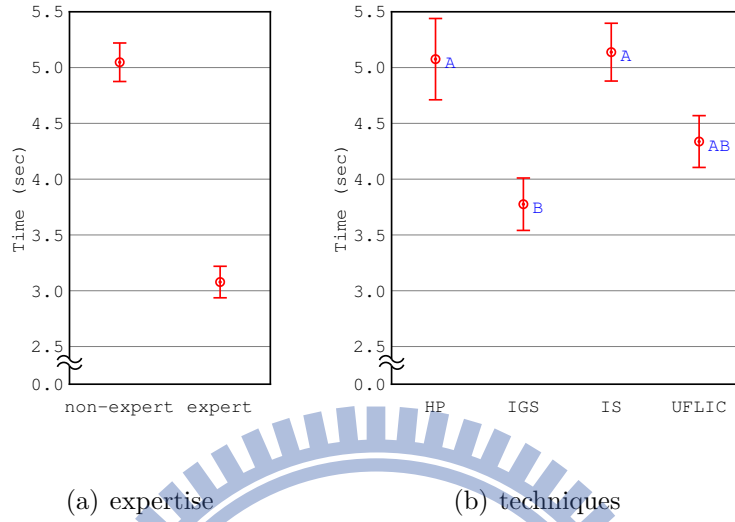


圖 6.6: 流動路徑實驗的反應時間。(a)  $p < 0.001$ 。(b)  $F = 4.62$ ,  $p = 0.003$ 。

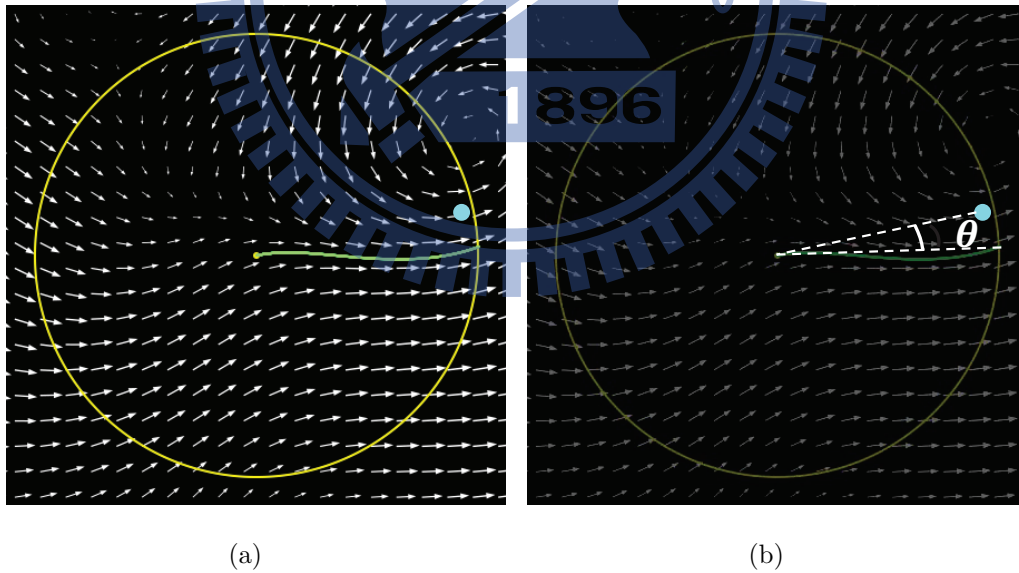


圖 6.7: 點擊誤差量測的範例。(a) 為滑鼠的點擊點以及正確的流動軌跡，(b) 中滑鼠點擊的點與圓心連線，以及正確點與圓心連線的夾角，即為點擊的誤差角度。

為這兩條連線之間的夾角，如圖6.7。實驗結果如圖6.8：專家與非專家之間，所有方法之間都沒有統計上的顯著差異。

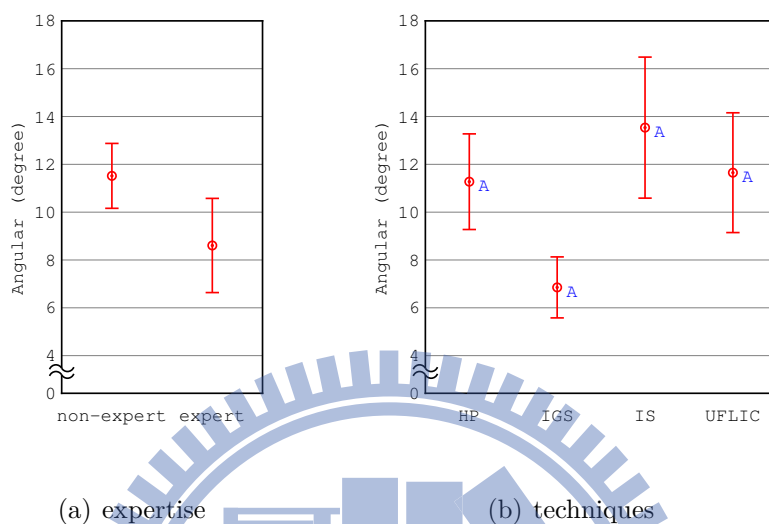


圖 6.8: 流動路徑實驗的位置判斷的誤差。(a)  $p = 0.225$ 。(b)  $F = 1.55$ ,  $p = 0.200$ 。

在眼睛軌跡的部分，我們想要比較眼睛移動軌跡與流場徑線的相似性，我們採用了 Jarodzka 等人 [16] 提出的眼睛軌跡相似性比較方法。方法的流程概述如下 (圖6.9)：

對於分別有  $n$  個凝視點與  $m$  個凝視點的兩條眼睛軌跡，我們將其中一條軌跡上每個凝視點與另一條軌跡上面所有凝視點比較，共有  $nm$  組關係，令  $w_{(i-1)m+j}$  表示軌跡一上第  $i$  點與軌跡二第  $j$  點的關係，原文中比較了 5 種凝視點屬性的值，因為我們只考慮路徑位置相似性，所以我們這個度量只取了凝視點的位置來比較，因此  $w_{(i-1)m+j}$  就是軌跡一上第  $i$  點與軌跡二第  $j$  點兩個凝視點在圖片座標上的距離。設一個  $n \times m$  矩陣  $\mathbf{M}$ ，令  $\mathbf{M}$  的矩陣的元素  $\mathbf{M}(i, j)$  為點  $(i-1)m+j$ ，該點的值為  $w_{(i-1)m+j}$  (如圖6.9(b))。將每個矩陣元素與下方、右下方以及右方連接，以 Dijkstra 演算法 [39] 求出此圖從點 1 到點  $nm$  的最短路徑，再將這個條最短路徑通過的點的值取平均。在 Jarodzka 等人 [16] 的方法中，因為要比較不同屬性的差異，因此在最後將這個距離平均值除以對角線長做正規化；而我們因為僅比較一個屬性值，沒有與其他屬性值的結果做比較，且做正規化前距離平均值比正規化之後的值更容易讓人理解數字的意義，因此我

們略過除以對角線長做正規化這個步驟。最後我們將這個值稱為眼睛軌跡與流動軌跡的軌跡差 (trajectory difference)。

因為這個方法中比較的是兩個眼睛軌跡，因此我們將徑線調整成一段  $n$  個凝視點的眼睛軌跡：我們將流場中的徑線等切成  $n - 1$  等分，即將徑線視為一段  $n$  個凝視點的標準眼睛軌跡。而  $n$  的選擇上，我們考慮過固定點數 (例如 5 點或 10 點) 或者隨眼睛軌跡調整，最後我們決定根據受測者的眼睛軌跡的凝視點數，當受測者的眼睛軌跡有  $m$  個凝視點的時候，理想狀況應該為一個沿著徑線的  $m$  個凝視點的眼睛軌跡。我們將這個理想的眼睛軌跡與受測者的眼睛軌跡做比較。

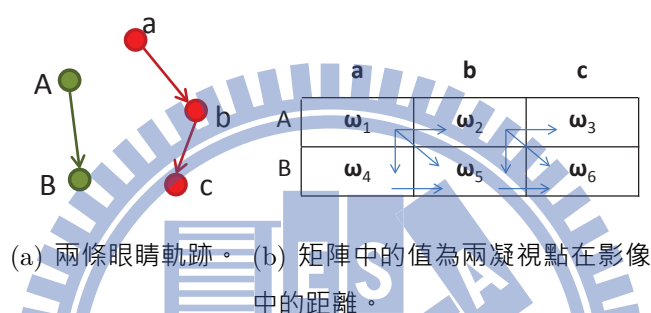


圖 6.9: 眼睛軌跡差異性的計算方式。計算 (a) 中兩條軌跡中的凝視點座標，與另外一條軌跡中所有凝視點座標的距離，凝視點之間的關係可以寫成 (b) 的這個矩陣  $M$ 。將 (b) 每個矩陣元素與下方、右下方以及右方連接，利用 Dijkstra 演算法求出從圖的點 1 到點 6 的最短路徑。軌跡差即為最短路徑上的數值平均。

實驗的結果如圖 6.10: 專家與非專家之間沒有統計上的顯著差異；所有的方法之間，IS 高於其他所有方法，其他之間則沒有差距。因此可以知道 IS 是所有方法之中，眼睛在追蹤流場軌跡的時候，最不容易讓受測者順著流動軌跡觀察流向的一個方法。

整個實驗裡面，專家與非專家僅在反應時間上面專家的速度較快，其他部分沒有差異。而 4 種方法之中，IGS 的反應速度最快，同時跟隨流動軌跡的能力與 HP 及 UFLIC 一樣，是成績最好的一種方法；相反的 IS 反應速度最慢，同時眼睛跟隨流動軌跡的能力最差，是表現最差的一種方法。

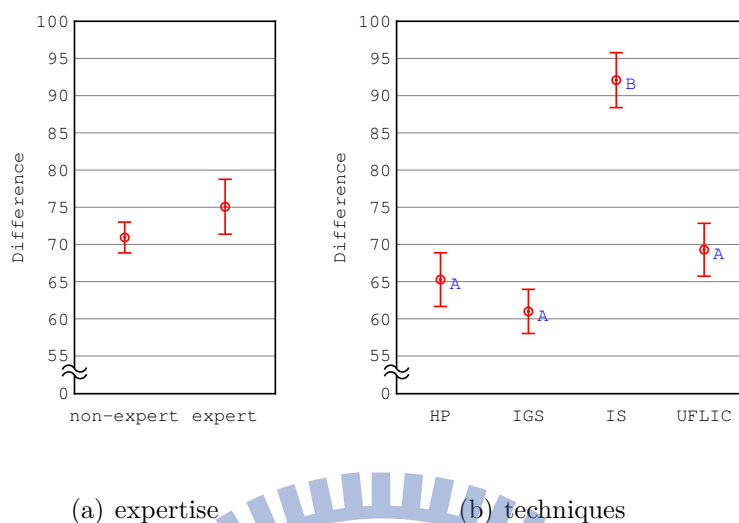


圖 6.10: 流動路徑實驗的眼睛軌跡與流動軌跡差異。(a)  $p = 0.329$ 。(b)  $F = 16.00$ ,  $p < 0.001$ 。

## 6.4 實驗 3：找尋流場特徵

這個實驗要比較流體特徵的表現能力，實驗的內容在比較流場中的臨界點是否容易被辨識出來。我們比較了 4 個數據資料，包含反應時間、位置 (點擊的誤差與正確率) 以及眼睛凝視點分布。從反應時間可以知道判斷的速度，從位置的正確率可以知道判斷的難度，從位置的誤差可以知道判斷的精確度，而從眼睛凝視點的分佈可以知道臨界點是否容易被快速注意到。

反應時間為影像開始到受測者敲打鍵盤為止的時間長度，實驗的結果如圖 6.11：專家的反應時間快於非專家；HP 大於 UFLIC，其他方法之間沒有統計上的顯著差異。

滑鼠點擊位置的量測我們分成兩個部分，點擊的正確性與精準度。在定義正確率的時候，因為人眼的解析度在中心約 2 度左右是最銳利的區域，換算成螢幕上的距離約 40 畫素 (在 17" LCD 螢幕，使用者眼睛距離螢幕 60cm 的狀況下)。因此在正確性的部分，我們定義若臨界點與最近的一個滑鼠點擊點的距離小於 40 畫素，則受測者找到此臨界點。若一個影像中所有臨界點附近半徑 40 畫素內都有滑鼠點擊 (即使超過 1 次)，且所有點擊的位置都在臨界點附近半徑 40 畫素



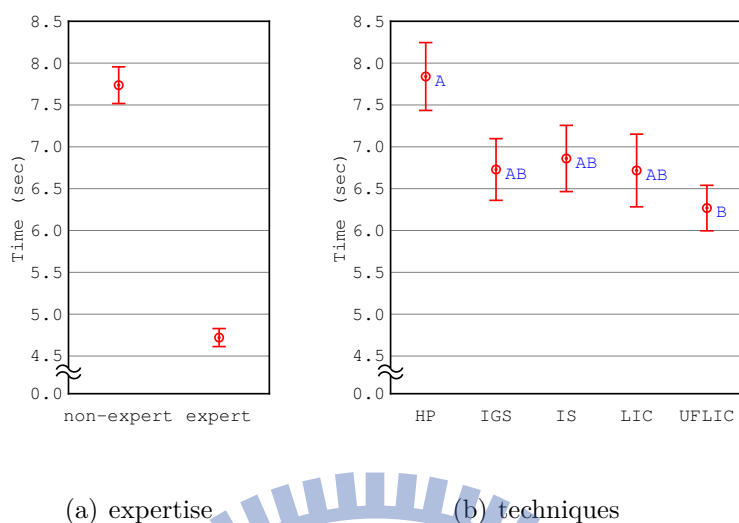


圖 6.11: 流場特徵觀察實驗的反應時間。(a) $p < 0.001$ 。(b) $F = 2.34$ ,  $p = 0.054$ 。

內，則此受測者正確找出所有臨界點，反之則錯誤。實驗的結果如圖6.12。專家與非專家沒有統計上的顯著差異。UFLIC、LIC 作答的正確率較 HP、IGS 與 IS 高。推測是因為相較其他方法要靠符號或流線的結構去的推斷，LIC 與 UFLIC 的畫面是材質的方式，可以將畫面中每個點的狀態表現出來，因此最不容易漏掉臨界點。

在精準度的部分，我們定義一個流場中所有被找到的臨界點最近的滑鼠點擊點的距離平均為誤差距離，結果如圖6.13：專家與非專家沒有統計上的顯著差異；HP、IGS 的誤差距離較 IS、LIC 與 UFLIC 高。推測是因為 LIC 與 UFLIC 的畫面因為是材質的方式，可以精確將每個點的位置精確表現出來，而 IS 因為流線會往 sink 與 source 的點收斂，因此 saddle 之外的 4 種點均容易精確的判斷位置，相反的 HP 與 IGS 僅能靠符號的位置及方向去做內插或外插的估計，因此精確度就不如其他三種。

最後在眼睛軌跡資料的部分，我們想分析凝視點的分布是否會接近臨界點。我們分析的方式參考了 Santella 與 DeCarlo[40] 的方法，對於所有凝視點，定義其與最近距離臨界點的距離為凝視點與臨界點距離。凝視點與臨界點距離的平均為一個刺激物影像中的所有凝視點與臨界點距離平均。平均距離越短，代表凝視點分布越靠近臨界點，也代表受測者越容易注意到臨界點。結果如圖6.14：



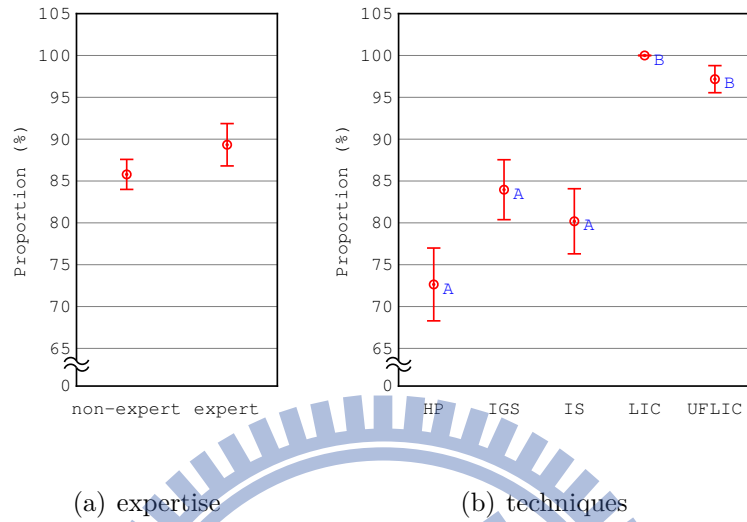


圖 6.12: 流場特徵觀察實驗的正確率。(a)  $p = 0.254$ 。(b)  $F = 13.48$ ,  $p < 0.001$ 。

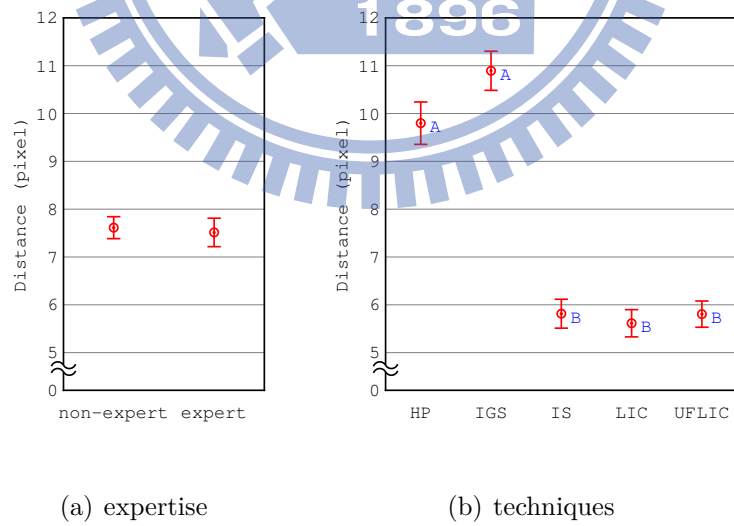


圖 6.13: 流場特徵觀察實驗的位置判斷的誤差。(a)  $p = 0.790$ 。(b)  $F = 53.17$ ,  $p < 0.001$ 。

專家的平均距離較非專家短；IS 的距離較 LIC 與 UFLIC 短，其他方法沒有統計上的顯著差異。我們推測因為 IS 的流線會往 sink 與 source 的點收斂，因此非常容易讓人注意到 sink 與 source，而 LIC 與 UFLIC 因為畫面的對比較低，因此較不容易注意到臨界點的位置。

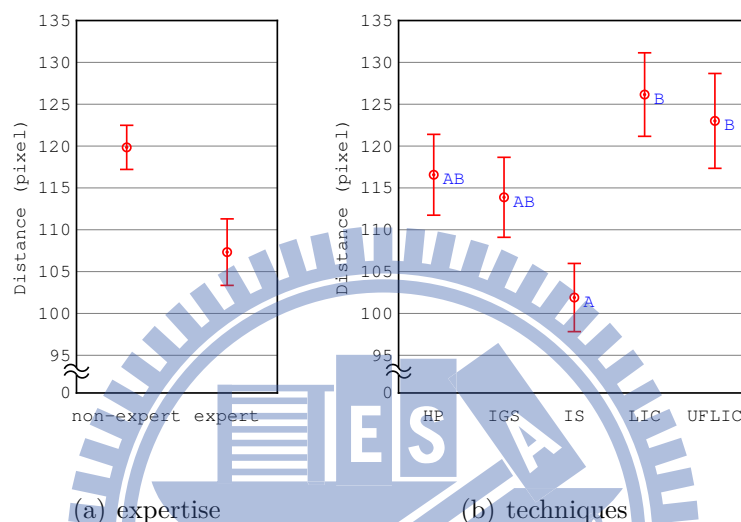


圖 6.14: 流場特徵觀察實驗的凝視點分布。(a) $p = 0.009$ 。(b) $F = 3.71$ ， $p = 0.005$ 。

整個實驗裡面，專家比非專家反應速度快，同時比非專家更容易注意到臨界點，而判斷的正確率與精確度則沒有差異。5 種方法之中，LIC 與 UFLIC 除了凝視點分布外幾乎是最好的，但在吸引受測者注意卻是最差的方法；HP 除了凝視點分布外都是表現最差的；而 IS 點擊反應的表現在中間，但 IS 的臨界點是最容易吸引受測者注意的。實驗的結果中，不同方法在不同的評測指標下的排名呈現很大的歧異，關於這點我們在後面的 6.6.3 中做更進一步的討論與分析。

## 6.5 實驗 4：分辨流場特徵

這個實驗與上個實驗一樣是關於流體特徵的表現能力，我們比較了反應時間、正確性與及眼睛動軌跡。從反應時間可以知道判斷的速度，從正確率可以知道判斷的難度，從眼睛動軌跡則可以知道一共在不同的臨界點之間移動了幾次。

因為 LIC 沒有方向的資訊，無法區分 node 與 focus，因此我們的比較中將 LIC 略去。不過因為 LIC 中的 saddle 仍可以辨識，因此在 saddle 的部分我們另外單獨拿出來比較。

反應時間為實驗開始到受測者點擊滑鼠為止的時間長度，實驗的結果如圖 6.15：專家的反應時間快於非專家；IS 最長，HP 其次，IGS 與 UFLIC 最短。而僅比較 saddle 的結果如圖 6.16。專家與非專家沒有統計上的顯著差異；方法之間，HP 最長，IS 大於 LIC 與 UFLIC，IGS 小於 HP 大於 UFLIC，LIC 小於 HP，UFLIC 小於 HP、IGS 與 IS。

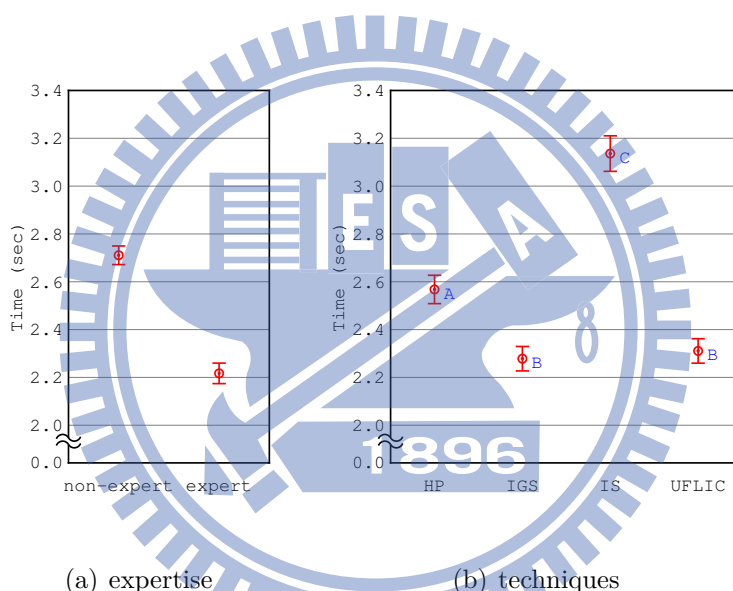


圖 6.15: 分辨流場特徵實驗的反應時間。(a) $p < 0.001$ 。(b) $F = 44.21$ ， $p < 0.001$ 。

在正確性的部分，每個方法的錯誤次數如下：HP:3 次 / 總共 431 筆有效紀錄，IGS:2 次 / 總共 431 筆有效紀錄，IS:5 次 / 總共 431 筆有效紀錄，UFLIC:3 次 / 總共 431 筆有效紀錄。所有方法都只有極少數錯誤，因此在這個實驗中無法有效的區分方法間的差距。

在眼睛軌跡資料的部分，我們將 5 個半徑 100 畫素的圓圈範圍定為 AOI (Area of interest)，凝視點進入 AOI 後出來或者進入 AOI 後點擊滑鼠結束該圖，我們記為看到該臨界點 1 次。由此我們可以得到一個表示眼睛檢查臨界點順序的序列。我們比較開始實驗後第一個看到的臨界點即為要找的目標的比率，結果如

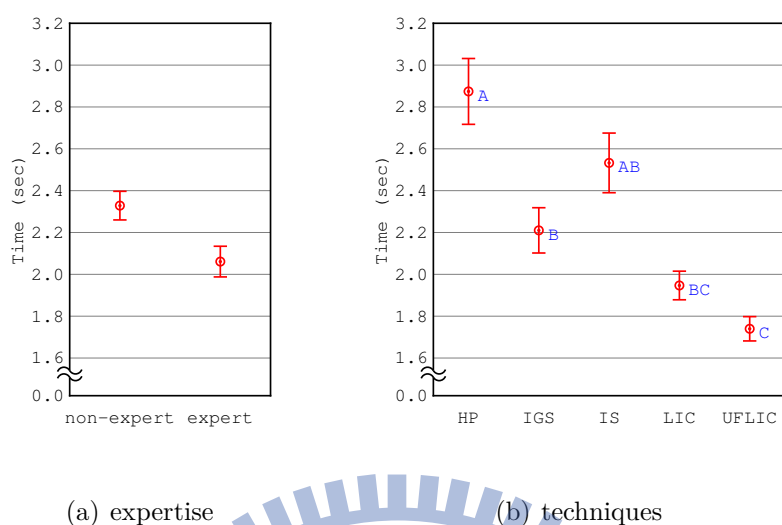


圖 6.16: 分辨流場特徵實驗的反應時間。(a) $p = 0.008$ 。(b) $F = 15.87$ ,  $p < 0.001$ 。

圖6.17，專家與非專家，所有方法之間都沒有統計上的顯著差異，因此可以知道這個實驗中沒有方法會特別容易讓受測者第一個就找到目標。接著我們比較了正確臨界點在序列上第一次出現的序號，即受測者在經過幾次的檢查臨界點之後第一次看到正確臨界點。同時比較整個序列中臨界點的個數，即受測者在整個實驗過程中總共看過幾次臨界點。結果如圖6.18：所有分群第一次注意到正確的臨界點平均約在 3 次，與隨機看到的結果一致。不過專家找到正確答案所花的總次數少於非專家，代表專家分辨臨界點的能力優於非專家。僅比較 saddle 的結果如圖6.19：專家的反應時間快於非專家。

## 6.6 討論

### 6.6.1 流場可視化方法的分析

**Hedgehog Plots** 在每個項目上，表現幾乎不是最差就是次差，因此在軌跡追蹤與特徵判斷上，可說是較差的方法。在自由注視的時候，受測者觀看 Hedgehog Plots 時的凝視點分布與其他方法的差異最大，也是注意流向變化激烈區域傾向最低的一種方法。另外相對兩種流線型方法與 LIC，Hedgehog Plots

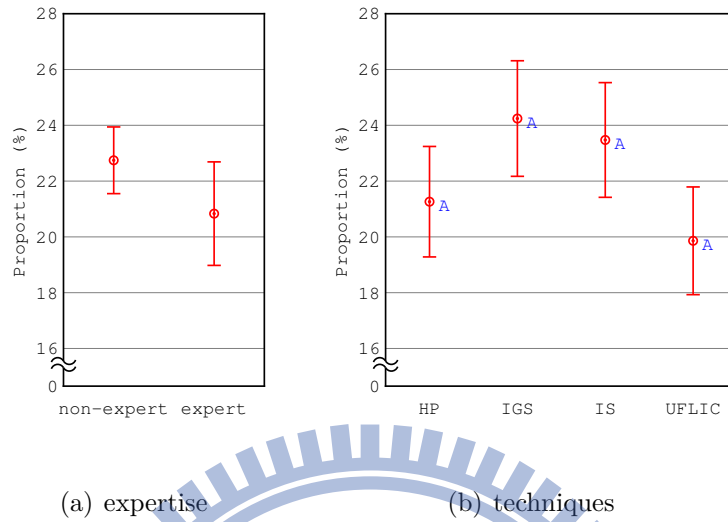


圖 6.17: 分辨流場特徵實驗中第一個看到的臨界點即為目標臨界點的比率。  
 (a)  $p = 0.386$ 。 (b)  $F = 1.00$ ， $p = 0.390$ 。

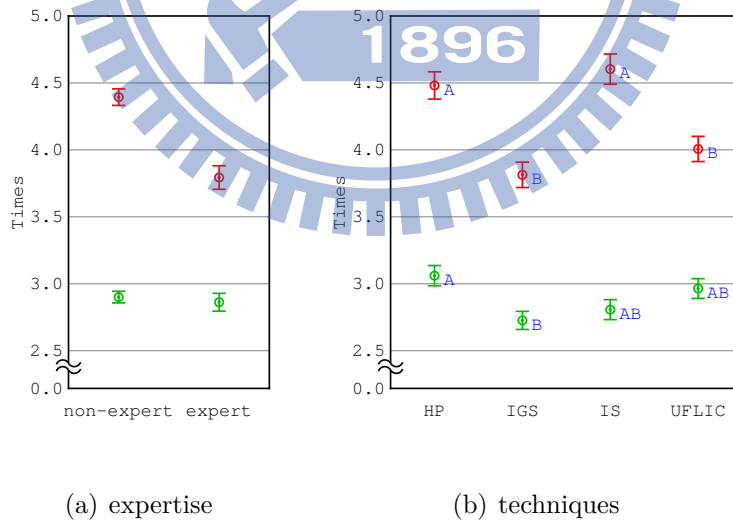


圖 6.18: 分辨流場特徵實驗中初次注意到目標時的找尋次數 (綠) 與全部的找尋次數 (紅)。  
 (a) First check :  $p = 0.628$ 。 Total check :  $p < 0.001$ 。  
 (b) First check :  $F = 4.29$ ， $p = 0.005$ 。 Total check :  $F = 13.87$ ， $p < 0.001$ 。

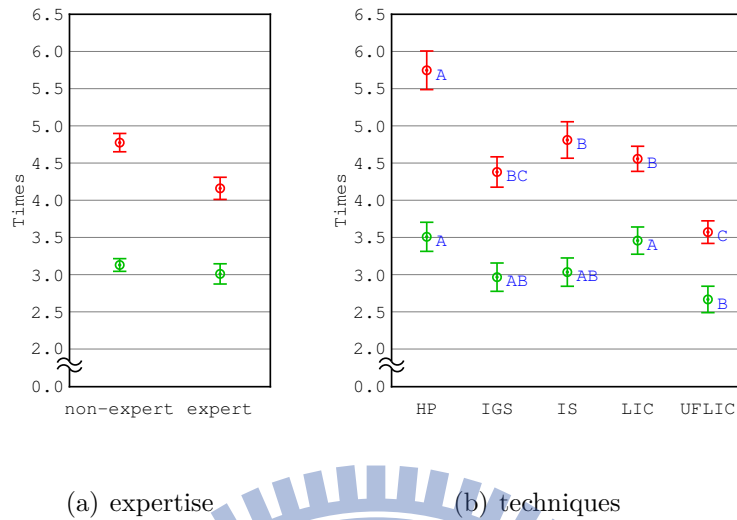


圖 6.19: 分辨流場特徵實驗中初次注意到目標時的找尋次數 (綠) 與全部的找尋次數 (紅)。(a) First check :  $p = 0.457$ 。Total check :  $p = 0.002$ 。(b) First check :  $F = 3.32$  ,  $p = 0.011$ 。Total check :  $F = 13.82$  ,  $p < 0.001$ 。

有速度的資訊，可以知道流場的速度分布，但是我們的實驗中沒有針對這點做比較，所以這個特性沒有辦法凸顯出來。

**Image-Guided Streamlines** 在所有實驗中反應時間上，排名在前三 (5 個方法比較時) 或前二 (4 個方法比較時) 之內。但是在找尋臨界點的實驗上位置精準度方面不夠好。我們推測是因為此方法要將流線均勻分布在畫面中，故流線尾端不會像 IS 一樣集中收在臨界點上，所以無法非常準確的判斷出位置。

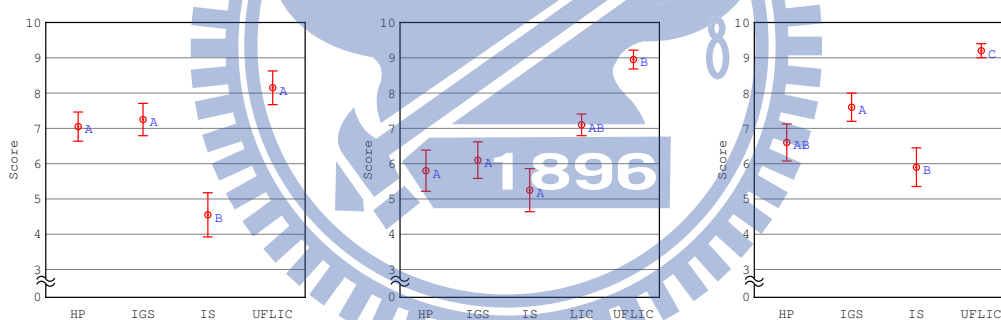
**Illustrative Streamlines** 在流動實驗中表現不佳，特別是眼睛軌跡與徑線的差異性上高於其他三種。在找尋臨界點的實驗上，正確性在較低的一群，位置的精準度在較高的一群。不過在在臨界點的顯著性上表現突出，是所有方法裡面最容易吸引人注意到臨界點的一種。我們推測是因為大量的流線尾端集中收到 sink 與 source 兩類的臨界點上，因此位置明確且顯著。

**LIC** 在找尋臨界點的實驗中，速度、精準度與正確率都很高。但是在臨界點吸引受測者注意的表現不佳。我們推測是因為相對於其他三種方法，畫面中顏色的對比較低，因此不會特別明顯。另外 LIC 是五種方法中唯一沒有方向的資訊的一種方法，所以無法進行流動與分辨臨界點的實驗。

UFLIC 的部分，UFLIC 的材質生成的概念與 LIC 相似，所以畫面也與 LIC 有些類似。而在 LIC 有比較的項目中，成績也與 LIC 相似或更好些。UFLIC 相對其他四種方法的優點之一是能表現非穩態的流場，在這次的實驗中無法發揮這個優點。但是在穩態的表現依然非常優秀。

UFLIC 在所有實驗中反應時間上，不是最快就是第 2 快。在找尋臨界點的實驗中，速度、精準度與正確率都很高；在分辨臨界點的實驗中，也有最快的速度與最低的搜尋次數。因此在特徵表現上幾乎可以說是最好的一個方法，特別是在 saddle point 上面表現非常突出。不過 UFLIC 在臨界點吸引受測者注意的表現與 LIC 一樣表現不佳，我們推測是因為跟 LIC 一樣畫面的對比較低的關係。

在受測者回饋意見的部分，受測者對於每種方法作答難易度的評分如圖 6.20。在流動軌跡的實驗中，IS 被認為是最難的。在尋找流場特徵的實驗中，UFLIC 最容易，其次是 LIC。在分辨流場特徵的實驗中，UFLIC 一樣是被認為最容易的方法，其次是 IGS。



(a) taks 2 流動軌跡實驗。 (b) taks 3 尋找流場特徵。 (c) taks 4 分辨流場特徵。

圖 6.20: 受測者對三個實驗中每種方法難度的評分，分數越高表示覺得越容易。

### 6.6.2 專家與非專家之間的比較

專家與非專家差別最明顯的地方在於反應的速度。三個實驗中專家的反應時間均明顯快於非專家的受測者。此外在找尋臨界點時，專家較非專家更傾向注意到臨界點。在其他的項目上，大部分專家的表現也都略優於非專家，但是在統計上面沒有顯著差異。



而在 Laidlaw 等人 [1] 實驗的所有的評測項目中，專家與非專家之間都沒有統計上的顯著差異，與我們的實驗在反應時間上面的結果不同。我們的實驗結果與 [1] 的實驗結果在反應速度的比較上結果不同可能原因有：第一，我們的專家與 Laidlaw 等人 [1] 實驗中的專家在背景上可能略有差異，同樣是流體力學背景的受測者，學習與研究方向的不同有可能會對實驗結果有所影響。第二，因為我們與 [1] 都只找了 5 位專家受測者，人數上有可能太少而出現的樣本不夠全面的情況。

### 6.6.3 眼動儀資料的資料分析與討論

從眼動儀紀錄資料的分析上，我們可以看到一些無法從過去實驗看到的部分。過往相關的使用者研究實驗需要設定評測目標，經由設計對應目標的實驗得到反應數據來的進行評測，因此無法比較在沒有特定指示之下受測者觀看流場影像的傾向。而我們第一個實驗比較了受測者在沒有特定指示下自由注視時的注視區域。證明了人們在觀看流場影像的時候，容易往流向變化劇烈的地方注意。

第二個實驗流動路徑的實驗裡面，我們嘗試比較眼睛軌跡與流動路徑的相似性。我們預期最理想狀態是眼睛沿著流動軌跡前進 (如圖6.21(a))。我們選擇的度量方式，可以保證軌跡差非常低 (約 40 以下) 的時候眼睛軌跡會非常接近流動路徑。而隨著數值越高，眼睛軌跡與流動路徑也越來越不像。包括像是在流動軌跡附近來回多次掃視 (如圖6.21(b))、眼睛會在追蹤的途中跑到離流動軌跡較遠的地方 (如圖6.21(b)) 等狀況。雖然軌跡差越高不保證就會越不精確，在高 difference 下仍有不少判斷非常精確的例子。不過越高軌跡差表示眼睛在追蹤流動路徑的過程中，眼睛順著軌跡而走的成分越低，也就表示這個方法越不容易讓受測者順著流動軌跡觀察流向。

第三個實驗找尋流場特徵的實驗，我們可以從眼動儀的資料可以用來分析流場特徵的是否容易吸引受測者的注意。在這個實驗中，眼動儀資料的評測結果的排序與反應時間、正確率與精確度有不小的歧異，因此可以知道臨界點吸引注意的能力與否與正確性跟精確度並沒有正面關聯。UFLIC 與 LIC 有極高的正確性與位置精準度，反應時間上 UFLIC 雖然僅和 HP 有統計上的顯著差異，但平

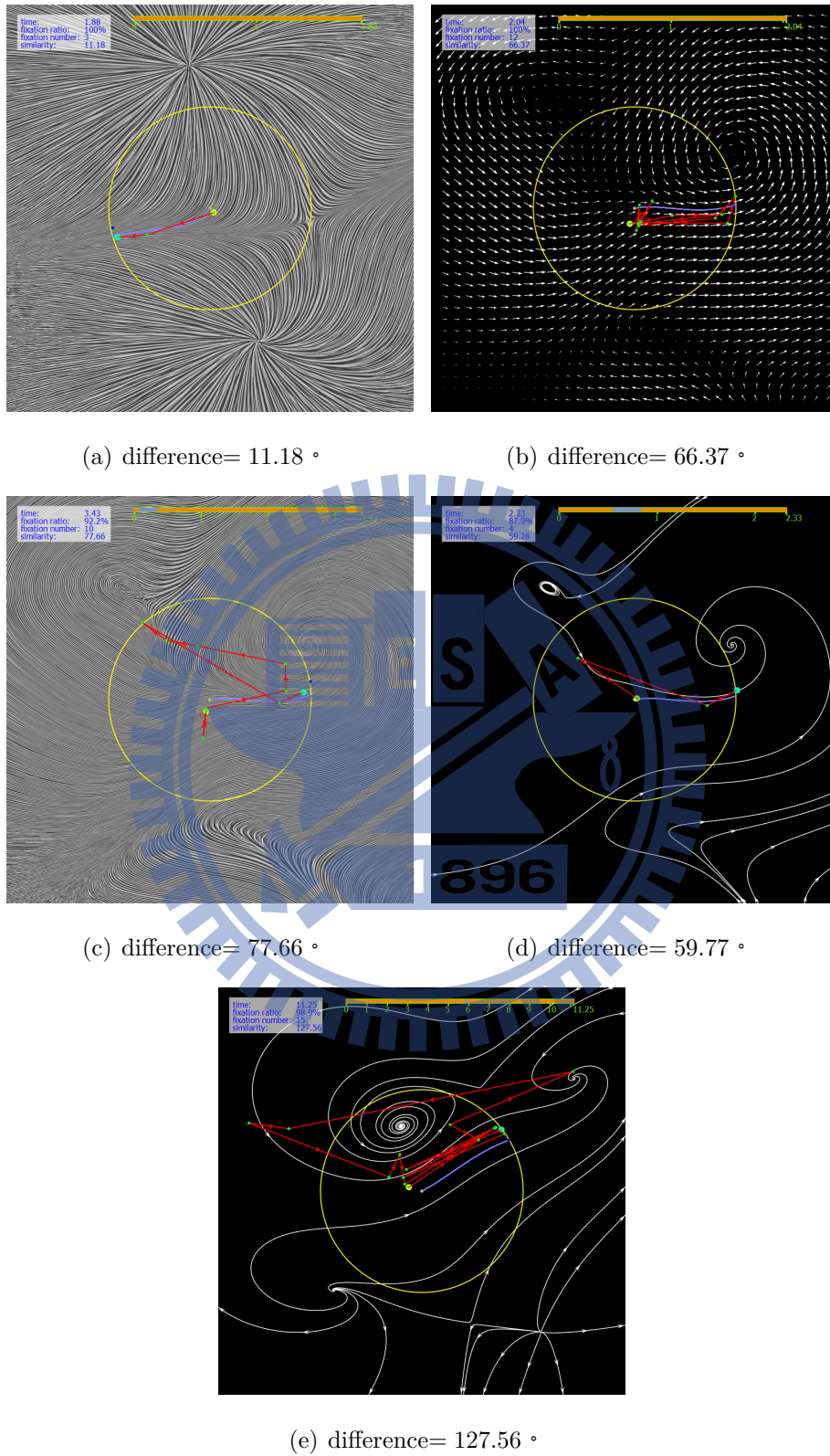


圖 6.21: 流動軌跡的例子。(a) 眼睛幾乎沿著流動軌跡前進，(b) 在流動軌跡附近來回多次掃視，(c) 眼睛會在追蹤的途中跑到離流動軌跡較遠的地方，(d) 與 (e) 眼睛先到圖中其他地方找到箭頭的資訊之後，再開始追蹤流動軌跡。

均是最底的，排除眼動儀量測指標外是最優秀的方法。可是這兩種方法在臨界點對受測者吸引力上面卻不高，因此可以知道相對其他方法臨界點的位置較不明顯，眼睛在找尋臨界點的時候會有較多的凝視點落在距離臨界點較遠處。但是即使不容易被注意到，這兩種方法的反應時間卻沒有比其他方法多，UFLIC 的時間還是最底的，我們推測是因為整個實驗過程包含「找到一個臨界點」與「確定臨該界點位置」與「滑鼠點擊臨界點」等多個步驟，LIC 與 UFLIC 在結構上很清楚的表示出臨界點的位置，因此在後面兩個步驟上面花費掉的時間可以彌補一開始較不容易被找到的情況，所以反應時間的表現不會比其他方法差。HP、IGS 與 IS 較容易從圖形的結構很快注意到臨界點，特別是 IS 最容易被注意到，但卻比較容易出現沒被辨識出來的情況。而在方法精確度的比較上則取決於畫面圖像的型態，因此能將流場資訊填滿每個畫素的 LIC 與 UFLIC，以及流線會收斂在 sink 與 souce 臨界點的 IS 精確度就較高。

第四個實驗分辨流場特徵的實驗裡面，我們原先嘗試比較

$$\text{平均單次判斷臨界點時間} = \text{反應時間} \div \text{觀察次數}$$

來比較平均觀察臨界點一次花費的時間。這樣可以得到

總次數：越多次代表越難第一次看到正確目標就確定；

平均單次判斷臨界點時間：越久代表臨界點越難分辨

但是後來發現受測者在判斷臨界點之外會有些其他動作，例如從實驗開始到看到第一個臨界點中間的時間，以及判斷完成後，移動滑鼠點擊下去這些時間。這些時間很難從整體反應時間裡面切割開，也不會隨著觀察次數而增加，但卻會在計算平均時間的時候被平均掉，因此可能會出現觀察次數高的時候平均時間會較低的情況。所以無法拿來作為評測的度量方式。

不過這個度量在觀察次數相近時還是可以拿來當作參考。在我們的實驗結果中，HP 與 IS 兩者有幾乎相同的觀察次數，也都較 IGS 與 UFLIC 高。代表 HP 與 IS 相較 IGS 與 UFLIC 要花較多的次數與時間才能確認臨界點。不過 IS 的反應時間卻高於 HP，這代表 IS 相較於 HP，在分辨流場的特徵的實驗中，兩次「看到臨界點然後做出判斷」間隔了較多的時間。

#### 6.6.4 實驗設計檢討

在分辨流場特徵的實驗中，我們將實驗分成 5 個臨界點類型，每個部分的實驗有 (5個流場) × (5種流場可視化方法) = 25 個刺激物影像，以隨機的順序排列進行實驗。原先我們在設計實驗的時候並不是將各個臨界點獨立開來做，而是 (5種臨界點) × (5個流場) × (5種流場可視化方法) = 125 個刺激物影像，以隨機的順序排列進行實驗，在每個刺激物影像開始之前指定接下來要找的臨界點類型，如圖6.22。不過因為軟體上的限制，最後我們修改成後來這個版本。

而實驗最後的結果所有的方法錯誤數目都極低。就最後的結果來看，這個實驗的在時間充裕的情況下，所有方法判斷臨界點類型都不會困難。將來在設計上，如果要比較不同方法之間困難度的差異，可改成限定時間的方式，要求受測者在限時內作答，用這種方式來鑑別不同方法之間辨識臨界點類型的難度。

在流線的設置中，除了流線設置的方式外，箭頭的設置方式也是一個影響很大的部分。雖然我們這次的實驗沒有對箭頭的設定進行比較，不過透過眼動儀，我們可以觀察到 IS 箭頭設置的模式對於受測者眼睛的行為產生很大的影響。例如 IS 流動軌跡的實驗中，difference 值是唯一高於其他方法的。我們原先認為是因為該方法中有可能出現線條極為稀疏的區域，受測者需要到其他地方觀察線條的形狀再回來推測流動軌跡。不過在觀察過每個人眼睛軌跡圖後，我們覺得除了上述原因之外，更重要的原因是因為過於稀少的箭頭。由於影像中能帶來方向資訊的箭頭分布較少，而受測者在看到箭頭之前無法確定流向，所以即使受測者看到流線，也無法立即去推測流動軌跡，需要先往影像其他地方尋找箭頭。圖6.21(d)是其中一個例子，即使出發點附近有流線，受測者仍先到較遠的地方找到箭頭之後再順著流線去找路線。另一個例子如圖6.21(e)，該受測者的眼睛軌跡先在圖中跑了很長的一段與流動軌跡無關的路線之後才找到箭頭，確認了方向之後重新回到原點開始找流動軌跡，之後又在流動軌跡附近來回確認，因此 difference 值極高。

同樣的現象發生在第四個實驗分辨流場特徵的實驗上，我們發現一些 IS 的影像中，受測者眼睛的軌跡會進入一個圓圈，接著出來之後接著又馬上進入同一個圓圈裡面。在這樣例子中，流線上的箭頭均不在圓圈內，因此我們推斷相對

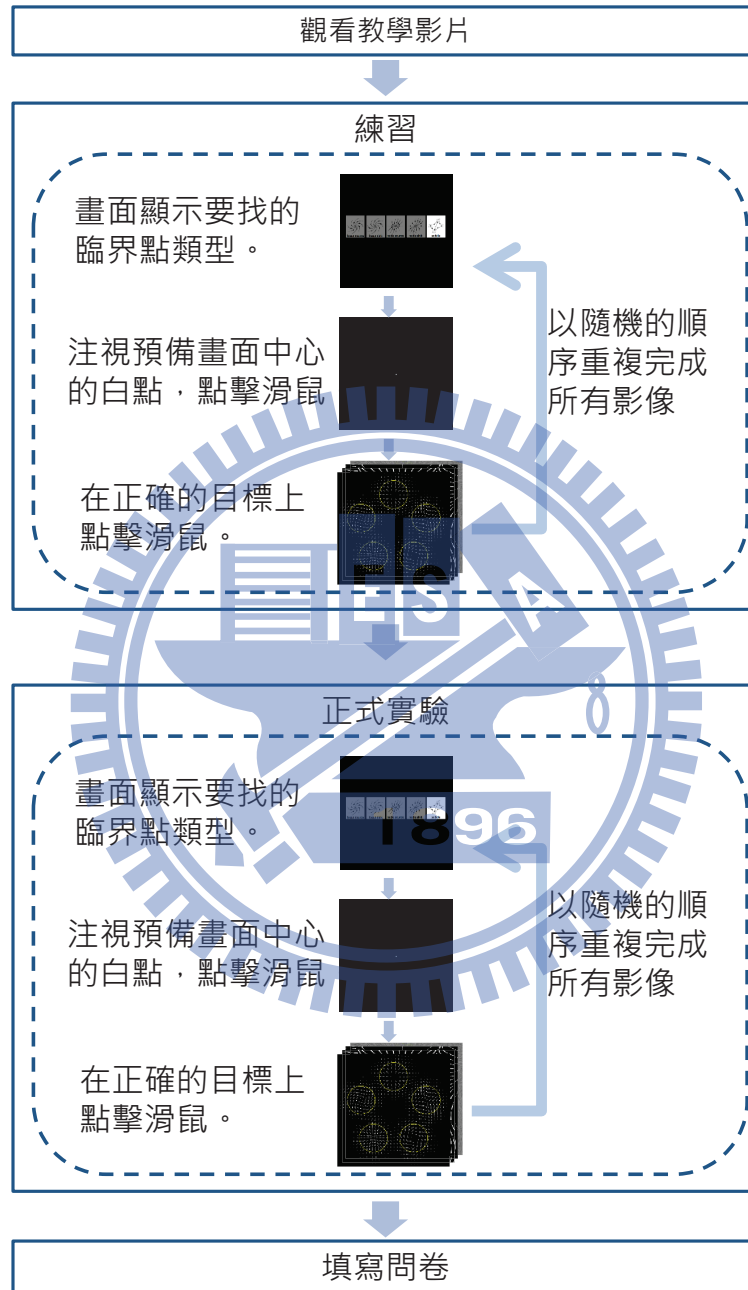


圖 6.22: 較早版本的實驗四 (分辨流場特徵) 流程圖。



於其他方法，受測者有時會花了額外的時間與次數在尋找線上的箭頭以確定流動方向上面。如圖6.23是其中一個例子。這個原因也是造成了 IS 較高的反應時間與觀察次數的原因之一。因此若是改變 IS 方法中箭頭的設置模式，實驗也可能會出現不一樣的結果。將來也可以在這個地方進行研究與分析。

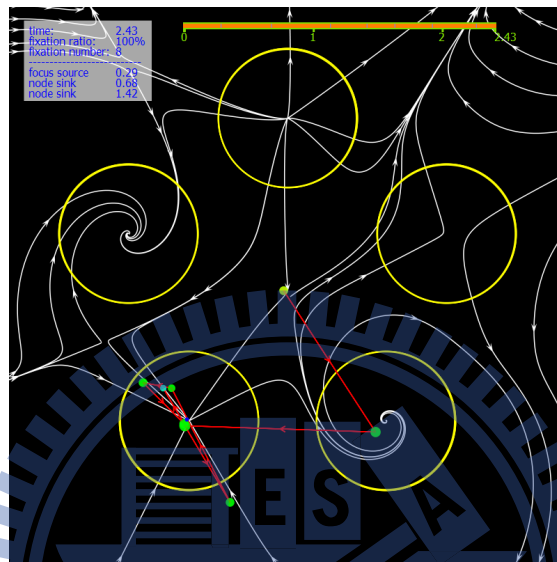


圖 6.23: 分辨流場特徵的例子。左下角的臨界點，受測者在進入 AOI 之後，因為看不到箭頭的方向資訊，因此跑出 AOI 找尋箭頭，找到箭頭後重新回到 AOI 區內完成確認。

我們在進行實驗的時候，無法避免的使用了滑鼠。而畫面中滑鼠的游標多多少少會干擾到受測者的反應。要如何將滑鼠游標對視覺的影響儘可能排除掉，或者將滑鼠游標的影響加入分析模型中，也是將來我們要嘗試的目標。

## 結論與未來展望

### 7.1 結論

在本篇論文中，我們應用眼動儀進行了二維流場可視化方法的使用者研究。與過去的使用者方法相較，除了比較作答的結果之外，也能經由應用眼動儀得到眼睛注視流場影像時眼睛注視軌跡的資料並進行分析。利用眼動儀，我們設計了 4 個部分的實驗，包括

- 自由注視流場時，眼睛注意的區域，
- 分析眼睛追蹤流線軌跡時眼睛的軌跡移動方式，
- 從眼睛凝視點分布與流場特徵位置的相關性來比較流場特徵的吸引注意的能力，
- 找尋特定流場特徵時，眼睛軌跡的移動方式，

此外，我們也以 4 種新的評測方式來分析不同流場影像的差異跟效果：在第 1 個實驗，我們分析受測者自由注視流場影像時眼睛凝視位置與流場速度、臨界點位置的關係；在第 2 個實驗，我們分析眼睛軌跡與流動路徑的相似性；在第 3 個實驗，我們分析凝視點分布與流場特徵的距離平均來檢測流場特徵吸引



受測者注意的能力；在第 4 個實驗，我們分析受測者在找尋正確流場特徵的過程中，在不同待選目標中來回的次數以及目標被找到的順序。

我們的結果顯示，自由注視的區域與流場臨界點位置有正相關性，同時我們證明了受測者會傾向於注意流場中變化劇烈的地方。在流動路徑的實驗中，IS 這方法受測者追蹤流動軌跡的能力是最差的。在找尋流場特徵的實驗裡面，IS 最容易吸引受測者注意到臨界點位置，而 UFLIC 與 LIC 這兩種材質紋路表現的方式則是最不容易被注意到的。在分辨流場特徵的實驗裡面，受測者在找尋流場特徵的過程，所有的方法均沒有出現第一個觀察到的目標即為所要找的目標的比例較高的情況。且第一次看到要找的目標的時候平均次數也大致上與隨機尋的平均次數不會差距太大，因此並沒有方法特別會讓受測者容易直接找到目標。而總檢查次數上，則是 UFLIC 與 IGS 最好。

這些結果是我們觀察到一些過去的評測方式無法比較到的地方，這讓我們可以從更多面向瞭解人們在觀看流場影像時候的行為，以及不同流場可視化方法在不同目標下的效率。

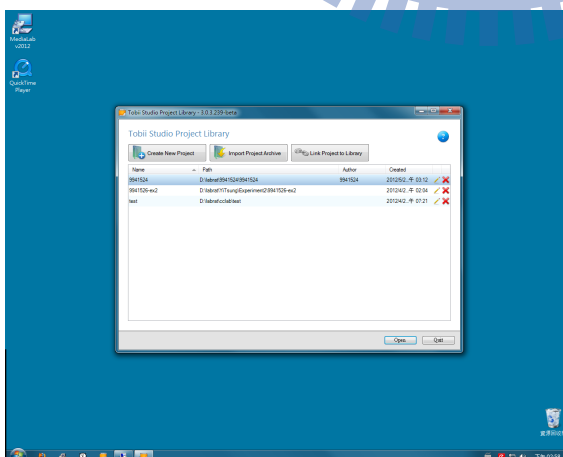
## 7.2 未來展望

雖然我們實驗中用的流場可視化方法中有用來做非穩態顯示的方法 UFLIC，可是我們的實驗僅在穩態流場上面。將來我們可以將實驗擴展到非穩態的流場影像上面，用眼動儀來比較不同非穩態流場的流場可視化方法。例如是否會注意到臨界點的出現、移動或消失，以及從紊流變成平流或從平流變紊流的時候眼睛會優先注意流場中的什麼位置等。

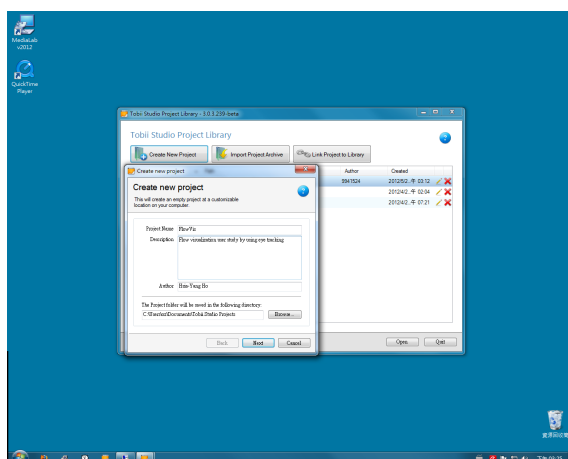
## A.1 Tobii Studio 操作範例

我們以本篇論文的實驗一為範例，照步驟完成實驗一的精簡版本。並且示範實驗操作過程以及資料的匯出過程。

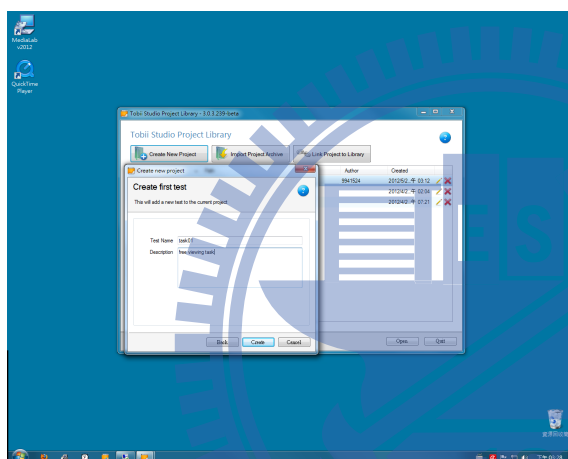
### A.1.1 建立專案檔



開啟 Tobii Studio，開啟後最一開始會出現檔案選單。選擇「Create New Projects」開始建立專案。

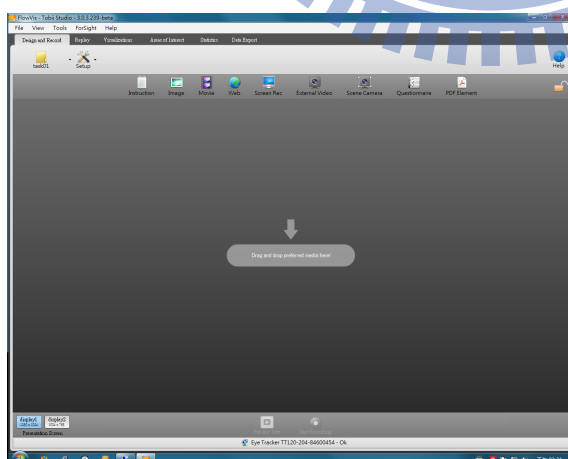


輸入專案名稱、文字說明與作者。  
然後按下「Next」。



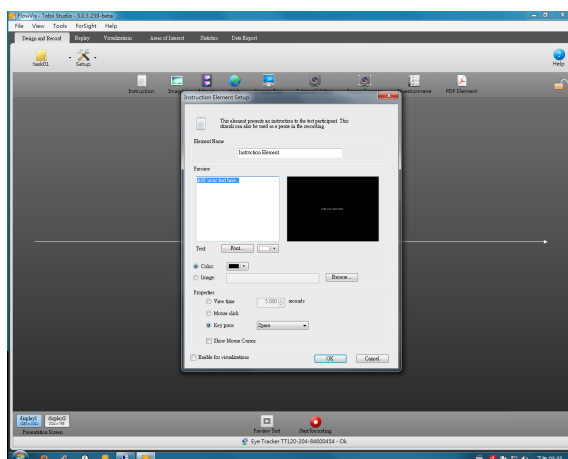
輸入第一個實驗的名稱以及實驗的描述，按下「Create」完成專案中第一個實驗的建立。

### A.1.2 設置實驗



專案建立之後，會進入如左圖的實驗編輯畫面。

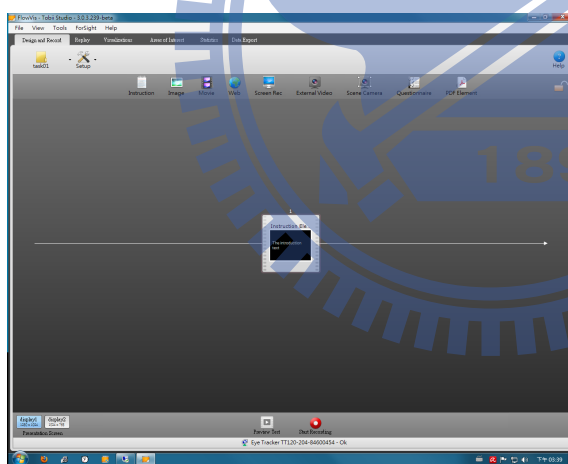
左上角黃色資料夾下方顯示目前的實驗名稱。



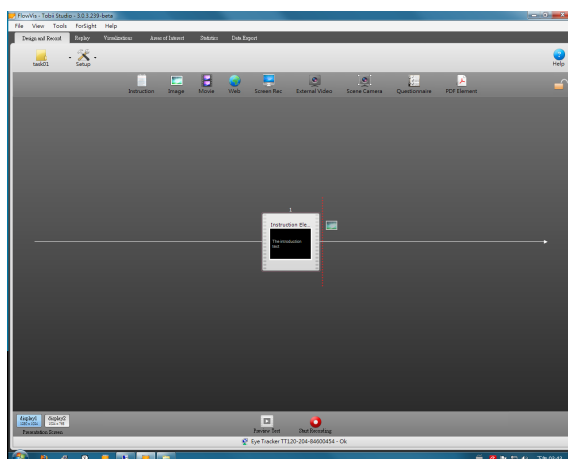
接著我們製作實驗一開始的指示畫面。

按住上排物件中的「Introduction」，將該物件拖曳到畫面中央，就會出現 Introduction 畫面的操作選單。「Introduction」物件在實驗的時候會顯示文字指示。

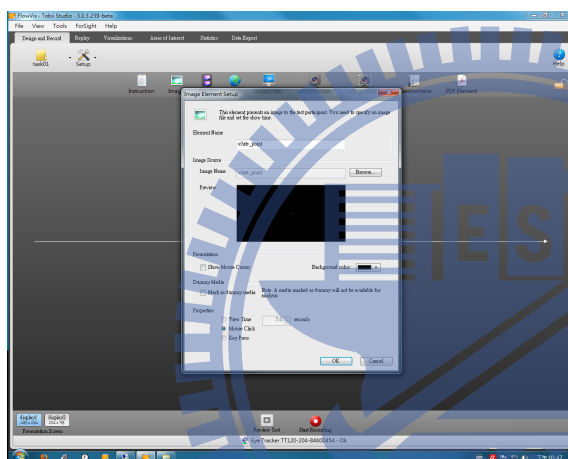
輸入 Introduction 的文字，並且將物件相關設定設好。設定內容包含背景顏色或圖片、結束 Introduction 的方式 (定時、點滑鼠或敲擊鍵盤) 等。



按下「OK」完成「Introduction」物件的設置。當我們開始設定第一個實驗的物件設定的時候，畫面上會出現實驗的流水線來表示實驗時物件播放的順序。在這個範例中我們設置了「Introduction」物件，因此畫面中就會出現一個「Introduction」物件在實驗的流水線上。



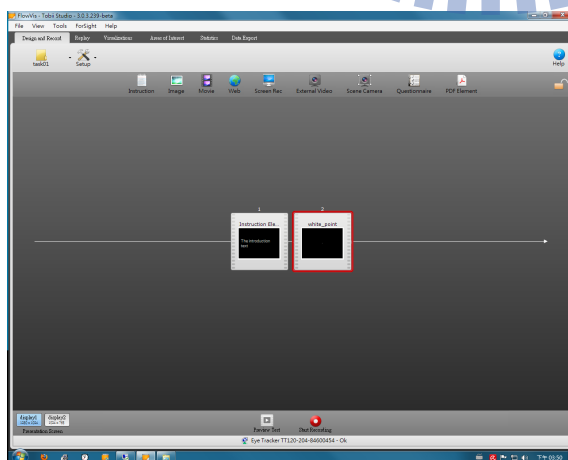
我們開始設置實驗用到的刺激物影像。用滑鼠按住「Image」物件，將其拖曳到剛剛設置好的「Introduction」物件右側 (排在「Introduction」之後)。



和之前將「Introduction」物件拖曳到畫面中一樣，會出現圖片的操作選單。

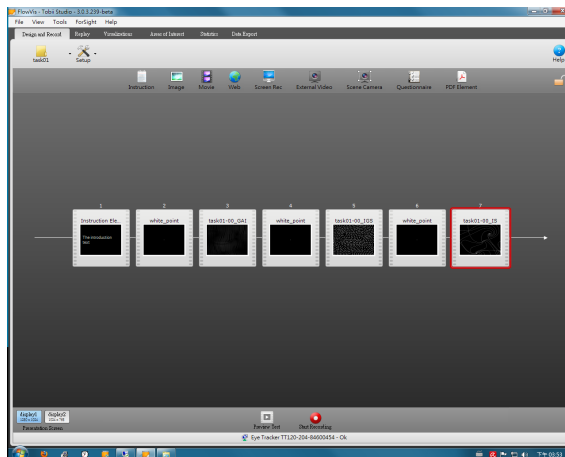
點選「Browse...」開啟實驗用的刺激物圖片，並將相關設定設好。在我的實驗中我設定兩個地方，一個是滑鼠顯示與否 (Show Mouse Cursor)，一是結束圖片的方式。

最後點選「OK」完成設定。



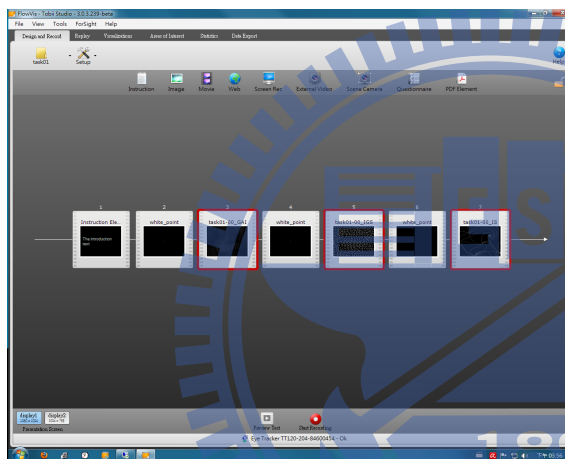
完成後「Image」物件也出現在流水線上

紅色外框圈起來的表示目前點選的實驗物件。

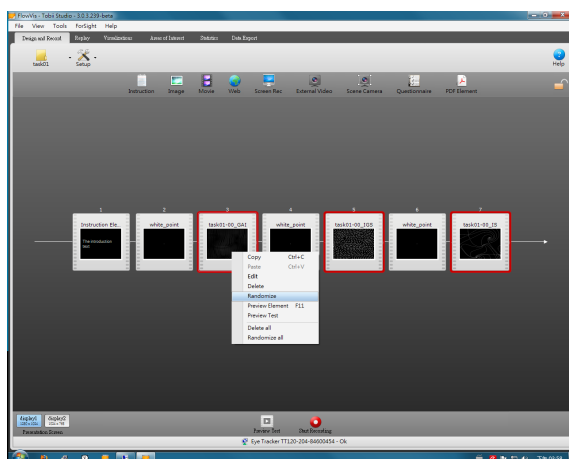


重複剛剛的動作將所有實驗用的圖片放到流水線上。

如果是同樣設定以及內容的圖片，可以用 Ctrl+C 與 Ctrl+V 複製貼上。在我的實驗裡面，所有的預備畫面都是同張圖片，因此我採用複製貼上的方式來設置預備畫面。

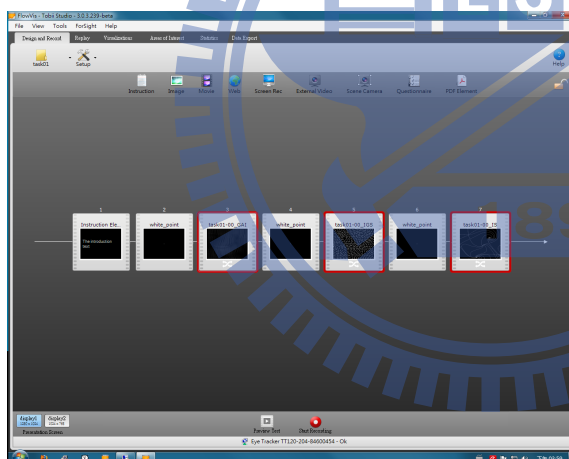


現在流水線上面已經有「Introduction」物件，以及交互排列的預備畫面和實驗畫面了，接著我們要開始畫面隨機化的設置。我們先按「Ctrl」然後用滑鼠左鍵點選所有要選取的圖片。在我的實驗中，流場的畫面會以隨機的方式出現，準備畫面以及「Introduction」物件則是固定順序，因此我們將所有的流場圖片選取起來。



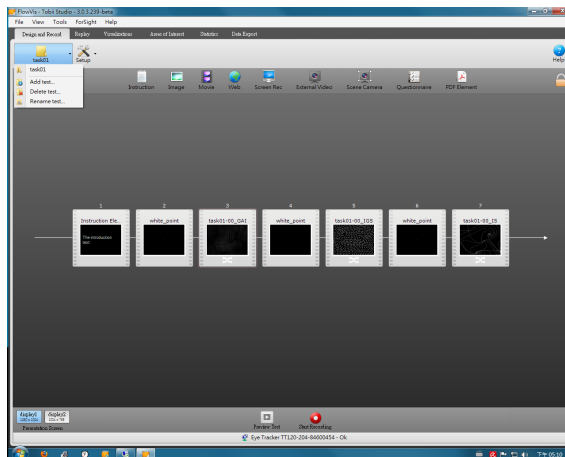
對著選取起來的物件按滑鼠右鍵會出現一排選單，選「Randomize」即可將選取的圖片設為隨機。

之後在進行實驗的時候，被設為隨機化的圖片將會以隨機的方式出現。例如我設定第 3、5、7 個物件隨機化，則實驗的時候其他物件照設定的順序撥放，原本第 3、5、7 位置上的三個物件，會以隨機的方式在順位 3、5、7 分別出現一次。

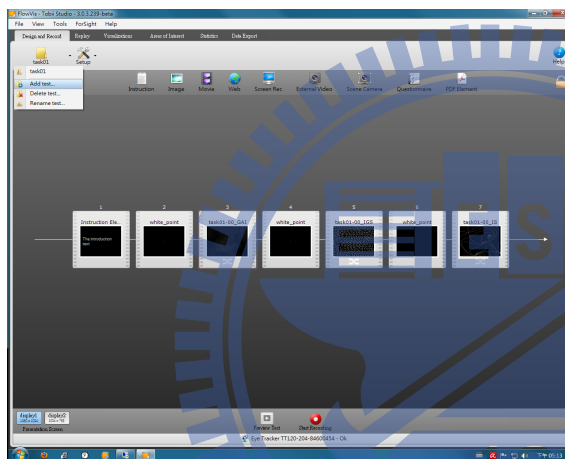


隨機化的設置完成後，物件下面會有隨機化的符號。

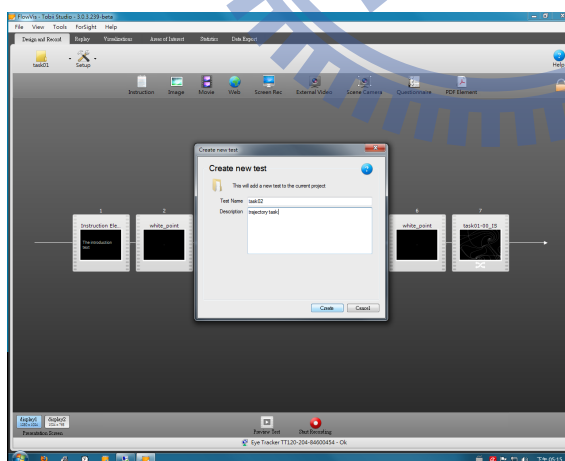




我們完成了實驗一的簡單設置，接下來要設置其他部分的實驗。我們點選畫面左上角的實驗資料夾。



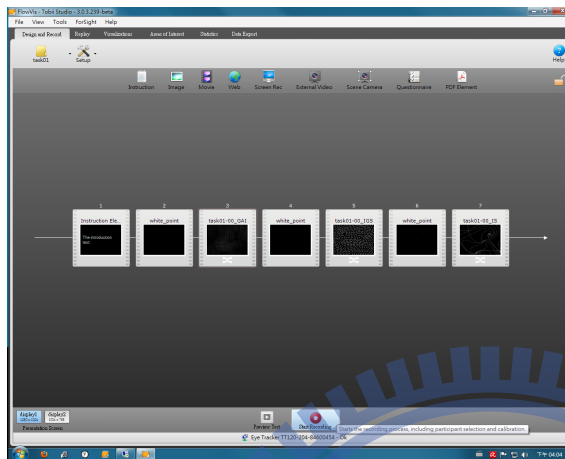
按下「Add test」，接著出現實驗設定的畫面，就可以新增實驗。



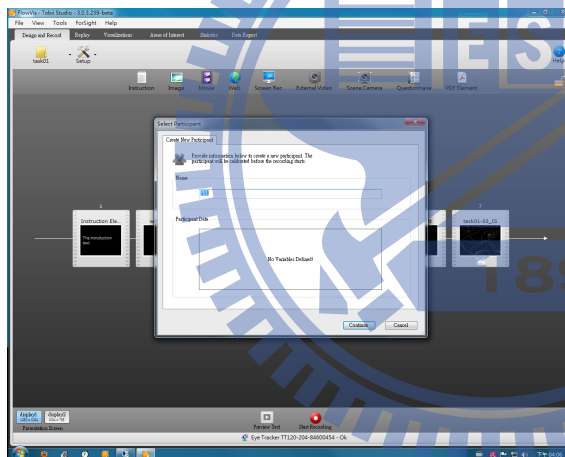
然後開始設定新實驗。

## A.1.3 進行實驗

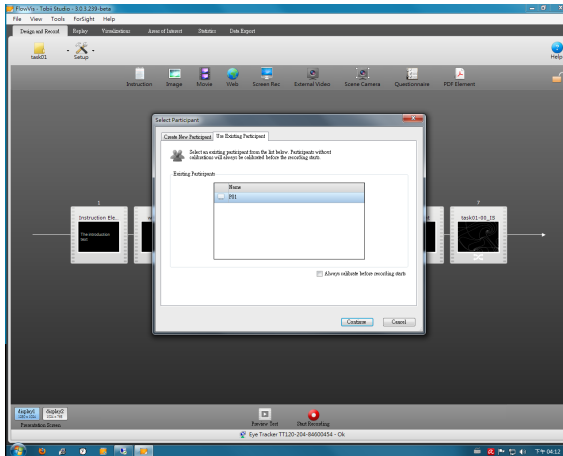
實驗設定完成之後，接下來就是進行實驗。



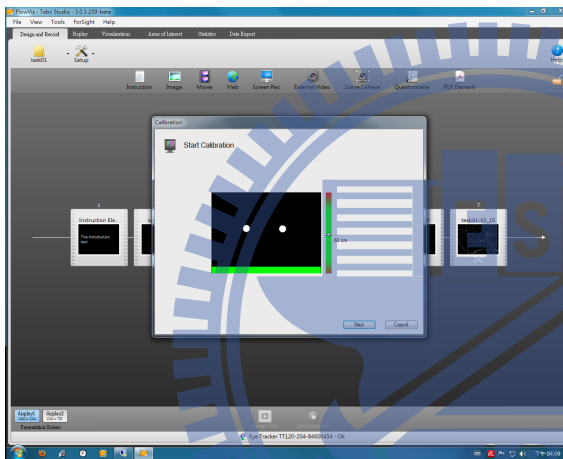
首先按下畫面下方的「Start Recording」。



此時還沒有其他受測者紀錄，所以會顯示「Create New Participant」。



若已經做過校正，可以選擇直接使用校正資料。



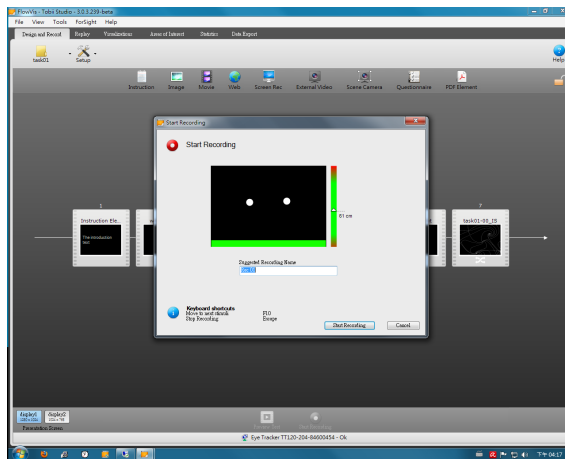
選新受測者的話會出現校正開始的畫面。

中間畫面為眼睛正對到螢幕的位置，中間右側的顯示的「60cm」為目前眼睛與螢幕的距離，最理想的距離為 60cm。不論校正還是實驗的時候，右側與下方都要為綠色。

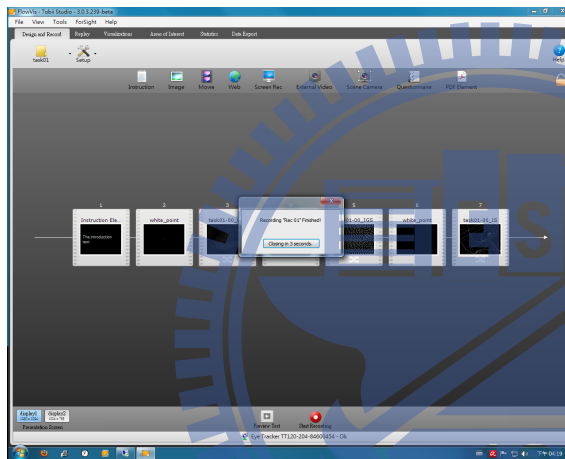


左邊為校正中的畫面。

校正的時候畫面會出現紅色的圓球並且在畫面四個角落與畫面中心之間移動。整個校正過程眼睛都要盯著圓球移動。



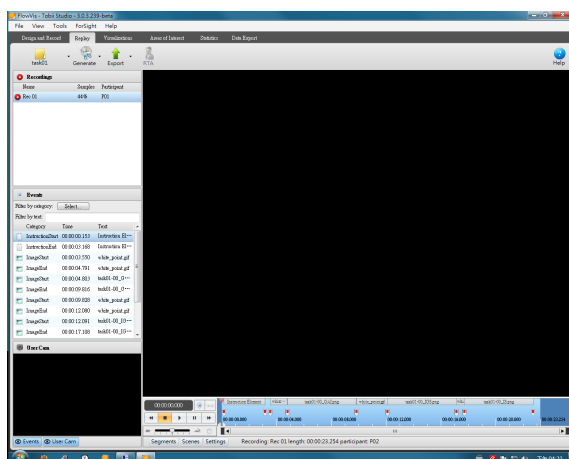
校正完成之後就出現這個開始實驗前的畫面，確定右邊與下方都是綠色狀態後，按「Start Recording」開始實驗。



實驗完成的時候會顯示實驗完成的對話按鈕。

#### A.1.4 閱讀實驗資料與資料匯出

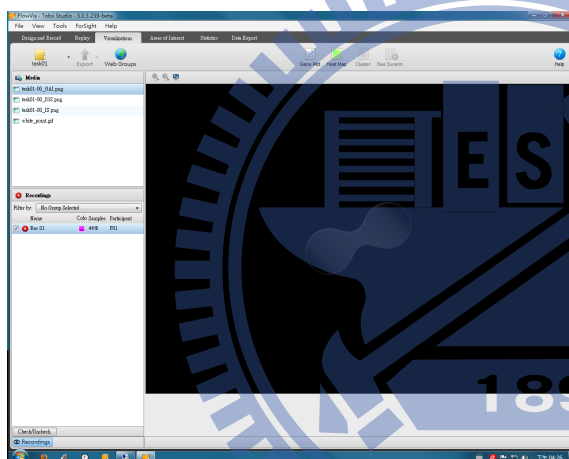
在完成實驗之後，我們接著要檢閱我們剛剛的實驗內容。最後則是將我們的資料匯出以進行後續的分析。



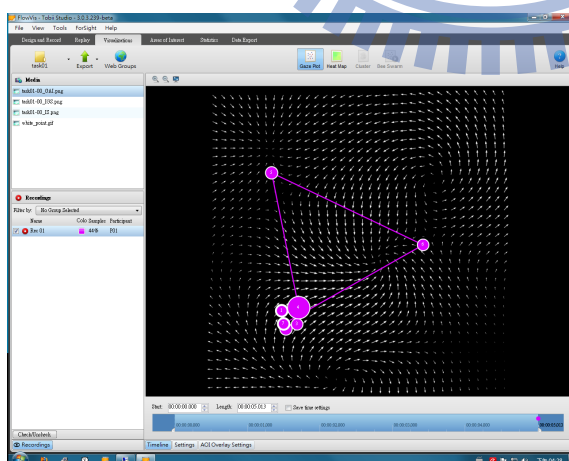
我們首先看實驗過程的部分。按上方第二排的「Replay」進入 Replay 介面。

左上角「Recordings」欄位表示實驗受測者記錄，在這張範例的圖片中 Samples 44% 表示眼動儀捕捉到眼睛資訊的比率為 44%。

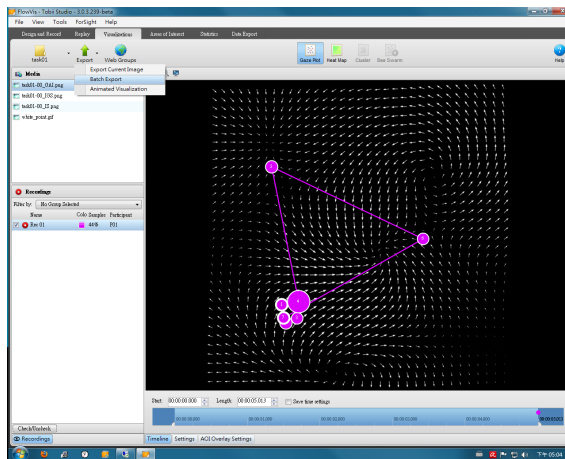
點選畫面下方的影片撥放可以重播實驗的過程。



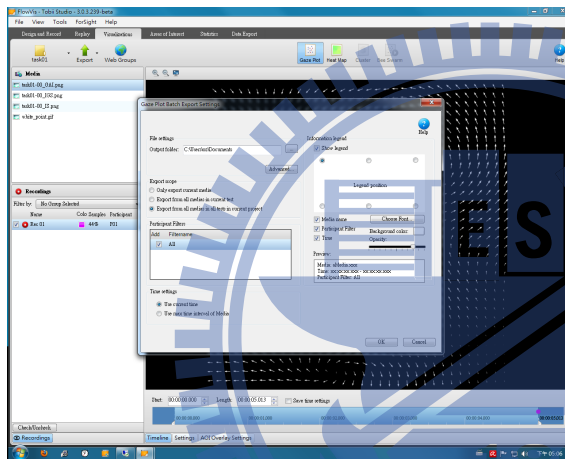
接著進入實驗資料檢視。按上方第二排的「Visualization」進入 Visualization 介面。



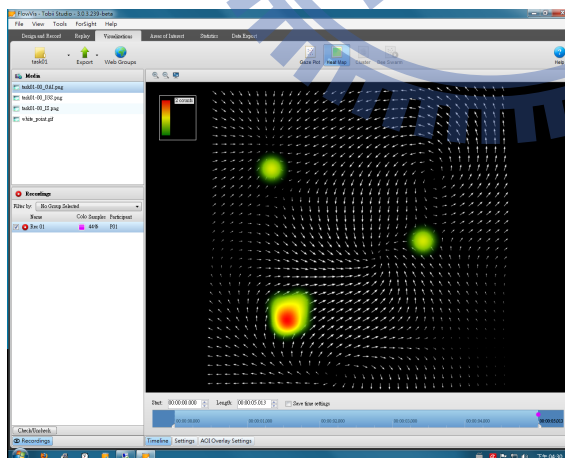
點選上排的「Gaze Plot」圖鈕，可以看到每個刺激物眼睛軌跡。可以從左上角來切換選擇不同的刺激物影像。



我們現在要將眼睛軌跡的圖片匯出，點選「Export」→「Bench Export」。

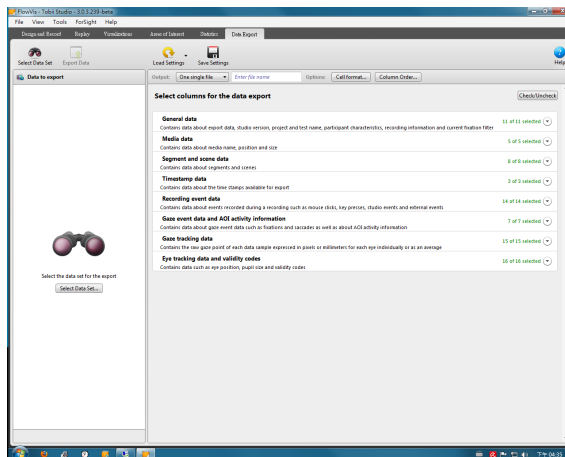


設定匯出細節後按「OK」即完成軌跡圖的匯出。

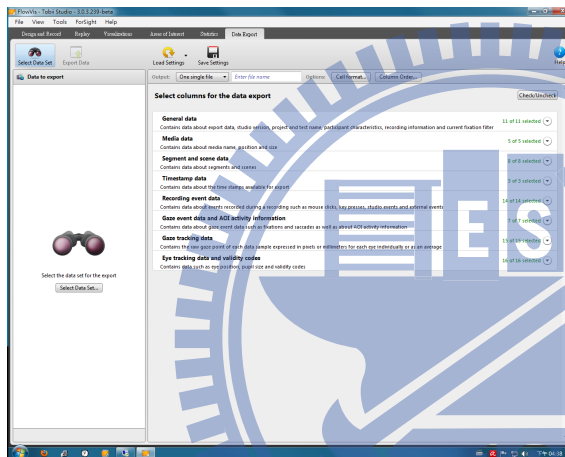


點選上排「Heap map」的圖鈕可以看到每個刺激物影像的熱區圖。

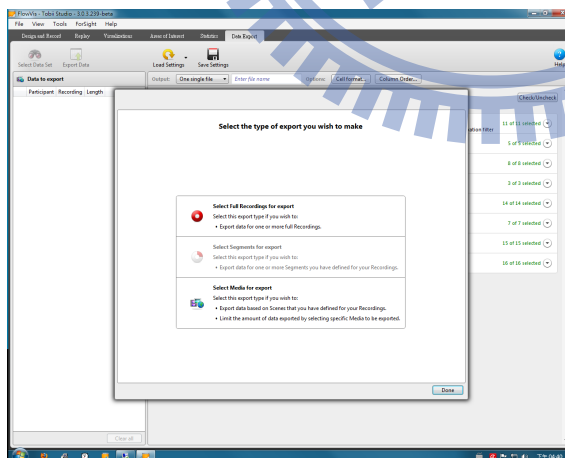
圖片匯出方式同 Gaze Plot。



最後我們匯出實驗的資料。  
按上方第二排最右側的「Data Export」。  
中央的選單是要匯出的資料種類，可依需求選擇。

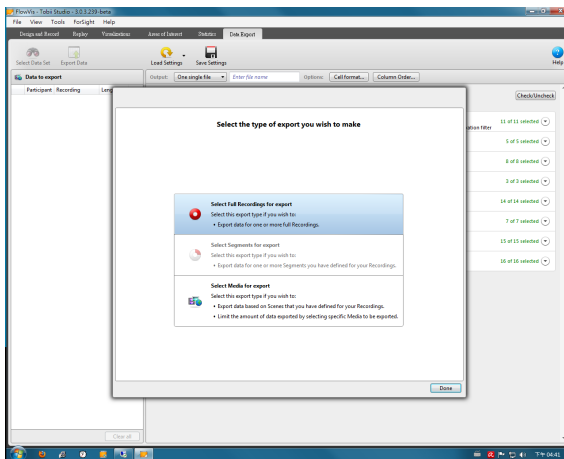


按左上角「Select Data Set」的圖  
鈕，選擇要匯出的資料。

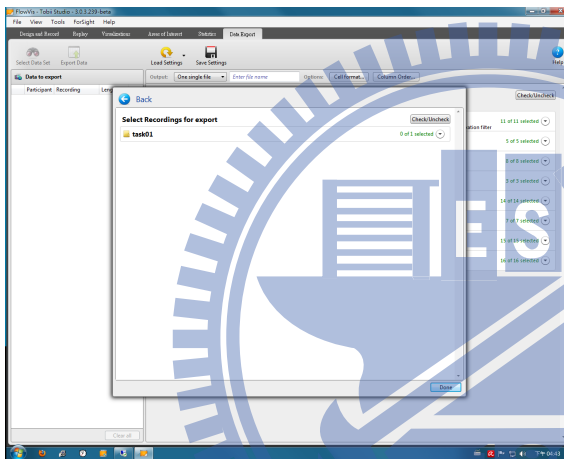


出現選單。

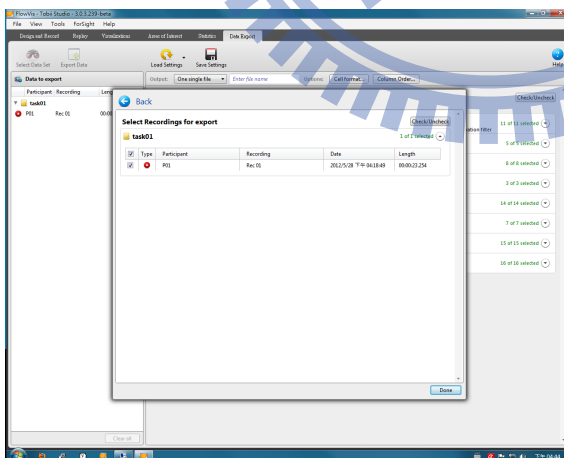




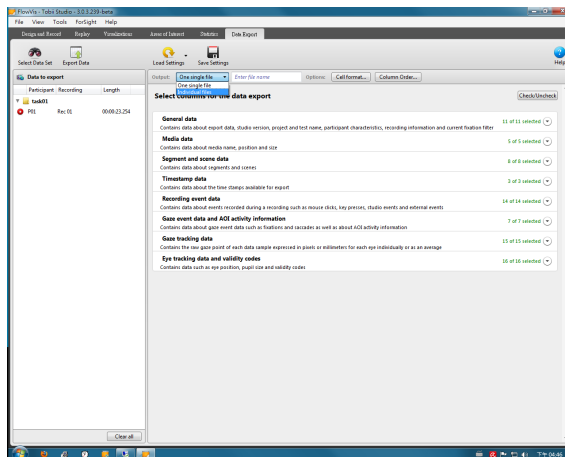
點選「Select Full Recordings for Export」。



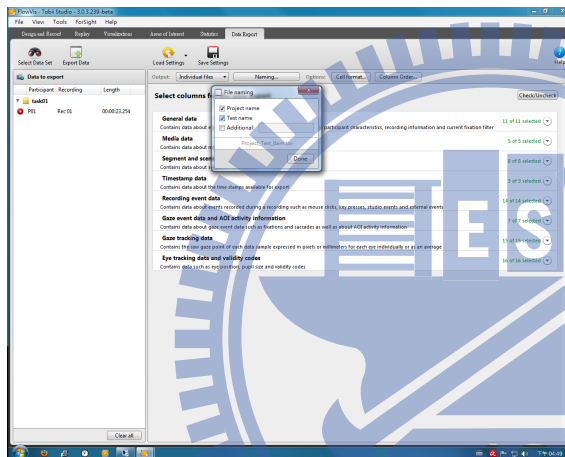
出現實驗選單。



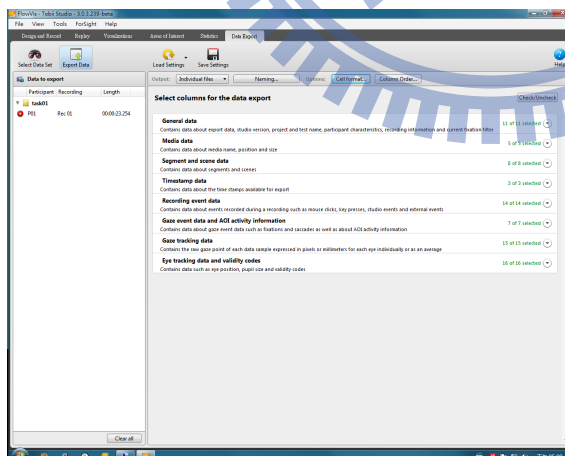
點選實驗，選擇要匯出的受測者。



選擇是要所有資料放在一個檔案中或者每個受測者每個實驗獨立成一個檔案。在我的實驗裡面我是選擇分開來匯出。



按「naming」選擇檔名格式。



最後按「Export Data」的圖鈕將資料匯出。

## A.2 實驗一的流場圖片、流向差圖與凝視點分布

黃色點表示凝視點，為所有受測者注視該圖片的凝視點的集合。凝視點大小與凝視的時間呈正比。紅色為流向差的值，越紅色的區域表示流向差的值越高。



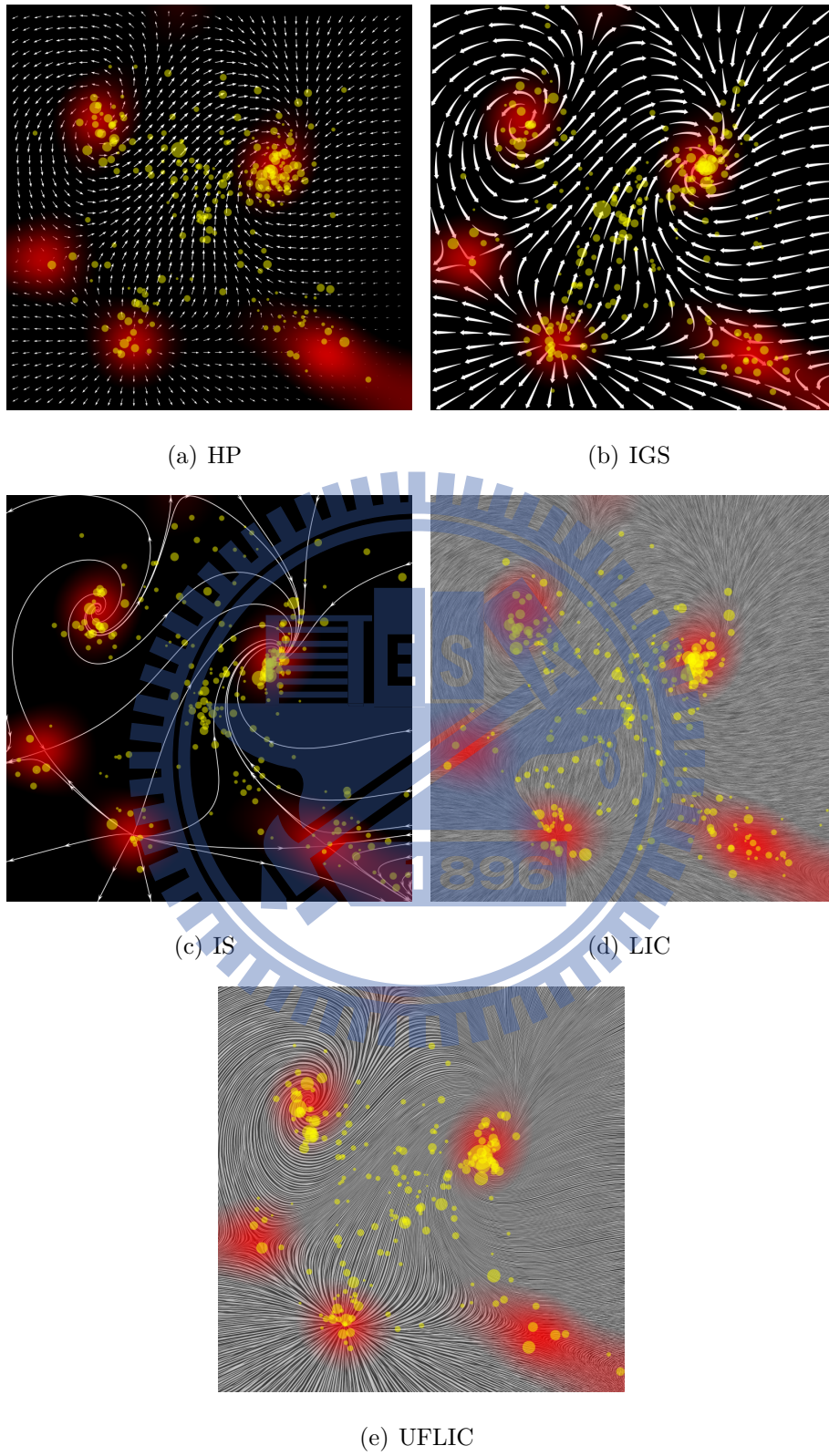


圖 A.1: 流場 01 的 5 個流場影像與流向差圖以及所有受測者凝視點分布。

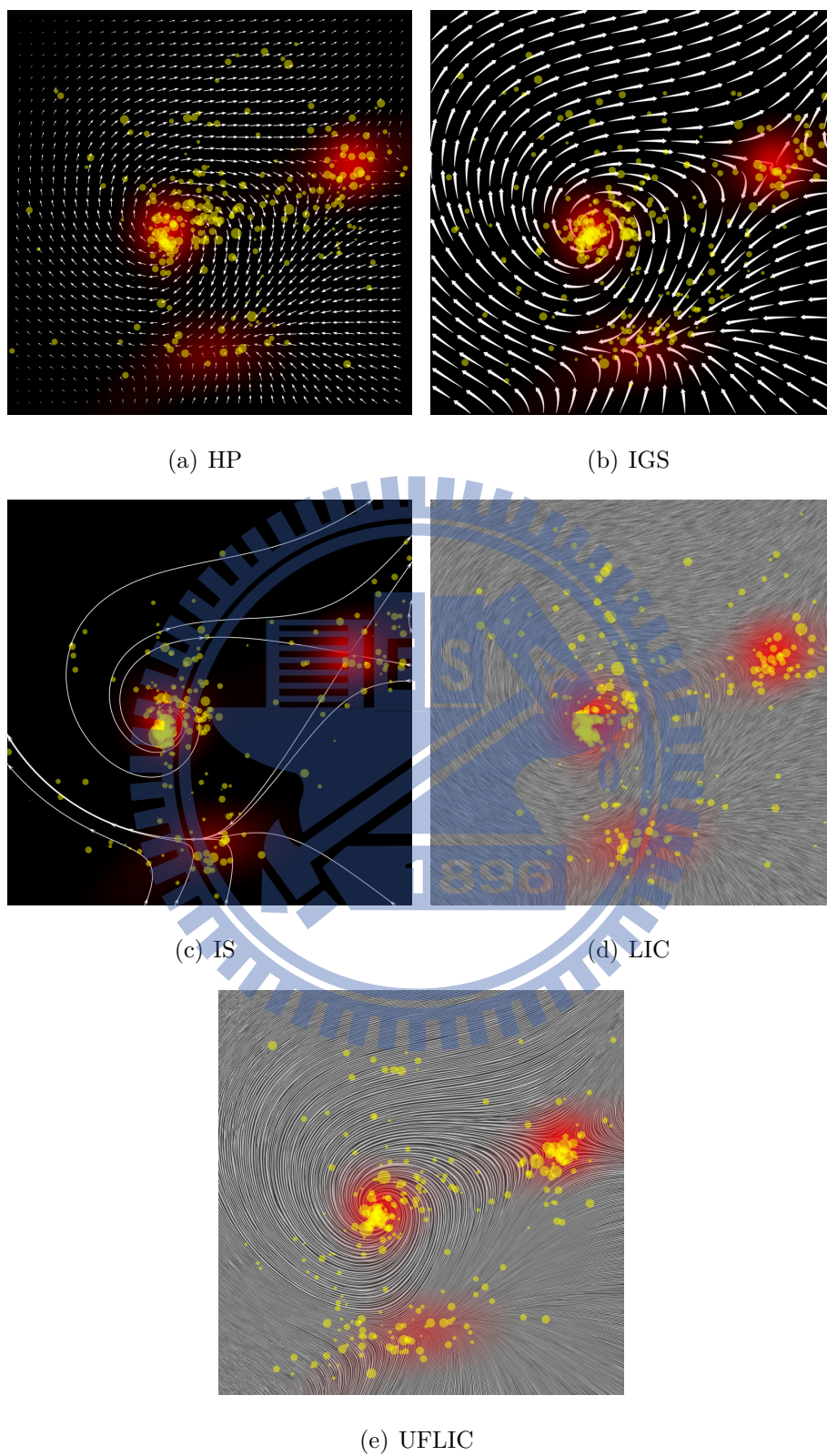


圖 A.2: 流場 02 的 5 個流場影像與流向差圖以及所有受測者凝視點分布。



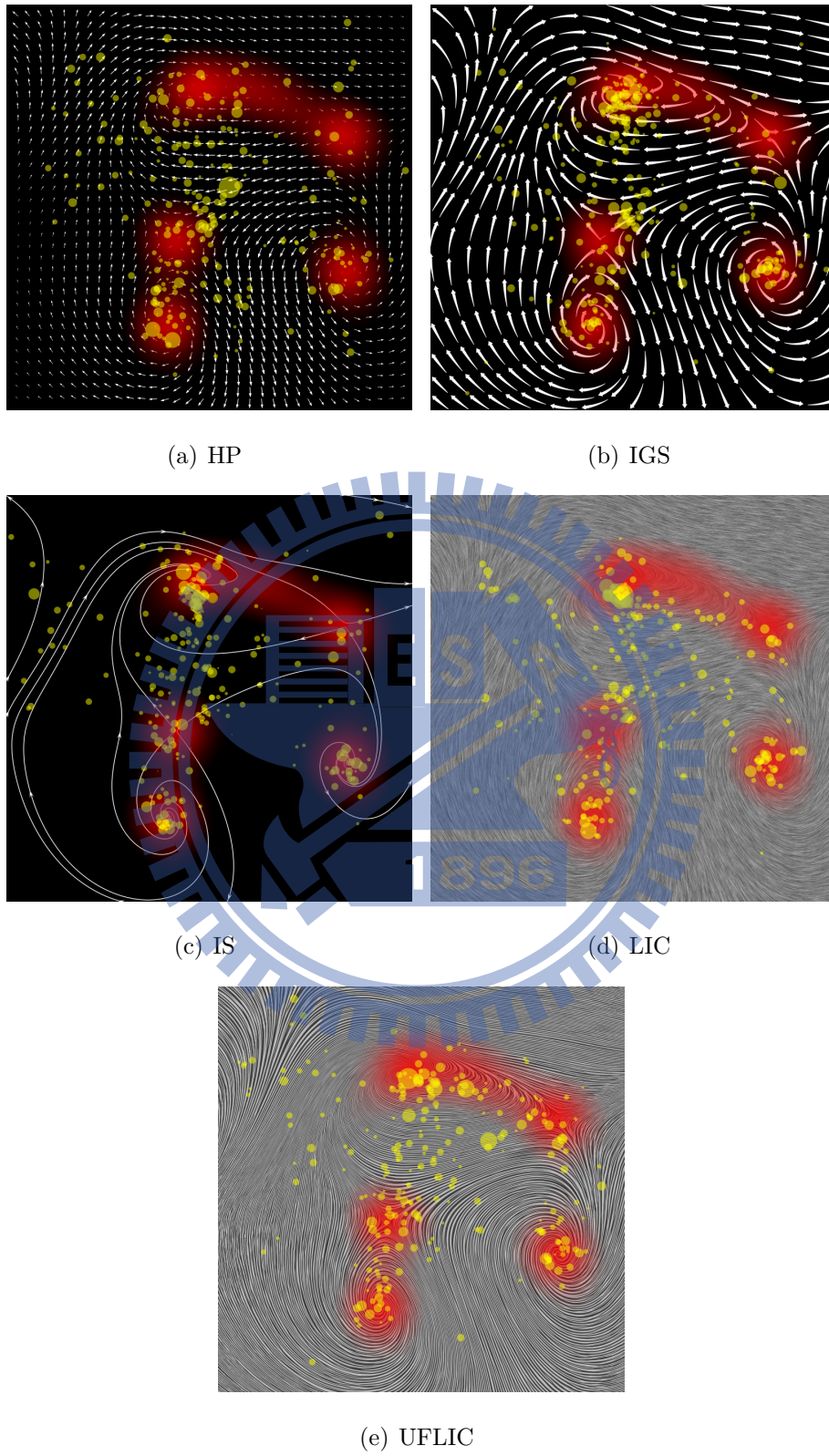


圖 A.3: 流場 03 的 5 個流場影像與流向差圖以及所有受測者凝視點分布。

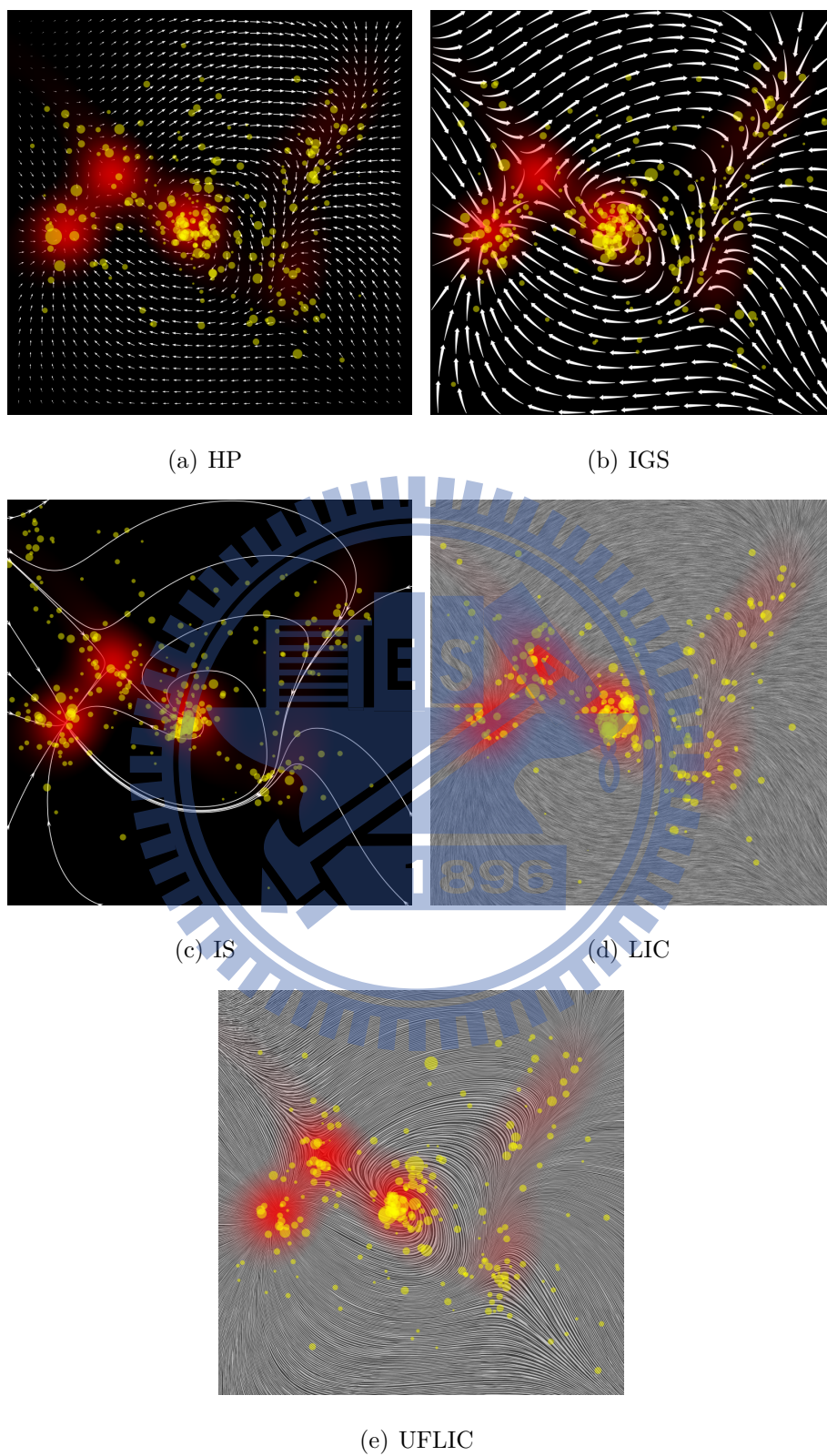


圖 A.4: 流場 04 的 5 個流場影像與流向差圖以及所有受測者凝視點分布。



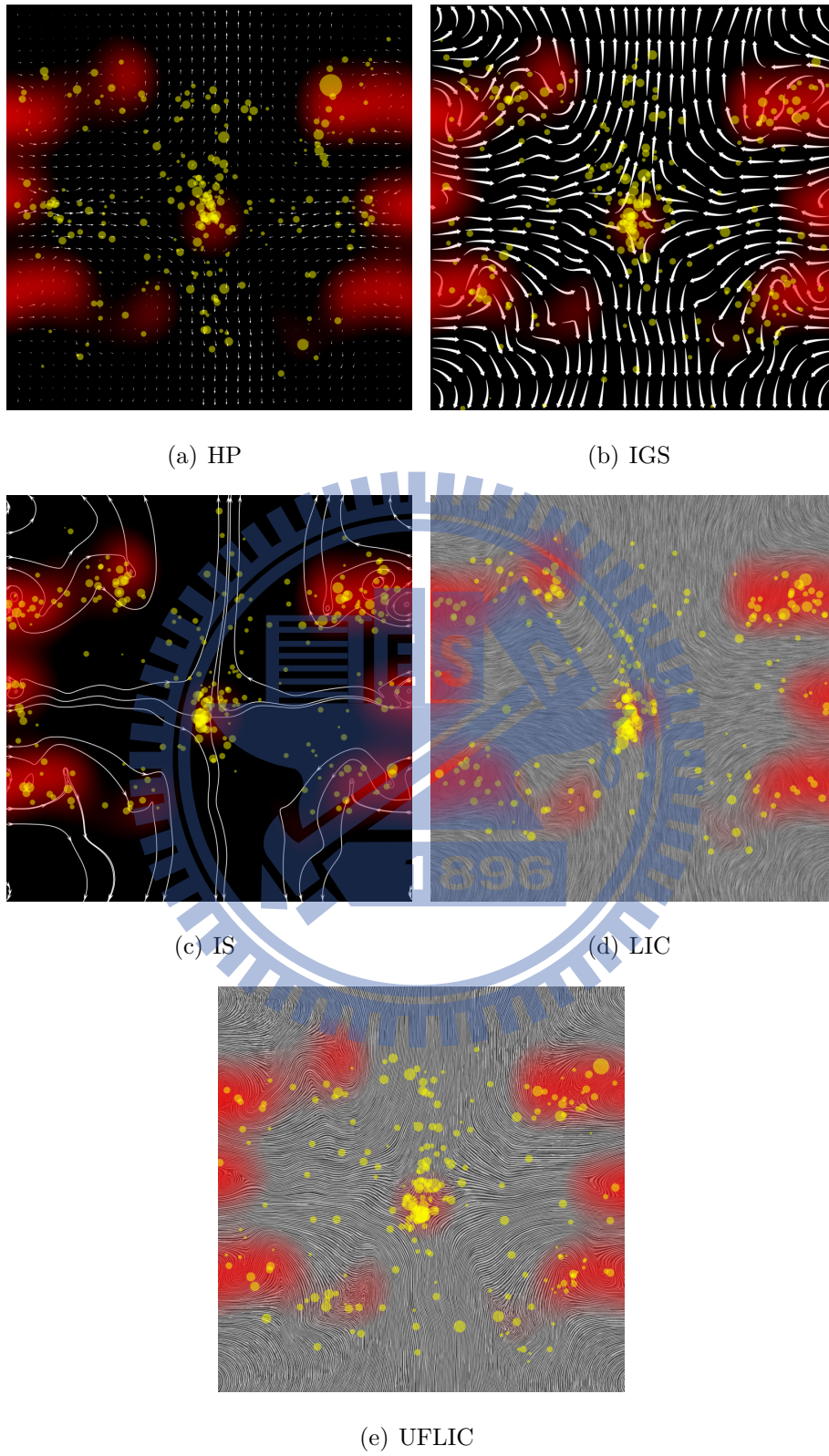


圖 A.5: 流場 05 的 5 個流場影像與流向差圖以及所有受測者凝視點分布。

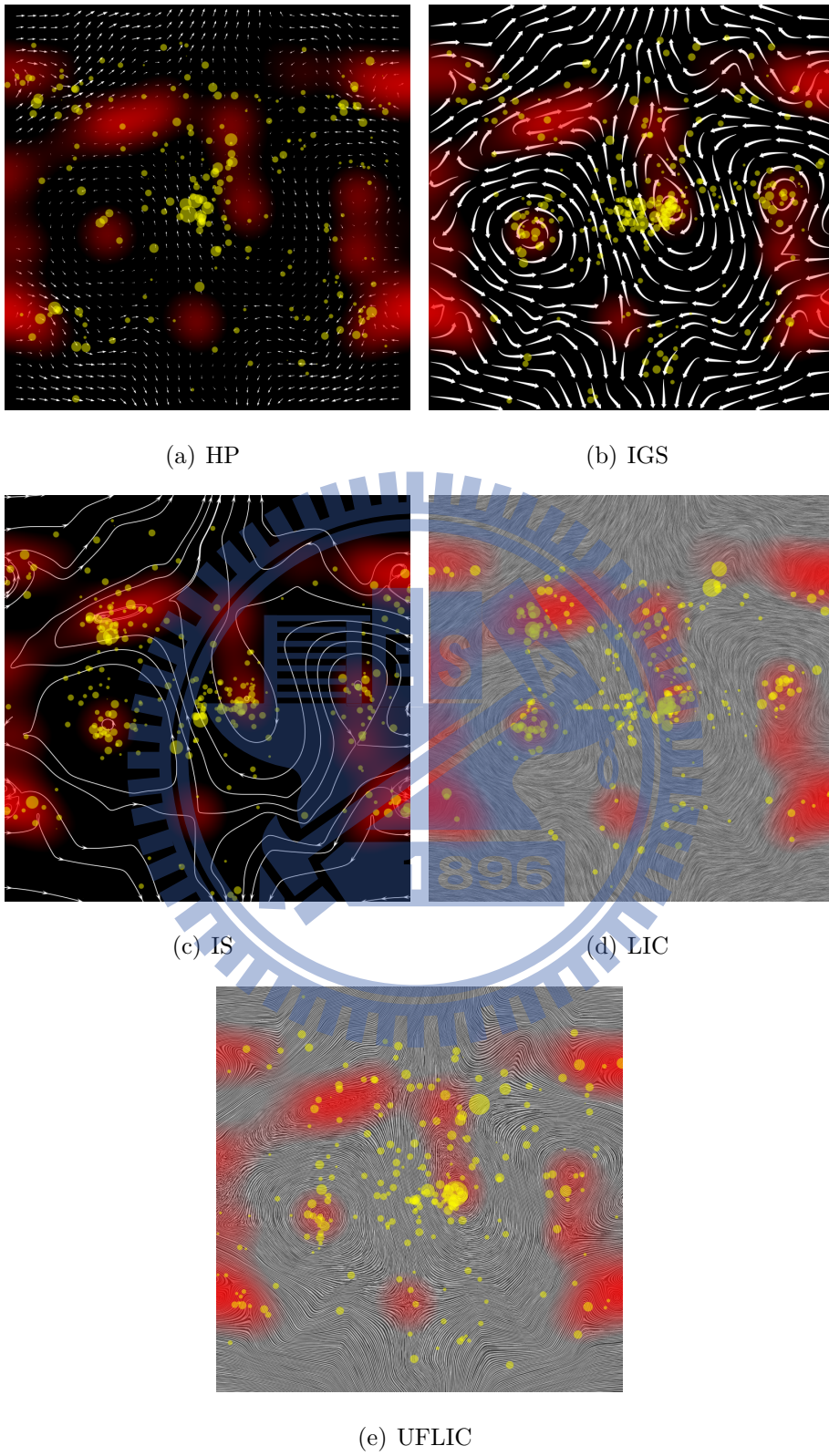


圖 A.6: 流場 06 的 5 個流場影像與流向差圖以及所有受測者凝視點分布。

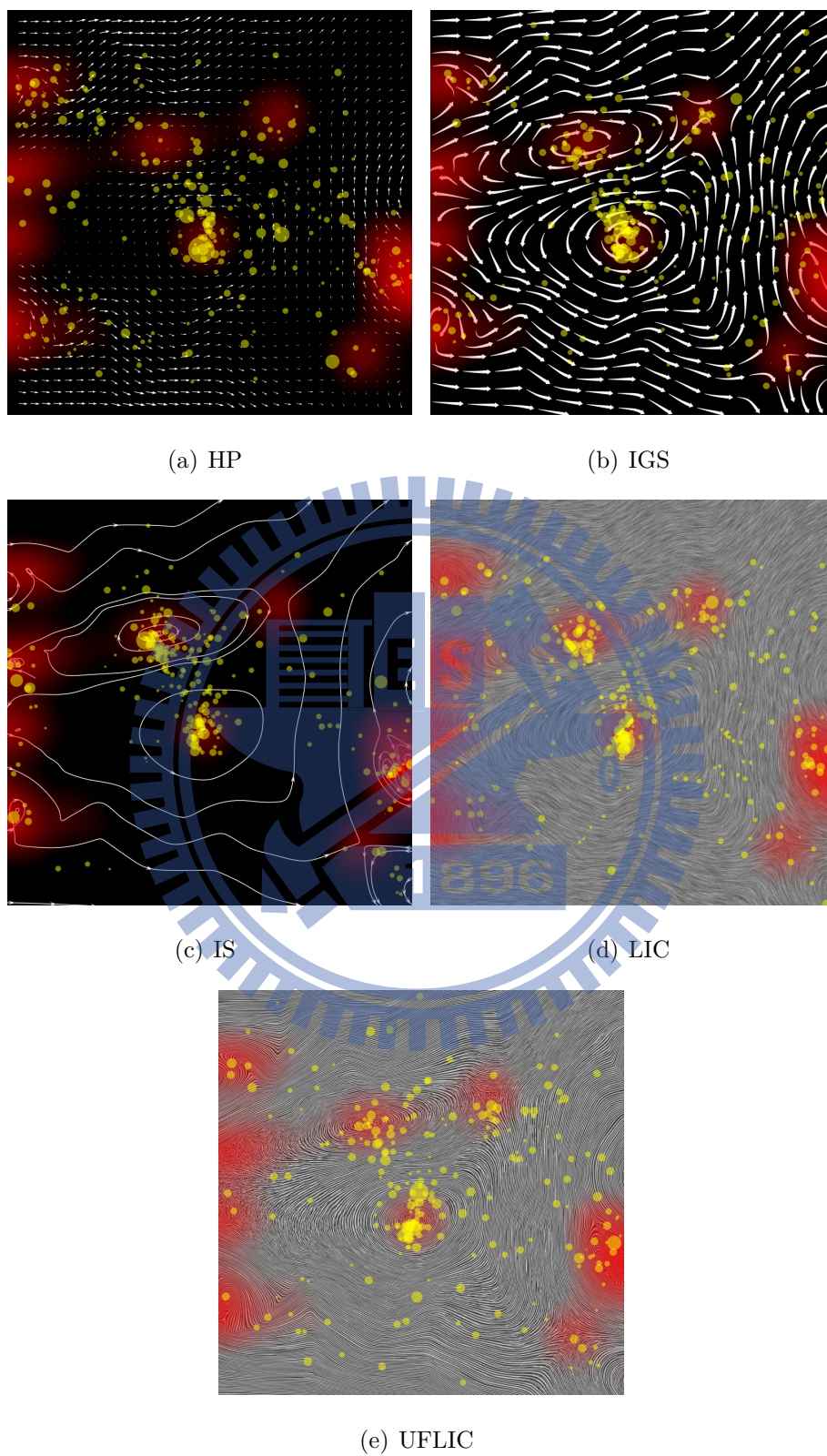


圖 A.7: 流場 07 的 5 個流場影像與流向差圖以及所有受測者凝視點分布。



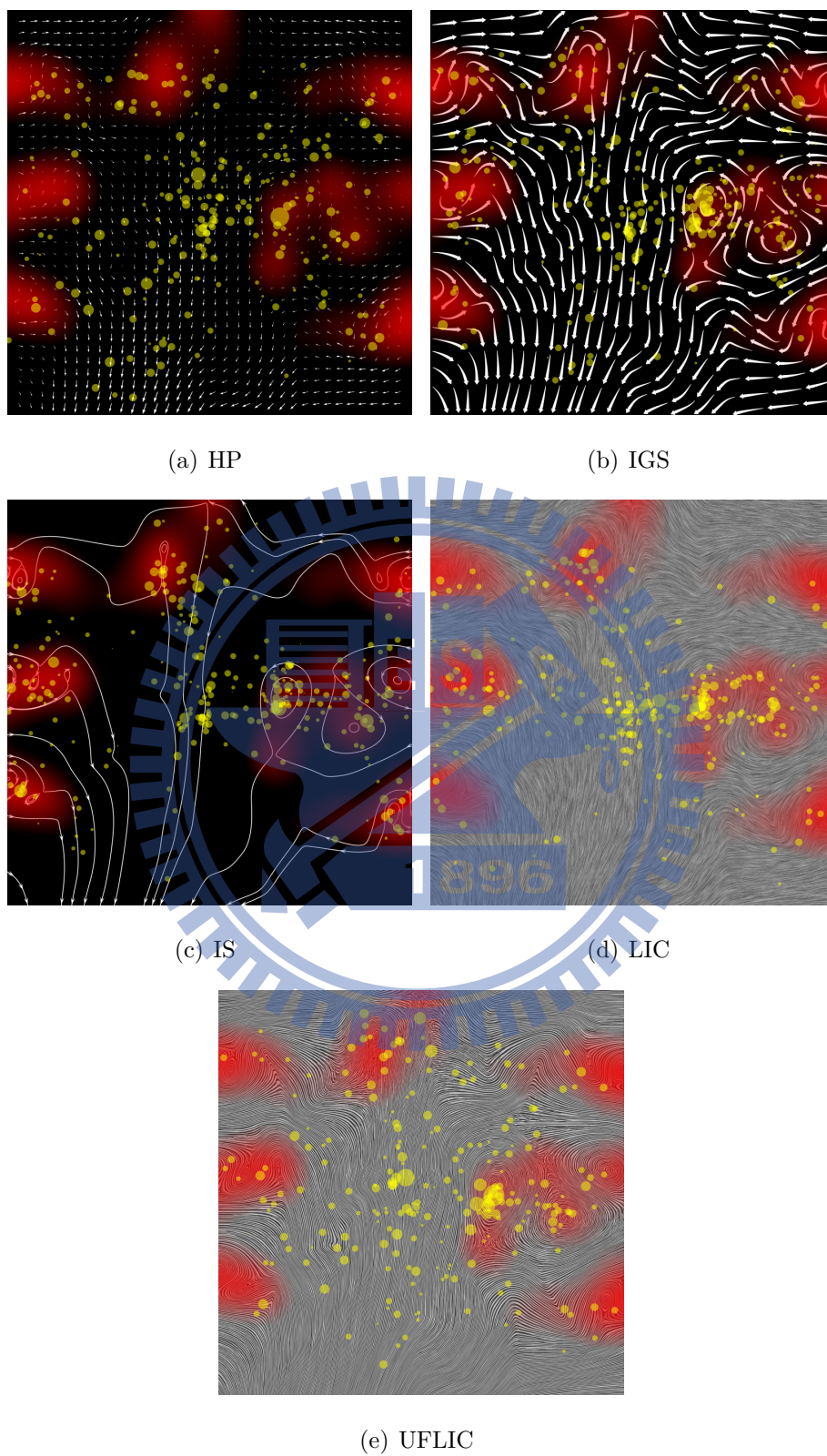


圖 A.8: 流場 08 的 5 個流場影像與流向差圖以及所有受測者凝視點分布。

---

## 參考文獻

---

- [1] D. Laidlaw, R. Kirby, C. Jackson, J. Davidson, T. Miller, M. da Silva, W. Warren, and M. Tarr, “Comparing 2D vector field visualization methods: a user study,” *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, vol. 11, no. 1, pp. 59–70, 2005.
- [2] C. Ware, “3D contour perception for flow visualization,” in *APGV '06 Proceedings of the 3rd Symposium on Applied Perception in Graphics and Visualization*, pp. 101–106, 2006.
- [3] A. Forsberg, J. Chen, and D. Laidlaw, “Comparing 3D vector field visualization methods: A user study,” *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, vol. 15, no. 6, pp. 1219–1226, 2009.
- [4] J. P. Martin, J. E. Swan II, R. J. Moorhead II, Z. Liu, and S. Cai, “Results of a user study on 2D hurricane visualization,” *Computer Graphics Forum*, vol. 27, no. 3, pp. 991–998, 2008.
- [5] G. Convertino, J. Chen, B. Yost, Y.-S. Ryu, and C. North, “Exploring context switching and cognition in dual-view coordinated visualizations,” in *Proceedings of the conference on coordinated and multiple views in exploratory visualization*, pp. 57–66, 2003.
- [6] M. Burch, F. Bott, F. Beck, and S. Diehl, “Cartesian vs. radial - a compar-

- tive evaluation of two visualization tools,” in *Proceedings of 4th International Symposium on Visual Computing*, pp. 151–160, 2008.
- [7] J. H. Goldberg and J. I. Helfman, “Comparing information graphics: A critical look at eye tracking,” in *Proceedings of BELIV’10*, pp. 71–78, 2010.
- [8] M. Pohl, M. Schmitt, and S. Diehl, “Comparing readability of graph layouts using eyetracking and task-oriented analysis,” in *Proceedings of Computational Aesthetics*, pp. 49–56, 2009.
- [9] A. L. Yarbus, *Eye movements and vision*. Plenum Press, 1 ed., 1967.
- [10] B. Cabral and L. C. Leedom, “Imaging vector fields using line integral convolution,” in *Proceedings of ACM SIGGRAPH ’93*, pp. 263–270, 1993.
- [11] D. H. Laidlaw, J. S. Davidson, T. S. Miller, M. da Silva, R. M. Kirby, W. H. Warren, and M. Tarr, “Quantitative comparative evaluation of 2D vector field visualization methods,” in *Proceedings of the conference on Visualization ’01*, pp. 143–150, 2001.
- [12] Z. Liu, S. Cai, J. Swan, R. Moorhead, J. Martin, and T. Jankun-Kelly, “A 2D flow visualization user study using explicit flow synthesis and implicit task design,” *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, vol. 18, no. 5, pp. 783–796, 2011.
- [13] D. Acevedo., C. D. Jackson, F. Drury, and D. H. Laidlaw, “Using visual design experts in critique-based evaluation of 2D vector visualization methods,” *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, vol. 14, pp. 877–884, 2008.
- [14] H. Jänicke and M. Chen, “A salience-based quality metric for visualization,” *Computer Graphics Forum*, vol. 29, no. 3, pp. 1183–1192, 2010.

- [15] H. Jänicke, T. Weidner, D. Chung, R. S. Laramee, P. Townsend, and M. Chen, “Visual reconstructability as a quality metric for flow visualization,” *Computer Graphics Forum*, vol. 30, no. 3, pp. 781–790, 2011.
- [16] H. Jarodzka, K. Holmqvist, and M. Nyström, “A vector-based, multidimensional scanpath similarity measure,” in *Proceedings of the 2010 Symposium on Eye-Tracking Research & Applications*, pp. 211–218, 2010.
- [17] W. de Leeuw and R. van Liere, “Comparing LIC and spot noise,” in *Proceedings of Visualization 98*, 1998.
- [18] J. J. van Wijk, “Spot noise-texture synthesis for data visualization,” in *Proceedings of ACM SIGGRAPH '91*, pp. 309–318, 1991.
- [19] R. Kosara, C. G. Healey, V. Interrante, D. H. Laidlaw, and C. Ware, “User studies: Why, how, and when?,” *IEEE Computer Graphics and Applications*, vol. 23, no. 4, pp. 20–25, 2003.
- [20] N. Andryscio, “A user study contrasting 2D unsteady vector field visualization techniques,” Master’s thesis, The Ohio State University, 2005.
- [21] L. Itti, C. Koch, and E. Niebur, “A model of saliency-based visual attention for rapid scene analysis,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 20, no. 11, pp. 1254–1259, 1998.
- [22] X. Mao, D. Watanabe, M. Fujita, and A. Imamiya, “Gaze-directed flow visualization,” in *Proceedings of SPIE 2004*, 2004.
- [23] A. Pobitzer, R. Peikert, R. Fuchs, B. Schindler, A. Kuhn, H. Theisel, K. Matković, and H. Hauser, “On the way towards topology-based visualization of unsteady flow—the state of the art,” in *Eurographics 2010 - State of the Art Reports*, 2010.



- [24] A. Pobitzer, R. Peikert, R. Fuchs, B. Schindler, A. Kuhn, H. Theisel, K. Matković, and H. Hauser, “The state of the art in topology-based visualization of unsteady flow,” *Computer Graphics Forum*, vol. 30, pp. 1789–1811, 2011.
- [25] F. H. Post, B. Vrolijk, H. Hauser, R. S. Laramee, and H. Doleisch, “The state of the art in flow visualisation: Feature extraction and tracking,” *Computer Graphics Forum*, vol. 22, no. 4, pp. 775–792, 2003.
- [26] R. S. Laramee, H. Hauser, H. Doleisch, B. Vrolijk, F. H. Post, and D. Weiskopf, “The state of the art in flow visualization: Dense and texture-based techniques,” *Computer Graphics Forum*, vol. 23, no. 2, pp. 203–221, 2004.
- [27] G. Turk and D. Banks, “Image-guided streamline placement,” in *Proceedings of ACM SIGGRAPH '96*, 1996.
- [28] L. Li, H.-H. Hsieh, and H.-W. Shen, “Illustrative streamline placement and visualization,” in *Proc. IEEE Pacific Visualization Symposium 2008*, pp. 79–86, 2008.
- [29] V. Verma, D. Kao, and A. Pang, “Plic: Bridging the gap between streamlines and lic,” in *Proceedings IEEE Visualization '99*, pp. 341–348, 1999.
- [30] H.-W. Shen, “A new line integral convolution algorithm for visualizing time-varying flow fields,” *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, vol. 4, no. 2, pp. 98–108, 1998.
- [31] J. J. van Wijk, “Image based flow visualization,” *Proceedings of ACM SIGGRAPH '2002*, vol. 21, no. 3, pp. 745–754, 2002.
- [32] B. Jobard, G. Erlebacher, and M. Y. Hussaini, “Lagrangian-eulerian advection for unsteady flow visualization,” in *Proceedings of the conference on Visualization '01*, pp. 53–60, 2001.

- [33] R. J. K. Jacob and K. S. Karn, “Eye tracking in Human-Computer interaction and usability research: Ready to deliver the promises,” in *The Mind’s Eye: Cognitive and Applied Aspects of Eye Movement Research* (R. Radach, J. Hyona, and H. Deubel, eds.), pp. 573–603, Elsevier Science, 2003.
- [34] E. Zhang, K. Mischaikow, and G. Turk, “Vector field design on surfaces,” *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, vol. 25, no. 4, pp. 1294–1326, 2006.
- [35] J. Li and Y. Renardy, “Numerical study of flows of two immiscible liquids at low reynolds number,” *SIAM Review*, vol. 42, no. 3, pp. 417–439, 2000.
- [36] G. Keller and B. Warrack, *Statistics for Management And Economics*. Academic Internet Publishers I, 2006.
- [37] D. C. Montgomery, *Design and Analysis of Experiments*. Wiley, 8 ed., 2012.
- [38] R. J. Peters, A. Iyer, L. Itti, and C. Koch, “Components of bottom-up gaze allocation in natural images,” *Vision Research*, vol. 45, no. 18, pp. 2394–2416, 2005.
- [39] E. W. Dijkstra, “A note on two problems in connexion with graphs,” *Numerische mathematik*, vol. 1, no. 1, pp. 269–271, 1959.
- [40] A. Santella and D. DeCarlo, “Visual interest and npr an evaluation and manifesto,” in *Proceedings of the 3rd international symposium on Non-photorealistic animation and rendering*, 2004.